

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

На правах рукописи



АУНГ ЧЖО ТХУ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗОНЫ КОНТАКТА ОБОЛОЧКИ ПОД ДАВЛЕНИЕМ
ЗАЖАТОЙ МЕЖДУ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ ПЛАСТИНАМИ**

Специальность 01.02.06 – «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Рабинский Лев Наумович

Москва - 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Литературный обзор	9
Глава 2. Моделирование контакта цилиндрической оболочки эллиптического сечения с жесткими преградами	33
2.1. Аналитическая оценка ширины зоны контакта цилиндрической оболочки эллиптического сечения с жесткими преградами	33
2.2. Оценка ширины зоны контакта на основе разработанного метода	40
2.3. Анализ влияния геометрических параметров на ширину зоны контакта.....	43
Глава 3. Численное моделирование контакта цилиндрической оболочки эллиптического сечения с жесткими преградами	53
3.1. Моделирование контакта цилиндрической оболочка с эллиптическим сечением и жесткими преградами.....	53
3.2. Сопоставление численного и аналитического решений.....	63
3.3. Моделирование контакта цилиндрической оболочки с эллиптическим сечением малой кривизны и жесткими преградами.....	65
3.4. Оценка краевых эффектов при контакте цилиндрической оболочки с жесткими преградами	75
Глава 4. Экспериментальные исследования	83
4.1. Оценка влияния погрешностей геометрии реальной оболочки.....	84
4.2. Исследование цилиндрических оболочек, зажатых между двумя жесткими плитами	98
4.3. Исследование влияния предварительного зазора на контакт эллиптической оболочки с жесткими преградами	102
Заключение.....	108
Список использованных источников.....	109

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что контактные задачи с участием деформированных оболочек различного сечения и плоской поверхности малоизучены. Подобные взаимодействия встречаются в большинстве своем в системах охлаждения, пневмо- и гидросистемах и т. д.

Проблеме решения подобных задач посвящено множество работ, однако аналитического определения ширины зоны контакта, влияние изменения геометрических параметров на ширину зоны до этого никем не исследовалось. Современное развитие метода конечных элементов (МКЭ) и других численных методов позволяет с высокой точностью решать контактные задачи для тонкостенных конструкций в нелинейной постановке с неизвестной зоной контакта и с различными условиями контакта, в том числе, но эти задачи крайне громоздки и требуют существенных машинного времени.

Поэтому развиваемые в настоящей диссертации методы приближенного аналитического расчета таких конструкций, а также результаты численного моделирования и исследования влияния геометрии на напряженно-деформированное состояние (НДС) изделий являются **актуальными**.

Целью работы является:

Целью работы является исследование зоны контакта между цилиндрической оболочкой эллиптического сечения, нагруженного внутренним давлением, расположенного между жесткими плитами. А также разработка метода расчета для определения ширины контакта с учетом начального выставляемого зазора между оболочкой и плитой.

Получение аналитического решения по исследованию напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки эллиптического сечения зажатой жесткими плитами. Сопоставление аналитического и численного решений для составных конструкций сложной формы.

Экспериментальное исследование цилиндрических оболочек различных сечений под давлением, зажатых между жесткими плитами.

Объект исследований

Объектом исследований настоящей диссертации являются деформируемые тонкостенные цилиндрические оболочки эллиптического сечения, контактирующие с жесткими преградами.

Предмет исследований

Предметом исследований является проблема определения ширины зоны контакта деформируемой цилиндрической оболочкой под давлением зажатой между абсолютно жесткими пластинами, с учетом действующего внутри оболочки давления, геометрии сечений оболочки и предварительного зазора.

Методы исследования.

Для решения поставленных задач применяются аналитические и численные методы механики деформируемого твердого тела, теории упругости, теории дифференциальных уравнений. Для реализации аналитических методов применялась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Для численного решения используется метод конечных элементов, реализованный в системе Ansys Workbench. На основе разработанного экспериментального метода проводилось исследование ширины зоны контакта с использованием испытательного стенда и цилиндрических оболочек различных сечений.

Научная новизна:

1. Получено аналитическое решение для определения зоны контакта между оболочкой эллиптического сечения под давлением, зажатой между двумя плитами.

2. Проведено численное решение в Ansys Workbench для определения зоны контакта между оболочкой эллиптического сечения под давлением, зажатой между двумя плитами. Проведена апробация полученных результатов.

3. Создан испытательный стенд для проведения экспериментальных исследований контакта цилиндрической оболочки эллиптического сечения и жесткой преграды.

4. Получены зависимости давления, действующего в цилиндрической оболочке эллиптического сечения на ширину зоны контакта, а также влияние предварительного зазора и геометрии оболочки.

5. Исследовано влияние геометрических параметров сечения цилиндрической оболочки на ширину зоны контакта.

Теоретическая и практическая значимость.

Представлены методы аналитического расчета для цилиндрической оболочки эллиптического сечения. В ходе реализации данного метода были получены аналитические решения для определения контакта цилиндрической эллиптической оболочки с различными вариантами предварительного зазора между оболочкой и преградой. Разработанные методы позволяют выбрать наиболее подходящую геометрию с учетом действующего давления и необходимого контакта.

Создан испытательный стенд для определения зоны контакта. Проведены механические испытания цилиндрических оболочек различных сечений без зазора и с варьированием предварительного зазора. Из полученных результатов испытаний была установлена зависимость увеличения давления от зоны контакта оболочки и жесткой плиты, а также влияние предварительного зазора на указанную зависимость.

Проведено численное исследование НДС и контакта оболочек различных сечений с учетом предварительного зазора. Исследовано влияние геометрических параметров оболочки на изменение контакта с жесткой плитой в зависимости от действующего давления.

Обоснованность и достоверность результатов, полученных при разработке аналитических методов расчета, определяется примененными строгими методами механики деформируемого твердого тела, теории упругости, теории дифференциальных уравнений. Хорошую согласованность показало сопоставление численных и аналитических результатов моделирования. Для оценки влияния параметра предварительного зазора на контакт оболочки с жесткой пластиной проведены экспериментальные исследования. Численное моделирование проведено в системах Ansys Workbench с использованием детализированных моделей изделий, высокоплотной сетки. Достоверность численных расчетов оценивалось путем варьирования размера конечно-элементной сетки, а также сопоставлением полученных решений в рамках упрощённых аналитических моделей.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Новые аналитические методы для определения ширины зоны контакта цилиндрической оболочки эллиптического сечения под давлением зажатых между абсолютно жесткими преградами. Полученные методы позволяют спрогнозировать необходимую ширину зоны контакта между оболочкой и жесткими преградами в зависимости от геометрических параметров оболочки и действующего внутреннего давления.

2. Результаты численного уточняющего решения в Ansys Workbench для определения ширины зоны контакта между оболочкой эллиптического сечения под давлением, зажатой между двумя плитами, позволяющие исследовать влияние краевого эффекта на ширину зоны контакта и провести сравнительный анализ по влиянию геометрических параметров оболочки, предварительного зазора и действующего внутреннего давления на ширину зоны контакта.

3. Изготовлен и модернизирован испытательный стенд для проведения экспериментальных исследований контакта цилиндрических оболочек эллиптического сечения. Получены экспериментальные результаты зависимости

ширины зоны контакта от действующего давления для двух типов оболочек при действии различного внутреннего давления, предварительного зазора по длине, а также с учетом конструктивных особенностей стыковки оболочки. Проведено 3D сканирование исследуемых оболочек и дан сравнительный анализ реальной геометрии оболочек от численного и аналитического моделирования.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. Бабайцев А.В., Рабинский Л. Н., Аунг Чжо Тху. Экспериментальное исследование зоны контакта цилиндрических оболочек различных сечений, расположенной между двумя параллельными жесткими пластинами с зазором. // Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Том 1. Вятчи, 16-20 марта 2020 г. М., МАИ, 2020, С.17.

2. Аунг Чжо Тху, Рабинский Л. Н. Моделирование изменения зоны контакта цилиндрической оболочки овального и плоскоовального сечения, расположенной между двумя абсолютно жесткими пластинами с учетом зазора. // Материалы XXVI Международного симпозиума, «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Том 1. Вятчи, 16-20 марта 2020 г. М., МАИ, 2020, С.14.

3. Аунг Чжо Тху, Рабинский Л. Н. Исследование зоны контакта оболочки под давлением зажатой между абсолютно жесткими пластинами. // Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» 12-13 ноября 2018 г. М., МАИ, С.14

4. Аунг Чжо Тху, Рабинский Л. Н. Решение контактной задачи для цилиндрических оболочек различного поперечного сечения, зажатых между абсолютно жесткими пластинами. // Материалы IX международной научно-

практической конференции (Проблемы безопасности на транспорте) Часть 2, 28 – 29 ноября 2019 г. БелГУТ, Гомель, Беларусь, 2019, С 268

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 3 работы, в том числе 1 научная работа в журнале из списка Scopus и 2 научные работы в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК РФ:

1. Kyaw Thu AUNG, A.V. Babaytsev; L. N. Rabinskiy. Investigation of the contact zone of a cylindrical shell located between two parallel rigid plates with a gap // INCAS BULLETIN Scientific Journal. Volume 12, pp. 43 – 52. DOI: 10.13111/2066-8201.2020.12.S.4
2. Аунг Чжо Тху, А. В. Бабайцев, О.В.Егорова, М. И. Мартиросов, Л. Н. Рабинский. Исследование влияния одностороннего тонкого полимерного покрытия на механические свойства стальных пластин в испытаниях на изгиб // Известия Тульского государственного университета. (Технические науки) 2018 г. №7, С. 175-182.
3. Аунг Чжо Тху, А. В. Бабайцев. Исследование влияния геометрических параметров цилиндрической оболочки под давлением зажатой между абсолютно жесткими пластинами на ширину зоны контакта // Труды МАИ, 2020 г. № 113. DOI: 10.34759/trd-2020-113-18

Объём и структура диссертации. Работа содержит 121 страницу основного текста, включая 61 рисунок, состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы в количестве 170 ссылок.

ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Одним из самых распространенных типов современных и перспективных конструкций являются тонкостенные оболочки. Стремительно растет множество конструкций типа оболочек, которые находят применение в технике и строительстве. Для описания поведения оболочек при работе в тех или иных условиях существуют различные способы их классификаций [1-4].

К тонким оболочкам можно отнести такие элементы конструкций как резервуары, цистерны, газовые баллоны, корпуса аппаратов химических агрегатов и др. Тонкостенные оболочки цилиндрической или конической формы являются элементами планеров летательных аппаратов [5]. Некруговые цилиндрические оболочки используются в качестве конструкций современных пассажирских самолетов [6-7]. Тонкостенные оболочки, не являющиеся оболочками вращения, и имеющие плоскоовальную форму сечения используются в качестве теплообменников приемо-передающих модулей фазированных антенных решеток [8]. Цилиндрическая часть баллонов высокого давления, применяемых в ракетно-космической технике для хранения инертных газов, представляет собой цилиндрическую оболочку [9]. В качестве емкостей или днищ емкостей достаточно широко используются эллипсоидальные оболочки [10]. Например, для сжижения углеводородных газов применяются баллоны цилиндрической формы с эллиптическими днищами.

В процессе эксплуатации оболочка подвергается воздействию со стороны соседних элементов конструкции. Причиной возникновения этих воздействий могут быть инерционные, гравитационные или тепловые эффекты. Наличие различного типа патрубков, кронштейнов, подвесов и других присоединений приводит к тому, что во многих случаях действие внешних нагрузок на оболочку носит ярко выраженный местный характер, причем возникающие локальные напряжения могут достигать значительных величин и поэтому требуют самого тщательного рассмотрения в целях выработки рациональных конструктивных решений [11].

Для некоторых конструкций, полученных на основе оболочек, требования к конструкции, правилам расчета и технологии их производства регламентируются ГОСТами [12-16]. В работе Юдина [10] было отмечено, что методики расчета, представленные в ГОСТ, основанные на оценках прочности отдельных элементов конструкции и использующие простейшие формулы, полученные по упрощенной линейной теории оболочек – безмоментной, не всегда позволяют получить достаточно точный результат. Известно, что при соединении эллиптической оболочки с цилиндрической условия безмоментности не могут быть удовлетворены в принципе [17]. Поэтому актуальны исследования на основе общей теории и по расчетным схемам, рассматривающим конструкцию поэлементно и как составную оболочку вращения с учетом условий сопряжения обечайки (цилиндрической части) и днищ. Целесообразна также проверка применимости линейной теории на основе геометрически нелинейного расчета. Это позволяет точнее определить особенности напряженно-деформированного состояния (НДС) баллонов, сделать выводы о степени достоверности гостовских расчетов, выполнять более адекватное проектирование и выбор рациональных вариантов. Повышение точности расчетов важно для обеспечения безопасности конструкций.

Развитие теории оболочек идет по двум разным направлениям. Первое, называемое классическим, продолжило исследования по выводу уравнений теории оболочек из уравнений пространственной теории упругости. Второе неклассическое направление связано с прямым подходом к построению теории оболочек. Суть его в моделировании оболочки деформируемой поверхностью и последующем изучении механики таких поверхностей [4].

Пластины и оболочки представляют собой трехмерные тела, один из размеров которых много меньше двух других, что позволяет рассматривать их как двумерные тела, обладающие тем не менее значительной несущей способностью. Решение краевых задач для пластин и оболочек на основе трехмерных уравнений теории упругости представляет значительные трудности, поэтому для расчета такого рода конструкций строятся двумерные модели, учитывающие специфику

(особенности) их геометрии и напряженно-деформированного состояния. Построение таких моделей и разработка методов решения соответствующих краевых задач составляют содержание самостоятельного раздела механики твердого деформируемого тела - теории пластин и оболочек [18].

Существуют различные методы редукции трёхмерной задачи теории упругости к двумерной. Редукция трёхмерной задачи к двумерной позволяет не только существенно упростить математическую задачу, уменьшая число независимых переменных на единицу, но и учесть особенности распределения напряжений и деформаций в тонких телах - пластинах и оболочках.

К классическому направлению теории оболочек относят в первую очередь теории типа Лява, которые получили свое развитие в работах [19-23]. Под неклассическими теориями оболочек понимают прежде всего теории типа Тимошенко, которые учитывают деформации поперечного сдвига [24]. Эти теории освещены в работах [24-27]. Теории типа Тимошенко подходят для описания поведения таких оболочек как многослойные оболочки с резко различными материалами слоев. Теории типа Лява и Тимошенко содержат в себе две определяющие особенности: 1) теории описываются в терминах двумерного многообразия, 2) в теориях используются исключительно концепции усилий и моментов.

Уравнения теории оболочек учитывают деформации поперечного сдвига, которые вводятся в теорию с помощью гипотез Кирхгофа и Тимошенко. При устранении деформаций поперечного сдвига общие уравнения теории оболочек сводятся к уравнениям классической теории оболочек, которая строится на базе гипотез Кирхгофа – Лява и позволяют получить наиболее простую расчетную модель материала оболочки а также сводить трехмерные уравнения механики деформируемого твердого тела к самым простым двумерным уравнениям механики оболочек. Двухмерная теория слоистых оболочек построена с помощью метода физической дискретизации трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела.

Гипотезу Кирхгофа-Лява обычно называют гипотезой прямых и неизменяемых нормалей. Кроме того, предполагается, что нетангенциальные напряжения малы по сравнению с тангенциальными и ими можно пренебречь. В работе В. Новожилова и Р. Финкельштейна [28] произведена попытка оценки погрешности, вносимой в уравнения теории оболочек гипотезами Кирхгофа-Лява. Однако влияние этой работы на улучшение теории не оказалось конструктивным. Позже Койтер [29] подтвердил эти оценки и ввел понятие о согласованной теории, когда все уравнения записаны с одинаковой степенью точности. В теориях оболочек типа Лява [30-34] принимается условие, что отношение γ/R (γ – размерная координата, отсчитываемая по нормали к срединной поверхности оболочки, R – некоторый характерный радиус срединной поверхности оболочки) мало по сравнению с единицей в выражениях для напряжений и деформаций. Некоторые из авторов оставляют члены порядка γ^2/R^2 , другие частично или полностью отказываются от гипотез недеформируемости нормали. При этом считается, что различие отдельных подходов заключено именно в формулировке зависимостей между напряжениями и деформациями. Позднее оценки [28] были дополнены оценками погрешностей в соотношениях упругости [35, 36], т.к. предполагалось [34], что уравнения статики оболочки и соотношения деформации-перемещения если и не считать точными, но можно считать более точными, чем с оценкой γ/R . Однако вопрос о погрешностях гипотез типа Кирхгофа-Лява и соотношениях упругости в теории оболочек не нашел исчерпывающего и обоснованного ответа. Различные уточненные теории, несмотря на их значимость, также не являются до конца последовательными [37].

Влияние деформирования на изменение температурного поля оболочки весьма незначительно, а его пренебрежение вносит существенные упрощения при решении задач термоупругости. Этот прием позволяет разделить общее решение на два самостоятельных решения. Сначала решается задача по определению температурного поля оболочки, а затем при найденном температурном поле определяется напряженно-деформированное состояние оболочки, учитывающее изменение температуры в процессе её деформирования.

Применение гипотез Кирхгофа - Тимошенко вносит изменения в уравнения классической теории оболочек и приводит теорию оболочек в полное соответствие с естественными краевыми условиями [38].

В уравнения теории оболочек вместо напряжений вводятся внутренние силы и моменты, которые выражаются через напряжения.

Краевые условия, определяющие из всего многообразия решений дифференциальных уравнений теории оболочек решение конкретной задачи, находятся из условий взаимодействия оболочки с окружающей средой.

Для обеспечения равновесия оболочки с окружающей средой, при использовании гипотез Кирхгофа-Тимошенко, в каждой точке срединной поверхности должно быть задано пять краевых условий.

Кроме того, существует три теории расчета оболочек – общая или моментная, полубезмоментная и безмоментная. В рамках моментной теории оболочек можно оценить изгибные эффекты, связанные с интенсивными напряжениями в местах действия сосредоточенных сил и моментов, крепежа оболочки, резких изменений формы в случае, когда оболочка имеет резкий переход и жесткие защемления и, кроме того, нагружена сосредоточенной силой и моментами. Основные положения безмоментной теории оболочек заключаются в следующем: 1) нагрузки, действующие на поверхности оболочки, могут считаться перпендикулярными им и симметричными относительно оси вращения оболочки; 2) вследствие малой толщины оболочки сопротивление изгибу отсутствует (изгибающий момент не возникает); 3) напряжения по толщине стенки оболочки распределены равномерно.

При определенных условия закрепления оболочка способна воспринимать плавно изменяющуюся нагрузку и не очень резкое изменение температуры без изгибания срединной поверхности [170]. В этом случае ее внутренние усилия сводятся к тангенциальным силам, линии, действия которых совпадают с касательными к координатным линиям срединной поверхности оболочки. Изгибающие и крутящие моменты становятся пренебрежимо малы, либо полностью исчезают. Напряжения почти равномерно распределяются по толщине

оболочки. Обеспечивается наиболее равномерная загрузка материала и самое эффективное использование оболочечных конструкций. Решение уравнений безмоментной теории намного проще решения уравнений общей теории оболочек. Часто решения, полученные на основе безмоментной теории оболочек, оказываются близкими к точным решениям.

При безмоментном напряженном состоянии материал оболочки загружается наиболее равномерно по всей её толщине, что позволяет создавать самые легкие оболочечные конструкции, поэтому сформулированные критерии безмоментности можно рассматривать в качестве рекомендаций по созданию эффективных конструктивных решений. Безмоментная работа оболочки является тем идеалом, к которому всегда следует стремиться при создании оболочечных конструкций.

Путём выбора геометрических параметров оболочки и бортовых подкреплений в большинстве случаев удаётся добиться работы основной части оболочки в безмоментном напряженном состоянии, локализовав моментное напряженное состояние в узкой зоне, примыкающей к краю оболочки. Моментное напряженное состояние у края оболочки называют краевым эффектом. Оболочечную конструкцию следует считать удачной, если напряжения краевого эффекта не превосходят безмоментных напряжений.

Но безмоментную теорию нельзя эффективно использовать для расчета длинных цилиндрических оболочек [39]. Другим недостатком безмоментной теории является невозможность выполнения граничных условий на продольных кромках открытой оболочки. В.З. Власовым [40] была предложена приближенная, так называемая полубезмоментная теория цилиндрической оболочки, лишенная этих двух недостатков. Теория была основана на следующих гипотезах: 1) изгибающий и крутящий моменты в сечениях, нормальных к образующей, несущественны, и ими пренебрегают, 2) принимают, что сдвиг в срединной поверхности отсутствует, и также отсутствует деформация, 3) считают, что коэффициент Пуассона равен нулю. Указанные гипотезы обосновывались физическими соображениями. Однако в дальнейшем было показано, что эти гипотезы не являются необходимыми [41-42]. Вместо этого можно ввести лишь

одну гипотезу о характере изменениях всех функций (внутренних сил, перемещений) в окружном и продольном направлениях.

В работе [43] был представлен алгоритм конечно-элементного расчета упругопластического деформирования оболочек переменной толщины и произвольной формы, выполненных из упрочняющегося материала с учетом нагружения. Для дискретизации задачи применяется изопараметрическая конечно-элементная модель оболочки на основе гипотез типа Тимошенко. Модель позволяет производить расчет как тонкостенных, так и не тонких оболочек с учетом поперечного сдвига, и изменения метрики по толщине. Описание упругопластического поведения основано на теории пластического течения с применением ассоциированного закона и критерия текучести Хубера-Мизеса. Система нелинейных уравнений МКЭ решается методом дискретного продолжения решения по параметру с итерационной коррекцией на шагах. Численно исследована сравнительная эффективность различных вариантов организации итерационного процесса в сочетании с процедурой с известными результатами.

Теорией расчета оболочек переменной толщины и некругового очертания также занимался коллектив авторов Булатов С.Н. и др. [44]. Ими были получены аналитические решения для цилиндрической оболочки с произвольной направляющей и кессона с переменной толщиной стенки; по размаху предполагалось наличие продольного набора стрингеров, расположенных с достаточно малым шагом.

Зверяев [36] предложил конструктивную теорию тонких упруги оболочек согласно которой задача построения уравнений теории оболочек решается так, как это принято в математической физике. Трехмерные уравнения в криволинейных координатах приводятся к безразмерному виду, позволяющему выделить малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки. Шесть граничных условий на лицевых поверхностях определяют три нетангенциальных напряжения по заданным поверхностным нагрузкам. Тождественными преобразованиями уравнения приводятся к виду, позволяющему в соответствии с

итерационной трактовкой полуобратного метода Сен-Венана по заданной части напряжений и перемещений вычислить остальные неизвестные.

В различных областях техники в последнее время все чаще применяются конструкции из композитных материалов [45-47], особенно в виде тонкостенных оболочек [48-49]. Исследования в данной области проводятся не только в России, но и за рубежом [50-54]. Возобновление интереса к исследованию оболочечных конструкций в последние годы вызвано, прежде всего, развитием вычислительной техники, которая позволила теперь по-новому взглянуть на нелинейные проблемы оболочек. Также немалую роль здесь играет появление новых материалов, позволяющих существенно улучшить прочностные характеристики конструкций. Активно изучается поведение цилиндрических оболочек [55-56], которые применяются в самых разнообразных областях техники.

При использовании таких композитных материалов, как, например, железобетон [57] или стеклопластик, армирующие элементы часто располагают вдоль осей криволинейной системы координат оболочки, и в таком случае конструкцию можно считать ортотропной [58].

Для повышения жесткости тонкостенные конструкции часто подкрепляются ребрами [59-62], что играет особо важную роль при строительстве большепролетных покрытий и перекрытий.

Основы теории анизотропных пластин и оболочек, в частности, ортотропных, отражены в работах [63-67]. В работе [67] исследуется реакция ортотропной слоистой цилиндрической оболочки на идеальный импульс нормального давления, распределенного на малой прямоугольной площадке, ограниченной линиями кривизны. Разработка методов расчета слоистых ортотропных оболочек на локальные нагрузки стимулируется как широким применением в технике материалов типа армированных пластиков, так и существованием определенного круга инженерных проблем, в которых локальные воздействия на конструкцию являются типичными. Наиболее часто такого рода проблемы возникают при создании современных летательных аппаратов различных типов и назначений.

Большая роль в теории оболочек отведена решению контактных задач. Контактные задачи теории пластин и оболочек возникают при рассмотрении взаимодействия пластин и оболочек с жесткими и упругими телами (штампами), ребрами жесткости, при взаимном контакте пластин и оболочек [69]. Сутью контактных задач является определение усилий взаимодействия двух контактирующих тел – контактных реакций и области контакта или зоны контакта, если она неизвестна [70].

Существует два пути решения контактных задач:

1 Первый путь заключается в интегрировании уравнений равновесия каждой оболочки в области контакта S и вне ее и «склеивании» полученных решений на границе и поверхности контакта. Решение контактных задач по этому методу даже для одномерных задач сводится к решению большого числа уравнений.

2 Второй способ основан на использовании функций влияния. Если удастся построить функцию влияния для каждого объекта, то решение контактной задачи сводится к решению интегральных уравнений относительно контактного давления. Наличие функции влияния значительно сокращает объем вычислительной работы, поскольку автоматически выполняются краевые условия для оболочек и условия сопряжения решений на границе. Остается поставить статические или геометрические условия совместности перемещений или деформаций в области S .

Вопрос о количестве и смысле краевых условий в теории оболочек также, как и в теории пластин не имеет удовлетворительного объяснения, несмотря на большое количество работ на эту тему [71]. Н.А. Кильчевский даже выдвинул предположение, что невозможность удовлетворить всем краевым условиям первой или второй краевой задачи теории оболочек приводит к возникновению представления о наличии некоторого внутреннего противоречия в теории в целом [72].

На данный момент существует большое количество постановок контактных задач и методов их решения. Оценка прочности элементов конструкций,

плотности соединений, повреждаемости их внешних слоев требует постановки и решения задач одностороннего механического взаимодействия тонких оболочек с абсолютно жесткими телами (штампами), упругими основаниями и оболочками [73]. В работе [74] подробно рассмотрены осесимметричные задачи взаимодействия цилиндрических и сферических оболочек с жесткими телами и между собой. Например, посадка цилиндрических оболочек разной длины (рисунок 1.1 а), взаимодействие сферической оболочки с жестким основанием (рисунок 1.1 б), контакт сферических оболочек (рисунок 1.1 в), нелинейное взаимодействие сферической оболочки с жесткой плоской преградой с позиции нелинейной теории (рисунок 1.1 г).

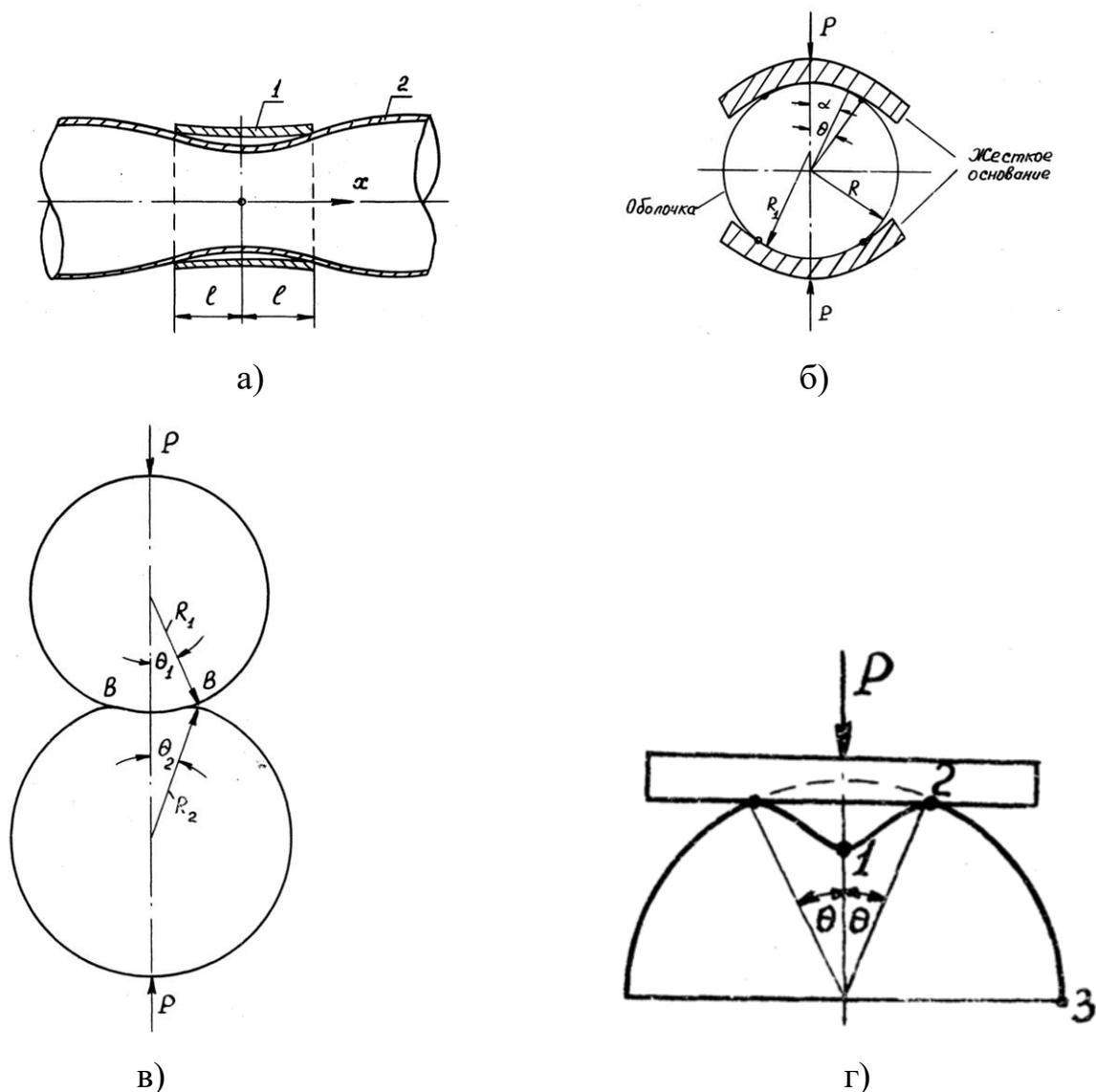


рисунок 1.1. Взаимодействие сферических оболочек с жесткими телами и между собой

Наиболее полно изученными считаются задачи взаимодействия со штампами пластин и оболочек, НДС которых описано линейной теорией [75-76]. Построены аналитические решения, предложен ряд численных методов. Выявлены особенности применения различных теорий оболочек в контактных задачах. Предложен простой способ регуляризации, позволяющий приблизить результаты, получаемые на основе классической теории тонких оболочек, к данным теории упругости. Вместе с тем необходимо искать новые подходы и эффективные методы для изучения НДС гибких тонкостенных элементов с учетом физической нелинейности материала в условиях их одностороннего взаимодействия с жесткими телами.

Исследованию устойчивости элементов тонкостенных конструкций, связанных с упругой средой посвящены работы [77-78].

Задачи о контактном взаимодействии между тонкими оболочками особенно сложны, поскольку при их решении приходится одновременно определять НДС и зоны контакта двух и более оболочек, в общем случае различной формы. Наиболее проста линейная постановка для цилиндрических оболочек разной длины, установленных с натягом. Без учета обжатия, т.е. когда в решение входят сосредоточенные поперечные силы на границе зоны контакта, задача изучена авторами работ [79-80]. Взаимодействие двух соосных цилиндрических оболочек разной длины с зазором между ними при нагружении внутренним давлением оболочки меньшего радиуса изучено в [81-82]. Взаимодействие двух сферических оболочек рассмотрено по теории Кирхгофа-Лява в [83], причем обнаружено, что контактная реакция – распределенная по окружности сосредоточенная сила. Решение этой же задачи основано на теории Тимошенко в [84]. На границе зоны контакта получено контактно давление, равное нулю, хотя оно должно было бы принять конечное значение.

Контакт двух круглых пластин, установленных с зазором при нагружении одной из них, изучен в [85] с использованием теории Жермен-Лагранжа-Кирхгофа. На границе зоны контакта обнаружены сосредоточенные сила и момент.

Геометрически нелинейная теория оболочек применена в работах [86-87] для изучения МКЭ контакта между слоями гофрированных мембран. Условия контакта здесь представлены специальными физически нелинейными элементами между узлами слоев, входящих в соприкосновение.

Проблема изучения механического поведения слоистых оболочек с неидеальным сопряжением слоев представляет собой особый класс контактных задач. Для построения теории таких оболочек и методов их расчета обычно используют дискретный подход, заключающийся в том, что для каждого из слоев записывают полную систему соотношений выбранной теории оболочек и замыкают ее кинематическими и статическими условиями сопряжения слоев. Дискретный подход для пластин со слоями Тимошенко реализован в [88] с помощью предложенного авторами матричного метода, приводящего задачу к системе интегральных уравнений относительно контактного давления в неизвестных априори зонах. Здесь учтена возможность появления разрывов областей соприкосновения слоев. Наиболее полно разработана дискретная теория в [89-91], где построены системы уравнений и функционалы, учитывающие весь спектр возможных условий неидеального контакта слоев.

Методика решения контактных задач для тонкостенных элементов конструкций, поведение которых подчинено нелинейным соотношениям, включает в себя сочетание итеративных процессов отыскания зон контакта и нелинейного анализа НДС и устойчивости оболочек. Нелинейной теории оболочек посвящена обширная литература [92-99]. Линеаризация разрешающих уравнений и применение различных шаговых процессов – основа большей части исследований. Такой путь неизбежен при описании поведения материала оболочки инкрементальными соотношениями (теории пластического течения, ползучести). Линеаризованные краевые задачи решают методами конечных разностей [100-103], вариационно-разностным [104], конечных элементов [105-106], методами Рунге [107] и Бубнова-Галеркина [108]. Перечисленные методы сводят задачу к системе линейных алгебраических уравнений и удобны для оболочек сложной формы.

Для расчета оболочек вращения, а также оболочек с прямоугольным параметрическим планом широко используется аппроксимация системы дифференциальных уравнений в частных производных системой в обыкновенных производных и метод Ньютона. Линеаризованная краевая задача решается сведением ее к ряду задач Коши с дискретной ортогонализацией по Годунову [109-111]. Такой подход позволяет построить эффективные алгоритмы численного изучения прочности, устойчивости, собственных и вынужденных колебаний оболочек с учетом геометрической и физической нелинейностей задачи.

Плоские контактные задачи для упругой полуплоскости, взаимодействующей со штампом в отсутствии сил трения, подробно рассмотрены в работе [112]. В качестве граничных условий для данного класса задач принимается известной величина нормального перемещения в области контакта, тангенциальная составляющая перемещения под штампом принимается равной нулю. Методы решения контактных задач данного класса с помощью функций комплексной переменной, даны в работах [112-114]. Отмечено, что контактные задачи без трения могут быть сведены к решению задачи Дирихле для гармонической функции. К числу решенных задач контактного взаимодействия данного типа относятся задачи нагружения упругой полуплоскости жестким штампом в условиях плоской деформации, задача о контакте двух упругих тел, ряд контактных задач для анизотропной упругой полуплоскости и некоторые другие задачи.

При наличии трения (тангенциальных контактных усилий) решение плоских контактных задач значительно усложняется. Граничные условия в контактной задаче с трением принимаются следующие: на границе контакта дана величина нормального перемещения, связь между нормальными и тангенциальными контактными усилиями в зоне контакта подчинена закону Амонтона-Кулона. Обычно контактная задача с учетом трения решается в предположении либо о полном сцеплении контактирующих поверхностей, либо о действии по всей области контакта силы трения скольжения. Решена контактная задача для случая, когда на всей площадке контакта действуют силы трения, подчиняющиеся закону Амонтона-Кулона. Задача приводится к отысканию одной функции

комплексного переменного. Особую сложность представляют контактные задачи, где область контакта может включать и область сцепления, и область проскальзывания. Плоская контактная задача с трением, в предположении наличия области сцепления и проскальзывания, для штампа, вдавливаемого в упругую полуплоскость, приближенно решена Галиным [112].

Большое количество работ посвящено проблеме решения задач, в которых перемещения оболочки при деформациях ограничено контактом оболочки с жесткими поверхностями (рисунок 1.2) [42, 68-70, 115-116]. Задачи в нелинейной постановке с учетом больших прогибов рассматривались в [117]. Задачи нестационарного взаимодействия оболочек с препятствиями рассматривались в [118-120]. Современное развитие МКЭ и других численных методов позволяет с высокой точностью решать контактные задачи для тонкостенных конструкций в нелинейной постановке с неизвестной зоной контакта и с различными условиями контакта, в том числе, с учетом нелинейных законов для трения и адгезионного взаимодействия [121-125]. Например, достаточно надежный алгоритм численного решения задач о контактном взаимодействии тел предоставляют MSC.Software [126-128] и в частности, MSC.Marc. Некоторые из многих возможностей MSC.Marc – способность решать сложные контактные задачи и (что еще более важно) способность самостоятельно устанавливать сложные контактные условия. Контакт рассматривается как нелинейное граничное условие, в котором задаются тела, входящие в контакт, тела могут быть абсолютно твердыми и деформируемыми. Нет никакой необходимости устанавливать, какое тело входит в контакт и с каким телом оно будет контактировать. Нет понятия контактных пар или ведущих/ведомых. По умолчанию все контактирующие тела могут прийти в соприкосновение друг с другом и сами с собой (исключая случай контакта твердого тела с твердым) [129]. Также известно достаточно много работ, в которых аналитически решаются задачи деформации балок и пластин, контактирующих с жесткой поверхностью [42, 130-138].

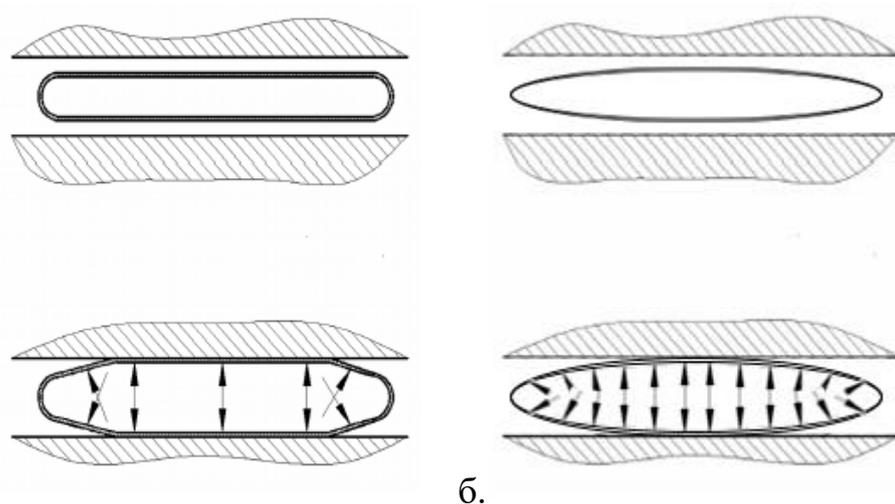


рисунок 1.2. Жесткие поверхности, ограничивающие перемещения оболочек
(а – плоскоовального сечения, б – эллиптического сечения)

В монографии Э.И. Григолюка [42] представлен анализ результатов применения различных теорий пластин для построения решения в задаче о деформациях прямоугольной пластинки, изгибаемой под действием жесткого штампа (рисунок 1.3).

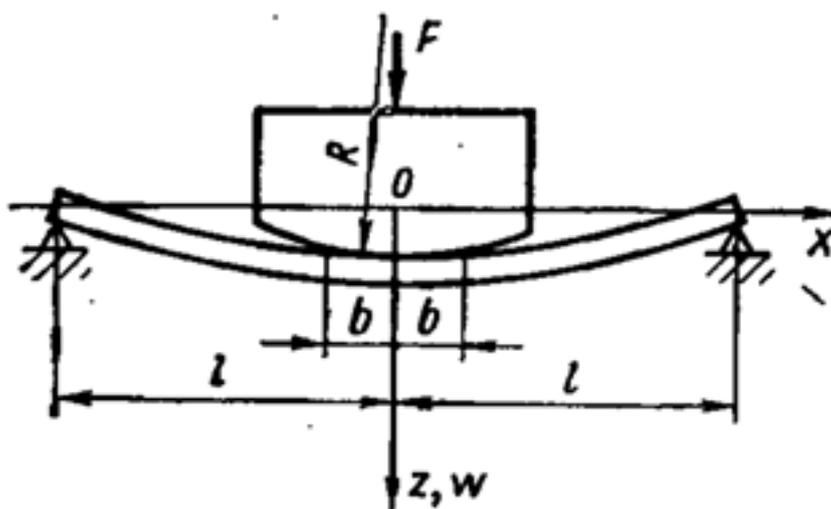


рисунок 1.3. Цилиндрический изгиб пластины жестким штампом
(R – радиус штампа; F – действующая сила; b – ширина зоны контакта; l – половина расстояние между опорами; w – прогиб; z, x – оси координат)

Было показано, что при использовании теории пластин, построенной на основе гипотез Кирхгоффа, действие штампа сводится к воздействию двух сосредоточенных сил-реакций, приложенных на краях зоны контакта. Это решение является некоторым приближением к реальному распределению давления, возникающего в контактной области. Оно позволяет приближенно оценить деформированное состояние и ширину зоны контакта пластинки и штампа.

В.И. Моссаковский и др. [116] представили решение ряда контактных задач: контактных задач для составной оболочечной конструкции, взаимодействующей с упругими ложементами; контактных задач для цилиндрических оболочек, взаимодействующих с упругими ложементами; контактных задач для дискретно подкрепленных круговых колец и ложементов; контактных задач для элементов оболочечных конструкций при переменных зонах контакта. Для решения контактных задач В.И. Моссаковским использовались общие методы решения контактных задач для оболочечных конструкций, взаимодействующих с ложементами. Эти методы позволяют построить решение для произвольных систем оболочек при произвольном нагружении. Решение при этом построено в виде тригонометрических рядов. Особое внимание уделялось оценке влияния длины оболочки при различных граничных условиях на распределение контактного давления. Также в работе рассматривались различные подходы к упрощению контактных задач. Например, в контактной задаче для подкрепляющего цилиндрическую оболочку упругого шпангоута, нагруженного через жесткий круговой ложемент (рисунок 1.4) были обоснованы следующие предположения: 1) жесткость подкрепляющего шпангоута велика по сравнению с жесткостью оболочки в связи с чем, допустимо при задании усилий, действующих со стороны оболочки на шпангоут, пренебречь деформациями шпангоута, 2) ложемент является абсолютно жестким, поэтому кривизна шпангоута не изменяется на участке контакта и на его границах возможно появление сосредоточенных сил.

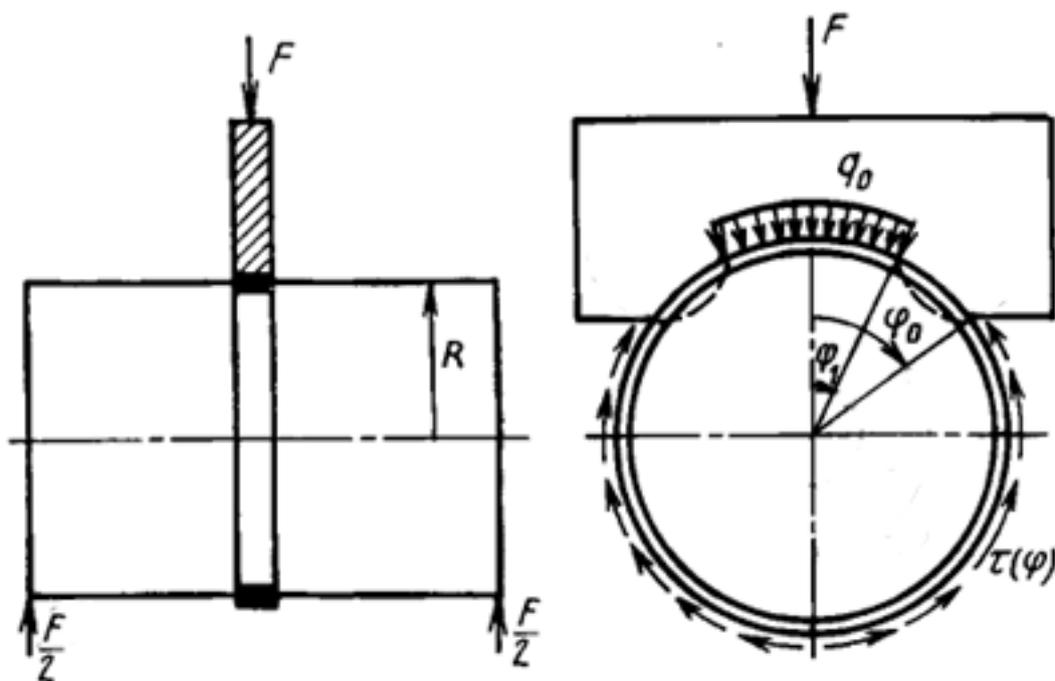


рисунок 1.4. Упругий шпангоут, подкрепляющий цилиндрическую оболочку (F – действующая нагрузка; R – радиус оболочки; q_0 – распределенная нагрузка;)

Большое число контактных задач было решено Артюхиным Ю.П. Им, совместно с Карасевым, было исследовано действие жесткого штампа на пологую сферическую оболочку и пластину [140] и исследованы задачи контакта прямоугольных и круглых пластин, изготовленных из разнородного трансверсально-изотропного материала, при действии сосредоточенной и равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенного момента [141].

Решение двумерной контактной задачи о давлении цилиндрического штампа на тонкую, шарнирно опертую по концам, замкнутую цилиндрическую оболочку (рисунок 1.5) строилось на основе метода механических квадратур, последовательными приближениями. Для решения задачи использовалась техническая моментная теория оболочек, и предполагалось, что контакт является гладким и односторонним, а прогибы малыми. Численные результаты показали, что при некоторых геометрических параметрах оболочки и штампа можно получить неодносвязную область площадки контакта. При больших перемещениях можно получить отрыв верхних точек оболочки от штампа по всей его ширине.

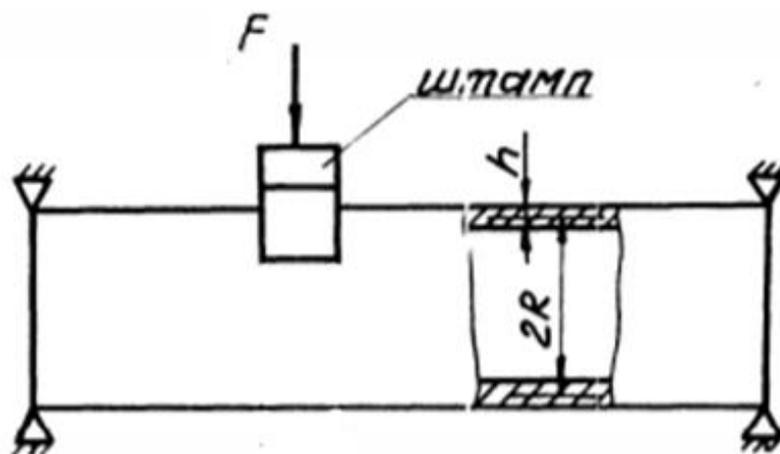


рисунок 1.5. Иллюстрация давления цилиндрического штампа на тонкую, шарнирно опертую по концам, замкнутую цилиндрическую оболочку (F – действующая нагрузка; R – радиус оболочки; h – толщина оболочки)

В задаче контакта прямоугольных и круглых пластин предполагается, что при деформации пластины плотно прилегают друг к другу за счет нормального напряжения, действующего перпендикулярно области контакта, а напряжения сдвига на границе контакта отсутствуют. Контактное давление определяется из решения дифференциальных уравнений равновесия пластин, учитывающих поперечные сдвиги.

Согласно методу решения контактных задач теории пластин и оболочек, предложенному Артюхиным Ю.П. [142], поле контактных напряжений для случая круговых областей контакта является двумерным, а для случая кольцевых областей контакта поле контактных напряжений является одномерным и контакт происходит в произвольном конечном интервале кольцевых областей. Суть метода заключается в приведении исходного интегрального уравнения контактной задачи к решению соответствующей краевой задачи, которое во многих случаях может быть получено точно.

Артюхиным и Митиной [143] был предложен приближенный способ решения контактной задачи взаимодействия упругого ребра и пластинки с учетом обжатия тонкостенных элементов. Сложность этой задачи заключается в том, что наличие деформированного края ребра согласно классической и уточненной сдвиговой теории пластин приводит к корневой особенности на концах ребра.

В работах [144-145] дана постановка контактных задач при наличии износа. В рамках задач предполагается, что количество удаленного материала пропорционально работе сил трения и что в силу малости износа изменением толщины пластины и области контакта при определении контактных напряжений можно пренебречь, сила трения связана с контактным давлением закона Кулона. Силы трения в области контакта при определении упругих деформаций пластины не учитываются.

Используя постановку контактных задач, представленную в работах [144-145] Кузнецов С.А., Артюхин Ю.П. [146] рассматривали задачу о вдавливании жесткого штампа в тонкую пластину при цилиндрическом изгибе, используя вышеописанную постановку задач. При этом учитывалось изнашивание поверхности пластины, имеющее место при движении штампа с осредненной скоростью в направлении его образующей. В этой работе Кузнецов С.А. и Артюхин Ю.П. показали эффективность применения для решения контактных задач при наличии износа метода сведения интегрального уравнения Фредгольма второго рода к краевой задаче, предложенной в работе [147].

Артюхин Ю.П. исследовал напряжения в клеевых соединениях [148] путем решения двумерной задачи в упругой постановке и в результате получил разрешающие уравнения и сформулировал краевые условия для свободного края. В отличие от работы Ю.П. Артюхина в работе Гурьянова Н.Г. [149] учитываются вязкоупругие свойства клея и сформулированы граничные условия для свободного края, защемления и шарнирного оперения пластин в двумерном случае. Гурьянов Н.Г. сформулировал краевую задачу определения контактных напряжений в склеенных пластинах. Полезность такой постановки следует из того, что определение напряженно-деформированного состояния всего пакета приводит к необходимости решать систему дифференциальных уравнений высокого порядка, что весьма затруднительно. С другой стороны, клеевой слой часто является наиболее слабым звеном, и в процессе работы происходит полное или частичное отслоение пластин.

В статье И.В. Даутова [150] определяется зависимость прогиба по времени по методу В.И. Розенблюма [151], основанного на степенном законе ползучести и

теореме о вложенных поверхностях постоянной скорости диссипации энергии. В указанной работе [151] приведено решение задачи для цилиндрической оболочки при действии кольцевой нагрузки.

Ю.П. Жигалко [152] методом, изложенным в работе [153], были получены решения определенного класса контактных задач для упругой балки, изгиб которой описывается в рамках классической модели Бернулли-Эйлера. Рассмотренные задачи родственны контактными задачам цилиндрического изгиба пластин прямоугольной формы.

Т.А. Стекина [154] рассматривала задачу об одностороннем контакте неоднородной упругой пластины с тонким упругим препятствием. Для случая, когда тонкое препятствие не выходит на границу области, дана вариационная формулировка задачи и выписана полная система краевых условий, состоящая из равенств и неравенств. В случае выхода тонкого препятствия на границу области рассматривается семейство задач с параметром в расширенной области. Показана сходимости решений этих задач к решению исходной при стремлении параметра к нулю. Проанализирован предельный случай, соответствующий возрастанию жесткости балки до бесконечности.

В статье [155] описывается математическая модель, позволяющая рассчитывать контактные взаимодействия тел на нерегулярных многогранных лагранжевых сетках в трехмерном приближении. Граница взаимодействия тел описывается триангулированной поверхностью, полученной триангуляцией поверхностей тел. В основу алгоритма расчета взаимодействия двух триангулированных поверхностей положен алгоритм неупругого удара. Приводятся результаты тестовых расчетов, демонстрирующие дееспособность методики расчета движения контактной границы на методических и тестовых задачах.

Разрешающие уравнения относительно контактных напряжений получены в предположении, что пластины тонкие, изотропные, для них справедлива гипотеза Кирхгофа-Лява; в клеевом слое преобладающими являются напряжения поперечного сдвига и обжатие. Реологические свойства клея учитываются

выбором уравнения состояния в виде интегрального уравнения Вольтерра, допуская при этом, что клеевую пленку можно считать квазиупругим материалом. Для одномерного случая подобная постановка встречалась в работах А.Л. Рабиновича [156], хотя вязкоупругие свойства учитывались несколько иначе.

М.В. Блох [157] и Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев [158] рассматривали местную деформацию оболочки как перемещение контактной поверхности за счет изменения толщины стенки в результате действия внешней нормальной нагрузки. Г.Я. Попов [159] показал, что такая постановка контактных задач является математически корректной.

В работах [132, 160-161] было показано, что если рассматривать только основную рабочую зону оболочки, в которой реализуется плоское деформированное состояние, то расчет упрощается и сводится к построению решения в рамках балочной теории. Аналитические решения для задач, в которых рассматриваются криволинейные части поперечного сечения оболочки и необходимо учитывать изгиб криволинейной балки получены в работах [162-163].

В замкнутой аналитической форме решение задачи о контакте балки с жесткой поверхностью под действием распределенного давления и сосредоточенной силы, приложенной на конце балки (рисунок 1.6), было представлено в монографии В.И. Феодосьева [131] и обсуждалось в работе Kim [136].

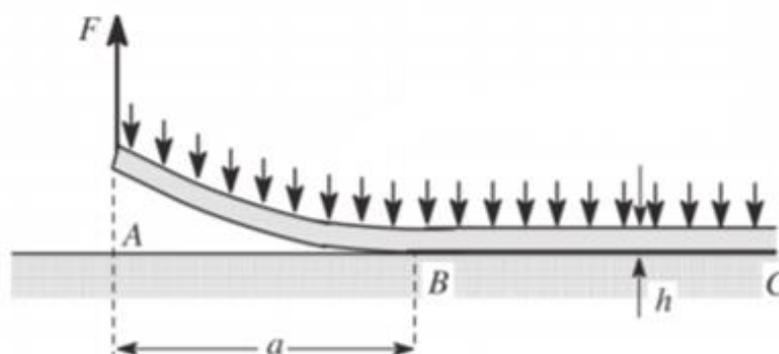


рисунок 1.6. Задача о контакте балки с жесткой поверхностью под действием распределенного давления и сосредоточенной силы, приложенной на конце балки
(F – действующая сила; h – толщина; a – зона без контакта)

Согласно задаче о контакте балки с жесткой поверхностью после приложения силы F левая часть балки приподнимается на некоторой длине a . Правая часть будет лежать на плоскости и останется прямой. Следовательно, во всех сечениях правого участка изгибающий момент равен нулю. В частности, момент равен нулю и в сечении $x=a$. Тогда возникает такая система сил, при которой левую висящую часть балки можно рассматривать как свободно опертую балку длиной a , нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью F/l . Во всех задачах, где имеет место контакта упругой балки с жесткой поверхностью, наибольший интерес представляет возникновение сосредоточенной силы F на границе участка прилегания. Возникновение сосредоточенной силы объясняется при помощи балочной теории Тимошенко. В балочной теории Тимошенко учитываются деформации сдвига ε_{12} в поперечных сечениях балки и связанные с ними дополнительные повороты поперечных сечений балки φ . Эта теория может позволить уточнить решения для балок (и для пластин в случае задачи плоской деформации) большой толщины.

Аналогичное решение, но с учетом адгезии, было предложено Ривлиным для оценки адгезионных свойств покрытий в испытаниях на отрыв [164]. Было показано [131, 136], что в этом случае, так же, как и в теории пластин Кирхгофа, на балку Эйлера-Бернулли действует сосредоточенная сила, приложенная на границе зоны контакта. Из решения следует, что ширина зоны отрыва балки a от жесткого основания при заданной величине силы в простейшей теории балок равна удвоенному отношению приложенной силы к действующему давлению. Это решение следует из условия равенства нулю момента, возникающего в балке на границе зоны контакта (в точке отрыва балки от поверхности), то есть, фактически, для определения длины приподнятого участка балки используется условие равенства равнодействующих моментов от приложенной силы и действующего распределенного давления на приподнятом конце балки. Аналогичное решение было построено Феодосьевым и для балки типа Тимошенко с учетом деформаций сдвига. Было показано, что в этом случае реакция со стороны жесткой поверхности представляет собой распределенную нагрузку с

максимумом на границе контакта, а ширина зоны контакта определяется из решения трансцендентного уравнения [131].

В работе [8] при расчете тепловых трубок в системах автоматических фазированных решеток рассматривалось только деформирование прямолинейных участков сечения трубы (из-за их большой протяженности и малой высоты поперечного сечения) и задача сводилась к решению задачи об изгибе балки-полоски единичной ширины. Такие участки сечения трубы фактически являются пластинками и изгибаются по цилиндрической поверхности под действием гидростатического давления жидкости внутри трубы. Для оценки ширины зоны контакта трубки плоскоовального сечения с охлаждаемой поверхностью, в том числе для больших прогибов использовались аналитические решения и методы их построения, предложенные Феодосьевым. В первом приближении, рассматривались деформации только плоских частей сечения трубки. При этом в рассматриваемой задаче величина приложенной силы является неизвестной и ее необходимо отдельно определять исходя из заданной величины зазора между трубкой в недеформированном состоянии и жесткой поверхностью. Эта задача достаточно просто решается в простейшей балочной теории, но требует несколько более сложного подхода при рассмотрении балки типа Тимошенко и при построении решения с учетом больших прогибов.

В случае малых прогибов решение при заданной величине прогиба балки, который предполагается равным зазору между трубкой в недеформированном состоянии и жесткой поверхностью, может быть найдено, если решить задачу о деформациях консольной балки под действием распределенного давления и силы, приложенной на конце. Длина балки при этом является неизвестной и определяется из дополнительного соотношения равенства нулю изгибающего момента в балке в точке заделки. Это возможно, так как направление приложенной силы противоположно действующему давлению. В рассматриваемой задаче сосредоточенная сила, по сути, является реакцией со стороны цилиндрической части балки в вертикальном направлении, либо, при включении этой части в расчетную модель - нормальной силой, действующей в

сечении балки, вследствие его симметрии. При использовании модели балки Тимошенко в рассматриваемой задаче (рисунок 1.6) приходится решать систему двух уравнений. Первое уравнение - условие для определения действующей силы при заданном перемещении конца балки, второе (трансцендентное) – условие равенства перерезывающих сил на границе зоны контакта со стороны прижатого и приподнятого участков балки, которое было выведено в [131]. В нелинейной теории, учитывающей большие прогибы, задача дополнительно усложняется и приводит к необходимости решения системы из четырех уравнений, два из которых являются трансцендентными. Для решения этой системы используется численно-аналитический подход. Решение для функции углов поворота сечения балки строится в виде ряда, коэффициенты в котором определяются в аналитической форме на основе уравнения равновесия балки и соотношений для изгибающего момента, действующего в его сечениях. Однако, чтобы найти ширину зоны контакта и величину действующей силы, приходится решать систему из четырех уравнений, в которую входят указанные неизвестные величины, а также угол поворота и горизонтальное смещение конца балки.

Заметим, что используемый подход построения решения в рядах в задачах изгиба балок и цилиндрического изгиба пластин с учетом больших прогибов является широко распространенным. Однако работ, которые исследуют с помощью этого метода оболочки плоскоовального сечения, расположенные между двумя абсолютно жесткими пластинами и нагружаемые внутренним давлением, в настоящее время не существует.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ С ЖЕСТКИМИ ПРЕГРАДАМИ

2.1. Аналитическая оценка ширины зоны контакта цилиндрической оболочки эллиптического сечения с жесткими преградами

Постановка задачи

Задача разработать метод оценки ширины зоны контакта, реализующейся между эллиптической цилиндрической оболочкой, и плоскими абсолютно жесткими поверхностями, ограничивающими ее перемещения при действии внутреннего гидростатического давления жидкости, протекающей внутри оболочки. Участок трехмерной модели эллиптической цилиндрической трубы эллиптического сечения представлен на рисунке 2.1.

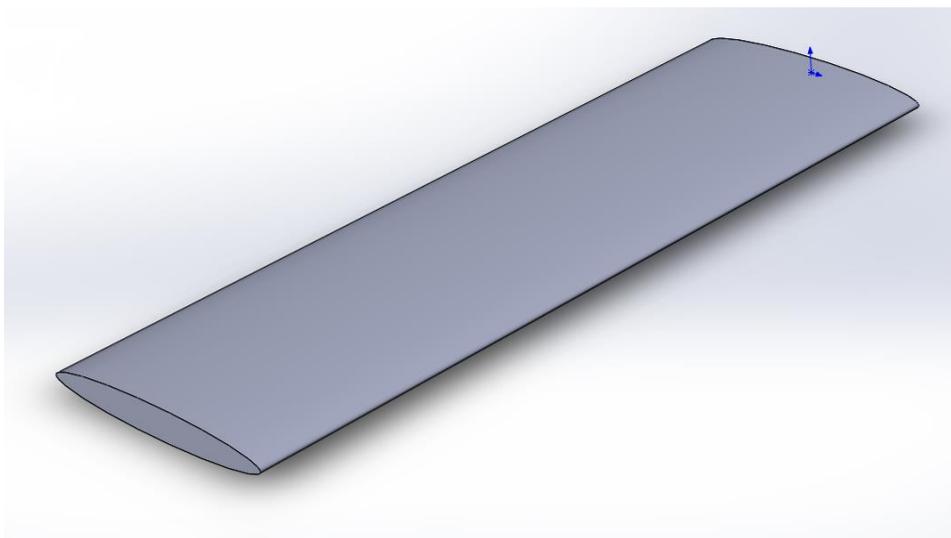


рисунок 2.1. Участок трехмерной модели цилиндрической трубы эллиптического сечения

Геометрические параметры поперечного сечения оболочки, расположенной между двумя жесткими поверхностями минимальным с зазором w , представлены на рисунке 2.2. Габаритные размеры поперечного сечения эллиптической цилиндрической оболочки составляют $2b$ по вертикальной оси и $2a$ по горизонтальной оси. Ширину зоны контакта, возникающей при воздействии давления внутри оболочки p , обозначим $2l$.

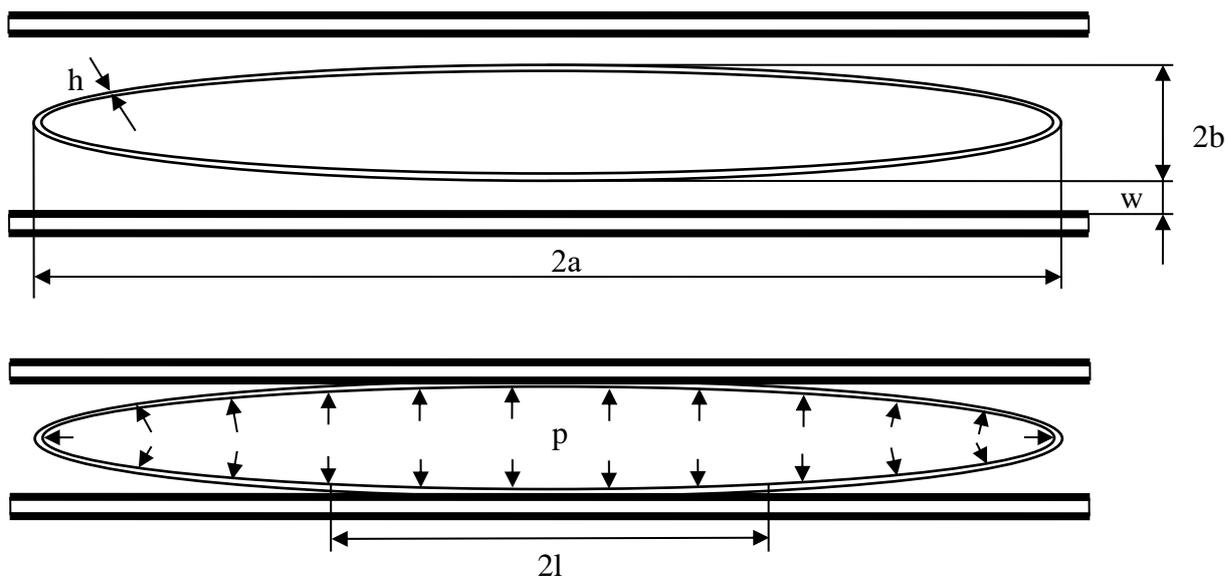


рисунок 2.2. Поперечное сечение эллиптической цилиндрической оболочки

Упрощающие гипотезы и предположения

В аналитических расчетах будем предполагать, что оболочка нагружена постоянным внутренним давлением. Постоянное внутренне давление равно максимальному гидростатическому давлению, найденному из гидравлических расчетов. Оболочка находится в состоянии плоской деформации, то есть деформации в направлении ее образующих равны нулю. Трением в зоне контакта пренебрегаем и пренебрегаем наличием внутри оболочки жидкости, предполагая, что ее воздействие сводится только к давлению на стенки канала. Тогда задача определения зоны контакта эллиптической цилиндрической оболочки с плоской жесткой поверхностью сводится к решению задачи о деформациях балки-полоски. При этом модуль упругости в решении для балки заменяется на приведенный модуль упругости пластинки [165].

Будем рассматривать балку, являющуюся $\frac{1}{4}$ частью поперечного сечения эллиптической цилиндрической оболочки (рисунок 2.3). Балку разделим на две части – первая, длиной l , после воздействия распределенной нагрузки контактирует с жесткой плоской поверхностью, а вторая, длиной $a-l$, не касается поверхности. Действие отброшенной нижней части сечения заменяем сосредоточенной силой F , приложенной в вертикальном направлении на

свободном конце балки. Из условий симметрии задачи, запрещаем повороты сечения балки на свободном конце. Считаем, что в той части балки, которая прижата к поверхности, момент равен нулю. На левом конце балки задается условие отсутствия горизонтальных перемещений. Фактически, используется предположение о контакте балки с жесткой поверхностью без проскальзывания. Используем классическую теорию изгиба балок. Поэтому неизвестная длина части балки, контактирующая с жесткой плоской поверхностью после воздействия распределенной нагрузки, должна определяться из условия равенства нулю изгибающего момента на границе зоны контакта в точке $x = l$ с координатами $X(t_1) = a \cos(t_1)$, $Y(t_1) = b \sin(t_1)$, где t_1 – угловое положение искомой точки, определяющееся по формуле:

$$t_1 = \arccos(l / a) \quad (2.1)$$

При этом на границе зоны контакта возникает вертикальная реакция со стороны жесткой поверхности.

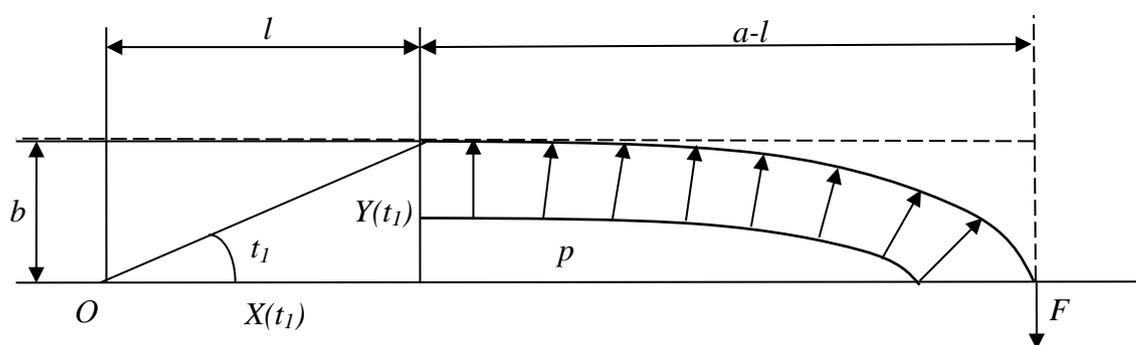


рисунок 2.3. К решению задачи о деформации поперечного сечения эллиптической цилиндрической оболочки

Рассматриваемая балка нагружается, в том числе, и растягивающими усилиями, вследствие проекции от результирующего давления в закругленной части контура. Однако, деформациями, связанными с таким нагружением, при оценке ширины зоны контакта будем пренебрегать. Положение каждой точки, расположенной на поверхности оболочки, определяется по формулам

$X(t) = a \cos(t)$, $Y(t) = b \sin(t)$, где t – угловое положение точки. Величина вертикального смещения δ_F участка балки, не контактирующего с плоской жесткой поверхностью, находится по формуле:

$$\delta_F = w + b - Y(t_1) \quad (2.2)$$

Аналитическое определение ширины зоны контакта

Предварительно необходимо решить вспомогательную задачу о контакте балки - для участка балки, не касающегося поверхности (Рисунок 2.3). Предположение о консольной заделке соответствует, в том числе, условию контакта «без проскальзывания» между балкой и поверхностью. Задачу решаем аналитически, считая, что длина балки задана и равна a . Из полученного решения найдем значение силы F , выраженное через величину смещения w . Далее запишем выражение для изгибающего момента в точке $x = l$ с координатами $X(t_1) = a \cos(t_1)$, $Y(t_1) = b \sin(t_1)$, и приравняв изгибающий момент нулю найдем длину балки l , являющейся шириной зоны контакта.

Рассматриваемая балка (рисунок 2.4) является один раз статически неопределимой. На левом конце этой части балки ($x = l$) заданы две реакции в горизонтальном F_{x0} и вертикальном F_{y0} направлениях и момент M_0 . На правом конце балки действует момент M_1 , обеспечивающий отсутствие углов поворота. На всем участке балки действует распределенная нагрузка p .

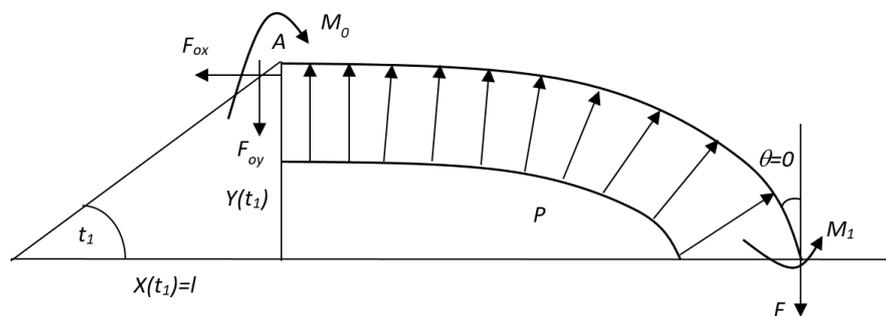


рисунок 2.4. Нагрузки, действующие на балку

Из условия равновесия проекций действующих сил на горизонтальную и вертикальную оси найдем:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 - F_{x0} + pY(t_1) = 0, & F_{x0} &= pY(t_1), \\ \sum Y &= 0 - F_{y0} - F + p[a - X(t_1)] = 0, & F_{y0} &= p[a - X(t_1)] - F. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение равновесия для изгибающих моментов относительно точки $x = l$ дает соотношение:

$$\sum M_0 = 0 - M_0 - F[a - X(t_1)] + M_1 + p \frac{[a - X(t_1)]^2 + Y(t_1)^2}{2} = 0. \quad (2.4)$$

В записанном выражении вклад в изгибающий момент от распределенной нагрузки, приложенной на скругленной части сечения, записан с учетом выражений для проекций результирующей этого давления на горизонтальную и вертикальную оси.

Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся методом сил. Во-первых, необходимо выбрать «основную систему», отбрасывая лишние связи и заменяя их силовыми факторами. Отбросим связь, запрещающую повороты свободного конца балки, и заменим ее моментом M_1 . Дополнительным соотношением для определения этого момента является каноническое уравнение метода сил, которое в данном случае сводится к требованию равенства нулю поворота балки на свободном конце и записывается следующим образом:

$$\delta_{1p} + \delta_{11}M_1 = 0 \quad (2.5)$$

где δ_{11} - это угол поворота свободного конца балки под действием единичного момента $M_1 = 1$, заданного в точке, δ_{1p} - это угол поворота свободного конца балки под действием заданной нагрузки при $M_1 = 0$.

Величины углов определяем с использованием интеграла Мора:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \int_c \frac{M_{11}^2(t)}{D} \sqrt{\left[\frac{dX(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dY(t)}{dt}\right]^2} dt = \\ &= \int_c \frac{M_{11}^2(t)}{D} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (bc \cos t)^2} dt, \\ \delta_{1p} &= \int_0^i \frac{M_{1p}(t)M_{11}(t)}{D} \sqrt{\left[\frac{dX(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dY(t)}{dt}\right]^2} dt = \\ &= \int_0^i \frac{M_{1p}(t)}{D} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (bc \cos t)^2} dt.\end{aligned}\tag{2.6}$$

При действии единичного момента $M_1 = 1$ на всем участке балки изгибающие моменты равны единице. При $M_1 = 0$ изгибающий момент от действующей внешней нагрузки на участках балки (рисунок 2.5) определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}M_{1p}(t) &= p \frac{[a - X(t)]^2 + Y^2(t)}{2} - F[a - X(t)] = \\ &= p \frac{a^2(1 - \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t}{2} - Fa(1 - \cos t).\end{aligned}\tag{2.7}$$

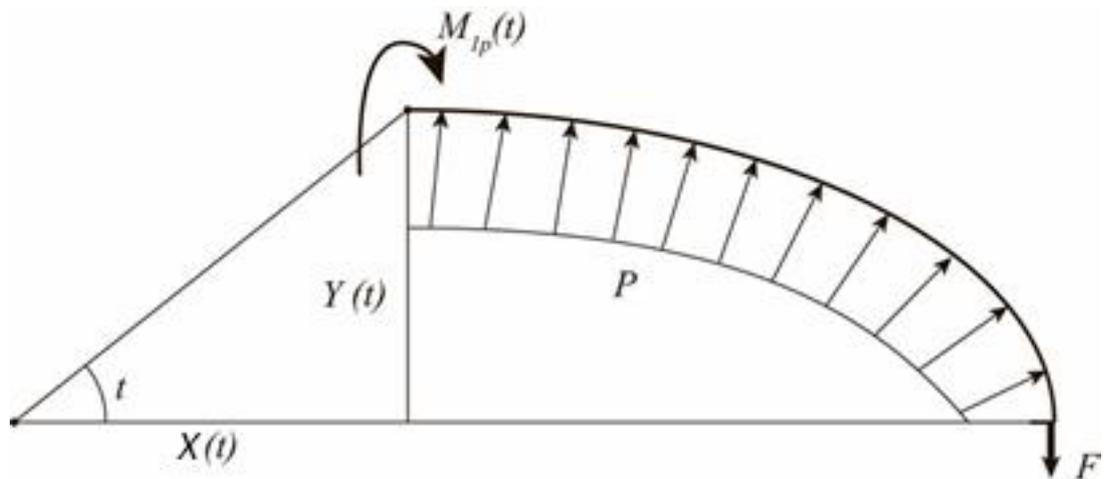


рисунок 2.5. Нагрузки, действующие на балку при $M_1 = 0$

Введем обозначения

$$E_0(t_1) = \int_0^{t_1} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,$$

$$E_1(t_1) = \int_0^{t_1} M_{1p}(t) \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,$$

и перепишем выражения для углов поворота (2.6) в виде

$$\delta_{11} = \frac{E_0(t_1)}{D},$$

$$\delta_{1p} = \frac{E_1(t_1)}{D}.$$
(2.8)

Откуда момент равен

$$M_1 = -\frac{E_1(t_1)}{E_0(t_1)}.$$
(2.9)

Далее находим связь вертикальных перемещений δ_F и усилия F на свободном конце балки с использованием интеграла Мора:

$$\delta_F = \int_0^{t_1} \frac{M_\Sigma(t) M_{1F}(t)}{D} \sqrt{\left[\frac{dX(t)}{dt} \right]^2 + \left[\frac{dY(t)}{dt} \right]^2} dt,$$
(2.10)

где моменты вычисляются для заданной единичной силы на конце балки и для заданной внешней нагрузки по формулам:

$$M_\Sigma(t) = M_{1p}(t) + M_1(t) M_{11}(t) = M_{1p}(t) - \frac{E_1(t_1)}{E_0(t_1)} =$$

$$= p \frac{a^2 (1 - \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t}{2} - Fa(1 - \cos t) - \frac{E_1(t_1)}{E_0(t_1)},$$

$$M_{1F} = -a(1 - \cos t).$$

Подставляя выражение (2.10) в формулу (2.2) получим выражение для силы F (2.11)

Для более компактного представления вводятся дополнительные коэффициенты:

$$\alpha = \sqrt{-a^2 + b^2}, \quad \beta = \sqrt{a^2 + b^2 + (-a^2 + b^2) \text{Cos}(2t_1)},$$

$$\gamma = \text{Arctg} \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{-a^2 + b^2} \text{Sin}(2t_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + (-a^2 + b^2)\text{Cos}(2t_1)}} \right), \quad \eta = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\text{Sin}(t_1)^2} dt,$$

$$\theta = 6a^4 + 6a^2b^2 - (a^4 + 2a^2b^2 - 3b^4)\text{Cos}(t_1) - 6a^2(a^2 - b^2)\text{Cos}(2t_1) + a^4 \text{Cos}(3t_1) - 2a^2b^2 + b^4 \text{Cos}(3t_1).$$

Тогда выражение для F представим в виде:

$$\begin{aligned} F(t_1) = & (-32ab^2\alpha(5a^4 - 5a^2b^2 - b^4)P\beta\eta^2 + aP(24a^2b^4\alpha\gamma^2\beta + 2\sqrt{2}b^2\alpha^2\gamma(6a^4 + 6a^2b^2 + \\ & + 6a^2\alpha^2\text{Cos}(2t_1) + \theta)\text{Sin}(t_1) + 2\alpha^3\beta\theta\text{Sin}(t_1)^2 + 2a^2b\alpha^2)\eta(4b^2\gamma\beta + \sqrt{2}\alpha((3a^2 + b^2)\text{Sin}(t_1) + \\ & + \alpha^2\text{Sin}(3t_1))) - \frac{1}{4}b\eta(128a^3b(2a^2 - b^2)\alpha P\beta\eta + \alpha^2(8ab^2(88a^2 + 7b^2)P\gamma\beta + \alpha(-384bd\beta - \\ & - 384dw\beta + (498\sqrt{2}a^5P + 206\sqrt{2}a^3b^2P + 8\sqrt{2}ab^4P + 384bd\beta)\text{Sin}(t_1) - \\ & - 32\sqrt{2}a(2a^4 + a^2b^2 - b^4)P\text{Sin}(t_1) - 161\sqrt{2}a^5P\text{Sin}(3t_1) + 156\sqrt{2}a^3b^2P\text{Sin}(3t_1) + \\ & + 5\sqrt{2}ab^4P\text{Sin}(3t_1) + 32\sqrt{2}a^5P\text{Sin}(4t_1) - 48\sqrt{2}a^3b^2P\text{Sin}(4t_1) + 16\sqrt{2}ab^4P\text{Sin}(4t_1) - \\ & - 3\sqrt{2}a^5P\text{Sin}(5t_1) + 6\sqrt{2}a^3b^2P\text{Sin}(5t_1) - 3\sqrt{2}ab^4P\text{Sin}(5t_1))) // (4a^2(8b^2\alpha(-7a^2 + 8b^2\beta\eta + \\ & + 3(2b^4\alpha\gamma^2\beta + 2\sqrt{2}b^2\alpha^2\gamma\beta^2\text{Sin}(t_1) + \alpha(-a^4 + b^4 + (-a^2 + b^2)\text{Cos}(2t_1))\beta\text{Sin}(t_1)^2) + \\ & + b\eta(-8a^2b\alpha\beta\eta + (a^2 - b^2)(48b^2\gamma\beta - 2\sqrt{2}\alpha\beta^2(-12\text{Sin}(t_1) + \text{Sin}(t_1)))))) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Далее подставляя (2.11) и (2.9) в (2.4) и учитывая, что условие на границе контакта приводит к требованию $M_0 = 0$, получим соотношения для определения угла t_1 , подставив которое в формулу (2.1) определим ширину зоны контакта l .

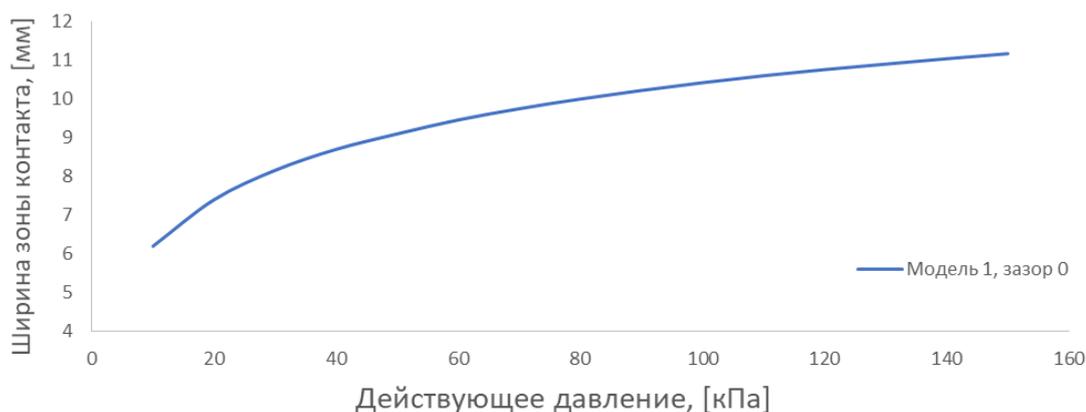
2.2. Оценка ширины зоны контакта на основе разработанного метода

С учетом разработанного метода в среде Wolfram Mathematica была создана математическая модель. В работе рассматривались два варианта оболочек (модель 1 и модель 2), с геометрическими параметрами в соответствии с рисунком 2.2 и указанными в таблице 2.1 параметрами. Оболочка сделана из алюминия с характерными параметрами: модуль Юнга 70 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3. Расчет проводился с учетом действующего внутреннего давления, изменяемого от 0 до 150 кПа.

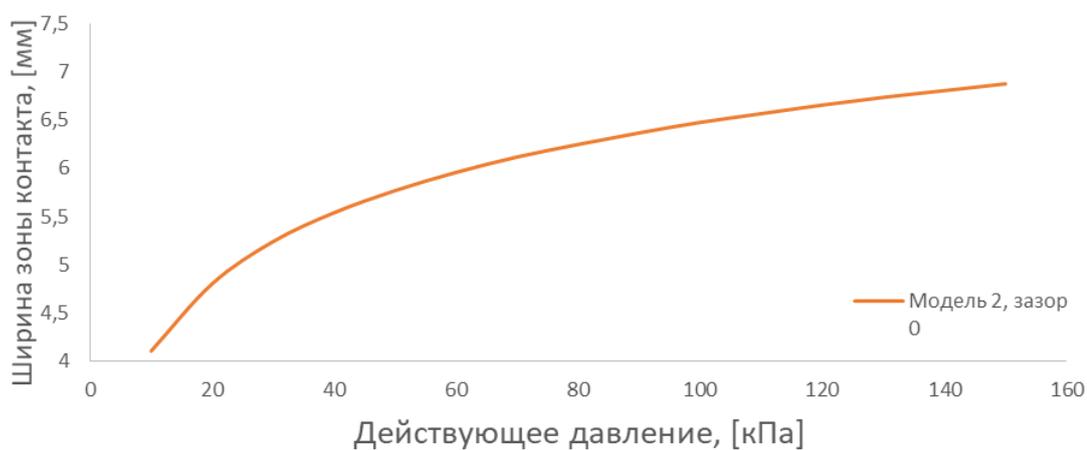
Таблица 2.1. Геометрические параметры оболочек

	Модель 1	Модель 2
По вертикальной оси b , мм	3,75	1,5
По горизонтальной оси a , мм	22,5	12,5
Толщина, мм	0,5	0,25

В ходе расчетов проводилось определение ширины зоны контакта в зависимости от действующего давления. С учетом выше сказанного зависимость ширины зоны контакта от действующего давления внутри оболочки представлена на рисунке 2.6 а) для модели 1 и рисунок 2.6 б) для модели 2.



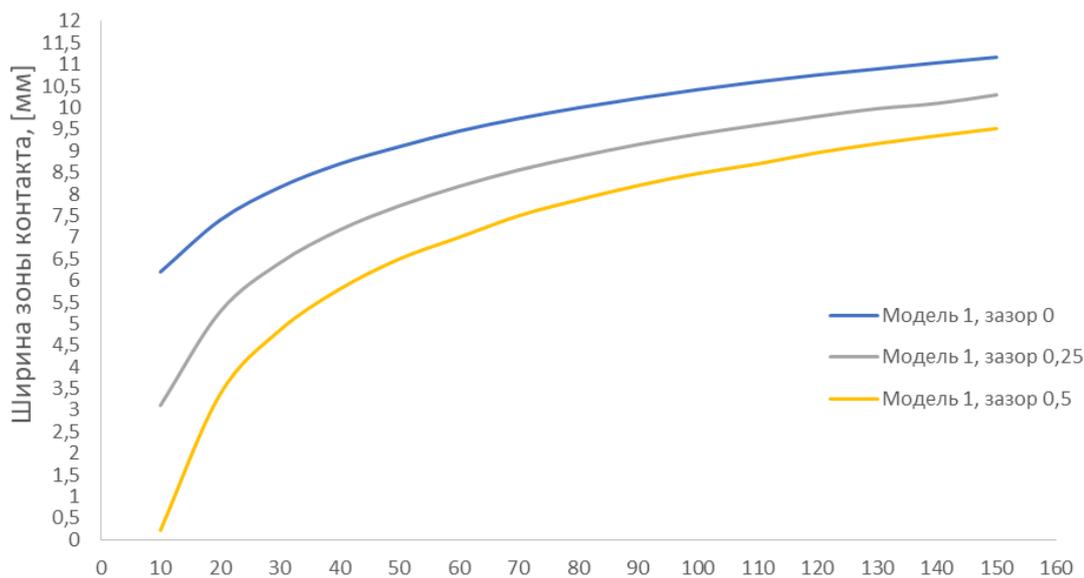
а.



б.

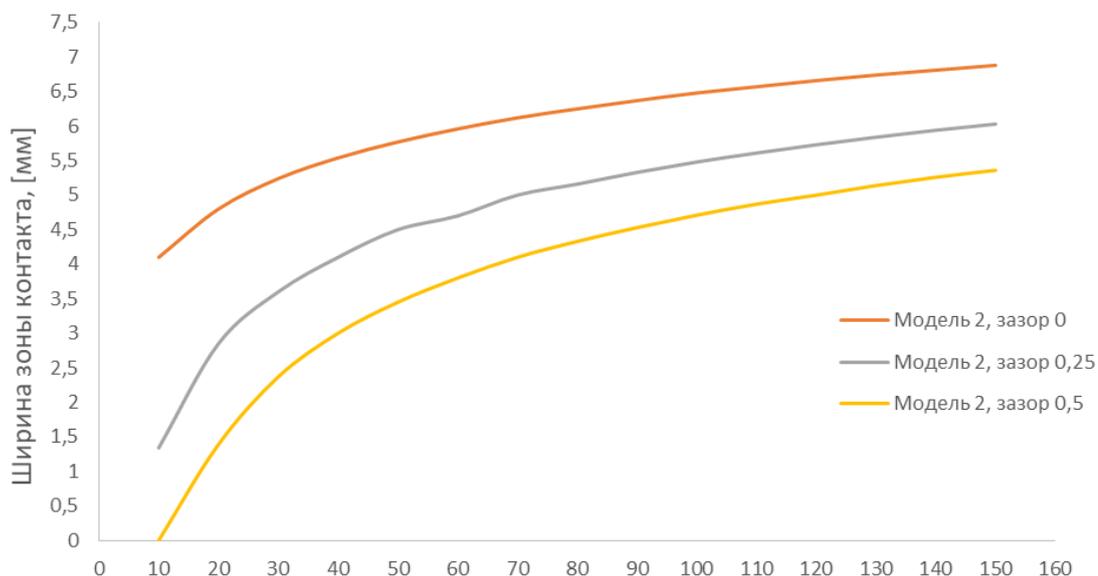
рисунок 2.6. График зависимости длины зоны контакта оболочки с жесткой поверхностью от давления внутри оболочки (а – для модели 1, б – для модели 2)

В рамках изучения влияния зазора на ширину зоны контакта проводился расчет при тех же параметрах указанных выше, но с различными вариантами зазора: без зазора, с зазором 0,25 мм и с зазором 0,5 мм. Результаты зависимости ширины зоны контакта от давления для каждого из варианта зазора для модели 1 представлены на рисунке 2.7 а), а для модели 2 представлены на рисунке 2.7 б).



а.

Действующее давление, [кПа]



б.

Действующее давление, [кПа]

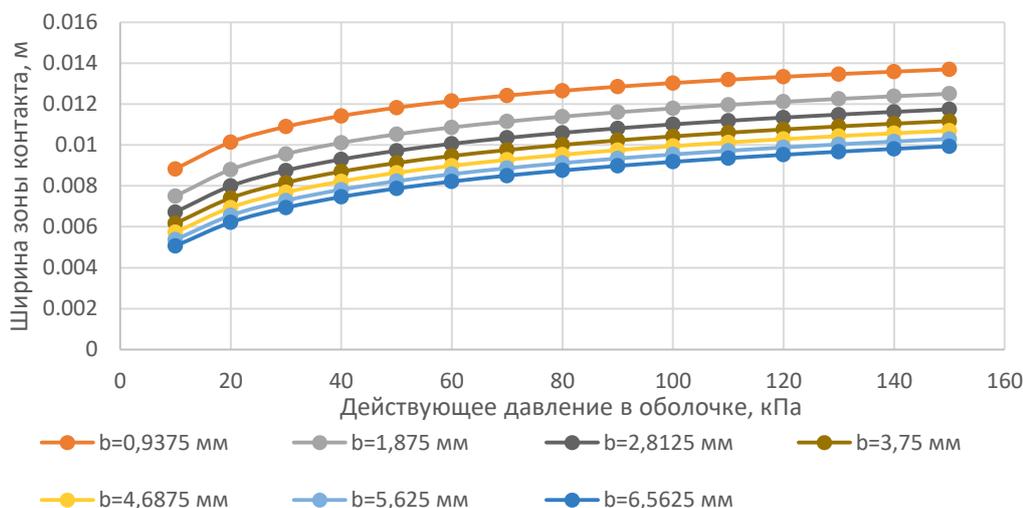
рисунок 2.7. График зависимости длины зоны контакта оболочки с жесткой поверхностью от давления для различных вариантов зазора

(а – для модели 1, б – для модели 2)

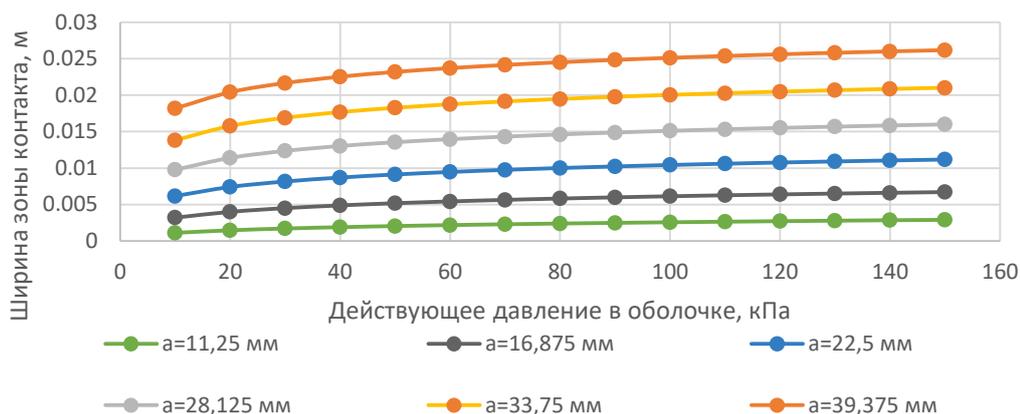
Из полученных результатов можно сделать вывод, что ширина зона контакта в зависимости от увеличения давления изменяется в виде функции схожей с функции квадратного корня.

2.3. Анализ влияния геометрических параметров на ширину зоны контакта

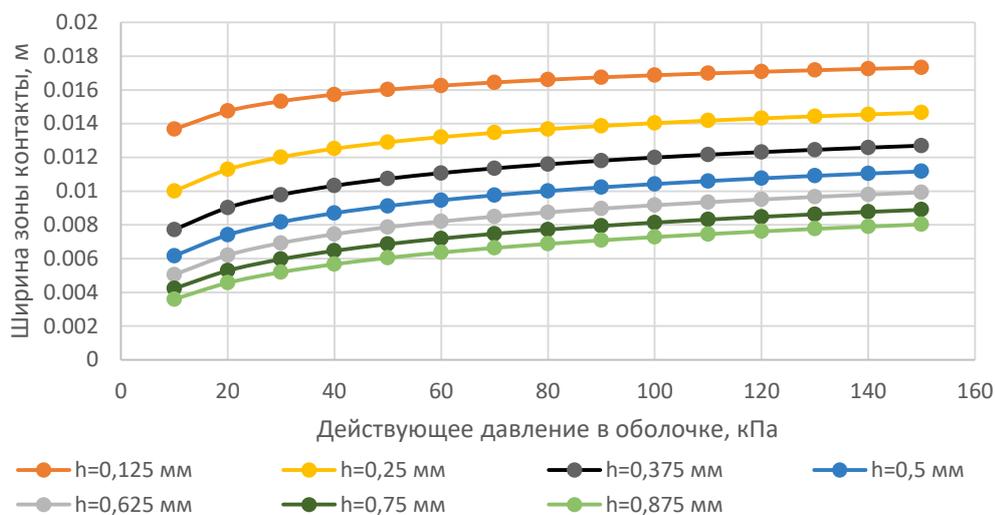
С использованием полученного аналитического решения проводилось исследование влияния геометрических параметров на величину ширины зоны контакта в зависимости от действующего внутреннего давления. Исследование проводилось для оболочки с геометрическими параметрами взятой для модели 1, из таблицы 2.1. Варьирование геометрических параметров проводилось при нулевом зазоре по трем параметрам: по вертикальной оси b , по горизонтальной оси a и по толщине h , рисунок 2.2. Для каждой модели были рассмотрены семь унифицированных вариантов изменения каждого из параметров при сохранении номинальных значений остальных геометрических параметров оболочки. Граничные условия расчетов задавались с нулевыми предварительными зазорами для всех вариантов расчетов. Результаты варьирования значений параметров, указанных в таблице 2.1, и полученные значения ширины зоны контакта при различных значениях внутреннего давления представлены на рисунке 2.8. Данные аналитические решения прогнозируют увеличени ширины реализующийся зоны контакта при увеличении давления и уменьшения высоты сечения оболочки b .



а.



б.



в.

рисунок 2.8. Зависимость ширины зоны контакта от действующего давления при варьировании геометрических параметров:

а – варьирование малой полуоси b ; б – варьирование большой полуоси a ;
в – варьирование толщины оболочки h

Для анализа процесса изменения ширины зоны контакта от варьирования геометрического параметра цилиндрической оболочки эллиптического сечения были получены функции, зависящие от параметра, действующего на цилиндрическую оболочку внутреннего давления путем использования метода аналитического выравнивания.

В прямоугольной системе координат строится график, откладывая по оси ординат значение ширины зоны контакта, а по оси абсцисс – значения прикладываемого к цилиндрической оболочке давления на интервале от 10 до 80

кПа. Выбор интервала обусловлен тем, что при значениях выше 80 кПа характер изменения графика функции приближается к линейному изменению.

По совокупности точек ширины зоны контакта и значения, прикладываемого к цилиндрической оболочке давления получается поле корреляции. На основании поля корреляции можно заметить, что связь между приложенным к цилиндрической оболочке давлением и шириной зоны контакта носит степенной характер.

Степенное уравнение регрессии имеет вид:

$$l = aP^\zeta$$

Оценочное уравнение регрессии (построенное по выборочным данным) будет иметь вид $l = aP^\zeta + \varepsilon$, где ε_i – наблюдаемые значения (оценки) ошибок ε_i , ψ и ζ соответственно оценки параметров α и β регрессионной модели, которые следует найти, ε - случайная ошибка (отклонение, возмущение).

Исходя из условия, что отклонение ε_i для каждого конкретного наблюдения i – случайны и их значения в выборке неизвестны, то:

- 1) по наблюдениям P_i и l_i можно получить только оценки параметров α и β
- 2) оценками параметров α и β регрессионной модели являются соответственно величины ψ и ζ , которые носят случайный характер, т.к. соответствуют случайной выборке;

После линеаризации получаем:

$$\ln(l) = \ln(\psi) + \zeta \ln(P)$$

Оценка параметров α и β осуществляется методом наименьших квадратов (МНК), т.к. он дает наилучшие оценки параметров уравнения регрессии. Однако, необходимо выполнить определенные предпосылки относительно случайного члена ε и независимой переменной P .

Критерий МНК записывается в виде:

$$S = \sum (l_i - l_i^*)^2 \rightarrow \min$$

Система нормальных уравнений:

$$\begin{aligned}\psi n + \zeta \sum P &= \sum l \\ \psi \sum P + \zeta \sum l^2 &= \sum Pl\end{aligned}$$

Из которой определяются эмпирические коэффициенты регрессии ψ, ζ .

Эмпирические коэффициенты регрессии ψ и ζ являются лишь оценками теоретических коэффициентов β_i , а само уравнение отражает лишь общую тенденцию в поведении рассматриваемых переменных.

Параметры уравнения регрессии.

Выборочные средние:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{\sum P_i}{n} \\ \bar{l} &= \frac{\sum l_i}{n} \\ \overline{Pl} &= \frac{\sum P_i l_i}{n}\end{aligned}$$

Выборочные дисперсии:

$$\begin{aligned}S^2(P) &= \frac{\sum P_i^2}{n} - \bar{P}^2 \\ S^2(l) &= \frac{\sum l_i^2}{n} - \bar{l}^2\end{aligned}$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\begin{aligned}S(P) &= \sqrt{S^2(P)} \\ S(l) &= \sqrt{S^2(l)}\end{aligned}$$

Коэффициент корреляции ζ можно находить по формуле, не решая систему непосредственно:

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{\overline{P \cdot l} - \bar{P} \cdot \bar{l}}{S^2(P)} \\ \psi &= \bar{l} - \zeta \cdot \bar{P}\end{aligned}$$

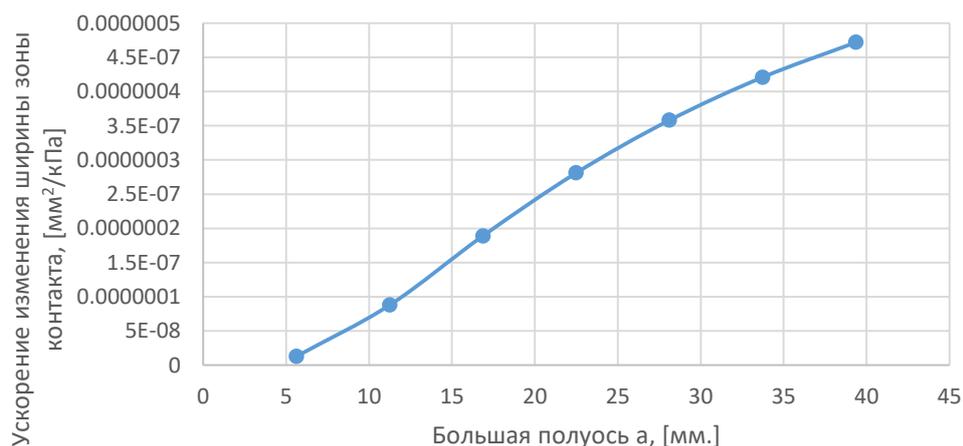
Найденные степенные уравнения регрессии при варьировании геометрических параметров оболочки представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2.

Геометрические параметры оболочки	Функциональная зависимость ширины зоны контакта от действующего давления в диапазоне от 10 кПа до 80 кПа.
По горизонтальной оси, a	
$a = 5,625$ мм	$0,000043 \cdot P^{0,4639}$
$a = 11,25$ мм	$0,0000486 \cdot P^{0,3665}$
$a = 16,875$ мм	$0,00168 \cdot P^{0,2871}$
$a = 22,5$ мм	$0,00367 \cdot P^{0,2314}$
$a = 28,125$ мм	$0,00636 \cdot P^{0,1922}$
$a = 33,75$ мм	$0,00959 \cdot P^{0,1639}$
$a = 39,375$ мм	$0,013228 \cdot P^{0,1426}$
По вертикальной оси, b	
$b = 0,9375$ мм	$0,00602 \cdot P^{0,1716}$
$b = 1,875$ мм	$0,0048 \cdot P^{0,1994}$
$b = 2,8125$ мм	$0,00413 \cdot P^{0,2175}$
$b = 4,6875$ мм	$0,00367 \cdot P^{0,2314}$
$b = 5,625$ мм	$0,00332 \cdot P^{0,2429}$
$b = 6,5625$ мм	$0,00304 \cdot P^{0,253}$
По толщине, h	
$h = 0,125$ мм	$0,011424 \cdot P^{0,08459}$
$h = 0,25$ мм	$0,00747 \cdot P^{0,1367}$
$h = 0,375$ мм	$0,00526 \cdot P^{0,1787}$
$h = 0,5$ мм	$0,00389 \cdot P^{0,2138}$
$h = 0,625$ мм	$0,00298 \cdot P^{0,2435}$
$h = 0,75$ мм	$0,00236 \cdot P^{0,269}$
$h = 0,875$ мм	$0,00191 \cdot P^{0,2909}$

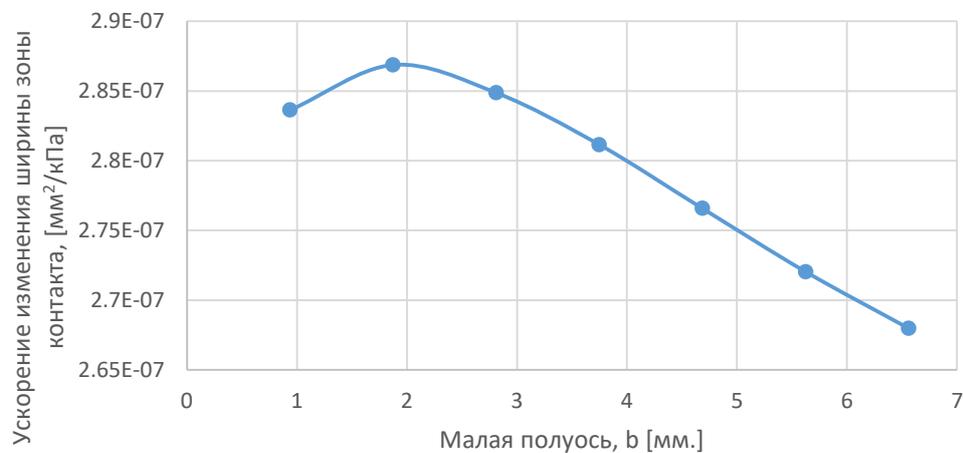
Полученные функциональные зависимости дважды дифференцировались для определения ускорения достижения ширины зоны контакта при действующем давлении. Зависимость ускорения изменения ширины зоны контакта при варьировании геометрических параметров при значении действующего давления 80 кПа представлено на рисунке 2.9

Варьирование большой полуоси a

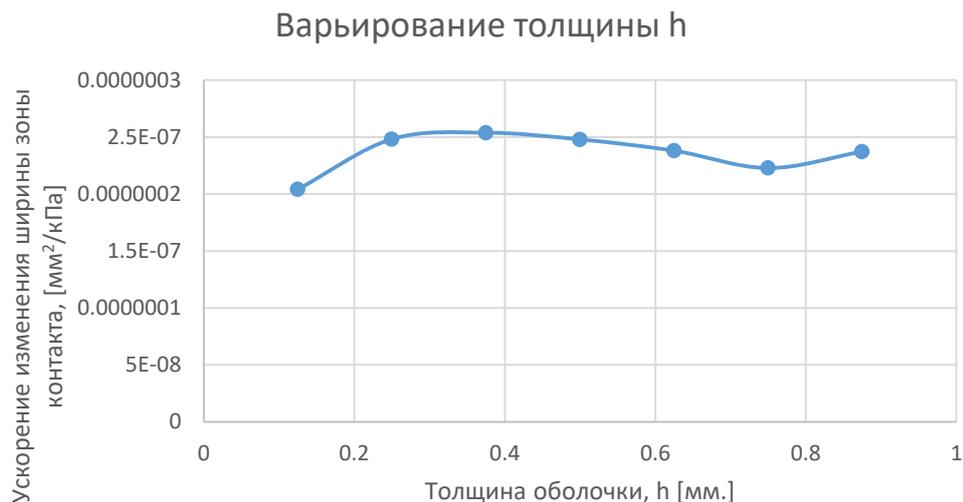


а.

Варьирование малой полуоси b



б.



в.

рисунок 2.9. Влияние значения параметра на ускорение изменения

ширины зоны контакте: а – варьирование большой полуоси a ;

б – варьирование малой полуоси b ; в – варьирование толщины оболочки h

Из полученных результатов, рисунок 2.9а, можно сделать выводы, что увеличение значения большой полуоси (параметр b) приводит к ускорению изменения роста ширины зоны контакта, а при уменьшении – к уменьшению. Форма кривой зависимости ускорения изменения ширины зоны контакта от действующего давления практически не практически не изменяется при рассмотрении действия давления до 80кПа.

При варьировании малой полуоси (параметр a) рисунок 2.9б, данный параметр оказывает противоположное влияние на ускорение изменения ширины зоны контакта, с увеличением его значения, ускорение изменения зоны контакта уменьшается, а при уменьшении значения параметра ширина зоны контакта растет. Форма кривой при этом имеет парктически линейный характер, как и при варьировании параметра большой полуоси.

Влияние изменения толщины оболочки, рисунок 2.9в не существенно влияет на изменение ускорения изменения ширины зоны контакта, в отличие от изменения малой или большой полуосей.

Аналитическая оценка ширины зоны контакта цилиндрической оболочки с сечением малой кривизной и жесткими преградами

При рассмотрении цилиндрических оболочек с сечением малой кривизной (когда радиус кривизны стремится к бесконечности) мы будем использовать решение, полученное в работах [131, 8]. Рассматривается решение задачи об определении зоны контакта балки Тимошенко с жесткой поверхностью, под действием распределенной нагрузки и сосредоточенной силы, приложенной на ее конце. Строится решение для случая неизвестной силы и заданного перемещения конца балки.

В балочной теории Тимошенко учитываются деформации сдвига ε_{12} в поперечных сечениях балки и связанные с ними дополнительные повороты поперечных сечений балки φ . Эта теория может позволить уточнить решения для балок (и для пластин в случае задачи плоской деформации) большой толщины. Дополнительный угол наклона упругой линии балки, вызванный сдвигом, определяется соотношением: $\varphi=Q/B$ где Q - перерезывающая сила, $B = kGS$ – жесткость балки при сдвиге, G – модуль сдвига, S – площадь поперечного сечения балки, k – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки в теории Тимошенко (возникает вследствие неравномерного распределения касательных напряжений по сечению балки), для прямоугольного сечения этот коэффициент равен $k = 5/6$. Заметим, что сечение рассматриваемой балки - полоски имеет размеры $1 \times h$ и площадь, соответственно равняется: $S = 1 h$. [8]

Кривизна балки определяется с учетом изгиба и сдвига по формуле [131]:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{D} + \frac{1}{B} \frac{dQ}{dx}$$

С учетом уравнения равновесия: $Q = \frac{dM}{dx}$, получим: $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{D} + \frac{1}{B} \frac{d^2M}{dx^2}$

На участке балки, не касающемся поверхности, момент определяется выражением:

$$M = p(l-x)^2 / 2 - F(l-x).$$

Тогда из получаем уравнение для определения прогибов на этом участке:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{D} \left(\frac{p(l-x)^2}{2} - F(l-x) \right) + \frac{p}{B}$$

Функция прогибов находится интегрированием:

$$v = \frac{1}{D} \left(\frac{p(l-x)^4}{24} - \frac{F(l-x)^3}{6} \right) + \frac{px^2}{B2} + C_1 + C_2$$

Константы C_1, C_2 определяются из условий закрепления консольной балки в точке

$x = b = l - a$: $v=0, \frac{dv}{dx} = 0$. Решая эту систему уравнений относительно C_1, C_2 ,

находим прогибы балки вне зоны контакта:

$$x \geq b: v = (x-b)^2 \left(\frac{p(3a^2 + 2a(l-x) + (l-x)^2)}{24D} - \frac{F(2a+l-x)}{6D} + \frac{p}{2B} \right)$$

На участке, касающемся жесткой поверхности, кривизна балки равна нулю.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{D} - \frac{1}{B} \frac{d^2M}{dx^2} = 0$$

Решая это уравнение относительно моментов с учетом граничных условий $x = 0$:

$M = 0, x = b$: $M = Fa - pa^2/2$, найдем:

$$x \leq b: M(x) = - \left(\frac{pa^2}{2} - Fa \right) \frac{\sinh(x\sqrt{B/D})}{\sinh(b\sqrt{B/D})}$$

В полученном решении в точке сопряжения двух участков балки (прижатого и приподнятого) выполняется условие равенства моментов и углов наклона упругой линии балки (этот угол нулевой). Равенство по перемещениям легко удовлетворяется за счет наличия произвола в решении задачи для контактирующего участка балки. Таким образом, остается единственное условие равенства перерезывающих усилий в точке сопряжения, которое и используется для определения ширины зоны контакта. Перерезывающее усилие справа от точки $x = b$ легко находится из условия равновесия этого участка балки $Q|_{x=b+} = pa - F$.

Слева от этой точки используя полученное выражение и уравнение равновесия:

$$Q|_{x=b-} = \frac{dM}{dx} \Big|_{x=b-}.$$

Получаем соотношение:

$$Q|_{x=b+} = Q_{x=b-} \Rightarrow pa - F = -(pa^2 / 2 - Fa) \sqrt{B/D} \operatorname{cth}(b \sqrt{B/D})$$

Решение этого трансцендентного уравнения позволяет найти протяженность участка балки a , не касающегося поверхности. Это решение было получено в [6], однако для рассматриваемой задачи его использовать нельзя, так как величина силы является неизвестной. Необходимо определить связь силы F с величиной заданного прогиба на конце балки $x = 1$. Получаем:

$$v(l) = \frac{pa^4}{8D} - \frac{pa^3}{3D} + \frac{pa^2}{2B} = w$$

Откуда сила, действующая на конце балки:

$$F = \frac{3pa}{8} + \frac{3pD}{2Ba} + \frac{3wD}{a^3}$$

Используя полученные формулы находим вид трансцендентного уравнения, решение которого позволяет найти ширину зоны контакта:

$$\frac{3wD}{a^3} + \frac{5pD}{8} + \frac{3pD}{2Ba} = -\sqrt{B/D} \operatorname{cth}((l-a)\sqrt{B/D}) \left(\frac{3wD}{a^2} + \frac{pa^2}{8} + \frac{3pD}{2B} \right)$$

Решение этого трансцендентного уравнения находилось численно с использованием метода Ньютона-Рафсона. Из решения определялась длина отрезка a , и ширина зоны контакта определялась, как $b = 1 - a$.

Полученное решение существенно проще полученного решения из п. 2.1, и в качестве приближенной оценки допустимо использовать при малой кривизне сечения оболочки, а также для оболочек плоскоовального сечения.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ С ЖЕСТКИМИ ПРЕГРАДАМИ

3.1. Моделирование контакта цилиндрической оболочка с эллиптическим сечением и жесткими преградами

Постановка задачи

Для детального исследования проводилось численное моделирование методом конечных элементов с использованием ПО Ansys Workbench, учитывая осевую симметрию задачи [166-168].

При численном моделировании использовались те же геометрические параметры оболочки и тот же материал, что и в аналитическом расчете из предыдущей главы. В качестве жестких пластин моделировались жесткие плиты из стекла [169].

Геометрическая модель оболочки и пластин при расчете в Ansys Workbench для модели 1 представлен на рисунке 3.1, для модели 2 – на рисунке 3.2. Граничные условия и давление задается в области внутренней поверхности оболочки (на границе, выделенной цветом, на рисунке. 3.1 а). Давление на оболочку соответствует от 10 кПа до 150 кПа с шагом 10 кПа. Пример конечно-элементной модели изделия для модели 1 представлен на рисунке 3.3, для модели 2 – на рисунке 3.4.

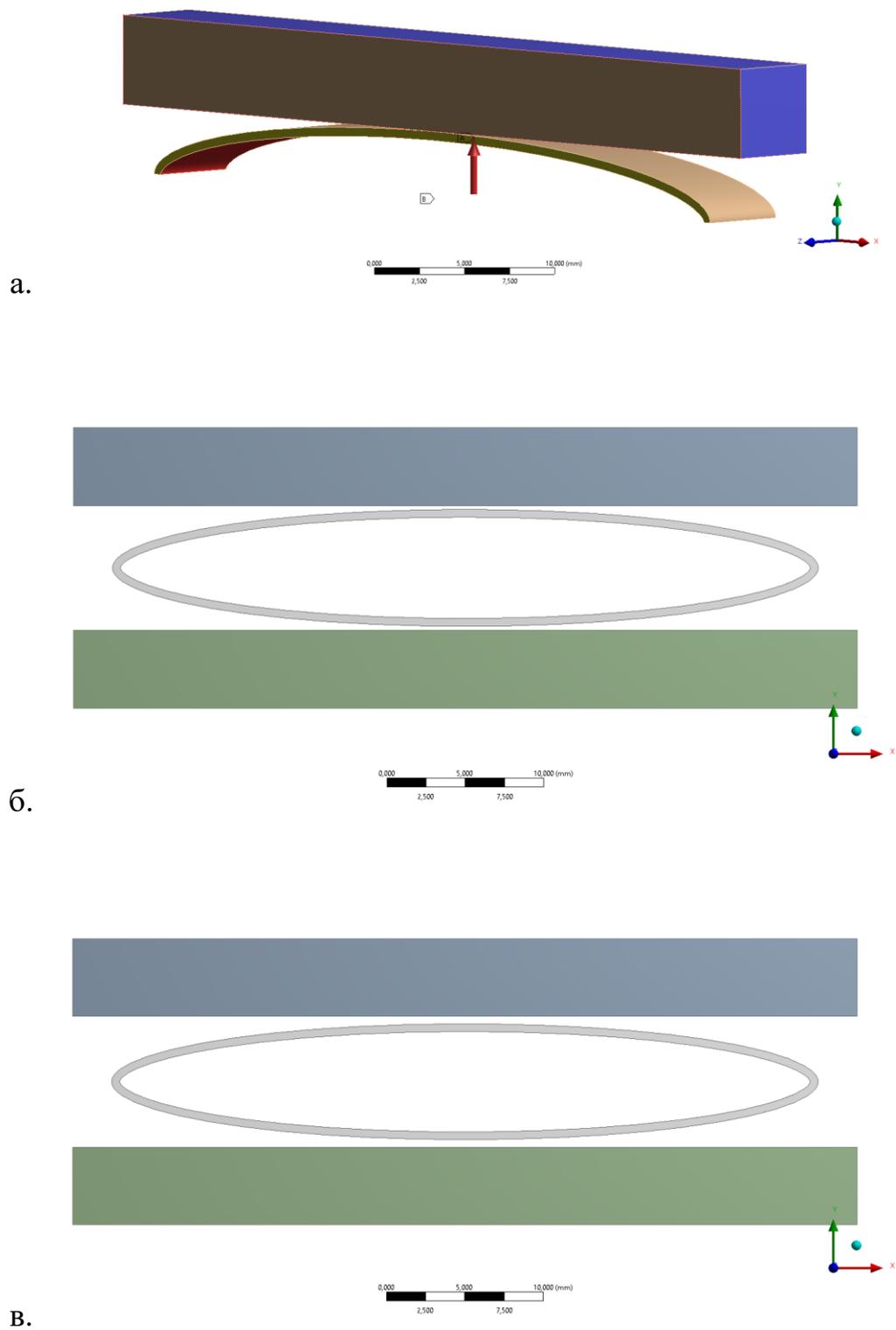


рисунок 3.1. геометрия модели 1.

а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

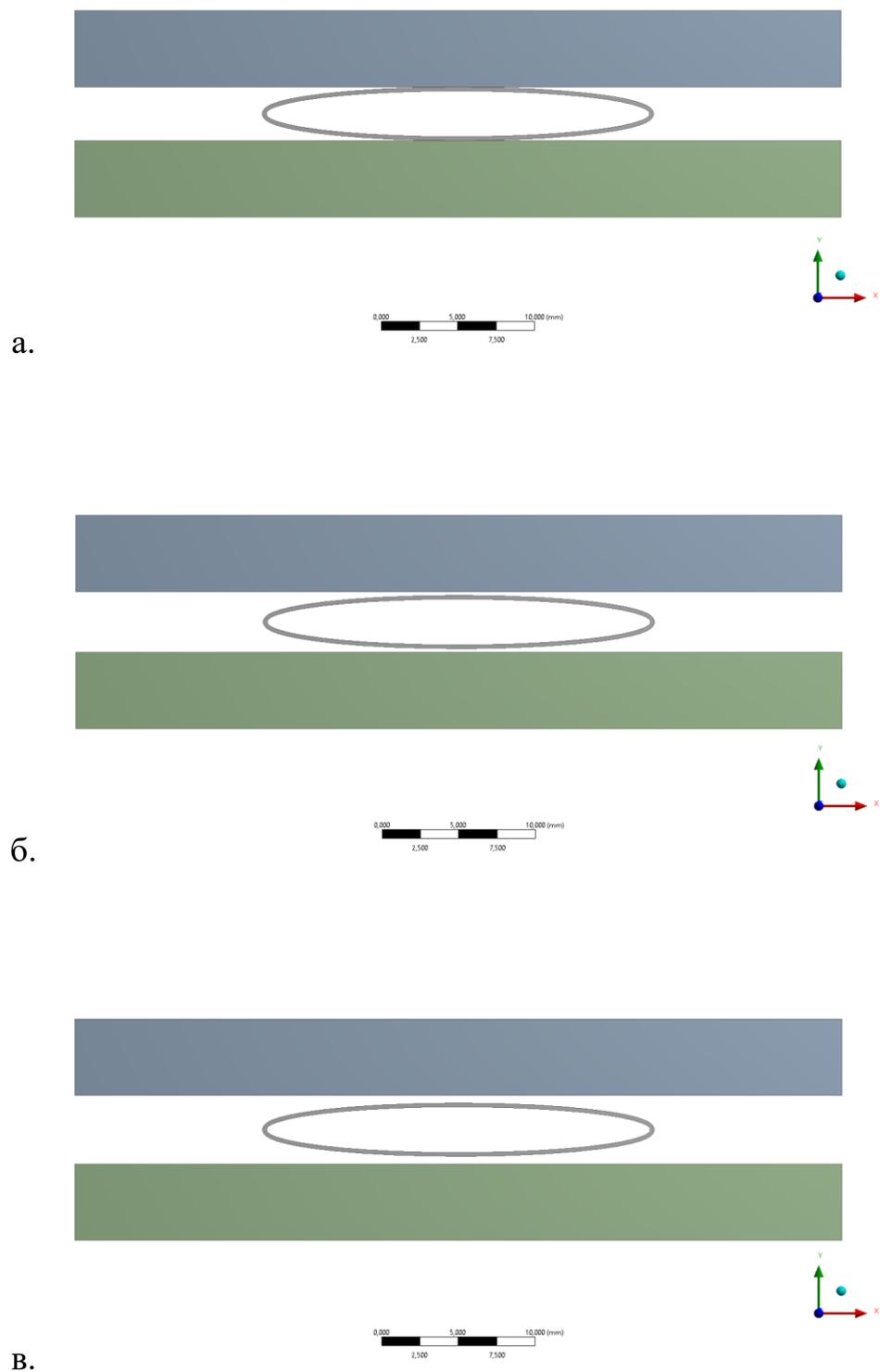


рисунок 3.2. Геометрия модели 2.

а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

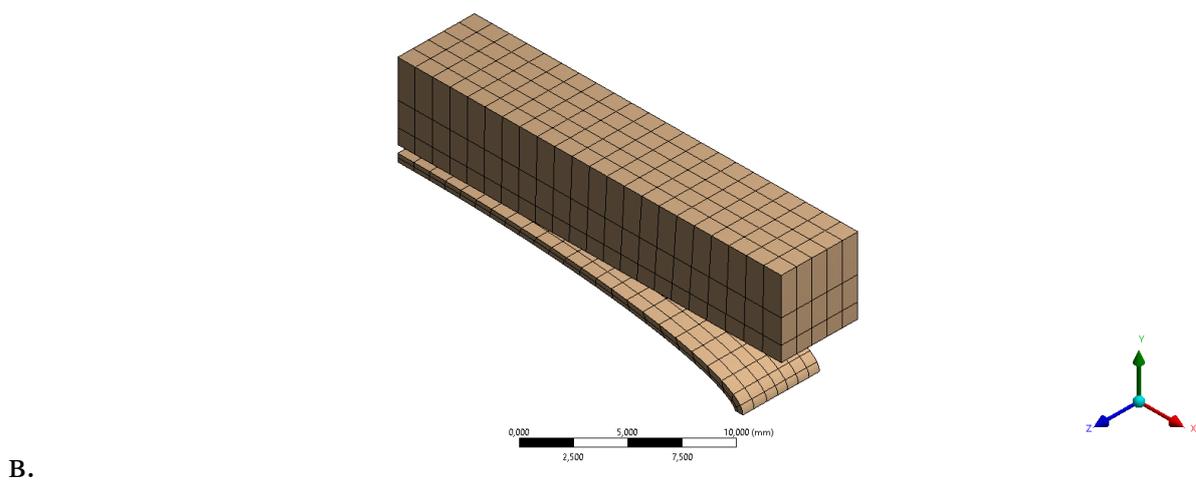
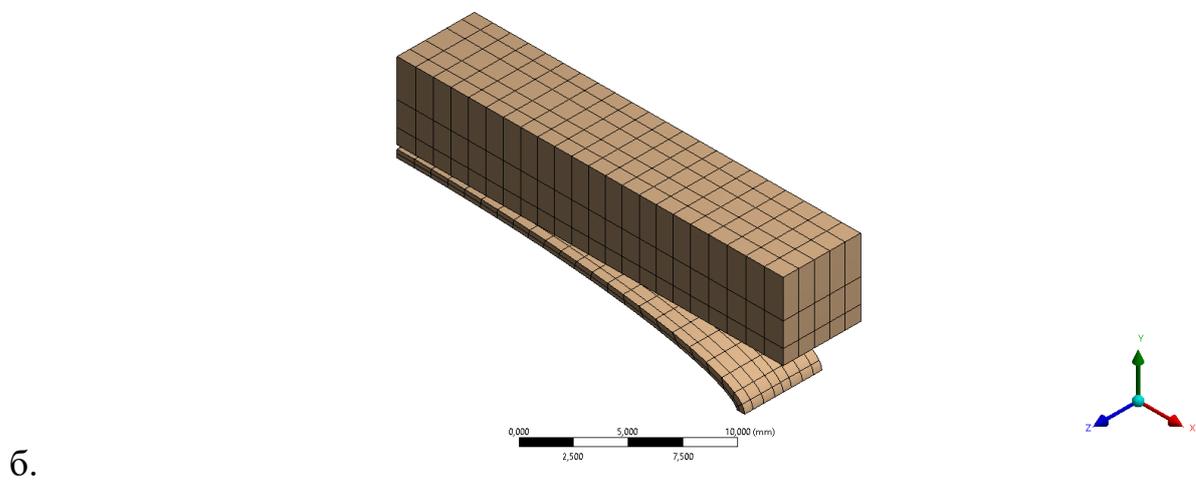
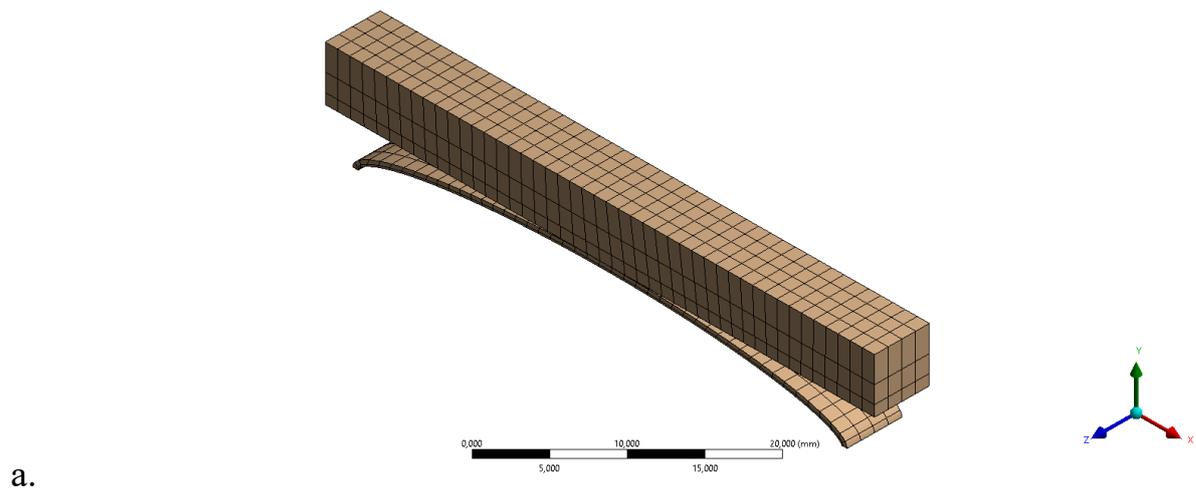


рисунок 3.3. КЭ модель для модели 1.
 а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

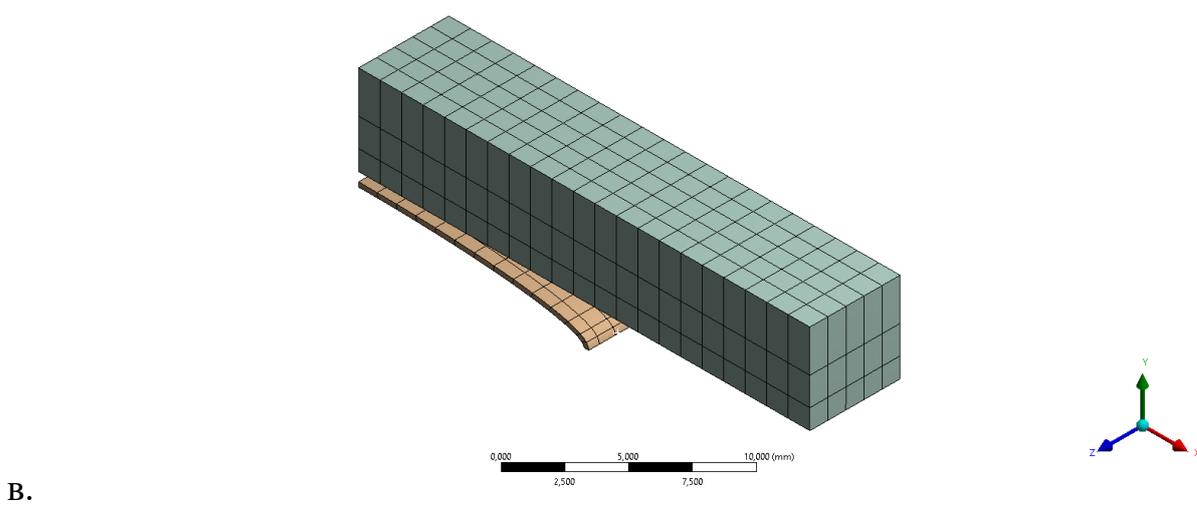
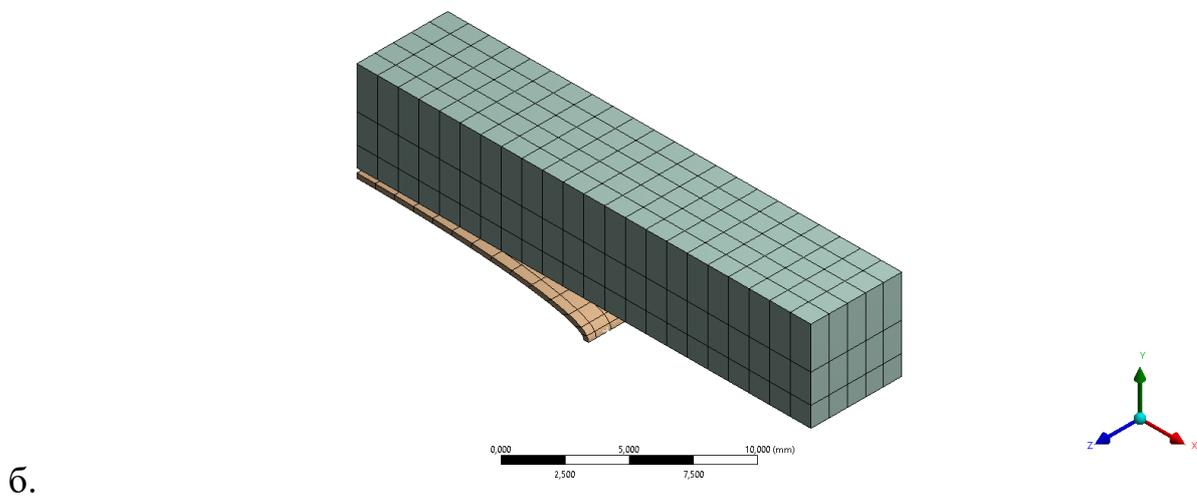
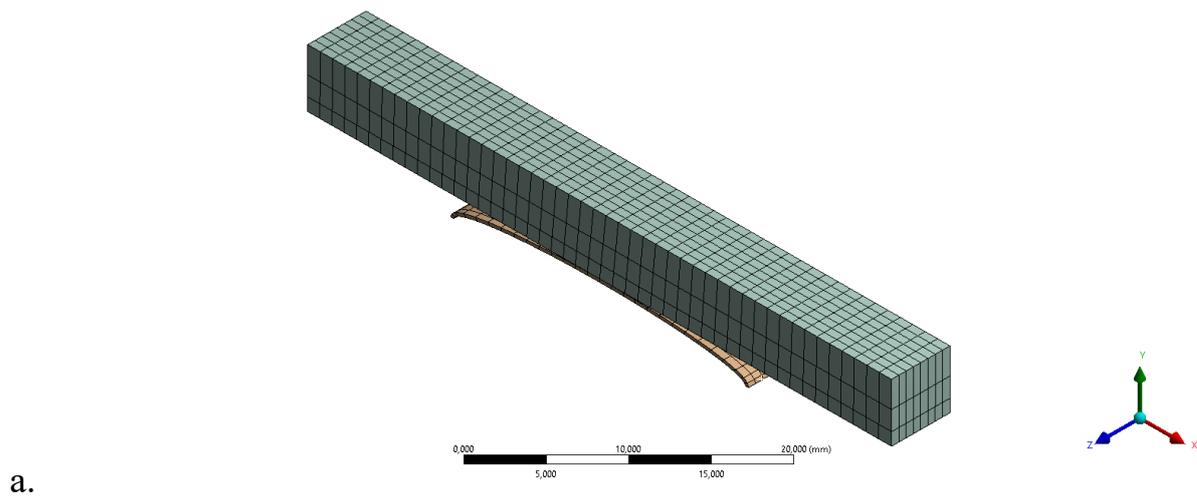
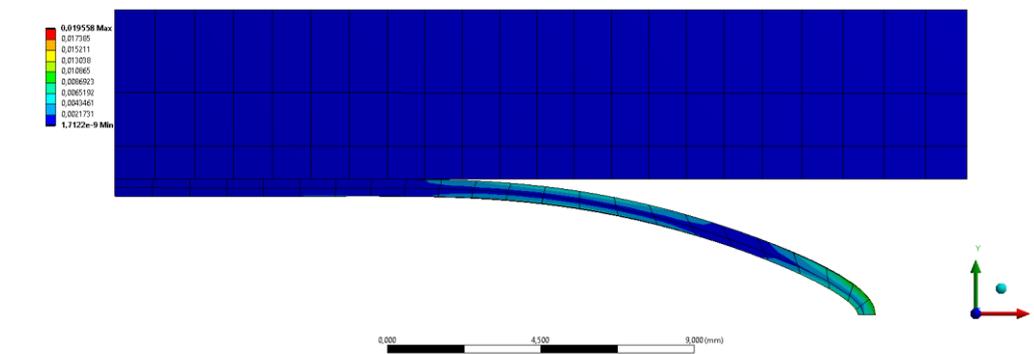
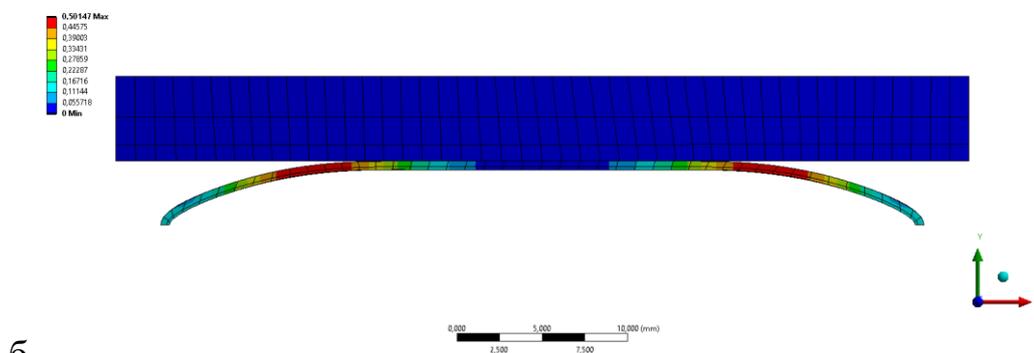
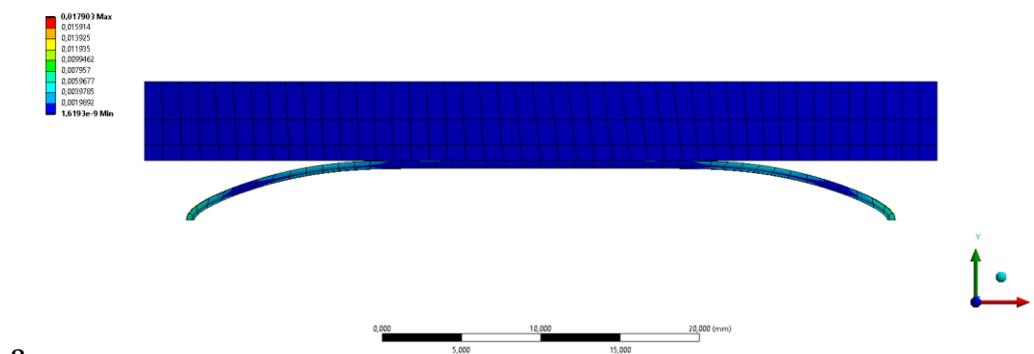


рисунок 3.4. КЭ модель для модели 2.
 а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

Средний размер элементов составляет $\sim 0,5$ мм, среднее число элементов в модели 5741. Расчет проводится в линейно упругой постановке в предположении малых деформаций в квазистатическом приближении. Контакт задается без трения. В Ansys Workbench используется функция Frictionless contact. Результаты численного моделирования для модели 1 представлены на рисунке. 3.5, для модели 2 – на рисунке 3.6. Здесь показано распределение напряжений и деформированное состояние оболочки.



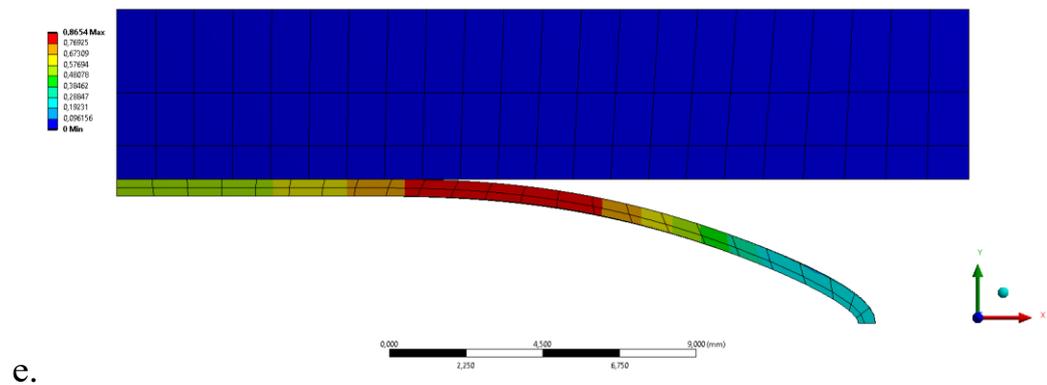
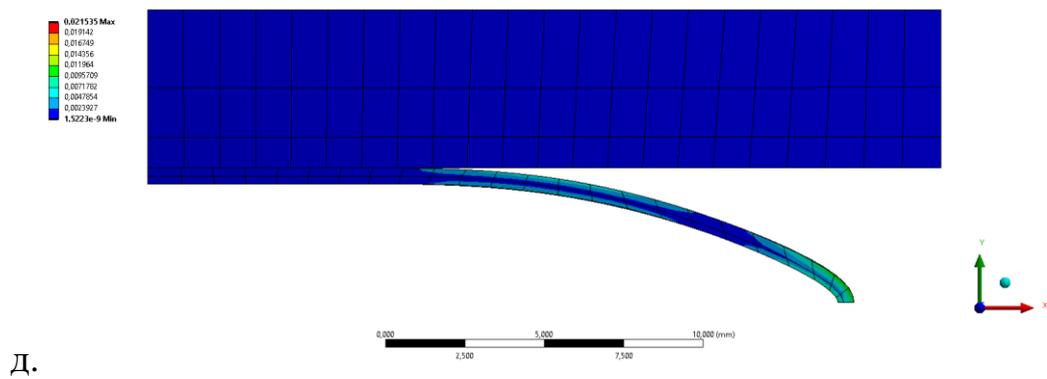
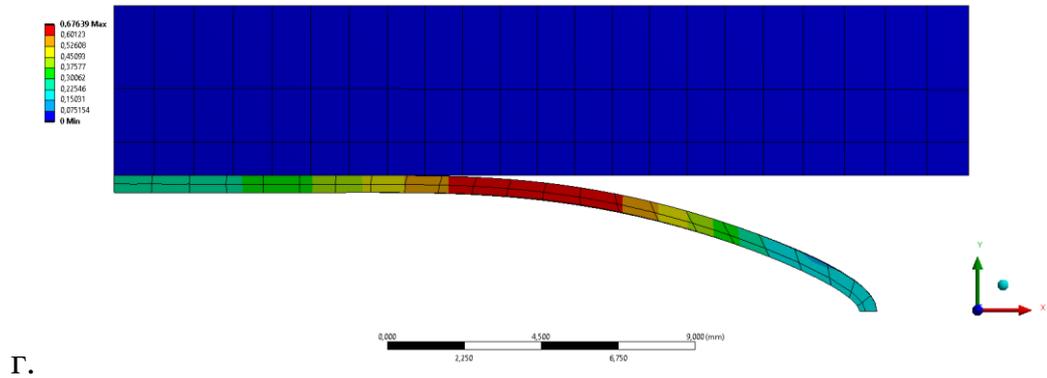
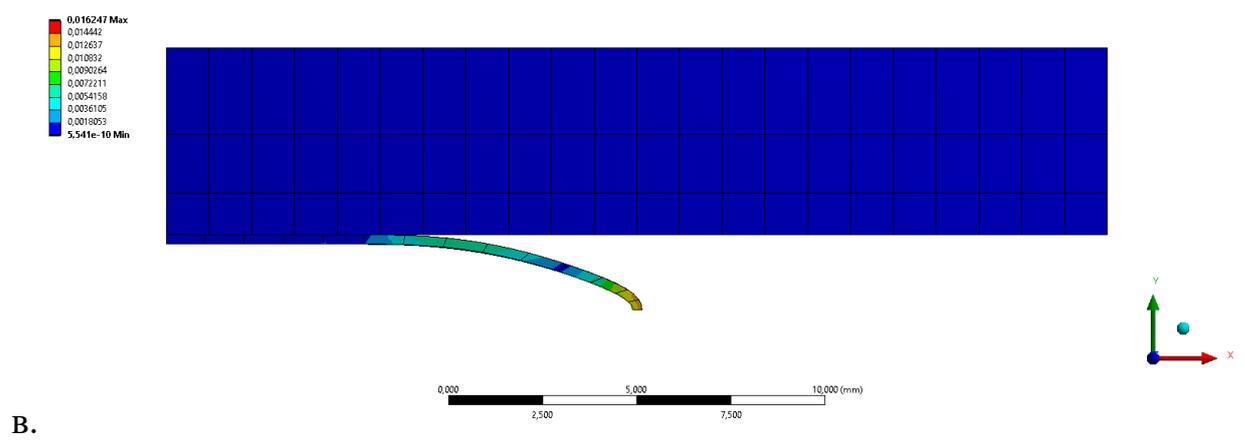
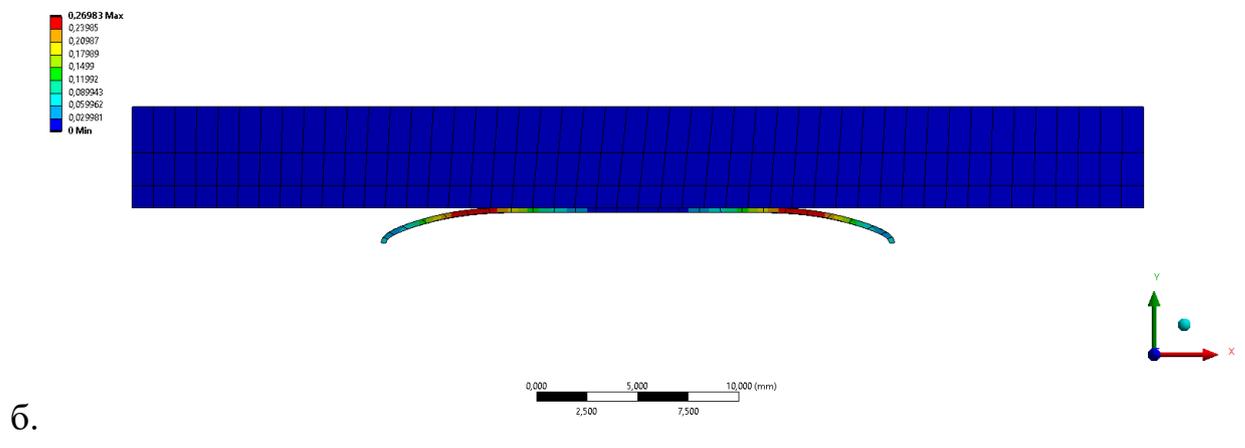
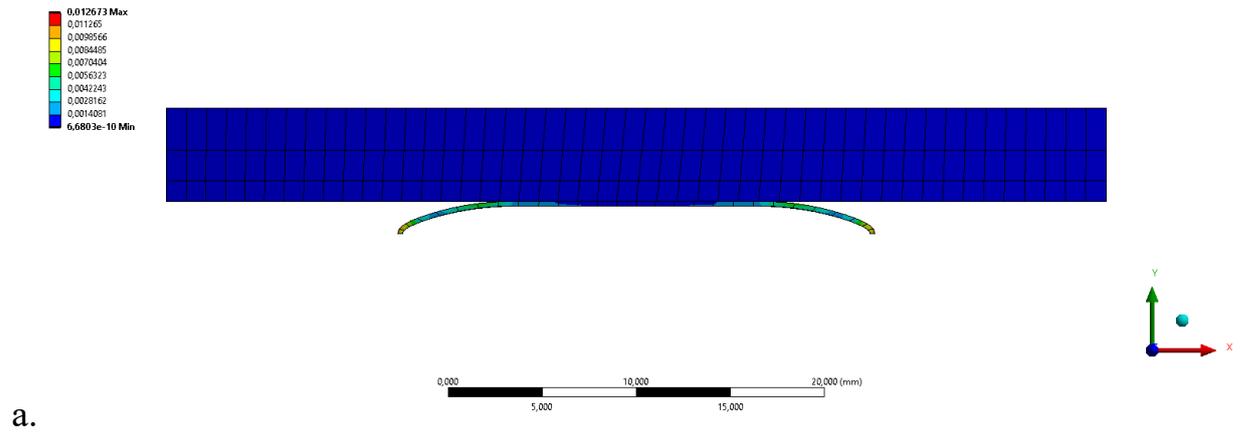


рисунок 3.5. НДС полученные в Ansys Workbench для модели 1 при максимальном нагружении.

(а – напряжения по Мизесу, без зазора; б – деформированное состояние, без зазора; в – напряжения по Мизесу, зазор 0,25 мм.; г – деформированное состояние, зазор 0,25 мм.; д – напряжения по Мизесу, зазор 0,5 мм.; е – деформированное состояние, зазор 0,5 мм.)



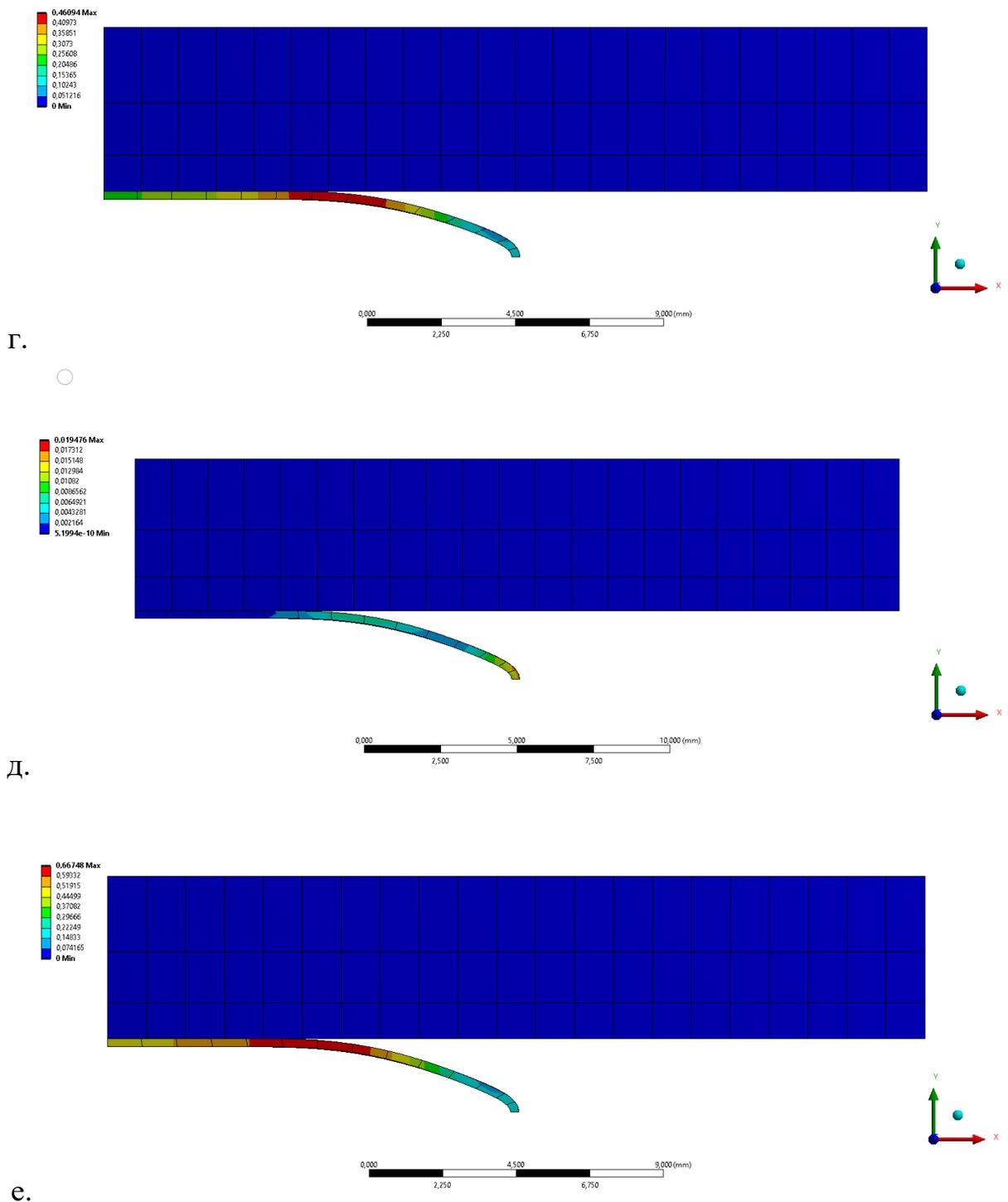
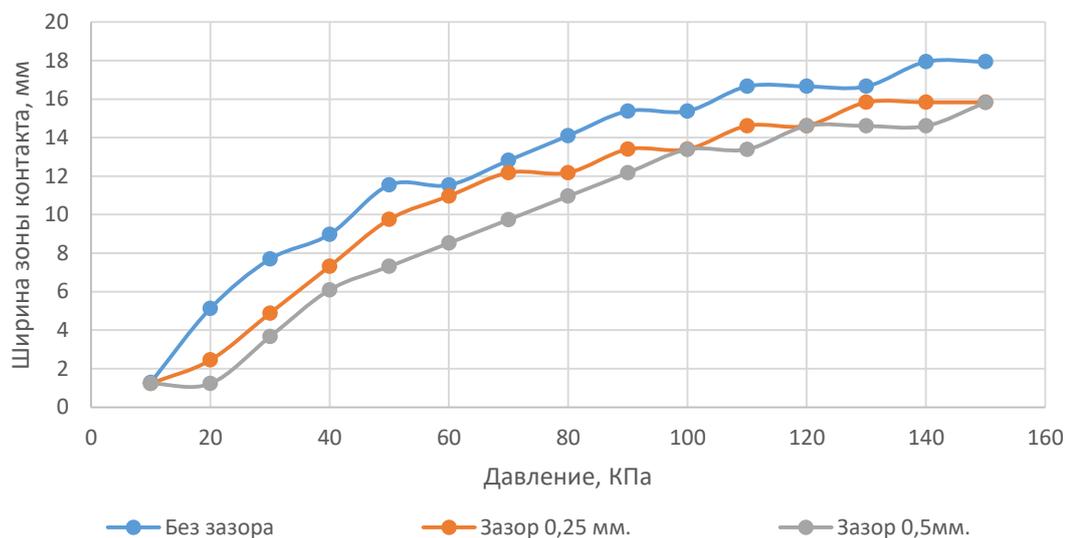


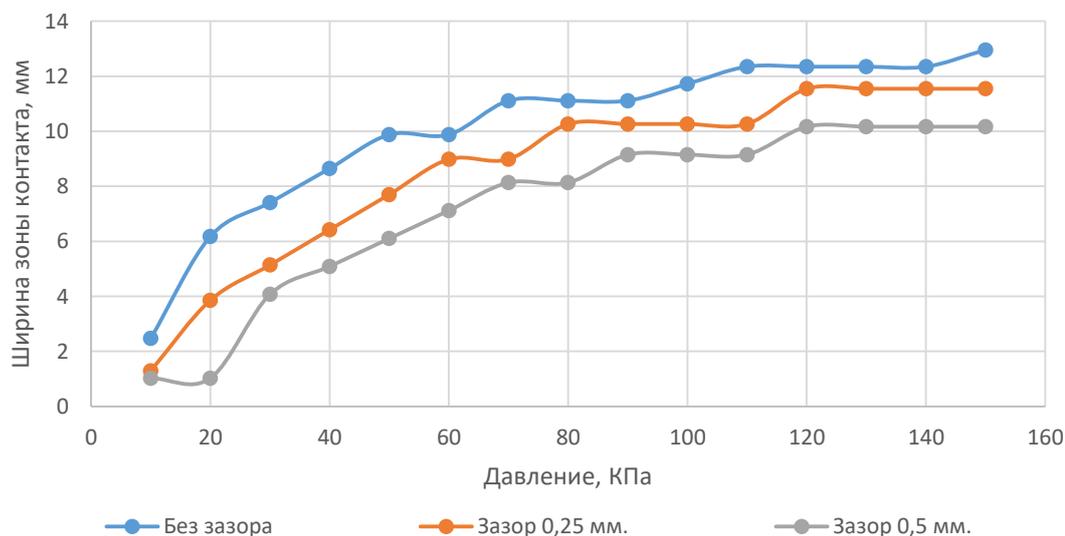
рисунок 3.6. НДС полученное в Ansys Workbench для модели 2 при максимальном нагружении.

(а – напряжения по Мизесу, без зазора; б – деформированное состояние, без зазора; в – напряжения по Мизесу, зазор 0,25 мм.; г – деформированное состояние, зазор 0,25 мм.; д – напряжения по Мизесу, зазор 0,5 мм.; е – деформированное состояние, зазор 0,5 мм.)

Результаты зависимости ширины зоны контакта от действующего давления, полученного в Ansys Workbench для модели 1 представлены на рисунке 3.7, а для модели 2 на рисунке 3.8.



рисунк 3.7. Результаты зависимости ширины зоны контакта от действующего внутреннего давления для модели 1, полученного в Ansys Workbench.

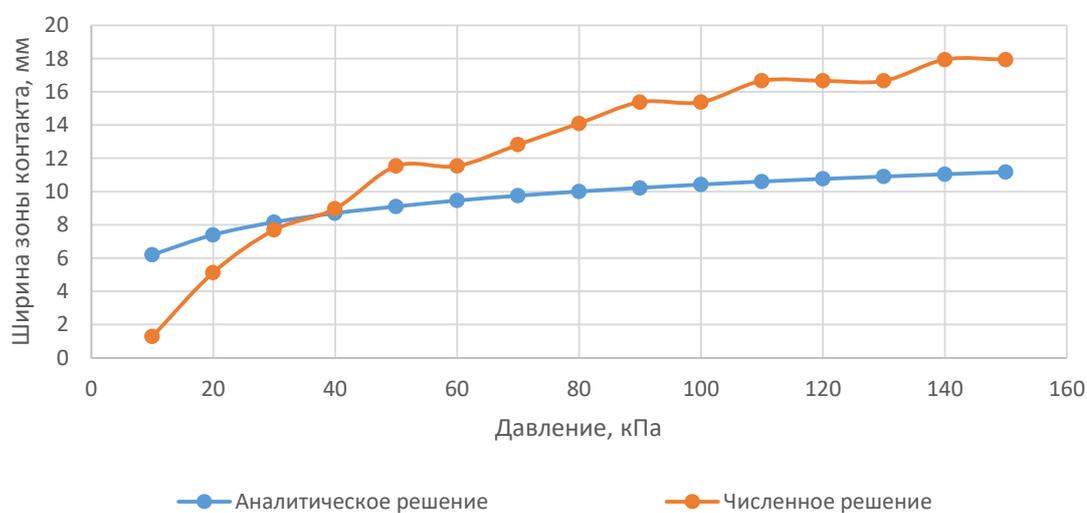


рисунк 3.8. Результаты зависимости ширины зоны контакта от действующего внутреннего давления для модели 2, полученного в Ansys Workbench.

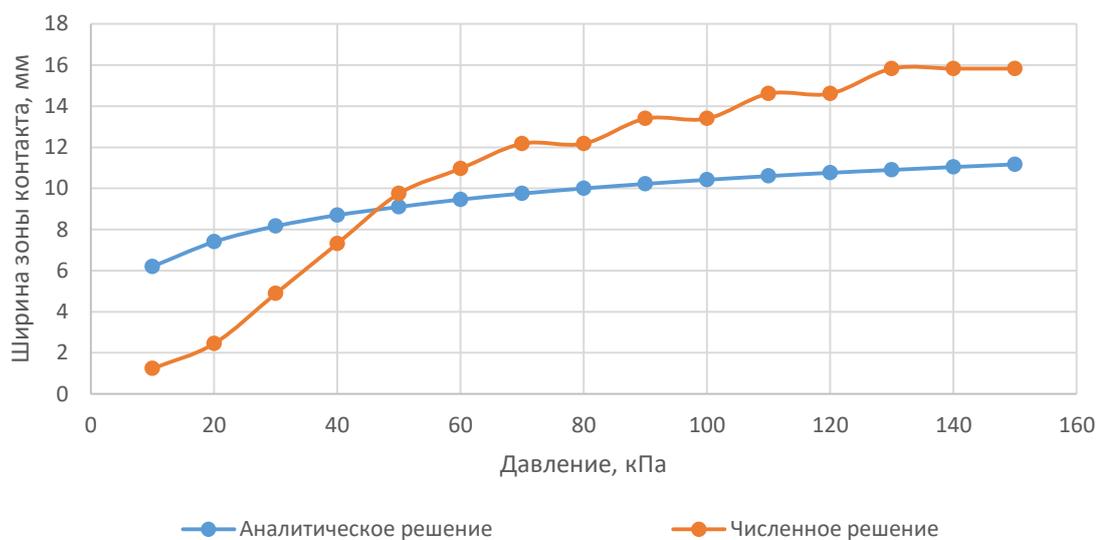
3.2. Сопоставление численного и аналитического решений

Для проверки результатов проектировочных расчетов проводилось сравнение результатов полученного при численном и при аналитическом моделировании. Результаты расчетов для модели 1 представлены на рисунке 3.9. Результаты расчетов для модели 2 представлены на рисунке 3.10.

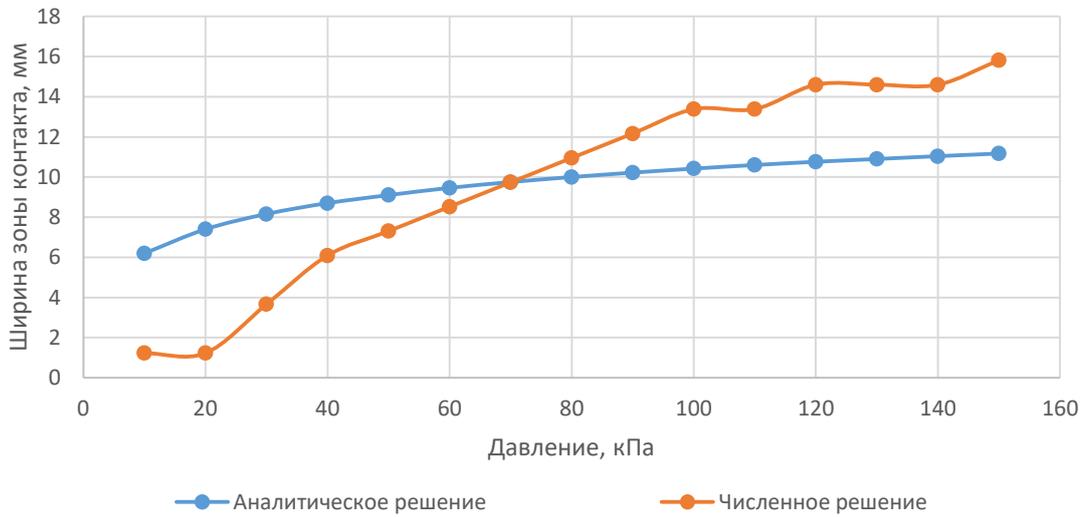
Для проверки результатов проектировочных расчетов проводилось сравнение результатов полученного при численном и при аналитическом моделировании. Результаты расчетов для модели 1 представлены на рисунке 3.9. Результаты расчетов для модели 2 представлены на рисунке 3.10.



а.



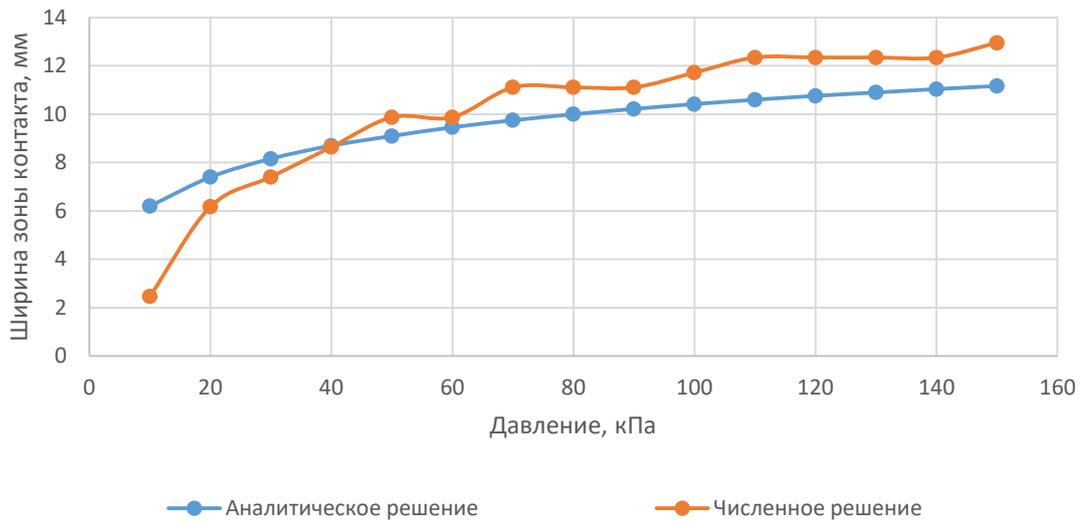
б.



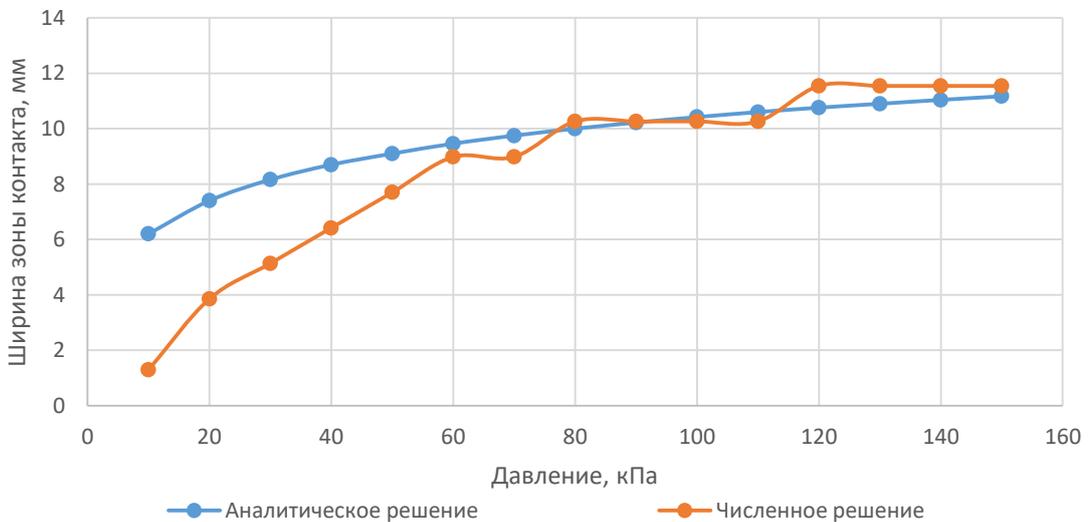
В.

рисунок 3.9. Сравнение результатов расчетов для модели 1, полученных при численном и при аналитическом моделировании.

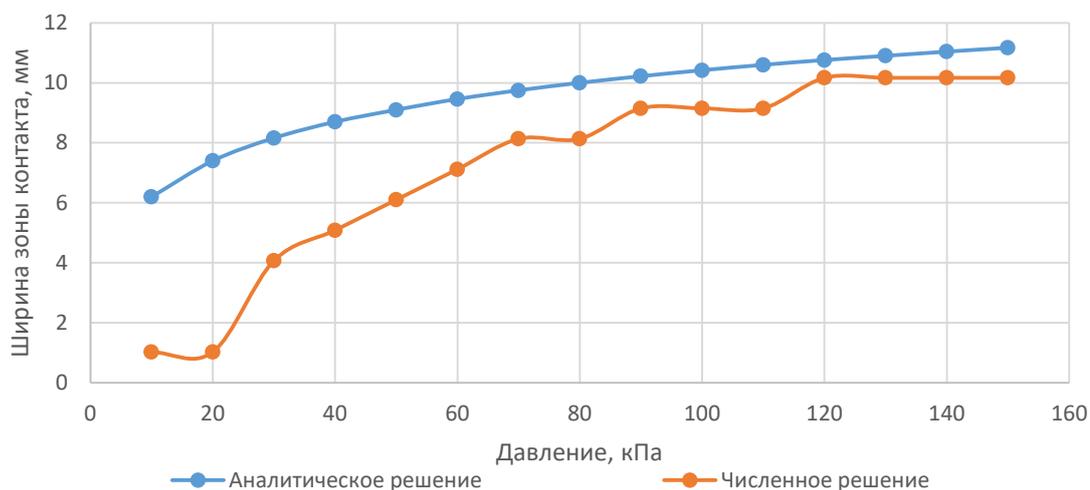
а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.



а.



б.



В.

рисунок 3.10. Сравнение результатов расчетов для модели 2, полученных при численном и при аналитическом моделировании.

а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

3.3. Моделирование контакта цилиндрической оболочки с эллиптическим сечением малой кривизны и жесткими преградами

При численном моделировании использовались те же геометрические параметры оболочки и тот же материал, что и в расчете оболочки с сечением эллиптического типа. Радиус кривизны выбирался 100 мм. В качестве жестких пластин моделировались жесткие плиты из стекла.

Геометрическая модель оболочки и пластин при расчете в Ansys Workbench для модели 1 представлен на рисунке 3.11, для модели 2 – на рисунке 3.12. Граничные условия и давление аналогичные, что и для цилиндрической оболочки эллиптического сечения. Давление на оболочку соответствует от 10 кПа до 150 кПа с шагом 10 кПа. Пример конечно-элементной модели изделия для модели 1 представлен на рисунке 3.13, для модели 2 – на рисунке 3.14.

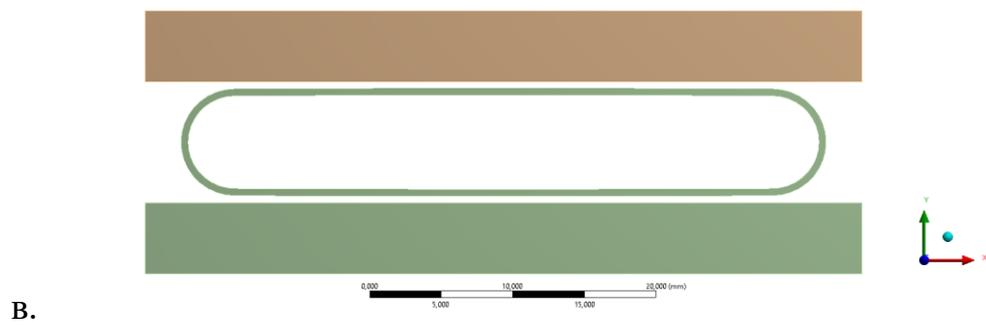
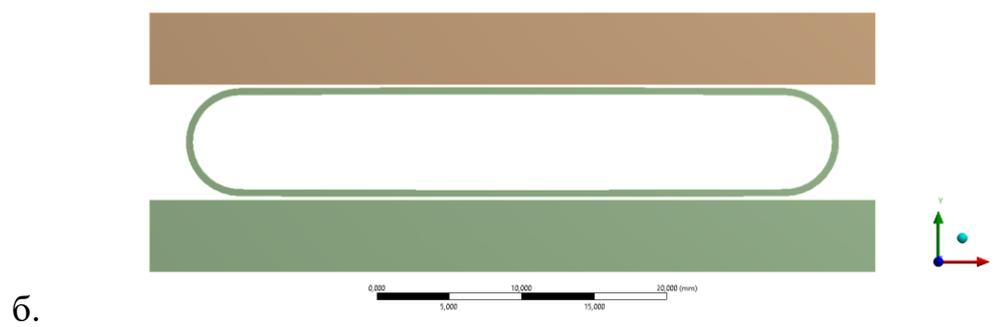
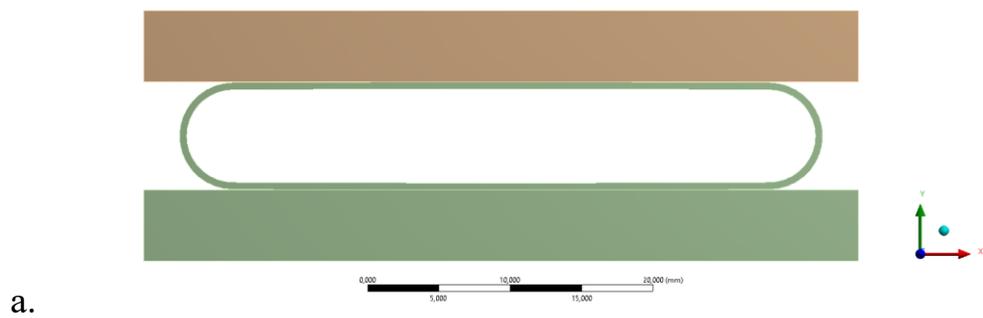


рисунок 3.11. Геометрия модели 1.

а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

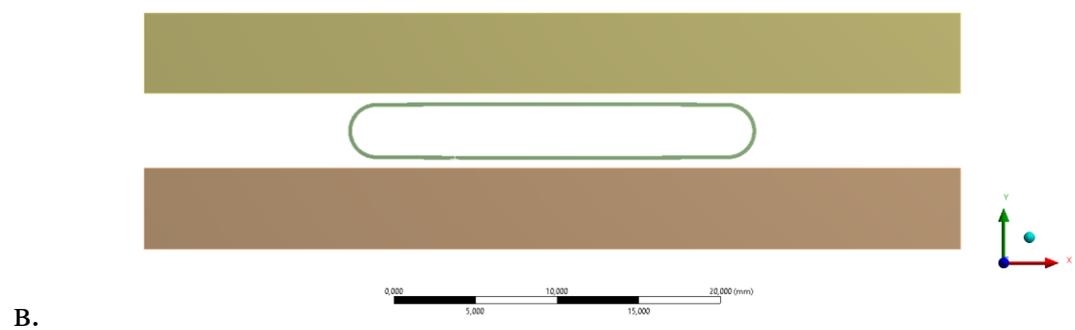
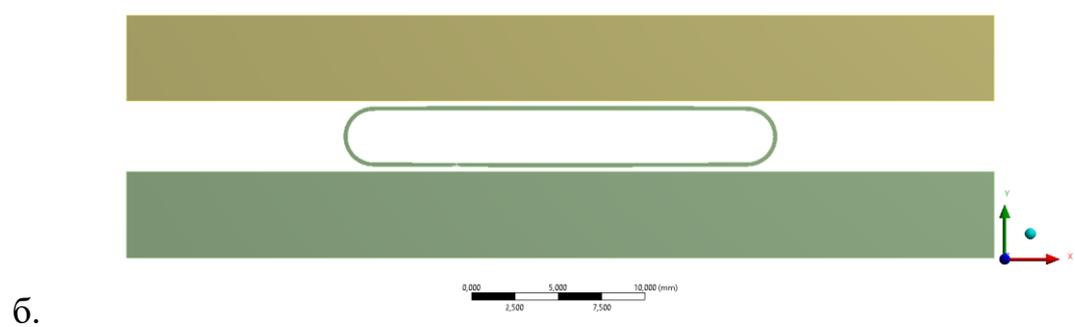
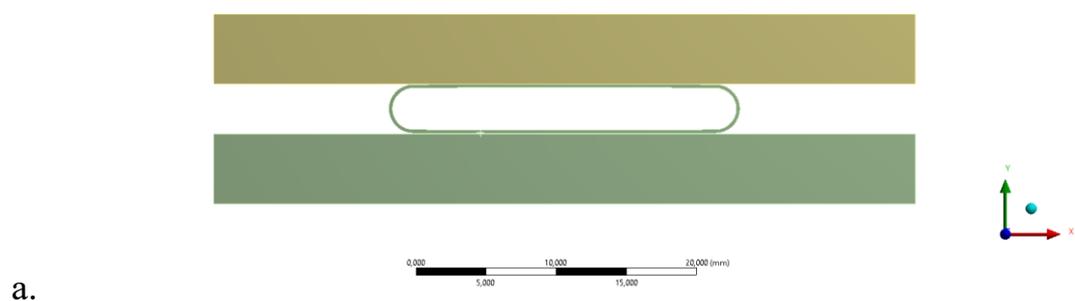


рисунок 3.12. Геометрия модели 2.

а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

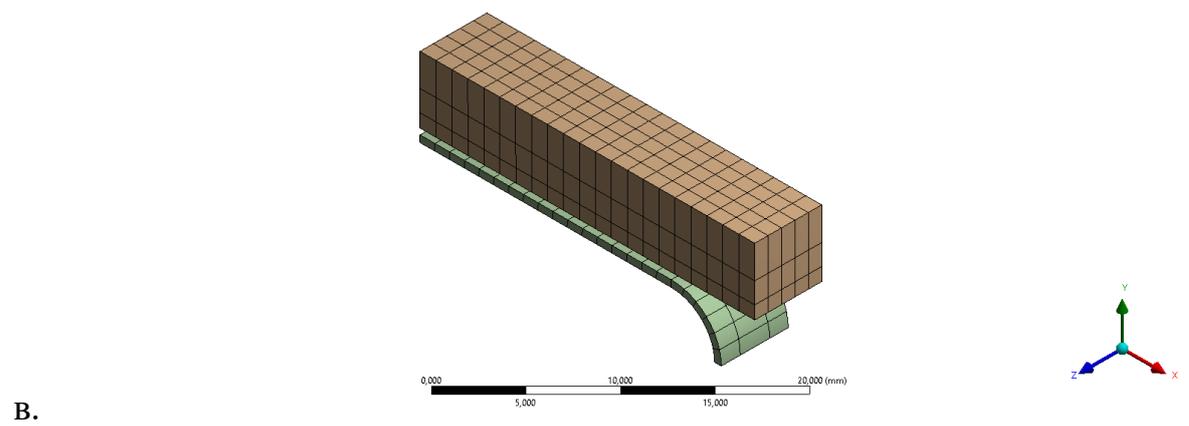
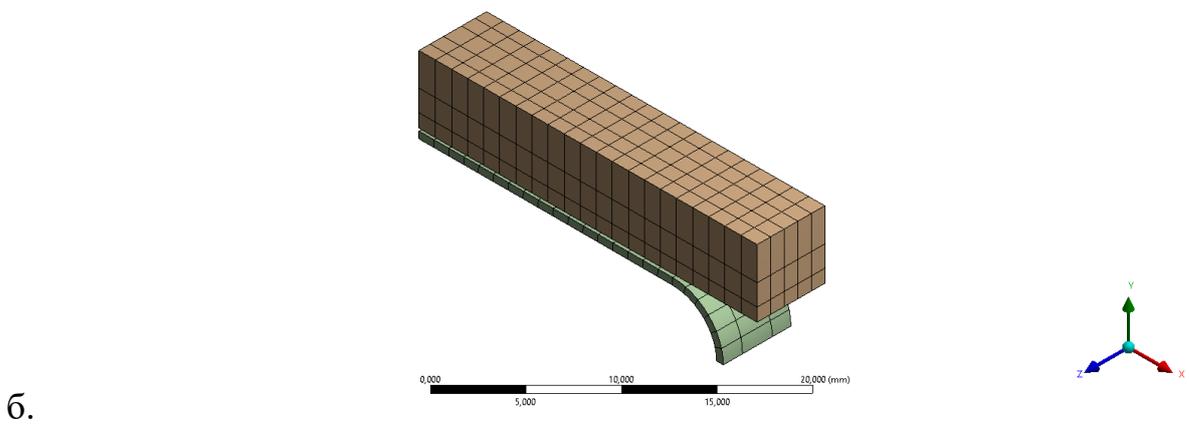
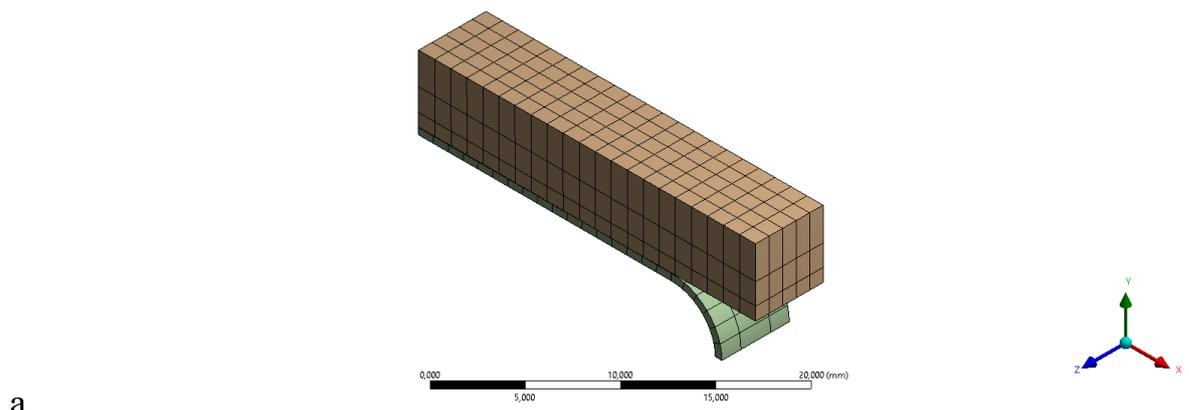


рисунок 3.13. КЭ модель для модели 1.
 а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

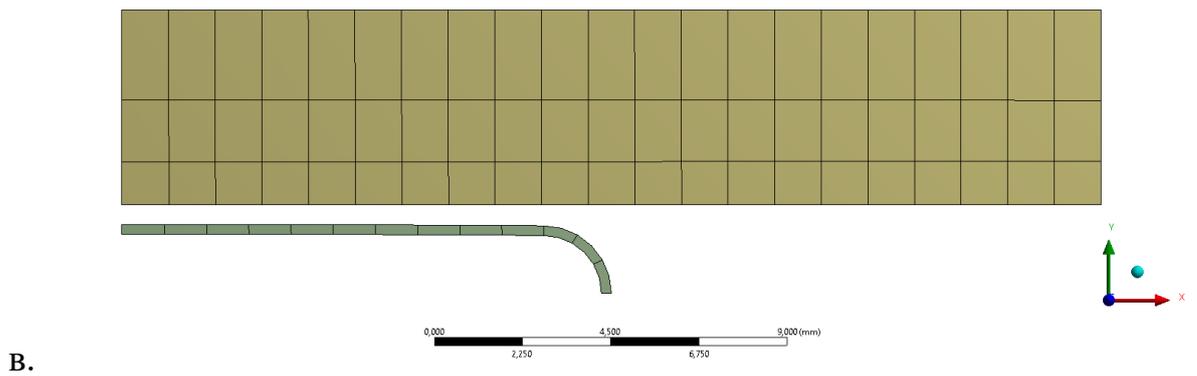
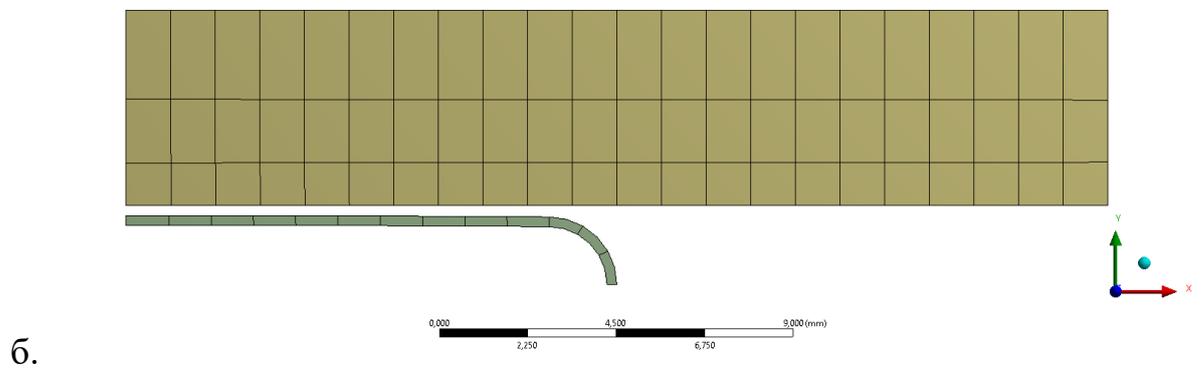
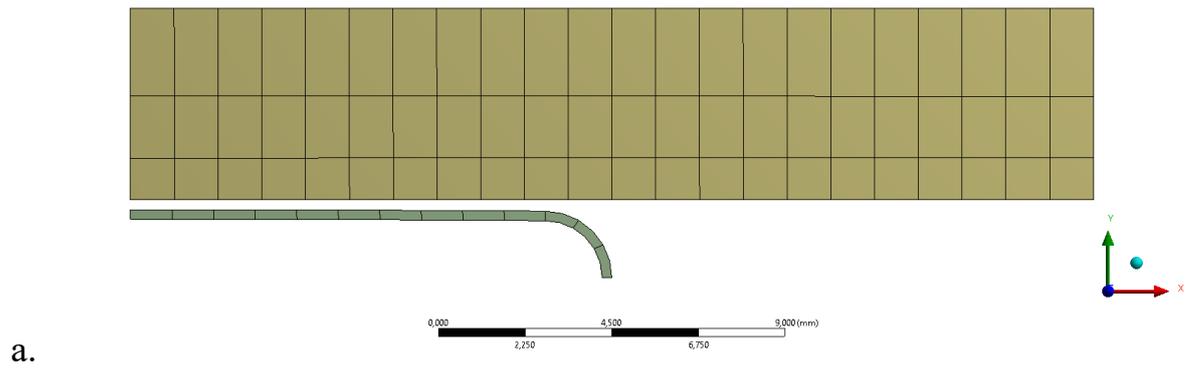
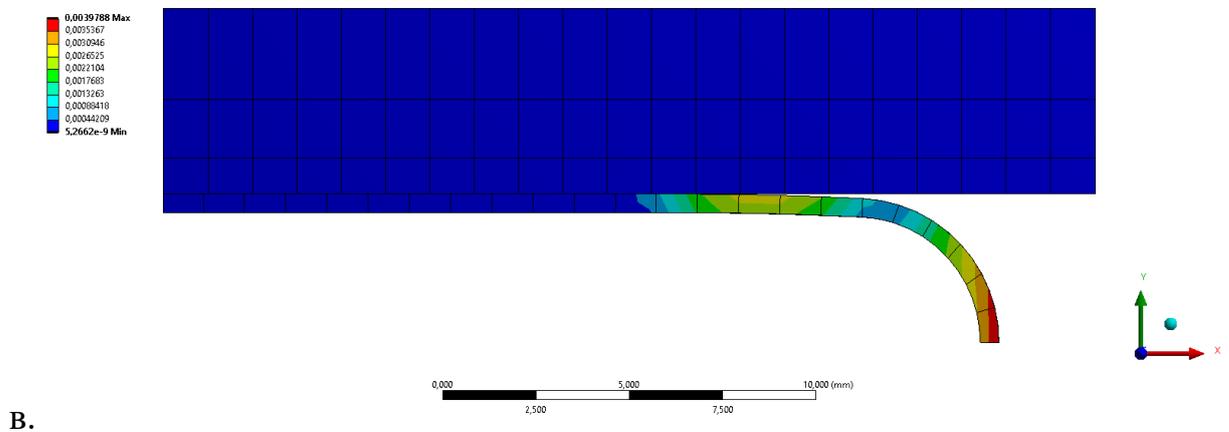
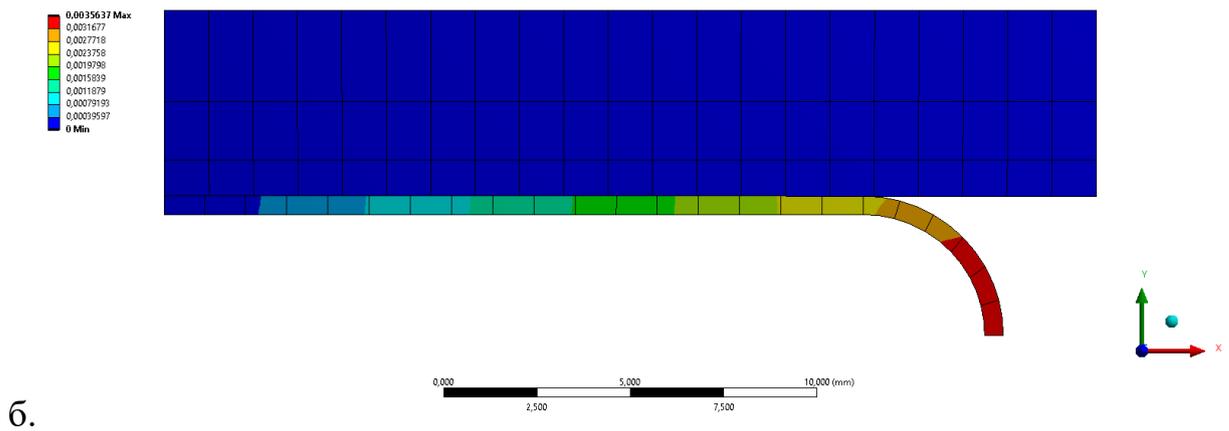
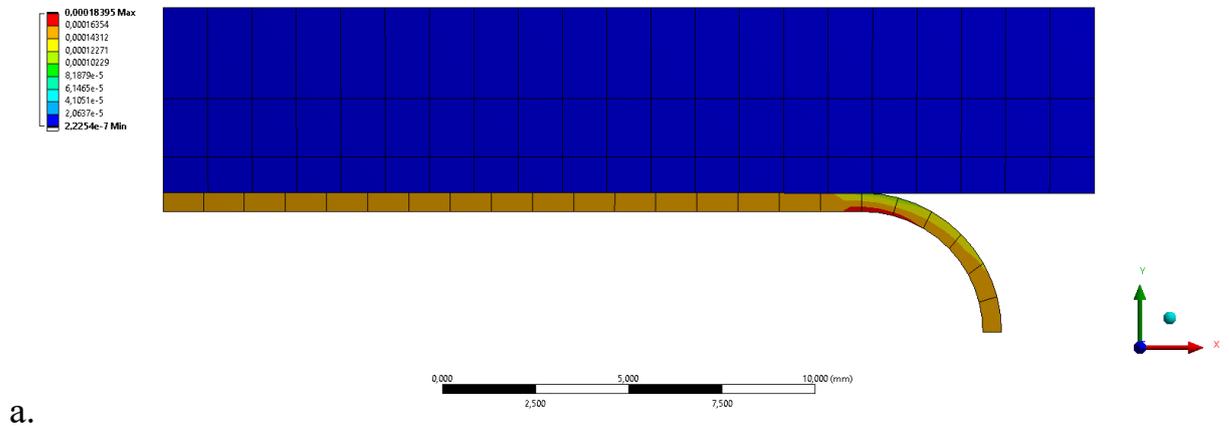


рисунок 3.14. КЭ модель для модели 2.
 а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

Результаты численного моделирования для модели 1 представлены на рисунке 3.15, для модели 2 – на рисунке 3.16. Здесь показано распределение напряжений и деформированное состояние оболочки.



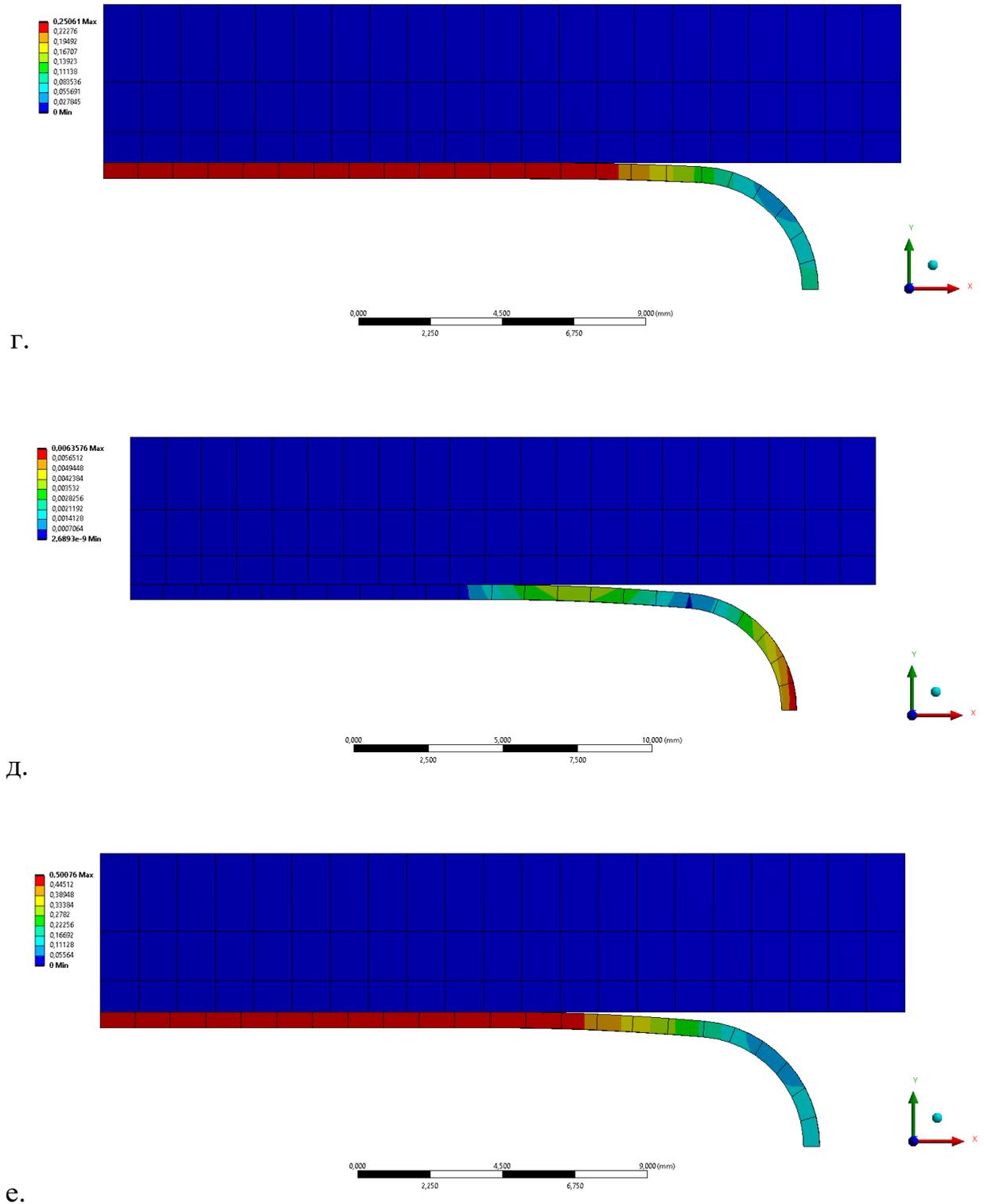
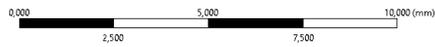
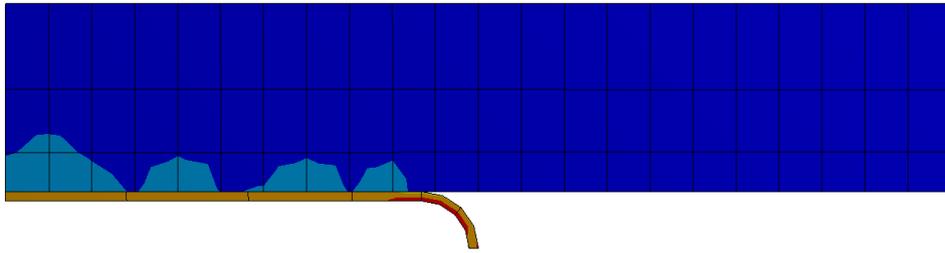
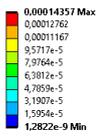
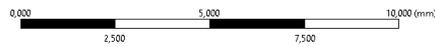
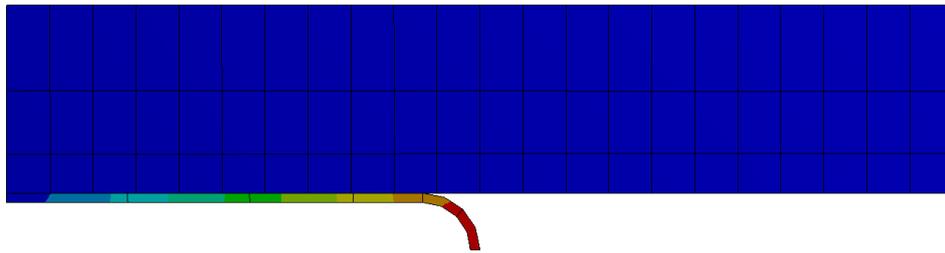
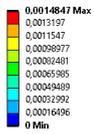


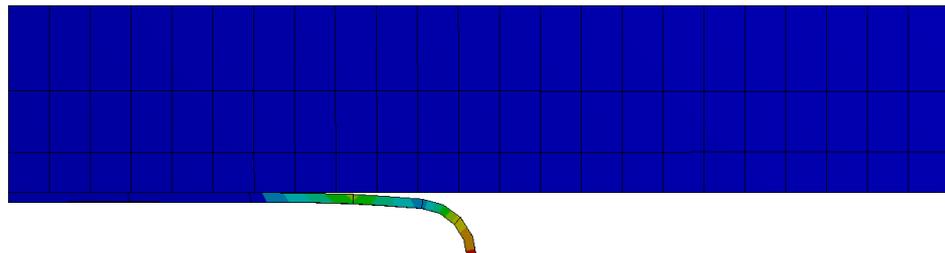
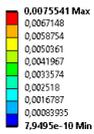
рисунок 3.15. НДС полученного в Ansys Workbench для модели 1.
 (а – напряжения по Мизесу, без зазора; б – деформированное состояние, без зазора; в – напряжения по Мизесу, зазор 0,25 мм.; г – деформированное состояние, зазор 0,25 мм.; д – напряжения по Мизесу, зазор 0,5 мм.; е – деформированное состояние, зазор 0,5 мм.)



a.



б.



B.

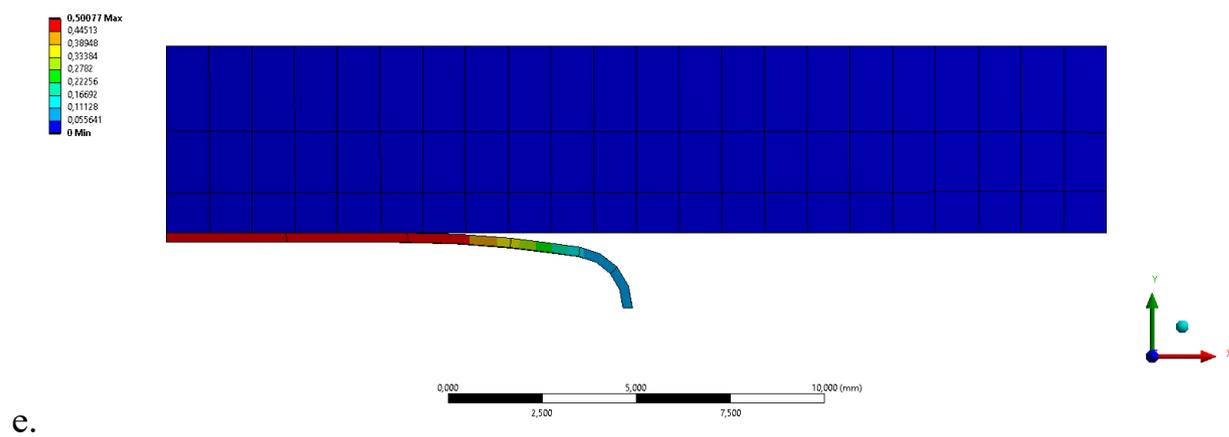
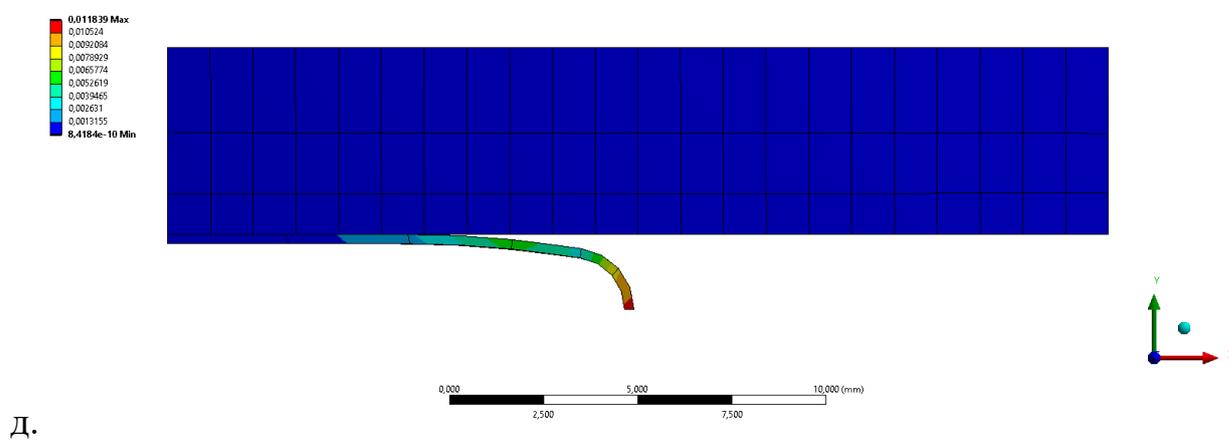
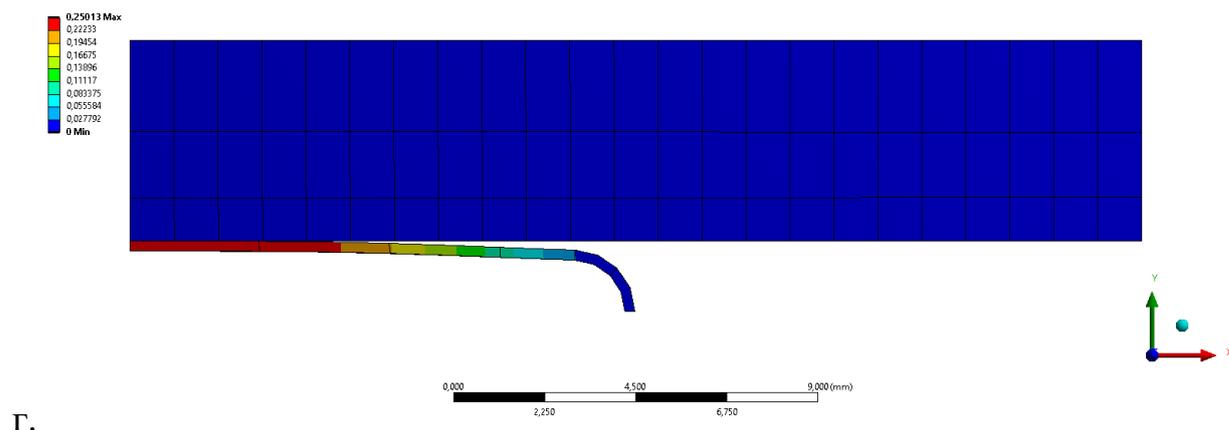


рисунок 3.16. НДС полученного в Ansys Workbench для модели 2.
 (а – напряжения по Мизесу, без зазора; б – деформированное состояние, без зазора; в – напряжения по Мизесу, зазор 0,25 мм.; г – деформированное состояние, зазор 0,25 мм.; д – напряжения по Мизесу, зазор 0,5 мм.; е – деформированное состояние, зазор 0,5 мм.)

Результаты зависимости ширины зоны контакта от действующего давления, полученного в Ansys Workbench для модели 1 представлены на рисунке 3.17, а для модели 2 на рисунке 3.18.

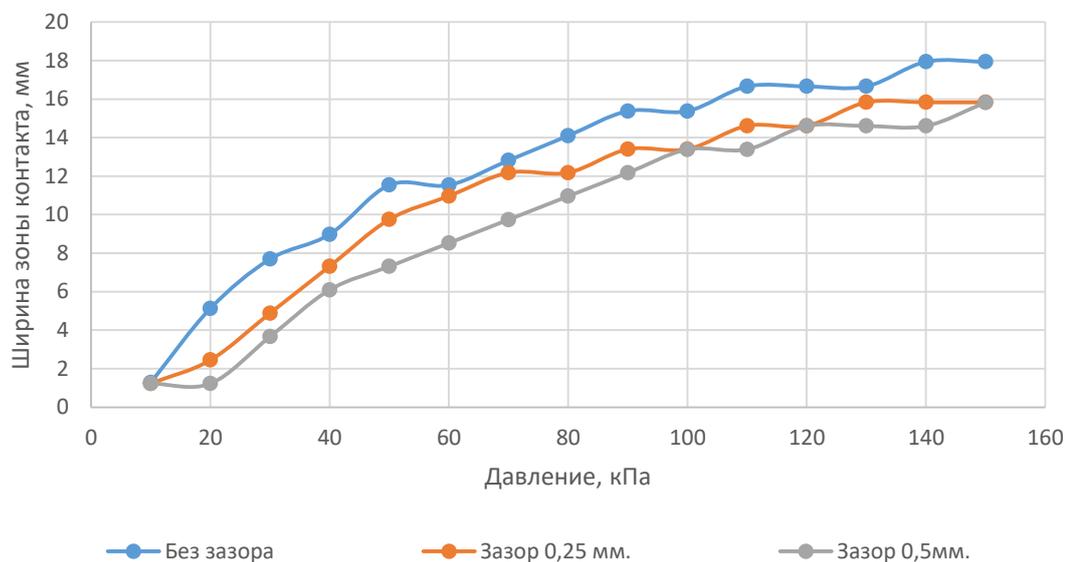


рисунок 3.17. Результаты зависимости ширины зоны контакта от действующего внутреннего давления для модели 1, полученного в Ansys Workbench.

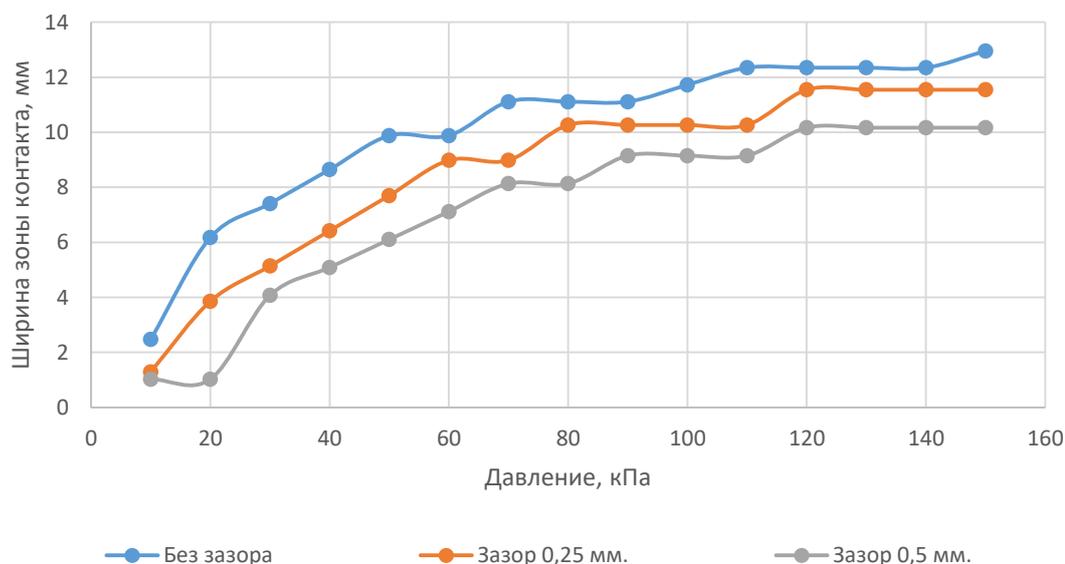


рисунок 3.18. Результаты зависимости ширины зоны контакта от действующего внутреннего давления для модели 2, полученного в Ansys Workbench.

3.4. Оценка краевых эффектов при контакте цилиндрической оболочки с жесткими преградами

Для оценки краевых эффектов и ширины зоны краевого эффекта проводился численный расчет в среде Ansys Workbench. Исследовались цилиндрические оболочки с эллиптическим сечением. Сечения оболочек имели геометрические параметры согласно модели 1 и модели 2, табл. 2.1. Длина всех рассматриваемых оболочек составляла 100 мм. Материал – Алюминий. Оболочка помещалась между плитами толщиной 5 мм. из стекла.

Построенные геометрические модели цилиндрической оболочки с эллиптическим сечением представлены на рисунке 3.19, для цилиндрической оболочки с эллиптическим сечением малой кривизны– на рисунке 3.20

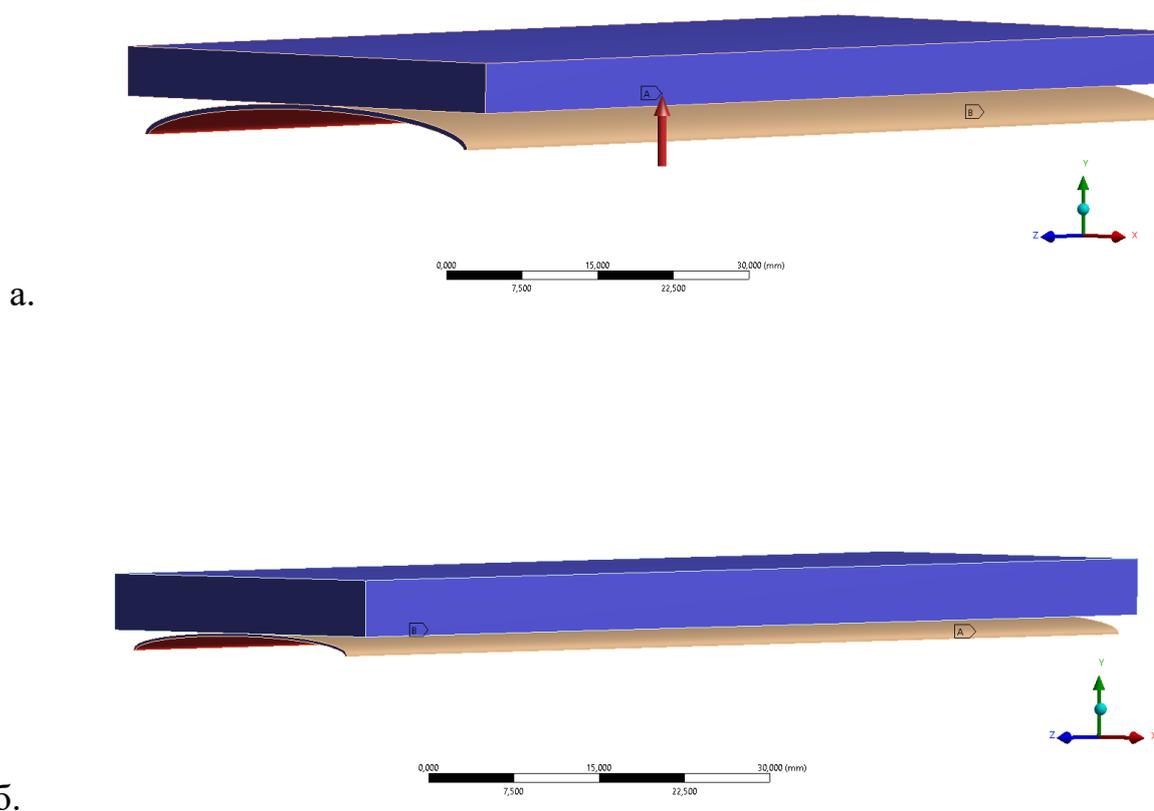
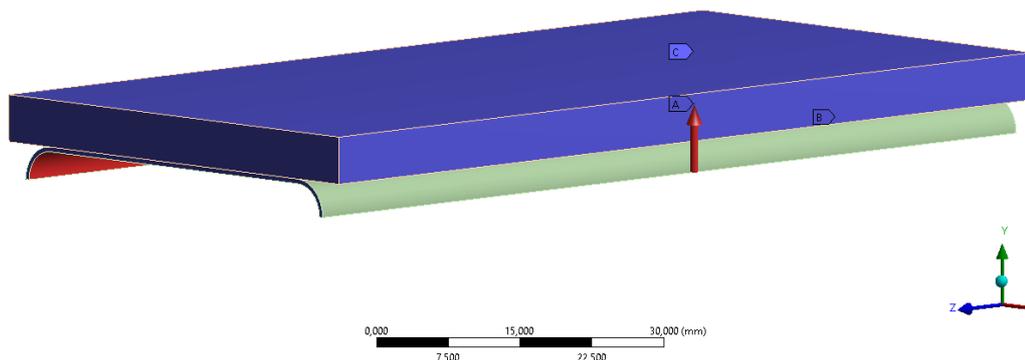


рисунок 3.19. а – геометрия модели 1; б – геометрия модели 2.

A: NGM120
 Static Structural
 Time: 0,44083 s
 07.09.2020 15:49

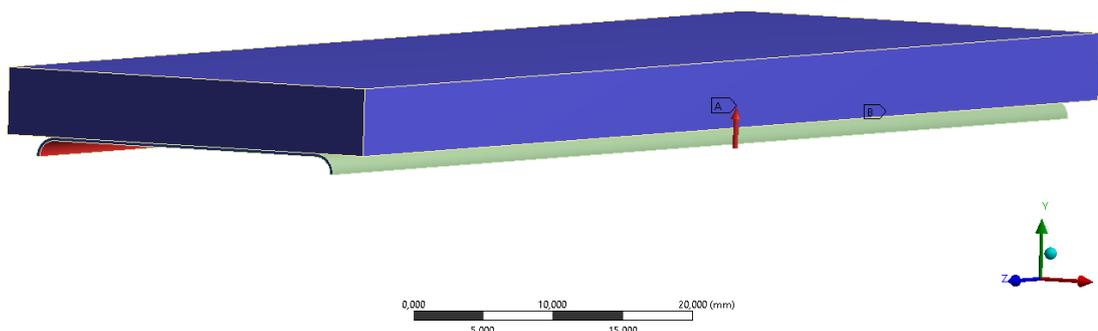
A Pressure: 4,4083e-002 MPa
 B Remote Displacement
 C Fixed Support



а.

A: NGM220
 Static Structural
 Time: 1, s
 07.09.2020 15:53

A Pressure: 0,1 MPa
 B Remote Displacement
 C Fixed Support



б.

рисунок 3.20. а – геометрия модели 1; б – геометрия модели 2.

Граничные условия задаются на внешней поверхности пластин в качестве заделки, а на оболочку задается давление в области внутренней поверхности оболочки (на границе, выделенной красным цветом, Рисунок 3.20). Оболочка закреплена консольно. Давление на оболочку варьируется от 10 кПа до 150 кПа с шагом 10 кПа. Пример конечно-элементной модели для цилиндрической оболочки эллиптического сечения представлен на рисунке 3.21, для оболочки с эллиптическим сечением малой кривизны – на рисунке 3.22.

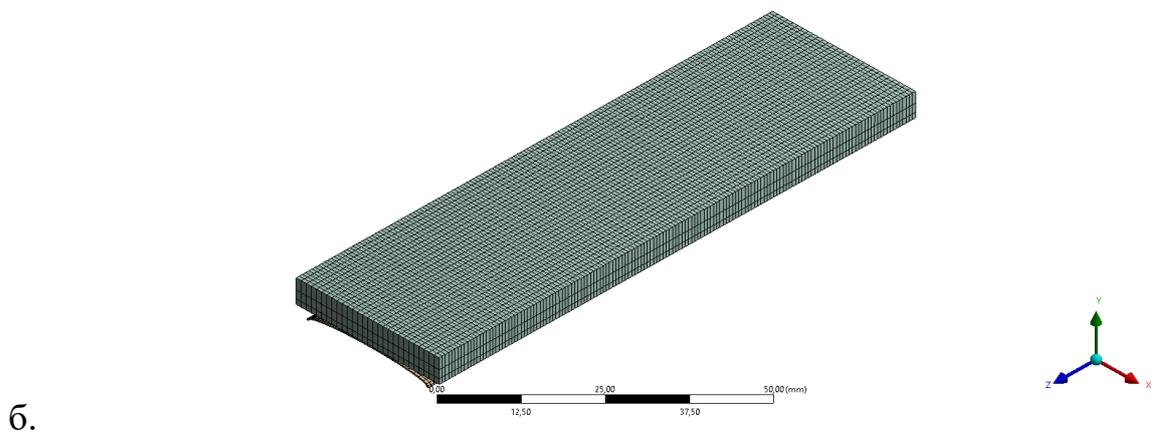
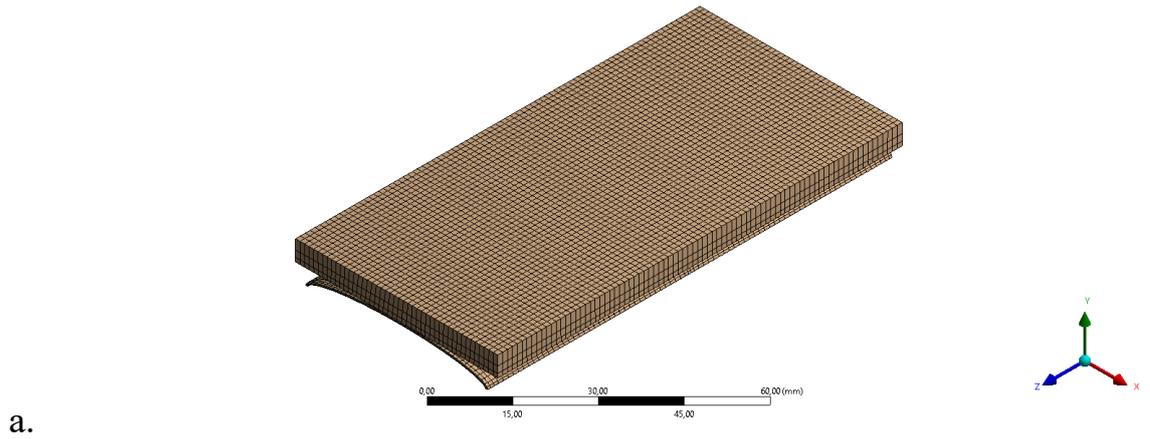
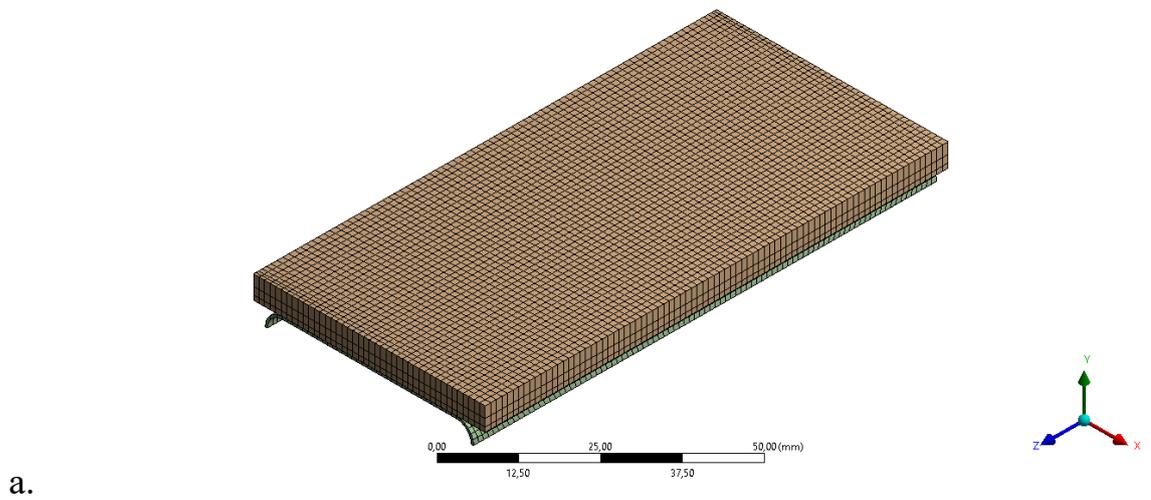
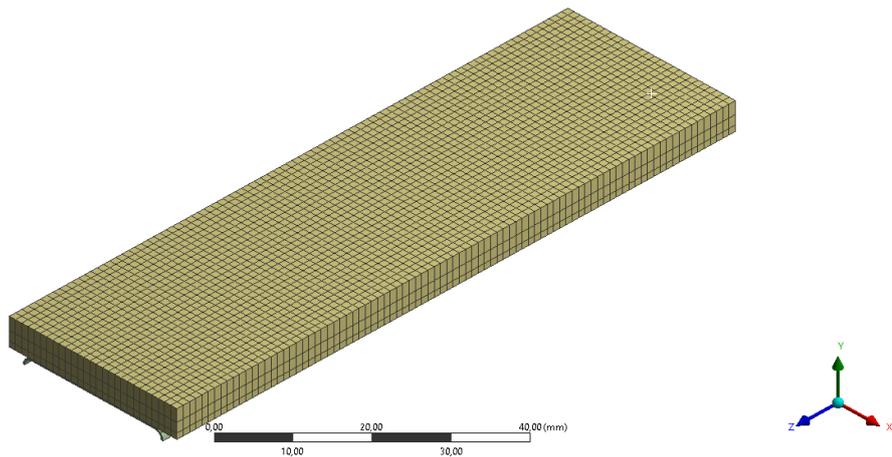


рисунок 3.21. КЭ модель для цилиндрической оболочки эллиптического сечения.

а – модель 1; б – модель 2.



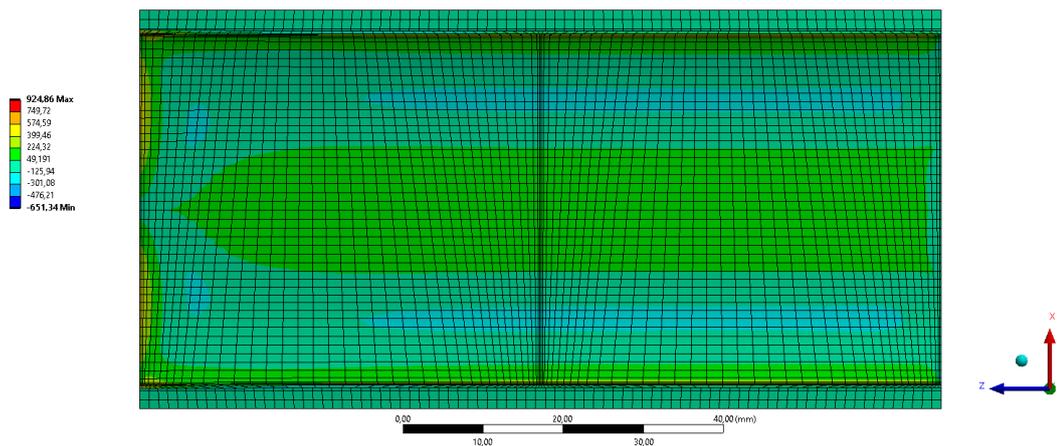


б.

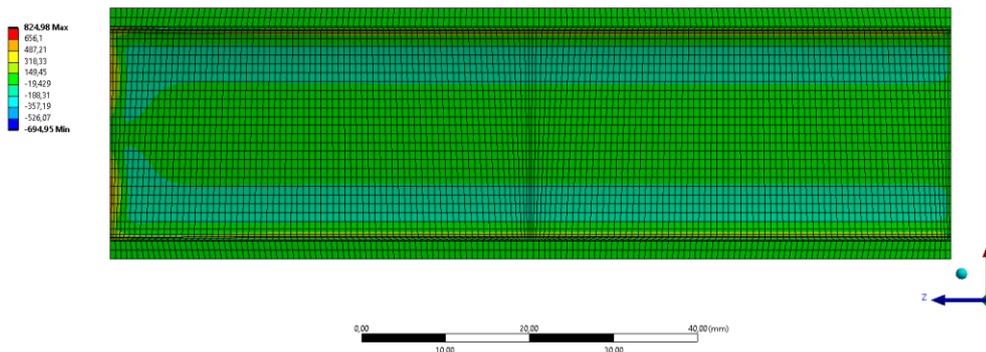
рисунок 3.22. КЭ модель для цилиндрической оболочки с эллиптическим сечением малой кривизны.

а – модель 1; б – модель 2.

Результаты численных расчетов определения нормальных напряжений в области консольной заделки для цилиндрической оболочки эллиптического сечения представлены на рисунке 3.23, для оболочки с эллиптическим сечением малой кривизны– на рисунке 3.24. Длина краевого эффекта для каждого типа цилиндрической оболочки представлена на рисунке 3.25.

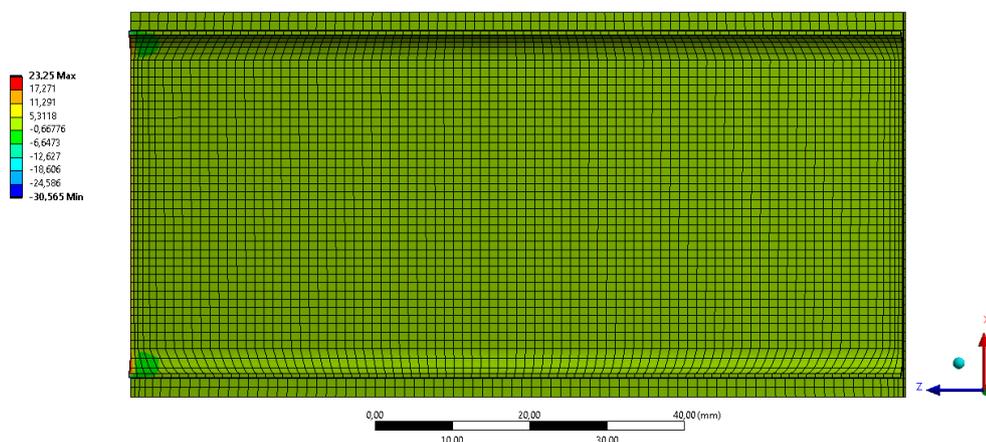


а.

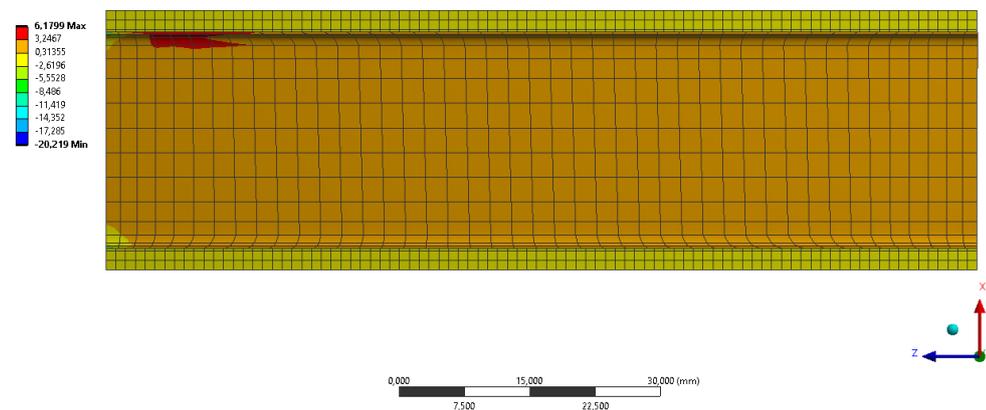


б.

рисунок 3.23. Нормальные напряжения при максимальном давлении для цилиндрической оболочки эллиптического сечения. а – модель 1; б – модель 2.



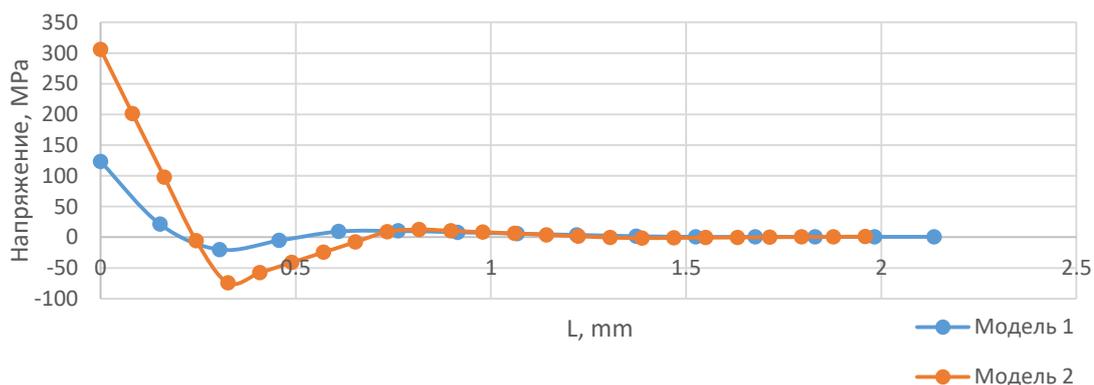
а.



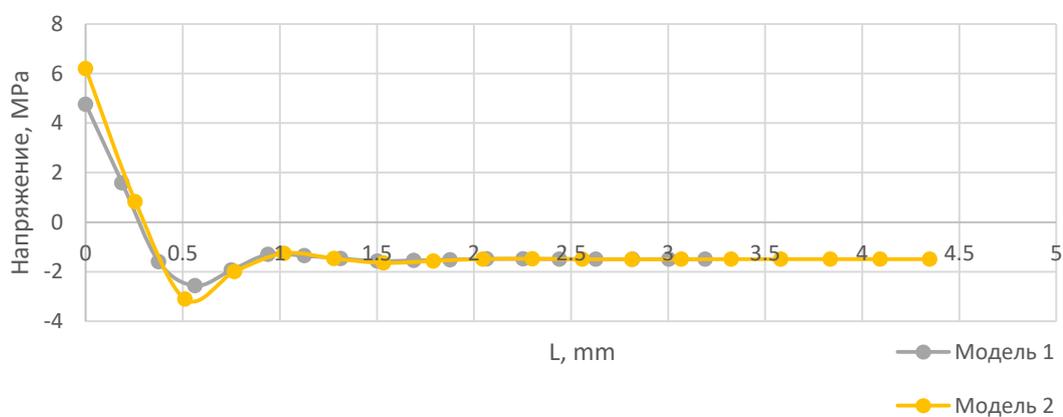
б.

рисунок 3.24. Нормальные напряжения при максимальном давлении для цилиндрической оболочки с эллиптическим сечением малой кривизны.

а – модель 1; б – модель 2.



а.

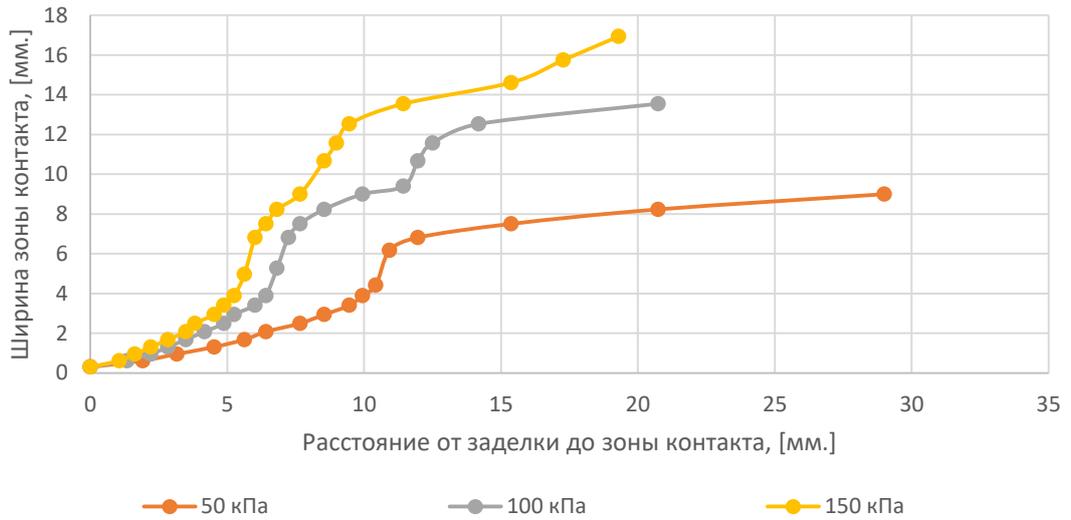


б.

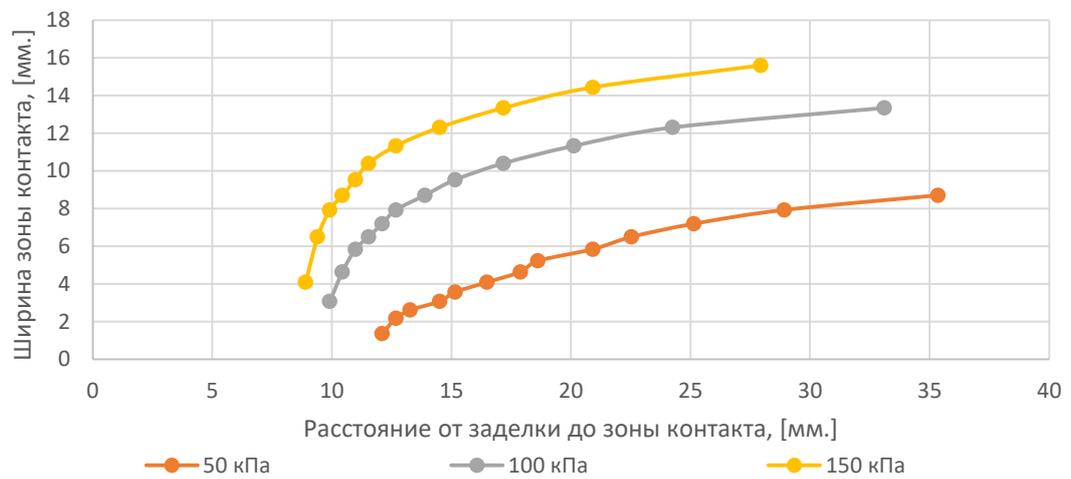
рисунок 3.25. Длина краевого эффекта. а – оболочка эллиптического сечения.

б – оболочка с эллиптическим сечением малой кривизны.

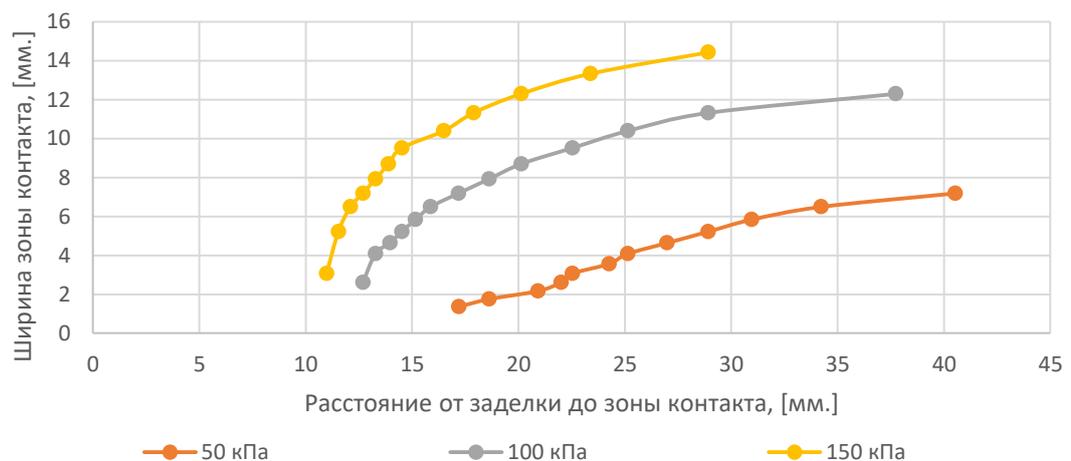
Проведено исследование влияния заделки на ширину зоны контакта вблизи заделки. На основании численных расчетов, проведенных в ПО Ansys Workbench, получены изменения ширины зоны контакта в зависимости от расстояния от заделки. Графики зависимости ширины зоны контакта от расстояния от заделки до зоны контакта представлены для модели 1 на рисунке 3.26, для модели 2 – на рисунке 3.27.



а.



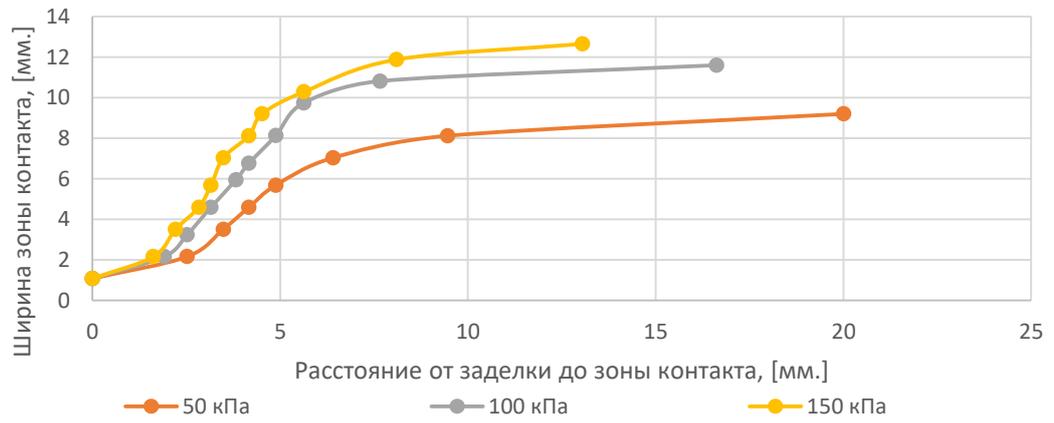
б.



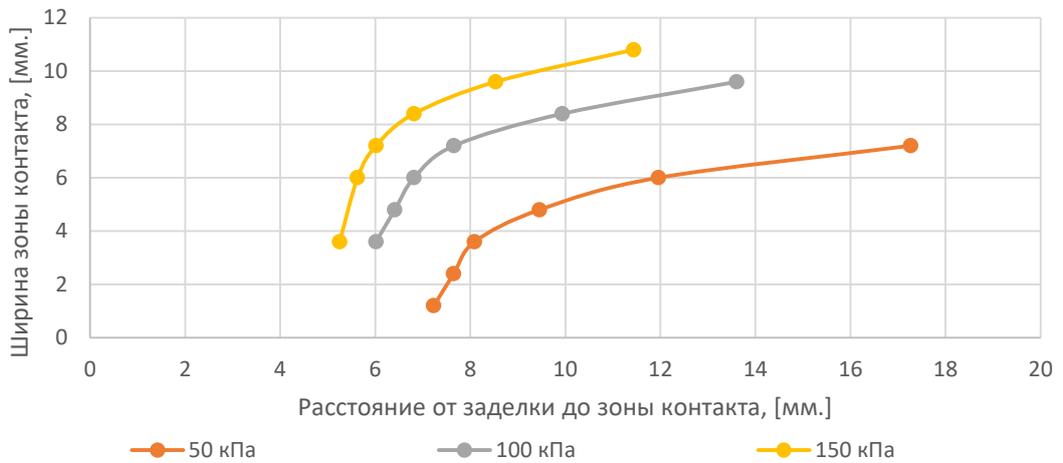
в.

рисунок 3.26. Зависимость ширины зоны контакта от расстояния от заделки до зоны контакта для модели 1, полученных при численном моделировании.

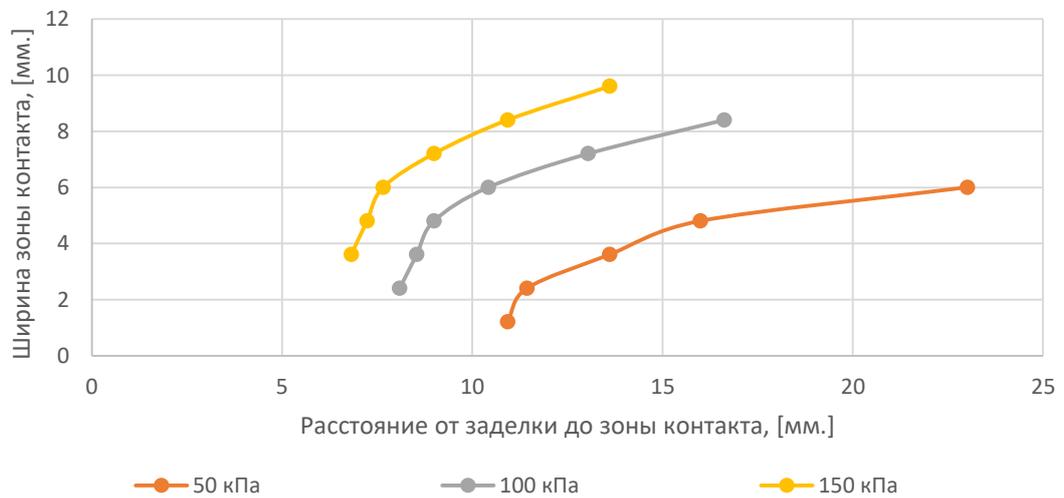
а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.



а.



б.



в.

рисунок 3.27. Зависимость ширины зоны контакта от расстояния от заделки до зоны контакта для модели 2, полученных при численном моделировании.

а – без зазора; б – зазор 0,25 мм.; в – зазор 0,5 мм.

ГЛАВА 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной работе исследовались две цилиндрические оболочки эллиптического сечения, по геометрическим параметрам схожим с оболочками из модель 1 и одна цилиндрическая оболочка эллиптического сечения схожая с оболочкой из модель 2. Обе оболочки изготавливались из сплава алюминия АМг.

Оболочки схожая с моделью 1 соединены между собой через жесткую недеформированную U-образную пластину путем сварки без присадка, рисунок 4.1а. Герметизация U-образной трубки осуществлялась с помощью эпоксидной смолы DoneDeal DD6573. Один конец заглушается, а другой заглушается с интегрированной в заглушку ниппелем.

Оболочки схожая с моделью 2 представляет собой оболочку у которой один край загнут и заварен, а во второй край приварен ниппель, рисунок 4.2а. Герметизация заглушенного конца и конца с интегрированным ниппелем осуществлялась сваркой без присадка.

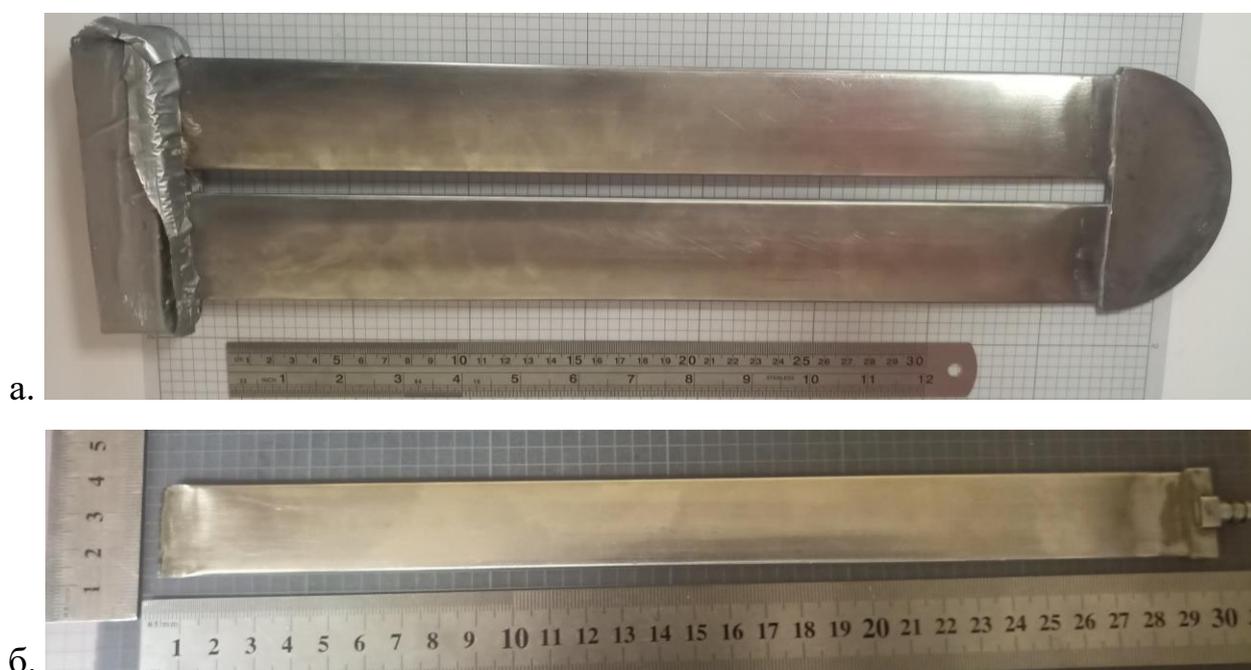


рисунок 4.1. Фото исследуемых оболочек

(а – оболочка по модели 1, б – оболочка по модели 2)

4.1. Оценка влияния погрешностей геометрии реальной оболочки

Для оценки влияния погрешности геометрии реальной оболочки от рассматриваемой модели проводилось 3D сканирование оболочек с использованием лазерного сканера Kreon KZ25. Указанная установка лазерного сканера представлен на рисунке 4.2.



рисунок 4.2. Процесс сканирования оболочки
(а – КИМ лазерного сканера, б – лазерная насадка)

Проводилось 3D сканирование 2х типов образцов. U-образно цилиндрической оболочки эллиптического сечения, с характерными размерами которой соответствует модель оболочки 1 и прямолинейной цилиндрической оболочки размеры которой соответствуют модели оболочки 2. Результаты 3д Сканирование u-образной оболочки с соответствующими отклонениями построенной 3д модели от результатов сканирования даны на рисунке 4.3, а для малой трубки на рисунке 4.4.

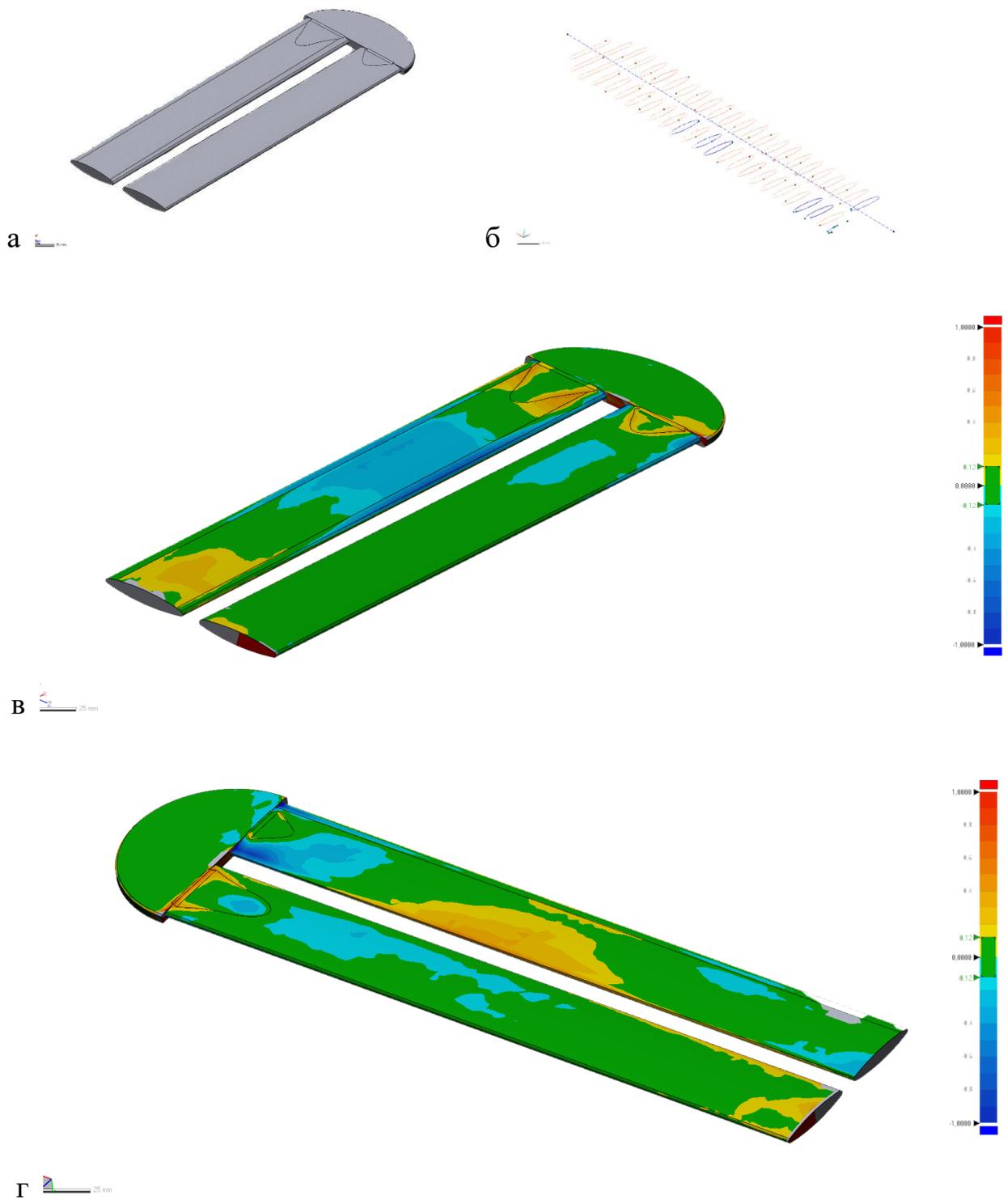


рисунок 4.3. Результаты сканирования U-образной оболочки схожей с моделью оболочки 1

(а – построенная твердотельная геометрия, б – исследуемем сечения по длине сканируемой геомтерии, в – сопоставление результатов твердотельной модели с сканирующей поверхностью модели сверху, г – сопоставление результатов твердотельной модели с сканирующей поверхностью модели снизу)

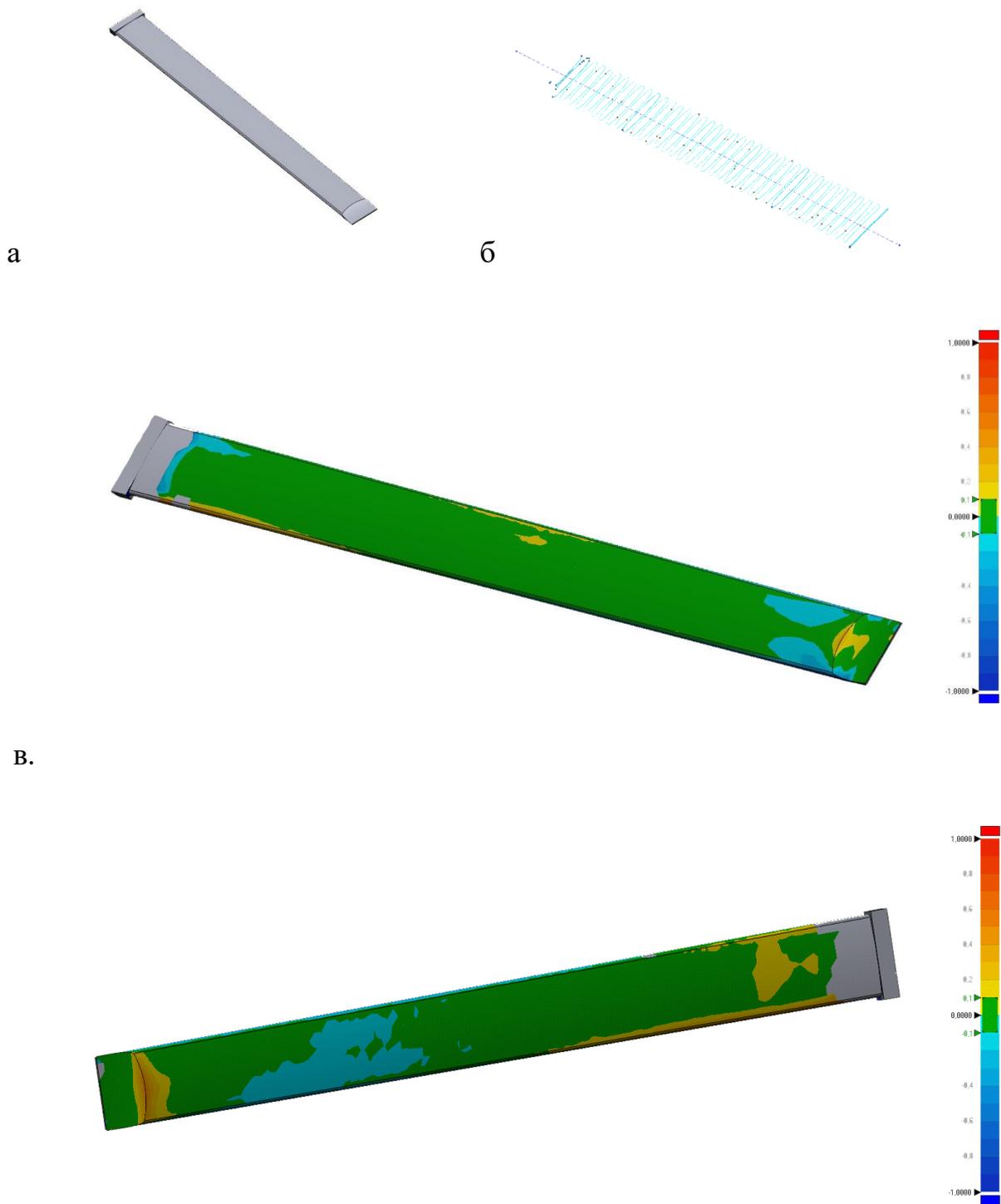


рисунок 4.4. Результаты сканирования оболочки схожей оболочки с моделью 2 (а – построенная твердотельная геометрия, б – исследуемым сечения по длине сканируемой геометрии, в – сопоставление результатов твердотельной модели с сканирующей поверхностью модели сверху, г – сопоставление результатов твердотельной модели с сканирующей поверхностью модели снизу)

По результатам сканирования строилась 3Д модель оболочки, сечение которой в свою очередь сравнивалось с моделями построенной по общегабаритным замерам. Результаты отклонения рассмотренной модели от построенной модели полученной в результате сканирования на рисунке 4.5 для U образной оболочки с ниппелем, а на рисунке 4.6 для оболочки с заглушкой.

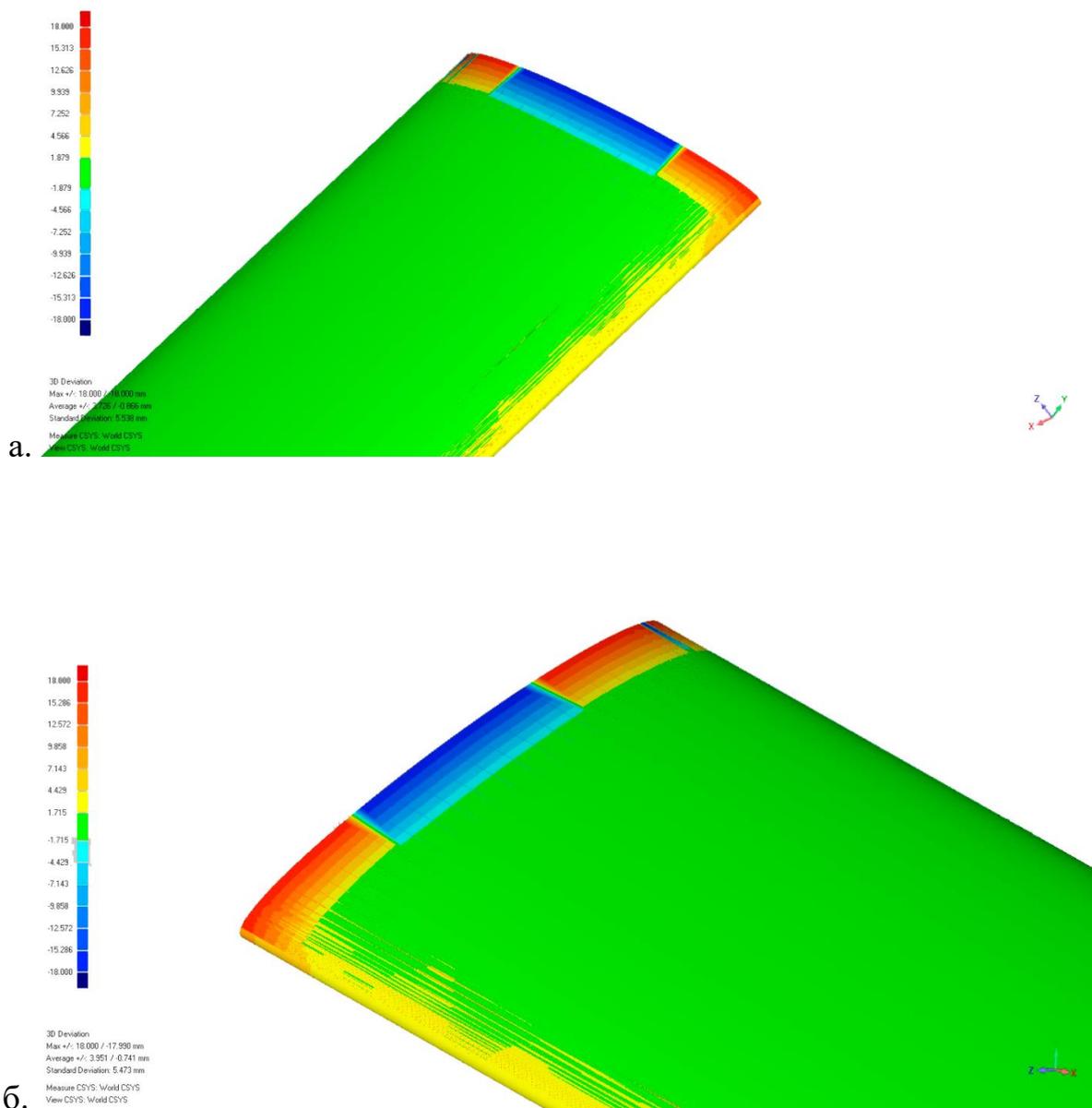


рисунок 4.5. Результаты отклонения твердотельной модели с ниппелем

U – образной оболочки полученной в ходе сканирования от модели 1.

(а – сравнение верхней и боковых поверхностей,

б – сравнение нижней и боковых поверхностей)

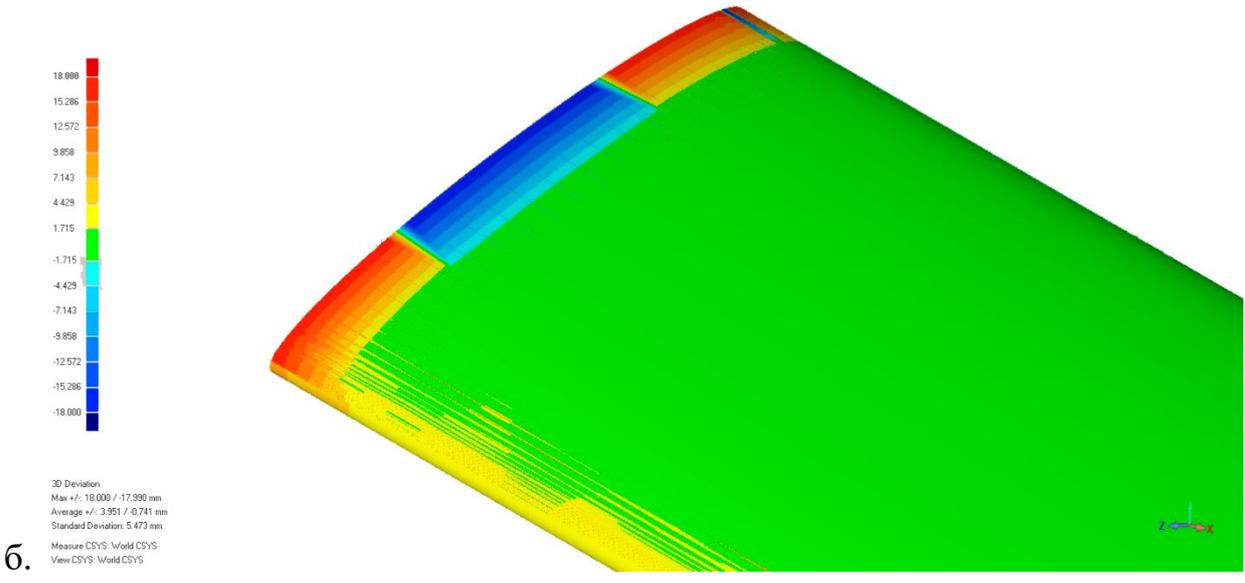
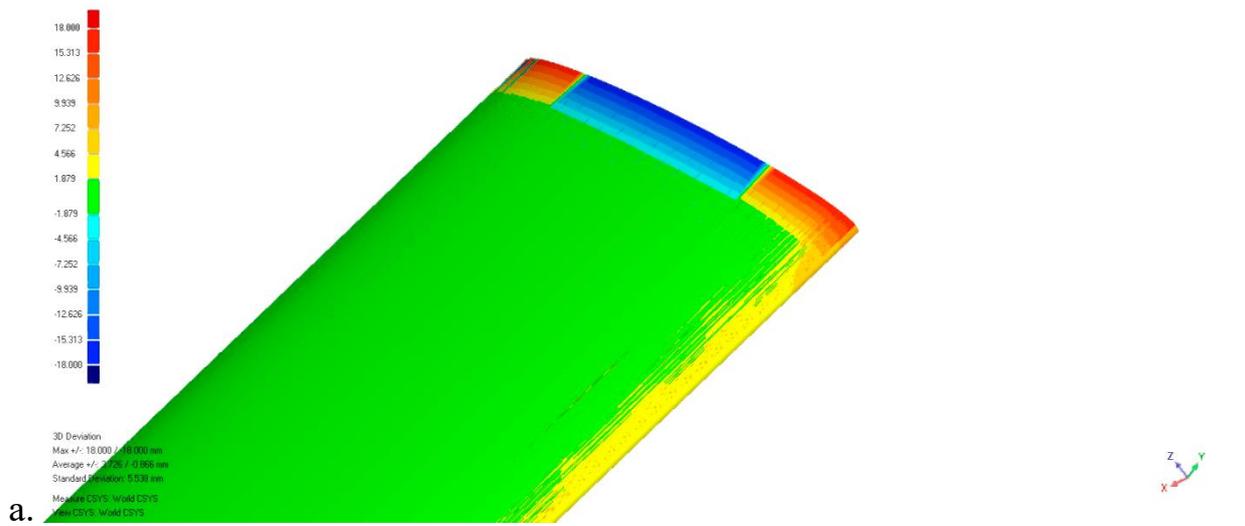


рисунок 4.6. Результаты отклонения твердотельной модели с заглушкой

U – образной оболочки полученной в ходе сканирования от модели 1.

(а – сравнение верхней и боковых поверхностей,

б – сравнение нижней и боковых поверхностей)

Таблица 4.1 Основные данные по исследованию

Модель исследования	По модели 1
Модель сканирования	U-образная оболочка с ниппелем
No. of Data Points	265559
# Outliers	235954

Тип отклонения	3D измерение
значения	mm
Максимальные критичные	18.000
Максимальные номинальные	1.715
Минимальные номинальные	-1.715
Минимальные критичные	-18.000

Отклонения	
Мак. Верх. Отклонение	18.000
Мак. Нижн. Отклонение	-17.990
Среднее отклонение	3.951 /-0.741
Стандартное отклонение	5.473

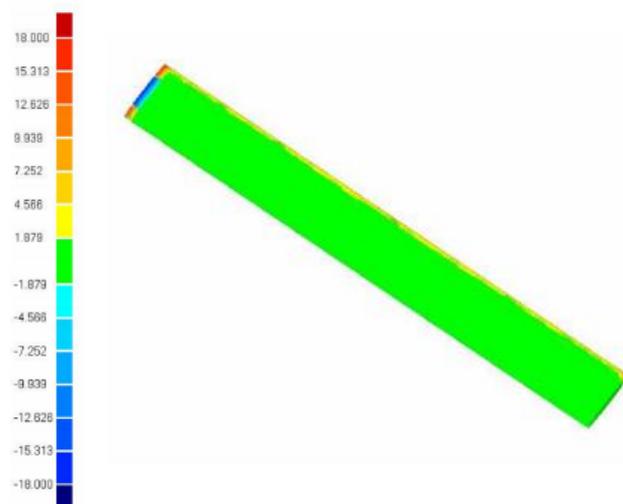
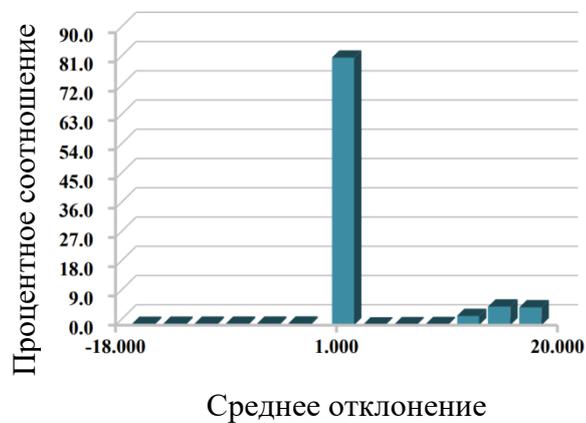


Таблица 4.2 Распределение точек отклонений по поверхности

Распределение отклонений

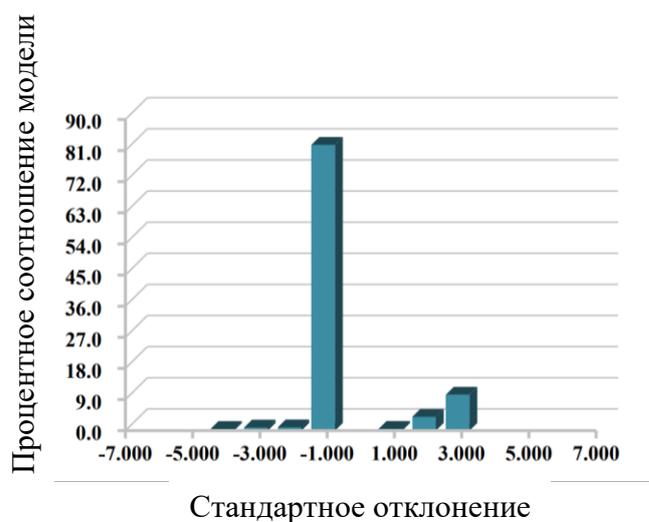
Минимальное	Максимальное	Кол-во Точек	%
-18.000	-15.286	1125	0.424
-15.286	-12.572	1127	0.424
-12.572	-9.858	1152	0.434
-9.858	-7.143	1201	0.452
-7.143	-4.429	1204	0.453
-4.429	-1.715	1378	0.519
-1.715	1.715	221087	83.253
1.715	4.429	691	0.260
4.429	7.143	809	0.305
7.143	9.858	937	0.353
9.858	12.572	2591	0.976
12.572	15.286	17773	6.693
15.286	18.000	14483	5.454



Верх критическое	1	0.000	
Нижн критическое	0	0.000	

Таблица 4.3 Распределение значений стандартного отклонения

Стандартное отклонение		
Отклонение (+/-)	Кол-во Точек	%
-6 * Станд. Откл.	0	0.000
-5 * Станд. Откл.	0	0.000
-4 * Станд. Откл.	1370	0.516
-3 * Станд. Откл.	2320	0.874
-2 * Станд. Откл.	2419	0.911
-1 * Станд. Откл.	222165	83.659
1 * Станд. Откл.	1512	0.569
2 * Станд. Откл.	4043	1.522
3 * Станд. Откл.	31730	11.948
4 * Станд. Откл..	0	0.000
5 * Станд. Откл.	0	0.000
6 * Станд. Откл..	0	0.000



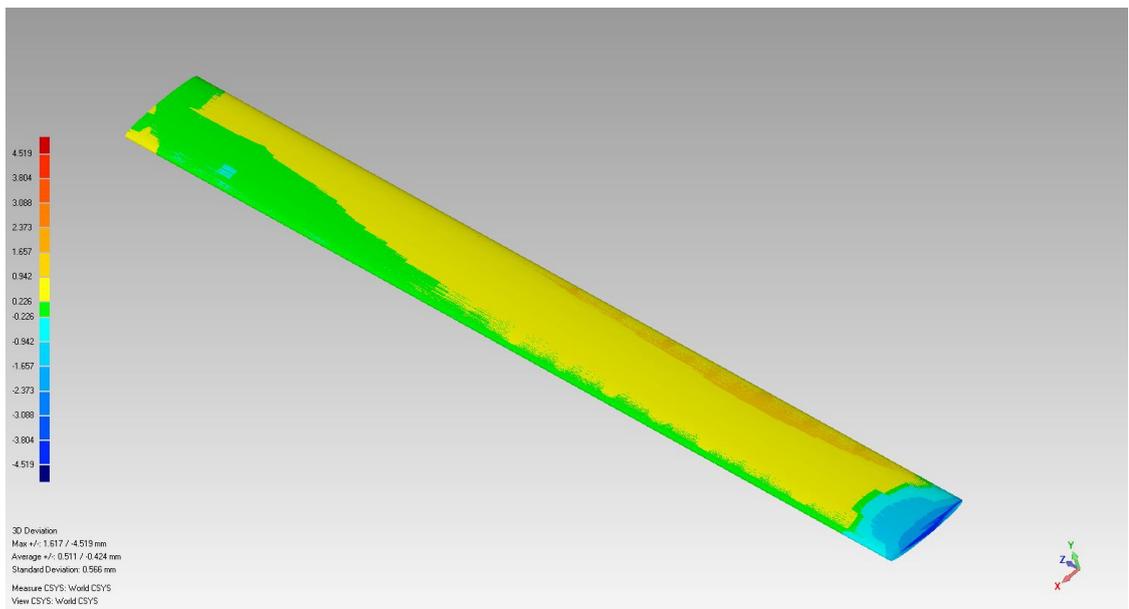


рисунок 4.7. Результаты отклонения твердотельной модели в ходе сканирования от модели 2.

Таблица 4.4 Основные данные по исследованию

Модель исследования	По модели 1
Модель сканирования	U-образная оболочка с заглушкой
No. of Data Points	265559
# Outliers	235954

Тип отклонения	3D измерение
значения	mm
Максимальные критичные	18.000
Максимальные номинальные	1.715
Минимальные номинальные	-1.715
Минимальные критичные	-18.000

Отклонения	
Мак. Верх. Отклонение	18.000
Мак. Нижн. Отклонение	-17.990
Среднее отклонение	3.951 /-0.741
Стандартное отклонение	5.473

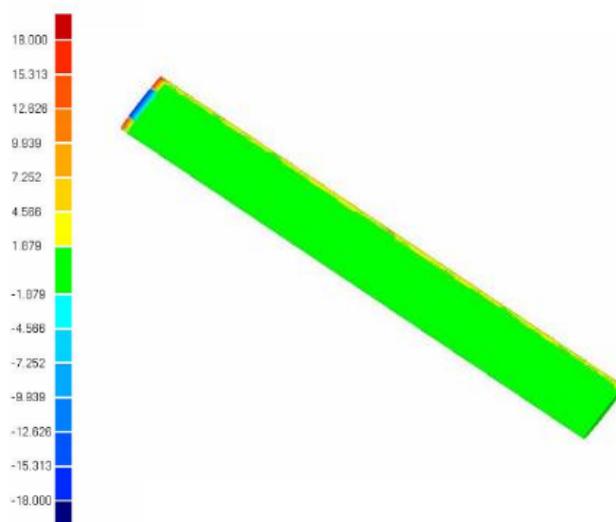


Таблица 4.5 Распределение точек отклонений по поверхности

Минимальное	Максимальное	Кол-во Точек	%
-4.519	-3.804	72	0.029
-3.804	-3.088	1	0.000
-3.088	-2.373	1	0.000
-2.373	-1.657	1861	0.744
-1.657	-0.942	4500	1.800
-0.942	-0.226	70724	28.286
-0.226	0.226	59386	23.751
0.226	0.942	99216	39.681
0.942	1.657	14270	5.707
1.657	2.373	0	0.000
2.373	3.088	0	0.000
3.088	3.804	0	0.000
3.804	4.519	0	0.000

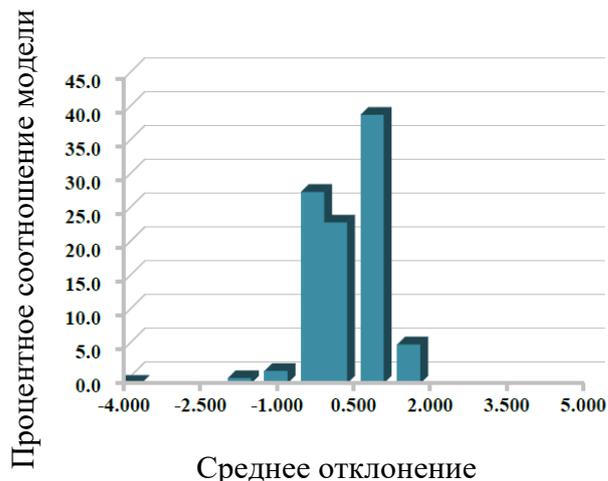


Таблица 4.6 Распределение значений среднего отклонения

Отклонение (+/-)	Кол-во Точек	%
-6 * Std. Dev.	74	0.030
-5 * Std. Dev.	1	0.000
-4 * Std. Dev.	2096	0.838
-3 * Std. Dev.	3398	1.359
-2 * Std. Dev.	34923	13.967
-1 * Std. Dev.	80503	32.197
1 * Std. Dev.	88133	35.249
2 * Std. Dev.	39302	15.719
3 * Std. Dev.	1602	0.641
4 * Std. Dev.	0	0.000
5 * Std. Dev.	0	0.000
6 * Std. Dev.	0	0.000

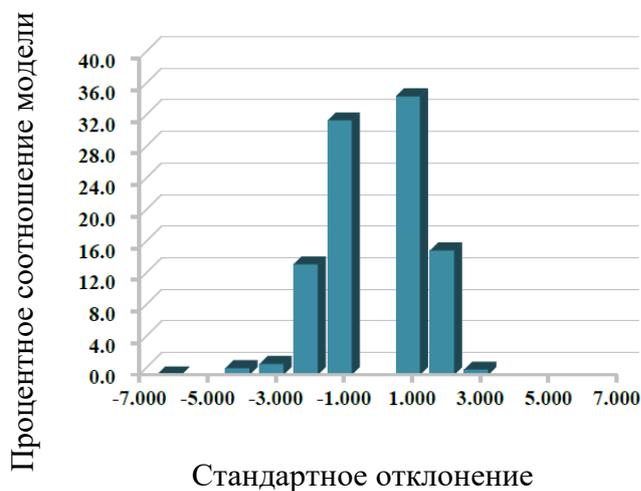


Таблица 4.7 Распределение точек отклонений по поверхности

Распределение отклонений			
Минимальное	Максимальное	Кол-во Точек	%
-18.000	-15.313	1090	0.406
-15.313	-12.626	1180	0.440
-12.626	-9.939	1202	0.448
-9.939	-7.252	1221	0.455
-7.252	-4.566	1252	0.467
-4.566	-1.879	1338	0.499
-1.879	1.879	220982	82.341
1.879	4.566	593	0.221
4.566	7.252	791	0.295
7.252	9.939	902	0.336
9.939	12.626	7619	2.839
12.626	15.313	15413	5.743
15.313	18.000	14792	5.512

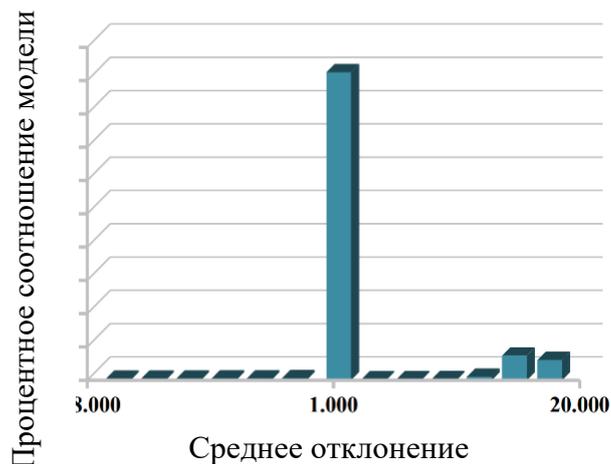
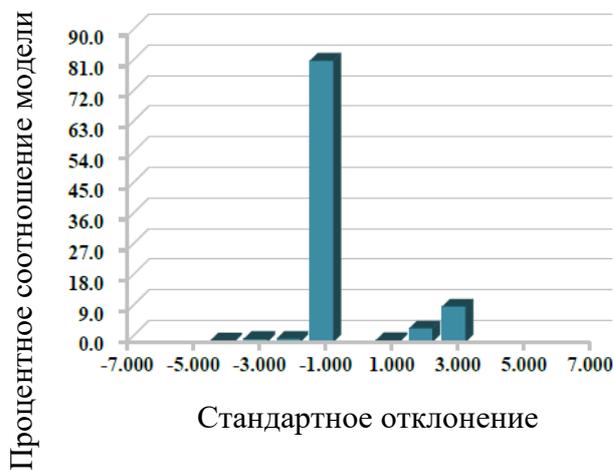


Таблица 4.8 Распределение значений среднего отклонения

Стандартное отклонение		
Отклонение (+/-)	Кол-во Точек	%
-6 * Std. Dev.	0	0.000
-5 * Std. Dev.	0	0.000
-4 * Std. Dev.	1348	0.502
-3 * Std. Dev.	2464	0.918
-2 * Std. Dev.	2584	0.963
-1 * Std. Dev.	221869	82.671
1 * Std. Dev.	1426	0.531
2 * Std. Dev.	10736	4.000
3 * Std. Dev.	27948	10.414
4 * Std. Dev.	0	0.000
5 * Std. Dev.	0	0.000
6 * Std. Dev.	0	0.000



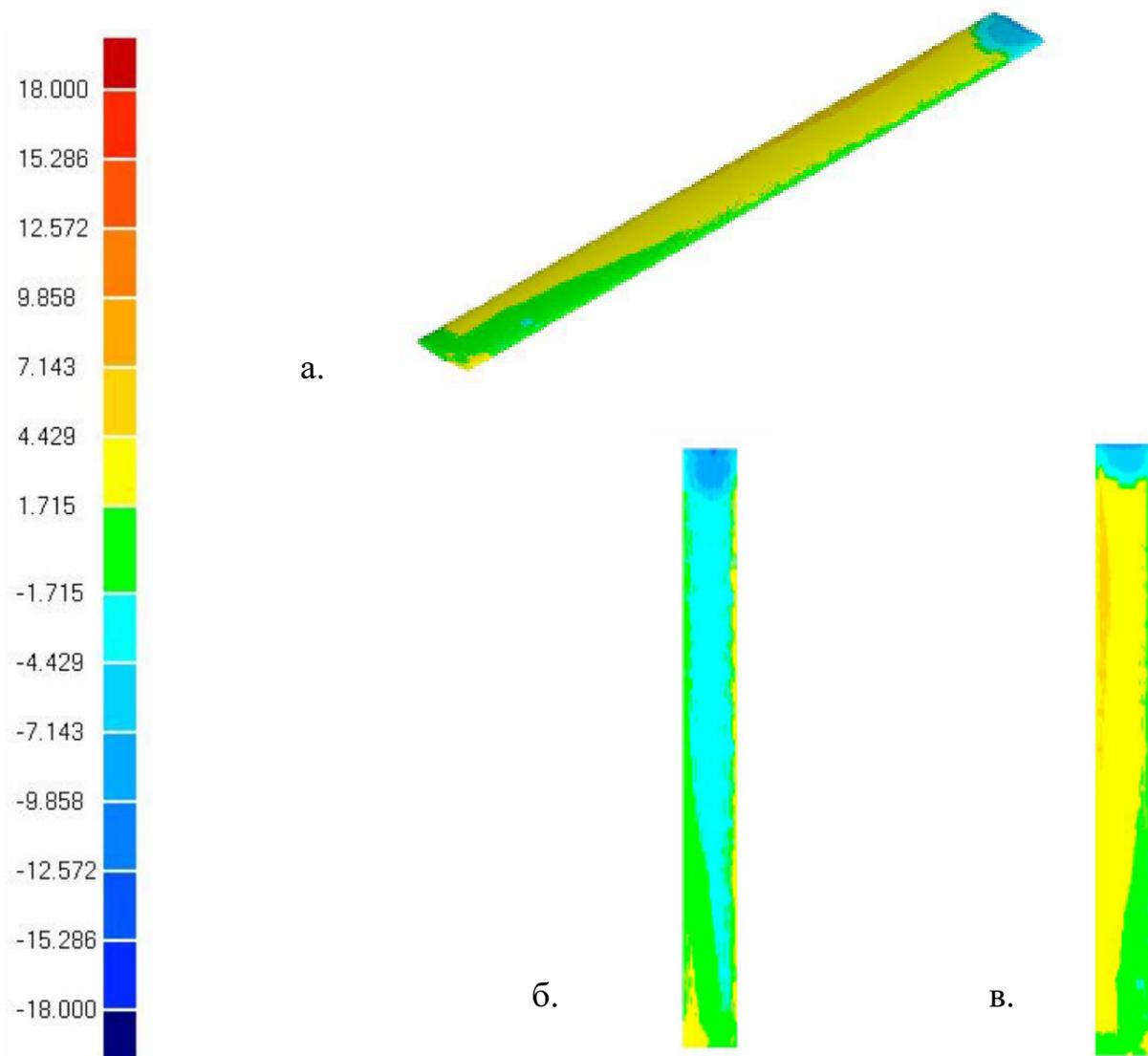


рисунок 4.8. Результаты отклонения твердотельной модели оболочки полученной в ходе сканирования от модели 2.

(а – карта отклонений полученной в ходе сканирования твердотельной модели от модели вид изометрии, б – карта отклонений полученной в ходе сканирования твердотельной модели от модели вид сверху, в – карта отклонений полученной в ходе сканирования твердотельной модели от модели вид снизу)

Выводы

В результате проведения трехмерного сканирования и впоследствии получения внешней геометрии исследуемого объекта, были выявлены отклонения геометрии, составлена сводная таблица. Среднее отклонение геометрии составляет:

- для образца 1 (левая трубка) – 0,9 мм ;
- для образца 2 (правая трубка) – 0,75 мм;
- для образца 3 (малая трубка) – 0,4 мм.

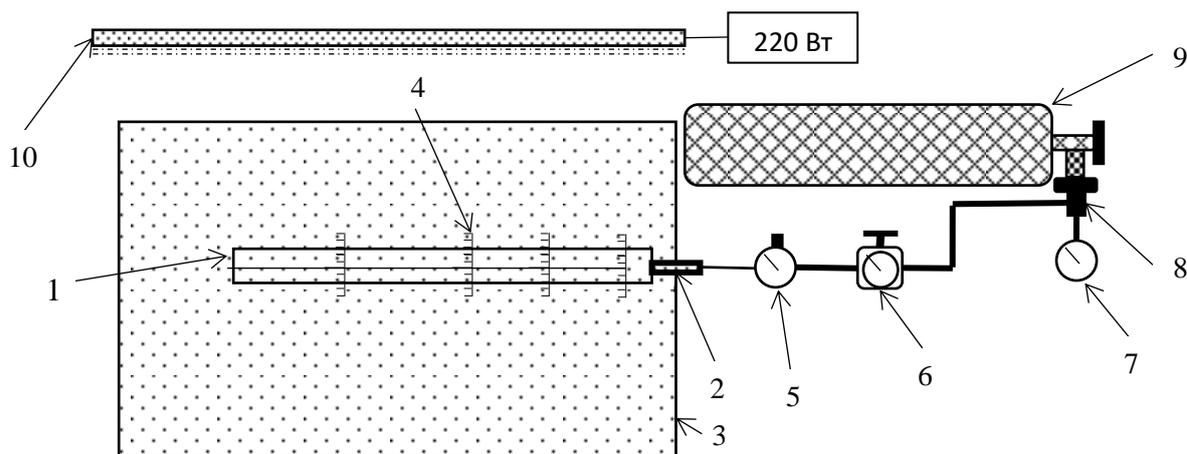
По предоставленным картам отклонений (рисунок 4.4 (а,б), рисунок 4.5(а), рисунок 4.6(а), рисунок 4.7 (а, б, в), рисунок 4.8 (а, б, в) видна общая статистика отклонений геометрии для каждого образца. Эта статистика может быть использована для выявления зон с наибольшим отклонением от проектируемой геометрии, как например места стыковки у левой и правой трбки и места стыковки, а также части верхней и нижней геометрии и малой трубки.

Принимая во внимание данные предоставленные в таблицах 4.1 – 4.8 можно сделать вывод, что у исследуемых левой и правой труб, существует большой процент (5-9%) точек, которые находятся в максимальном удалении от номинальных (проектных) поверхностей, их максимальное удаление составляет 14 мм – для левой и 6 мм – для правой, а также стоит отметить тот факт, что для малой исследуемой трубки характерна концентрация наибольшего отклонения в пределах 0.2 – 0.3 мм.

Для всех изделий характерно нормальное распределение отклонений с пиком 0.2 – 0.3 мм, что свидетельствует о корректной настройке измерительного оборудования перед проведением исследований, а также об адекватной методике проводимых измерений.

4.2. Исследование цилиндрических оболочек, зажатых между двумя жесткими плитами

Для исследования ширины зоны контакта в зависимости от зазора был разработан испытательный стенд, рисунок 4.9. Испытательный стенд состоял из: стеклянных пластин толщиной 19 мм, болтового соединения для контроля, фиксированного расстояние между плитами, системой контроля давления в трубке и подсветкой.



1 – образец; 2 – ниппель; 3 – стекло; 4 – миллиметровая шкала;
5 – манометр с кнопкой сброса воздуха; 6 – высокоточный регулятор давления; 7 – манометр редуктора; 8 – редуктор; 9 – баллон; 10 – лампа;

рисунок 4.9. Схема испытательного стенда

Стеклянные пластины, изготовленные из незакаленного стекла с 6 отверстиями для закрепления и нанесенной на нее гравировкой в виде центрирующих линий, для ровной установки трубки, а также миллиметровыми шкалами, для фиксирования зоны контакта. Система для подачи давления в трубку состоит из 7л баллона производства МАШТЕСТ БК-7-300С с давлением в баллоне порядка 250 атм, редуктора ПТС, понижающего давление с 250 атм до 10 атм, регулятор давления воздуха с электронным манометром LICOTA PAW-100 и манометра с кнопкой сброса воздуха для сброса или понижения давления в трубке. Соединение редуктор – регулятор давления и регулятор давления – баллон осуществляется с помощью шлангов через быстросъемное соединение. Зазор

между пластинами контролируется с помощью болтового соединения и набором шайб, позволяя зафиксировать трубку без зазора или с фиксированным зазором. Для удобства видимости миллиметровой шкалы на стекле в торце стекла установлена подсветка, в виде люминесцентной лампы. Измерение зоны контакта проводится визуально. При подаче давления трубка раздувается и прижимается к стеклу. Ширина зоны контакта фиксировалась на нанесенных миллиметровых шкалах – в виде затемненных областей. Для более наглядного отображения зон контакта поверхность трубы предварительно покрывается жидким воском или водным аэрозолем. В этом случае при наддуве и контакте со стеклом образуются характерные полосы, позволяющие увидеть и измерить ширину зоны контакта, рисунок 4.10. Величина мениска жидкого воска в зазоре между стеклом и трубкой оказывается не значительной и не оказывает существенного влияния на результаты измерений.

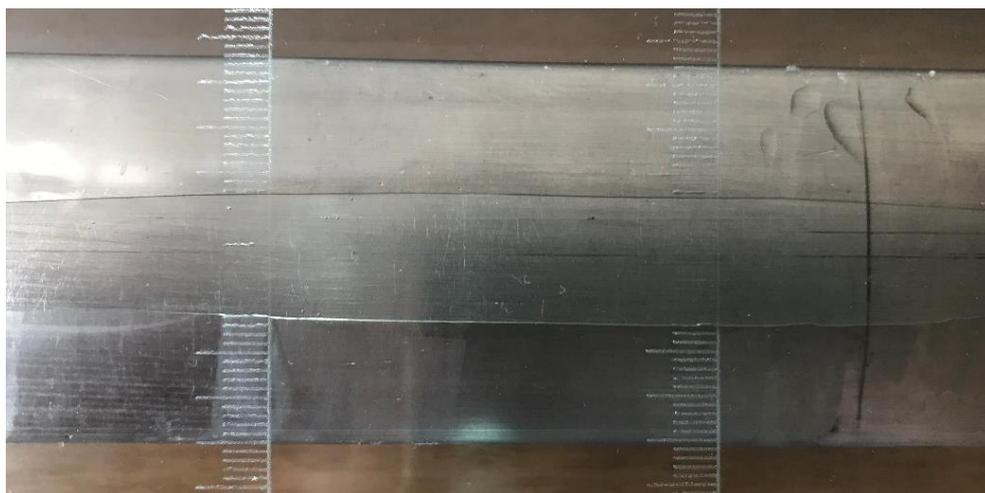


рисунок 4.10. Ширина зоны контакта

Для выставления зазора были изготовлены проставочные шайбы путем печати из полиамида по технологии SLS. Проставочные шайбы и пример выставленного зазора представлен на рисунке 4.11.

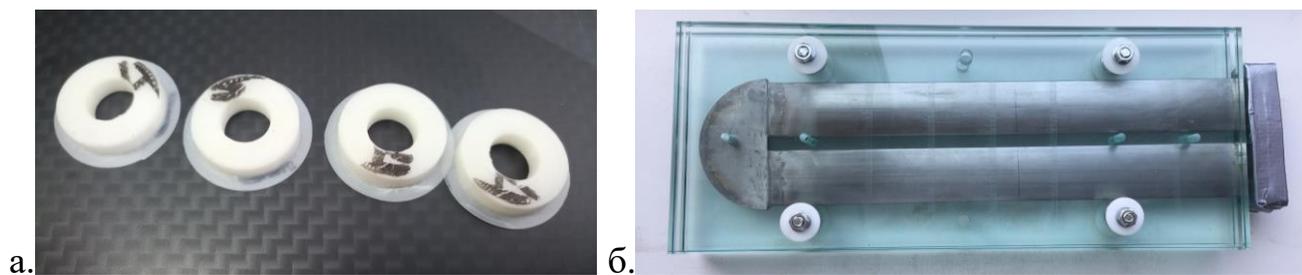


рисунок 4.11. Проставочные шайбы и образец с выставленным зазором между плитами

(а – проставочные шайбы, б – образец с выставленным зазором)

Каждую из оболочек подвергают давлению до 150кПа с шагом 10кПа в ходе которого измерялась ширина зоны контакта в 5ти сечениях по длине каждой из оболочек с одинаковым шагом между ними. По результатам испытаний строились зависимости ширины зоны контакта от действующего внутреннего давления.

Результаты исследования оболочки с заглушкой для каждого из вариантов сечения оболочки без предварительного зазора представлены на рисунке 4.12.

Зависимость зоны контактов от давления для трубки с заглушкой

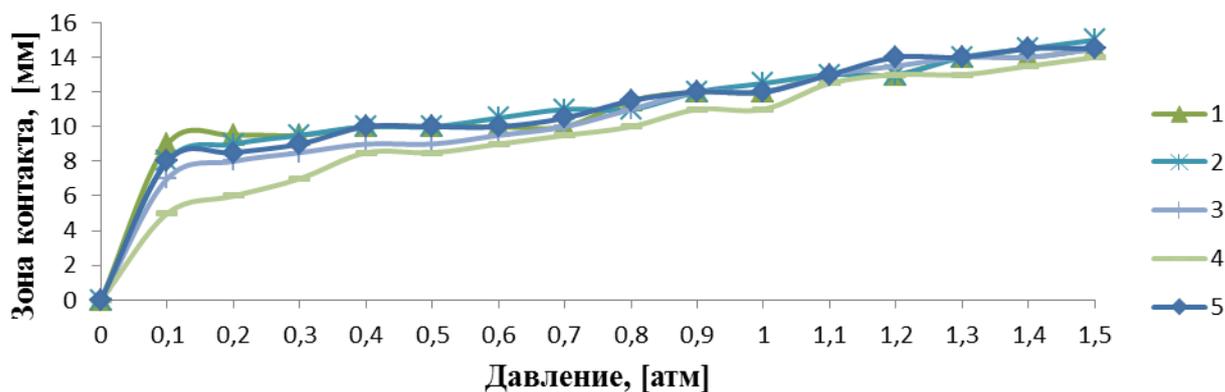


рисунок 4.12. Зависимость ширины зоны контакта от действующего давления оболочки с заглушкой схожей с моделью 1 для каждого из сечения

Результаты исследования оболочки с ниппелем для каждого из вариантов сечения оболочки представлены на рисунке 4.13.

Зависимость зоны контактов от давления для трубки с ниппелем

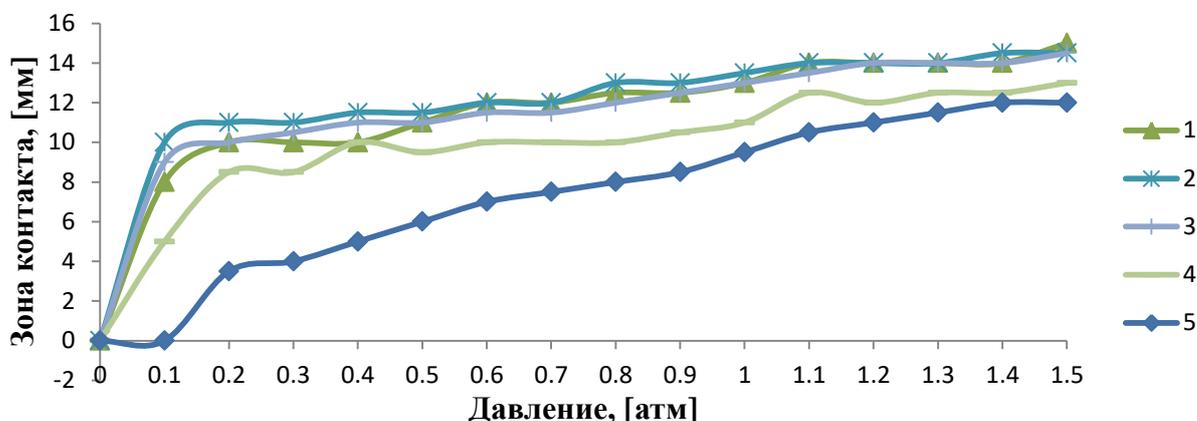


рисунок 4.13. Зависимость ширины зоны контакта от действующего давления оболочки с ниппелем схожей с моделью 1 для каждого из сечения

Для сравнения труб с ниппелем и заглушкой были получено среднее значение зоны контакта для каждого значения давления без учёта сечения у заделки. Полученные кривые представлены на рисунке 4.14.

Зависимость зоны контактов от давления

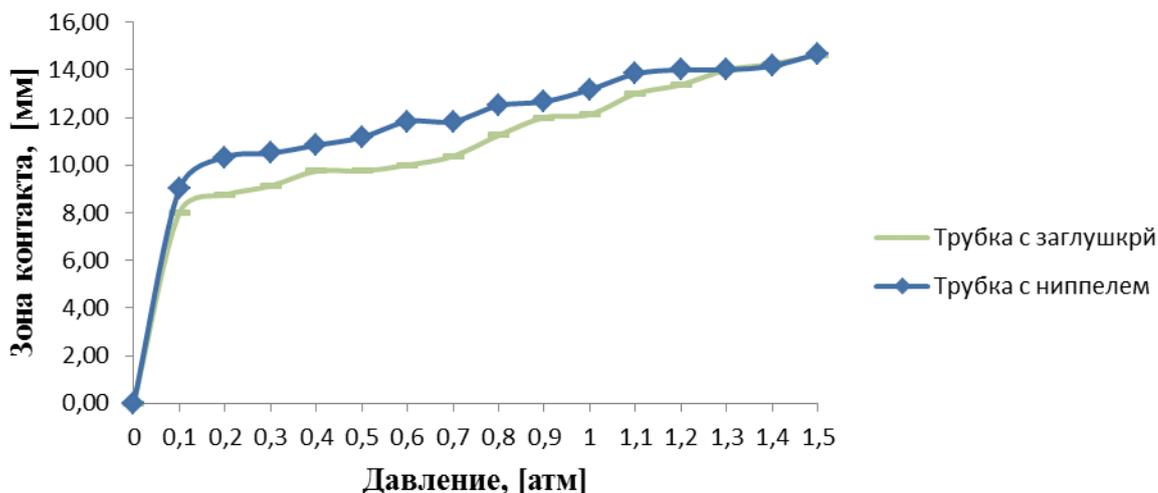
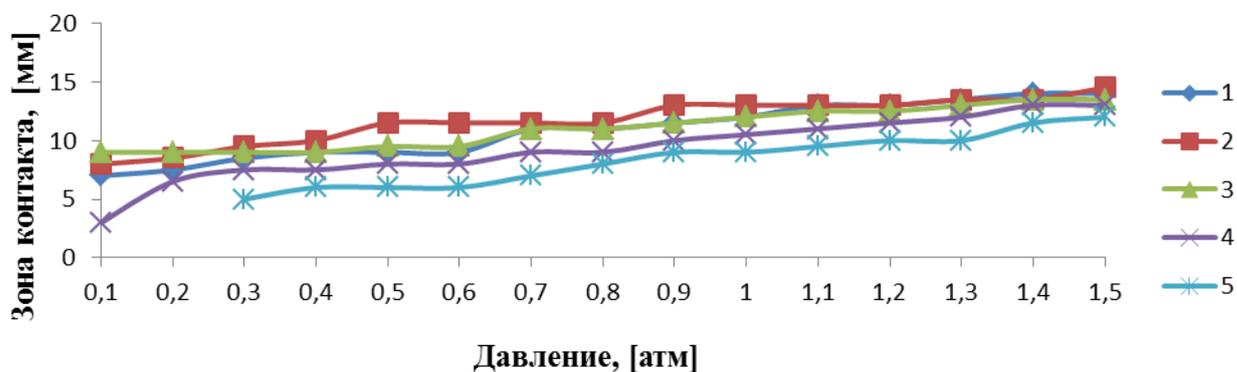


рисунок 4.14. Зависимость среднего значения зоны контакта от давления для оболочек с ниппелем и заглушкой.

4.3. Исследование влияния предварительного зазора на контакт эллиптической оболочки с жесткими преградами

Рассмотрим случай, когда пластины установлены между жесткими пластинами 8,2 мм, таким образом это соответствует установки оболочки с предварительным зазором 0,25 мм между оболочкой и стеклом. Результаты представлены на рисунке 4.15.

Зависимость зоны контактов от давления для трубки с ниппелем



Зависимость зоны контактов от давления для трубки с заглушкой

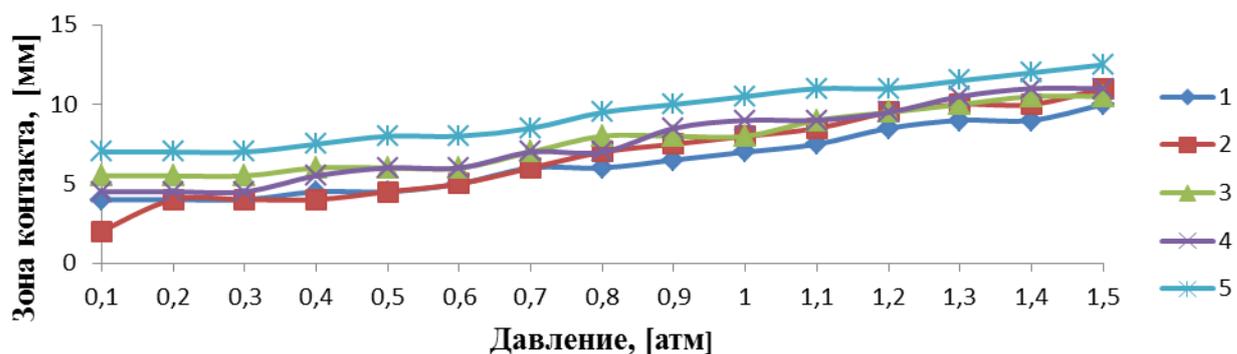


рисунок 4.15. Зависимость зоны контакта от давления в трубе с зазором 0,25 мм.

Для сравнения труб с ниппелем и заглушкой были получено среднее значение зоны контакта для каждого значения давления. Полученные кривые представлены на рисунке 4.16.

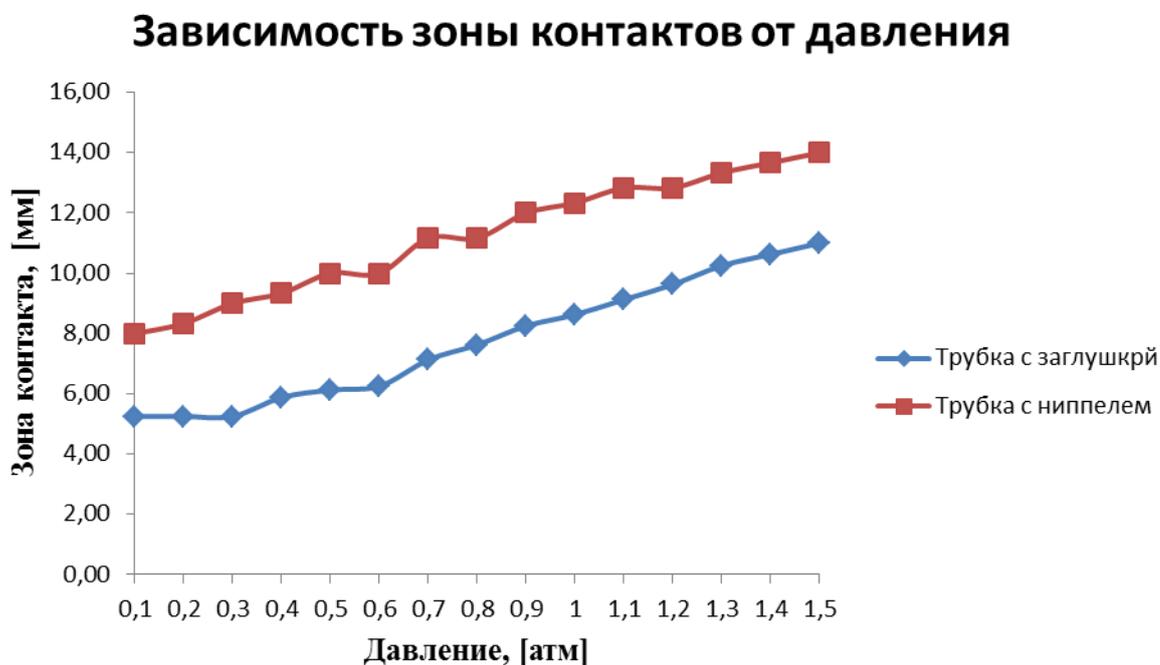
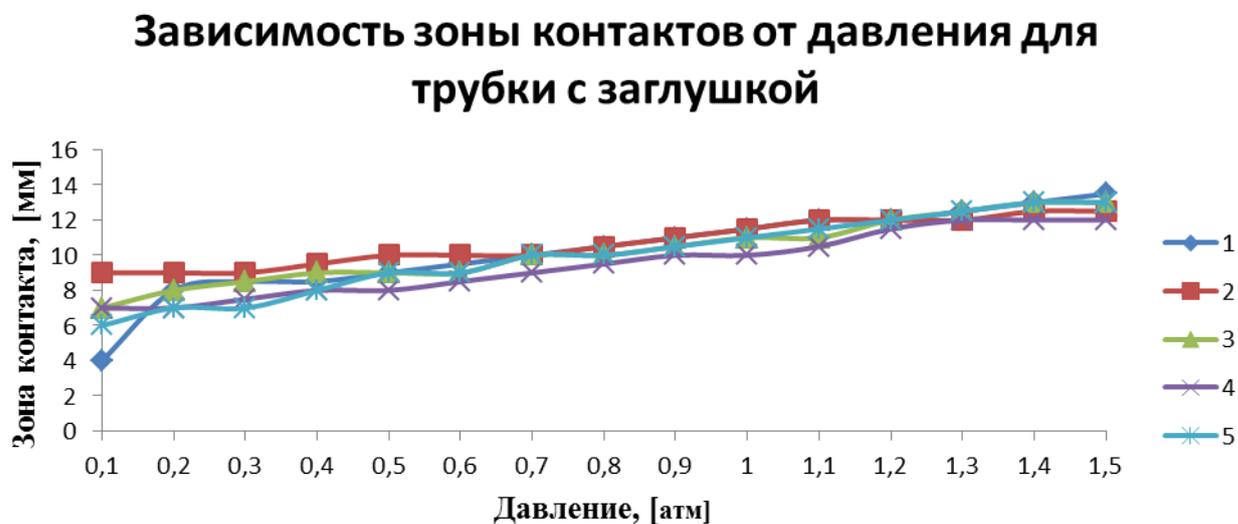


рисунок 4.16. Зависимость среднего значения зоны контакта по длине трубы от давления для труб с ниппелем и заглушкой с зазором 0,25 мм.

Рассмотрим случай, когда пластины установлены 8,46 мм с зазором 0,5 мм между образцом и стеклом. Результаты представлены на рисунке 4.17.



Зависимость зоны контактов от давления для трубки с ниппелем

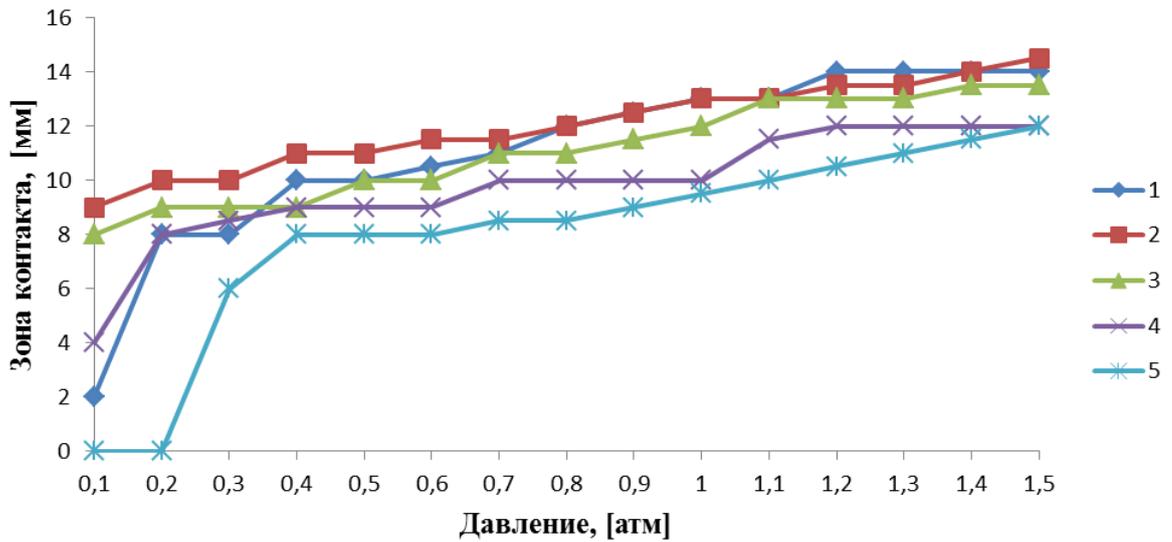


рисунок 4.17. Зависимость зоны контакта от давления в трубе с зазором 0,5 мм.

Для сравнения труб с ниппелем и заглушкой были получено среднее значение зоны контакта для каждого значения давления. Полученные кривые представлены на рисунке 4.18.

Зависимость зоны контактов от давления

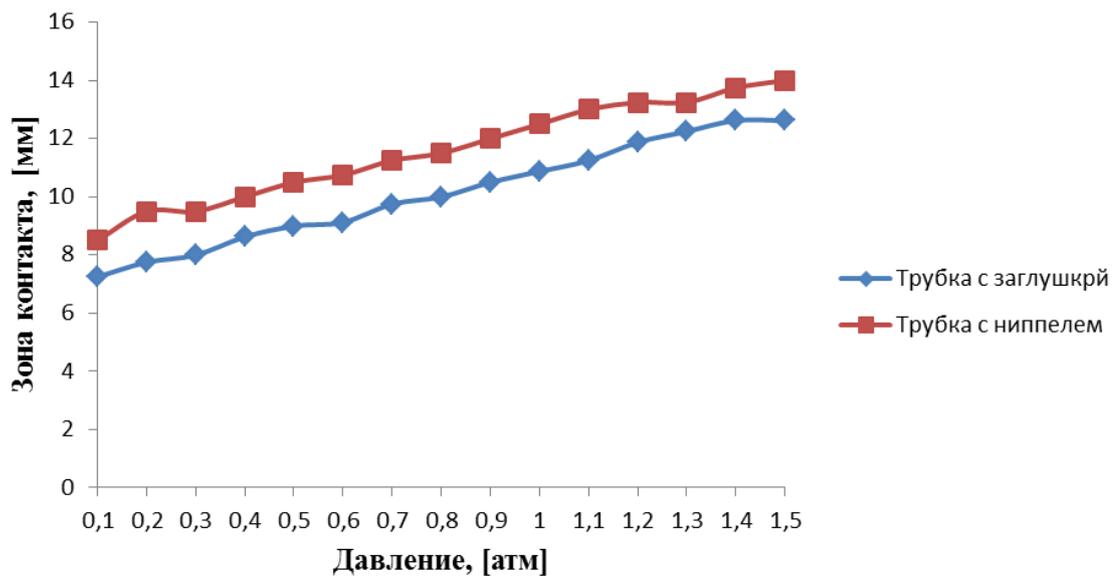
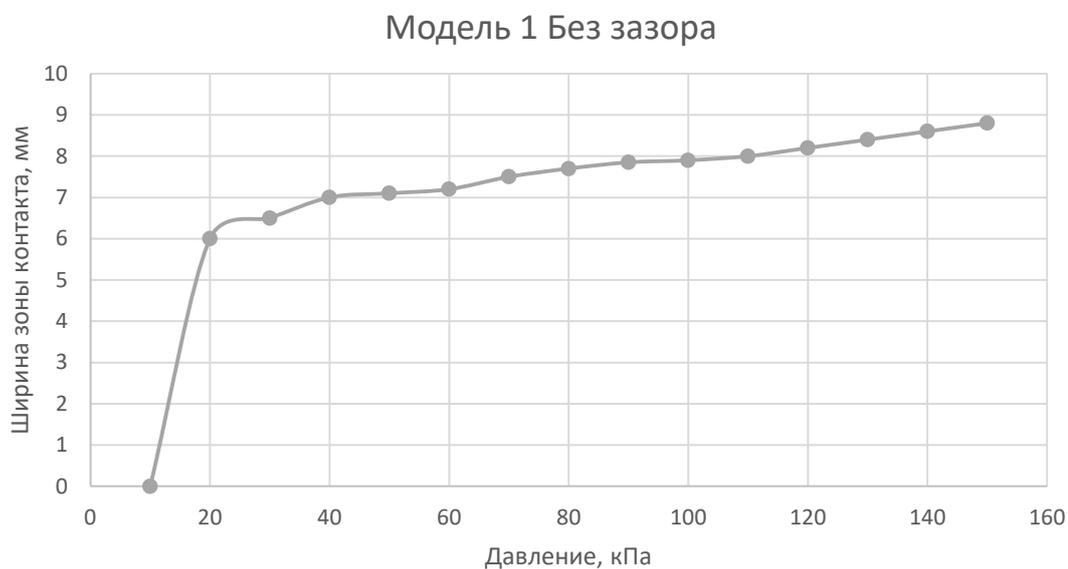
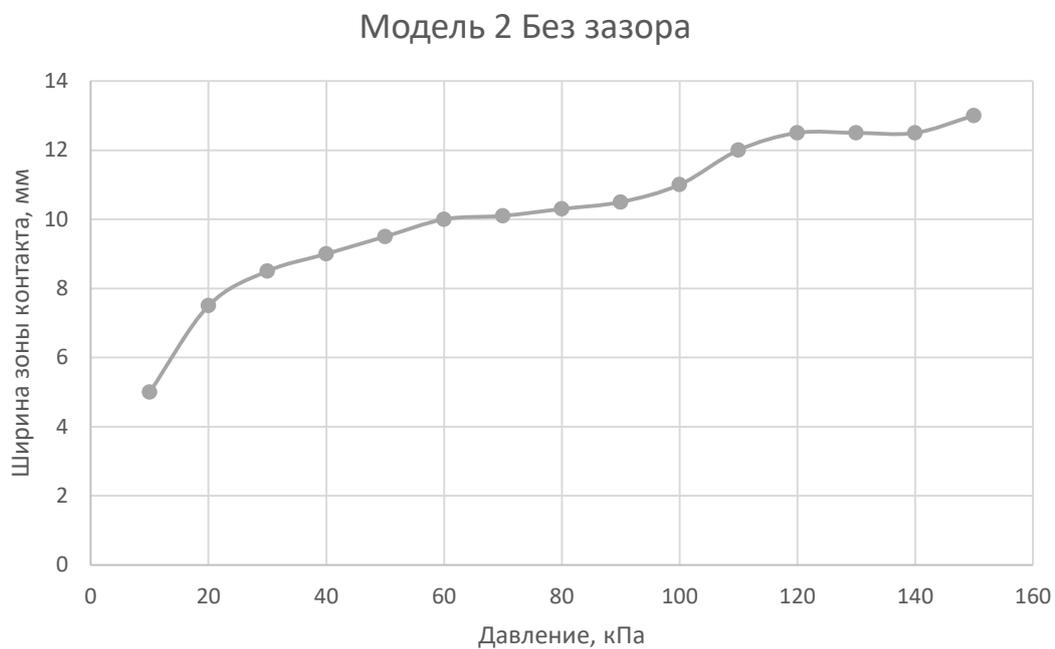


рисунок 4.18. Зависимость среднего значения зоны контакта по длине трубы от давления для труб с ниппелем и заглушкой с зазором 0,25 мм.

Результаты испытаний показали, что наиболее качественные результаты дает трубка с заглушкой. Зависимость среднего значения зоны контакта по длине трубы от давления для труб с заглушкой с различным зазором показано на рисунке 4.19.

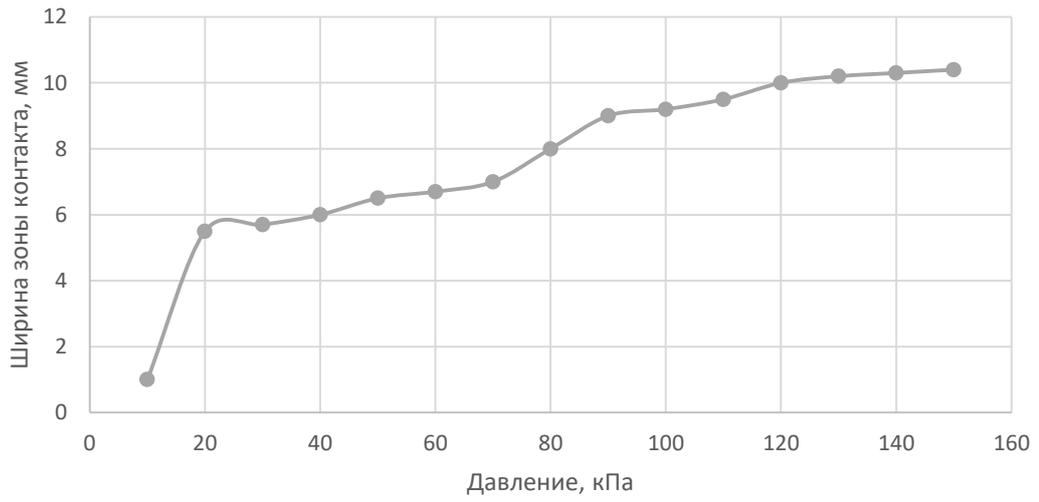


а.



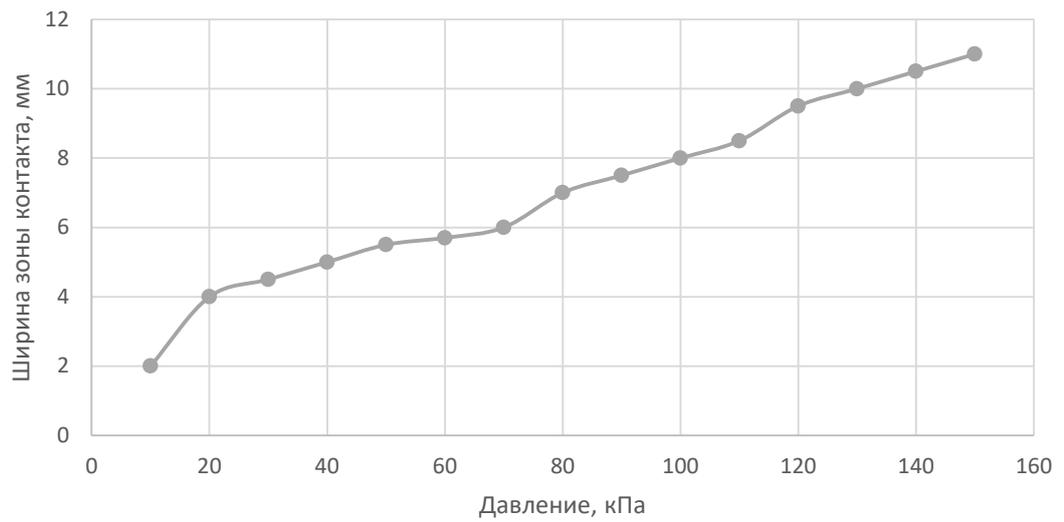
б.

Модель 1 Зазор 0,25

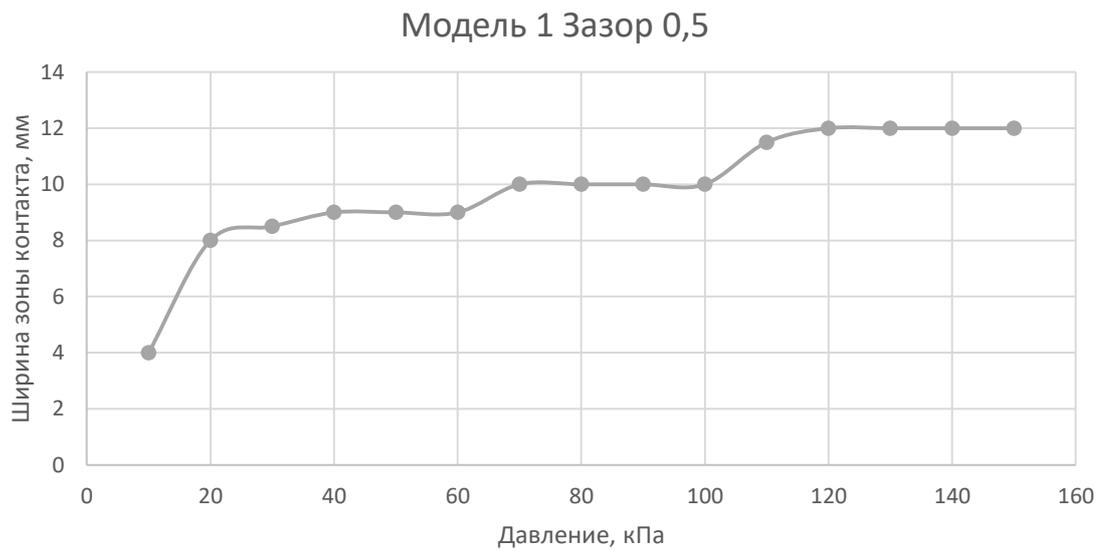


В.

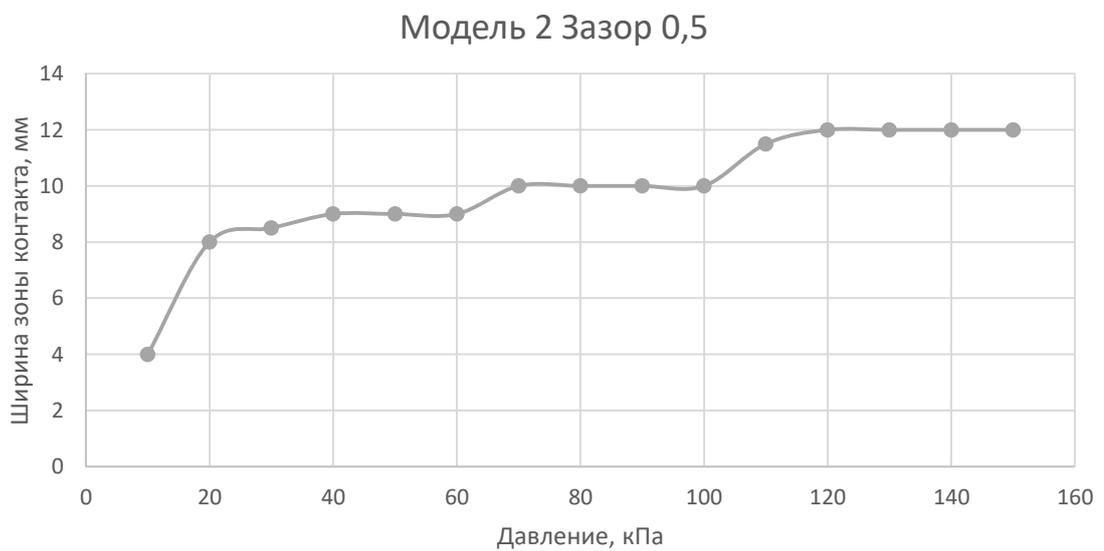
Модель 2 Зазор 0,25



Г.



д.



е.

рисунок 4.19. Зависимость среднего значения зоны контакта от давления при различных вариантах зазора для труб соответствующей модели 1 (а, в, д) и соответствующей модели 2 (б, г, е).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получены аналитические решения для определения ширины зоны контакта для оболочек эллиптического сечения под давлением, зажатой между двумя абсолютно жёсткими плитами. С помощью разработанных методов проведено исследование по влиянию изменения геометрических параметров оболочки, предварительного зазор и действующего внутреннего давления на ширину зоны контакта.

2. Проведено численное решение в Ansys Workbench для определения ширины зоны контакта между оболочкой эллиптического сечения под давлением, зажатой между двумя плитами. Исследовано влияние краевого эффекта на ширину зоны контакта. Проведен сравнительный анализ по влиянию геометрических параметров оболочки, предварительного зазор и действующего внутреннего давления на ширину зоны контакта.

3. Изготовлен и модернизирован испытательный стенд для проведения экспериментальных исследований контакта цилиндрической оболочки. Проведено экспериментальное исследование двух типов оболочек при действии различного внутреннего давления, предварительного зазора по длине, а также с учетом конструктивных особенностей стыковки оболочки. Проведено 3Д сканирование исследуемых оболочек и проведен сравнительный анализ реальной геометрии оболочек от численного и аналитического моделирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Канчели Н. В. Строительные пространственные конструкции. — Москва: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2004. — 119 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. — Москва: Высшая школа, 1982. — 264 с.
3. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. — Москва: Наука, 1978. — 360 с.
4. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. — Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2006. — 168 с.
5. Ефимов В.В. Динамика и прочность авиационных конструкций: учебное пособие. Часть II. — М.: МГТУ ГА, 2014. — 72 с.
6. Железнов Л. П., Кабанов В. В., Бойко Д. В. Нелинейное деформирование и устойчивость овальных цилиндрических оболочек при чистом изгибе с внутренним давлением // Прикладная механика и техническая физика, 2006. Т. 47, №3. — С. 119-125.
7. Булатов С. Н., Галимов К. З., Курочка П. Н. К теории расчета оболочек некругового очертания // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 1981. Выпуск 1. — С. 62–75.
8. Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н., Радченко В.П., Соляев Ю.О. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приёмно-передающего модуля активной фазированной антенной решётки // Труды МАИ, 2018. №10.
9. Егоров А.В., Азаров А.В. Численно-аналитический метод расчета металлокомпозитного цилиндрического баллона давления // Труды МАИ, 2014. №73.
10. Юдин А.С., Щитов Д.В. О расчете эллиптических оболочек вращения, нагруженных внутренним давлением // Естественные науки, 2004. №3. — С. 29-36.
11. Жигалко Ю.П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 1966. Выпуск 4. — С. 3–41.
12. ГОСТ 14249-80 Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность.
13. ГОСТ 34347-2017 Сосуды и аппараты стальные сварные. Общие технические условия

14. ГОСТ Р 52630-2012 Сосуды и аппараты стальные сварные. Общие технические условия (с Изменением N 1)
15. ГОСТ 34233.10-2017 Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Сосуды и аппараты, работающие с сероводородными средами
16. ГОСТ 5520-2017 Прокат толстолистовой из нелегированной и легированной стали для котлов и сосудов, работающих под давлением. Технические условия
17. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника. 1991. - 656 с.
18. Б.Д. Аннин, Ю.М. Волчков. Неклассические модели теории пластин и оболочек. Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, N-о 5.
19. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. - Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
20. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
21. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
22. Лурье А.И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ. 1940. 4, вып. 2. С. 7–34.
23. Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа–Лява в теории оболочек. ПММ. 1943. 7, вып. 5. С. 323–330.
24. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т.5, М., 1973 - 272 с.
25. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. Ки- ев: Наук. думка, 1973. 248 с.
26. Александров А.Я., Куршин Л.М. Многослойные пластины и оболочки. Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1969.
27. Галимов К.З. Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко. Исслед. по теор. пластин и оболочек, 1975. Выпуск 11. – С. 92–126.
28. Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа– Лява в теории оболочек. ПММ. 1943. Т.7, Вып. 5. С. 323-330.

29. Koiter W.T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. Proc. IUTAM Symp. on the theory of thin elastic shells (Delft. 1959). North-Holland Publishing Company. Amsterdam. 1960. P. 12-33.
30. А.Е.Н. Love, М.А. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge^ at the university press. Vol. 1. 1892.
31. Ляв А. Математическая теория упругости. М-Л.: ОНТИ. 1935. 674.
32. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат. 1949. 784 с.
33. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
34. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судопромгиз. 1962. 432 с.
35. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1976. с. 512
36. Зверьяев Е.М. О соотношениях упругости в линейной теории тонких упру- гих оболочек. ПММ. 1970. 34. Вып. 6. С. 1136-1138.
37. Рогачева Н.Н. О соотношениях упругости Рейсснера-Нахди. ПММ. 1974. Вып. 6. С. 1063-1071.
38. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т.5. М. 1973. 272 с
39. Пикуль В.В. “Механика оболочек”. – Владивосток: Дальнаука, 2009.–536с.
40. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика М., «Машиностроение», 1977. 488 с.
41. Власов В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек (том 1). Москва: Вздательство академии наук СССР, 1962 г. 528 с.
42. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
43. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. 1980.
44. Я.З. Бурман, С.С. Соловьев, Исследование упруго-пластического деформирования оболочек на основе теории течения и метода конечных элементов, Исслед. по теор. пластин и оболочек, 22, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1990, 98–107

45. С.Н. Булатов, К.З. Галимов, П.Н. Курочка, К теории расчета оболочек некругового очертания, Исслед. по теор. пластин и оболочек, 16, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1981, 62–75
46. Е. М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 33. 2016. 1-25 с.
47. Zelenskiy E.S., Kuperman A.M., Gorbatkina Yu.A., Ivanova-Mumzhieva V.G., Berlin A.A. Reinforced plastics - modern construction materials. Russian Journal of General Chemistry. 2001. Vol. XLV, No.2. Pp. 56–74.
48. Smerdov A.A., Buyanov I.A., Chudnov I.V. Analysis of optimal combinations of requirements to developed cfrp for large space-rocket designs. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroeniye. 2012. No.8. Pp. 70–77.
49. Sukhinin S.N. Prikladnye zadachi ustoychivosti mnogosloinykh kompozitnykh obolochek. Applied problems of multilayer composite shell stability. Moscow: FIZMATLIT, 2010. 248 p.
50. Пикуль В.В. К расчету устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки прочного корпуса подводного аппарата. Вестник дальневосточного государственного технического университета. 2009. 2. С. 98–105.
51. Carrera E., Brischetto S., Nali P. Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis. First Edition. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011. 322 p.
52. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. Composite Structures. 2010. No.93. Pp. 14–31.
53. Pimenta P.M., Wriggers P. New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems. CISM International Centre for Mechanical Sciences. 2010. Vol. 519. 228 p.
54. Libai A., Simmonds J.G. The Nonlinear Theory of Elastic Shells. Cambridge, UK: CUP, 1998. 553 p.
55. Ventsel E., Krauthammer T. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications. New York: Marcel. Dekker, 2001. 684 p.

56. Ahmed M.K. Elastic buckling behavior of a four-lobed cross section cylindrical shell with variable thickness under non-uniform axial loads [Online source]. *Mathematical Problems in Engineering*. Hindawi Publishing Corporation. Vol. 2009. URL: <http://eudml.org/doc/232201> (accessed: March 6, 2013).
57. Dau F., Pablo F., Polit O. New reference solutions and parametric study for multilayered cylindrical shell. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. 2010. Vol. 4. No.2. Pp. 133–161.
58. Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia. *Composite Structures*. 2013. No.98. Pp. 169– 191.
59. Tomás A., Martí P. Shape and size optimisation of concrete shells. *Engineering Structures*. 2010. No.32. Pp. 1650–1658.
60. Rikards R.B., Teters G.A. *Ustoychivost obolochek iz kompozitnykh materialov* [Composite shell stability]. Riga: Zinatne, 1974. 310 p.
61. Valeev R.M., Kuvaev A.S., Kurlapov D.V., Rodionov A.V. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No.3. Pp. 22–24. (rus)
62. Dyachkova A.A., Kuznetsov V.D. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No.3. Pp. 25–28.
63. Moskalenko L.P. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2011. No.3(28). Pp. 46–50. (rus)
64. Efimtsov B.M., Lazarev L.A. Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*. 2009. No.327. Pp. 41–54. (rus)
65. Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow: Fizmatlit, 1957. 463 p. (rus) Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin* [Theory of anisotropic plates]. Moscow: Nauka, 1987. 360 p. (rus)
66. Амбарцумян С. А. *Разномодульная теория упругости*. М.: Наука, 1982
67. Жигалко, Дмитриева. *Реакция ортотропной цилиндрической оболочки на локализованный импульс внешнего давления*.
68. Кузнецов С.А. *Механика контактного взаимодействия*. Казань: Казан. ун-т., 2014. 72 с.

69. Власов В.З. Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней. Изв. АН СССР, ОТН.—М. — 1949. — №. 6. — С. 41-45.
70. Григолюк Э.И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру. — Наука, 1988.
71. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т.5. М. 1973. 272 с.
72. Кильчевский Н.А. Обобщение современной теории оболочек // ПММ. 1939. Т.2. Вып.4. С.427-438.
73. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. Киев. Наукова думка. 1990. 136 с.
74. Григолюк, Толкачев. Осесимметричные контактные задачи для цилиндрических и сферических оболочек. Исследования по теории пластин и оболочек, 22, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1990, 3–69
75. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости - М. : Гостехиздат, 1953.- 213 с
76. Галин Л. А. Развитие теории контактных задач в СССР,- М. : Наука, 1976.- 492 с
77. Иванов В. А. Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим наполнителем. Тр. семинара по теории оболочек 1971.— Вып. 2.— с. 5—25.
78. Иванов В. А., Ильгамов И. А., Гулин Б. В. Расчет оболочек с упругим наполнителем.— М. : Наука, 1987. - 260 с.
79. Блох М. В., Цукров С. Я. Осесимметричный контакт тонких цилиндрических оболочек. Расчет пространственных систем в строительной механике.— Саратов, 1972.— С. 79—82.
80. Блох М. В., Цукров С. Я. Об осесимметричном контакте тонких цилиндрических оболочек. Прикл. механика 1973.— 9, № И.—с. 23—28
81. Шуваев Д. Н. Численное решение задачи о контакте тонких осесимметричных оболочек. Материалы VI науч. конф. молодых ученых.— Горький. 1981.— С. 75—84.— Деп. в ВИНТИ 14.01.81, № 202.

82. Ohtake K., Oden I. T., Kikuchi N. Analysis of certain unilateral problems in von Karman plate theory by a penalty method.— Pt 2. Approximation and Numerical Analysis // *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.* 1980.— 24, N 3.— P. 317—337
83. Толкачев В. М. Контактная задача для сферической оболочки. Теория пластин и оболочек.— М., 1971.— С. 271—277
84. Питько В. В. Решение некоторых задач для сферической оболочки // *Строит. механика и расчет сооружений* 1973.— № 6.— с. 21—26.
85. Артюхин Ю. П., Карасев С. Н. Некоторые контактные задачи теории тонких пластин. Исслед. по теории пластин и оболочек — 1973.— Вып. 10.— С. 159—166
86. Варвак П. М., и др. Осесимметричная задача о контакте нескольких тонких оболочек при конечных перемещениях / П. М. Варвак, Н. М. Медведева, А. В. Перельмутер и др. // *Тр. IV Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике*, Киев, 21—28 мая 1976 г.— Киев, 1976.— с. 85.
87. П.М. Варвак, Н.М. Медведева, А.В. Перельмутер, А.Г. Пиискер. Осесимметричная задача о контакте нескольких тонких оболочек при конечных перемещениях. Прочность конструкций. 1978. № 3. с. 35-41.
88. Пелех Б. Л., Максимук А. В. Матричный метод решения смешанных граничных задач для слоистых структур // *Докл. АН УССР. сер. А.*- 1982.- М 7.- С. 51-54.
89. Лазько В. А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // *Механика композит. материалов* 1981.— № 5.— С. 832—836.
90. Лазько В. А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. II Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // *Механика композит. материалов.*— 1982.— № 77—84.
91. Пелех Б. Л., Лазько В. А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.— Киев : Наук. думка, 1982.— 296 с.

92. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости.— М. : Физматгиз, 1961.— 340 с.
93. Болотин В. В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение 1964.— 1.— с. 61— 66.
94. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций.— М.: Машиностроение, 1980.— 373 с
95. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.— М.: Машиностроение, 1976.— 278 с.
96. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение к технике. — М.: Гостехиздат, 1949 . — 756 с.
97. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Гостехиздат, 1956.- 419 с.
98. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем.— М.: Физматгиз, 1963.— 879 с
99. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем.- М.: Физматгиз, 1967- 984.
100. Гуляев В. И., Баженов В. А Гоцуляк Е. А. Устойчивость нелинейных механических систем.— Львов : Вища шк., 1982.— 254 с.
101. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения.— М. : Наука, 1964.— 192 с.
102. Корнишин М. С., Исанбаева Ф. С. Гибкие пластины и панели.— М. : Наука, 1968.— 260 с.
103. Стрельбицкая А. И., Колгадин В. А., Матошко С. П. Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости.— Киев: Наук. думка, 1971.— 224 с
104. Енджиевский Л. В. Нелинейные деформации ребристых оболочек.— Красноярск : Изд-во Краснояр. ун-та, 1982.— 295 с.
105. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха.— Киев : Вища шк., 1982.— 480 с.
106. Оден Дж. Конечные элементы в механике сплошных сред.- М.: Мир, 1976.- 464 с.
107. Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек.— Киев : Наук. думка, 1971 134 с.
108. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек.— Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1976.— 214 с.

109. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ.— Киев : Вища шк., 1983.— 286 с.
110. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами.- Киев : Наук. думка, 1988.- 264 с
111. Каржишин А. В. и др. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов — М. : Машностроение, 1975 . — 376 с.
112. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953.-213 с.
113. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. 2-е изд. исп. и доп. - М.: Наука, 1976. - 512 с.
114. Паляя О.М., Спиро В.Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Л.: Судостроение, 1977. 392 с.
115. Лавендел Э. Э. Расчет резинотехнических изделий //М.: Машиностроение. – 1976.
116. Моссаковский Г. и др. Контактные задачи теории оболочек и стержней. – 1978.
117. Емельянов И.Г. Контактные задачи теории оболочек. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 184 с.
118. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Плоская задача о вертикальном ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству //Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – №. 5. – С. 151-158.
119. Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства //Труды МАИ. – 2014. – №. 78. – С. 10-10.
120. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек //Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – №. 2. – С. 69-76.
121. Heredia, S. P. (2015). Adhesion of thin structures: frictional peeling and adhesive shells (Doctoral dissertation, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI).
122. Kikuchi N., Oden J. T. Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988.

123. Richard M. Springman, John L. Bassani, Mechano-chemical coupling in the adhesion of thin-shell structures, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 57, Issue 6, 2009, Pages 909-931.
124. Rust, Wilhelm. "Contact with Shell-and Beam-Elements." *Non-Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Springer International Publishing, 2015. 355-357.
125. Srivastava A., Hui C. Y. Large deformation contact mechanics of a pressurized long rectangular membrane. II. Adhesive contact // *Proc. R. Soc. A. – The Royal Society*, 2013. – Т. 469. – №. 2160. – С. 20130425.
126. Решение контактных задач в среде MSC. Patran-Nastran / В. А. Жилкин, А. В. Клименко, К. Н. Граборов, Р. М. Латышов // *Вестник ЧГАУ*. 2006. Т. 48. С. 55–72.
127. Жилкин В. А. Расчеты на прочность и жесткость элементов сельскохозяйственных машин. Челябинск : ЧГАУ, 2005. 424 с.
128. Жилкин В. А. Решение задач земле- дельческой механики в MathCAD. Челябинск : ЧГАА, 2010. 410 с.
129. В. А. Жилкин. Решение контактных задач механики в среде msc.patran-marc
130. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. М: Машгиз. – 1962.
131. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1967.
132. Chen, J.S., 2011. On the contact behavior of a buckled Timoshenko beam constrained laterally by a plane wall. *Acta Mech.* 222, 225–232.
133. Essenburg F. On surface constraints in plate problems // *J. Appl. Mech.* – 1962. – Т. 29. – С. 340-344.
134. Hodges, D. H., & Bless, R. R. (1995). Analysis of beam contact problems via optimal control theory. *AIAA Journal*, 33(3), 551–556.
135. Kim, J. H., Ahn, Y. J., Jang, Y. H., & Barber, J. R. (2014). Contact problems involving beams. *International Journal of Solids and Structures*, 51(25–26), 4435–4439.
136. Kim J. H., Jang Y. H. Frictional contact behaviors between beam and cylinder under cyclic loading // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2017. – Т. 131. – С. 693-700.

137. Plaut, R. H., Suherman, S., Dillard, D. A., Williams, B. E., & Watson, L. T. (1999). Deflections and buckling of a bent elastica in contact with a flat surface. *International Journal of Solids and Structures*, 36(8), 1209–1229.
138. Srivastava A., Hui C. Y. Large deformation contact mechanics of long rectangular membranes. I. Adhesionless contact // *Proceedings of the Royal Society of London Series A*. – 2013. – Т. 469. – С. 20130424-20130424.
139. Левитан Б.А., Радченко В.П., Топчиев С.А., Токмаков Д.И., Смолин М.Г., Венценосцев Д.Л., Тушнов П.А. Патент «Способ охлаждения активной фазированной антенной решетки» RU 2564152.
140. Артюхин Ю. П., Карасев. Действие жесткого штампа на пологую сферическую оболочку и пластинку // *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 9(1972), 211–219.
141. Артюхин Ю. П., Карасев. Некоторые контактные задачи теории тонких пластин // *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 10 (1973), 159–166.
142. Артюхин Ю. П. Контактные задачи для круглых пластин и сферических оболочек, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1979, выпуск 14, 123–139.
143. Артюхин Ю. П., Митина С. В. Контактная задача для пластинки и ребра, не достигающего края, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1980, выпуск 15, 25–31.
144. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа.—*ПММ*, т. 40, вып. 6, 1976.
145. Коровчинский М. В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей.— В сб.: *Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа*. М., „Наука“, 1971.
146. Кузнецов С. А. , Артюхин Ю. П. Плоская контактная задача для тонкой пластины при наличии износа // *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 16, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1981, 190–196.
147. Артюхин Ю. П. О решении одномерных и осесимметричных контактных задач теории трансверсально-изотропных пластин и оболочек.—Тезисы докладов на Всесоюзн. научн. конф. „Смешанные задачи механики деформируемого тела“, ч. 2, Ростов-на-Дону, 1977.

148. Артюхин Ю. П. Модифицированная теория Голанда–Рейсснера склеенных пластин // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 1975, выпуск 11, 136–148.
149. Гурьянов Н. Г., Контактные напряжения в склеенных прямоугольных пластинах // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 1984, выпуск 17, часть 2, 79–92.
150. И.В. Даутов. Определение прогибов замкнутой круговой цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия и внешнего давления при установившейся ползучести
151. Розенблюм В.И. Приближенные уравнения ползучести тонкостенных оболочек
152. Жигалко Ю. П. Решение контактных задач для балки на основе классической модели изгиба Исслед. по теор. пластин и оболочек, 24 (1992), 22–29
153. Жигалко Ю.П., Торопова М.М. Обобщенные решения контактных задач для упругих пластин и оболочек // Изв. АН СССР, МТТ, 1989. -N2, - С.109-114.
154. Т. А. Стекина. Вариационная задача об одностороннем контакте упругой пластины с балкой Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 9:1 (2009), 45–56
155. С.С. Соколов, А.В. Ялозо. Метод расчета контактной границы для нерегулярных многогранных сеток в методике ТИМ. ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Выл. 4
156. Рабинович А . Л . Введение в механику армированных полимеров. М., "Наука", 1970.
157. Блох М.В. Одномерный односторонний контакт стержней, пластин и оболочек. Тр. IX Всес. конф. по теории оболочек, Л.: Судостроение, 1975, с. 25-28.
158. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами. ПММ, т. 39, 1975, вып. 5, с. 876-883.
159. Попов Г.Я. 0 контактных задачах для оболочек и пластин. -Тр. X конф. по теории оболочек и пластин. Кутаиси, 1975, т. I, Тбилиси: Мецниереба, 1975, с. 244-250.
160. Феодосьев В. И. Расчет тонкостенных трубок Бурдона эллиптического сечения энергетическим методом. Оборонгиз, 1940.
161. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения //М.: Оборонгиз. - 1949.

162. Тимошенко, С. П., Войновский–Кригер С. М. Пластинки и оболочки. V: Физматгиз, 1963, 636. 114.
163. Тимошенко, С. П. "Сопротивление материалов. Т. 1. Элементарная теория и задачи." М.: Наука 1 (1965): 65.
164. Rivlin, R. S., "The effective work of adhesion," *Paint Technology*, vol. IX, no.106, pp. 2611—2614, 1944
165. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Под редакцией Э.И. Григолюка. Изд. «Наукова думка», Киев, 1972 г., 508 с.
166. Федорова, Вальгер, Данилов. Основы работы в Ansys 17. Издательство: ДМК-Пресс. ISBN: 978-5-97060-425-0
167. Коваленко А.В., Узденова А.М., Уртенев М.Х., Никоненко В.В.. Математическое моделирование физико-химических процессов в среде. Издательство: Лань. SBN: 978-5-8114-2512-9
168. Socrates Dokos. *Modelling Organs, Tissues, Cells and Devices: Using MATLAB and COMSOL Multiphysics*. Springer.
169. Бабайцев А.В., Рабинский Л.Н., Радченко В.П., Венценосцев Д.Л. Оценка прочности и выбор оптимальной формы поперечного сечения тонкостенных металлических трубок системы охлаждения АФАР. *Технология металлов*. 2017. № 10. С. 38-46.
170. Бабайцев А.В., Венценосцев Д.Л., Рабинский Л.Н., Радченко В.П. Оценка тепловых режимов приемопередающего модуля активной фазированной антенной решетки. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2017. № 9-1. С. 365-374.