

Численное решение задач нелинейной фильтрации на основе алгоритмов фильтра частиц

Волков В.А.*, Кудрявцева И.А.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

** e-mail: vlad_ell@inbox.ru*

*** e-mail: irina.home.mail@mail.ru*

Аннотация

В статье рассмотрено численное решение задачи оценивания вектора состояния по результатам косвенных наблюдений на основе алгоритмов фильтра частиц двух типов: с использованием и без использования процедуры повторной выборки. К первой группе алгоритмов следует отнести Бутстреп фильтр частиц с остаточной повторной выборкой и Бутстреп фильтр частиц с улучшенной повторной выборкой. Вторая группа включает сигма-точечный фильтр частиц и Монте-Карло фильтр частиц. Приведены подробные алгоритмы моделирования. С использованием данных алгоритмов сформирован комплекс программ, позволяющий производить сравнительный анализ результатов моделирования для приведенных алгоритмов фильтрации. Проведены серии численных расчетов для различных модельных примеров. Получены и проанализированы результаты моделирования.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, фильтры частиц, бутстреп фильтр частиц с улучшенной выборкой, Unscented-преобразование, сигма-точечный фильтр частиц, Монте-Карло фильтр частиц.

Введение

Идея алгоритмов фильтра частиц появилась в 1950-х годах [1]. Однако, развитие данного направления, начавшееся с работы [2], приходится на 1990-е. В [2] была формально определена и описана техника повторной выборки (resampling).

Для реализации алгоритмов фильтров частиц требуются достаточные мощные вычислительные ресурсы, что особенно заметно по возросшему количеству работ в этой области после 2000-х годов [3-6].

Фильтры частиц являются достаточно широко используемым классом численных методов. Привлекательность применения алгоритмов фильтра частиц вызвана тем, что они сочетают байесовскую рекурсивную процедуру оценивания с методом Монте-Карло. Среди приложений данного подхода можно выделить следующие: обработка видео сигналов, гидролокация и радиолокация, спутниковая навигация, робототехника.

По сравнению с другими аппроксимационными методами, которые используются для решения задач нелинейной фильтрации, например, с расширенным фильтром Калмана [7-8, 11], в основе алгоритмов фильтров частиц не используется процедура локальной линеаризации или какая-либо подобная функциональная аппроксимация.

В данной работе изложено решение дискретной задачи нелинейной фильтрации на основе алгоритмов Бутстреп фильтра частиц с остаточной повторной выборкой (Bootstrap Particle Filter with Residual Resampling), Бутстреп фильтра частиц с улучшенной выборкой (Bootstrap Particle Filter with Roulette wheel Resampling), сигма-точечного фильтра частиц (Unscented Particle Filter), Монте-Карло фильтра частиц (Monte-Carlo Particle Filter). Разработан пакет программ, с использованием которого проведены серии вычислительных экспериментов для различных модельных примеров.

Постановка задачи

Случайный процесс $X(t)$ в моменты времени $t = t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ описывается следующим разностным уравнением:

$$X_{k+1} = f(X_k, V_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где $X_k = X(t_k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $X_0 \sim p(x)$ – начальное состояние системы, $f(x, v): \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – заданная вектор-функция, $V_k \in \mathbb{R}^n$ – дискретный векторный белый шум с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Σ_v .

Случайный процесс $X(t)$ в моменты времени $t = t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ доступен косвенным наблюдениям, удовлетворяющим уравнению:

$$Y_{k+1} = g(X_{k+1}, W_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $Y_k \in \mathbb{R}^m$ - вектор измерений, $g(x, w): \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ - заданная вектор-функция, $W_k \in \mathbb{R}^m$ - дискретный векторный белый шум с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Σ_w .

Требуется в каждый момент времени $t = t_1, \dots, t_k, \dots$ по результатам всех имеющихся к этому моменту наблюдений $Y_1^k = \{Y_1, \dots, Y_k\}$ получить вектор оценки \hat{X}_k состояния процесса X_k с использованием Бутстреп фильтра частиц с остаточной повторной выборкой, Бутстреп фильтра частиц с улучшенной выборкой, сигматочечного фильтра частиц, Монте-Карло фильтра частиц.

Вычислительная модель решения задачи

Алгоритмы фильтров частиц, в основе которых лежит метод Монте-Карло, оперирует с набором случайных точек, аппроксимирующих искомую плотность вероятности $p(x_k | Y_1^k)$. В силу того, что характер $p(x_k | Y_1^k)$ не известен, сгенерировать случайные точки, называемые частицами, затруднительно. Вводится распределение значимости $q(x_k | Y_1^k)$, в большинстве случаев выбираемое гауссовским, на основании которого происходит генерация частиц. Тогда, для произвольного нелинейного преобразования случайного вектора X_k , имеющего распределение $p(x_k | Y_1^k)$, справедливо следующее:

$$M \left[h(X_k) | Y_1^k \right] = \int h(x_k) p(x_k | Y_1^k) dx_k = \int h(x_k) \frac{p(x_k | Y_1^k)}{q(x_k | Y_1^k)} q(x_k | Y_1^k) dx_k.$$

Далее, на основании полученного из распределения $q(x_k|Y_1^k)$ набора частиц $X_k^i, i=1, \dots, N_p$, опираясь на метод Монте-Карло и используя правило Байеса, следует:

$$\hat{h}(X_k) = \sum_{i=1}^{N_p} \mu_k^i h(X_k^i), \quad \mu(x_k) = \frac{p(x_k|Y_1^k)}{q(x_k|Y_1^k)} = \frac{cp(y_k|x_k)p(x_k|Y_1^{k-1})}{q(x_k|Y_1^k)}, \quad (3)$$

где c - нормирующий множитель; $\mu_k^i = \mu(X_k^i)$ - веса частиц; $p(x_k|Y_1^{k-1})$ определяется уравнением состояния (1); $p(y_k|x_k)$ - уравнением измерений (2); $q(x_k|Y_1^k)$ - распределение значимости.

Предположим, что имеется набор частиц $X_{k-1}^i, i=1, \dots, N_p$ с определенными весами μ_{k-1}^i , тогда аппроксимация апостериорной плотности вероятности $p(x_{k-1}|Y_1^{k-1})$ для $k-1$ момента времени определяется следующим соотношением:

$$p(x_{k-1}|Y_1^{k-1}) \approx \sum_{i=1}^{N_p} \mu_{k-1}^i \delta(x_{k-1} - X_{k-1}^i), \quad (4)$$

где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция Дирака. Тогда, для получения искомой плотности вероятности $p(x_k|Y_1^k)$, используя уравнение Колмогорова-Чепмена [6] для $p(x_k|Y_1^{k-1})$ и $q(x_k|Y_1^k)$, необходимо соотношение (3) переписать в следующем виде:

$$\mu(x_k) \sim \frac{p(y_k|x_k) \int p(x_k|x_{k-1}, Y_1^{k-1}) p(x_{k-1}|Y_1^{k-1}) dx_{k-1}}{\int q(x_k|x_{k-1}, Y_1^k) q(x_{k-1}|Y_1^{k-1}) dx_{k-1}}. \quad (5)$$

Таким образом, подставляя (4) в (5) получаем:

$$\mu_k^i \sim \frac{p(y_k|X_k^i) p(X_k^i|X_{k-1}^i, Y_1^{k-1}) p(X_{k-1}^i|Y_1^{k-1})}{q(X_k^i|X_{k-1}^i, Y_1^k) q(X_{k-1}^i|Y_1^{k-1})} = \mu_{k-1}^i \frac{p(y_k|X_k^i) p(X_k^i|X_{k-1}^i, Y_1^{k-1})}{q(X_k^i|X_{k-1}^i, Y_1^k)}, \quad (6)$$

где $X_k^i = f(X_{k-1}^i, V_{k-1}^i)$, знак \propto означает пропорциональность одного выражения другому. Тогда $p(x_k | Y_1^k) \approx \sum_{i=1}^{N_p} \mu_k^i \delta(x_k - X_k^i)$.

Представленная выше методика с использованием рекуррентной формулы (6) для вычисления весов частиц носит название последовательной выборки по значимости (Sequential Importance Sampling) [3-4]. Однако, у данной методики есть существенный недостаток: при данном подходе происходит вырождение выборки. Веса всех частиц стремятся к нулю через несколько итераций, кроме одной, вес которой стремится к единице. Введение процедуры повторной выборки (resampling) позволяет решить данную проблему. В работе использованы следующие процедуры повторной выборки: остаточная повторная выборка и улучшенная повторная выборка.

Для практической реализации описанной выше методики нахождения $p(x_k | Y_1^k)$ необходимо знать $p(y_k | X_k^i)$, $p(X_k^i | X_{k-1}^i, Y_1^{k-1})$ и $q(X_k^i | X_{k-1}^i, Y_1^k)$, входящие в соотношение (6). В случае, если положить $p(X_k^i | X_{k-1}^i, Y_1^{k-1}) = q(X_k^i | X_{k-1}^i, Y_1^k)$, то приходим к алгоритму Бутстреп фильтра частиц. Алгоритм Бутстреп фильтра частиц, дополненный процедурами остаточной повторной выборки [3,9] и улучшенной повторной выборки [3], приведены ниже.

Алгоритм Бутстреп фильтра частиц с остаточной повторной выборкой

1. Положить $k = 0$.
2. Сгенерировать N_p частиц $X_0^i, i = 1, \dots, N_p$, где $X_0 \sim p(x)$.

3. Задать начальные значения весов частиц $w_0^i, i=1, \dots, N_p$: $w_0^i = \frac{1}{N_p}, i=1, \dots, N_p$.
4. Получить преобразованные значения $X_{k+1}^i, i=1, \dots, N_p$ на основании уравнения состояния (1): $X_{k+1}^i = f(X_k^i, V_k^i), i=1, \dots, N_p$.
5. Вычислить веса частиц $w_{k+1}^i, i=1, \dots, N_p$: $w_{k+1}^i = p(Y_{k+1} | X_{k+1}^i), i=1, \dots, N_p$.
6. Пронормировать полученные веса: $\tilde{w}_{k+1}^i = \frac{w_{k+1}^i}{\sum_{i=1}^{N_p} w_{k+1}^i}, i=1, \dots, N_p$.
7. Осуществить процедуру повторной выборки:
 - 7.1. Сгенерировать $n_i = [N_p \cdot \tilde{w}_{k+1}^i]$ копий каждой частицы $X_{k+1}^i, i=1, \dots, N_p$;
 - 7.2. Вычислить величину остатка $N_r = N_p - \sum_{i=1}^{N_p} n_i$;
 - 7.3. Сгенерировать N_r частиц из исходной выборки $X_{k+1}^i, i=1, \dots, N_p$ с вероятностями пропорциональными $N_p \cdot \tilde{w}_{k+1}^i - n_i, i=1, \dots, N_p$.
 - 7.4. Присвоить веса частицам из нового набора $w_{k+1}^i = \frac{1}{N_p}, i=1, \dots, N_p$.
8. Найти $\hat{X}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_p} w_{k+1}^i X_{k+1}^i, \hat{P}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_p} w_{k+1}^i (X_{k+1}^i - \hat{X}_{k+1})(X_{k+1}^i - \hat{X}_{k+1})^T$.
9. Положить $k = k+1$ и перейти к п.4.

Алгоритм Бутстреп фильтра частиц с улучшенной повторной выборкой

1. Положить $k = 0$.
2. Сгенерировать N_p частиц $X_0^i, i=1, \dots, N_p$, где $X_0 \sim p(x)$.
3. Задать начальные значения весов частиц $w_0^i, i=1, \dots, N_p$: $w_0^i = \frac{1}{N_p}, i=1, \dots, N_p$.

4. Получить преобразованные значения $X_{k+1}^i, i=1, \dots, N_p$ на основании уравнения

$$\text{состояния (1): } X_{k+1}^i = f(X_k^i, V_k^i), i=1, \dots, N_p.$$

5. Вычислить веса частиц $w_{k+1}^i, i=1, \dots, N_p$: $w_{k+1}^i = p(Y_{k+1} | X_{k+1}^i), i=1, \dots, N_p$.

6. Пронормировать полученные веса: $\tilde{w}_{k+1}^i = \frac{w_{k+1}^i}{\sum_{i=1}^{N_p} w_{k+1}^i}, i=1, \dots, N_p$.

7. Осуществить процедуру повторной выборки:

7.1. Сгенерировать величины: $index \sim \begin{pmatrix} 1 & \dots & N_p \\ 1/N_p & \dots & 1/N_p \end{pmatrix}$ и $\beta \sim R\left(0, 2 \cdot \max_{1 \leq i \leq N_p} (\tilde{w}_{k+1}^i)\right)$;

7.2. Выбрать частицу с номером, равным величине $index$, X_{k+1}^{index} и сравнить вес

\tilde{w}_{k+1}^{index} выбранной частицы с величиной β :

7.2.1. Если $\tilde{w}_{k+1}^{index} > \beta$, то частица добавляется в новую выборку;

7.2.2. Если $\tilde{w}_{k+1}^{index} < \beta$, то величина β уменьшается на вес частицы

$\beta = \beta - \tilde{w}_{k+1}^{index}$ и осуществляется переход к следующей частице $index = index + 1$;

7.3. Присвоить веса частицам из нового набора $w_{k+1}^i = \frac{1}{N_p}, i=1, \dots, N_p$.

8. Найти $\hat{X}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_p} w_{k+1}^i X_{k+1}^i, \hat{P}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_p} w_{k+1}^i (X_{k+1}^i - \hat{X}_{k+1})(X_{k+1}^i - \hat{X}_{k+1})^T$.

9. Положить $k = k + 1$ и перейти к п.4.

В случае, если процедуру повторной выборки заменить генерацией частиц на каждой итерации по времени из распределения значимости, а для вычисления весов использовать соотношение (3) в виде:

$$\mu_k^i \sim \frac{p(y_k | X_k^i) p(X_k^i; x_k | Y_1^{k-1})}{q(X_k^i; x_k | Y_1^k)}, X_k^i \sim q(x_k | Y_1^k),$$

то можно получить группу алгоритмов фильтров частиц, к которым относятся, рассмотренные в работе, сигма-точечный фильтр частиц и фильтр частиц Монте-Карло.

Алгоритмы сигма-точечного фильтра частиц [5-6,10,12] и фильтра частиц Монте-Карло содержат следующие основные этапы [4,10]:

- генерация набора частиц;
- оценка параметров распределения значимости $q(x_k | Y_1^k)$. Для сигма-точечного фильтра частиц и фильтра частиц Монте-Карло распределение значимости полагается гауссовским;
- применение процедуры фильтрации Калмана на основании параметров, полученных на предыдущем этапе;
- оценка первых двух моментов искомого распределения $p(x_k | Y_1^k)$.

В алгоритме сигма-точечного фильтра частиц для получения оценок параметров распределения значимости применяется Unscented-преобразование. Основная идея которого заключается в том, что аппроксимации подвергается не произвольная нелинейная функция, а распределение случайной величины. К примеру, пусть имеется некоторый случайный вектор X , который подвергается нелинейному преобразованию $Y = g(X)$. Предполагается, что математическое

ожидание m_X и ковариационная матрица R_X данного вектора X известны. Далее вводится по определенному правилу набор векторов X^i , $i=1, \dots, N_p$, называемых сигма-точками, таких, что их среднее и ковариационная матрица равны m_X и R_X .

Каждой частице ставится в соответствие некоторой вес w^i , $i=1, \dots, N_p$, таким образом, чтобы обеспечить несмещенную оценку математического ожидания введенного

набора частиц, причем: $\sum_{i=1}^{N_p} w^i = 1$.

Далее заданному нелинейному преобразованию подвергается каждая сигма-точка в отдельности. В результате получают набор преобразованных сигма-точек Y^i , для которого вычисляют взвешенное выборочное среднее и взвешенную

выборочную ковариацию: $\hat{m}_X = \sum_{i=1}^{N_p} w^i X^i$, $\hat{R}_X = \sum_{i=1}^{N_p} w^i (X^i - \hat{m}_X)(X^i - \hat{m}_X)^T$.

Вычисленные выборочное среднее и выборочная ковариация служат оценкой математического ожидания и ковариации исходного вектора после нелинейного преобразования.

В качестве соотношений, применяемых для нахождения сигма-точек, в данной работе рассматривались следующие [5, 8]:

$$\begin{aligned} X^0 &= m_X, & X^i &= m_X + \sqrt{\frac{K}{1-w^0}} (R_x)_i^{1/2}, & X^{i+K} &= m_X - \sqrt{\frac{K}{1-w^0}} (R_x)_i^{1/2}, \\ w^0 &= w^0, & w^i &= \frac{1-w^0}{2K}, & w^{i+K} &= \frac{1-w^0}{2K}, & i &= 1, \dots, K, \end{aligned}$$

где w^0 - параметр, значения которого отвечают за положения сигма-точек относительно математического ожидания, $(R_x)_i^{1/2}$ - i -й столбец или строка матрицы $(R_x)^{1/2}$, количество векторов в наборе $N_p = 2K + 1$, K - размерность вектора состояния.

В алгоритме Монте-Карло фильтра частиц оценка параметров распределения значимости осуществляется с использованием метода Монте-Карло на основании случайного набора частиц, генерируемого на каждой итерации из гауссовского распределения. Алгоритмы сигма-точечного фильтра частиц и Монте-Карло фильтра частиц приведены ниже.

Алгоритм сигма-точечного фильтра частиц

1. Положить $k = 0$.
2. Инициализировать оценки вектора состояния системы \hat{X}_0 и ковариационной матрицы \hat{P}_0 в начальный момент времени.
3. Сгенерировать набор сигма-точек:

$$\begin{aligned} X_k^0 &= \hat{Z}_k, & X_k^i &= \hat{Z}_k + \sqrt{\frac{K}{1-w^0}} (S_k)_i^{1/2}, & X_k^{i+K} &= \hat{Z}_k - \sqrt{\frac{K}{1-w^0}} (S_k)_i^{1/2}, \\ w^0 &= w^0, & w^i &= \frac{1-w^0}{2K}, & w^{i+K} &= \frac{1-w^0}{2K}, & i &= 1, \dots, K \end{aligned}$$

где $\hat{Z}_0 = \hat{X}_0$, $S_0 = \hat{P}_0$.

4. Получить преобразованные значения сигма-точек на основании уравнения состояния: $\bar{X}_k^i = f(X_k^i)$, $i = 0, \dots, 2K$.
5. Найти прогнозное значение \hat{X}_k и ковариационную матрицу ошибки

$$\text{прогноза } \bar{P}_k : \hat{X}_k = \sum_{i=0}^{2K} w^i \bar{X}_k^i, \quad \bar{P}_k = \sum_{i=0}^{2K} w^i \left(\bar{X}_k^i - \hat{X}_k \right) \left(\bar{X}_k^i - \hat{X}_k \right)^T.$$

6. Сгенерировать набор сигма-точек по прогнозному значению \hat{X}_k вектора состояния и ковариационной матрицы \bar{P}_k ошибки прогноза :

$$\begin{aligned}\tilde{X}_k^0 &= \hat{X}_k, & \tilde{X}_k^i &= \hat{X}_k + \sqrt{\frac{K}{1-w^0}} (\bar{P}_k)_i^{1/2}, & \tilde{X}_k^{i+K} &= \hat{X}_k - \sqrt{\frac{K}{1-w^0}} (\bar{P}_k)_i^{1/2}, \\ w^0 &= w^0, & w^i &= \frac{1-w^0}{2K}, & w^{i+K} &= \frac{1-w^0}{2K}, & i &= 1, \dots, K,\end{aligned}$$

7. Получить преобразованные значения сигма-точек на основании уравнения наблюдения: $Y_k^i = g(\tilde{X}_k^i)$, $i = 0, \dots, 2K$.

8. Найти \hat{Y}_k , $\hat{P}_{yy,k}$ и $\hat{P}_{xy,k}$ по преобразованным значениям сигма-точек:

$$\hat{Y}_k = \sum_{i=0}^{2K} w^i Y_k^i, \quad \hat{P}_{yy,k} = \sum_{i=0}^{2K} w^i (Y_k^i - \hat{Y}_k)(Y_k^i - \hat{Y}_k)^T, \quad \hat{P}_{xy,k} = \sum_{i=0}^{2K} w^i (\tilde{X}_k^i - \hat{X}_k)(Y_k^i - \hat{Y}_k)^T.$$

9. Выполнить коррекцию прогноза и вычислить ковариационную матрицу ошибки оценки:

$$\begin{aligned}K_{k+1} &= \hat{P}_{xy,k} (\hat{P}_{yy,k})^{-1}, \\ \hat{Z}_{k+1} &= \hat{X}_k + K_{k+1} (Y_{k+1} - \hat{Y}_k), \\ \hat{S}_{k+1} &= \hat{P}_k - K_{k+1} \hat{P}_{yy,k} K_{k+1}^T.\end{aligned}$$

10. Сгенерировать набор частиц: $Z_{k+1}^i \sim \mathcal{N}(z, \hat{Z}_{k+1}, \hat{S}_{k+1})$, $i = 1, \dots, N_p$.

11. Вычислить веса частиц: $\mu^i = \frac{p(Y_{k+1}, Z_{k+1}^i) \mathcal{N}(Z_{k+1}^i, \hat{X}_k, \bar{P}_k)}{\mathcal{N}(Z_{k+1}^i, \hat{Z}_{k+1}, \hat{S}_{k+1})}$, $i = 1, \dots, N_p$.

12. Получить \hat{X}_{k+1} и \hat{P}_{k+1} : $\hat{X}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_p} \mu^i Z_{k+1}^i$, $\hat{P}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_p} \mu^i (Z_{k+1}^i - \hat{Z}_{k+1})(Z_{k+1}^i - \hat{Z}_{k+1})^T$.

13. Положить $k = k + 1$ и перейти к п.3.

Алгоритм Монте-Карло фильтра частиц

1. Положить $k = 0$.

2. Инициализировать оценки вектора состояния системы \hat{X}_0 и ковариационной матрицы \hat{P}_0 в начальный момент времени.

3. Сгенерировать набор точек: $X_k^i \sim N(x, \hat{X}_k, \hat{P}_k)$, $i=1, \dots, N_p$.

4. Получить преобразованные значения сигма-точек на основании уравнения состояния: $\bar{X}_k^i = f(X_k^i, V_k^i)$, $i=1, \dots, N_p$.

5. Найти прогнозное значение \hat{X}_k и ковариационную матрицу ошибки прогноза \bar{P}_k : $\hat{X}_k = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \bar{X}_k^i$, $\bar{P}_k = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_p} (\bar{X}_k^i - \hat{X}_k) (\bar{X}_k^i - \hat{X}_k)^T$.

6. Сгенерировать набор точек по прогнозному значению \hat{X}_k вектора состояния и ковариационной матрицы \bar{P}_k ошибки прогноза:

$$\tilde{X}_k^i \sim N(x, \hat{X}_k, \bar{P}_k), i=1, \dots, N_p.$$

7. Получить преобразованные значения точек на основании уравнения наблюдения: $Y_k^i = g(\tilde{X}_k^i, W_k^i)$, $i=1, \dots, N_p$.

8. Найти \hat{Y}_k , $\hat{P}_{yy,k}$ и $\hat{P}_{xy,k}$ по преобразованным значениям точек:

$$\hat{Y}_k = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_p} Y_k^i, \quad \hat{P}_{yy,k} = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_p} (Y_k^i - \hat{Y}_k) (Y_k^i - \hat{Y}_k)^T, \quad \hat{P}_{xy,k} = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_p} (\tilde{X}_k^i - \hat{X}_k) (Y_k^i - \hat{Y}_k)^T.$$

9. Выполнить коррекцию прогноза и вычислить ковариационную матрицу ошибки оценки:

$$K_{k+1} = \hat{P}_{xy,k} (\hat{P}_{yy,k})^{-1},$$

$$\hat{Z}_{k+1} = \hat{X}_k + K_{k+1} (Y_{k+1} - \hat{Y}_k),$$

$$\hat{S}_{k+1} = \hat{P}_k - K_{k+1} \hat{P}_{yy,k} K_{k+1}^T.$$

10. Сгенерировать набор частиц: $Z_{k+1}^i \sim N(z, \hat{Z}_{k+1}, \hat{S}_{k+1})$, $i = 1, \dots, N_p$.

11. Вычислить веса частиц: $\mu^i = \frac{p(Y_{k+1}, Z_{k+1}^i) N(Z_{k+1}^i, \hat{X}_k, \bar{P}_k)}{N(Z_{k+1}^i, \hat{Z}_{k+1}, \hat{S}_{k+1})}$, $i = 1, \dots, N_p$.

12. Получить \hat{X}_{k+1} и \hat{P}_{k+1} : $\hat{X}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_p} \mu^i Z_{k+1}^i$, $\hat{P}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_p} \mu^i (Z_{k+1}^i - \hat{Z}_{k+1})(Z_{k+1}^i - \hat{Z}_{k+1})^T$.

13. Положить $k = k + 1$ и перейти к п.3.

Результаты численного моделирования

На основании изложенных алгоритмов фильтрации разработан пакет программ с использованием сред разработки MATLAB и Microsoft Visual Studio C#. Применение Microsoft Visual Studio C# позволило создать приложение, имеющее графический интерфейс для визуализации входных и выходных параметров. При помощи созданного программного обеспечения проведены серии вычислительных расчетов для различных модельных примеров. Ниже приведены результаты численного решения для следующих моделей вида (1)-(2) [10]:

$$1) X_{k+1} = \frac{X_k}{1 + X_k^2} + 0.7 \cdot V_k, \quad Y_{k+1} = 0.6X_{k+1} + 0.2 \cdot W_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$2) X_{k+1} = \frac{X_k}{1 + X_k^2} + \cos(k \cdot X_k) + 0.7 \cdot V_k, \quad Y_{k+1} = 0.6X_{k+1} + 0.2 \cdot W_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $X_0 \sim N(m_x, P_x)$ - начальное состояние системы; V_k, W_k - дискретные гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами Σ_v и Σ_w соответственно.

Для оценки эффективности результатов фильтрации наряду с графической иллюстрацией результатов моделирования производилось вычисление значений среднеквадратической ошибки в зависимости от количества запусков алгоритмов фильтрации. Значения среднеквадратических ошибок приведены в таблицах 1-2.

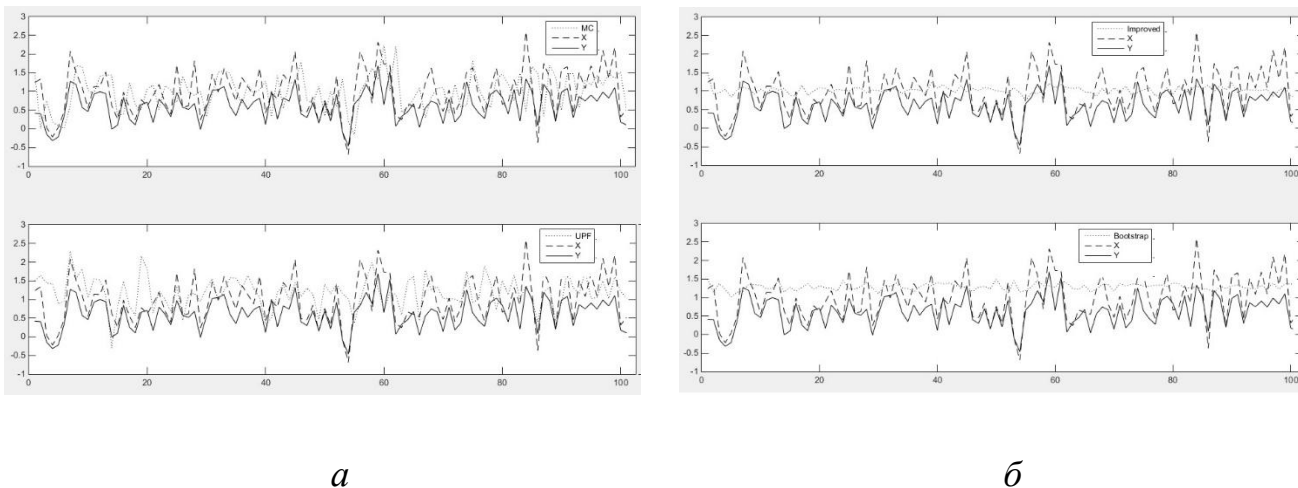


Рис.1. Результаты моделирования системы наблюдения и оценивания, полученные на основе *a* -Монте-Карло фильтра частиц и сигма-точечного фильтра частиц *б* - Бутстреп фильтра частиц с остаточной повторной выборкой и улучшенной повторной выборкой для следующих значений параметров: $\hat{X}_0 = 1.5, \hat{P}_0 = 1, m_v = 0, m_w = 0, \Sigma_v = 1, \Sigma_w = 1$.

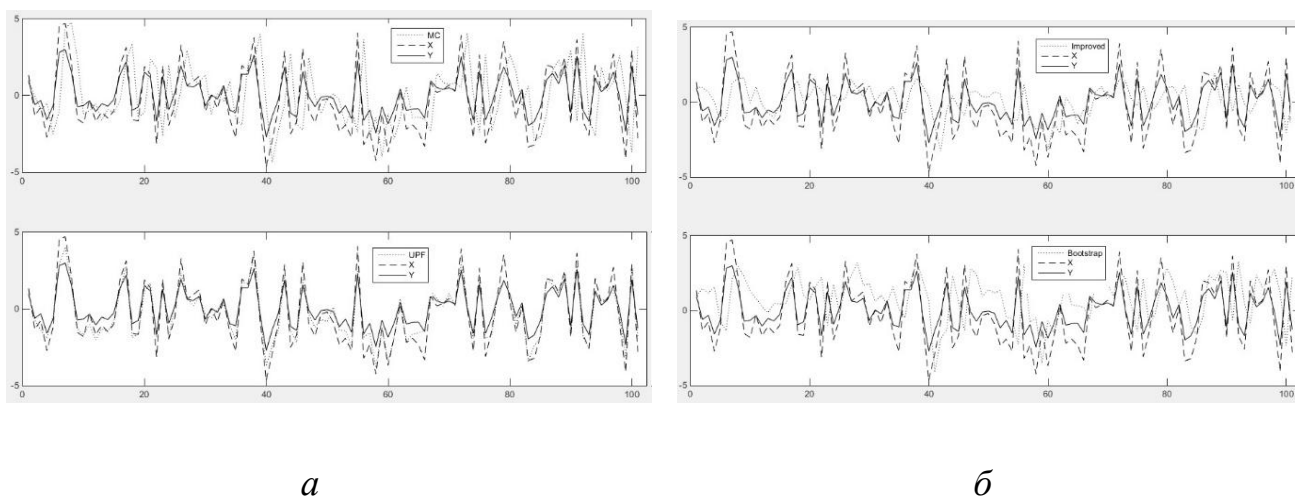


Рис.2. Результаты моделирования системы наблюдения и оценивания, полученные на основе *a* -Монте-Карло фильтра частиц и сигма-точечного фильтра частиц *б* -

Бутстреп фильтра частиц с остаточной повторной выборкой и улучшенной повторной выборкой для следующих значений параметров: $\hat{X}_0 = 1, \hat{P}_0 = 1, m_v = 0, m_w = 0, \Sigma_v = 3, \Sigma_w = 1$.

Таблица 1

СКО			
Количество запусков	10	50	100
МС	1,0557	0,9772	0,7388
UPF	0,623	0,5188	0,4658
Improved	1,9915	1,9432	0,7858
Residual	2,0513	1,9563	0,8056

Таблица 2

СКО			
Количество запусков	10	50	100
МС	0,9715	0,919	0,8088
UPF	0,4971	0,4795	0,4752
Improved	0,993	0,9745	0,9713
Residual	1,201	1,199	1,105

Из таблиц 1-2 видно, что алгоритмы Монте-Карло фильтра частиц и сигматочечного фильтра частиц, не содержащие процедуру повторной выборки дают меньшую ошибку по сравнению с бутстреп алгоритмами, включающими данную процедуру. Очевидно, что с ростом количества прогонов алгоритмов фильтрации ошибка уменьшается. В целом, можно отметить, что алгоритм бутстреп фильтра частиц дает большую ошибку вне зависимости от рассматриваемой модели наблюдения, что прослеживается по данным, приведенным в таблицах 1-2 и на рис.1-2.

Библиографический список

1. Rosenbluth M.N., Rosenbluth A.W. Monte Carlo calculation of the average extension of molecular chains // Journal of Chemical Physics, 1956. Vol. 23. № 2. PP. 356–359.

2. Gordon N. J., Salmond D. J., Smith A. F. M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation // IEE Proceedings-F. 1993. Vol. 140. № 2. PP. 107–113.
3. Chen Z. Bayesian filtering: From Kalman filters to particle filters, and beyond // Statistics. 2003. №1. PP. 1-69.
4. Haug A. A tutorial on Bayesian estimation and tracking techniques applicable to nonlinear and non-Gaussian process / MITRE Technical Report MTR 05W0000004. MCLearn: The MITRE Corporation, 2005.
5. Julier S.J., Uhlmann J.K. Unscented filtering and nonlinear estimation // Proc. Of IEEE. 2004. №3. PP. 401- 422.
6. Julier S., Uhlmann J., Durrant-Whyte H. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators // IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 45, № 3, 2000.
7. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортакoвский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008. - 312 с.
8. Simon D. Optimal state estimation: Kalman, H^∞ and nonlinear approaches. John Wiley & Sons, 2006, 552 p.
9. Коновалов А.А. Основы траекторной обработки радиолокационной информации. Ч. 2. - Спб.: Изд-во СпбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. - 180 с.
10. Кудрявцева И.А. Анализ эффективности расширенного фильтра Калмана, сигма-точечного фильтра Калмана и сигма-точечного фильтра частиц // Научный вестник МГТУ ГА. 2016. № 224. С.43-52.

11. Колосовская Т.П. Субоптимальный алгоритм оценивания и параметрической идентификации для навигационных систем летательных аппаратов и других подвижных объектов на основе информации магнитного поля Земли // Труды МАИ, 2016, №88: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=70666>
12. Кишко Д.В. Анализ точности определения собственных координат при использовании радионавигационной системы с малыми базами между передатчиками // Труды МАИ, 2014, №78: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53755>