

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу  
Зверева Николая Андреевича на тему «Моделирование одномерных  
нестационарных механо-dиффузионных процессов в  
многокомпонентных цилиндрических телах», представленную на соискание  
ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности  
1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

### 1. Структура и оформление диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников из 123 наименований и содержит 122 страницы текста, включая 52 рисунка и одну таблицу. По структуре и оформлению диссертация и автореферат диссертации соответствуют установленным требованиям.

Во введении раскрыты все основные составляющие диссертации (реферат, содержание по главам, цель, актуальность, методы, научная новизна, практическая значимость, достоверность, основные положения, выносимые на защиту, апробация работы и публикации).

Современное состояние исследований по теме диссертации проанализировано в разделе 1.1, констатировано отсутствие замкнутых решений нестационарных задач связанных уравнений механо-dиффузии для цилиндрических областей, имеющих широкие практические приложения. В разделе 1.2 сформулированы связанные линейные уравнения диффузии компонент в упругом теле с учетом тензорности коэффициентов диффузии и релаксации потоков компонент. Коэффициенты объемного расширения среды при изменении концентрации компонент служат коэффициентами связности уравнений. В разделе 1.3 эти уравнения записаны в цилиндрической системе координат с учетом некоторых ограничений на симметрию линейных физических свойств, а также обезразмерены. В разделе 1.4 записаны четыре типа граничных условий для сплошного и полого цилиндров. В разделе 1.5 описан метод сведения сформулированной граничной задачи к решению вспомогательной задачи, имеющей ортогональный базис собственных функций.

В разделе 2.1 для вспомогательной задачи, соответствующей основной задаче с каждым типом граничных условий, определен функциональный

Отдел документационного  
обеспечения МАИ

« 9 » 10 20 23.

базис вместе с трансцендентным уравнением для определения собственных значений. В разделе 2.2 показана ортогональность этого базиса для каждого типа граничных условий. В разделе 2.3 проецированием уравнений задачи на элементы ортогональных базисов первые записаны в слабой форме. В разделе 2.4 осуществлен предельный переход к задаче для сплошного цилиндра.

В разделе 3.1 решение начальной задачи представлено с использованием граничных и объемных функций Грина, для нахождения которых в разделах 3.2, 3.3 к уравнениям применено преобразование Лапласа по временной координате. В разделе 3.4 дается решение одной из граничных задач для сплошного цилиндра с использованием решения задачи Штурма – Лиувилля для вспомогательной задачи. В разделе 3.5, 3.6 сделаны предельные переходы к модели без учета релаксации потоков компонент, несвязанной модели и стационарным процессам. В разделе 3.7 полученные соотношения применены для решения задач с граничными и объемными возмущениями равновесного состояния.

В главе 4 все по тому же алгоритму проделано для задач, поставленных для полого цилиндра.

В заключении просуммированы выводы по работе.

## **2. Актуальность темы диссертации.**

Изучение нестационарных процессов с использованием связанных уравнений упругости и диффузии является актуальной научной задачей, результаты решения которой следует принимать во внимание при исследовании задач плазменной ионной имплантации материалов, лазерной ударной обработки, наводораживания металлических конструкций, процессов создания изделий микроэлектроники. В математической модели используются обобщенные уравнения диффузии, учитывающие тензорные коэффициенты диффузии и конечные времена релаксации потоков компонент. Акцент в работе сделан на получении замкнутых решений различных осесимметричных краевых задач для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, позволяющих понять протекание закономерностей распространения начальных возмущений в зависимости от параметров.

## **3. Теоретические результаты диссертации и их научная новизна.**

Дано решение в квадратурах задач распространения нестационарных начальных возмущений в связанной системе линейных уравнений диффузии

и динамики упругой среды. Рассмотрены задачи для сплошного и полого цилиндров в осесимметрической постановке с различными граничными условиями. Использована обобщенная модель диффузии, учитывающая тензорные коэффициенты диффузии и конечные времена релаксации потоков компонент. Зависимость решения от времени записана с использованием функций Грина, а для представления зависимости от координаты использованы разложения по собственным функциям упругодиффузионного оператора для подходящих граничных условий, обеспечивающих разрешимость задачи Штурма – Лиувилля. Данный метод позволил выполнить обратное преобразование Лапласа по времени для нахождения явного вида функций Грина. Это представляется главным новым научным достижением работы, дающим инструмент для исследования закономерностей распространения начальных возмущений на различных пространственных и временных масштабах в зависимости от физических параметров модели. Эти результаты указаны в диссертации и автореферате в качестве основных положений, выносимых на защиту.

#### **4. Практическая значимость результатов диссертации.**

Полученные аналитические решения нестационарных линейных краевых задач для связанных уравнений диффузии в упругом теле могут быть использованы для изучения плазменной ионной имплантации материалов, лазерной ударной обработки, наводораживания металлических конструкций, процессов создания изделий микроэлектроники в широком диапазоне изменения характерных времен и масштабов.

**5. Достоверность результатов диссертации.** Для решения нестационарных линейных краевых задач для связанных уравнений диффузии в упругом теле использованы апробированные методы математической физики. Предельными переходами установлено соответствие полученных решений исследованным ранее частным случаям уравнений без учета релаксации потоков компонент, несвязанной модели и стационарной задаче. Все необходимые аналитические преобразования выполнены с применением компьютерной алгебры, благодаря чему минимизирована вероятность возможных ошибок.

**6. Апробация работы.** Диссертационная работа Н.А. Зверева в достаточной мере опубликована и апробирована. Основные положения работы опубликованы в пяти рецензируемых научных журналах, реферируемых международными базами цитирования, большинство из которых рекомендовано ВАК для публикации результатов по группе

специальностей, включающей механику деформируемого твердого тела, по физико-математическим наукам. Работа докладывалась на двух десятках международных и всероссийских конференций по профилю механики и математического моделирования.

### **7. Вопросы и замечания по содержанию работы.**

1. В разделах 3 и 4 не сказано, сколько членов рядов рассматривалось для представления функций  $\Psi_{00}, \Psi_{01}$  и не приведены элементы спектра  $\lambda$ , увидеть которые было бы не лишним для промежуточного контроля.

2. Отметим, что вспомогательная краевая задача в главах 3 и 4, отвечающая условию  $c_{12} = 1$ , соответствует несжимаемому телу. Данный предельный случай также представляет интерес с точки зрения протекания диффузионных процессов в подобных условиях. Какими качественными особенностями эти процессы обладают?

3. Можно ли убедиться, что профили возмущений концентрации любой диффундирующей компоненты на рисунках глав 3 и 4 удовлетворяют закону ее сохранения (в теле и окружающем пространстве)? Это могло бы помочь апостериорному контролю корректности полученных решений.

4. В главах 3 и 4 не хватает систематичности исследования особенностей протекания нестационарных процессов на различных пространственных и временных масштабах. Было бы целесообразно изучить поведение решений в ответ на начальный П-образный импульс фиксированной мощности, но с различными значениями амплитуды и длительности, на различных масштабах координаты. Вероятно, полученные решения не приспособлены для воспроизведения решения в широком диапазоне изменений временной и пространственной координат, для чего целесообразно использовать функциональные базисы с переменным разрешением. Отметим, что эта особенность характерна именно для связанных процессов диффузии в деформируемом теле, имеющих сильно различающиеся характерные времена.

Высказанные замечания не ставят под сомнение результаты диссертации, выносимые на защиту.

### **8. Заключение по диссертации.**

Оценивая работу в целом, считаю, что диссертационная работа Зверева Николая Андреевича на тему «Моделирование одномерных нестационарных механодиффузионных процессов в многокомпонентных цилиндрических телах», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-

математических наук, является завершённым научным исследованием, выполненным на высоком научно-методическом уровне, соответствует специальности 1.1.8 – «Механика деформируемого твёрдого тела» и имеет важное научное и практическое значение для изучения закономерностей протекания диффузионных процессов в упругом теле в широком диапазоне изменения характерных времен и масштабов. Рецензируемая диссертационная работа отвечает всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24.03.2013 года (в редакции от 28.08.2017 года), а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Официальный оппонент:

заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твёрдого тела «Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук» («ИМСС УрО РАН») — филиала ФГБУН Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, доктор физико-математических наук (01.02.04), доцент

 Келлер Илья Эрнстович

Служебный телефон: +7(342)2378307 E-mail: kie@icmm.ru

Служебный адрес: 614013, г.Пермь, ул. Акад. Королёва, д.1, ИМСС УрО РАН

2 октября 2023 года

Личную подпись \_\_\_\_\_  
удостоверяю \_\_\_\_\_  
Специалист по кадрам \_\_\_\_\_



С отзывом

ознакомлен

09.10.23