

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Кулешова Александра Сергеевича
«Точные решения некоторых задач динамики твердого тела»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико – математических наук
по специальности 1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация А.С. Кулешова посвящена построению аналитических решений задачи о движениях тяжелого твердого тела. Проведенные автором исследования охватывают проблемы качения тел по плоскости или поверхности и движения тела с неподвижной точкой. Для анализа динамики используется относительно новый метод построения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Несмотря на стремительное развитие компьютерных методов и искусственного интеллекта, интерес к поиску аналитических решений до сих пор не иссяк, о чем свидетельствуют работы В.В. Козлова, В.М. Морозова, Егорова А.И., R. Bishop, D. Azimov, R. Ramirez.

Содержание диссертации представлено на 356 страницах машинописного текста с 13 рисунками, составляющих введение, пять глав описания результатов исследований, заключение и список литературы, включающий 204 наименования.

Основную часть работы условно можно разделить на три направления: постановка задачи и описание основного используемого автором алгоритма Дж. Ковачича, изложенные в первой главе, результаты исследования движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса, которые изложены в главе 3, новые решения задачи о движении тела по горизонтальной плоскости, приведенные в главе 2, и решение задач о движении тяжелого тела по поверхностям вращения, составляющее содержание глав 4 и 5.

Введение начинается с подробного обоснования актуальности выбора направления и формулировки целей исследования, аргументируется научная новизна исследований по каждому направлению и перечисляются положения, выносимые на защиту. Представлен список конференций и научных семинаров, на которых результаты работы прошли апробацию, и список публикаций автора. Далее приводится достойный обзор литературы и изложение основного содержания результатов диссертационной работы.

В первой главе диссертации приводится краткое изложение метода Дж. Ковачича определения лиувиллевых решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, составляющими рациональные функции независимой

ОТДЕЛ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ
И КОНТРОЛЯ ИСПОЛНЕНИЯ
ДОКУМЕНТОВ МАИ

«19» 01 2026 г.

переменной. Описывается соответствующий алгоритм и излагаются способы его применения для построения лиувиллевых решений. Эта глава способствует раскрытию процедуры достижения результатов исследований, изложенных в последующих главах работы.

Во второй главе диссертации исследуется задача о качении тяжелого динамически симметричного тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. После преобразования уравнений движения можно сделать заключение о возможности интегрирования в квадратурах, если удастся найти общее решение системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент угловой скорости катящегося тела, которая может быть сведена к одному уравнению второго порядка с коэффициентами, зависящими от распределения масс в твердом теле и от формы ограничивающей его поверхности. С.А. Чаплыгиным были построены квадратуры для тела, представляющего собой неоднородный динамически симметричный шар, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром, но лежит на оси динамической симметрии. Ещё два возможных случая приведения к квадратурам были указаны в работе 1932 г. казанского математика и механика Х.М. Муштари, если поверхность катящегося тела вращения удовлетворяет специальному условию.

В этой главе приводятся результаты исследований автора, позволившие получить развитие результатов Х.М. Муштари. Показано, что при выполнении специального условия, установленного Х.М. Муштари, уравнения движения тела вращения на горизонтальной плоскости допускают два первых интеграла, линейных по компонентам угловой скорости, один из которых имеет простой физический смысл: он является линейной комбинацией проекций кинетического момента тела на вертикаль и на ось симметрии соответственно. Более того, получено общее уравнение поверхности катящегося тела, удовлетворяющее специальному условию, из которого также следуют два случая, исследованные ранее Х.М. Муштари. Показано также, что полученному уравнению удовлетворяет счетное число различных поверхностей, для которых задача о качении тела вращения, ограниченного соответствующей поверхностью, приводится к квадратурам.

Далее для исследования линейного дифференциального уравнения второго порядка, соответствующего решению задачи о качении тела вращения по горизонтальной плоскости, используется алгоритм Дж. Ковачича. Делается заключение об отсутствии интегралов уравнений движения в классе лиувиллевых функций в задаче о движении тела с круглой острой кромкой и о движении динамически симметричного тора по горизонтальной плоскости. Удалось также обосновать интегрируемость в лиувиллевых функциях уравнений движения

задачи о качении без проскальзывания тяжелого параболоида вращения, центр масс которого расположен в фокусе. Полученные квадратуры позволили дать полное описание движения динамически симметричного параболоида на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Использование алгоритма Дж. Ковачича позволило доказать, что уравнения движения веретенообразного тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости могут быть проинтегрированы в квадратурах только при выполнении условия Х.М. Муштари и в результате подробного анализа установить отсутствие лиувиллевых решений задачи о качении динамически симметричного эллипсоида при всех значениях параметров, за исключением двух случаев, когда ограничения на параметры эллипсоида удается привести задачу к квадратурам.

В третьей главе диссертации рассмотрена задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в частном случае интегрируемости, известном как случай В. Гесса (1890) или в отечественной литературе его часто называют случаем Гесса – Аппельрота (1892). Исследование этого случая связано также с именами таких математиков и механиков как П.А. Некрасов, Р. Лиувиль, Н.Е. Жуковский, Б.К. Млодзеевский, П.В. Харламов, А.М. Ковалев. Тот факт, что задача описания движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса приводится к интегрированию одного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, был установлен П.А. Некрасовым в конце XIX века. Однако найти условия, при выполнении которых можно найти общее решение соответствующего уравнения и привести задачу к квадратурам, ранее не удавалось получить. Используя специальную системы координат П.В. Харламова, удалось записать соответствующее уравнение в виде линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Алгоритм Дж. Ковачича позволил доказать, что общее решение полученного линейного дифференциального уравнения с рациональными коэффициентами может быть записано явно в классе лиувиллевых функций только в двух случаях: когда кинетический момент тела ортогонален вектору восходящей вертикали, или когда распределение масс в твердом теле соответствует случаю интегрируемости Лагранжа. Тем самым, в работе А.С. Кулешова приведено решение задачи, более ста лет вызывавшей интерес специалистов по динамике твердого тела с неподвижной точкой.

В четвертой главе исследована задача о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения с вертикальной осью симметрии. Преобразованием уравнений движения шара задача приводится к интегрированию одного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, коэффициенты которого зависят от характеристик поверхности, по которой движется центр шара. В работе доказано, что если центр шара в

процессе качения принадлежит невырожденной поверхности второго порядка, то уравнения динамики интегрируются в лиувиллевых функциях при всех значениях параметров. Подробно исследованы случаи движения центра шара по поверхности вращения вокруг оси симметрии дуги циклоиды, по поверхности Бельтрами, по поверхности тора, по катеноиду.

В пятой главе описывается исследование задачи о качении тела вращения по внешней поверхности сферы в предположении, что действующая на тело сила приложена к центру масс, направлена к центру опорной сферы и зависит от расстояния между центрами. Здесь представлены результаты по решению задач, начало которых восходит к работам С.А. Чаплыгина и П.В. Воронца. Рассмотрен частный случай, когда тело вращения представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, центр масс которого не совпадает с геометрически центром, но лежит на оси динамической симметрии. Получено линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно компоненты угловой скорости вращения шара в проекции на его ось динамической симметрии. Используя алгоритм Дж. Ковачича доказано, что общее решение выражается через лиувиллевы функции.

В целом, давая общую оценку содержания работы, следует отметить, что диссертационная работа А.С. Кулешова написана достаточно ясным языком, обладает внутренним единством, достаточно хорошо отредактирована, проведенные исследования служат поставленной цели работы – построению точных решений ряда классических задач динамики твердого тела и неголономной механики. Все исследования проведены на высоком научном и методическом уровне, а используемые автором методы исследования позволили получить новые научные результаты.

Аннотация диссертации полностью отражает её содержание и включает все основные положения диссертационной работы.

По тексту диссертации и аннотации можно сделать некоторые замечания.

1. В настоящее время накоплен значительный опыт в исследовании динамики твердого тела. Достаточно упомянуть известные результаты, полученные сотрудниками ИПММ, г. Донецк, ИПМат РАН, ИПМех РАН, МГУ, МГТУ. Используются также численные методы и программные продукты, включая и системы аналитических вычислений решения систем дифференциальных уравнений динамики. В диссертации не представлен сравнительный анализ значимости, трудоемкости и эффективности использования метода Дж. Ковачича и лиувиллевых функций.

2. В третьей главе исследуется задача о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса, когда можно использовать четвертый интеграл уравнений динамики. Здесь также отсутствуют сведения о возможности использования

численных методов со стабилизацией связей и о сравнении с предлагаемым подходом.

3. Текст работы написан грамотно, не видно описок и синтаксических ошибок. Однако, встречаются неудачные формулировки и выражения. Так, во введении и в автоферате, приводя сведения о научной новизне и основных положениях, выносимых на защиту, да и в последующем тексте, встречаются однообразные фразы: «о существовании лиувиллевых решений», «полностью решен вопрос о существовании лиувиллевых решений...»

Сделанные замечания не умаляют достоинств выполненной работы и остающегося после её прочтения положительного впечатления. Диссертационная работа А.С. Кулешова содержит значительные научные результаты, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Изложенные в работе результаты являются новыми и строго обоснованы методами теоретической механики и математики. Результаты работы могут быть использованы в таких научных организациях как Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский физико – технический институт (национальный исследовательский университет), Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, МГТУ имени Баумана и других.

Диссертационная работа «Точные решения некоторых задач динамики твердого тела» полностью соответствует всем критериям Постановления № 842 от 24 сентября 2013 года Правительства Российской Федерации «О порядке присуждения ученых степеней», а также всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 1.1.7. – «Теоретическая механика, динамика машин», а её автор, Александр Сергеевич Кулешов, заслуживает присуждения ему указанной ученой степени.

Д.ф.-м.н., профессор,
Профессор ИФИТ РУДН



Мухарлямов Р.Г.

15.01.2026

Подпись профессора Мухарлямова Р.Г. удостоверяю.
Ученый секретарь РУДН

Курылев К.П.

Адрес: 117198, г. Москва,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6
Телефон: +7 (495) 787-38-03, 3758
E-mail: mukharlyamov_rg@pfur.ru



С отзвом ознакомлен

19.01.2026

Кулешов (Кулешов А.С.)