На правах рукописи

СУВОРОВ ЕВГЕНИЙ МИХАЙЛОВИЧ

ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГОЕ МОМЕНТНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент, **Федотенков Григорий Валерьевич**

Официальные оппоненты: **Солдатенков Иван Алексеевич,** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Учреждения Российской академии наук Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

Земсков Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), доцент.

Ведущая организация: **ФГБОУВПО "Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова" (НИИ механики МГУ)**

Защита состоится «05» июня 2013 г. в 15^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г.Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Автореферат разослан «___» мая 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Федотенков Г.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В настоящее время наиболее исследованными являются задачи о распространении нестационарных возмущений в классических упругих средах. При этом практически отсутствуют публикации по проблеме распространения нестационарных волн в упругих средах с учетом внутреннего момента количества движения (моментные среды). Наличие внутреннего момента количества движения связано с тем, что сплошная среда с микроскопической точки зрения состоит из частиц, обладающих согласованным моментом количества движения даже при нулевой макроскопической скорости. К таким средам относятся гранулированные среды, среды с гиромагнитными свойствами, магнитные жидкости, жидкие кристаллы и т.д. В последнее время, в связи с бурным развитием технологий, появилась насущная потребность в развитии теорий, которые с большой степенью точности описывают процессы деформирования, проходящие в мелкозернистых и нанорармерных средах, волновые процессы в кристаллах и поликристаллических структурах, т.е. в средах, где особенностями строения на кристаллическом и наноуровне уже нельзя пренебречь. Классическая теория упругости не описывает с необходимой точностью процессы в подобных материалах. Поэтому исследование нестационарных процессов в моментных средах представляет собой актуальную проблему.

Целью диссертационной работы является постановка и построение аналитического решения плоской задачи о распространении нестационарных граничных возмущений в моментной упругой среде – континууме Коссера.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

1. Дана постановка и получено аналитическое решение новой плоской нестационарной задачи типа Лэмба для упругого моментного полупространства;

2. Разработана методика и реализован алгоритм решения задач о распространении поверхностных возмущений при воздействии поверхностной нагрузки на упругое моментное полупространство, заполненное средой Коссера.

Практическое значение работы. Полученные результаты обеспечивают возможность исследования поведения различных конструкций из композиционных материалов при действии на них нестационарных нагрузок, адекватном описании процессов распространения волн в материалах, обладающих микроструктурой. В первую очередь, указанные возможности имеют актуальное значение при создании современных объектов авиационной и ракетно-космической техники (где переход на использование композиционных материалов является критически важным), но, вместе с тем, важны и востребованы и в других отраслях промышленности (в том числе – автомобильной, энергетической, машиностроительной).

Достоверность и обоснованность научных положений и полученных результатов подтверждается использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела, применением для решения начально-краевых задач строгих математических методов, а также сравнением результатов с известными решениями для классической упругой среды.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертационной работы докладывались на

- Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Ярополец, Московская обл., 2011, 2012, 2013 г.г.);
- X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 23 - 30 августа 2011 г.);
- Московской молодежной научно-практической конференции «Инновация в авиации и космонавтике» (Москва, МАИ, 17 – 20 апреля 2012 г.);
- Ломоносовских чтениях (Москва, МГУ, 16 – 20 апреля 2012 г.);
- Украинско-российском научном семинаре «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленных воздействием полей различной физической природы» (Украина, Львов, 10 – 15 сентября 2012 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в девяти печатных работах, в том числе в двух статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Объём и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и содержит 117 страниц. Список используемой литературы включает 84 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность научных исследований, изложенных в диссертации, а также сформулированы цель и задачи, определена научная новизна, практическая и теоретическая ценность диссертационной работы.

В первой главе приведен обзор литературы, определена проблема получения аналитического решения нестационарных задач механики деформируемого твердого тела. Отмечено, что наибольшее развитие общей теории несимметричной упругости получили в конце 50-х – 70-х годов прошлого столетия В. Новацкий, В.Т. Костер, Э.Л. Аэро и Е.В. Кувшинский, Р.Д. Миндлин и Г.Ф. Тирстен, Р.А. Тупин, И.А. Кунин, В.А.Пальмов, А.И. Лурье и др. Современные исследования задач моментных сред принадлежат следующим авторам: С.М. Белоносову, Г.Л. Бровко, Г.А. Ванину, В.И. Ерофееву, В.В. Корепанову, М.А. Кулешу, В.П. Матвеенко, Б.Е. Победре, А.Г. Угодчикову, Kumar Rajneesh, Liu Jun, Nistor I., Suiker A.S.J. Некоторые нестационарные задачи для моментных сред исследованы в работах А.А. Саркисяна, Birsan Mircea, Gheorghita Vitali, Han S.Y.

Здесь же приведена полная система уравнений несимметричной теории упругости, в которую входят линейные векторные уравнения движения в перемещениях, геометрические и физические соотношения. Сформулированы начальные и основные граничные условия для среды Коссера. Построено интегральное представление нестационарного напряженно-деформированного состояния упругого моментного полупространство с использованием функций влияния.

Дана постановка плоской задачи типа Лэмба при учете асимметричных свойств сплошной упругой среды (рис. 1). Здесь $\delta(x)$, $\delta(\tau)$ - дельта-функции Дирака от пространственной координаты и времени. Для описания движения используется общий случай среды Коссера, уравнения движения которой без учета массовых сил и моментов в безразмерном виде записываются так

$$\begin{aligned} &(1-\eta_1^{-2}-\alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+(\eta_1^{-2}+\alpha)\Delta\mathbf{u}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}=\ddot{\mathbf{u}},\\ &\eta_2^{-2}\Delta\boldsymbol{\omega}+2\alpha\beta\operatorname{rot}\mathbf{u}-4\alpha\beta\boldsymbol{\omega}=\ddot{\boldsymbol{\omega}}, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}=(u,0,w)^T$, $\boldsymbol{\omega}=(0,\omega,0)^T$ - векторы перемещений и микроповорота; η_1, η_2, α, β − безразмерные параметры, зависящие от свойств материала среды. Точками здесь и далее обозначаются производные по безразмерному времени τ.

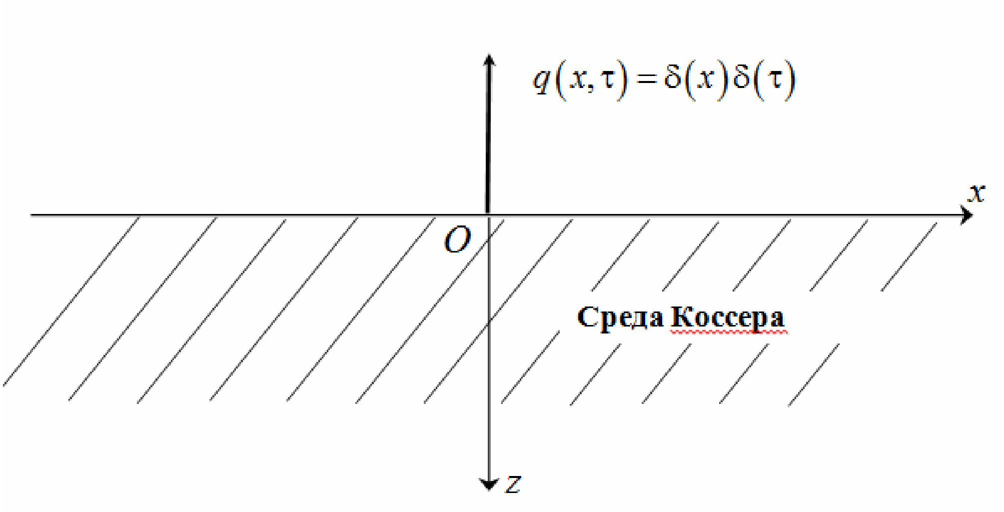

Рис. 1.

Приведены соответствующие геометрические и физические соотношения:

$$
\begin{gathered}
\gamma_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\ \gamma_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\ \gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\omega,\ \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}-\omega,\ \chi_{xy}=\frac{\partial \omega}{\partial x},\ \chi_{zy}=\frac{\partial \omega}{\partial z},\\
\sigma_{xx}=\gamma_{xx}+\vartheta\gamma_{zz},\ \sigma_{yy}=\vartheta(\gamma_{xx}+\gamma_{zz}),\ \sigma_{zz}=\gamma_{zz}+\vartheta\gamma_{xx},\\
\mu_{xy}=\chi_{xy},\ \mu_{yz}=\kappa\chi_{zy},\ \mu_{yx}=\kappa\chi_{xy},\ \mu_{zy}=\chi_{zy},\ \vartheta=1-2\eta_1^{-2},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $\gamma_{\xi\varsigma}$, $\chi_{\xi\varsigma}$, $\sigma_{\xi\varsigma}$, $\mu_{\xi\varsigma}$ $(\xi,\varsigma=x,y,z)$ - ненулевые физические компоненты тензоров деформаций, изгиба-кручения, напряжений и моментных напряжений.

В начальный момент времени полупространство находится в невозмущенном состоянии, что приводит к нулевым начальным условиям

$$
u\big|_{\tau=0}=\dot{u}\big|_{\tau=0}=w\big|_{\tau=0}=\dot{w}\big|_{\tau=0}=\omega\big|_{\tau=0}=\dot{\omega}\big|_{\tau=0}=0. \tag{3}
$$

На границе полупространства отсутствуют касательные и моментные напряжения, а нормальные напряжения равны внешней нагрузке

$$
\sigma_{zx}\big|_{z=0}=0,\ \mu_{zy}\big|_{z=0}=0,\ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=\delta(x)\delta(\tau). \tag{4}
$$

В бесконечно удаленной точке возмущения отсутствуют.

Вектор перемещений раскладывается на сумму потенциальной и соленоидальной составляющих. Подстановка этого разложения в уравнения (1) приводит к трем уравнениям относительно скалярного и векторного потенциалов и ненулевой компоненты вектора микроповорота

$$\Delta\varphi - \ddot{\varphi} = 0,\ \Delta\psi - \eta_1^2\ddot{\psi} = -\alpha\eta_1^2 f,\ \Delta\omega - \eta_2^2\ddot{\omega} = 2\alpha\beta\eta_2^2 f, \tag{5}$$

где $f = \Delta\psi + 2\omega$, $\Delta = \partial/\partial x + \partial/\partial z$; φ, ψ - скалярный и векторный потенциалы, которые связаны с компонентами вектора перемещений следующими соотношениями:

$$u = \partial\varphi/\partial x - \partial\psi/\partial z,\ w = \partial\varphi/\partial z + \partial\psi/\partial x. \tag{6}$$

Уравнения (5) с начальными условиями

$$\varphi\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}\big|_{\tau=0} = \psi\big|_{\tau=0} = \dot{\psi}\big|_{\tau=0} = \omega\big|_{\tau=0} = \dot{\omega}\big|_{\tau=0} = 0 \tag{7}$$

и граничными условиями (4), записанными через потенциалы с помощью соотношений (2) и (6)

$$\begin{gathered}\left.\left[\Delta\varphi - 2\eta_1^{-2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}\right)\right]\right|_{z=0} = 0,\\ \left.\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right)\right|_{z=0} = \alpha\eta_1^2 f\big|_{z=0},\ \left.\frac{\partial\omega}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

с учетом отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке составляют замкнутую математическую модель плоской задачи типа Лэмба для упругого моментного полупространства.

Во второй главе для решения поставленной задачи используется метод малого параметра. Для всех известных материалов с найденными упруго моментными механическими характеристиками, значение безразмерного параметра материала α мало по сравнению с единицей, поэтому его можно принять в качестве естественного малого параметра задачи.

Разложим компоненты векторов перемещений и микроповоротов в ряды по параметру α:

$$\begin{gathered}u(x,z,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x,z,\tau)\alpha^m,\ w(x,z,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x,z,\tau)\alpha^m,\\ \omega(x,z,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_k(x,z,\tau)\alpha^m.\end{gathered} \tag{9}$$

Скалярный и векторный потенциалы также представим в виде разложений:

$$\varphi(x,z,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(x,z,\tau)\alpha^m,\ \psi(x,z,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m(x,z,\tau)\alpha^m \tag{10}$$

Искомые поверхностные функции влияния упругого моментного полупространства являются решениями задачи (5) – (8) на границе $z=0$. Для них введены обозначения

$$\begin{gathered}U(x,\tau)=u(x,0,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}U_m(x,\tau)\alpha^m,\ W(x,\tau)=w(x,0,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}W_m(x,\tau)\alpha^m\\ \Omega(x,\tau)=\omega(x,0,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\Omega_m(x,\tau)\alpha^m.\end{gathered} \tag{11}$$

Из (9), (10), (5), (7), (8) следует рекуррентная последовательность задач для определения коэффициентов рядов (10):

при $m=0$

$$\begin{gathered}\Delta\varphi_0=\ddot{\varphi}_0,\ \Delta\psi_0=\eta_1^2\ddot{\psi}_0,\ \Delta\omega_0=\eta_2^2\ddot{\omega}_0,\\ \varphi_0(x,z,0)=\dot{\varphi}_0(x,z,0)=\psi_0(x,z,0)=\dot{\psi}_0(x,z,0)=0,\\ \Delta\varphi_0-2\eta_1^{-2}\left.\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z\partial x}\right)\right|_{z=0}=\delta(x)\delta(z),\\ \left.\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z\partial x}\right|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial\omega_0}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\end{gathered} \tag{12}$$

при $m>0$

$$\begin{gathered}\Delta\varphi_m-\ddot{\varphi}_m=0,\ \Delta\psi_m-\eta_1^2\ddot{\psi}_m=-\eta_1^2 f_{m-1},\ \Delta\omega_m-\eta_2^2\ddot{\omega}_m=2\beta\eta_2^2 f_{m-1},\\ \varphi_m(x,z,0)=\dot{\varphi}_m(x,z,0)=\psi_m(x,z,0)=\dot{\psi}_m(x,z,0)=0,\\ \Delta\varphi_m-2\eta_1^{-2}\left.\left(\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_m}{\partial z\partial x}\right)\right|_{z=0}=0,\\ \left.\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_m}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial z\partial x}\right|_{z=0}=\eta_1^2 f_{m-1},\ \left.\frac{\partial\omega_m}{\partial z}\right|_{z=0}=0.\end{gathered} \tag{13}$$

Для решения рекуррентной последовательности задач (12) – (13) используются интегральные преобразования Фурье по координате x и Лапласа по времени τ (индексами «F» и «L» обозначаются изображения по Фурье и Лапласу соответственно; q - параметр преобразования Фурье, а s - преобразования Лапласа).

Тогда в пространстве изображений Фурье-Лапласа аналог системы (12) – (13) приобретает вид:

при $m=0$

$$L_1\left(\varphi_0^{FL}\right)=0,\ L_2\left(\psi_0^{FL}\right)=0,\ L_3\left(\omega_0^{FL}\right)=0,$$
$$M_1\left(\varphi_0^{FL},\psi_0^{FL}\right)\Big|_{z=0}=1,\ M_2\left(\varphi_0^{FL},\psi_0^{FL}\right)\Big|_{z=0}=0,\ M_3\left(\omega_0^{FL}\right)\Big|_{z=0}=0, \tag{14}$$

при $m>0$

$$L_1\left(\varphi_m^{FL}\right)=0,\ L_2\left(\psi_m^{FL}\right)=-\eta_1^2 f_{m-1}^{FL},\ L_3\left(\omega_m^{FL}\right)=2\beta\eta_2^2 f_{m-1}^{FL},$$
$$M_1\left(\varphi_m^{FL},\psi_m^{FL}\right)\Big|_{z=0}=0,\ M_2\left(\varphi_m^{FL},\psi_m^{FL}\right)\Big|_{z=0}=0,\ M_3\left(\omega_m^{FL}\right)\Big|_{z=0}=0, \tag{15}$$

где

$$L_1(\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\left(q^2+s^2\right)\varphi,\ L_2(\psi)=\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\left(q^2+\eta_1^2 s^2\right)\psi,$$
$$L_3(\omega)=\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}-\left(q^2+\eta_2^2 s^2\right)\omega,$$
$$M_1(\varphi,\psi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+q^2\left(2\eta_1^{-2}-1\right)\varphi-2i\eta_1^{-2}q\frac{\partial\psi}{\partial z},$$
$$M_2(\varphi,\psi)=-q^2\psi-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-2iq\frac{\partial\varphi}{\partial z},\ M_3(\omega)=\frac{\partial\omega}{\partial z},$$
$$f_{m-1}^{FL}=\frac{\partial^2\psi_{m-1}^{FL}}{\partial z^2}-q^2\psi_{m-1}^{FL}+2\omega_{m-1}^{FL}.$$

Изображения коэффициентов рядов (11) разложений поверхностных функций влияния связаны с решениями задач (14) – (15) следующими соотношениями:

$$U_m^{FL}=\left(-iq\varphi_m^{FL}-\frac{\partial\psi_m^{FL}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0},\ W_m^{FL}=\left(\frac{\partial\varphi_m^{FL}}{\partial z}-iq\psi_m^{FL}\right)\Bigg|_{z=0},\ \Omega_m^{FL}=\omega_m^{FL}\Big|_{z=0}. \tag{16}$$

<u>В третьей главе</u> определяются изображения объемных и поверхностных функции Грина задач (12) – (13). Для них введены следующие обозначения: $\Gamma_{k\varphi},\Gamma_{k\psi},\Gamma_{k\omega}\ (k=1,2,3)$. В соответствии с номером «k» в обозначениях этих функций их изображения являются решениями трех задач:

$$
\begin{aligned}
&L_1\left(\Gamma_{k\varphi}^{FL}\right)=0,\ L_2\left(\Gamma_{k\psi}^{FL}\right)=\delta_{k1}\delta\left(z-\xi\right),\ L_3\left(\Gamma_{k\omega}^{FL}\right)=\delta_{k2}\delta\left(z-\xi\right),\\
&M_1\left(\Gamma_{k\varphi}^{FL},\Gamma_{k\psi}^{FL}\right)\Big|_{z=0}=0,\ M_2\left(\Gamma_{k\varphi}^{FL},\Gamma_{k\psi}^{FL}\right)\Big|_{z=0}=\delta_{k1},\ M_3\left(\Gamma_{k\omega}^{FL}\right)\Big|_{z=0}=0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Здесь δ_{kj} - символ Кронекера, в котором значение индекса «k» соответствует номеру задачи.

Функции Грина с индексом $k=1,2$ соответствуют решениям задач о воздействии единичных объемных возмущений $\delta\left(x\right)\delta\left(\tau\right)\delta\left(z-\xi\right)$ в точке с координатами $x=0,\ z=\xi$ при однородных граничных условиях, а с $k=3$ - нормальной единичной поверхностной нагрузки $\delta\left(x\right)\delta\left(\tau\right)$ в точке с координатами $x=0,\ z=0$ при однородных уравнениях. Поэтому для них приняты обозначения: объемные функции Грина первого и второго типа и поверхностные функции Грина соответственно. Изображения функций Грина как решения задач (17) имеют следующий вид.

Объемные функции Грина I типа:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{1\varphi}^{FL}=\Gamma_{1\varphi,1}^{FL}\delta\left(\xi\right)e^{-k_0 z}+\Gamma_{1\varphi,2}^{FL}e^{-k_0 z}e^{-k_1\xi},\\
&\Gamma_{1\psi}^{FL}=\Gamma_{1\psi,1}^{FL}e^{-k_1\left(z+\xi\right)}+\Gamma_{1\psi,2}^{FL}\delta\left(\xi\right)e^{-k_1 z}+\\
&\qquad+\Gamma_{1\psi,3}^{FL}\left[e^{k_1\left(z-\xi\right)}H\left(\xi-z\right)+e^{k_1\left(\xi-z\right)}H\left(z-\xi\right)\right],\\
&\Gamma_{1\omega}^{FL}=0,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где

$$
\Gamma_{1\varphi,1}^{FL}=\frac{2iqk_1}{R_2},\ \Gamma_{1\varphi,2}^{FL}=-\frac{2iqk_3^2}{R_2},\ \Gamma_{1\psi,1}^{FL}=\frac{\overline{R}_2}{2k_1R_2},\ \Gamma_{1\psi,2}^{FL}=-\frac{k_3^2}{R_2},\ \Gamma_{1\psi,3}^{FL}=-\frac{1}{2k_1}.
$$

Объемные функции Грина II типа:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{2\varphi}^{FL}=0,\ \Gamma_{2\psi}^{FL}=0,\\
&\Gamma_{2\omega}^{FL}=\Gamma_{2\omega,1}^{FL}\left[e^{-k_2\left(z+\xi\right)}+e^{k_2\left(z-\xi\right)}H\left(\xi-z\right)+e^{k_2\left(\xi-z\right)}H\left(z-\xi\right)\right],
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где

$$
\Gamma_{2\omega,1}^{FL}=-\frac{1}{2k_2}.
$$

Поверхностные функции Грина:

$$\Gamma_{3\varphi}^{FL} = \Gamma_{3\varphi,1}^{FL} e^{-k_0 z},\ \Gamma_{3\psi}^{FL} = \Gamma_{3\psi,1}^{FL} e^{-k_1 z},\ \Gamma_{3\omega}^{FL} = 0, \tag{20}$$

где

$$\Gamma_{3\varphi,1}^{FL} = \frac{2iqk_2}{R_2},\ \Gamma_{3\psi,1}^{FL} = -\frac{k_3^2}{R_2} = \Gamma_{1\psi,2}^{FL}.$$

Используя полученные изображения функций Грина (18) – (20), основываясь на принципе суперпозиции и используя свойства дельта – функции получены интегральные представления для изображений коэффициентов рядов (9) – (10):

$$\begin{gathered}
\varphi_m^{FL}(q,s,z) = -\eta_1^2 \Gamma_{1\varphi,2}^{FL} I_{m-1,1}^{-}(q,s,0,\infty) e^{-k_0 z}, \\
\psi_m^{FL}(q,s,z) = -\eta_1^2 \Big[\Gamma_{1\psi,1}^{FL} I_{m-1,1}^{-}(q,s,0,\infty) e^{-k_1 z} + \\
+ \Gamma_{1\psi,3}^{FL} I_{m-1,1}^{-}(q,s,z,\infty) e^{k_1 z} + \Gamma_{1\psi,4}^{FL} I_{m-1,1}^{+}(q,s,0,z) e^{-k_1 z} \Big], \\
\omega_m^{FL}(q,s,z) = -2\beta \eta_2^2 \Gamma_{2\omega,1}^{FL} \Big[I_{m-1,2}^{-}(q,s,0,\infty) e^{-k_2 z} + \\
+ I_{m-1,2}^{-}(q,s,z,\infty) e^{k_2 z} + I_{m-1,2}^{+}(q,s,0,z) e^{-k_2 z} \Big],
\end{gathered} \tag{21}$$

где

$$I_{m-1,j}^{\pm}(q,s,\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{m-1}^{FL}(q,s,\xi) e^{\pm k_j \xi} d\xi,\ j = 1,2.$$

<u>В четвертой главе</u> построены оригиналы поверхностных функций влияния упругого моментного полупространства в случае плоской постановки задачи. Для этого сначала определяются изображения нулевых коэффициентов рядов (9) как решения задачи (12):

$$\varphi_0^{FL} = \eta_1^2 \frac{k_3^2}{R_2(q^2,s^2)} e^{-k_0(q^2,s^2)z},\ \psi_0^{FL} = \eta_1^2 \frac{2iqk_0(q^2,s^2)}{R_2(q^2,s^2)} e^{-k_1(q^2,s^2)z},\ \omega_0^{FL} = 0 \tag{22}$$

С помощью (16) и метода совместного обращения изображений Фурье-Лапласа [2] построены выражения для оригиналов нулевых членов рядов разложений (11):

$$W_0(x,\tau) = \sum_{k=0}^{1} W_{0k}(x,\tau) H(\tau - \eta_k |x|),\ U_0(x,\tau) = U_{00}(x,\tau) H(\tau - |x|) \tag{23}$$

где

$$W_{00}(x,\tau)=\frac{\eta_1^4}{\pi}\frac{x^2\left(2\tau^2-\eta_1^2x^2\right)^2\sqrt{\tau^2-x^2}}{P_4\left(x^2,\tau^2\right)}$$

$$W_{01}(x,\tau)=\frac{\eta_1^4}{\pi}\frac{4x^2\tau^2\left(\tau^2-6\eta_1^2x^2\right)}{P_4\left(x^2,\tau^2\right)}\sqrt{\tau^2-\eta_1^2x^2}$$

$$U_{00}(x,\tau)=-\frac{4\eta_1^2\left(\eta_1^2-2\right)}{\pi}\frac{\tau^3x^2\sqrt{\tau^2-x^2}\sqrt{\tau^2-\eta_1^2x^2}}{P_4\left(x^2,\tau^2\right)}$$

$$P_4(x,\tau)=\left(\eta_1^2x-2\tau\right)^4-16\tau^2(\tau-x)\left(\tau-\eta_1^2x\right)$$

Замечено, что решения (23) совпадают с известным решением плоской задачи Лэмба для линейно упругого полупространства. При этом микровращения в среде отсутствуют: $\Omega_0(x,\tau)\equiv 0$. Показано, что на всей искомой области определения искомых оригиналов $P_4(x,\tau)$, кроме $x=0$, имеет один действительный корень $x=c_R\tau$, где c_R - скорость волны Рэлея и решения (23) имеют степенную особенность порядка (-1) на фронтах волны Рэлея: $x=\pm c_R\tau$.

С учетом (16), (21) и свойств дельта-функции, получены выражения для изображений коэффициентов рядов (11) при $m>0$:

$$\begin{aligned}
U_m^{FL}&=\eta_1^2 I_{m-1,1}^{-}(q,s,0,\infty)\left[iq\Gamma_{1\varphi,2}^{FL}+k_1\left(\Gamma_{1\psi,3}^{FL}-\Gamma_{1\psi,1}^{FL}\right)\right]\\
W_m^{FL}&=\eta_1^2 I_{m-1,1}^{-}(q,s,0,\infty)\left[k_0\Gamma_{1\varphi,2}^{FL}+iq\left(\Gamma_{1\psi,1}^{FL}+\Gamma_{1\psi,3}^{FL}\right)\right]\\
\Omega_m^{FL}&=4\beta\eta_2^2\Gamma_{2\omega,1}^{FL}I_{m-1,2}^{-}(q,s,0,\infty)
\end{aligned}\tag{24}$$

Для построения оригиналов (24) использован метод совместного обращения Фурье – Лапласа [2].

Получены следующие выражения для оригиналов первых членов рядов разложений (11):

$$W_1(x,\tau)=\sum_{k=0}^{1}W_{1k}(x,\tau)H\left(\tau-\eta_k|x|\right),\ U_1(x,\tau)=U_{10}(x,\tau)H\left(\tau-|x|\right)\tag{25}$$

где

$$W_{10}(x,\tau)=\frac{16\eta_1^8}{\pi}\frac{\tau^4x^4\left(x^2-\tau^2\right)\sqrt{\tau^2-x^2}\left(2\tau^2-\eta_1^2x^2\right)^2}{P_4^2\left(x^2,\tau^2\right)}$$

$$W_{12}(x,\tau)=\frac{2\eta_1^8}{\pi}\frac{\tau^2x^4\left(\tau^2-x^2\right)R_{22}^2\left(x^2,\tau^2\right)}{P_4^2\left(x^2,\tau^2\right)},\ W_{11}(x,\tau)=W_{12}(x,\tau)-W_{10}(x,\tau)$$

$$U_{10}(x,\tau)=\frac{\eta_1^8}{\pi}\frac{\tau x^4\sqrt{\tau^2-x^2}\left(2\tau^2-\eta_1^2x^2\right)P_1(x^2,\tau^2)}{\sqrt{\eta_1^2x^2-\tau^2}\,P_4^2\left(x^2,\tau^2\right)}$$

$$R_{22}(x,\tau)=\left(\eta_1^2x-2\tau\right)^2+4\tau\sqrt{\tau-x}\sqrt{\tau-\eta_1^2x}$$

$$P_1(x,\tau)=\eta_1^8x^8-16\tau^6\left(x^2-2\tau^2\right)+24\eta_1^2x^2\tau^4\left(\eta_1^2x^2-2\tau^2\right)-8\eta_1^2x^4\tau^2\left(\eta_1^4x^2-2\tau^2\right)$$

$$\Omega_1(x,\tau)=\begin{cases}0 & \left(\tau/|x|<\eta_2\right)\\ \int\limits_{\eta_2}^{\tau/|x|}\tilde{F}_{12}(x,t)dt & \left(\eta_2<\tau/|x|<\eta_0\right)\\ \bar{F}_{12}+\int\limits_{\eta_0}^{\tau/|x|}\tilde{F}_{13}(x,t)dt & \left(\eta_0<\tau/|x|<\eta_1\right)\\ \bar{F}_{12}+\bar{F}_{13}+\int\limits_{\eta_1}^{\tau/|x|}\tilde{F}_{14}(x,t)dt & \left(\tau/|x|>\eta_1\right)\end{cases}\qquad(26)$$

где

$$\bar{F}_{12}=\int\limits_{\eta_2|x|}^{\eta_0|x|}\tilde{F}_{12}(x,t)dt,\ \bar{F}_{13}=\int\limits_{\eta_0|x|}^{\eta_1|x|}\tilde{F}_{13}(x,t)dt$$

$$\tilde{F}_{12}(x,\tau)=\frac{4i\beta\eta_1^4\eta_2^2\tau x^2R_{21}\left(x^2,\tau^2\right)}{\left(\eta_1^2-\eta_2^2\right)\sqrt{\tau^2-\eta_2^2x^2}\,P_4\left(x^2,\tau^2\right)}\sqrt{x^2-\tau^2}\sqrt{\eta_1^2x^2-\tau^2}$$

$$\tilde{F}_{13}(x,\tau)=-\frac{4i\beta\eta_1^4\eta_2^2\tau x^2\sqrt{\tau^2-x^2}\,P_5\left(x^2,\tau^2\right)}{\left(\eta_1^2-\eta_2^2\right)\sqrt{\tau^2-\eta_2^2x^2}\,P_4\left(x^2,\tau^2\right)}$$

$$\tilde{F}_{14}(x,\tau)=-\frac{4i\beta\eta_1^4\eta_2^2\tau x^2\sqrt{\tau^2-x^2}\,P_6\left(x^2,\tau^2\right)R_{22}\left(x^2,\tau^2\right)}{\left(\eta_1^2-\eta_2^2\right)\sqrt{\tau^2-\eta_2^2x^2}\,P_4\left(x^2,\tau^2\right)}$$

$$P_5(x,\tau)=4\tau\sqrt{\tau-x}\left(\tau-\eta_1^2x\right)-\sqrt{\tau-\eta_2^2x}\left(2\tau-\eta_1^2x\right)^2,\ P_6(x,\tau)=\sqrt{\tau-\eta_1^2x}-\sqrt{\tau-\eta_2^2x}$$

Показано, что функции W_1 и U_1 имеют степенную особенность порядка (-2) на фронтах волны Рэлея: $x = \pm c_R \tau$. Функции $\tilde{F}_{1k}(x,\tau)$ $k = 2,3,4$ имеют интегрируемые степенные особенности порядка $(-1/2)$ при $x = \pm\tau/\eta_2$ и неинтегрируемые степенные особенности порядка (-1) на фронтах волны Рэлея $x = \pm c_R \tau$. Других особенностей функции $\tilde{F}_{1k}(x,\tau)$ не имеют. При вычислении конечных значений интегралов в (26) применен метод канонической регуляризации [2].

Показано, что построение оригиналов перемещений и микроповоротов при $m > 1$ сводится к операции предельного перехода и вычислению сверток [2]. Также отмечено, что учет второго слагаемого в частичных суммах рядов (11) не приводит к качественным отличиям, т.к. результат операции свертки есть непрерывная функция. Следовательно, все особенности функции влияния содержат нулевое и первое слагаемые.

На рис. 3 и 4 приведены графики распределения по координате x функций влияния W и U в моменты времени $\tau = 1,3,5$ при учете первых двух членов рядов разложения по малому параметру. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 1$, пунктирная - $\tau = 3$, штрихпунктирная - $\tau = 5$. Из графиков видно, что у функции влияния W появляется конечный скачок, соответствующий положению фронта волны сдвига. Разрывы второго рода этой функции соответствуют положению фронта волны Рэлея. Функция U имеет слабую особенность порядка $-1/2$ на фронте волны сдвига. На рис. 4 показаны распределения по координате x первого члена ряда функции Ω в моменты времени $\tau = 0.5,\ 1,\ 3,\ 5$. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.5$, пунктирная - $\tau = 1$, точечная - $\tau = 3$, штрихпунктирная - $\tau = 5$. Из рис. 4 видно, что эта функция является непрерывной. Она имеет изломы, положения которых соответствуют положению фронта волны Рэлея.

Учет второго и последующих слагаемых приводит к результатам, практически совпадающим с приведенными на рис. 2-4.

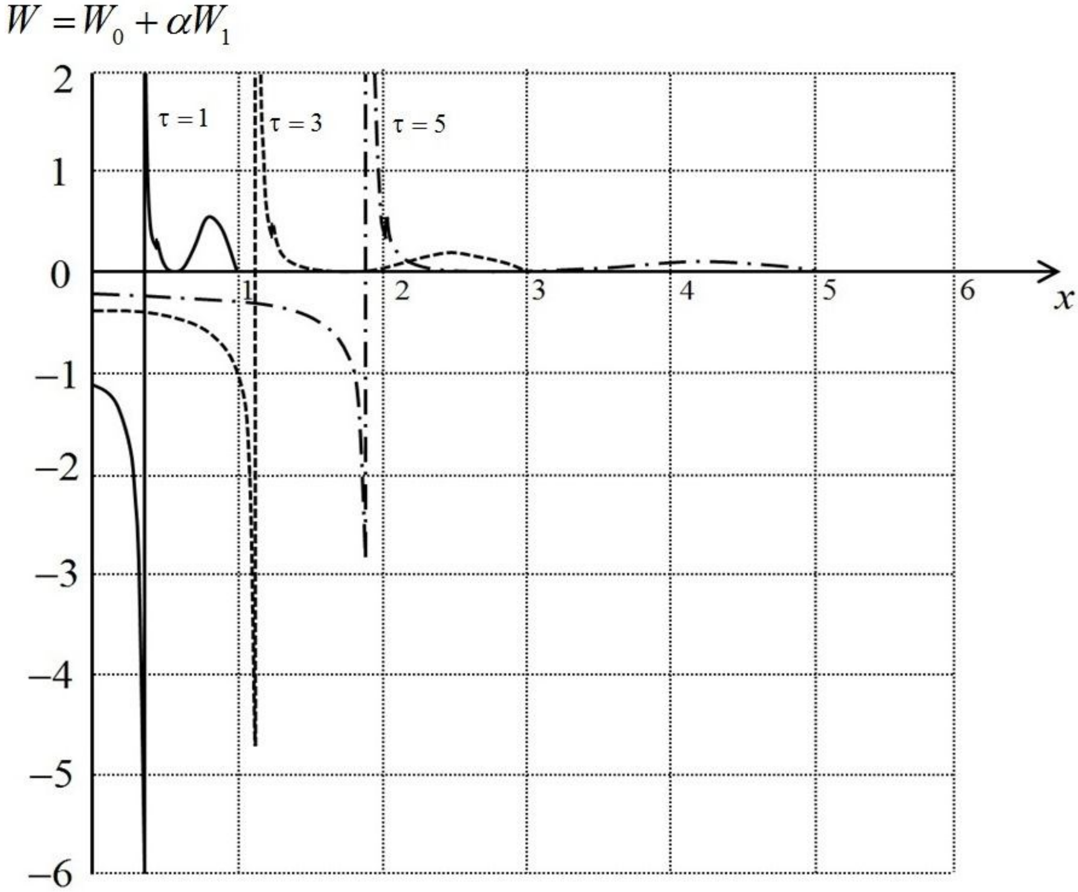

Рис. 2

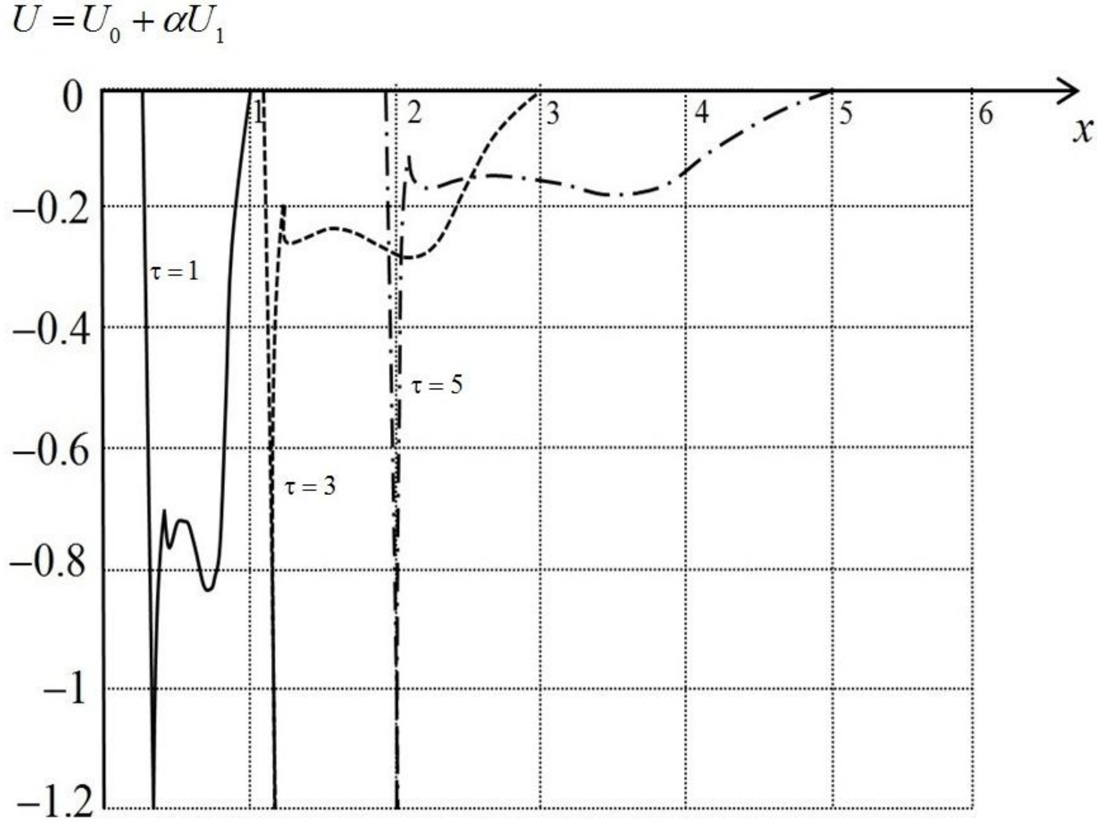

Рис. 3

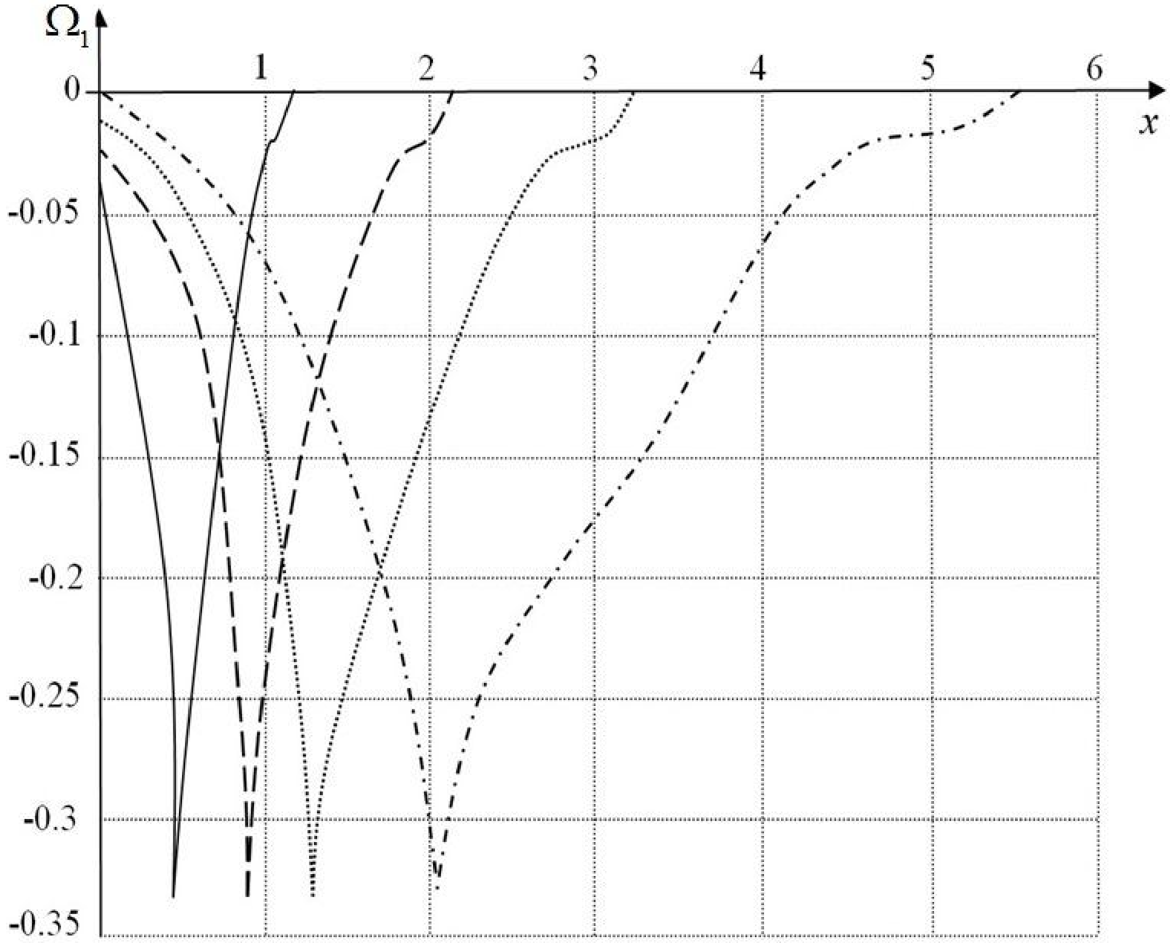

Рис. 4

<u>В пятой главе</u> решена задача об определении перемещений границы полупространства в ответ на воздействие внезапно приложенной внешней нагрузки, распределенной по определенному закону по оси Ox и направленной по нормали к границе полупространства $z=0$.

Нормальные перемещения границы полупространства представляют собой свертку поверхностного давления $p(x,\tau)$ с построенной функцией влияния $W(x,\tau)$:

$$w(x,\tau)=\int\limits_0^\tau dt\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x-\xi,\tau-t)p(\xi,t)d\xi. \tag{27}$$

Для вычисления интеграла в (27) разработан и реализован численно-аналитический алгоритм, позволяющий учесть степенные особенности функции влияния $W(x,\tau)$.

Рассмотрены примеры, когда на границу полупространства действует внезапно приложенная в начальный момент времени нормальная нагрузка. Один из вариантов нагрузки представлен на рис. 5.

$$p(x,\tau)=10^{-3}H(\tau)H(1-|x|)$$

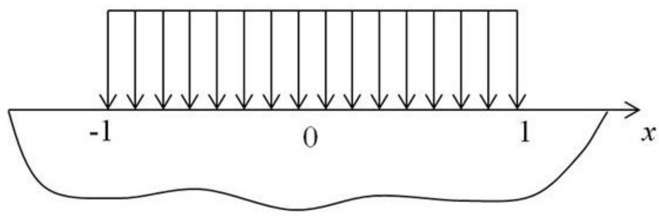

Рис. 5.

Результаты решения проиллюстрированы на рис. 6. Здесь показаны нормальные перемещения границы полуплоскости в момент времени $\tau=1$, причем сплошная кривая соответствует нормальному перемещению границы полуплоскости с учетом нулевого и первого члена ряда разложения функции влияния, пунктирная кривая соответствует перемещениям при учете только нулевого члена ряда, а штрихпунктирная – с учетом только первого члена. Полученное отличие в решениях с учетом только нулевого (классическая теория упругости) и нулевого и первого слагаемых (среда Коссера) объясняется тем, что при учете моментных эффектов часть работы внешней нагрузки преобразуется в энергию волн кручения, поэтому нормальные перемещения границы полупространства, заполненного средой Коссера, имеют меньшие значения по сравнению с перемещениями границы полупространства, заполненного классической линейно упругой средой.

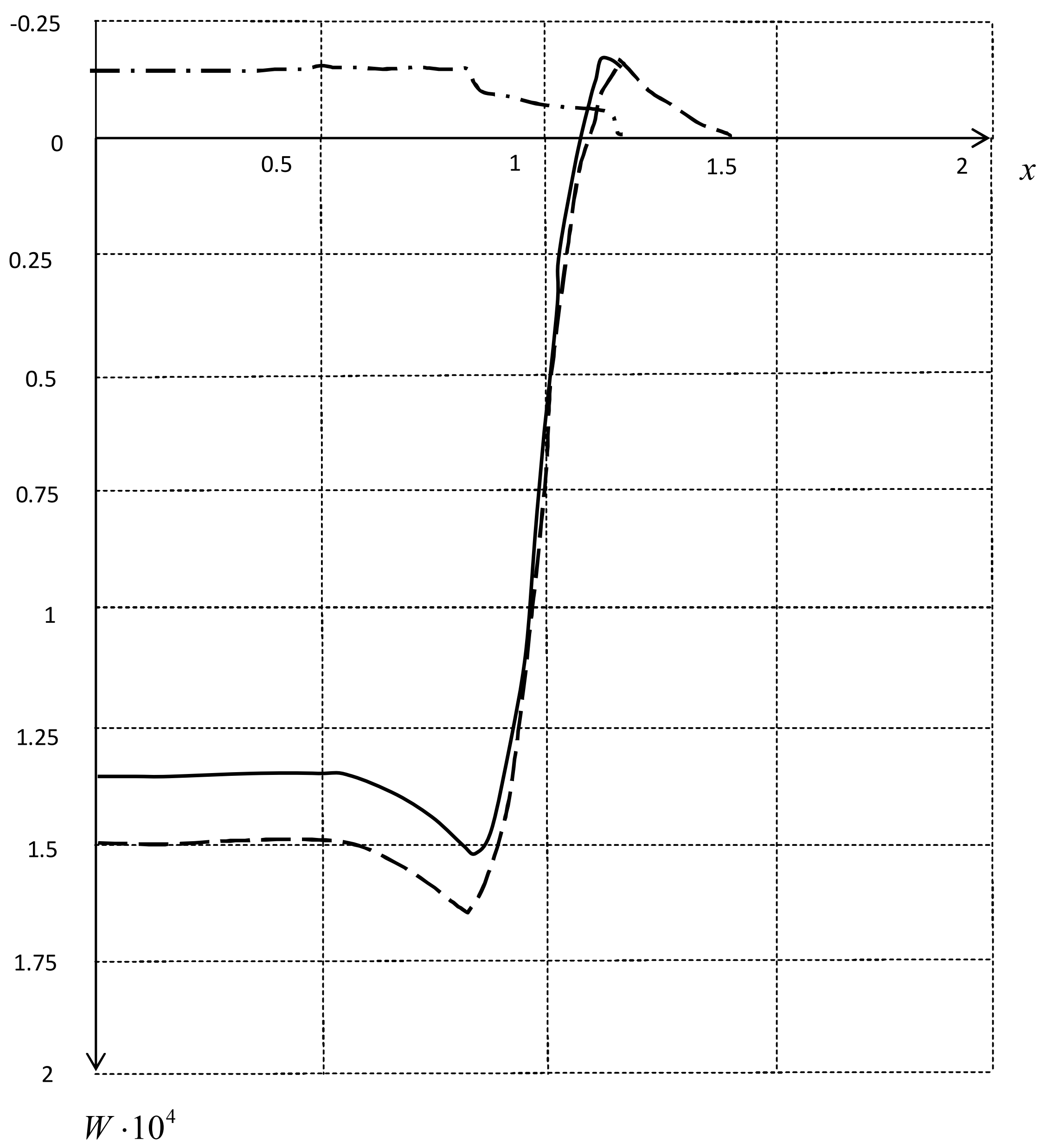

Рис. 6.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Дана математическая постановка плоской нестационарной задачи типа Лэмба для полупространства, заполненного средой Коссера. Разработан метод решения, основанный на разложении искомых поверхностных функций влияния в ряды по малому параметру. Получена рекуррентная последовательность подзадач относительно коэффициентов рядов разложения по малому параметру.
2. В пространстве изображений Фурье-Лапласа найдены функции Грина для моментно упругой полуплоскости.
3. Разработана и реализована методика определения оригиналов коэффициентов рядов по малому параметру компонентов напряженно-деформированного состояния полуплоскости.
4. Построено интегральное представление с ядрами в виде функций влияния решений задач о действии нестационарных поверхностных возмущений на полуплоскость заполненную средой Коссера. Приведены примеры расчетов.
5. Проведено сравнение полученных результатов с решениями задач для упругой полуплоскости.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых научных изданиях и журналах:

1. Суворов Е.М., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о воздействии поверхностной нагрузки на моментно упругую полуплоскость // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. № 4. Ч. 4. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – С. 1794-1796.

2. Суворов Е.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г В. Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 850-859.

В других научных изданиях и журналах:

3. Суворов Е.М., Федотенков Г.В. Нестационарные одномерные колебания моментноупругого полупространства под действием поверхностной нагрузки // Матер. XVI Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2010., том 2 - С. 101.

4. Суворов Е. М., Федотенков Г.В. Нестационарные поверхностные функции влияния полупространства, заполненного средой Коссера // Сборник тезисов докладов конференции «Инновации в авиации и космонавтике - 2012». - С-Пб.: ООО «Принт-салон», 2012. - С. 286-287.

5. Суворов Е. М., Федотенков Г.В. Действие нестационарной сосредоточенной поверхностной нагрузки на упругое полупространство с учетом влияния моментных напряжений // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы. – Львов: ИППММ им. Я.С. Подстригача. – 2012. - С. 192 – 196.

6. Суворов Е. М., Федотенков Г.В., Кубенко В.Д. Плоская задача Лэмба для моментно-упругой среды // Матер. XVII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2011., том 2 - С. 54-56.

7. Суворов Е. М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарной поверхностной нагрузки на моментно-упругую полуплоскость // Им-

пульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. IX междунар. научн. конф. – Николаев: КП «Миколаівська обласна друкарня», 2011. - С. 147-151.

8. Суворов Е. М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарная задача о воздействии сосредоточенной нагрузки на границу упругой полуплоскости // Ломоносовские чтения - 2012 С. 149.

9. Суворов Е. М., Терлецкий Р.Ф., Федотенков Г.В. Плоская задача типа Лэмба для моментноупругого полупространства // Матер. XVIII междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2012., том 2 - С. 149-161.