



На правах рукописи

Филиппова Александра Сергеевна

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ  
ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ ДЛЯ СПУТНИКОВОЙ  
НАВИГАЦИИ**

Специальность: 01.02.01 – “Теоретическая механика”

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

*Работа выполнена на кафедре «Теоретическая механика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».*

**Научный руководитель:**

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)*

**МАРКОВ Юрий Георгиевич**

**Официальные оппоненты:**

*доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Государственного астрономического института имени П.К. Штернберга МГУ*

**ЧАЗОВ Вадим Викторович**

*кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика» Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета*

**ЗЛЕНКО Александр Афанасьевич**

**Ведущая организация:**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт астрономии Российской академии наук (ИНАСАН).*

Защита состоится «25» декабря 2015 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), расположенном по адресу: 125993, Москва А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВПО Московского авиационного института (национального исследовательского университета), .

Автореферат разослан « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

*к.ф.-м.н., доцент*



Гидаспов В. Ю.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Исследования фундаментальной астрометрической проблемы, заключающейся в высокоточной интерполяции и прогнозе параметров вращения Земли (ПВЗ), исходя из результатов наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ), являются основополагающими для ряда прикладных задач. В связи с модернизацией и развитием отечественной навигационной системы – ГЛОНАСС – весьма актуальным оказывается достижение высоких точностей координатно-временного и навигационного обеспечения наземных (стационарных и подвижных), а также движущихся в околоземном пространстве объектов. Эта прикладная задача сопряжена с фундаментальной проблемой определения ПВЗ, в частности, с колебаниями земного полюса и прогнозом его движения в пределах как длительного (1-2 года), так и короткого интервала времени (10-40 сут) и рассогласования  $dUT1$  между Всемирным временем, связанным с вращением Земли, UT1 и Всемирным координированным временем UTC на коротких интервалах времени.

По данным МСВЗ за последние 50 лет в сложном движении полюса выделяются следующие основные составляющие: чандлеровское колебание (свободная нутация), амплитуда которого достигает величин  $0.20'' - 0.25''$ , а период  $433 \pm 2$  звездных суток; годовое колебание с амплитудой  $0.07'' - 0.08''$  и периодом, равным одному году (365.25 звездных суток); принципиальное значение для построения математической модели движения полюса Земли на больших промежутках времени (50 лет и более) имеет тренд полюса Земли ( $0.5''$  по направлению  $90^\circ$  на запад от Гринвича).

Существенным вкладом в развитие теории движения Земли относительно центра масс является исследование Л. Эйлера (1765), определившего 305-суточный период свободной нутации для твердой Земли и модель С. Чандлера (1891), обнаружившего из многочисленных наблюдений изменчивость широт обсерваторий с двумя периодическими компонентами в движении полюса - 365 и 430-440 звездных суток. Значительное отличие чандлеровского периода от предписываемого классической теорией твердого тела (периода прецессии Эйлера 305 суток для недеформируемой фигуры Земли) потребовало дальнейшего научного объяснения. Оно было предпринято и частично осуществлено на основе модели деформируемой Земли в исследованиях С. Ньюкома, Г. Джеффриса, А.Лява,

У. Манка и Г. Макдональда, Ф.А. Слудского, М.С. Молоденского и многих других. Исторически принято называть указанное движение свободной нутацией деформируемой Земли или чандлеровским колебанием полюса.

Современные российские исследователи данной проблемы, Ю.В. Баркин, Л.В. Зотов, З.М. Малкин, В.Е. Жаров, С.Л. Пасынок и другие, разрабатывают теоретические модели движения Земли, основываясь на высокоточных наблюдениях и измерениях МСВЗ с учётом приливных эффектов и деформируемости планеты.

Математические модели вращательно-колебательного движения деформируемой Земли, которые с высокой точностью идентифицируют её параметры вращения и дают надёжный прогноз движения земного полюса и вариций длительности суток, требуются при решении ряда астрометрических, геодинамических и навигационных задач.

В этой связи решаемые в диссертационной работе задачи моделирования вращательно-колебательного движения Земли и их приложения являются **актуальными**.

**Цели и задачи диссертационной работы:** Целью диссертации является уточнение ранее разработанных динамических моделей параметров вращения Земли, адекватных данным наблюдений и измерений МСВЗ, прогнозирование колебаний земного полюса и неравномерности осевого вращения Земли на коротких интервалах времени, а также оценка влияния учёта ПВЗ в задаче высокоточной спутниковой навигации.

**Научная новизна:**

1. Разработана численно-аналитическая модель колебательного движения полюса Земли, учитывающая эффекты временных вариаций коэффициентов геопотенциала. Приводятся результаты численного моделирования колебаний координат земного полюса в сравнении с данными наблюдений и измерений МСВЗ. Модель позволяет улучшить точность прогноза траектории движения полюса.
2. На основе амплитудно-частотного анализа найдены структурные свойства внутрисуточных колебаний координат полюса Земли под воздействием гравитационно-приливных моментов сил от Солнца и Луны. Сравнение результатов моделирования движения полюса с высокоточными данными РСДБ-наблюдений на коротком интервале времени показывает, что

модель позволяет статистически надёжно объяснить наблюдаемые характеристики движения земного полюса внутри суток.

3. Предложены автономные модели быстрого расчета фундаментальных составляющих параметров вращения Земли (движения земного полюса и рассогласования  $dUT1$  временных шкал  $UT1$  и  $UTC$ ) для использования их на борту КА и в аппаратуре потребителя. Приведены результаты прогнозов автономных моделей ПВЗ на различных интервалах времени.

#### **Теоретическая и практическая значимость:**

В диссертационной работе на основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля получили дальнейшее развитие численно-аналитические модели колебаний земного полюса и неравномерности вращения деформируемой Земли под воздействием гравитационно-приливных сил от Солнца и Луны. Исследование вращательно-колебательных процессов движения Земли совместно с временными вариациями коэффициентов геопотенциала позволяет уточнить аналитическую модель и улучшить прогноз траектории движения полюса. Существенным является то, что разработанная модель представляет собой естественное уточнение основной, используемой ранее модели [19-21] колебаний земного полюса.

В диссертации показано, что фундаментальные составляющие ПВЗ играют важную роль в решении задач спутниковой навигации. Предложены автономные модели быстрого расчета фундаментальных составляющих параметров вращения Земли для использования их на борту КА и в аппаратуре потребителя. Приведены результаты прогнозов автономных моделей ПВЗ на различных интервалах времени.

Данные исследования могут быть полезными для развития некоторых разделов механики, в частности механики с бесконечным числом степеней свободы.

#### **Методология и методы исследования**

Теоретическое моделирование вращательно-колебательных движений Земли, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ, проводится с помощью приближенных методов нелинейной механики в сочетании с численным экспериментом. Модель вращательно-колебательного процесса Земли основана на учете гравитационно-приливных моментов сил от Солнца, Луны, и вариаций второй зональной гармоники геопотенциала. Для построения математической модели первого приближения использовалась динамическая теория вращения твердого тела. Моделирование (интерполяция и прогноз) параметров вращения

Земли, адекватное наблюдениям и измерениям МСВЗ, проводится с помощью метода «взвешенных» наименьших квадратов (МНК).

**Положения, выносимые на защиту:**

1. На основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля получена численно-аналитическая модель колебаний полюса Земли под воздействием лунно-солнечных гравитационно-приливных моментов сил и возмущений меняющегося со временем геопотенциала.
2. Дан сравнительный анализ результатов численного моделирования колебаний координат земного полюса с данными измерений МСВЗ. Показано, что во время проявления аномальных флуктуаций в колебательном процессе полюса Земли точность годового прогноза согласно уточнённой модели выше точности прогноза основной модели.
3. Предложено математическое описание нерегулярных явлений в колебательном процессе земного полюса, которое способствует улучшению точности прогноза траектории движения полюса в периоды значительных аномалий.
4. Проведён амплитудно-частотный анализ малопараметрической модели внутрисуточного колебательного процесса земного полюса. Даны результаты амплитудно-частотного анализа колебательного процесса полюса и вариации второй зональной гармоники  $c_{20}$  геопотенциала.
5. На основе полученных результатов интерполяции и прогноза колебаний полюса показано, что совместное моделирование динамических процессов (учёт временных вариаций геопотенциала) позволяет уточнить аналитическую модель и улучшить прогноз траектории движения полюса.
6. Приведены долгосрочные математические модели фундаментальных составляющих ПВЗ (колебаний полюса и рассогласования  $dUT1$  временных шкал  $UT1$  и  $UTC$ ). Показано, что предложенные модели обеспечивают достаточную автономность в формировании ПВЗ на борту КА. Учёт этих параметров в реальном времени необходим для решения задач навигационного обеспечения. Построены графики ошибок прогноза полюса  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  и  $\Delta dUT1$  при коррекции модели для различных интервалов времени.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность построенных математических моделей и сделанных выводов обеспечена

корректной математической постановкой задач, хорошим согласованием с данными наблюдений и измерений МСВЗ и подтверждается повышением точности прогноза эфемерид космических аппаратов. Основные результаты диссертации докладывались автором на конференциях.

Результаты диссертационной работы использованы в НИР по 2 грантам РФФИ (№№13–02–00434, 13–01–00180) и по гранту Президента для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук (№МК-1200.2011.1), в которых автор выступал в качестве исполнителя.

**Публикации.** Научные результаты диссертации опубликованы в статьях в журналах из списка ВАК:

Результаты работы докладывались и обсуждались на:

- конференции «Международная конференция по математической теории управления и механике» (г. Суздаль, 5-9 июля, 2013 г.).
- конференции «Journées 2013 Systèmes de reference spatio-temporels “Scientific developments from highly accurate space-time reference systems”» (Парижская обсерватория, Париж, 16-18.09 2013);
- конференции «Journées 2014 Systèmes de reference spatio-temporels “Recent development and prospects in ground-based and space astrometry”» (Обсерватория Пулково, Санкт-Петербург, 22-24.09.2014);
- конференции «Международная конференция по математической теории управления и механике» (г. Суздаль, 3-7 июля, 2015 г.).

**Личный вклад автора.** Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Автор выполнил большинство аналитических исследований и численных расчётов, участвовал в обработке и интерпретации всех полученных данных. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был определяющим.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Она содержит 121 страниц машинописного текста, включающего 24 рисунок и список литературы из 78 наименований.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** дан краткий обзор рассматриваемой проблемы, обоснована

актуальность темы диссертационной работы, её научная новизна и практическая значимость. Сформулированы цели и задачи исследований. Представлены основные научные положения, выносимые на защиту. Дается структура и содержание диссертации. Дана общая характеристика диссертационной работы.

**В первой главе** диссертации рассматривается небесномеханическая модель вращательно-колебательного движения Земли в рамках пространственного варианта задачи «деформируемая планета - точечный спутник» в поле притягивающего центра.

Для адекватного описания возмущенных движений деформируемой Земли вокруг центра масс в работе используется простая механическая модель вязкоупругого твердого тела. Планета представляется двухслойной, состоящей из абсолютно твердого ядра и вязкоупругой мантии. На внутренней границе перемещения частиц упругой среды отсутствуют, а внешняя граница свободна. Считается, что среда описывается линейной теорией вязкоупругости, а процесс деформации происходит квазистатически. Эти допущения позволяют применить строгие теоремы механики, методы возмущений и усреднений и наглядно исследовать модель вращательно-колебательных движений Земли.

В качестве невозмущенного движения рассмотрена модельная задача: вращение деформированной Земли без учёта приливных моментов. Для неё записан функционал Рауса в переменных действие-угол  $I_j, w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), получено решение дифференциальных уравнений движения, где фазы  $w_1, w_2$  отвечают соответственно чандлеровскому движению полюса и суточному вращению деформируемой Земли.

Угловые координаты, отвечающие свободной нутации (чандлеровской компоненте движения)  $(x_p, y_p)$ , соответствующий угол  $\alpha$  между осью фигуры и осью вращения и линейные координаты  $(X_p, Y_p)$  на касательной к геоиду плоскости выражаются через компоненты вектора угловой скорости в связанной с Землей системе координат и равны приближённо [19]:

$$x_p = \frac{\omega_x}{\omega} \approx \frac{C^* \lambda}{A^* \kappa} \sqrt{1 + \kappa^2} \cos w_1, \quad y_p = -\frac{\omega_y}{\omega} \approx \frac{C^* \lambda}{B^* \kappa} \sqrt{1 + \kappa^2} \sin w_1,$$

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 C^{*2} (A^{*-2} + \sqrt{1 + \kappa^2} B^{*-2}) \sin^2 w_1, \quad (1)$$

$$X_p = R x_p, \quad Y_p = R y_p, \quad \max |X_p|, |Y_p| \approx 7.5 \text{ м}, \quad R = 6.38 \times 10^6 \text{ м}.$$

Здесь  $A^*, B^*, C^*$  - эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций «замороженной» фигуры Земли,  $\kappa$  и  $\lambda$  - основные динамические параметры, характеризующие вращательные движения деформируемой Земли и выражающиеся через  $A^*, B^*, C^*$ .

В первом приближении полюдия (свободная нутация) есть эллипс с весьма малым эксцентриситетом  $e \approx 0.005$ . Данные МСВЗ [15] подтверждают теоретические оценки (1).

**Во второй главе** представлена разработанная численно-аналитическая модель возмущённого колебательного движения полюса Земли, позволяющая дать качественное объяснение наблюдаемым нерегулярным явлениям в колебательном процессе и улучшить точность прогноза траектории его движения в периоды значительных аномалий. Модель представляет собой естественное уточнение ранее разработанной основной модели колебаний полюса (чандлеровских и годовых компонент) с помощью методов небесной механики и данных наблюдений гравитационного поля Земли.

Для анализа вращательно-колебательных движений деформируемой Земли были использованы классические динамические уравнения Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции [20-23]. После некоторых преобразований данные уравнения для координат земного полюса  $(x_p, y_p)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ (1 + \chi_A) p + \kappa_p r_0 \right] + N \frac{B}{A} (1 + \chi_B) q &= \kappa_q r^2 + M_p^{SL}, \\ \frac{d}{dt} \left[ (1 + \chi_B) q + \kappa_q r_0 \right] - N \frac{A}{B} (1 + \chi_A) p &= -\kappa_p r^2 + M_q^{SL}, \\ N &= \sqrt{N_p N_q (1 + \chi_A)(1 + \chi_B)} \cong (0.84 \div 0.85) \omega_0, \\ A &= A^* + \delta A, \quad B = B^* + \delta B, \quad C = C^* + \delta C, \\ \chi_A &= \frac{\delta A}{A^*}, \quad \chi_B = \frac{\delta B}{B^*}, \quad \kappa_p = \frac{\delta J_{pr}}{A^*}, \quad \kappa_q = \frac{\delta J_{qr}}{B^*}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\omega = (p, q, r)^T$  - вектор угловой скорости в связанной с Землёй гринвичской геоцентрической системе координат,  $r_0$  - средняя скорость осевого вращения Земли,  $\omega_0$  - среднее движение Земли по орбите вокруг Солнца;  $\chi_A, \chi_B, \kappa_p, \kappa_q$  - приливные горбы и выступы соответственно;  $M_{p,q}^{SL}$  - зависящие от углов Эйлера, средних движений Земли и Луны удельные моменты лунно-солнечных гравитационно-приливных сил пространственного варианта задачи

«деформируемая Земля - точечный спутник Луна» в поле притяжения Солнца; переменные  $N_p, N_q$  являются близкими по значению величинами, определяющими частоту чандлеровских колебаний полюса; малые вариации тензора инерции  $\delta J_{ij}$  ( $i, j = p, q, r$ ) содержат различные гармонические составляющие (зональные, тессеральные, секториальные), обусловленные возмущающим влиянием гравитационных приливов от Солнца, Луны и других факторов.

Интегрируя уравнения (2) после усреднения по суточному вращению, ранее [16-19] были получены выражения основной модели колебаний полюса  $x_p, y_p$ :

$$\begin{aligned} x_p &= c_x(\tau) - a_x^c \cos 2\pi N\tau + a_x^s \sin 2\pi N\tau - Nd_x^c \cos 2\pi\tau - d_x^s \sin 2\pi\tau, \\ y_p &= c_y(\tau) + a_y^c \cos 2\pi N\tau + a_y^s \sin 2\pi N\tau - Nd_y^c \cos 2\pi\tau + d_y^s \sin 2\pi\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

$$N \cong 0.84 - 0.85.$$

Оптимальные значения коэффициентов модели (3) находятся с помощью метода наименьших квадратов на основе статистической обработки астрометрических данных высокоточных измерений угловых параметров движения Земли.

В последнее десятилетие годовые и полугодовые вариации коэффициентов геопотенциала (для гармоник порядков 2, 3, 4, 5, 6) были определены по данным лазерной локации спутников Земли (SLR) таких, как Lageos-1, Lageos-2, Starlette, Ajisai, Stella и ВЕС. В связи с этим научный и практический интерес представляет совместное моделирование колебательного движения полюса Земли и временных вариаций коэффициентов геопотенциала, влияющих на параметры вращающегося геоида.

Фигура Земли вследствие вариаций тензора инерции является динамической фигурой геоида, создавая при этом дополнительный возмущающий потенциал, наибольшим по величине слагаемым из разложения которого является возмущение от второй гармоники  $\delta W_2$ :

$$\begin{aligned} \delta W_2 &= \frac{fm_E R_E^2}{r^3} \Delta \bar{Y}_2(\theta, \varphi), \\ \Delta \bar{Y}_2(\theta, \varphi) &= \delta c_{20} \bar{P}_{20}(\cos\theta) + [\delta c_{21} \cos\varphi + \delta s_{21} \sin\varphi] \bar{P}_{21}(\cos\theta) + \\ &+ [\delta c_{22} \cos 2\varphi + \delta s_{22} \sin 2\varphi] \bar{P}_{22}(\cos\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\theta, \varphi, r$  - сферические координаты;  $R_E$  - средний радиус Земли;  $fm_E = 3,98600442 \times 10^{14}$ ,  $\bar{P}_{2m}(\cos\theta)$  - нормированные присоединенные функции Лежандра.

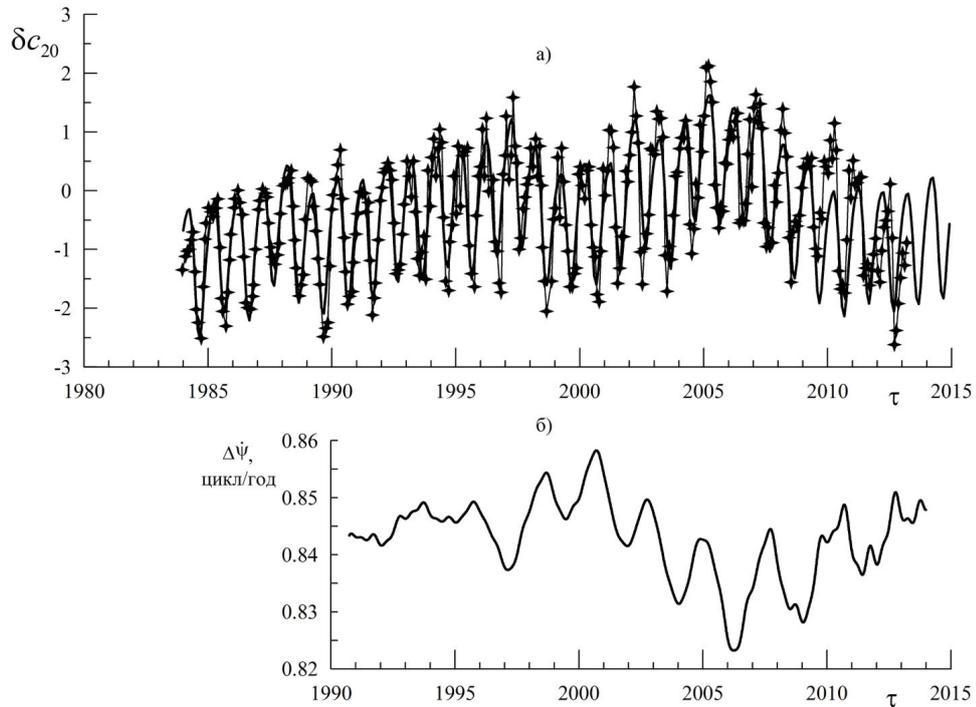
Представив траекторию движения земного полюса в виде совокупности нерегулярного тренда (дрейфа, содержащего вековые составляющие и низкочастотные компоненты с периодами от 6 лет и более) и полудии (траектории его движения вокруг среднего положения), выраженной через амплитуду и фазу его движения, дифференциальные уравнения (2) переписываются в виде:

$$\dot{a} = \frac{m_E R_E^2}{A^*} r_0 \left[ -2c_{22}^* \frac{C^*}{B^*} a \sin 2\psi + 2c_{22} a \sin 2\psi + s_{21} \cos \psi + c_{21} \sin \psi \right] + [\mu_p \cos \psi + \mu_q \sin \psi], \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = -N_q \cos^2 \psi - N_p \sin^2 \psi + \frac{m_E R_E^2}{A^* a} r_0 [c_{21} \cos \psi - s_{21} \sin \psi] + a^{-1} [\mu_q \cos \psi - \mu_p \sin \psi].$$

Здесь  $a, \psi$  - введённые амплитуда и фаза колебаний координат земного полюса;  $c_{2m} = c_{2m}^* + \delta c_{2m}$ ,  $s_{2m} = s_{2m}^* + \delta s_{2m}$  - коэффициенты второго порядка разложения потенциала в ряд по сферическим функциям. Величины  $r_0 \mu_p$ ,  $r_0 \mu_q$  - удельные гравитационно-приливные моменты сил от Солнца и Луны соответственно.

Средняя частота свободной нутации согласно решению системы (5) равна  $N^* = \sqrt{N_p^* N_q^*}$ . Вариация частоты чандлеровских колебаний (частоты свободной нутации) является функцией динамического сжатия геоида и вариации осевого момента инерции:  $N \cong N^* + \delta N$ ,  $\delta N = -F(\delta C, \delta c_{20})$ .



**Рис. 1.** (а) - Вариации второй зональной гармоники  $\delta c_{20}$  геопотенциала по данным SLR; (б) – вариация частоты  $\Delta\psi$  возмущённого чандлеровского колебания полюса Земли

Как следует из результатов численного моделирования параметры возмущенного чандлеровского колебания могут быть найдены из вариаций коэффициента  $c_{20}$  геопотенциала. На рис. 1,а приведены интерполяция второй зональной гармоники  $\delta c_{20}$  геопотенциала на интервале времени 1984-2008 гг. и прогноз на 2009-2014 гг. Звёздочки, соединённые тонкой сплошной линией – данные измерений SLR, а контрастная линия – построенная кривая. На рис. 1,б представлена вариация частоты  $\Delta\dot{\psi}$  возмущенного чандлеровского колебания земного полюса, построенная в ходе численного моделирования (1990-2014 гг.)

Для уточнённой модели координат земного полюса  $x_p, y_p$  из (5) получаются окончательные выражения:

$$\begin{aligned} x_p &= c_x + \tilde{a}_{ch} \cos(\psi_{ch}^0 - N^*t + \delta\psi + \Delta\psi) + a_h \cos(\psi_h^0 + v_h t + \epsilon) \\ y_p &= c_y + \tilde{a}_{ch} \sin(\psi_{ch}^0 - N^*t + \delta\psi + \Delta\psi + \epsilon) + a_h \sin(\psi_h^0 + v_h t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\delta\psi = \int F(\delta C, \delta c_{20}) dt, \quad \Delta\psi = \tilde{\psi}_{ch} - \psi_{ch}.$$

Здесь  $\tilde{a}_{ch}, \tilde{\psi}_{ch}$  - результирующая амплитуда и фаза чандлеровского колебания соответственно;  $\epsilon, \epsilon$  - сдвиги фаз в  $x_p, y_p$  для чандлеровских и годовичных колебаний соответственно;  $v_h$  - частота годовичного колебания;  $\psi_{ch}^0$  - постоянный сдвиг фазы;  $\delta\psi$  - вариация фазы чандлеровской компоненты при постоянном значении амплитуды.

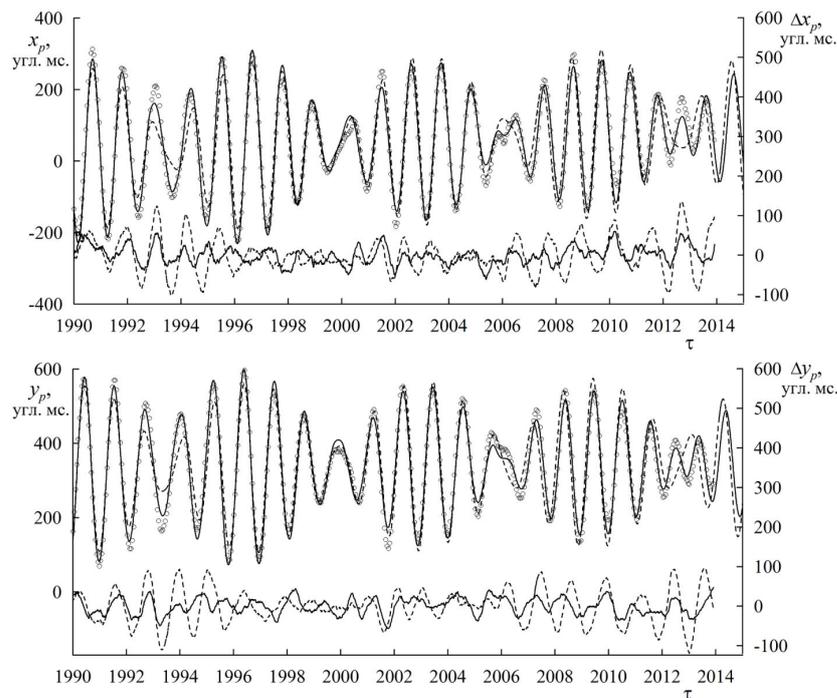
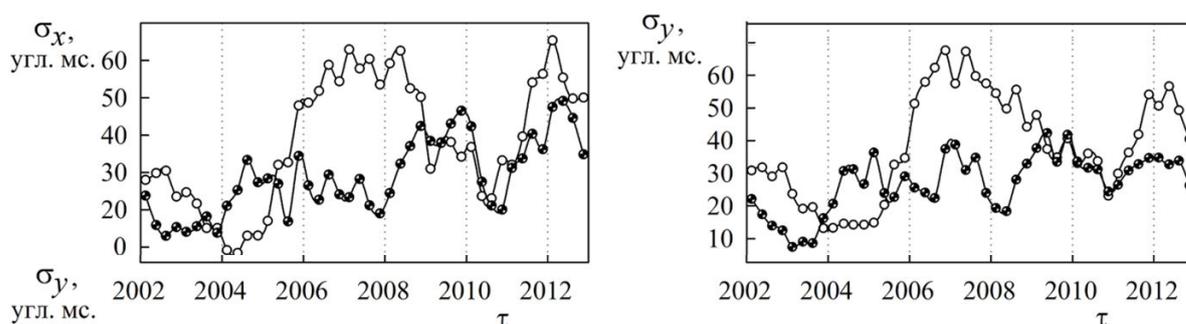


Рис. 2. Колебания координат полюса Земли согласно двум моделям в сравнении с данными МСВЗ

Приведем результаты численного моделирования движения земного полюса согласно основной (3) и уточнённой (6) модели.

На рис. 2 приведены интерполяция на длительном интервале времени (с 1990 г. по 2012 г. включительно) и прогноз на 2013 и 2014 гг. координат земного полюса согласно двум основной (штриховая линия) и уточнённой (сплошная линия) в сравнении с высокоточными данными наблюдений и измерений МСВЗ (кружки). В нижней части графиков приведены резидиумы – невязки между данными МСВЗ и построенными теоретическими кривыми.

На рис. 3 приводятся графики среднеквадратических отклонений построенных годовых прогнозов координат земного полюса  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Прогнозы согласно основной (3) и уточненной (6) моделям рассчитывались по 7-летней и 15-летней интерполяциям соответственно.



**Рис. 3** Среднеквадратические отклонения годовых прогнозов координат полюса  $\sigma_x, \sigma_y$  согласно основной (светлые кружки, соединённые сплошной линией) и уточнённой (тёмные кружки, соединённые сплошной линией) моделям

Из анализа результатов моделирования можно заключить, что во время проявления аномальных флуктуаций в колебательном процессе земного полюса точность годового прогноза, рассчитанного согласно уточнённой модели оказывается выше точности годового прогноза основной модели. Точность основной модели оказывается выше в случае стабильных характеристик чандлеровского и годовичного колебаний. Сравнительно короткий период стабильного поведения полюса наблюдался с 2004г. до середины 2005 г. Средние точности годовых прогнозов движения полюса, рассчитанных по моделям (3) и (6), составляют 1.66 м и 1.5 м соответственно.

**В третьей главе** в рамках классической механики проведен амплитудно-частотный анализ малопараметрической модели внутрисуточного колебательного процесса земного полюса под воздействием гравитационно-приливных моментов сил от Солнца и Луны, а также неравномерности её осевого вращения.

В ряде практически важных задач, например, касающихся вопросов высокоточной навигации космических аппаратов, существенную роль может играть внутрисуточный прогноз движения земного полюса. Динамический анализ и моделирование внутрисуточного колебательного процесса земного полюса проводятся на основе обработки результатов РСДБ-наблюдений по программе CONT11 [22].

Для описания внутрисуточных колебаний земного полюса в дифференциальных уравнениях (2) удобно принять следующие обозначения в разложении вариаций тензора инерции  $\delta J_{ij}$ :

$$\delta J_{ij} = \delta J_{ij}^{(t)} + \delta J_{ij}^{(\varphi)} + \delta J_{ij}^{(2\varphi)} + \dots$$

Здесь  $\delta J_{ij}^{(t)}$  - внутригодовые и межгодовые вариации;  $\delta J_{ij}^{(\varphi)}$ ,  $\delta J_{ij}^{(2\varphi)}$  - суточные и полусуточные вариации. Внутрисуточные вариации  $\delta J_{ij}^{(\varphi)}$ ,  $\delta J_{ij}^{(2\varphi)}$  содержат составляющие колебаний с комбинационными частотами пространственного варианта задачи деформируемая Земля-Луна в поле притяжения Солнца и частотами, обусловленными нерегулярными возмущениями. Суточные и полусуточные колебания приливных выступов  $k_p, k_q$  представляются суммой гармонических функций, параметры которых соответствуют компонентам приливообразующего потенциала и подлежат определению из наблюдений.

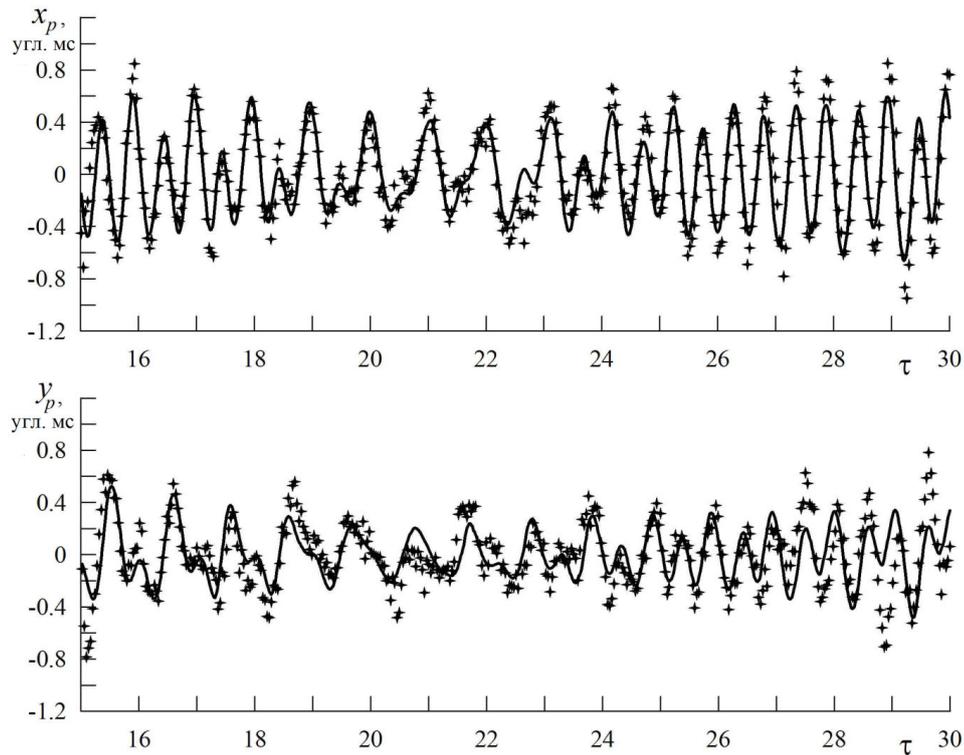
Как следует из решения системы (2) и данных наблюдений МСВЗ, возмущения, близкие к полусуточным с различными параметрами колебаний приводят к колебаниям в  $x_p^{(2\varphi)}$ ,  $y_p^{(2\varphi)}$  с существенной разницей в сдвигах фаз для  $x_p$  и  $y_p$ .

На рис. 4 приводятся интерполяция внутрисуточных колебаний координат  $x_p$ ,  $y_p$  земного полюса на интервале времени с 15.09.2011 по 27.09.2011 и экстраполяция на 3 суток в сравнении с данными РСДБ-наблюдений [6].

Из анализа результатов численного моделирования на различных интервалах времени среднеквадратическое отклонение экстраполяции модели внутрисуточных колебаний полюса для вторых суток составляет 0.24 и 0.20 угловых миллисекунд по координатам  $x_p$  и  $y_p$  соответственно.

При исследовании внутрисуточных колебаний необходимо выполнять переход от наблюдаемого промежуточного полюса Земли к мгновенному, используя преобразование [1]:  $x_\omega = x_p - \dot{y}_p r_0^{-1}$ ,  $y_\omega = y_p + \dot{x}_p r_0^{-1}$ , поскольку вторые

слагаемые на внутрисуточном интервале имеют тот же порядок, что и первые слагаемые.



**Рис. 4** Интерполяция (15-27 сентября 2011 г.) и прогноз (27-29 сентября 2011 г.) координат земного полюса. Звёздочки – данные РСДБ-наблюдений, сплошная линия – теоретическая модель.

Модель колебательного движения мгновенного полюса в связанной с Землей системе координат допускает приближенное вычисление вариаций центробежных моментов инерции, приводящих к наблюдаемому его движению. Уравнения для вычисления  $\delta J_{pr}$ ,  $\delta J_{qr}$  принимают вид:

$$\frac{d\kappa_p}{dt} + \kappa_q r_0 = f_x(x_\omega, y_\omega), \quad \frac{d\kappa_q}{dt} - \kappa_p r_0 = f_y(x_\omega, y_\omega), \quad (7)$$

Возмущающие функции  $f_x$ ,  $f_y$  вычисляются из наблюдений МСВЗ и модели (2) и включают в себя слагаемые  $(-\dot{h}_1 r_0^{-1} + h_2, \dot{h}_2 r_0^{-1} + h_1)$ , характеризующие атмосферное влияние. Данные наблюдений метеослужбы NCEP/NCAR экваториальных компонент кинетического момента атмосферы  $h_1$ ,  $h_2$  используются для выделения внутрисуточных колебаний.

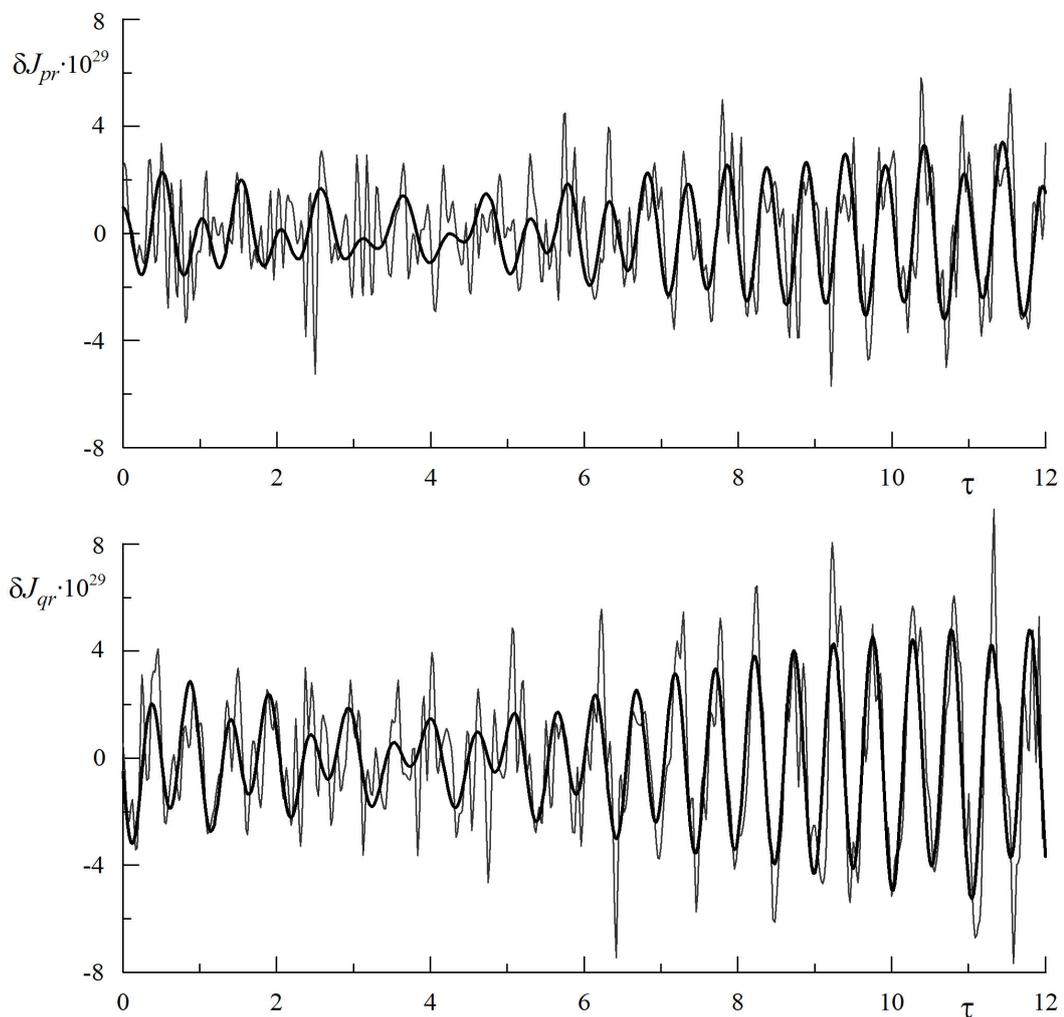
Выделяя внутрисуточные колебания, решение уравнений (7) для  $\kappa_p$ ,  $\kappa_q$  можно записать в виде:

$$\kappa_{p,q} = C_{lt}^{p,q} \cos(r_0 t + \zeta^{p,q}),$$

$$C_{lt}^{p,q} = \int \sin r_0 t \left[ -\frac{d}{r_0 dt} (f_{x,y} - \bar{f}_{x,y}) \pm (f_{y,x} - \bar{f}_{y,x}) \right] dt + C_1^{p,q}. \quad (8)$$

Здесь  $\bar{f}_x$ ,  $\bar{f}_y$  - интерполяция средних значений функций  $f_x$ ,  $f_y$  за сутки. Постоянные коэффициенты  $C_{lt}^{p,q}$  и  $\zeta^{p,q}$  - амплитуды и фазы суточных гармоник решения однородных уравнений соответственно.

Полностью воспроизведённые близсуточные вариации приливных коэффициентов  $\kappa_p$  и  $\kappa_q$  можно получить при использовании модели твердотельных приливов упругой Земли.



**Рис. 5.** Внутрисуточные колебания центробежных моментов инерции Земли, полученные в ходе моделирования (тонкая линия) в сравнении с колебаниями согласно модели, рекомендованной МСВЗ (контрастная линия) на интервале с 18 по 29 сентября 2011 г.

Используя выражения (8) при известных данных наблюдений координат земного полюса получаются внутрисуточные колебания центробежных моментов инерции  $\delta J_{pr}$ ,  $\delta J_{qr}$ . Эти колебания, приводящие к наблюдаемому процессу

движения земного полюса, представлены на рис. 5. На графике приводятся вариации  $J_{pr}$ ,  $J_{qr}$ , полученные из наблюдений колебаний координат земного полюса в сравнении с вариациями, возникающими вследствие океанических приливов, согласно модели рекомендованной МСВЗ [1].

**В четвертой главе** изучается приложение математических моделей движения полюса Земли и рассогласования dUT1 временных шкал UT1 и UTC для эфемеридно-временного обеспечения космического аппарата. Известно [20,21], что ПВЗ играют важную роль в навигации и управлении движением КА. Знание текущих значений ПВЗ необходимо для точного взаимного преобразования инерциальной системы координат j2000 в гринвичские системы координат WGS 84 и ПЗ 90-02, а также точного прогнозирования орбит КА. Однако если текущие значения матриц прецессии и нутации Земли являются хорошо прогнозируемыми и могут с высокой точностью автономно формироваться на борту КА, то координаты земного полюса  $(x_p, y_p)$ , а также рассогласование шкал времени dUT1 нуждаются в периодической коррекции и не могут с высокой точностью автономно рассчитываться в бортовой цифровой вычислительной машине КА без участия Центра управления полетом (ЦУП). Для повышения автономности КА целесообразна реализация на борту корректируемых моделей формирования ПВЗ, позволяющих существенно снизить частоту передачи этих параметров из ЦУП.

Временную поправку dUT1 можно получить из вариаций длительности суток  $l.o.d.(\varphi, t)$ , которая связана с угловой скоростью осевого вращения Земли  $r(t)$  и определяется выражением:

$$r(t) = \left[ 1 + \frac{d(UT1 - TAI)}{d(TAI)} \right] r_0 \cong \left[ 1 - \frac{l.o.d.(\varphi, t)}{86400c} \right] r_0, \quad (9)$$

где TAI – Всемирное атомное время.

Небесномеханическая модель приливных регулярных изменений скорости осевого вращения Земли описывается линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d \left[ (C^* + \delta C) l.o.d.(\varphi, t) \right]}{dt} = - \frac{D_0}{r_0} \left[ M_r^S + M_r^L + \Delta M_r(\dot{\Omega}, i) \right] \quad (10)$$

$$\frac{d[UT1 - TAI](\varphi, t)}{dt} = -D_0^{-1} l.o.d.(\varphi, t), \quad D_0 = 86400 \text{ с.}$$

Здесь  $D_0$  - средняя продолжительность суток.

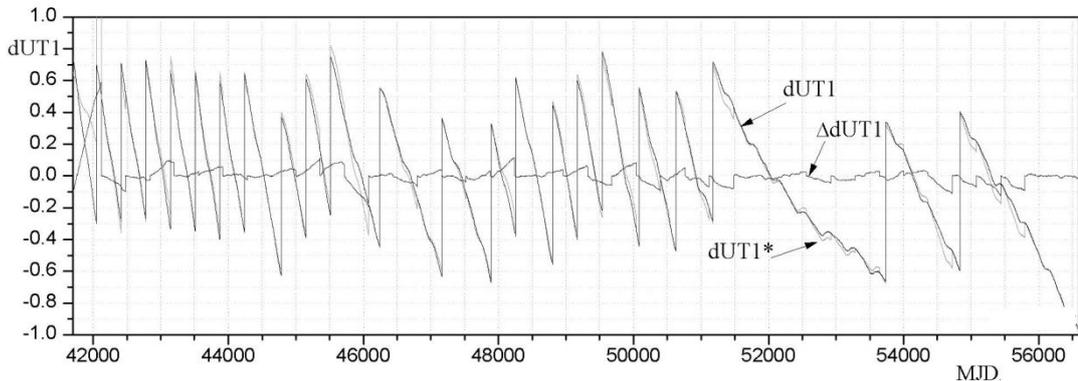
При интегрировании уравнений (10) с учётом комбинационных гармоник гравитационно-приливных сил выражение для модели вариаций вращения Земли представляются в виде:

$$l.o.d.(\tau) = \sum_{i=1}^N [a_i \cos 2\pi\nu_i\tau + b_i \sin 2\pi\nu_i\tau] + c, \quad (11)$$

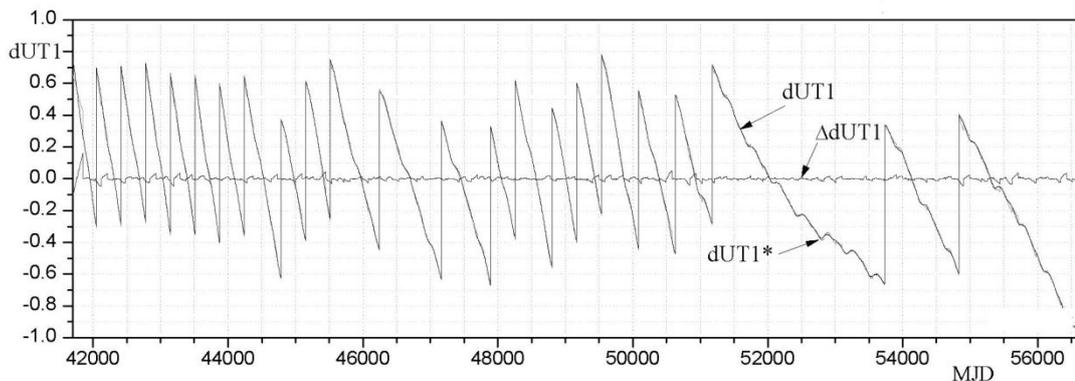
$$[UT1 - UTC](\tau) = \sum_{i=1}^N [A_i \cos 2\pi\nu_i\tau + B_i \sin 2\pi\nu_i\tau] + C_0\tau + C_1.$$

Здесь величины  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_{1,2}$ ,  $c$ , - неизвестные амплитуды соответствующих колебаний, подлежащие определению на основе данных наблюдений;  $\nu_i$  - частоты лунно-солнечного возмущения ( $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 2$ ,  $\nu_3 = 13.25$ ,  $\nu_4 = 26.68$  и т.д.);  $\tau$  - время, измеряемое стандартными годами.

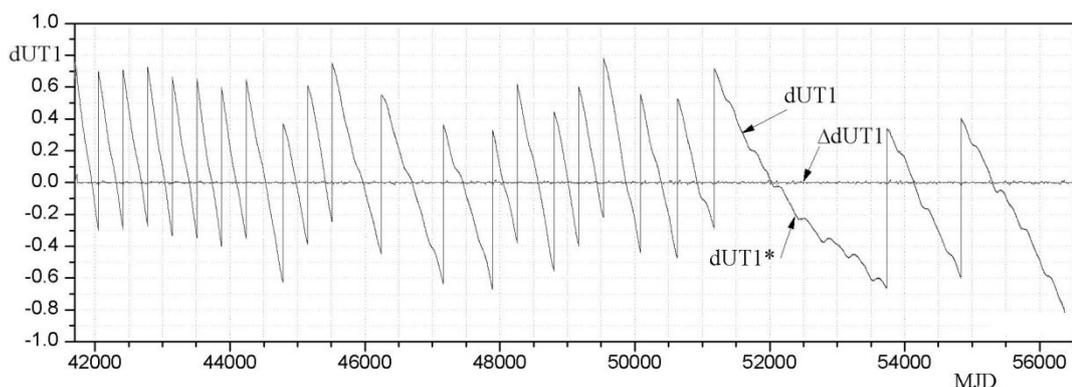
Определим зависимость точности прогноза рассогласования  $dUT1$  от длительности интервала  $T$ . На рис. 6 приведены графики реальных значений рассогласования  $dUT1$  на интервале времени от 1973 до 2012 гг., прогнозируемых значений  $dUT1^*$  и ошибки прогноза  $\Delta dUT1$  при коррекции модели с интервалом 360 суток (а), 90 суток (б), 30 суток (в), 7 суток (г).



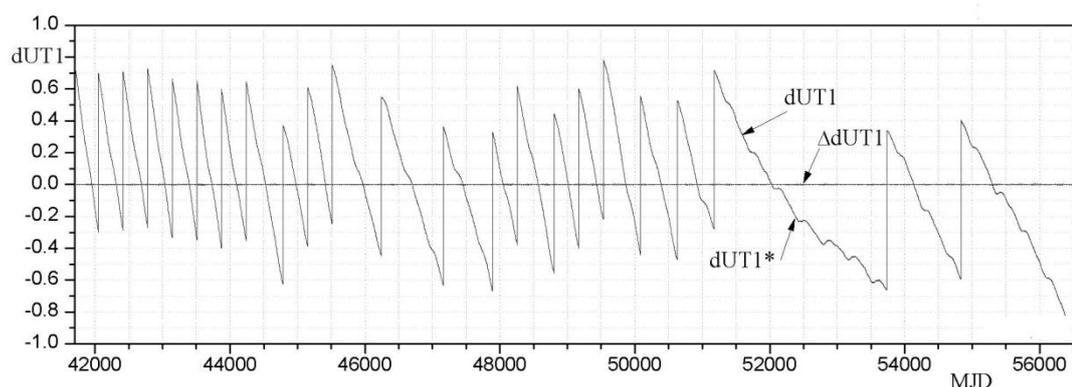
(а)



(б)



(б)



(г)

Рис. 6. Графики реальных и прогнозируемых значений  $dUT1$ ,  $dUT1^*$  и ошибок прогноза  $\Delta dUT1$  при коррекции модели с интервалом 360 суток (а), 90 суток (б), 30 суток (в) и 7 суток (г).

Из графиков следует, что при абсолютных величинах рассогласования  $dUT1$ , находящихся в диапазоне  $\pm 1$  с, ошибки годового прогноза (для  $T = 360$  суток) находятся в диапазоне  $\pm 0,1$  с, ошибки трехмесячного прогноза (для  $T = 90$  суток) находятся в диапазоне  $\pm 0,03$  с, ошибки месячного прогноза (для  $T = 30$  суток) находятся в диапазоне  $\pm 0,01$  с, ошибки недельного прогноза (для  $T = 7$  суток) - в диапазоне  $\pm 0,003$  с.

Аналогичные результаты получены и для координат полюса Земли ( $x_p, y_p$ ). Например, при абсолютных величинах смещения полюса в диапазоне  $\pm 0,3''$  ошибки годового прогноза (для  $T = 360$  сут) имеют такой же порядок  $0,3''$ . При трехмесячном прогнозе ( $T = 90$  сут) ошибки прогноза составляют величину порядка  $0,03''$ , ошибки недельного прогноза ( $T = 7$  сут) - величину  $0,01''$ .

Приведенные результаты позволяют в зависимости от требований к точности формирования на борту КА параметров координат полюса Земли и рассогласования  $dUT1$  определять необходимую частоту передачи из ЦУП на борт очередных реальных их значений для выполнения коррекции бортовой модели. Это означает,

например, что если из ЦУП на КА раз в месяц будут передаваться реальные значения текущих координат полюса Земли  $x_p, y_p$ , то при выполнении на борту КА коррекции параметров модели с использованием (11) в течение последующего месяца (до выполнения очередной коррекции) координаты полюса будут прогнозироваться с точностью, не хуже  $0.03''$ , что соответствует величине реального смещения полюса на поверхности Земли в 1 метр. При той же частоте передачи параметра  $dUT1$  точность его формирования на борту будет не хуже  $\pm 0.01$  с. Для определенности укажем, что такая точность обеспечит формирование матрицы перехода от инерциальной системы координат j2000, в которой происходит ориентация КА по звездам, к гринвичской, в которой выполняются все технические эксперименты, связанные с наблюдением земных объектов, с точностью  $0.15''$ . Такой точности достаточно для выполнения большинства навигационных задач.

#### **Основные результаты диссертационной работы:**

1. На основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля получена численно-аналитическая модель колебаний полюса Земли под воздействием лунно-солнечных гравитационно-приливных моментов сил и возмущений меняющегося со временем геопотенциала.
2. Проведён сравнительный анализ результатов численного моделирования колебаний координат земного полюса с данными измерений МСВЗ. Показано, что во время проявления аномальных флуктуаций в колебательном процессе полюса Земли при использовании уточнённой модели повышается точность прогноза координат полюса Земли в сравнении с основной моделью.
3. Проведён амплитудно-частотный анализ малопараметрической модели внутрисуточного колебательного процесса земного полюса. Даны результаты амплитудно-частотного анализа колебательного процесса полюса и вариации второй зональной гармоники  $c_{20}$  геопотенциала.
4. Рассмотрены нерегулярные явления в колебательном процессе земного полюса, которые обладают существенным разнообразием. Дано качественное объяснение этим явлениям, что способствует улучшению точности прогноза траектории движения полюса в периоды значительных аномалий.
5. На основе полученных результатов интерполяции и прогноза колебаний полюса показано, что совместное моделирование динамических процессов

(учёт временных вариаций геопотенциала) позволяет уточнить аналитическую модель и улучшить прогноз траектории движения полюса.

6. Приведены математические модели фундаментальных составляющих ПВЗ (колебаний полюса и рассогласования  $dUT1$  временных шкал  $UT1$  и  $UTC$ ). Показано, что предложенные модели обеспечивают достаточную автономность в формировании ПВЗ на борту КА. Учёт этих параметров в реальном времени необходим для решения задач навигационного обеспечения. Построены графики ошибок прогноза полюса  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  и  $\Delta dUT1$  при коррекции модели для различных интервалов времени.

#### **Основные публикации по теме диссертации:**

#### **В изданиях, рекомендованных перечнем ВАК:**

- 1) *Скоробогатых И.В., Тимошин Д.С., Филиппова А.С.* Многочастотный процесс возмущенных движений Земли в рамках задачи трех тел // Космонавтика и Ракетостроение, 2012, 4(69), с. 121-127;
- 2) *Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С.* Анализ вращательно-колебательных процессов параметров вращения Земли в коротком интервале времени // Астрон. журнал, 2013, т. 90, № 5, с. 432-440;
- 3) *Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С., Нгуен Ле Зунг* Моделирование внутрисуточного колебательного процесса земного полюса // Астроном. Журнал, 2014. Т. 91. №3, с. 251;
- 4) *Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Ларьков И.И., Рожков С.Н., Крылов С.С., Перепелкин В.В., Почукаев В.Н., Филиппова А.С.* Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в задаче спутниковой навигации // Вестник МАИ, 2014. Т. 21. №2, с. 146;
- 5) *Крылов С.С., Марков Ю.Г., Нгуен Ле Зунг, Филиппова А.С.* Внутрисуточный анализ колебаний полюса Земли // Космонавтика и ракетостроение. 2014. Т. 74. №1. С. 106;
- 6) *Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Филиппова А.С.* Численно-аналитическое моделирование возмущенных колебательных движений полюса Земли // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 6. С. 105-119;
- 7) *Крылов С.С., Марков Ю.Г., Филиппова А.С.* Временные вариации коэффициентов геопотенциала в структуре численно-аналитических моделей параметров вращения Земли // Космонавтика и ракетостроение. 2015. Т. 80.

- №1, С. 93-97;
- 8) *Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С.* Вращательно-колебательные процессы движения Земли и временные вариации коэффициентов геопотенциала // *Астрономический журнал*. 2015. Т.92.№4. С. 365-376;
- 9) *Марков Ю.Г., Крылов С.С., Перепёлкин В.В., Филиппова А.С.* К задаче о внутрисуточных нутационных движениях земного полюса // *Доклады академии наук*. 2015. Т. 465. №4 (в печати);
- 10) *Филиппова А.С.* Динамический анализ колебательного процесса полюса Земли // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. 2015. №6 (в печати).

**В других изданиях:**

- 11) *Филиппова А.С.* Модель возмущенного движения Земли на внутрисуточном интервале времени в рамках задачи трех тел // *Материалы XXXXII Всероссийского симпозиума Механика и процессы управления*. Т.2. Миасс. 18- 20 декабря 2012. С. 132-139;
- 12) *Filippova A., Markov Yu., Rykhlova L.* Rotational-oscillatory motion of the deformable Earth in the short time intervals // *Proceedings of the Journées 2013 "Systèmes de référence spatio-temporels" "Scientific developments from highly accurate space-time reference systems"*. Парижская обсерватория. 16-18.09 2013. С. 152-155;
- 13) *Markov Yu.G., Filippova A.S.* Numerical-analytical modeling of the Earth's pole oscillations // *Proceedings of the Journées 2014 "Systèmes de référence spatio-temporels" "Resent development and prospects in ground-based and space astrometry"* Обсерватория Пулково. Санкт-Петербург. 22-24.09.2014. С. 183-186;
- 14) *Филиппова А.С.* Динамический анализ колебаний координат земного полюса на коротком интервале времени // *Тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике*. Суздаль. 3-7 июля 2015 года. С. 133.

**Список использованных источников:**

- 15) IERS Annual Reports, (Frankfurt am Mein: BKG, 2001– 2003).  
<http://www.iers.org/>

- 16) Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Модель движения полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим данным // *Астрономический журнал*. 2002. Т. 79(1). С. 81-89.
- 17) Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. и др. Гравитационно-приливной механизм колебаний полюса Земли // *Астрономический журнал*. 2005. Т. 10(82). С. 950-960.
- 18) Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. др. Высокоточный прогноз движения полюса Земли // *Астрономический журнал*. 2006. Т. 4(83). С. 376-384.
- 19) Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Анализ влияния многочастотных воздействий на колебания полюса Земли // *Астрономический журнал*. 2007. Т. 84(5). С. 471-478.
- 20) Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Моделирование движения полюса Земли на коротком интервале // *ДАН*. 2009. Т. 2(425). С. 326-331.
- 21) Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Небесномеханическая модель неравномерности вращения Земли // *Космические исследования*. 2009. Т. 5(47). С. 452–459.
- 22) VLBI Observing programs: CONT'11 <http://ivs.nict.go.jp/mirror/program/>