На правах рукописи

Соболь Виталий Романович

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В ЗАДАЧАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ КОЛЛ-ОПЦИОНОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛОСЫ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Специальность 05.13.01 —

системный анализ, управление и обработка информации

(авиационная и ракетно-космическая техника)

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2015 год

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Научный руководитель: **Кибзун Андрей Иванович**,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Щербаков Павел Сергеевич**,
доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный сотрудник
Института проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН

Вишняков Борис Ваисович,
кандидат физико-математических наук,
начальник лаборатории
«Анализ динамических сцен»
Федерального Государственного Унитарного
Предприятия «Государственный
Научно-Исследовательский Институт
Авиационных систем»

Ведущая организация: Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения РАН

Защита состоится 12 февраля 2016 года в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ или на сайте МАИ по ссылке: http://mai.ru/events/defence/index.php?element_id=62507

Автореферат разослан «____»________________ 2015 г.

Отзывы просим отправлять в 2-х экземплярах, заверенных гербовой печатью, по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Учёный совет МАИ.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.125.04,
кандидат физико-математических наук ________________ Н. С. Северина

Общая характеристика работы

Объектом исследования диссертационной работы являются стратегии хеджирования колл-опционов европейского и американского типов.

Актуальность работы. Рынок срочных контрактов в России является важной и динамично развивающейся отраслью экономики. Срочный рынок привлекает большое количество инвесторов возможностью совершать спекулятивные операции с доходностью выше, чем на рынке акций, а также хеджировать (страховать) риски при инвестировании в акции. Из года в год российский рынок срочных контрактов показывает рост активности и объемов торгов. Например, объем торгов производными финансовыми инструментами на Московской бирже в апреле 2015 года составил 6,3 трлн рублей (прирост в 48,7% к показателю за апрель 2014 года) или 129,1 млн контрактов (107,3 млн контрактов в апреле 2014 года).

Одним из основных видов срочных контрактов является опцион. Опцион предусматривает обязательное исполнение сделки только для продавца опциона. В контракте оговаривается срок исполнения, т.е. время совершения сделки, и цена исполнения, т.е. цена, по которой будет осуществляться продажа актива. Если опцион предусматривает право на продажу товара, то он называется пут-опционом, если на покупку — колл-опционом. Если опцион может быть исполнен только в определенный момент времени, то он называется европейским, если его можно исполнить в любой момент до истечения срока действия — американским, если только в определенные моменты времени до истечения срока действия контракта — бермудским.

Продавец колл-опциона может частично застраховаться от риска, связанного с превышением ценой актива цены поставки, затратив на это часть стоимости опциона и собственных средств. Для этого он формирует инвестиционный портфель, состоящий из данного опциона, других опционов, фьючерсов, облигаций, акций и прочего. В простейшем случае портфель состоит из базового актива, указанного в контракте. Этим портфелем он может управлять так, чтобы доходность портфеля хотя бы частично компенсировала риск опционной позиции. Такая стратегия управления называется хеджированием, а лицо, управляющее портфелем — хеджером.

Фундаментальный результат теории расчета и хеджирования опционов был получен в 1973 г. Ф.Блэком и М.Шоулсом. Отправным пунктом модели Блэка-Шоулса было то, что премия опциона может быть воспроизведена непрерывной перебалансировкой портфеля состоящего из безрискового вложения и базового актива. На управление таким портфелем хеджер затрачивает в среднем всю премию за опцион. Дальнейшее развитие работа получила в трудах Дж. Кокса, Р. Росса, М. Рубинштейна. Они рассмотрели в качестве модели динамики цены базового актива биномиальную модель котировки, для которой геометрическое броуновское движение является предельной моделью, при шаге разбиения, стремящемся к нулю. Другой предельной моделью для биномиальной модели Кокса-Росса-Рубинштейна является модель Мертона, в которой модель ценообразования актива связана с центрированным пуассоновским процессом. Как и в модели Блэка-Шоулса, в ней присутствует диффузионная составляющая, но добавляется также и «скачковая», обусловленная возможным поступлением важной информации об акциях и эмитенте базового актива.

Исследованию задач расчета и хеджирования европейского и американского опционов посвящены многочисленные работы А. Н. Ширяева, В. М. Кабанова, Д. О. Крамкова, А. В. Мельникова, А. Кабицина, А. И. Нейштадта, В. Четверикова. Задачи минимаксного хеджирования опционов были рассмотрены в работах Н. Эль Кару, Д. О. Крамкова, Г. Фельмера, С. Н. Волкова. Задачам минимаксного и квантильного хеджирования опциона на неполных рынках посвящены работы В.М. Хаметова и О. В. Зверева. Расчету стоимости опциона в многошаговой модели рынка также посвящены, например, работы О. В. Шатаева, Н. С. Дёмина и М. Ю. Шиширина, а также вторая часть монографии Г. Фёльмера и А. Шида.

Аналитическому расчету стоимости американского колл-опциона посвящены работы Р. Минени, И. Каратзаса, Г. МакКина, В. М. Хаметова и многие другие. Задача расчета стоимости и хеджирования опционов на неликвидных рынках рассматривалась, например, в работах У. Сетина и П. Шонбухера. Неликвидность рынка в рассмотренных математических моделях с непрерывным временем выражалась в зависимости стоимости базового актива от объема торгов. Модели неликвидного рынка в предположении, что операции купли-продажи активов имеют неизвестную продолжительность по времени, ранее рассмотрены не были.

Стратегия последовательного хеджирования опциона впервые была описана Сейденвергом и получила название «stop-loss start-gain strategy» (стратегия остановки потерь и начала выигрышей). Стратегия последовательного хеджирования заключается в приобретении базового актива в полном объеме при превышении ценой базового актива уровня цены поставки. При обратном переходе хеджер полностью продает все активы в хеджирующем портфеле, чтобы избежать потерь, связанных с дальнейшим возможным падением стоимости актива. Для покупки активов хеджером используются заимствованные фонды. Таким образом, в любой момент времени, когда опцион может быть исполнен, опционная позиция остается закрытой. В зарубежной литературе данная стратегия рассматривалась в работах П. Карра, Дж. Андреасена, К. Голье, П. Дыбвига, Р. Бёрда, Д. Дэнниса, М. Типпета, К. М. Каминского, К. Ослера. В работе К. Голье был рассмотрен вариант модификации стратегии остановки потерь и начала выигрышей, в котором при переходе опциона от состояния проигрыша к выигрышу в базовый актив инвестируются все средства, за исключением заранее установленного минимального резерва.

В России стратегия остановки потерь и начала выигрышей впервые исследовалась Бурениным и получила название «стратегия последовательного хеджирования». В работе А. И. Кибзуна и В. И. Губерниева для дискретной мультипликативной модели ценообразования базового актива было получено значение средних потерь продавца американского опциона типа колл, использующего стратегию последовательного хеджирования. В этой же работе был предложен вариант модификации стратегии последовательного хеджирования, заключающийся во введении полосы «нечувствительности» хеджирования. Данная модификация позволяет избавиться от основного недостатка стратегии последовательного хеджирования: чрезвычайно высоких затрат на хеджирование в случае частых колебаний цены базового актива относительно уровня цены поставки. Наиболее сильно данный недостаток проявляется в случае модели с непрерывным временем при ненулевых транзакционных издержках, когда затраты хеджера будут стремиться к бесконечности при выполнении предположения модели Блэка-Шоулса о процессе ценообразования. Однако, такая модификация стратегии последовательного хеджирования ранее исследована не была.

Из представленного обзора видно, что в настоящий момент остается неисследованной модификация стратегии последовательного хеджирования, заключающаяся во введении полосы «нечувствительности» хеджирования. При этом данная модификация позволит избежать высоких затрат на хеджирование в случае частых колебаний цены базового актива относительно уровня цены поставки, особенно при ненулевых транзакционных издержках. Также в литературе остается открытым вопрос о хеджировании опционных контрактов при ненулевой заранее неизвестной длительности операций купли-продажи. Предположение о неизвестной ненулевой длительности операций купли-продажи становится особенно важным в случае неликвидных активов или чрезвычайно больших объемов торгов.

Цели и задачи работы. Целью данной работы является исследование модификации стратегии последовательного хеджирования американского колл-опциона, заключающейся во введении полосы «нечувствительности» хеджирования, а также исследование задачи хеджирования европейского колл-опциона при неизвестной ненулевой длительности операций купли-продажи базового актива.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Найти выражение и исследовать свойства математического ожидания затрат на хеджирование продавца колл-опциона американского типа, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Выработать алгоритм поиска оптимальной ширины полосы «нечувствительности», минимизирующей средние затраты хеджера. Исследовать связь между задачами минимизации условного и безусловного математических ожиданий потерь хеджера.

2. Найти выражение для функции распределения потерь хеджера. Найти выражения для условной функции распределения потерь и квантили условного распределения потерь хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования, при известном количестве пересечений полосы «нечувствительности» траекторией курса базового актива. Исследовать связь между квантилями условного и безусловного распределений. Разработать алгоритм построения верхней и нижней оценок квантили безусловного распределения потерь.

3. Разработать алгоритм поиска оптимального управления в классе позиционных стратегий в двухшаговой задаче хеджирования европейского колл-опциона в случае, когда длительность операций купли-продажи базового актива случайна, а ее распределение зависит от объема приобретаемых/продаваемых активов.

Методы исследования. В диссертации используются современные методы системного анализа, математического моделирования, теории вероятностей и случайных процессов, стохастического программирования, теории оптимизации и оптимального управления, в частности, метод динамического программирования.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, проверкой теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые исследована модификация стратегии последовательного хеджирования колл-опциона, заключающаяся во введении полосы «нечувствительности» хеджирования, а также впервые рассмотрена задача хеджирования опционных контрактов при заранее неизвестной ненулевой длительности операций купли-продажи базового актива. Среди полученных в работе результатов можно выделить следующие:

1. Получены выражения для математического ожидания и функции распределения потерь хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования, а также предложен алгоритм построения верхней и нижней оценок квантили распределения потерь

2. Предложен алгоритм поиска оптимальной ширины полосы «нечувствитель-

ности», минимизирующей средние затраты хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования.

3. Получены выражения для функций условного и безусловного распределения затрат на хеджирование продавца колл-опциона американского типа, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Найдены точки разрыва и промежутки монотонности функций условного и безусловного распределений. Предложен метод построения верхней и нижней оценок квантили распределения затрат хеджера на основе значений квантилей условных распределений затрат хеджера при известном числе пересечений полосы «нечувствительности» траекторией цены базового актива.

4. Предложен алгоритм решения двухшаговой задачи хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности выполнения операций куплипродажи базового актива. Доказано существование не более чем двух точек локального минимума функции будущих потерь на последнем шаге в области допустимых управлений.

Практическая ценность работы состоит в том, что ее теоретические результаты могут служить основой для разработки математического и программно-алгоритмического обеспечения для решения прикладных задач в области финансовой и актуарной математики. Разработанные в диссертации методы и алгоритмы могут быть также применены при решении задач управления техническими системами с релейными переключениями при наличии гауссовских помех. В частности решена задача удержания автоматического аэростатата в заданной полосе высот на протяжении времени полета.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации с использованием методов системного анализа исследованы сложные экономические и технические системы, проведены исследования оптимизационных задач, предложены алгоритмы их решения (области исследования 1, 4, 5 специальности 05.13.01).

Апробация работы. Результаты работы докладывались на научных семинарах кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (рук. проф. Кибзун А.И.), научном семинаре «Математические модели принятия решений» Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (рук. проф. Береснев В.Л.), научном семинаре лаборатории №7 Адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина Института проблема управления им. В.А. Трапезникова РАН (рук. проф. Поляк Б.Т.).

Материалы диссертации представлялись на ряде конференций: Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2013» (Россия, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова), IV научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов «Актуальные вопросы развития систем и средств ВКО», посвященная 105-летию со дня рождения академика А.А. Расплетина (Россия, Москва, 2013 г.), 40-ая международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения» (Россия, Москва, МАТИ, 2014 г.), 6-я Традиционная молодежная школа «Управление, информация и оптимизация» (Россия, Московская область, дер. Григорчиково, 2014 г.), XI Всероссийская школа-конференция молодых ученых и специалистов «Управление большими системами» (Россия, Арзамас, 2014 г.), EURO Mini Conference on Stochastic Programming and Energy Applications ECSP-2014 (Франция, Париж, 24-26 сентября 2014 г.), 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2014» (Россия, Москва, МАИ ГТУ, 2014 г.), 20-я Международная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Россия, Евпатория, 2015 г.).

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-08-02833 А «Разработка вероятностно-гарантирующих алгоритмов управления техническими объектами»).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 3 научных статьях [1–3] в журналах, входящих в перечень ВАК, в 2 статьях [4, 8] в сборниках и материалах конференций, а также в сборниках тезисов докладов конференций [5–7]. Общее количество публикаций по теме данной диссертации — 8.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, четыре главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 105 страниц, включая 10 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 87 наименований.

Содержание диссертации

Во введении дано обоснование актуальности выбранной автором темы диссертации, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе приводится описание модификации стратегии последовательного хеджирования, предлагается математическая модель и исследуются свойства процесса ценообразования. В соответствии с модифицированной стратегией последовательного хеджирования при цене поставки K будет производиться полное покрытие опционной позиции в моменты, когда рыночная цена базового актива превышает уровень $K(1+d)$, где d — относительная ширина полосы «нечувствительности» хеджирования. Продажа актива будет осуществляться при падении цены актива ниже уровня K. Полоса «нечувствительности» хеджирования:

$$H \triangleq \{(y,t) : y \in [K, K(1+d)], t \in [0,T]\}, \tag{1.1}$$

где T - срок, в течение которого опцион может быть исполнен.

В качестве модели ценообразования используется процесс геометрического броуновского движения:

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)}, \qquad t \in [0,T]. \tag{1.2}$$

где $W(t)$ - стандартный винеровский процесс, $S(0)$ - стартовая цена актива, не превышающая K, μ - коэффициент линейного сноса, σ - волатильность.

Покупка актива осуществляется при пересечении полосы H траекторией $S(t)$ в направлении «снизу вверх». Хеджер при этом затрачивает сумму, равную $\rho^+ = K(1+d)(1+\theta)$, где θ — комиссионные издержки при покупке актива. Продажа актива осуществляется при пересечении «снизу вверх» по цене K, тогда затраты хеджера равны $\rho^- = -K$.

Предполагается, что при фиксированном параметре d исполнение опциона при каждом пересечении полосы, если опцион не был исполнен прежде, может произойти с одной и той же вероятностью $p(d)$, где $p(\cdot) : [0,\infty] \to [0,1]$, при этом $\lim\limits_{d\to 0} p(d) = 0$, $\lim\limits_{d\to\infty} p(d) = 1$, $p(d)$ строго возрастает по d. Для учета раннего исполнения опциона используется последовательность случайных величин ν_i, определенная следующим образом:

1. СВ ν_i принимают значения 0 и 1, $i = 1, 2, \ldots$;
2. $\mathcal{P}\{\nu_1 = 1\} = p(d)$;
3. $\mathcal{P}\left\{\nu_i = 1 | \sum\limits_{j=1}^{i-1} \nu_j = 0\right\} = p(d), i > 1;$

4. $\mathcal{P}\left\{\nu_i = 0 | \sum\limits_{j=1}^{i-1} \nu_j = 1\right\} = 1, i > 1.$

Опцион также может быть исполнен в случае, когда траектория $S(t)$ не пересекла полосу H за время T, а только превысила уровень цены поставки K. Предполагается, что исполнение опциона в этом случае также происходит с вероятностью $p(d)$. Исполнение опциона при отстутствии пересечений учитывается с помощью случайной величины ν_0, распределенной по закону Бернулли: $\mathcal{P}\{\nu_0 = 1\} = p(d)$.

Если опцион исполняется при пересечении «снизу вверх», то опционная позиция открыта и точный момент исполнения заранее неизвестен. Цена базового актива в момент исполнения предполагается случайной, равной $K + \zeta$, где ζ - случайная величина, с функцией распределения $F_\zeta(\cdot)$ такой, что $F_\zeta(0) = 0$, $F_\zeta(Kd) = 1$, и $F_\zeta(\cdot)$ строго возрастает на отрезке $[0, Kd]$. На покрытие опционной позиции хеджер тратит при этом сумму, равную $(K + \zeta)(1 + \theta)$.

С учетом сделанных предположений затраты хеджера при i-м пересечении полосы будут равны

$$l_i \triangleq \begin{cases} \nu_i((K+\zeta)(1+\theta) - K) + (1-\nu_i)\rho^+, & i = 1, \\ \left(\prod\limits_{j=1}^{i-1}(1-\nu_j)\right)(\nu_i((K+\zeta)(1+\theta) - K) + (1-\nu_i)\rho^+), & i = 2m+1, \\ \left(\prod\limits_{j=1}^{i-1}(1-\nu_j)\right)\rho^-, & i = 2m, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $m = 1, 2, \ldots$.

Затраты хеджера в случае, когда курс базового актива не пересек полосу H, а только превысил уровень цены поставки K, составят $l_0 \triangleq \nu_0((K+\zeta)(1+\theta) - K)$.

Суммарные потери хеджера за время жизни опциона равны

$$L(d) \triangleq \begin{cases} \sum_{i=0}^{2m} l_i, & \eta^+ + \eta^- = 2m, \\ \sum_{i=0}^{2m+1} l_i - \left(\prod\limits_{j=1}^{2m+1}(1-\nu_j)\right)K, & \eta^+ + \eta^- = 2m+1, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, η^+ — число пересечений полосы H «снизу вверх» , а η^- — число пересечений полосы H «сверху вниз».

Суммарные затраты хеджера зависят от того, когда рыночная цена базового актива достигнет уровня цены поставки, т.е. от момента τ:

$$\tau \triangleq \min\{t : S(t) = K\}. \tag{1.5}$$

Функция распределения τ равна

$$F_\tau(t) \triangleq \mathcal{P}\{\tau \le t\} =$$
$$1 - \Phi\left(\frac{\ln\frac{K}{S(0)} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{\ln\frac{K}{S(0)}(2\mu-\sigma^2)}{\sigma^2}}\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln\frac{K}{S(0)} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right). \tag{1.6}$$

При этом плотность $f_\tau(t)$ распределения τ равна

$$f_\tau(t) \triangleq \frac{dF_\tau(t)}{dt} = \frac{\ln\frac{K}{S(0)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left\{ -\frac{\left(\ln\frac{K}{S(0)} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t} \right\}. \tag{1.7}$$

Затраты хеджера также зависят от числа пересечений полосы H траекторией $S(t)$ за время T. В диссертации доказана теорема о распределении величин η^-, η^+ и $\eta^- + \eta^+$:

Теорема 1.1. *Пусть траектория случайного процесса $S(t)$ достигла уровня K в момент t, тогда для любого натурального k траектория $S(t)$ пересечет H «сверху вниз» за оставшееся время $T-t$ не менее k раз с вероятностью*

$$\mathcal{P}\{\eta^- \geq k|\tau = t\} = e^{-\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{2k\ln(1+d)}{\sigma}}\left(1 - \Phi\left(\frac{2k\ln(1+d)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}\right)\right)$$
$$+ e^{\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{2k\ln(1+d)}{\sigma}}\left(1 - \Phi\left(\frac{2k\ln(1+d)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}\right)\right), \tag{1.8}$$

а в направлении «снизу вверх» с вероятностью

$$\mathcal{P}\{\eta^+ \geq m|\tau = t\} = e^{-\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{2k\ln(1+d)}{\sigma}}\left(1 - \Phi\left(-\frac{(2k-1)\ln(1+d)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}\right)\right)$$
$$+ e^{\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{(2k-2)\ln(1+d)}{\sigma}}\left(1 - \Phi\left(-\frac{(2k-1)\ln(1+d)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}\right)\right), \tag{1.9}$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

Условное распределение общего числа пересечений $\eta^- + \eta^+$ при условии, что $\tau = t$, определяется с помощью рекуррентного соотношения:

$$P(i,t) \triangleq \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = i|\tau = t\} = \begin{cases} \mathcal{P}\{\eta^+ = 0|\tau = t\}, & \text{при } i = 0; \\ \mathcal{P}\{\eta^+ = l|\tau = t\} - \\ \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2l-1|\tau = t\}, & \text{при } i = 2l, l > 0; \\ \mathcal{P}\{\eta^- = l|\tau = t\} - \\ \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2l|\tau = t\}, & \text{при } i = 2l+1, l > 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Безусловное распределение числа пересечений полосы H траекторией $S(t)$ за время T определяется как:

$$\mathcal{P}\{\eta^- \geq m\} = \int_0^T \mathcal{P}\{\eta^- \geq m|\tau = t\} f_\tau(t)dt, \tag{1.11}$$

$$\mathcal{P}\{\eta^+ \geq m\} = \int_0^T \mathcal{P}\{\eta^+ \geq m | \tau = t\} f_\tau(t) dt, \tag{1.12}$$

$$P(i) \triangleq \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = i\} = \int_0^T \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = i | \tau = t\} f_\tau(t) dt + I\{i = 0\} \mathcal{P}\{\tau \geq T\} = \tag{1.13}$$

$$= \begin{cases} \mathcal{P}\{\eta^+ = 0\} + \mathcal{P}\{\tau \geq T\}, & \text{при } i = 0; \\ \mathcal{P}\{\eta^+ = l\} - \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2l - 1\}, & \text{при } i = 2l, l > 0; \\ \mathcal{P}\{\eta^- = l\} - \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2l\}, & \text{при } i = 2l + 1, l > 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

где $I\{\cdot\}$ — индикаторная функция.

Во второй главе рассматривается задача поиска оптимальной относительной ширины полосы «нечувствительности» H, минимизирующей средние потери хеджера.

Для условного и безусловного математического ожидания потерь вводятся обозначения:

$$\overline{L}(d) \triangleq \mathbf{M}[L(d)], \qquad \overline{L}(d,t) \triangleq \mathbf{M}[L(d) | \tau = t].$$

Условное и безусловное математическое ожидание потерь связаны соотношением:

$$\overline{L}(d) = \int_0^T \overline{L}(d,t) f_\tau(t)\, dt. \tag{2.15}$$

В случае, когда $\tau \geq T$, исполнение опциона невыгодно и хеджер не несет никаких потерь, т.е. $\overline{L}(d,t) = 0$.

Рассматривается задача минимизации величины средних потерь хеджера по ширине полосы «нечувствительности» d:

$$\overline{L}(d) \to \min_{0 \leq d \leq d_{max}}. \tag{2.16}$$

Наряду с задачей (2.16) минимизации безусловных средних потерь хеджера, рассмотривается задача минимизации условных средних потерь:

$$d^*(t) = \underset{0 \leq d \leq d_{max}}{\operatorname{argmin}}\, \overline{L}(d,t), \qquad t \in (0,T). \tag{2.17}$$

Максимальная допустимая ширина полосы d_{max} задается хеджером и зависит от его склонности к риску, рыночных ожиданий и стоимости опциона.

С учетом (1.4), условное математическое ожидание потерь хеджера равно

$$\overline{L}(d,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k,t) \mathbf{M}\left[\sum_{j=0}^{k} l_j\right] - \sum_{k=0}^{\infty} P(2k+1,t) \mathbf{M}\left[\left(\prod_{j=1}^{2k+1} (1 - \nu_j)\right) K\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \mathbf{M}[l_j] P(k,t) - \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p(d))^{2k+1} K P(2k+1,t). \tag{2.18}$$

С учетом (1.3), средние потери при одном пересечении равны

$$\mathbf{M}[l_i] = \begin{cases} p(d)(\mathbf{M}[(K+\zeta)(1+\theta)] - K) + (1-p(d))\rho^+, \text{если } i = 1, \\ (1-p(d))^{i-1} \rho^-, \text{если } i = 2m, \\ (1-p(d))^{i-1} (p(d)(\mathbf{M}[(K+\zeta)(1+\theta)] - K) + (1-p(d))\rho^+), \\ \text{если } i = 2m+1, \end{cases} \tag{2.19}$$

где $m = 1, 2, \cdots$.

Во второй главе доказано, что условное и безусловное математическое ожидание потерь являются непрерывными и дифференцируемыми функциями параметра d. Показано, что при $d \to 0$ число пересечений полосы H траекторией $S(t)$ за время T стремится к бесконечности, а значит средние потери также стремятся к бесконечности: $\overline{L}(d) \to \infty$ при $d \to 0$. Численные расчеты показывают, что функция $\overline{L}(d)$ имеет единственную точку минимума по d на $(0, d_{max})$. Для поиска точки минимума средних потерь может быть использован любой метод оптимизации для одноэкстремальных задач, например метод дихотомии. Выбор метода дихотомии обусловлен тем, что данный метод является робастным и обеспечивает сходимость к одному из локальных минимумов, в случае если задача не является одноэкстремальной.

Также во второй главе найдено выражение для функции вероятности и предложен алгоритм построения верхней и нижней оценок функции квантили. При заданной функции $L(d)$ потерь функция вероятности характеризует вероятность того, что потери хеджера не превысят заданный уровень φ:

$$P_\varphi(d) \triangleq \mathcal{P}\{L(d) \leq \varphi\}. \tag{2.20}$$

Функция квантили характеризует порог, который потери хеджера не превысят с заданной вероятностью α:

$$\varphi_\alpha(d) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(d) \geq \alpha\}, \text{ где } \alpha \in (0; 1). \tag{2.21}$$

Вероятность $\mathcal{P}\{L(d) \leq \varphi\}$ зависит от ширины полосы H, момента τ первого достижения уровня K траекторией $S(t)$ и числа $\eta^+ + \eta^-$ пересечений полосы H, и может быть вычислена по формуле полной вероятности

$$P_\varphi(d) = 1 - F_\tau(T) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^T \mathcal{P}\{L(d,t) \leq \varphi | \eta^+ + \eta^- = i\} P(i,t) f_\tau(t) dt, \tag{2.22}$$

где i — количество пересечений полосы H.

Вводится в рассмотрение условная функция распределения потерь при условии, что траектория процесса $S(t)$ достигла уровня K цены поставки в момент времени t:

$$P_\varphi(d,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}\{L(d,t) \leq \varphi | \eta^+ + \eta^- = i\} P(i,t). \tag{2.23}$$

Функции $P_\varphi(d)$ и $P_\varphi(d,t)$ связаны соотношением:

$$P_\varphi(d) = 1 - F_\tau(T) + \int_0^T P_\varphi(d,t) f_\tau(t) dt. \tag{2.24}$$

Для функций условного распределения потерь хеджера вводятся обозначения:

$$P_\varphi(d,i) \triangleq \mathcal{P}\{L(d) \leq \varphi | \eta^+ + \eta^- = i\}, \tag{2.25}$$

$$P_\varphi(d,i,t) \triangleq \mathcal{P}\{L(d,t) \leq \varphi | \eta^+ + \eta^- = i\}. \tag{2.26}$$

Функции $P_\varphi(d,i)$ и $P_\varphi(d,i,t)$ связаны между собой соотношением

$$P_\varphi(d,i) = \int_0^T P_\varphi(d,i,t) f_\tau(t) dt. \tag{2.27}$$

В главе найдены выражения для условных функций распределения $P_\varphi(d,i,t)$. Для этого используются обозначения:

$$k^*(\varphi)=\Big[\frac{\varphi}{\rho^++\rho^-}\Big],\varphi^*\triangleq\frac{\max\{\varphi+K-k^*(\varphi)(\rho^++\rho^-),K(1+\theta)\}}{1+\theta}. \tag{2.28}$$

При фиксированном φ, число $k^*(\varphi)$ определяет допустимое количество пар последовательных пересечений до момента исполнения опциона, при котором суммарные потери гарантированно не превосходят φ. Величина φ^* определяет максимальную цену покупки базового актива, при которой суммарные потери, с учетом уже произведенных затрат, не превосходят φ. Возможны 3 случая:

1. Если $i<2k^*(\varphi)$, то есть произошло слишком мало пересечений, то

$$P_\varphi(d,i,t)=1. \tag{2.29}$$

2. Если $i=2k^*(\varphi)$, то

$$P_\varphi(d,i,t)=1-(1-p(d))^{2k^*(\varphi)}+(1-p(d))^{2k^*(\varphi)}\frac{\mathcal{P}\{S(T)\le\varphi^*|S(t)=K\}}{\mathcal{P}\{S(T)\le K(1+d)|S(t)=K\}}. \tag{2.30}$$

3. Если $i\ge 2k^*(\varphi)+1$, то

$$P_\varphi(d,i,t)=1-(1-p(d))^{2k^*(\varphi)}+(1-p(d))^{2k^*(\varphi)}p(d)F_\zeta(\varphi^*-K). \tag{2.31}$$

Функции $P_\varphi(d,i,t)$ являются разрывными по φ в точках $\varphi_j=j(\rho^++\rho^-)$, а значит и функция $P_\varphi(d)$ также является разрывной в точках $\varphi_j, j=1,2,...$, в силу соотношений (2.23) и (2.24). Если $\varphi=\varphi_j+0$, то $k^*(\varphi)=j$, и правые пределы равны:

$$P^+_{\varphi_j}(d,i,t)\triangleq\lim_{\varphi\to\varphi_j+0}P_\varphi(d,i,t)=$$
$$\begin{cases}1, & \text{при } i<2j;\\ 1-(1-p(d))^{2j}+(1-p(d))^{2j}\frac{\mathcal{P}\{S(T)\le K|S(t)=K\}}{\mathcal{P}\{S(T)\le K(1+d)|S(t)=K\}}, & \text{при } i=2j;\\ 1-(1-p(d))^{2j}, & \text{при } i\ge 2j+1.\end{cases} \tag{2.32}$$

Аналогично, при $\varphi=\varphi_j-0$ получаем $k^*(\varphi)=j-1$, и левые пределы равны:

$$P^-_{\varphi_j}(d,i,t)\triangleq P^-_{\varphi_j}(d,i,t)=\begin{cases}1, & \text{при } i\le 2j-2;\\ 1-(1-p(d))^{2j-1}, & \text{при } i\ge 2j-1.\end{cases} \tag{2.33}$$

В силу (2.28)-(2.31) и того, что функция $F_\zeta(\cdot)$ является возрастающей, для любого $i>0$ функция $P_\varphi(d,i,t)$ строго возрастает по φ при $\varphi\in(j(\rho^++\rho^-),(j+1)(\rho^++\rho^-)]$, где j принимает целые значения от 0 до $[\frac{i}{2}]$. Функция принимает постоянное значение, равное $P^+_{\varphi_j}(d,i,t)$, при $\varphi\in[j(\rho^++\rho^-);j(\rho^++\rho^-)+K\theta)$, где $j=0,1,\cdots,[\frac{i}{2}]$. А также $P_\varphi(d,i,t)=1$ при $\varphi>([\frac{i}{2}]+1)(\rho^++\rho^-)$.

Из соотношения (2.27) следует, что функции $P_\varphi(d,i)$ также терпят разрывы в точках φ_j. Левые и правые пределы функции $P_\varphi(d,i)$ в этих точках равны

$$P^-_{\varphi_j}(d,i)\triangleq\lim_{\varphi\to\varphi_j-0}P_\varphi(d,i)=\int_0^T P^-_{\varphi_j}(d,i,t)f_\tau(t)dt, \tag{2.34}$$

$$P^+_{\varphi_j}(d,i)\triangleq\lim_{\varphi\to\varphi_j+0}P_\varphi(d,i)=\int_0^T P^+_{\varphi_j}(d,i,t)f_\tau(t)dt. \tag{2.35}$$

Аналогично, из (2.23) и (2.24) следует, что разрывы функции $P_\varphi(d)$ будут происходить также в точках φ_j. Левые и правые пределы $P_\varphi(d)$ равны

$$P^-_{\varphi_j}(d) \triangleq \lim_{\varphi\to\varphi_j-0} P_\varphi(d) = 1 - F_\tau(T) + \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^T P^-_{\varphi_j}(d,i,t)P(i,t)f_\tau(t)dt, \tag{2.36}$$

$$P^+_{\varphi_j}(d) \triangleq \lim_{\varphi\to\varphi_j+0} P_\varphi(d) = 1 - F_\tau(T) + \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^T P^+_{\varphi_j}(d,i,t)P(i,t)f_\tau(t)dt. \tag{2.37}$$

Поскольку известна функция распределения величины потерь хеджера, можно определить квантиль распределения этой величины (2.21). Для нахождения верхней и нижней оценок неизвестной квантили $\varphi_\alpha(d)$ в диссертации предложен алгоритм, использующий значения квантилей условных распределений потерь. Определим квантиль распределения потерь при условии, что произошло суммарно i пересечений, как

$$\varphi_\alpha(d,i) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(d,i) \geq \alpha\}. \tag{2.38}$$

Квантили условного распределения потерь вычисляются следующим образом. Если существует целое $m > 0$ такое, что $P^-_{\varphi_m}(d,i) < \alpha \leq P^+_{\varphi_m}(d,i)$, то условная квантиль равна $\varphi_\alpha(d,i) = m(\rho^+ + \rho^-)$. Иначе существует $m > 0$ такое, что $P^+_{\varphi_m}(d,i) < \alpha \leq P^-_{\varphi_{m+1}}(d,i)$ и условная квантиль принадлежит интервалу $(m(\rho^+ + \rho^-) + K\theta; (m+1)(\rho^+ + \rho^-))$. В этом случае, согласно (2.28), получаем

$$k^*(\varphi_\alpha(d,i)) = m, \varphi^* = \frac{\varphi_\alpha(d,i) + K - m(\rho^+ + \rho^-)}{1+\theta}.$$

Если $i = 2m$, то условная квантиль определяется как решение уравнения

$$1 - (1-p(d))^{2m} + (1-p(d))^{2m}\frac{\mathcal{P}\{S(T) \leq \varphi^*\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leq K(1+d)\}} = \alpha.$$

Если $i > 2m$, то условная квантиль является решением уравнения

$$1 - (1-p(d))^{2m} + (1-p(d))^{2m}p(d)F_\zeta(\varphi^* - K) = \alpha.$$

В силу соотношений (2.29)—(2.31), функции условного распределения потерь хеджера не возрастают по i, если

$$p(d)F_\zeta(\varphi^* - K) \leq \frac{\mathcal{P}\{S(T) \leq \varphi^*\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leq K(1+d)\}}. \tag{2.39}$$

Следовательно, при выполнении условия (2.39), условные квантили $\varphi_\alpha(d,i)$ не убывают по i и неограничены сверху. При этом $P_{\varphi_\alpha(d,0)}(d) \leq 1 - F_\tau(T) + \alpha$. Если положить по определению

$$\beta \triangleq \alpha + F_\tau(T) - 1, \tag{2.40}$$

то существует $m > 0$ такое, что

$$P_{\varphi_\beta(d,m)}(d) \geq \alpha, \qquad P_{\varphi_\beta(d,m-1)}(d) \leq \alpha.$$

Величины $\varphi_\beta(d,m-1)$ и $\varphi_\beta(d,m)$ могут быть использованы как нижняя и верхняя оценки безусловной квантили $\varphi_\alpha(d)$. Обозначим их как

$$\varphi_\alpha^- = \varphi_\beta(d,m-1), \qquad \varphi_\alpha^+ = \varphi_\beta(d,m).$$

Отрезок $[\varphi_\beta(d,m-1), \varphi_\beta(d,m)]$ всегда содержит одну или две точки разрыва функции $P_\varphi(d)$. Если отрезок содержит две точки разрыва, т.е. если существует $j > 0$ такое, что

$$\varphi_\beta(d,m-1) = j(\rho^+ + \rho^-), \qquad \varphi_\beta(d,m) = (j+1)(\rho^+ + \rho^-),$$

то возможны два случая:

1. Если $P^-_{\varphi_{j+1}}(d) < \alpha$, тогда положим

$$\varphi_\alpha^- = j(\rho^+ + \rho^-) + K\theta, \text{ и } \varphi_\alpha^+ = (j+1)(\rho^+ + \rho^-). \tag{2.41}$$

2. Если $P^-_{\varphi_{j+1}}(d) > \alpha$, тогда

$$\varphi_\alpha^- = \varphi_\alpha^+ = \varphi_\alpha(d) = j(\rho^+ + \rho^-). \tag{2.42}$$

Если же отрезок $[\varphi_\beta(d,m-1), \varphi_\beta(d,m)]$ содержит одну точку разрыва, т.е. существует $j > 0$ такое, что $\varphi_\beta(d,m-1) \le \varphi_j \le \varphi_\beta(d,m)$, то возможны 3 случая:

1. Если $P^-_{\varphi_j}(d) > \alpha$, тогда положим

$$\varphi_\alpha^- = \varphi_\beta(d,m-1), \text{ и } \varphi_\alpha^+ = j(\rho^+ + \rho^-). \tag{2.43}$$

2. Если $P^+_{\varphi_j}(d) < \alpha$, тогда положим

$$\varphi_\alpha^- = j(\rho^+ + \rho^-) + K\theta, \text{ и } \varphi_\alpha^+ = \varphi_\beta(d,m). \tag{2.44}$$

3. Если $P^-_{\varphi_j}(d) < \alpha < P^+_{\varphi_j}(d)$, тогда положим

$$\varphi_\alpha^- = \varphi_\alpha^+ = \varphi_\alpha(d) = j(\rho^+ + \rho^-). \tag{2.45}$$

Функция $P_\varphi(d)$ непрерывна и строго возрастает на интервале $(\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+)$. Если известна оценка константы Липшица L функции $P_\varphi(d)$ на интервале $(\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+)$, то могут быть построены верхняя и нижняя кусочно-линейные огибающие функции $P_\varphi(d)$:

$$\begin{aligned} F^+(\varphi,d) &= \min\{P^-_{\varphi_\alpha^+}(d), P^+_{\varphi_\alpha^-}(d) + L(\varphi - \varphi_\alpha^-)\}, \\ F^-(\varphi,d) &= \min\{P^+_{\varphi_\alpha^-}(d), P^-_{\varphi_\alpha^+}(d) + L(\varphi - \varphi_\alpha^+)\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаются уточненные оценки неизвестной квантили

$$\varphi_\alpha^- = \frac{\alpha - P^+_{\varphi_\alpha^-}(d)}{L} + \varphi_\alpha^-, \qquad \varphi_\alpha^+ = \frac{\alpha - P^-_{\varphi_\alpha^+}(d)}{L} + \varphi_\alpha^+.$$

Для получения требуемой точности ($\varphi_\alpha^+ - \varphi_\alpha^- < \varepsilon$) предложен следующий алгоритм:

Алгоритм 2.1.

1. Если существует $m > 0$ такое, что $P^-_{\varphi_m}(d) < \alpha \leq P^+_{\varphi_m}(d)$, то $\varphi^-_\alpha = \varphi^+_\alpha = \varphi_\alpha = m(\rho^+ + \rho^-)$ и работа алгоритма завершается. Иначе найти величины $\varphi_\beta(d, m-1)$ и $\varphi_\beta(d, m)$ такие, что $P^+_{\varphi_\beta(d,m-1)}(d) < \alpha < P^-_{\varphi_\beta(d,m)}(d)$, где β определяется согласно (2.40).

2. Если существует $j \geq 0$ такое, что $\varphi_\beta(d, m-1) = \varphi_j$, а $\varphi_\beta(d, m) = \varphi_{j+1}$, то в соответствии с (2.41) определить оценки неизвестной квантили $\varphi^-_\alpha(0)$ и $\varphi^+_\alpha(0)$. Положить $i = 1$ и перейти к шагу 4. Иначе перейти к шагу 3.

3. Найти j такое, что $\varphi_\beta(d, m-1) \leq \varphi_j \leq \varphi_\beta(d, m)$ и в соответствии с (2.43)—(2.45) найти $\varphi^-_\alpha(0)$ и $\varphi^+_\alpha(0)$. Положить $i = 1$ и перейти к шагу 4.

4. Найти уточненные оценки квантили

$$\varphi^-_\alpha(i) = \frac{\alpha - P^+_{\varphi^-_\alpha(i-1)}(d)}{L} + \varphi^-_\alpha(i-1), \qquad \varphi^+_\alpha(i) = \frac{\alpha - P^-_{\varphi^+_\alpha(i-1)}(d)}{L} + \varphi^+_\alpha(i-1).$$

Если $\varphi^+_\alpha(i) - \varphi^-_\alpha(i) \leq \varepsilon$, то завершить работу алгоритма, иначе перейти к шагу 5.

5. Вычислить $p = P_{\frac{\varphi^+_\alpha(i)+\varphi^-_\alpha(i)}{2}}(d)$. Если $p > \alpha$, то $\varphi^+_\alpha(i+1) = \frac{\varphi^+_\alpha(i)+\varphi^-_\alpha(i)}{2}$ и $\varphi^-_\alpha(i+1) = \varphi^-_\alpha(i)$, иначе $\varphi^-_\alpha(i+1) = \frac{\varphi^+_\alpha(i)+\varphi^-_\alpha(i)}{2}$ и $\varphi^+_\alpha(i+1) = \varphi^+_\alpha(i)$. Положить $i = i+1$ и перейти к шагу 3.

В ходе работы алгоритма оценки $\varphi^+_\alpha(i)$ и $\varphi^-_\alpha(i)$ будут сходиться к квантили $\varphi_\alpha(d)$. При этом, $P^+_{\varphi^-_\alpha(0)}(d) < \alpha$, а $P^-_{\varphi^+_\alpha(0)}(d) > \alpha$.

В третьей главе рассмотрена двухшаговая задача хеджирования колл-опциона европейского типа с критерием в форме математического ожидания затрат на хеджирование. Предполагается, что длительности операций купли-продажи базового актива случайны, независимы и имеют экспоненциальное распределение, параметр которого зависит от объема покупаемых или продаваемых активов: $\tau \sim \mathrm{E}\left(\frac{\lambda}{|u|}\right)$, где τ — длительности сделки, u — объем сделки, а λ — параметр, характеризующий среднее время покупки и продажи единицы базового актива.

В соответствии с контрактом хеджер должен продать держателю опциона V единиц базового актива по цене K в момент T. Предполагается, что стоимость базового актива определяется следующим случайным процессом:

$$S(t) = S(0) + \mu t + \sigma W(t), \qquad t \in [0, T],$$

где $W(t)$ - стандартный винеровский процесс, $S(0)$ - стартовая цена актива, μ - коэффициент линейного сноса, σ - волатильность. Также предполагается, что если хеджер в момент T не имеет V единиц базового актива, он может докупить недостающее количество актива по цене $S(T)(1+r)$, где $r > 0$ — надбавка за «срочность» операции. Данное предположение обеспечивает исполнение обязательства продавца опциона при любой длительности операций купли-продажи.

Рассматривается динамическая система, описывающая процесс хеджирования. Вектор состояния системы на i-м шаге $z_i \triangleq \mathrm{col}(L_i, V_i, t_i, S_i), i = 1, 2$, где L_i — накопленные потери к началу i-го шага, V_i — количество единиц базового актива к началу i-го шага, S_i — стоимость базового актива к началу i-го шага, а t_i — момент начала i-го шага. Начальное состояние системы задается вектором $z_1 = \mathrm{col}\,(0, 0, S, 0)$.

Управление на каждом шаге рассматривается как функция текущего состояния системы: $u_i \triangleq u_i(z_i), i = 1, 2$.

Множество допустимых управлений U_1 на первом шаге определяется как

$$U_1 \triangleq \{u_1 : u_1 \geq 0\}. \tag{3.46}$$

Множество допустимых управлений U_2 на втором шаге определяется как

$$U_2 \triangleq U_2(z_2) = \{u_2 : z_{12} + u_2 \geq 0, z_{12} + u_2 \leq V\}. \tag{3.47}$$

Динамика системы описывается рекуррентным соотношением:

$$z_{i+1} = f_i(z_i, u_i, X_i), i = 1, 2, 3. \tag{3.48}$$

где вектор X_i случайных параметров определяется как:

$$X_i = \begin{pmatrix} \tau_i \\ \mu\tau_i + \sigma\left(\xi_i\sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i\sqrt{\max\{0, \tau_i + t_i - T\}}\right) \\ \mu(T - t_i) + \sigma\left(\xi_i\sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i\sqrt{\max\{0, T - \tau_i - t_i\}}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.49}$$

а $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ — Н.О.Р.С.В., имеющие стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$. Вместо зависимых приращений $S(T) - S(t_1)$ и $S(T) - S(t_2)$ в модели случайных возмущений используются независимые случайные величины с теми же математическими ожиданиями и дисперсиями. В силу независимости τ_i, ξ_i и η_i, векторы X_1 и X_2 являются независимыми.

Функция перехода f_i определяется следующим образом:

$$f_i(z_i, u_i, X_i) = \begin{pmatrix} L_i + g_i(z_i, u_i, X_i) \\ V_i + u_i \\ t_i + X_{i1} \\ S_i + X_{i2} \end{pmatrix} = z_i + \begin{pmatrix} g_i(z_i, u_i, X_i) \\ u_i \\ \tau_i \\ \mu\tau_i + \sigma\sqrt{\tau_i}\xi_i \end{pmatrix},$$

где $g_1(z_1, u_1, x_1)$ — функция потерь на первом шаге, записанная для реализации x_1 случайного вектора X_1:

$$g_1(z_1, u_1, x_1) \triangleq \begin{cases} u_1 S(0) - u_1(S + x_{12}), & \text{если } \tau_1 > T, S + x_{13} < K; \\ u_1 S(0) + V(S + x_{13})(1 + r) - VK - u_1(S + x_{12}), & \text{если } \tau_1 > T, S + x_{13} \geq K; \\ u_1 S(0), & \text{если } \tau_1 \leq T. \end{cases} \tag{3.50}$$

Функция $g_2(z_2, u_2, x_2)$ потерь на втором шаге, где x_2 — реализация случайного вектора X_2, определяется выражением:

$$g_2(z_2, u_2, x_2) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{при } t_2 > T; \\ u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22}), & \text{при } \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K; \\ u_2 S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK, & \text{при } \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K; \\ u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{23}), & \text{при } \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K; \\ u_2 S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK, & \text{при } \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K. \end{cases} \tag{3.51}$$

В качестве целевой функции рассматриваются суммарные потери при хеджировании

$$\Phi(z_3) = z_{31} = L_3.$$

Рассматривается задача минимизации математического ожидания потерь

$$\Phi_0(u) = \mathbf{M}[\Phi(z_3)] \to \min_{u \in U}. \tag{3.52}$$

Для поиска оптимального управления в задаче минимизации математического ожидания суммарных потерь используется метод динамического программирования:

$$\begin{aligned} \Phi_i(z_i) =& \inf_{u_i \in U_i} \mathbf{M}[\Phi_{i+1}(z_{i+1})|z_i], i = 1, 2; \\ \Phi_3(z_3) =& \Phi(z_3), \end{aligned}$$

где $\Phi_i(z_i)$ — функция будущих потерь.

Условное математическое ожидание функции будущих потерь на последнем шаге определяется с помощью теоремы:

Теорема 3.2. *Если функция потерь на втором шаге определяется согласно (3.51), а вектор X_2 случайных параметров определяется в соответствии с (3.49), то условное математическое ожидание функции будущих потерь равно*

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = L_2 - \\ &-\frac{\mu}{\lambda}u_2^2 e(u_2, z_2) - u_2 e(u_2, z_2)\frac{\mu}{\lambda}V_2\varphi(z_2) - u_2\mu(T - t_2) - u_2(1 - e(u_2, z_2))d_2 + d_3, \\ &\text{где } \varphi(z_2) \triangleq \Phi\left(\frac{K - S_2 - \mu(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right), \qquad e(u_2, z_2) \triangleq e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T - t_2)}, \\ &m_{23}^+ \triangleq \mu(T - t_2) + \frac{\sigma\sqrt{T - t_2}}{\sqrt{2\pi}\,(1 - \varphi(z_2))} e^{-\frac{(K - S_2 - \mu(T - t_2))^2}{2\sigma^2(T - t_2)}}, \\ &m_{23}^- \triangleq \mu(T - t_2) - \frac{\sigma\sqrt{T - t_2}}{\sqrt{2\pi}\varphi(z_2)} e^{-\frac{(K - S_2 - \mu(T - t_2))^2}{2\sigma^2(T - t_2)}}, \qquad d_2 \triangleq r(S_2 + m_{23}^+)(1 - \varphi(z_2)), \\ &d_3 \triangleq \big((V - V_2)(1 + r)(S_2 + m_{23}^+) - VK\big)\,(1 - \varphi(z_2)) - V_2(S_2 + m_{23}^-)\varphi(z_2). \end{aligned}$$

Производная математического ожидания $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ равна:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = -\frac{2\mu}{\lambda}u_2 e(u_2, z_2) - \mu(T - t_2)e(u_2, z_2)\operatorname{sign} u_2 + \\ &+ e(u_2, z_2)(d_2 - \frac{\mu}{\lambda}V_2\varphi(z_2)) + \frac{\lambda}{|u_2|}(T - t_2)e(u_2, z_2)(d_2 - \frac{\mu}{\lambda}V_2\varphi(z_2)) - (\mu(T - t_2) + d_2). \end{aligned}$$

Анализ выражения для $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ и производной $\frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ показывают, что $\frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ непрерывна и имеет не более одного корня слева и справа от нуля. Следовательно, $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ имеет не более двух локальных минимумов на отрезке

$[-V_2, V-V_2]$, по разные стороны от нуля. Оптимальную стратегию u_2^* можно определить, отдельно решив задачи минимизации $\mathbf{M}[g_2(z_2,u_2,x_2)]$ по u_2 слева и справа от нуля. Функция будущих потерь на втором шаге равна

$$\Phi_2(z_2) = L_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2^*, x_2)]. \tag{3.53}$$

Для поиска оптимальной стратегии u_1^* на первом шаге предложен алгоритм:

Алгоритм 3.2.

1. Задать шаг сетки h и требуемое количество реализации N для метода Монте-Карло, положить номер шага i равным 0, $M^* = \infty$ и $u_1^* = 0$.

2. Положить $u_1 = ih$, $M = 0$ и сгенерировать выборку $\{Y_i\}, i = 1 : N$, реализаций случайного вектора X_1.

3. Для каждой реализации Y_j определить z_2 согласно (3.48) и вычислить $\Phi_2(z_2)$ по формуле (3.53). Присвоить $M = M + \frac{1}{N}\left(g_1(z_1, ih, Y_j) + \Phi_2(z_2)\right)$.

4. Если $M < M^*$, то положить $M^* = M$ и $u_1^* = ih$. Перейти к шагу 5.

5. Если $i > \left[\frac{V}{h}\right]$, то завершить работу алгоритма, иначе положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 2.

В результате работы данного алгоритма удается найти оптимальное управлении u_1^* на первом шаге. Величина M^* определяет математическое ожидание суммарных затрат на хеджирование за два шага при оптимальном управлении на первом шаге.

В четвертой главе рассматривается задача управления автоматическим аэростатом с целью удержания аэростата в заданной полосе высот на протяжении фиксированного времени полета. Управление аэростатом осуществляется путем сброса балласта на нижней границе полосы высот и частичным выпуском через клапан рабочего газа на верхней границе таким образом, чтобы при отсутствии внешних возмущений после достижения какой-либо границы полосы аэростат двигался с одной и той же по модулю скоростью в сторону противоположной границы полосы.

Полоса высот, в которой необходимо удерживать аэростат в течение времени T:

$$H \triangleq \{(h,t) : h \in [h_{min}; h_{max}], t \in [0;T]\}. \tag{4.54}$$

Высота $h(t)$ аэростата в момент времени t описывается винеровским процессом с отражением с постоянным по модулю линейным сносом:

$$h(t) \triangleq h_{min} + \mu(t,m)t + \sigma W(t), \tag{4.55}$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, а функция $\mu(t,m)$ определяется как

$$\mu(t,m) \triangleq \begin{cases} \mu(m), & \text{если последней была достигнута нижняя граница } H; \\ -\mu(m), & \text{если последней была достигнута верхняя граница } H, \end{cases}$$

где $\mu(m)$ — положительная строго возрастающая функция, а m — масса одного груза в балласте. Таким образом, при достижении аэростатом границы полосы H происходит релейное переключение средней вертикальной компоненты скорости с $\mu(m)$ на $-\mu(m)$.

Рассматривается задача минимизации математического ожидания времени τ нахождения аэростата за пределами полосы H при условии, что аэростат останется управляемым в течение времени T с вероятностью не меньше заданного уровня α, т.е. запаса балласта хватит на обеспечение управления в течение времени T, а суммарная масса балласта не превышает грузоподъемность аппарата M. В качестве оптимизационных переменных выберем массу единицы груза в балласте (одного мешка с песком) и количество грузов. Обозначим массу одного груза как m, а общее количество грузов в балласте как N. При наличии N грузов можно произвести $2N+1$ управляющее воздействие Получается задача оптимизации:

$$\mathbf{M}[\tau] \to \min_{N,m} \tag{4.56}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{\eta \leq 2N+1\} &\geq \alpha, \\ Nm &\leq M, \\ m &\geq 0, \\ N &\in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где τ — время, в течение которого аэростат находился за пределами полосы H, а η — количество переключений (управлений) за время T полета аэростата.

Для решения задачи (4.56) предложен численный алгоритм, использующий доказанное свойство монотонности вероятности $\mathcal{P}\{\eta \leq 2N+1\}$ по массе m одного груза. Для вычисления математического ожидания τ на каждом шаге алгоритма используется метод Монте-Карло.

В заключении подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые диссертантом к защите.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Получено выражение для математического ожидания потерь хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Предложен алгоритм поиска оптимальной ширины полосы «нечувствительности», минимизирующей средние затраты хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования [1, 6].

2. Получено выражение для функции распределения потерь хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Найдены точки разрыва, значения левых и правых пределов в точках разрыва, а также промежутки монотонности функции распределения потерь [2, 4, 8].

3. Предложен алгоритм построения верхней и нижней оценок квантили безусловного распределения потерь на основе значений квантилей условных распределений потерь при известном числе пересечений полосы «нечувствительности» траекторией курса базового актива [2, 7, 8].

4. Исследована двухшаговая задача хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности выполнения операций покупки и продажи базового актива. Доказано существование не более двух точек локального минимума функции будущих потерь на последнем шаге. Предложен алгоритм поиска оптимальной стратегии на первом шаге, основанный на методе Монте-Карло [3, 5].

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

1. *Кибзун А. И., Соболь В. Р.* Модернизация стратегии последовательного хеджирования опционной позиции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 17, №2. С. 179–192.

2. *Кибзун А. И., Соболь В. Р.* Модификация стратегии последовательного хеджирования. Распределение потерь хеджера // Автоматика и телемеханика. 2015. №11. С. 34–50.

3. *Кибзун А. И., Соболь В. Р.* Двухшаговая задача хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности транзакций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, №3. С. 164–174.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

4. *Sobol V.* Modification of the Stop-Loss Start-Gain Strategy. Distribution of Hedger's Losses // Управление, информация и оптимизация: тезисы докладов Шестой Традиционной всероссийской молодежной летней школы (22-29 июня 2014 г. дер. Григорчиково, Ленинский район, Московская обл.). 2014. М.: ИПУ РАН. 65 с.

5. *Кибзун А. И., Соболь В. Р.* Двухшаговая задача хеджирования европейского опциона при случайной длительности транзакций //Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. 2015. М.: Изд-во МАИ. С. 97–99.

6. *Соболь В. Р.* Модификация метода последовательного хеджирования опционной позиции // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» [Электронный ресурс]. М.: МАКС Пресс, 2013.

7. *Соболь В. Р.* Модифицированная стратегия последовательного хеджирования. Распределение потерь хеджера // 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2014». 17–21 ноября 2014 года. Москва. Тезисы. — СПб.: Мастерская печати, 2014. — 712 С.

8. *Кибзун А. И., Соболь В. Р.* Модификация стратегии последовательного хеджирования. Распределение потерь хеджера // Управление большими системами УБС 2014. Материалы XI всероссийской школы-конференции молодых ученых. Москва, 2014. С. 580–591.

Подписано в печать: 03.12.15
Тираж: 100 экз. Заказ № 1001, 1.25 п.л.
Отпечатано в типографии «КЛЦ103»
г. Москва, Волоколамское шоссе, 4, к. 1, ком. 30
(499) 158-4161 wwww.klc103.mai.ru