



Научная статья

УДК 532.517.2:539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187445>

EDN: <https://www.elibrary.ru/CGJXAK>

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СДАВЛИВАЕМОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМИ СООСНЫМИ ОБОЛОЧКАМИ

С.А. Григорьев¹✉, Д.В. Кондратов^{1,2,3}

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,

²Институт проблем точной механики и управления — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Федерального исследовательского центра

«Саратовский научный центр Российской академии наук»,

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского,
г. Саратов, Россия

✉ sagrigorev0703@yandex.ru

Цитирование: Григорьев С.А., Кондратов Д.В. Постановка задачи динамики взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругими соосными оболочками // Труды МАИ. 2026. № 146. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187445>

Аннотация. В статье представлено построение математической модели механической системы, состоящей из двух упругих соосных оболочек со слоем вязкой сжимаемой жидкости между ними. Оболочки жестко защемлены на торцах, вращение оболочек и перемещение вдоль их оси симметрии отсутствуют. Толщина слоя жидкости значительно меньше, чем внешний радиус внутренней оболочки. Используется модель вязкой сжимаемой баротропной жидкости. Вязкость учитывается, поскольку она обеспечивает демпфирующие свойства, которые предотвращают чрезмерно большие прогибы во время резонанса.

Сжимаемость учитывается, поскольку в системах с переменным давлением баротропная жидкость может сильно влиять на поведение системы. На систему воздействует внешний источник вибрации и гармоническое по времени давление на торцах. Система считается термостабилизированной. Математическая модель механической системы, рассматриваемая в данной работе, представляет собой систему связанных уравнений. Для описания динамики жидкости используются нелинейные уравнения Навье-Стокса в частных производных и уравнение неразрывности. В качестве граничных условий используются условия согласования давления и расхода жидкости при переходе от цилиндрической целевой камеры к торцевой. Для описания динамики внутренней и внешней цилиндрических оболочек используются уравнения в частных производных, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява. В качестве граничных условий используются уравнения перемещения оболочки на торцах и вдоль оси Oy .

Ключевые слова: вязкая сжимаемая жидкость, упругие соосные оболочки, уравнение Навье-Стокса, уравнение неразрывности

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке в рамках темы государственного задания Министерства образования и науки РФ №125020501400-6.

FORMULATION OF THE PROBLEM OF DYNAMICS OF INTERACTION OF A COMPRESSED LAYER OF A VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID WITH ELASTIC COAXIAL SHELLS

S.A. Grigorev¹ ✉, D.V. Kondratov^{1,2,3}

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,

²Institute of Precision Mechanics and Control – Subdivision of the Federal State Budgetary

³Research Institution Saratov Federal Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky,

Saratov, Russia

✉ sagrigorev0703@yandex.ru

Citation: Grigorev S.A., Kondratov D.V. Formulation of the problem of dynamics of interaction of a compressed layer of a viscous compressible fluid with elastic coaxial shells // Trudy MAI. 2026. No. 146. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187445>

Abstract. The article presents the development of a mathematical model for a mechanical system consisting of two elastic coaxial shells with a layer of viscous compressible fluid in between. The shells are rigidly fixed at the ends, with no rotation or movement along their axis of symmetry. The thickness of the fluid layer is significantly smaller than the outer radius of the inner shell. A model of a viscous compressible barotropic fluid is used. Viscosity is taken into account because it provides damping properties, which prevent excessively large deflections during resonance. Compressibility must be taken into account, since in systems with varying pressure, as a barotropic fluid can affect the behavior of the system. The system is affected by an external vibration source and time-harmonic pressure at the ends. The system is considered thermally stable. The mathematical model of the mechanical system considered in this work is a system of coupled equations. To describe the dynamics of a fluid, we use the nonlinear partial differential Navier-Stokes equations and the continuity equation. The conditions for matching pressure and flow rate of liquid during the transition from cylindrical slit to end chambers are used as boundary conditions. To describe the dynamics of inner and outer cylindrical shells, we write partial differential equations based on Kirchhoff-Love hypotheses. Equations of shell displacement at ends and along Oy axis are used as boundary conditions. Further study of this mathematical model will allow us to better understand the processes occurring in such systems and develop more efficient methods for their analysis. These methods can be applied in various fields of science and technology, such as mechanical engineering, aviation and space industries.

Keywords: viscous compressible fluid, elastic coaxial shells, Navier-Stokes equation, continuity equation

Funding: the work was carried out with financial support within the framework of the state assignment topic of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation No. 125020501400-6.

Введение

В современном мире, где технологии развиваются с невероятной скоростью, изучение динамики взаимодействия различных сред становится всё более актуальным. Одной из таких задач является исследование динамики взаимодействия вязкой сжимаемой жидкости с упругими соосными оболочками.

Известно, что сжимаемость жидкостей, является весьма малой величиной, позволяющей полностью отказаться от её учета. Однако, жидкость с наполнителями или газированные жидкости имеют достаточно большую сжимаемость [1]. Поэтому данная проблема имеет важное значение для различных областей науки и техники, таких как машиностроение, авиационная и космическая промышленность. Результаты исследования могут быть использованы при проектировании и оптимизации различных устройств и систем в состав, которых входят соосные оболочки со слоем жидкости между ними.

Изучению динамики систем состоящих из тонкостенных элементов и жидкости посвящено много работ. Этими работами занимались Блинков Ю.А., Блинкова О.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова Е.В., Евдокимова Е.В., Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н. и другие. В [2] на основе выведенных уравнений продольно-радиальных колебаний цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость, решена задача о гармонических колебаниях оболочки. В [3] рассматриваются особенности системы из цилиндрических оболочек и вязкой и невязкой жидкости. Задачи взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости с двумя упругими оболочками рассматривались в работах [4], [5], [6], [7]. В [4] представлено численное моделирование волновых процессов в упругих соосных оболочках с вязкой несжимаемой жидкостью между ними. В [5] рассматриваются вопросы формулировки и решения задачи гидроупругости для системы из двух соосных оболочек с кольцевой прослойкой вязкой несжимаемой жидкости между ними. В [6] изучается задача динамики вязкой несжимаемой жидкости внутри упругих соосных цилиндрических оболочек. Исследование модели волновых процессов в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках с вязкой несжимаемой жидкостью между ними представлено в [7]. Построение и анализ системы, состоящей из двух соосных

оболочек, содержащих вязкую несжимаемую жидкость в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке, проводились в [8] и [9]. В [10] исследуется динамика электроупругих оболочек, пространство между которыми заполнено невязкой сжимаемой жидкостью. Численное изучение математической модели системы из двух упругих соосных оболочек, содержащих вязкую сжимаемую жидкость между ними, для описания динамики которой используется линеаризованное уравнение Навье-Стокса, проводилось в [11] и [12]. В [11] анализируется влияние уровня жидкости, в пространстве между оболочками, на колебания системы. В [12] проведено обобщение результатов исследований взаимодействия тонкостенных конструкций и вязкой сжимаемой жидкости. Кроме этого в [13] и [14] рассматривались системы, состоящие из упругих пластин и вязкой жидкости. В работе [13] выполнено математическое моделирование системы из двух пластин взаимодействующих через слой вязкой сжимаемой жидкости. В [14] представлена задача гидроупругости для геометрически нелинейных пластин, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью.

Задачи взаимодействия вязкой сжимаемой жидкости и упругих соосных оболочек остаются малоизученными. Учет сжимаемости жидкости приблизит условия задачи к реальным и увеличит точность решений, что позволит повысить эффективность и надёжность работы устройств и систем, а также расширить возможности их применения в различных областях.

В данной статье рассматривается задача динамики взаимодействия сжимаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругими соосными оболочками. Для постановки этой задачи рассмотрены уравнения, описывающие поведение системы, и их граничные условия.

Результаты исследования могут найти применение в следующих сферах: проектирование и оптимизация устройств и систем, работающих со сжимаемыми жидкостями и упругими элементами, разработка новых материалов и технологий, основанных на взаимодействии вязкой сжимаемой жидкости и упругих оболочек, анализ и прогнозирование поведения систем в различных условиях эксплуатации.

Постановка задачи

Физическая модель

Рассматриваемая физическая система состоит из двух соосных упругих замкнутых оболочек, жестко закрепленных на торцах, и вязкой сжимаемой жидкости, находящейся между оболочками (рисунок 1). Отсутствуют любые перемещения оболочек на торцах, а также продольное перемещение на всей длине оболочек. На систему воздействует внешний источник вибрации и, гармонические по времени, перепады давления.

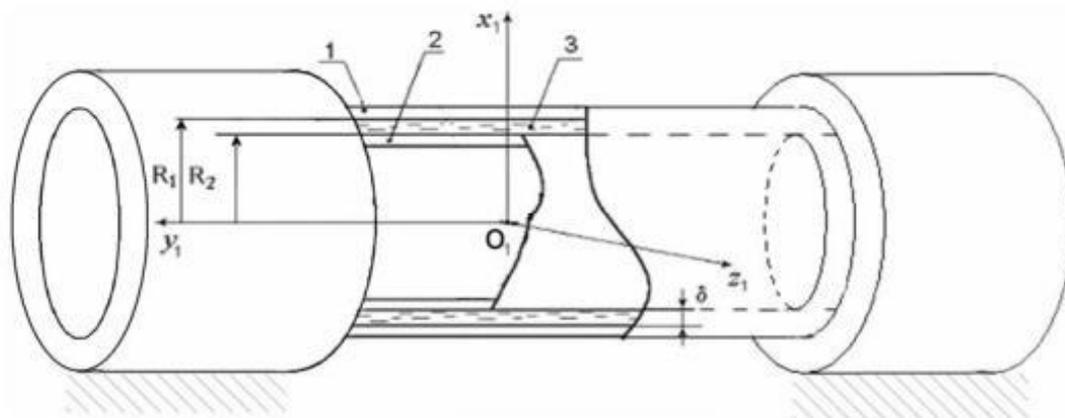


Рисунок 1 - Модель механической системы

Внешняя оболочка (обозначена индексом 1) – упругая замкнутая цилиндр с внутренним радиусом R_1 и жестким защемлением по торцам. Внутренняя оболочка (обозначена индексом 2) с внешним радиусом R_2 – тоже упругий замкнутый цилиндр, жестко защемленный по торцам. Зазор между стенками оболочек 1 и 2 полностью заполнен жидкостью 3. Наружная поверхность внешней оболочки и поверхность внутренней оболочки образуют цилиндр в цилиндре длиной l_2 . Радиальный зазор цилиндрической щели значительно меньше внешнего радиуса внутренней оболочки $\delta = R_1 - R_2 \ll R_2$. На систему действуют периодически меняющееся по времени на торцах давление жидкости и переносная сила инерции. Перемещение внутренней оболочки относительно внешней на защемленных торцах отсутствует, оболочки все время остаются соосными. Механическая система считается термостабилизированной.

При исследовании динамики указанной механической системы для демпфирующего слоя жидкости, окружающей внутреннюю оболочку используется модель вязкой сжимаемой жидкости. Вязкость учитывается потому, что именно она обеспечивает демпфирующие свойства, предотвращающие чрезмерно большие прогибы при резонансе. Учет сжимаемости необходим, так как в системах с переменным давлением баротропная жидкость может оказывать влияние на поведение системы [1].

Таким образом, физическая модель исследуемой механической системы представляет собой две упругие замкнутые цилиндрические оболочки, которые взаимодействуют друг с другом через слой жидкости под воздействием вибрации и перепада давления.

Математическая модель

Для удобства построения математической модели введем цилиндрическую систему координат $Or\theta$ с ортами $\vec{n}_r, \vec{n}_\theta, \vec{n}_y$ (рисунок 2). Центром системы координат $Or\theta$ будем считать геометрический центр оболочек в невозмущенном состоянии. При перемещении оболочек их торцы остаются неподвижными, продольное перемещение вдоль оси Oy отсутствует.

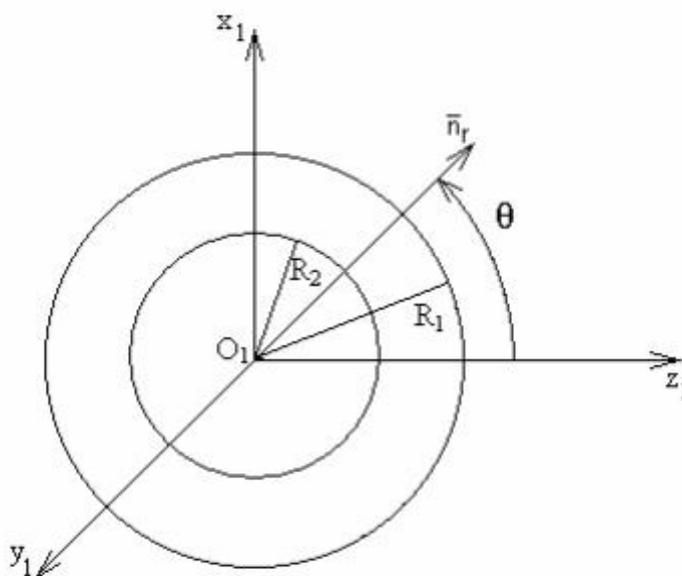


Рисунок 2 - Цилиндрическая и декартова системы координат

Математическая модель рассматриваемой механической системы представляет собой связанную систему уравнений, включающую нелинейные уравнения в частных производных Навье-Стокса и уравнение неразрывности, уравнения в частных производных для описания динамики внутренней и внешней упругих цилиндрических оболочек, полученные исходя из гипотез Кирхгофа-Лява, и соответствующие граничные условия.

Рассмотрим движение жидкости, находящейся между упругими замкнутыми цилиндрическими оболочками. В левой части уравнения Навье-Стокса находится абсолютное ускорение единицы жидкости представленное суммой переносного ускорения основания (ускорение оболочек в результате вибрации), производной скорости жидкости по времени и производной скорости жидкости по направлению вектора скорости, в правой части находится сумма произведения градиента давления на удельный объем, произведения кинематической вязкости жидкости на дивергенцию градиента вектора скорости жидкости и произведения суммы динамической и кинематической вязкостей жидкости на градиент дивергенции вектора скорости жидкости.

Уравнения Навье – Стокса и уравнение неразрывности [15-20] для вязкой сжимаемой жидкости с учетом переносного движения основания в выбранной системе координат r, θ, y , жестко связанной с центром координат, примут вид:

Скалярная форма уравнения Навье-Стокса:

$$\begin{aligned}
 & W_{1z1} \cos \theta + W_{1x1} \sin \theta + \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial V_r}{\partial y} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \right. \\
 & \left. \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial y^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right) + \left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{1}{3} \nu \right) \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right); \\
 & -W_{1z1} \sin \theta + W_{1x1} \cos \theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial V_\theta}{\partial y} + \frac{V_r V_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\
 & \nu \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial y^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) + \left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{1}{3} \nu \right) \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right); \quad (1) \\
 & \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_y}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\eta}{\rho} + \right. \\
 & \left. \frac{1}{3} \nu \right) \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right).
 \end{aligned}$$

где:

$W_{1z1} \cos \theta + W_{1x1} \sin \theta$, $-W_{1z1} \sin \theta + W_{1x1} \cos \theta$ – переносное ускорение основания для осей Or и $O\theta$, компонента для Oy равна нулю, так как перемещение вдоль этой оси отсутствует;

$\frac{\partial V_r}{\partial t}, \frac{\partial V_\theta}{\partial t}, \frac{\partial V_y}{\partial t}$ – производные скорости в направлениях $\bar{n}_r, \bar{n}_\theta, \bar{n}_y$ по времени;

$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial V_r}{\partial y} - \frac{V_\theta^2}{r}$ – производная скорости в направлении \bar{n}_r по направлению \bar{V} ;

$V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial V_\theta}{\partial y} + \frac{V_r V_\theta}{r}$ – производная скорости в направлении \bar{n}_θ по направлению \bar{V} ;

$V_r \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_y}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}$ – производная скорости в направлении \bar{n}_y по направлению \bar{V} ;

\bar{V} – вектор скорости жидкости;

ρ – плотность жидкости;

$\frac{1}{\rho}$ – удельный объем. Объем занимаемый единицей массы;

p – давление жидкости;

$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ – произведение градиента давления на удельный объем

со знаком минус – векторное поле, которое представляет ускорение частиц жидкости под воздействием градиента давления. Каждая единица жидкости стремится в точку с наименьшим давлением.

ν – кинематическая вязкость жидкости. $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ – Кинематическая вязкость жидкости равна отношению динамической вязкости жидкости к плотности жидкости;

Скалярная форма уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Уравнение неразрывности говорит о том, что источники либо стоки отсутствуют, поток жидкости, входящий в объем пространства, равен исходящему потоку.

Граничные условия для системы дифференциальных уравнений, включающей уравнения (1) и (2), на непроницаемых поверхностях внутренней и внешней оболочек в цилиндрической щели сформулируем следующим образом:

$$V_r = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t}, V_\theta = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}, V_y = -\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} \text{ при } r = r^{(i)}, i = 1, 2 \quad (3)$$

где

$r^{(1)} = R_2 + \delta + u_3^{(1)}$ – расстояние от центра системы координат до внутренней поверхности внешней оболочки;

$r^{(2)} = R_2 + u_3^{(2)}$ – расстояние от центра системы координат до внешней поверхности внутренней оболочки;

V_r, V_θ, V_y – скорость жидкости относительно камеры по осям r, θ, y .

Кроме того, запишем условия согласования давления и расхода жидкости при переходе от цилиндрической щели в торцевые камеры:

$$p = p_T^- \text{ при } y = -l_2/2, \quad (4)$$

$$p = p_T^+ \text{ при } y = l_2/2,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_2+u_3^{(2)}}^{R_2+\delta+u_3^{(1)}} V_y \Big|_{y=l_2/2} r dr d\theta = Q_V^+$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_2+u_3^{(2)}}^{R_2+\delta+u_3^{(1)}} V_y \Big|_{y=-l_2/2} r dr d\theta = Q_V^-$$

где p_T^-, p_T^+ – давление жидкости на торцах, Q_V^-, Q_V^+ – объемный расход жидкости в торцевых камерах.

То есть, давление жидкости на торцах оболочек равно, поток жидкости, проходящий через поперечные сечения оболочек на торцах также равен.

Кроме того, необходимы условия периодичности параметров течения по θ с периодом 2π (условия замкнутости потока жидкости).

Скалярные уравнения динамики внешней и внутренней упругих замкнутых цилиндрических оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява [21-24], с

учёт переносного движения относительно инерциального пространства, запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \frac{1+\mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y \partial \theta} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = \frac{1-(\mu_0^{(i)})^2}{E^{(1,2)} h_0^{(i)}} \left[\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{Os}^{(i)} \right], \quad (5) \\
& - \frac{1+\mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y \partial \theta} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial \theta^2} + \left(a_0^{(i)} \right)^2 \left[2 \left(1 - \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y^2} + \right. \\
& \left. \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} - \left(a_0^{(i)} \right)^2 \left[\left(2 - \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial^3 u_3^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 u_3^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] = \frac{1-(\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{O\theta}^{(i)} \right], \\
& - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} - \left(a_0^{(i)} \right)^2 \left[\left(2 - \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] + \frac{u_3^{(i)}}{R^{(i)}} + \\
& \left(a_0^{(i)} \right)^2 \left[\left(R^{(i)} \right)^2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial \theta^4} \right] = \frac{1-(\mu_0^{(i)})^2}{E^{(1,2)} h_0^{(i)}} \left[-\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{On}^{(i)} + (-1)^i q_n^{(i)} \right], \quad i = \\
& 1, 2.
\end{aligned}$$

где верхний индекс 1 относится к внешней оболочке, а индекс 2 к внутренней оболочке;

$W_{Os}^{(i)}$, $W_{O\theta}^{(i)}$, $W_{On}^{(i)}$ – проекции абсолютного ускорения единицы площади срединной поверхности оболочки на оси \bar{n}_s , \bar{n}_θ , \bar{n} ;

$$W_{Os}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t^2};$$

$$W_{O\theta}^{(i)} = W_{1x1} \cos \theta - W_{1z1} \sin \theta + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t^2};$$

$$W_{On}^{(i)} = W_{1x1} \sin \theta + W_{1z1} \cos \theta + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^2};$$

$$\frac{1-(\mu_0^{(i)})^2}{E^{(1,2)} h_0^{(i)}} - \text{общая способность оболочки к деформации};$$

$\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{Os}^{(i)}$ – сила действующая на оболочку (форма второго закон Ньютона, произведение массы и ускорения);

$q_n^{(i)}$ – сила действия жидкости на оболочку. Для внешней оболочки ($i = 1$) сила действия жидкости на оболочку учитывается со знаком минус, так как жидкость воздействует на неё снизу. Для внутренней оболочки ($i = 2$) используется знак плюс.

$$q_n^{(i)} = \left[P_{rr} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{r\theta} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{ry} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) \right]_{r=r^{(i)}}, \quad i = 1, 2;$$

$$r^{(1)} = R_2 + \delta + u_3^{(1)}; r^{(2)} = R_2 + u_3^{(2)};$$

$$P_{rr} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}; P_{r\theta} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right); P_{ry} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial y} \right); \quad (6)$$

$$\cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{r^{(i)}}{|\bar{N}|^{(i)}}; \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) = -\frac{1}{|\bar{N}|^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta}; \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_j) = -\frac{r^{(i)}}{|\bar{N}|^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y};$$

$$|\bar{N}|^{(i)} = \left\{ (r^{(i)})^2 \left[1 + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} \right]^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; (a_0^{(i)})^2 = \frac{(h_0^{(i)})^2}{12(R^{(i)})^2}$$

Запишем граничные условия для перемещений оболочек:

$$u_1^{(i)} = u_2^{(i)} = u_3^{(i)} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm \frac{l_2}{2}. \quad (7)$$

Условие (7) говорит о том, что на торцах, то есть на самых краях оболочек, перемещения отсутствуют, ввиду их жесткого закрепления

$$u_1^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial y} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial y^3} = 0 \text{ при } y = 0. \quad (8)$$

Условие (8) говорит о том, что отсутствует продольное перемещение оболочек.

Кроме того, для обеих оболочек ставятся условия периодичности параметров по θ с периодом 2π .

Таким образом, получаем математическую модель механической системы, состоящей из двух соосных упругих замкнутых цилиндрических оболочек, взаимодействующих через слой вязкой сжимаемой жидкости при наличии внешней вибрации и гармонического по времени перепада давления, приложенного на торцах.

Заключение

В заключение отметим, что постановка задачи динамики взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругими соосными оболочками открывает широкие возможности для дальнейшего изучения данной математической модели. Планируется провести более детальный анализ поведения системы в условиях воздействия внешнего источника вибрации и гармонического по времени давления на торцах. Это позволит расширить понимание процессов, происходящих в подобных системах, и разработать более эффективные методы их исследования, что может найти применение в различных

областях инженерии и физики. Особое значение результаты таких исследований имеют для аэрокосмической отрасли, где такие конструкции применяются в критически важных системах. Например, в камерах сгорания и соплах жидкостных ракетных двигателей, в системах терморегулирования космических аппаратов, а также в конструкциях гиостабилизированных платформ и навигационных систем.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Сулейманов Р.Н., Султанов Б.З., Каплан Л.С. К вопросу учета сжимаемости газированных жидкостей при их перекачке высоконапорными насосами // Нефтегазовое дело. 2001. № 2. 5 с.
2. Худойназаров Х.Х., Халмурадов Р.И., Ялгашев Б.Ф. Продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки с вязкой сжимаемой жидкостью // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 139–154.
3. Марасулов А.М., Тажибаева А.К. Продольно-поперечные колебания в системе цилиндрических оболочек, заполненных или погруженных в жидкость // Молодой ученый. 2017. № 11 (145). С. 86–91.
4. Численное моделирование волновых явлений в двух геометрически и физически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость / Ю.А. Блинков, А.В. Месянжин, Л.И. Могилевич, А.В. Черненко // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. Ульяновск, УлГТУ, 2017. С. 73–85.
5. Эволюция уединенных гидроупругих волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с физической нелинейностью Шамеля / Ю.А. Блинков, Л.И. Могилевич, В.С. Попов, Е.В. Попова // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16, № 4. С. 430–444.

6. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений / Р.В. Агеев, Е.В. Евдокимова, И.А. Ковалева, Л.И. Могилевич // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках : электрон. научный журнал. 2017. № 3. 9 с. URL: <https://mathmod.esrae.ru/ru/15-50>.

7. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью с учетом инерции ее движения и окруженных упругой средой / Ю.А. Блинков, Е.В. Евдокимова, Л.И. Могилевич, Д.В. Кондратов // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках: электрон. научный журнал. 2019. № 2. 14 с. URL: <https://mathmod.esrae.ru/ru/25-94>.

8. Продольные волны в соосных упругих оболочках с учетом конструкционного демпфирования и с жидкостью внутри / Ю.А. Блинков, С.В. Иванов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов, Е.В. Попова // Труды МАИ: электрон. журнал. 2021. № 117. DOI 10.34759/trd-2021-117-04.

9. Попова Е.В. Моделирование эволюции уединенных волн деформации в двух соосных оболочках из несжимаемого материала с комбинированной нелинейностью, содержащих вязкую жидкость между ними и во внутренней оболочке // Труды МАИ: электрон. журнал. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179680>.

10. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 35–48.

11. Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н. Анализ пространственных колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11, № 4. С. 448–462.

12. Теоретическое и экспериментальное исследование тонкостенных конструкций, взаимодействующих с вязкой жидкостью / С.А. Бочкарёв, А.О.

Каменских, С.В. Лекомцев, А.Н. Сенин // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2020. № 1. С. 6–19.

13. Блинкова О.В., Кондратов Д.В. Моделирование динамики взаимодействия сдвливаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругим трехслойным статором // Труды МАИ : электрон. журнал. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178475&mobile=Y>.

14. Гягяева А.Г., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Вывод уравнения динамики геометрически нелинейной пластины, взаимодействующей с тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2021. № 121. DOI 10.34759/trd-2021-121-06.

15. Хмельник С.И. Уравнения Навье-Стокса: существование и метод поиска глобального решения. Israel, Mathematics in Computer Corp., 2018. 128 с.

16. Павловский В.А., Никущенко Д.В. Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы. СПб : Лань, 2024. 368 с.

17. Danchin R., Mucha P.V. Compressible Navier – Stokes equations with ripped density // Communications on Pure and Applied Mathematics. 2023. Vol. 76, no. 3. P. 3437–3492.

18. Kuo K.K., Acharya R. Applications of turbulent and multiphase combustion. Hoboken : Wiley, 2012. 600 p.

19. Хатунцева О.Н. Учет производства энтропии в системе уравнений Навье – Стокса при описании турбулентного течения вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости // Труды МАИ : электрон. журнал. 2023. № 131. DOI 10.34759/trd-2023-131-10.

20. Кадыров С.Г., Певзнер В.В. Первая основная задача динамики линейной вязкой сжимаемой жидкости // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 1/1 (43). С. 210–214.

21. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика сплошных сред. М. : Физфак МГУ, 1998. 91 с.

22. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М. : Физматлит, 2001. 321 с.

23. Моделирование волн деформации в стенках соосных кольцевого и кругового каналов с вязкой жидкостью, материал которых несжимаем и имеет дробную физическую нелинейность / Т.В. Быкова, Л.И. Могилевич, Е.В. Евдокимова, Е.В. Попова, М.В. Попова // Труды МАИ : электрон. журнал. 2023. № 129. DOI 10.34759/trd-2023-129-05.

24. Ильгамов М.А. Изгибные колебания пластины при изменении среднего давления на ее поверхностях // Акустический журнал. 2018. Т. 64, № 5. С. 598–604.

References

1. Suleimanov R.N., Sultanov B.Z., Kaplan L.S. *Neftegazovoe delo*, 2001, no. 2. 5p.
2. Khudoinazarov Kh.Kh., Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2021, no. 69, pp. 139–154.
3. Marasulov A. M., Tazhibaeva A. K. *Molodoi uchenyi*, 2017, no. 11 (145), pp. 86–91.
4. Blinkov Yu.A., Mesyanzhin A.V., Mogilevich L.I., Chernenko A.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], collection of scientific papers, Ulyanovsk, UlSTU, 2017, pp. 73–85
5. Blinkov Yu.A., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova E.V. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2023, vol. 16, no. 4, pp. 430–444.
6. Ageev R.V., Evdokimova E.V., Kovaleva I.A., Mogilevich L.I. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh: elektron. nauchnyi zhurnal*, 2017, no. 3, 9 p. Available at: <https://mathmod.esrae.ru/ru/15-50>.
7. Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Kondratov D.V. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh: elektron. nauchnyi zhurnal*, 2019, no. 2. Available at: <https://mathmod.esrae.ru/ru/25-94>.
8. Blinkov Yu.A., Ivanov S.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova E.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn*, 2021, no. 117. DOI 10.34759/trd-2021-117-04.
9. Popova E.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn*, 2024, no. 135. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179680>.
10. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2019, no. 2, pp. 35–48.

11. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 448–462.
12. Bochkarev S.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V., Senin A.N. *Vestnik Permskogo federal'nogo issledovatel'skogo tsentra*, 2020, no. 1, pp. 6–19.
13. Blinkova O.V., Kondratov D.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn*, 2024, no. 134. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178475&mobile=Y>.
14. Gyagyaeva A.G., Kondratov D.V., Mogilevich L.I. *Trudy MAI: elektron. zhurn*, 2021, no. 121. DOI 10.34759/trd-2021-121-06.
15. Khmel'nik S.I. *Uravneniya Nav'e-Stoksa Sushchestvovanie i metod poiska global'nogo resheniya* [The Navier – Stokes equations. The existence and method of finding of a global solution], Israel, Mathematics in Computer Corp, 2018, 128 p.
16. Pavlovskii V.A., Nikushchenko D.V. *Vychislitel'naya gidrodinamika. Teoreticheskie osnovy* [Computational fluid dynamics. Theoretical foundations], Saint Petersburg, Lan', 2024, 368 p.
17. Danchin R., Mucha P.B. Compressible Navier-Stokes equations with ripped density. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2023, vol. 76, no. 11, pp. 3437–3492.
18. Kuo K.K., Acharya R. *Applications of Turbulent and Multiphase Combustion*, Hoboken, Wiley, 2012, 600 p.
19. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI: elektron. zhurn*, 2023, no. 131. DOI 10.34759/trd-2023-131-10.
20. Kadyrov S.G., Pevzner V.V. *Morskie intellektual'nye tekhnologii*, 2019, no. 1/1 (43), pp. 210–214.
21. Aleshkevich V.A., Dedenko L.G., Karavaev V.A. *Mekhanika sploshnykh sred* [Continuum mechanics], Moscow, Fizicheskii fakul'tet MGU, 1998, 91 p.
22. Vesnitskii A.I. *Volny v sistemakh s dvizhushchimysya granitsami i nagruzkami* [Waves in systems with moving boundaries and loads], Moscow, Fizmatlit, 2001, 321 p.
23. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Evdokimova E.V., Popova E.V., Popova M.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn*, 2023, no. 129. DOI 10.34759/trd-2023-129-05.
24. Il'gamov M.A. *Akusticheskii zhurnal*, 2018, vol. 64, no. 5, pp. 598–604.

Информация об авторах

Сергей Алексеевич Григорьев, аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия;

e-mail: sagrigorev0703@yandex.ru

Дмитрий Вячеславович Кондратов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационная безопасность автоматизированных систем», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.; главный научный сотрудник лаборатории №2, Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук (ИПТМУ РАН); профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия; e-mail: kondratovdv@yandex.ru

Information about the authors

Sergey A. Grigoriev, Postgraduate Student, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia; e-mail: sagrigorev0703@yandex.ru

Dmitry V. Kondratov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Information Security of Automated Systems, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; Chief Researcher of Laboratory No. 2, Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences (IPM&C RAS); Professor at the Department of Mathematical and Computer Modeling, Saratov State University (National Research University) named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia; e-mail: kondratovdv@yandex.ru

Получено 13 ноября 2025 • Принято к публикации 15 декабря 2025 • Опубликовано 27 февраля 2026
Received 13 November 2025 • Accepted 15 December 2025 • Published 27 February 2026
