МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский авиационный институт

(нацональный исследовательский университет)

На правах рукописи

УДК 539.3

ДАНГ КУАНГ ЗАНГ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГО-ПОРИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

Профессор, д.ф.-м.н. Тарлаковский Д.В.

Москва 2014

Оглавление

Введение

Математичесое моделирование многокомпонетных континуумов типа пористых насыщенных жидкостью сред началось более 100 лет тому назад с исследований процесса консолидации грунтов. Многокомпонентность необходимо учитывать при решении значительного числа прикладных задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности. Особенно часто возникает потребность исследования нестационарных процессов в насыщенных средах на основе модели двухкомпонентной среды.

Теоретические модели многокомпонентных сред разрабатывались Флориным В.А. [68], Френкелем Я.И. [69], Вио М.А. [8], Рахматулиным Х.А. [50], Рахматулиным Х.А., Соатовым Я.У., Филипповым И.Г., Артыковым Т.У. [51], Ляховым Г.М. [36,37], Ляховым Г.М. Поляковой И.И. [38], Эйслером Л.А. [73], Николаевским В.Н. [44], Николаевским В.Н., Баскиевым К.С., Горбуновым А.Т., Зотовым Т.А. [45], Михайловым Д.Н., Николаевским В.Н. [42], Егоровым А.Г., Зайцевым А.Н., Костериным А.В., Скворцовым Э.В. [30], Егоровым А.Г., Костериным А.В. [31], Егоровым А.Г., Костериным А.В., Скворцовым Э.В. [32], Сагомоняном А.Я., Поручиковым В.Б. [54], Сагомоняном А.Я. [55] и др.

Вопросы о распространении волн в упруго-пористых средах рассматривали Вио М.А. [8], Игумнов Л.А., Баженов [6], Berryman James G., Thigpen Lewis, Chin Raymond C.Y. [75], Трофимчук А.Н. [60,61], Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. [54], Гафурбаева С.М., Наримов Ш.Н [5,6], Van der Kogel H. [88], Zhang Wenfei [91], Цвинкер К., Костен К. [70], Филиппов А.Ф. [67], Gajo A., Mongiovi L. [82], Kumar R., Miglani A., Garg N. R. [83], Quiroga-Goode G., Carcione J.M. [86], Абдуллаев С.А., Соатов Я.У.

[1], Балуева А.В. [5], Дмитриев В.Л. [28], Aramaki Gunji., Yasuhara Kazuya [74], Diebels S., Ehlers W. [79], Dziecielsk R. [80], Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Салиев А.А. [13], Михайлов Д.Н., Николаевский В.Н. [42], Саатов Я.У., Наримов Ш.Н., Кудратов О. [52,53] и др.

К настоящему времени в этой области достигнуты большие успехи. Однако остаются нерешенными ещё много проблем, среди которых, прежде всего, нестационарные задачи о взаимодействии деформируемых тел с грунтами, упругими и многокомпонентными средами. Части из этих вопросов и посвящена диссертация.

Целью работы являются постановка задач о распространении осесимметричных нестационарных волн в упруго-пористом полупространстве и построение их аналитических решений.

Актуальность темы исследования. В настоящее время нестационарные задачи для упруго-пористой среды мало исследованы. Имеется ряд работ посвященных плоским задачам и их численно-аналитическим решениям. В то же время аналитические исследования нестационарных осесиметричных задач практически отсутствуют.

Актуальность этих задач продиктована насущными запросами практики (откачка подземных вод, нефти и газа, строительство земляных плотин, дамб и земляных сооружений, устойчивость откосов, подземное строительство и др.) и необходимостью дальнейшего развития общей теории многокомпонентных сред, включающей вопросы построения математических моделей и обоснования аналитических и численных методов решения конкретных краевых задач.

Таким образом, тема диссертации актуальна не только с фундаментальной, но с практической точки зрения.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- построены решения новых осесимметричных нестационарных задач о действии на упруго-пористое полупространство нестационарных поверхностных нагрузок;

- впервые построены интегральные представления решений этих задач с ядрами в виде нестационарных поверхностных функций влияния;

- получен явный вид ядер этих представлений.

Практическое значение работы заключается в построении точных решений задач о распространении осесимметричных нестационарных волн в упруго-пористом полупространстве. Они могут быть использованы для оценки точности численных и приближенных решений, а также в различных областях новой техники, в том числе при проектировании объектов ракетно-космических объектов в части прогнозирования процесса их посадки на грунт.

Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается использованием в постановке задач апробированной модели упруго-пористой среды Био, применением строгого математического аппарата, а также построением решений на основе известных результатов для плоских задач.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка используемой литературы.

В **первой** главе приводится обзор работ в области волновых процессов в упруго-пористых средах. Даны уравнения осесимметричного движения среды Био в цилиндрической системе координат. Рассмотрены все возможные граничные условия на границе полуплоскости и дано их интегральное представление решений с ядрами в виде нестационарных поверхностных функций влияния.

Во **второй** главе диссертации рассмотрено распространение осесимметричных нестационарных волн в упруго-пористом полупространстве под действием поверхностных кинематических возмущений. Построены изображения преобразований Ханкеля и Лапласа функция влияния и с помощью теорем о связи решений плоской и осесимметричной задач получен явный вид их оригиналов. Приведены примеров расчетов, результаты которых продемонстрированы в виде графиков.

В **третьей** главе рассмотрены осесимметричные нестационарные волны в упруго-пористом полупространстве под действием поверхностных силовых возмущений. Найдены изображения тех же преобразований соответствующих функций влияния. При отыскании их оригиналов аналогично второй главе использована связь решений плоской и осесимметричной задаче. Приведены примеры расчетов.

В **четвертой** и **пятой** главах исследованы аналогичные нестационарные задачи для различных вариантов смешанных поверхностных возмущений (заданы все возможные сочетания перемещений и напряжений). Построены изображения соответствующих функций влияния. Показано, что при некоторых граничных условиях их оригиналы могут быть найдены последовательным обращением преобразований Ханкеля и Лапласа. Приведены примеры расчетов.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Они обсуждались на

- IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2012 г.);

- Украинско-Российском научном семинаре «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы» (Львов, 2012 г.);

- IV Всероссийском симпозиуме «Механика композиционных материалов и конструкций», (Москва, ИПРИМ РАН, 2012 г.);

- Московской молодежной научно-практической конференции «Инновация в авиации и космонавтике -2013» (Москва, 2013 г.);

- Ломоносовских чтениях (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2013, 2014 г.);

- XIX и XX Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошной сред» им. А.Г. Горшкова (Москва, 2013, 2014 г.г.);

- 2-й Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем» (Москва, ИПРИМ РАН, 2013 г.).

- Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, МАИ, 2014)

Глава 1

Постановка задач о распространении нестационарных осесимметричных волн в упруго-пористом полупространстве

1.1. Современное состояние исследований

Динамическому деформированию пористой среды посвящен ряд работ. Среди них важное место занимают работа Био М.А. [8], в которой отражена теория распространения упругих стационарных волн в двухкомпонентной среде, состоящей из упругого скелета и пор, заполненных вязкой сжимаемой жидкостью. При этом открытые поры с внешней поверхностью среды имеют сообщение, а изолированные являются просто элементами твердой части пористого скелета. Изучаются волны при низкочастотных и высокочастотных амплитудах.

В работах Френкеля Я.И [69] и Био М.А. [76,77] рассматривались вопросы отражения волн от свободной границы полупространства двухкопонентной среды, состоящей из упругой и жидкой компонент (влажная почва, пористые звукопоглощающие материалы, пульпа). Изучены нестационарные упругие волны в бесконечной однородной упругой среде. Пористость понимается как объемная локальная несплошность материальной среды: полость, заключенная в объеме твердой фазы, заполненная газом в результате газовыделения или газопоглощения при литье. Индивидуальные морфологические особенности пор обусловлены их генезисом. Механизм зарождения пор в металлах не гомогенен. Обладая в общем случае произвольной формой и размерами, поры могут быть локализованы как внутри металла, так и на его границах, образуя замкнутые, тупиковые и сквозные поры. Наличие и степень пористости в твердых телах учитывается с помощью коэффициента пористости, равного отношению объема пор к общему объему, занимаемому среде. Использована математическая теория разрывов. Показано, что в такой среде распространяются две продольные и одна поперечная волны. Получены дифференциальные уравнения, определяющие изменения интенсивности продольных и поперечных волн в процессе их распространения.

В других публикациях исследуется распространение упругих волн в пористых средах. В том числе, Berryman James G., Thigpen Lewis, Chin Raymond C.Y [75] построили теорию распространения упругих волн в частично насыщенных жидкостью пористых средах. Сформулирован вариационный принцип, из которого выводятся уравнения движения для твердой, жидкой и газовой составляющих с учетом их взаимодействия. В предположении, что в низкочастотном приближении изменением капиллярного давления можно пренебречь, эти уравнения упрощаются и принимают форму известных уравнений Био для полностью насыщенных пористых сред. Однако коэффициенты этих уравнений зависят от частоты и значительно сложнее коэффициентов уравнений Био. Приводится подробный анализ их структуры. Затем рассматривается распространение пространственных упругих волн в частично насыщенной пористой среде.

В работе Цвинкера К. и Костена К. [70] рассмотрены вопросы распространения волн сжатия в пористых упруго-твердых телах, содержащих воздух. Исследовавано движение воздуха относительно упругой структуры. Показано, что в такой среде имеется две различные скорости, вызванные деформацией упругого скелета и статием воздуха.

Распространение волн в насыщенной среде, обусловленное действием подвижных нагрузок, а также движением в ней цилиндрических и сферических тел, изучено в работах Филиппова И.Г., Бахрамова Б.М. [63,64], Соатов Я.У. [58] и Мардонова Б.О. [39].

В работах Трофимчука А.Н. [60,61,62] рассматриваются плоские и осесимметричные нестационарные динамические задачи о вертикальном вдавливании жесткого штампа в гетерогенную насыщенную среду, состоящую из пористой твердой фазы и жидкости, заполняющей поры. Математическое описание такой среды осуществляется в рамках линейной модели Био. Путем совместного решения уравнения Био и уравнения движения жесткого штампа с применением интегральных преобразований Лапласа и Фурье (Ханкеля) получены парные интегральные уравнения относительно искомых контактных напряжений. Исследованы асимптотические решения интегральных уравнений. Показано, что в начале движения напряжения не зависят от пространственной координаты и пропорциональны скорости движения штампа. В осесимметричной задаче при переходе к статике напряжения пропорциональны перемещениям, а по пространственной координате имеют особенность.

В работах Гафурбаева С. М., Наримов Ш.Н. [10,11] приведена постановка и решение задачи об осесимметричном движении насыщенной пористой среды, возникающем при направленном сосредоточенном воздействии, симметрично приложенном относительно оси сферы. При помощи введения потенциальных функций уравнения движения насыщенных пористых сред сводятся к уравнениям, допускающим автомодельные решения. Эти решения анализируются в каждой из областей, возникающих за фронтами соответствующих упругих волн. Компоненты тензора напряжений и давления в жидкости определяются соотношениями, удобными для исследования напряженного состояния насыщенных пористых сред, а также для определения динамических и кинематических характеристик на фронте разрушения, распространяющемся с постоянной скоростью за фронтом упругой волны.

Абдуллаев С.А. и Соатов А.С. [1] с использованием системы уравнений динамики насыщенных жидкостью упруго-пористых сред в форме М. Био построили аналитическое решение для дельтаобразной нормальной нагрузки, движущейся с постоянной скоростью по поверхности полупространства.

В статье Балуева А.В. [5] разработан численный метод решения пространственных задач теории упругости и теории фильтрации для среды с полостями и трещинами, а также связанных упругогидродинамических задач о притоке жидкости к трещине в пористой среде (в частности, при гидроразрыве пласта). Метод позволяет решать пространственные задачи теории упругости и сопряженные упругогидродинамические задачи с граничными условиями в форме равенств и неравенств, когда граница, разделяющая области реализации этих условий заранее неизвестна.

В работе Дмитриева В.Л. [28] проведено исследование волновых процессов в насыщенных газом или жидкостью пористых средах с учетом нестационарных сил межфазного взаимодействия и теплообмена. Анализируются особенности распространения и затухания гармонических волн и волн конечной длительности в таких средах. Исследуются процессы отражения и прохождения гармонических волн через границу раздела однородной и пористой сред для случаев "закрытых" и "открытых" границ пористой среды.

В работах Филиппова И.Г., Бахрамова Б.М. [63,64,66] изучено влияние движения свободной воды в грунте через пористый упругий скелет на напряженно-деформированное состояние грунтового массива. Здесь учтены силовые воздействия фильтрационного потока жидкости на пористый скелет.

В работах Рахматулина Х.А., Соатова Я.У., Филиппова И.Г., Артыкова Т.У. [51], Соатова Я.У., Наримова Ш.Н., Кудратова О. [52,53], Соатова Я.У. [58] проведены расчеты сейсмических характеристик тонкослоистых двухкомпонентных сред. Исследовано распространение нестационарных сейсмических волн в водонасыщенных слоях грунта конечной толщины и установлено, что наличие насыщенного слоя между упругими однокомпонентными средами приводит к уменьшению амплитуды преломленных волн.

В статьях Малкова М.А.[41] и Чебана В.Г. [71] исследованы процессы динамического соударения двух полос из линейного упруго-однородного материала, а также удара четверти упругого пространства о неподвижную преграду. Решение соответствующих краевых задач для системы волновых уравнений получено относительно функций объемного расширения и вращения.

В статьях Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковского Д.В. [46-48] дана постановка и проведены аналитические исследования задач о действии нестационарной поверхностной нагрузки на упруго-пористую полуплоскость, движение которой описывается моделью Био, в том числе построены соответствующие нестационарные поверхностные функций влияния.

Yew C.H., Jogi P.N., Cray K.E [89,90] привели результаты глубинных измерений скоростей распространения продольных и поперечных волн в средах с пустыми порами, на оснований которых вычислены механические параметры двухкомпонентной модели Био-Френкеля. Анализ волновых явлений в двухкомпонентных средах при сильных и слабых возмущениях проведен в статье Клеймана Я.З. [35].

В работах Партона В.З [49]., Джонса Д.Р [29]., Шехтера О.Я. [72]., Соатова Я.У.[58], Мардонова Б.О. [39] и Мардонова Б.О., Ибраимова О. [40] рассмотрены одномерные (плоские, цилиндрические и сферические) задачи о распространении слабых волн в водонасыщенных грунтах. В случае невязкого заполнителя расчетным путем показано, что сжатие (растяжение) упругого скелета в основном происходит на фронте продольной волны первого типа, а величина давления жидкости определяется силой взаимодействия между фазами. При этом максимальное значение порового давления достигается на фронте продольной волны второго типа.

В работах Филиппова И.Г., Бахрамова Б.М. [63,64], Филиппова И.Г., Чебана В.Г. [65], Филиппова И.Г. [66] и Chosch`a S.Ch [78] для решения двумерных задач дифракции плоских и цилиндрических упругих волн на различных препятствиях использовался обобщенный метод Вольтерра.

Дифракция плоских упругих волн и волн с круговыми фронтами на прямоугольном недеформируемом плоском теле, совершающем поступательное движение, исследована в работах Dravinski M., Thau S.A [81], Kraut E.A [85].

В работах Аменицкого А.В., Белова А.А., Игумнова Л.А., Карелина И.С. [2], Аменицкого А.В., Белова А.А., Игумнова Л.А. [3], Аменицкого А.В., Игумнова Л.А., Карелина И.С. [4], Баженова В.Г., Игумнова Л.А. [6], Белова А.А., Игумнова Л.А., Карелина И.С., Литвинчук С.Ю. [7], Игумнова Л.А., Карелина И.С. [33] и Игумнова Л.А., Литвинчук С.Ю., Белова А.А. [34] приведены полученные методами граничных элементов (МГЭ) и граничных интегральных уравнений (ГИУ) результаты исследования процесса распространения нестационарных волн в пороупругих телах.

В работах Zhang`a Wenfei [91] исследование процесса распространения волн в вязкоупругих стратифицированных пористых средах проведено с использованием численным методом моделирования.

В статьях Gajo A., Mongiovi L. [82] проанализировано точное решение задачи о распространении сейсмических волн в пористой водонасыщенной среде, описываемой моделью Био. Решение получено для плоских волн в одномерной постановке. Определены параметры дисперсии волн 1-го и 2-го рода.

Kumar R., Miglani A., Garg N. R. [83,84] исследовали динамическую задачу Лэмба о возбуждении изотропной насыщенной пористой среды. Поведение среды описано теорией пороупругости Био. Для решения задачи использовано преобразование Лапласа-Ханкеля. Получена матрица собственных значений системы. Выполнены численные расчеты динамического отклика среды на внутреннюю точечную нагрузку. Получены оценки амплитуд смещений и напряжений в ближней и дальней зоне от точки возбуждения.

В статье Quiroga-Goode G., Carcione J. M. [86] рассмотрено три типа источников возбуждения (непроницаемый поршень, жидкий поршень и проницаемый поршень) и три типа граничных условий, соответствующих различной степени перетекания жидкости через границу раздела. Решение соответствующих задач получено в пространстве Фурье-изображений, а переход в пространство оригиналов выполнен численно.

Aramaki Gunji, Yasuhara Kazuya [74] рассмотрели консолидацию пористой среды в осесимметричном теле согласно теории линейной консолидации Био. Приведены дифференциальные уравнения фильтрации и упругости, а также описан процесс получение интегральных уравнений задачи и их дискретизация. Уравнение фильтрации моделировалось линейными, а уравнения упругости - постоянными граничными элементами, для интерполяции по области применялись треугольные элементы. Рассмотрены два численных примера консолидации грунта в образцах при их испытании в трехосном приборе, (примеры отличались граничными условиями). Сравнение результатов расчетов с опытными данными показало их хорошее согласование.

В статье [79] Diebels S., Ehlers W представили математическую модель для описания динамических процессов в насыщенной деформируемой пористой среде. Расчеты проводились с использованием метода конечных элементов. Приведены результаты расчета плоского поля течения грунтовых вод при наложении ударной нагрузки на часть свободной поверхности.

В статье Dziecielsk`a R. [80] исследовано распространение волн ускорения в среде, состоящей из упругого (вязкоупругого) пористого каркаса, насыщенного вязкой сжимаемой жидкостью. Изучены общие свойства таких волн, построены уравнения их распространения, проанализированы уравнения для амплитуд. Показано, что форма фронта волны и амплитуды перемещений на фронте изменяются в зависимости от пройденного расстояния. Установлено, что изменение амплитуд на фронте волны связано не только с относительным движением каркаса и жидкости (как в случае линейной двухфазной среды), но зависит также от начального возмущения среды на фронте волны. При этом скорость перемещений не зависит от энергии диссипации при относительном движении каркаса и жидкости.

Sarmcu K.S., Thayuddin M. [87] рассмотрели динамическую задачу о кручении полубесконечного круглого стержня из упруго-пористого материала с вязким жидким заполнителем. На боковой поверхности стержня выполняются условия непроницаемости и отсутствия касательного напряжения. Задача решена методом конечного преобразования Ханкеля с использованием операционного исчисления.

Из приведенного обзора следует, что точные аналитические решения рассматриваемых в диссертации осесимметричных нестационарных задач для упруго-пористого полупространства в литературе практически отсутствуют.

1.2. Уравнение осесимметричного движения среды Био в цилиндрической системе координат

Предполагается, что свойства материала полупространства $z \geq 0$ описываются моделью Био [8], уравнения движения которой имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
N\Delta\mathbf{u} + \left(A+N\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + Q\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U} = \rho_{11}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}, \\
Q\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + R\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U} = \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}.
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{U}$ - векторы смещения скелета и жидкости соответственно; A и N - упругие постоянные скелета среды; t - время; R - давление, которое должно быть приложено к жидкости, для того чтобы заполнить пористый объем (при этом общий объем остается неизменным); Q - величина сцепления между твердыми и жидкими компонентами при деформации; $\rho_{11} = \left(1-\beta_0\right)\rho_s - \rho_{12}$; $\rho_{22} = \beta_0\rho_f - \rho_{12}$; β_0 - пористость среды; ρ_{12} - коэффициент динамической связи между твёрдыми и жидкими компонентами; ρ_s и ρ_f - плотность твёрдого и жидкого компонента соответственно; Δ - оператор Лапласа.

Уравнения (1.1) эквивалентны следующим волновым уравнениям относительно скалярных φ_1, φ_2 и векторного ψ потенциалов перемещений [13]:

$$
\Delta\varphi_k = \frac{1}{c_k^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t^2} \quad \left(k=1,2\right),\ \Delta\psi = \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{1.2}
$$

где

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + \operatorname{rot}\psi,\ \mathbf{U} = \operatorname{grad}\left(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2\right) + \operatorname{rot}\left(\beta_3\psi\right), \tag{1.3}$$

$$c_k^2 = \frac{P + Q\beta_k}{\rho_{11} + \rho_{12}\beta_k}\ \left(k = 1, 2\right), \quad c_3^2 = \frac{N}{\rho_{11} + \beta_3\rho_{12}},\ \beta_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}},\ P = A + 2N, \tag{1.4}$$

а числа β_1 и β_2 являются корнями уравнения

$$\left(\rho_{22}Q - \rho_{12}P\right)\beta^2 + \left(\rho_{22}P - \rho_{11}R\right)\beta + \rho_{12}P - \rho_{11}Q = 0.$$

Компоненты e_{ij} и ε_{ij} тензоров деформаций в скелете и в жидкости связаны с векторами перемещений следующим образом:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right),\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i\right), \tag{1.5}$$

где $\nabla_i u_j$ и $\nabla_i U_j$ - ковариантные производные ковариантных компонент векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{U}$ в некоторой криволинейной системе координат.

Напряжения в скелете и давление в жидкости определяются физическим законом.

$$\sigma_{ij} = 2Ne_{ij} + \left(Ae + Q\varepsilon\right)g_{ij},\ \sigma = Qe + R\varepsilon,\ e = e_{ij}g^{ij},\ \varepsilon = \varepsilon_{ij}g^{ij}, \tag{1.6}$$

где g_{ij}, g^{ij} - компоненты метрического тензора, а e и ε - первые инварианты соответствующих тензоров.

Далее ограничимся вариантом симметричных относительно оси Oz поверхностных возмущений и нулевых начальных условий. При этом в цилиндрической системе координат $r, z, \theta\ \left(-\pi < \theta \le \pi\right)$ перемещения и остальные компоненты напряженно-деформированного состояния являются функциями только времени, r и z. Тогда соотношения (1.2), (1.3), (1.5) и

(1.6) относительно физических компонент векторов и тензоров (им соответствует координаты в нижних индексах) с учетом формул для операторов принимают следующий вид [10]:

- уравнения движения

$$\Delta\varphi_k = \frac{1}{c_k^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t^2} \quad \left(k=1,2\right), \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} = \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1.7}$$
$$\psi_r = \psi_z \equiv 0, \psi_\theta = \psi;$$

- кинематические соотношения

$$u_r = u = \frac{\partial\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad u_z = w = \frac{\partial\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}, u_\theta \equiv 0,$$
$$U_r = U = \frac{\partial\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)}{\partial r} - \beta_3\frac{\partial\psi}{\partial z}, U_z = W = \beta_1\frac{\partial\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)}{\partial z} + \frac{\beta_3}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}, \tag{1.8}$$
$$U_\theta \equiv 0;$$

- выражения деформаций $e_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$, где $\left\{\alpha,\beta\right\} = \left\{r,z,\theta\right\}$,скелета и жидкости через перемещения

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, e_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right), \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{1.9}$$
$$e = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz}, \ \varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}, e_{r\theta} = e_{z\theta} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} \equiv 0;$$

- связь напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, где $\left\{\alpha,\beta\right\} = \left\{r,z,\theta\right\}$, в скелете и давления σ в жидкости с кинематическими параметрами

$$\sigma_{rr} = 2N\frac{\partial u}{\partial r} + \left(Ae + Q\varepsilon\right),\ \sigma_{zz} = 2N\frac{\partial w}{\partial z} + \left(Ae + Q\varepsilon\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2N\frac{u}{r} + \left(Ae + Q\varepsilon\right),\ \sigma_{rz} = N\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),\ \sigma = Qe + R\varepsilon, \qquad (1.10)$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r},\ \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{U}{r}.$$

Далее будем использовать безразмерные величины (штрихи соответствуют безразмерным величинам; в последующем изложении они опущены):

$$r' = \frac{r}{L},\ x' = \frac{x}{L},\ y' = \frac{y}{L},\ z' = \frac{z}{L},\ u' = \frac{u}{L},\ w' = \frac{w}{L},\ U' = \frac{U}{L}, W' = \frac{W}{L}, \tau = \frac{c_1 t}{L},$$

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{N}, \{\alpha,\beta\} = \{r, z, \theta\}, \sigma' = \frac{\sigma}{N}, \varphi_j = \frac{\varphi_j}{L^2}\ \left(j = 1,2\right),$$

$$\psi' = \frac{\psi}{L^2}, \gamma_k = \frac{c_1}{c_k}\ \left(k = 1,2,3\right), \eta_1 = \frac{A}{H}, \eta_2 = \frac{Q}{H}, \eta_3 = \frac{R}{H}, H = P + 2Q + R,$$

где L - некоторый линейный размер; $Oxyz$ - прямоугольная декартова система координат, связанная с цилиндрическими координатами стандартным образом.

В безразмерном виде уравнения (1.7) принимают следующий вид (точками обозначено дифференцирование по τ, $k = 1,2$):

$$\Delta\varphi_k = \gamma_k^2\ddot{\varphi}_k \quad, \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} = \gamma_3^2\ddot{\psi}; \qquad (1.11)$$

Соотношения (1.8), (1.9) сохраняют свой вид, а физический закон (1.10) преобразовывается так:

$$\sigma_{rr} = 2\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\eta_1 e + \eta_2 \varepsilon\right),\ \sigma_{zz} = 2\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\eta_1 e + \eta_2 \varepsilon\right),$$
$$\sigma_{\theta\theta} = 2\frac{u}{r} + \left(\eta_1 e + \eta_2 \varepsilon\right),\ \sigma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z},\ \sigma = \eta_2 e + \eta_3 \varepsilon. \tag{1.12}$$

1.3. Дополнительные условия и интегральные представления решений

Линейные уравнения (1.2) описывают волновые движения в однородной изотропной насыщеной пористой среды. Для полной постановки начально-краевой задачи динамики насыщеных пористых сред эти уравнеия необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

Полагаем что, в начальный момент τ возмущения отсутствуют:

$$\varphi_j\big|_{\tau=0} = \psi\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_j\big|_{\tau=0} = \dot{\psi}\big|_{\tau=0} = 0\,. \tag{1.13}$$

Основные граничные условия для насыщеных пористых сред имеют слудующий вид [43]:

- кинематические условия ($\mathbf{u}_0$ **-** заданное перемещение)

$$\mathbf{u}\big|_{\Pi} = \mathbf{u}_0,\ \left(\mathbf{U},\boldsymbol{\nu}\right)\big|_{\Pi} = \left(\mathbf{u}_0,\boldsymbol{\nu}\right); \tag{1.14}$$

- силовые условия **(P -** заданная сила; $\mathbf{p}^{\nu} = \sigma^{ij}\nu_j\mathbf{e}_i$ - вектор напряжений)

$$\mathbf{p}^{\nu}\big|_{\Pi} = (1-\beta)\mathbf{P},\ \sigma\big|_{\Pi} = \beta\left(\mathbf{P},\boldsymbol{\nu}\right); \tag{1.15}$$

- смешанные условия первого типа (заданы нормальное перемещение u_{n0} и вектор касательной силы $\mathbf{P}_{\tau}$)

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\Big|_{\Pi}=\left(\mathbf{U},\mathbf{v}\right)\Big|_{\Pi}=u_{n0},\ \left[\mathbf{p}^{\nu}-\left(\mathbf{p}^{\nu},\mathbf{v}\right)\mathbf{v}\right]\Big|_{\Pi}=\mathbf{P}_{\tau}; \qquad (1.16)$$

- смешанные условия второго типа (заданы вектор касательного перемещения $\mathbf{u}_{\tau}$ и нормальная сила P)

$$\left[\mathbf{u}-\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\mathbf{v}\right]\Big|_{\Pi}=\mathbf{u}_{\tau},\ \left(\mathbf{p}^{\nu},\mathbf{v}\right)\Big|_{\Pi}=(1-\beta)P,\ \sigma\big|_{\Pi}=\beta P. \qquad (1.17)$$

Здесь Π - граничная поверхность; $\mathbf{v}=\nu_i\mathbf{e}^i$ - единичный вектор внешней нормали; $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ - ковариантные и контравариантные базисные векторы.

Применительно к полупространству $z\ge 0$ в случае осевой симметрии соотношения (1.14) - (1.17) имеют вид ($\mathbf{v}=\mathbf{e}_z$; $\mathbf{u}_0=u_0\mathbf{e}_r+w_0\mathbf{e}_z$; $\mathbf{P}=P\mathbf{e}_z+\mathbf{P}_{\tau}$, $\mathbf{P}_{\tau}=Q\mathbf{e}_r$; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_{\theta}$ - базисные векторы цилиндрической системы координат):

$$u\big|_{z=0}=u_0(r,\tau),\ \ w\big|_{z=0}=W\big|_{z=0}=w_0(r,\tau); \qquad (1.18)$$

$$\sigma_{rz}\big|_{z=0}=(1-\beta)Q(r,\tau),\ \ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=(1-\beta)P(r,\tau),\ \ \sigma\big|_{z=0}=\beta P(r,\tau); \qquad (1.19)$$

$$w\big|_{z=0}=W\big|_{z=0}=w_0(r,\tau),\ \ \sigma_{rz}\big|_{z=0}=Q(r,\tau); \qquad (1.20)$$

$$u\big|_{z=0}=u_0(r,\tau),\ \ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=(1-\beta)P(r,\tau),\ \ \sigma\big|_{z=0}=\beta P(r,\tau). \qquad (1.21)$$

Искомые перемещения как решения начально-краевой задачи (1.11), (1.13), (1.18) (или (1.19), или (1.20), или (1.21)) записываем в виде сверток (они обозначаются звездочками) по пространственным координатам x, y $(x^2+y^2=r^2)$ и времени [19, 20, 24, 26]. При этом $G_{\alpha\beta}$ – поверхностные функции влияния, где α и β индексы принимают одно из следующих значений: $u, w, U, W, zz, rr, \sigma$.

1. Граничные условия (1.18) (первая группа):

$$\begin{gathered}
u(r,z,\tau) = u_0(r,\tau) *** G_{uu}^{(1)} + \\
+ w_0(r,\tau) *** \left[G_{uw}^{(1)}(r,z,\tau) + G_{uW}^{(1)}(r,z,\tau) \right], \\
w(r,z,\tau) = u_0(r,\tau) *** G_{wu}^{(1)}(r,z,\tau) + \\
+ w_0(r,\tau) *** \left[G_{ww}^{(1)}(r,z,\tau) + G_{wW}^{(1)}(r,z,\tau) \right], \\
U(r,z,\tau) = u_0(r,\tau) *** G_{Uu}^{(1)}(r,z,\tau) + \\
+ w_0(r,\tau) *** \left[G_{Uw}^{(1)}(r,z,\tau) + G_{UW}^{(1)}(r,z,\tau) \right], \\
W(r,z,\tau) = u_0(r,\tau) *** G_{Wu}^{(1)}(r,z,\tau) + \\
+ w_0(r,\tau) *** \left[G_{Ww}^{(1)}(r,z,\tau) + G_{WW}^{(1)}(r,z,\tau) \right];
\end{gathered} \tag{1.22}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{zz}(r,z,\tau) = u_0(r,\tau) *** G_{zzu}^{(1)}(r,z,\tau) + \\
+ w_0(r,\tau) *** \left[G_{zzw}^{(1)}(r,z,\tau) + G_{zzW}^{(1)}(r,z,\tau) \right], \\
\sigma_{rz}(r,z,\tau) = u_0(r,\tau) *** G_{rzu}^{(1)}(r,z,\tau) + \\
+ w_0(r,\tau) *** \left[G_{rzw}^{(1)}(r,z,\tau) + G_{rzW}^{(1)}(r,z,\tau) \right], \\
\sigma(r,z,\tau) = u_0(r,\tau) *** G_{\sigma u}^{(1)}(r,z,\tau) + \\
+ w_0(r,\tau) *** \left[G_{\sigma w}^{(1)}(r,z,\tau) + G_{\sigma W}^{(1)}(r,z,\tau) \right].
\end{gathered} \tag{1.23}$$

Здесь

а) функции

$$G_{uu}^{(1)} = u,\ G_{wu}^{(1)} = w,\ G_{Uu}^{(1)} = U,\ G_{Wu}^{(1)} = W,\ G_{zzu}^{(1)} = \sigma_{zz},\ G_{rzu}^{(1)} = \sigma_{rz},\ G_{\sigma u}^{(1)} = \sigma \tag{1.24}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*первая подгруппа*)

$$u\big|_{z=0} = \delta\left(x, y, \tau\right), \quad w\big|_{z=0} = W\big|_{z=0} = 0; \tag{1.25}$$

б) функции

$$G_{uw}^{(1)} = u,\ G_{ww}^{(1)} = w,\ G_{Uw}^{(1)} = U,\ G_{Ww}^{(1)} = w,\ G_{zzw}^{(1)} = \sigma_{zz},\ ,\ G_{rzw}^{(1)} = \sigma_{rz},\ G_{\sigma w}^{(1)} = \sigma \tag{1.26}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*вторая подгруппа*)

$$w\big|_{z=0} = \delta\left(x, y, \tau\right), \quad u\big|_{z=0} = W\big|_{z=0} = 0; \tag{1.27}$$

в) функции

$$G_{uW}^{(1)} = u,\ G_{wW}^{(1)} = w,\ G_{UW}^{(1)} = U,\ G_{WW}^{(1)} = w,\ G_{zzW}^{(1)} = \sigma_{zz},\ G_{rzW}^{(1)} = \sigma_{rz},\ G_{\sigma W}^{(1)} = \sigma \tag{1.28}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*третья подгруппа*)

$$W\big|_{z=0} = \delta\left(x, y, \tau\right), \quad u\big|_{z=0} = w_{z=0} = 0. \tag{1.29}$$

<u>2. Граничные услоия (1.19) (вторая группа):</u>

$$\begin{aligned}
&u(r,z,\tau) = Q(r,\tau) *** G_{urz}^{(2)}(r,z,\tau) + \\
&\quad + P(r,\tau) *** \left[(1-\beta_0) G_{uzz}^{(2)}(r,z,\tau) + \beta_0 G_{u\sigma}^{(2)}(r,z,\tau)\right], \\
&w(r,z,\tau) = Q(r,\tau) *** G_{wrz}^{(2)}(r,\tau) + \\
&\quad + P(r,\tau) *** \left[(1-\beta_0) G_{wzz}^{(2)}(r,z,\tau) + \beta_0 G_{w\sigma}^{(2)}(r,z,\tau)\right], \\
&U(r,z,\tau) = Q(r,\tau) *** G_{Urz}^{(2)}(r,z,\tau) + \\
&\quad + P(r,\tau) *** \left[(1-\beta_0) G_{Uzz}^{(2)}(r,z,\tau) + \beta_0 G_{U\sigma}^{(2)}(r,z,\tau)\right], \\
&W(r,z,\tau) = Q(r,\tau) *** G_{Wrz}^{(2)}(r,z,\tau) + \\
&\quad + P(r,\tau) *** \left[(1-\beta_0) G_{Wzz}^{(2)}(r,z,\tau) + \beta_0 G_{W\sigma}^{(2)}(r,z,\tau)\right];
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{zz}(r,z,\tau)=Q(r,\tau)***G^{(2)}_{zzrz}(r,z,\tau)+\\
+P(r,\tau)***\Big[(1-\beta_0)G^{(2)}_{zzzz}(r,z,\tau)+\beta_0 G^{(2)}_{zz\sigma}(r,z,\tau)\Big],\\
\sigma_{rz}(r,z,\tau)=Q(r,\tau)***G^{(2)}_{rzrz}(r,z,\tau)+\\
+P(r,\tau)***\Big[(1-\beta_0)G^{(2)}_{rzzz}(r,z,\tau)+\beta_0 G^{(2)}_{rz\sigma}(r,z,\tau)\Big],\\
\sigma(r,z,\tau)=Q(r,\tau)***G^{(2)}_{\sigma rz}(r,z,\tau)+\\
+P(r,\tau)***\Big[(1-\beta_0)G^{(2)}_{\sigma zz}(r,z,\tau)+\beta_0 G^{(2)}_{\sigma\sigma}(r,z,\tau)\Big].
\end{gathered} \tag{1.31}$$

Здесь

а) функции

$$G^{(2)}_{urz}=u,\ G^{(2)}_{wrz}=w, G^{(2)}_{Urz}=U,\ G^{(2)}_{Wzz}=W,\ G^{(2)}_{zzrz}=\sigma_{zz},\ G^{(2)}_{rzrz}=\sigma_{rz},\ G^{(2)}_{\sigma rz}=\sigma \tag{1.32}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*первая подгруппа*)

$$\sigma_{rz}\big|_{z=0}=\delta(x,y,\tau),\ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=\sigma\big|_{z=0}=0; \tag{1.33}$$

б) функции

$$G^{(2)}_{uzz}=u,\ G^{(2)}_{wzz}=w,\ G^{(2)}_{Uzz}=U,\ G^{(2)}_{Wzz}=W,\ G^{(2)}_{zzzz}=\sigma_{zz},\ G^{(2)}_{rzzz}=\sigma_{rz},\ G^{(2)}_{\sigma zz}=\sigma \tag{1.34}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*вторая подгруппа*)

$$\sigma_{rz}\big|_{z=0}=0,\ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=\delta(x,y,\tau),\ \sigma\big|_{z=0}=0; \tag{1.35}$$

в) функции

$$G^{(2)}_{u\sigma}=u,\ G^{(2)}_{w\sigma}=w,\ G^{(2)}_{U\sigma}=U,\ G^{(2)}_{W\sigma}=W,\ G^{(2)}_{zz\sigma}=\sigma_{zz},\ G^{(2)}_{rz\sigma}=\sigma_{rz},\ G^{(2)}_{\sigma\sigma}=\sigma \tag{1.36}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*третья подгруппа*)

$$\sigma_{rz}\big|_{z=0}=0,\ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=0,\ \sigma\big|_{z=0}=\delta\left(x,y,\tau\right). \qquad (1.37)$$

<u>3. Граничные условия (1.20) (третья группа)</u>

$$\begin{aligned}
u\left(r,z,\tau\right)&=Q\left(r,\tau\right)***G_{urz}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\\
&\quad+w_0\left(r,\tau\right)***\left[G_{uw}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)+G_{uW}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\right],\\
w\left(r,z,\tau\right)&=Q\left(r,\tau\right)***G_{wrz}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\\
&\quad+w_0\left(r,\tau\right)***\left[G_{ww}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)+G_{wW}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\right],\\
U\left(r,z,\tau\right)&=Q\left(r,\tau\right)***G_{Urz}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\\
&\quad+w_0\left(r,\tau\right)***\left[G_{Uw}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)+G_{UW}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\right],\\
W\left(r,z,\tau\right)&=Q\left(r,\tau\right)***G_{Wrz}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\\
&\quad+w_0\left(r,\tau\right)***\left[G_{Ww}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)+G_{WW}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\right];
\end{aligned} \qquad (1.38)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}\left(r,z,\tau\right)&=Q\left(r,\tau\right)***G_{zzrz}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\\
&\quad+w_0\left(r,\tau\right)***\left[G_{zzw}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)+G_{zzW}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\right],\\
\sigma_{rz}\left(r,z,\tau\right)&=Q\left(r,\tau\right)***G_{rzrz}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\\
&\quad+w_0\left(r,\tau\right)***\left[G_{rzw}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)+G_{rzW}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\right],\\
\sigma\left(r,z,\tau\right)&=Q\left(r,\tau\right)***G_{\sigma rz}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\\
&\quad+w_0\left(r,\tau\right)***\left[G_{\sigma w}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)+G_{\sigma W}^{(3)}\left(r,z,\tau\right)\right].
\end{aligned} \qquad (1.39)$$

Здесь

а) функции

$$G_{urz}^{(3)}=u,\ G_{wrz}^{(3)}=w,\ G_{Urz}^{(3)}=U,\ G_{Wrz}^{(3)}=W,\ G_{zzrz}^{(3)}=\sigma_{zz},\ G_{rzrz}^{(3)}=\sigma_{rz},\ G_{\sigma rz}^{(3)}=\sigma \qquad (1.40)$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*первая подгруппа*)

$$w\big|_{z=0} = W\big|_{z=0} = 0,\ \sigma_{rz}\big|_{z=0} = \delta\left(x, y, \tau\right); \tag{1.41}$$

б) функции

$$G_{uw}^{(3)} = u,\ G_{ww}^{(3)} = w,\ G_{Uw}^{(3)} = U,\ G_{Ww}^{(3)} = W,\ G_{zzw}^{(3)} = \sigma_{zz},\ G_{rzw}^{(3)} = \sigma_{rz},\ G_{\sigma w}^{(3)} = \sigma \tag{1.42}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*вторая подгруппа*)

$$w\big|_{z=0} = \delta\left(x, y, \tau\right),\ \ W\big|_{z=0} = 0,\ \sigma_{rz}\big|_{z=0} = 0; \tag{1.43}$$

в) функции

$$G_{uW}^{(3)} = u,\ G_{wW}^{(3)} = w,\ G_{UW}^{(3)} = U,\ G_{WW}^{(3)} = W,\ G_{zzW}^{(3)} = \sigma_{zz},\ G_{rzW}^{(3)} = \sigma_{rz},\ G_{\sigma W}^{(3)} = \sigma \tag{1.44}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*третья подгруппа*)

$$w\big|_{z=0} = 0,\ \ W\big|_{z=0} = \delta\left(x, y, \tau\right),\ \sigma_{rz}\big|_{z=0} = 0\,. \tag{1.45}$$

4. Граничные условия (1.21) (четвертая группа)

$$\begin{aligned}
&u\left(r,z,\tau\right) = u_0\left(r,\tau\right) *** G_{uu}^{(4)}\left(r,z,\tau\right) + \\
&+ P\left(r,\tau\right) *** \left[(1-\beta)G_{uzz}^{(4)}\left(r,z,\tau\right) + \beta G_{u\sigma}^{(4)}\left(r,z,\tau\right)\right], \\
&w\left(r,z,\tau\right) = u_0\left(r,\tau\right) *** G_{wu}^{(4)}\left(r,z,\tau\right) + \\
&+ P\left(r,\tau\right) *** \left[(1-\beta)G_{wzz}^{(4)}\left(r,z,\tau\right) + \beta G_{w\sigma}^{(4)}\left(r,z,\tau\right)\right], \\
&U\left(r,z,\tau\right) = u_0\left(r,\tau\right) *** G_{Uu}^{(4)}\left(r,z,\tau\right) + \\
&+ P\left(r,\tau\right) *** \left[(1-\beta)G_{Uzz}^{(4)}\left(r,z,\tau\right) + \beta G_{U\sigma}^{(4)}\left(r,z,\tau\right)\right], \\
&W\left(r,z,\tau\right) = u_0\left(r,\tau\right) *** G_{Wu}^{(4)}\left(r,z,\tau\right) + \\
&+ P\left(r,\tau\right) *** \left[(1-\beta)G_{Wzz}^{(4)}\left(r,z,\tau\right) + \beta G_{W\sigma}^{(4)}\left(r,z,\tau\right)\right];
\end{aligned} \tag{1.46}$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{zz}\left(r,z,\tau\right)=u_0\left(r,\tau\right)***G^{(4)}_{zzu}\left(r,z,\tau\right)+\\
&+P\left(r,\tau\right)***\left[(1-\beta)G^{(4)}_{zzzz}\left(r,z,\tau\right)+\beta G^{(4)}_{zz\sigma}\left(r,z,\tau\right)\right],\\
&\sigma_{rz}\left(r,z,\tau\right)=u_0\left(r,\tau\right)***G^{(4)}_{rzu}\left(r,z,\tau\right)+\\
&+P\left(r,\tau\right)***\left[(1-\beta)G^{(4)}_{rzzz}\left(r,z,\tau\right)+\beta G^{(4)}_{rz\sigma}\left(r,z,\tau\right)\right],\\
&\sigma\left(r,z,\tau\right)=u_0\left(r,\tau\right)***G^{(4)}_{\sigma u}\left(r,z,\tau\right)+\\
&+P\left(r,\tau\right)***\left[(1-\beta)G^{(4)}_{\sigma zz}\left(r,z,\tau\right)+\beta G^{(4)}_{\sigma\sigma}\left(r,z,\tau\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

а) функции

$$G^{(4)}_{uu}=u,\ G^{(4)}_{wu}=w,\ G^{(4)}_{Uu}=U,\ G^{(4)}_{Wu}=W,\ G^{(4)}_{zzu}=\sigma_{zz},\ G^{(4)}_{rzu}=\sigma_{rz},\ G^{(4)}_{\sigma u}=\sigma \tag{1.48}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*первая подгруппа*)

$$u\big|_{z=0}=\delta\left(x,y,\tau\right),\ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=0,\ \sigma\big|_{z=0}=0; \tag{1.49}$$

б) функции

$$G^{(4)}_{uzz}=u,\ G^{(4)}_{wzz}=w,\ G^{(4)}_{Uzz}=U,\ G^{(4)}_{Wzz}=W,\ G^{(4)}_{zzzz}=\sigma_{zz},\ G^{(4)}_{rzzz}=\sigma_{rz},\ G^{(4)}_{\sigma zz}=\sigma \tag{1.50}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*вторая подгруппа*)

$$u\big|_{z=0}=0,\ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=\delta\left(x,y,\tau\right),\ \sigma\big|_{z=0}=0; \tag{1.51}$$

в) функции

$$G^{(4)}_{u\sigma}=u,\ G^{(4)}_{w\sigma}=w,\ G^{(4)}_{U\sigma}=U,\ G^{(4)}_{W\sigma}=W,\ G^{(4)}_{zz\sigma}=\sigma_{zz},\ G^{(4)}_{rz\sigma}=\sigma_{rz},\ G^{(4)}_{\sigma\sigma}=\sigma \tag{1.52}$$

- решения уравнений (1.11) с начальными условиями (1.13) и следующими граничными условиями (*третья подгруппа*)

$$u\big|_{z=0}=0,\ \sigma_{zz}\big|_{z=0}=0,\ \sigma\big|_{z=0}=\delta\left(x,y,\tau\right). \tag{1.53}$$

Здесь и далее $\delta(x, y, \tau)$ - дельта-функция Дирака [12].

Глава 2

Полупространство под действием кинематических возмущений (граничные условия первой группы)

2.1 Изображения перемещений и напряжений

К уравнениям (1.7) и отношениям (1.8), (1.9), (1.12), (1.13) применяем преобразования Лапласа по времени и Ханкеля (порядка $\nu = 0$ для функций φ_k, w, W, e, ε, σ_{zz}, σ и порядка $\nu = 1$ для ψ, u, U, σ_{rz}) по радиусу r (индексы «L» и «H_ν» указывают на соответствующие изображения; в случаях, не допускающих двоякого толкования, порядок преобразования Ханкеля не указывается; s и q - параметры этих преобразований) [12]:

$$\frac{\partial^2 \varphi_l^{HL}}{\partial z^2} - k_l^2\left(q^2, s^2\right)\varphi_l^{HL} = 0\ \left(l = 1,2\right), \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - k_3^2\left(q^2, s^2\right)\psi^{HL} = 0,$$
$$k_j\left(q,s\right) = \sqrt{q + \gamma_j^2 s}\ \left(j = 1,2,3\right), \operatorname{Re}\sqrt{\cdot} > 0; \tag{2.1}$$

$$u^{HL} = -q\left(\varphi_1^{HL} + \varphi_2^{HL}\right) - \frac{\partial \psi^{HL}}{\partial z}, \quad w^{HL} = \frac{\partial\left(\varphi_1^{HL} + \varphi_2^{HL}\right)}{\partial z} + q\psi^{HL},$$
$$U^{HL} = -q\left(\beta_1\varphi_1^{HL} + \beta_2\varphi_1^{HL}\right) - \beta_3\frac{\partial \psi^{HL}}{\partial z}, W^{HL} = \frac{\partial\left(\beta_1\varphi_1^{HL} + \beta_2\varphi_1^{HL}\right)}{\partial z} + \beta_3 q\psi^{HL}, \tag{2.2}$$
$$e^{HL} = qu^{HL} + \frac{\partial w^{HL}}{\partial z}, \varepsilon^{HL} = qU^{HL} + \frac{\partial W^{HL}}{\partial z};$$

$$\sigma_{zz}^{HL} = 2\frac{\partial w^{HL}}{\partial z} + \left(\eta_1 e^{HL} + \eta_2\varepsilon^{HL}\right), \sigma_{rz}^{HL} = -qw^{HL} + \frac{\partial u^{HL}}{\partial z},$$
$$\sigma^{HL} = \eta_2 e^{HL} + \eta_3\varepsilon^{HL}; \tag{2.3}$$

Ограниченные решения уравнений (2.1) имеют вид:

$$\varphi_l^{HL}\left(q,s\right)=C_l E_l(q,z,s)\ \left(l=1,2\right),\ \psi^{HL}\left(q,s\right)=C_3 E_3(q,z,s),$$
$$E_j(q,z,s)=e^{-k_j(q^2,s^2)z}\ (j=1,2,3), \tag{2.4}$$

где C_1, C_2 и C_3 - постоянные интегрирования.

Подстановка этих равенств в (2.2) и (2.3) приводит к следующим формулам для изображений перемещений и напряжений:

$$u^{HL}\left(q,s,z\right)=-q\sum_{l=1}^{2}C_l E_l(q,z,s)+C_3 k_3(q^2,s^2)E_3(q,z,s),$$
$$w^{HL}\left(q,s,z\right)=-\sum_{l=1}^{2}C_l k_l(q^2,s^2)E_l(q,z,s)+qC_3 E_3(q,z,s),$$
$$U^{HL}\left(q,s,z\right)=-q\sum_{l=1}^{2}\beta_j C_j E_l(q,z,s)+\beta_3 C_3 k_3(q^2,s^2)E_3(q,z,s), \tag{2.5}$$
$$W^{HL}\left(q,s,z\right)=-\sum_{l=1}^{2}\beta_l C_l k_l(q^2,s^2)E_l(q,z,s)+\beta_3 qC_3 E_3(q,z,s);$$

$$\sigma_{zz}^{HL}(q,z,s)=\sum_{l=1}^{2}C_l\kappa_l(q^2,s^2)E_l(q,z,s)-2qC_3 k_3(q^2,s^2)E_3(q,z,s),$$
$$\sigma_{rz}^{HL}(q,z,s)=2q\sum_{l=1}^{2}C_l k_l(q^2,s^2)E_l(q,z,s)-C_3\kappa_3(q^2,s^2)E_3(q,z,s), \tag{2.6}$$
$$\sigma^{HL}(q,z,s)=s^2\sum_{l=1}^{2}C_l\lambda_{23l}\gamma_l^2 E_l(q,z,s),$$

где

$$\kappa_l(q,s)=2q+\left(2+\lambda_{12l}\right)\gamma_l^2 s,\ \kappa_3(q,s)=2q+\gamma_3^2 s,$$
$$\lambda_{12l}=\eta_1+\beta_l\eta_2,\ \lambda_{23l}=\eta_2+\beta_l\eta_3, \tag{2.7}$$

2.2. Изображения функций влияния первой подгруппы

К граничным условиям (1.25) применяем указанные в п. 2.1 преобразования [12]:

$$u^{HL}\Big|_{z=0}=\frac{1}{2\pi},\quad w^{HL}\Big|_{z=0}=W^{HL}\Big|_{z=0}=0. \tag{2.8}$$

Постановка в (2.8) соотношений (2.5) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования [26]:

$$\mathbf{A}_1\mathbf{C}=-\frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_1, \tag{2.9}$$

где

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} q & q & -k_3(q^2,s^2) \\ k_1(q^2,s^2) & k_2(q^2,s^2) & -q \\ \beta_1 k_1(q^2,s^2) & \beta_2 k_2(q^2,s^2) & -\beta_3 q \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Её решение записывается так:

$$\begin{gathered} C_1=\beta_{23}\frac{qk_2(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)},\ C_2=\beta_{31}\frac{qk_1(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\ C_3=\beta_{21}\frac{k_1(q^2,s^2)k_2(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где

$$\begin{gathered} R(q,s)=q\left[\left(\beta_1-\beta_3\right)k_1(q,s)+\left(\beta_3-\beta_2\right)k_2(q,s)\right]+ \\ +\left(\beta_2-\beta_1\right)k_1(q,s)k_2(q,s)k_3(q,s). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Учитывая эти равенства, из (2.5) и (2.6) с учетом обозначений (1.24) находим изображения соответствующих функций влияния:

$$
\begin{aligned}
G_{uu}^{(1)HL} &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
G_{wu}^{(1)HL} &= w^{HL} = \sum_{l=1}^{3} w_l^{HL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
G_{Uu}^{(1)HL} &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
G_{Wu}^{(1)HL} &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s);
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{zzu}^{(1)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
G_{rzu}^{(1)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
G_{\sigma u}^{(1)HL} &= \sigma^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s).
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
u_l^{HL} = (-1)^l \beta_{(3-l)3} \frac{q^2 k_{(3-l)}(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
u_3^{HL} = \beta_{21} \frac{k_1(q^2,s^2) k_2(q^2,s^2) k_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
w_l^{HL} = (-1)^l \beta_{(3-l)3} \frac{q k_{3-l}(q^2,s^2) k_l(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
w_3^{HL} = \beta_{21} \frac{q k_1(q^2,s^2) k_2(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
U_j^{HL}(q,s) = \beta_j u_j^{HL}(q,s), \quad W_j^{HL}(q,s) = \beta_j w_j^{HL}(q,s);
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

$$\sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^{3-l}\beta_{(3-l)3}\frac{qk_{3-l}(q^2,s^2)\kappa_l(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)},$$

$$\sigma_{zz3}^{HL} = -\beta_{21}\frac{qk_1(q^2,s^2)k_2(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{\pi R(q^2,s^2)},$$

$$\sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^{3-l}\beta_{(3-l)3}\frac{q^2k_{(3-l)}(q^2,s^2)k_l(q^2,s^2)}{\pi R(q^2,s^2)}, \tag{2.15}$$

$$\sigma_{rz3}^{HL} = -\beta_{21}\frac{k_1(q^2,s^2)k_2(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)},$$

$$\sigma_{l}^{HL} = (-1)^{3-l}\lambda_{23l}\gamma_l^2\beta_{(3-l)3}\frac{qs^2k_{(3-l)}(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}.$$

$$\beta_{ij} = \beta_i - \beta_j \quad (i, j = 1,2,3)$$

2.3. Изображения функций влияния второй подгруппы

В этой случае изображения соответствующих граничных условий (1.27) записываются так:

$$w^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad u^{HL}\Big|_{z=0} = W^{HL}\Big|_{z=0} = 0\,. \tag{2.16}$$

Постановка сюда соотношений (2.5) приводит к аналогичной (2.9) системе линейных алгебраических уравнений [23]:

$$\mathbf{A}_1\mathbf{C} = -\frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Находя ее решение

$$C_1 = \frac{\beta_3 q^2 - \beta_2 k_2(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)},$$

$$C_2 = -\frac{\beta_3 q^2 - \beta_1 k_1(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)},$$

$$C_3 = q\frac{\beta_1 k_1(q^2, s^2) - \beta_2 k_2(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)}, \tag{2.18}$$

из (2.5) и (2.6) с учетом обозначений (1.26) получаем изображения функций влияния для этого типа граничных условий, которые имеют аналогичную (2.12), (2.13) структуру:

$$\begin{aligned}
G_{uw}^{(1)HL} &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{ww}^{(1)HL} &= w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{Uw}^{(1)HL} &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{Ww}^{(1)HL} &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s);
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
G_{zzw}^{(1)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{rzw}^{(1)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{\sigma w}^{(1)HL} &= \sigma^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

При этом коэффициенты перед экспонентами отличаются от указанных в (2.14), (2.15) и имеют вид:

$$
\begin{gathered}
u_l^{HL} = (-1)^l \frac{\beta_3 q^3 - q\beta_{3-l} k_{3-l}(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)}, \\
u_3^{HL} = q \frac{\beta_1 k_1(q^2, s^2) - \beta_2 k_2(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)}, \\
w_l^{HL} = (-1)^l k_l(q^2, s^2) \frac{\beta_3 q^2 - \beta_{3-l} k_{3-l}(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)}, \\
w_3^{HL} = q^2 \frac{\beta_1 k_1(q^2, s^2) - \beta_2 k_2(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)}, \\
U_j^{HL} = \beta_j u_j^{HL}, \;\; W_j^{HL} = \beta_j w_j^{HL};
\end{gathered}
\tag{2.21}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^{3-l} \kappa_l(q^2, s^2) \frac{\beta_3 q^2 - \beta_{3-l} k_{3-l}(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)}, \\
\sigma_{zz3}^{HL} = -q^2 k_3(q^2, s^2) \frac{\beta_1 k_1(q^2, s^2) - \beta_2 k_2(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)}, \\
\sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^{3-l} q k_l(q^2, s^2) \frac{\beta_3 q^2 - \beta_{3-l} k_{3-l}(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)}, \\
\sigma_{rz3}^{HL} = \kappa_3(q^2, s^2) \frac{\beta_1 k_1(q^2, s^2) - \beta_2 k_2(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)}, \\
\sigma_l^{HL} = (-1)^l \lambda_{23l} \gamma_l^2 s^2 \frac{\beta_3 q^2 - \beta_{3-l} k_{3-l}(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)}.
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

2.4. Изображения функций влияния третьей подгруппы

В этом случае изображения граничных условий согласно (1.29) имеют вид:

$$
W^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad w^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \quad u^{HL}\Big|_{z=0} = 0. \tag{2.23}
$$

Отсюда с учетом (2.5) опять получаем аналогичную (2.9) систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных [23]:

$$\mathbf{A}_1\mathbf{C} = -\frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Её решение имеет вид

$$\begin{gathered}
C_1 = -\frac{q^2 - k_2(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
C_2 = \frac{q^2 - k_1(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
C_3 = -q\frac{k_1(q^2,s^2) - k_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}.
\end{gathered} \tag{2.25}$$

В результате изображения соответствующих функций влияния записываются так:

$$\begin{gathered}
G_{uW}^{(1)HL} = u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \\
G_{wW}^{(1)HL} = w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \\
G_{UW}^{(1)HL} = U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \\
G_{WW}^{(1)HL} = W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{gathered} \tag{2.26}$$

$$
\begin{aligned}
G_{zzW}^{(1)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
G_{rzW}^{(1)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
G_{\sigma W}^{(1)HL} &= \sigma_{\sigma u}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{\sigma uj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s).
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
u_l^{HL} = (-1)^{3-l} q \frac{q^2 - k_{3-l}(q^2,s^2) k_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
u_3^{HL} = -q k_3(q^2,s^2) \frac{k_1(q^2,s^2) - k_2(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
w_l^{HL} = (-1)^{3-l} k_l(q^2,s^2) \frac{q^2 - k_{3-l}(q^2,s^2) k_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
w_3^{HL} = -q^2 \frac{k_1(q^2,s^2) - k_2(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
U_j^{HL} = \beta_j u_j^{HL}, \quad W_j^{HL} = \beta_j w_j^{HL};
\end{gathered}
\tag{2.28}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^l \kappa_l(q^2,s^2) \frac{q^2 - k_{3-l}(q^2,s^2) k_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
\sigma_{zz3}^{HL} = q^2 k_3(q^2,s^2) \frac{k_1(q^2,s^2) - k_2(q^2,s^2)}{\pi R(q^2,s^2)}, \\
\sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^l q k_l(q^2,s^2) \frac{q^2 - k_{3-l}(q^2,s^2) k_3(q^2,s^2)}{\pi R(q^2,s^2)}, \\
\sigma_{rz3}^{HL} = \kappa_3(q^2,s^2) \frac{k_1(q^2,s^2) - k_2(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}, \\
\sigma_l^{HL} = (-1)^l \lambda_{23l} \gamma_l^2 s^2 \frac{q^2 - k_{3-l}(q^2,s^2) k_3(q^2,s^2)}{2\pi R(q^2,s^2)}.
\end{gathered}
\tag{2.29}
$$

2.5. Оригиналы функций влияния первой группы

Поскольку оригиналы всех функций влияния находятся аналогично, то ограничимся только первой подгруппой. При этом будем рассматривать только напряжения на границе $z=0$. Соответствующие нетривиальные изображения определяются формулами (2.13) и (2.15):

$$G_{0zzu}^{(1)HL}=G_{zzu}^{(1)HL}\Big|_{z=0}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{zzj}^{HL}(q^2,s^2),\ G_{0rzu}^{(1)HL}=G_{rzu}^{(1)HL}\Big|_{z=0}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{rzj}^{HL}(q^2,s^2),$$

$$G_{0\sigma u}^{(1)HL}=G_{\sigma u}^{(1)HL}\Big|_{z=0}=\sum_{l=1}^{2}\sigma_{l}^{HL}(q^2,s^2). \tag{2.30}$$

Их оригиналы удобно находить с использованием доказанных в [12,14] утверждений о связи преобразований Фурье и Ханкеля (индексы «F» и «H_ν» указывают на соответствующие изображения).

Утверждение 1. Пусть четная функция $f(x)\in S'$, а $g(r)\in S'_+$. Их изображения пропорциональны $g^{H_\nu}(q)=Cf^F(q)$, $q\geq 0$, $C\in R, C\neq 0$.

Тогда существует такое ядро $K_{c\nu}(r,x)$, что справедливо равенство

$$g(r)=\int_0^\infty K_{c\nu}(r,x)f(x)dx.$$

Причем

$$K_{c0}(x,r)=-2Cx(x^2-r^2)_+^{-3/2},\ K_{c1}(x,r)=-K_{c0}(r,x), \tag{2.31}$$

где $x_+^\alpha=x^\alpha H(x)$.

Утверждение 2. Пусть нечетная функция $f(x)\in S'$, а $g(r)\in S'_+$. Их изображения пропорциональны $g^{H_\nu}(q)=iCf^F(q)$, $q\geq 0$, $C\in R, C\neq 0$.

Тогда существует такое ядро $K_{s\nu}\left(r,x\right)$, что справедливо равенство

$$g\left(r\right)=\int\limits_{0}^{\infty}K_{s\nu}\left(r,x\right)f\left(x\right)dx.$$

Причем

$$K_{s0}(x,r)=2Cx\left(r^{2}-x^{2}\right)_{+}^{-3/2},\; K_{s1}(x,r)=\frac{2C}{r}\delta\left(r-x\right)-K_{s0}\left(r,x\right). \quad (2.32)$$

В этих утверждениях S' - множество обобщенных функций медленного роста, S'_{+} - - множество обобщенных функций медленного роста с носителями, принадлежащими положительной полуоси R_{+}.

Сравнение функций (2.30) с изображениями функций влияния $\Gamma_{13,1}(x,\tau)$, $\Gamma_{33,1}(x,\tau)$ и $\Gamma_{\sigma,1}(x,\tau)$ для плоской задачи [46-48] показывает, что имеют место равенства [59]:

$$\begin{gathered}G_{0rzu}^{(1)HL}(q,s)=C_{1}\Gamma_{13,1}^{FL}(q,s),\; G_{0zzu}^{(1)HL}(q,s)=iC_{2}\Gamma_{33,1}^{FL}(q,s),\\ G_{0\sigma u}^{(1)HL}(q,s)=iC_{3}\Gamma_{\sigma,1}^{FL}(q,s).\end{gathered} \quad (2.33)$$

При этом функции $\Gamma_{13,1}(x,\tau)$, $\Gamma_{33,1}(x,\tau)$ и $\Gamma_{\sigma,1}(x,\tau)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_{13,1}\left(x,\tau\right)&=\sigma_{13}^{(2)}\left(x,\tau\right)\left[H\left(\left|x\right|-\tau/\gamma_{2}\right)-H\left(\left|x\right|-\tau/\gamma_{3}\right)\right]+\\ &\quad+\sigma_{13}^{(1)}\left(x,\tau\right)\left[H\left(\left|x\right|-\tau/\gamma_{3}\right)-H\left(\left|x\right|-\tau/\gamma_{1}\right)\right],\\ \Gamma_{33,1}\left(x,\tau\right)&=\sigma_{33}^{(2)}\left(x,\tau\right)[H\left(\tau-\gamma_{3}\left|x\right|\right)-H\left(\tau-\gamma_{2}\left|x\right|\right)]+\\ &\quad+\sigma_{33}^{(1)}\left(x,\tau\right)[H\left(\tau-\gamma_{1}\left|x\right|\right)-H\left(\tau-\gamma_{3}\left|x\right|\right)],\\ \Gamma_{\sigma,1}\left(x,\tau\right)&=\sigma_{\sigma}^{(2)}\left(x,\tau\right)[H\left(\tau-\gamma_{3}\left|x\right|\right)-H\left(\tau-\gamma_{2}\left|x\right|\right)]+\\ &\quad+\sigma_{\sigma}^{(1)}\left(x,\tau\right)[H\left(\tau-\gamma_{1}\left|x\right|\right)-H\left(\tau-\gamma_{3}\left|x\right|\right)].\end{aligned} \quad (2.34)$$

Здесь

$$\sigma_{13}^{(1)}\left(x,\tau\right)=\frac{\eta_1\beta_{11}}{\pi}\left[2S_{1,1}^{(1)}\left(x,\tau\right)+\gamma_3^2S_{1,2}^{(1)}\left(x,\tau\right)\right],$$

$$\sigma_{13}^{(2)}=\frac{\eta_1\beta_{11}}{\pi}\left[2S_{1,1}^{(2)}\left(x,\tau\right)+\gamma_3^2S_{1,2}^{(2)}\left(x,\tau\right)\right],$$

$$\begin{gathered}\sigma_{33}^{(1)}=\frac{\beta_3}{\pi}\left[2\eta_1\beta_1S_{2,1}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)+\xi_1\gamma_1^2S_{2,2}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)\right]-\frac{2\eta_1\beta_{11}}{\pi}S_{3,1}^{(1)}\left(x,\tau\right)-\\-\frac{\beta_3}{\pi}\left[2\eta_1\beta_2S_{2,1}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)+\xi_2\gamma_2^2S_{2,2}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)\right],\\ \sigma_{33}^{(2)}=\frac{\beta_3}{\pi}\left[2\eta_1\beta_1S_{2,1}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)+\xi_1\gamma_1^2S_{2,2}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)\right]-\frac{2\eta_1\beta_{11}}{\pi}S_{3,1}^{(2)}\left(x,\tau\right)-\\-\frac{\beta_3}{\pi}\left[2\eta_1\beta_2S_{2,1}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)+\xi_2\gamma_2^2S_{2,2}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)\right],\end{gathered}\tag{2.35}$$

$$\sigma_{\sigma}^{(1)}\left(x,\tau\right)=\frac{\beta_3}{\pi}\left[\xi_3\gamma_1^2S_{2,2}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)-\xi_4\gamma_2^2S_{2,2}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)\right],$$

$$\sigma_{\sigma}^{(2)}\left(x,\tau\right)=\frac{\beta_3}{\pi}\left[\xi_3\gamma_1^2S_{2,2}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)-\xi_4\gamma_2^2S_{2,2}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)\right].$$

В последних формулах использованы следующие обозначения и функции:

$$\begin{gathered}\xi_1=2\eta_1+\eta_2+\eta_3\beta_1,\ \xi_2=2\eta_1+\eta_2+\eta_3\beta_2,\ \xi_3=\eta_3+\eta_4\beta_1,\ \xi_4=\eta_3+\eta_4\beta_2,\\ \beta_{11}=\frac{1}{\alpha_1\gamma_1^2},\ \beta_{12}=\frac{\alpha_2\gamma_2^2}{\alpha_1\gamma_1^2};\end{gathered}\tag{2.36}$$

$$S_{1,1}^{(m)}\left(x,\tau\right)=\frac{S_{1,12}^{(m)}\left(x,\tau\right)-S_{0,12}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_1^{(m)}\left(x,\tau\right)-S_{0,11}^{(m)}\left(x,\tau\right)S_{1,11}^{(m)}\left(x,\tau\right)}{P_0^{(m)}\left(x,\tau\right)}+$$
$$+\frac{2S_{0,11}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_1^{(m)}\left(x,\tau\right)\left[S_{0,11}^{(m)}\left(x,\tau\right)-1\right]}{\left[P_0^{(m)}\left(x,\tau\right)\right]^2}\ \left(m=1,2\right),$$

$$S_{1,2}^{(m)}\left(x,\tau\right)=\frac{S_{1,22}^{(m)}\left(x,\tau\right)-S_{0,22}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_1^{(m)}\left(x,\tau\right)-S_{0,21}^{(m)}\left(x,\tau\right)S_{1,21}^{(m)}\left(x,\tau\right)}{P_0^{(m)}\left(x,\tau\right)}+$$
$$+\frac{2S_{0,21}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_1^{(m)}\left(x,\tau\right)\left[S_{0,21}^{(m)}\left(x,\tau\right)-1\right]}{\left[P_0^{(m)}\left(x,\tau\right)\right]^2},$$

$$S_{2,1}^{(m)}\left(x,\tau;\gamma\right)=\frac{S_{2,12}^{(m)}\left(x,\tau;\gamma\right)-S_{0,12}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_2^{(m)}\left(x,\tau;\gamma\right)-S_{0,11}^{(m)}\left(x,\tau\right)S_{2,11}^{(m)}\left(x,\tau;\gamma\right)}{P_0^{(m)}\left(x,\tau\right)}+$$
$$+\frac{2S_{0,11}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_2^{(m)}\left(x,\tau;\gamma\right)\left[S_{0,11}^{(m)}\left(x,\tau\right)-1\right]}{\left[P_0^{(m)}\left(x,\tau\right)\right]^2}, \tag{2.37}$$

$$S_{2,2}^{(m)}\left(x,\tau\right)=\frac{2S_{0,21}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_2^{(m)}\left(x,\tau;\gamma\right)\left[S_{0,21}^{(m)}\left(x,\tau\right)-1\right]}{\left[P_0^{(m)}\left(x,\tau\right)\right]^2}+$$
$$+\frac{S_{2,22}^{(m)}\left(x,\tau;\gamma\right)-S_{0,22}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_2^{(m)}\left(x,\tau\right)-S_{0,21}^{(m)}\left(x,\tau\right)S_{2,21}^{(m)}\left(x,\tau;\gamma\right)}{P_0^{(m)}\left(x,\tau\right)}$$

$$S_3^{(m)}\left(x,s\right)=\frac{S_{3,1}^{(m)}\left(x,\tau\right)}{P_0^{(m)}\left(x,s\right)}-\frac{S_{0,11}^{(m)}\left(x,\tau\right)P_3^{(m)}\left(x,s\right)}{\left[P_0^{(m)}\left(x,s\right)\right]^2};$$

$$\begin{aligned}
&P_1^{(1)}\left(x,\tau\right)=\tau^2k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(x^2,-\tau^2\right),\\
&P_1^{(2)}\left(x,\tau\right)=k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(x^2,-\tau^2\right)\left[\tau^2+\beta_{12}k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_3\left(\tau^2,-x^2\right)\right],\\
&P_0^{(1)}\left(x,\tau\right)=T^2\left(x^2,\tau^2\right)+\tau^4k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right),\\
&P_0^{(2)}\left(x,\tau\right)=T^2\left(x^2,\tau^2\right)+\tau^4k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right),\\
&T\left(x,\tau\right)=\tau k_1\left(\tau,-x\right)+\beta_{12}k_1\left(\tau,-x\right)k_2\left(-\tau,x\right)k_3\left(-\tau,x\right);
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$S_{1,11}^{(1)}(x,\tau)=\tau^2 x\left[-\gamma_1^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+2\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$

$$S_{1,12}^{(1)}(x,\tau)=-\gamma_1^2\tau^2 k_2^2\left(x^2,-\tau^2\right)\left[k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)^2-\gamma_1^2 x^2\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+$$

$$+\gamma_2^2\tau^2\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-2\gamma_1^2 x^2\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$

$$S_{1,11}^{(2)}(x,\tau)=\tau^2 x\left[\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\gamma_1^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+$$

$$+2\beta_{12} x k_3\left(\tau^2,-x^2\right)\left[\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\gamma_1^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]-$$

$$-\beta_{12}\gamma_3^2 x k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$

$$S_{1,12}^{(2)}(x,\tau)=-\gamma_1^2\tau^4 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+$$

$$+\gamma_2^2\tau^2\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-3\gamma_1^2 x^2\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+$$

$$+2\beta_{12}\left\{\left[k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-2\gamma_3^2 x^2\right]\left[\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\gamma_1^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]-\right.$$

$$\left.-4\gamma_1^2\gamma_2^2 x^2 k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right\}k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-$$

$$-\beta_{12}\gamma_3^2\tau^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$

$$S_{0,11}^{(1)}(x,\tau)=2\tau^6 x+2\beta_{12}^2 x\left[\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)+\right.$$

$$\left.+\gamma_3^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-\gamma_1^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right],$$

$$+4\beta_{12}\tau^4 x k_2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3\left(-\tau^2,x^2\right)+2\gamma_2^2\tau^4 x+$$

$$+2\beta_{12}\tau^2 x k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_2^{-1}\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^{-1}\left(-\tau^2,x^2\right),$$

$$
\begin{aligned}
S_{0,12}^{(1)}\left(x,\tau\right) &= 2\tau^6 + 8\beta_{12}^2 x^2\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right) - k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right) + k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right] + \\
&+ 2\beta_{12}^2\left[\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2,\right)k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right) + \gamma_3^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2,\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right) - \right. \\
&\left. - \gamma_1^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right] + 4\beta_{12}\tau^4 k_2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3\left(-\tau^2,x^2\right) + \\
&+2\beta_{12}\tau^2\left\{2\tau^2 x^2\left[\gamma_1^2\left(\gamma_2^2-\gamma_3^2\right) + k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right) + k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right] + \right. \\
&\left. +k_1^2\left(\tau^2,-x^2,\right)\left[2\gamma_2^2\gamma_3^2 x^2 + k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right) + k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]\right\} k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right), \\
&- 2\beta_{12}\tau^2 x^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2,\right)\left[\gamma_2^4 k_3^4\left(-\tau^2,x^2\right) + \right. \\
&\left. + \gamma_3^4 k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_2^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right) + 2\gamma_2^2\tau^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{0,11}^{(2)}\left(x,\tau\right) &= 2\left(\gamma_2^2-\gamma_1^2\right)\tau^4 x + 4\beta_{12}\tau^2\gamma_2^2 x k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_3\left(\tau^2,-x^2\right) - \\
&-2\beta_{12}\tau^2 x k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\left[\gamma_1^2 k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right) - \gamma_3^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right) - \\
&- 2\beta_{12}x\left[\gamma_1^2 k_1^{-2}\left(\tau^2,-x^2\right) - \gamma_2^2 k_2^{-2}\left(-\tau^2,x^2\right) + \right. \\
&\left. +\gamma_3^2 k_3^{-2}\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{0,12}^{(2)}\left(x,\tau\right) &= 2\left(\gamma_2^2-\gamma_1^2\right)\tau^4 - 2\beta_{12}\left[\gamma_1^2 k_1^{-2}\left(\tau^2,-x^2\right) - \gamma_2^2 k_2^{-2}\left(-\tau^2,x^2\right) + \right. \\
&\left. + \gamma_3^2 k_3^{-2}\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right) - \\
&- 8\beta_{12}x^2\left[\gamma_2^2\gamma_3^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right) - \gamma_1^2\gamma_3^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right) + \gamma_1^2\gamma_2^2 k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right] - \\
&- 2\beta_{12}\tau^2\left\{\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right) + 4\gamma_2^2 x^2\right]\left[\gamma_1^2 k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right) + \gamma_3^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right] - \right. \\
&\left. - 2\left[\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right) + \gamma_1^2\gamma_3^2 x^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]\right\} k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right) - \\
&- 2\beta_{12}\tau^2 x^2\left(\gamma_2^2 x^2 - \tau^2\right)\left[\gamma_3^4 k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right) - \gamma_1^4 k_3^4\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right),
\end{aligned}
$$

$$S_{1,21}^{(1)}(x,\tau)=\tau\Big\{\tau^2\Big[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-2k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\Big]+$$
$$+2k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\Big\}k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$
$$S_{1,22}^{(1)}(x,\tau)=\Big\{\left(\gamma_2^2x^2-\tau^2\right)\Big[2k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)+5\tau^2\Big]-$$
$$-2\tau^2\Big[5k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)+2\tau^2\Big]\Big\}k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-$$
$$-\tau^4k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$
$$S_{1,21}^{(2)}(x,\tau)=\Big[2\tau k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+\tau^3k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-$$
$$-2\tau^3k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\Big]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+$$
$$+2\beta_{12}\tau k_3\left(\tau^2,-x^2\right)\Big[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\Big]+$$
$$+\beta_{12}\tau k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$
$$S_{1,22}^{(2)}(x,\tau)=\Big\{\left(\gamma_2^2x^2-\tau^2\right)\Big[2k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)+5\tau^2\Big]-4\tau^4\Big\}k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-$$
$$-\tau^2\Big[\tau^2\left(\gamma_2^2x^2-\tau^2\right)+10k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)\Big]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+$$
$$+\beta_{12}k_3\left(\tau^2,-x^2\right)\Big[2k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-6\tau^2\Big]+$$
$$+4\beta_{12}\tau^2\Big[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\Big]k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-$$
$$-\beta_{12}\gamma_3^2x^2k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$
$$S_{0,21}^{(1)}(x,\tau)=\Big\{2\Big[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-\tau^4\Big]+$$
$$+5\tau^2\Big[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\Big]\Big\}k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+$$
$$+\tau^4\Big[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\Big]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$

$$
\begin{aligned}
S_{0,22}^{(1)}(x,\tau) &= \left[2k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)+5\tau^2k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\tau^4\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+\\
&+\beta_{12}\left\{\left[k_2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3\left(-\tau^2,x^2\right)-k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_3\left(-\tau^2,x^2\right)-\right.\right.\\
&\left.-k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]+2\tau^2\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\right.\\
&\left.\left.-k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)-k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]\right\}k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\
&-\beta_{12}\tau^2\left[k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^4\left(-\tau^2,x^2\right)+k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^4\left(-\tau^2,x^2\right)-\right.\\
&\left.-k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+\\
&+4\beta_{12}k_2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3\left(-\tau^2,x^2\right)\left[5\tau^2+k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]-\\
&-2\beta_{12}\tau^2\left\{2\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)+2\tau^2k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)+\right.\right.\\
&\left.+\tau^2k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]+k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\left[5k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+\right.\\
&\left.\left.+5k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)+2\tau^2\right]\right\}k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\
&-2\beta_{12}\tau^4\left(\tau^2-\gamma_1^2x^2\right)\left[k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)+k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_2^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+\\
&+12\tau^2k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-18\tau^4,\\
S_{0,21}^{(2)}(x,\tau) &= 4\tau^3\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+k_1\left(\tau^2,-x^2\right)\right]+2\beta_{12}^2\tau\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\right.\\
&\left.-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)+k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]+\\
&+4\beta_{12}\tau k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_3\left(\tau^2,-x^2\right)\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-\tau^2\right]+\\
&+2\beta_{12}\tau^3k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)+k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),\\
S_{0,22}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1) &= 12\tau^2\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]+4\tau^4-\\
&-8\beta_{12}^2\tau^2\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]+\\
&+2\beta_{12}^2\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)+\right.\\
&\left.+k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]+4\beta_{12}k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_3\left(\tau^2,-x^2\right)\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-5\tau^2\right]\\
&-2\beta_{12}\tau^2\left\{2\tau^2\left[2k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)+2k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]-\right.\\
&\left.-5k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)+k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]\right\}k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\
&-2\beta_{12}\tau^4k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\left[k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)+k_3^4\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right),
\end{aligned}
$$

$$S_{2,11}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\tau^2 x\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-k_2^2\left(x^2,-\tau^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),$$

$$\begin{aligned}S_{2,12}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\tau^2\Big[&\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\gamma_1^2 k_2^2\left(x^2,-\tau^2\right)-\\&-2\gamma_1^2\gamma_2^2 x^2\Big]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1}\left(x^2,-\tau^2\right)-\\&-\tau^2 x^2\left[\gamma_1^4 k_2^4\left(x^2,-\tau^2\right)+\gamma_2^4 k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-3}\left(x^2,-\tau^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{2,11}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=&\,x\left[-\gamma_1^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+\\&+\beta_{12} x k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\left[\gamma_2^2 k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\gamma_3^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\&-2\beta_{12}\gamma_1^2 x\left(\gamma_2^2 x^2-\tau^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-\gamma_3^2 x^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{2,12}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=&\left[-\gamma_1^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+\gamma_2^2 k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\&-x^2\left[\gamma_1^4 k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)-\gamma_2^4 k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\&-2\beta_{12}\gamma_1^2\left(\gamma_2^2 x^2-\tau^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-\gamma_3^2 x^2\right)^{1/2}-\\&-4\beta_{12}\gamma_1^2 x^2\left[\gamma_2^2 k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\gamma_3^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+\\&+\beta_{12}\left(\tau^2-\gamma_1^2 x^2\right)\left[\gamma_2^2 k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-\gamma_3^2 k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-2\gamma_2^2\gamma_3^2 x^2\right]k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\&-\beta_{12} x^2\left(\tau^2-\gamma_1^2 x^2\right)\left[\gamma_2^4 k_3^4\left(\tau^2,-x^2\right)-\gamma_3^4 k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_2^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right),\end{aligned}$$

$$S_{2,11}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=S_{2,11}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=S_{2,11}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right),$$

$$S_{2,12}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=S_{2,12}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=S_{2,12}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right).$$

$$
\begin{aligned}
S_{2.21}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right) = {} & 2\tau k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_2\left(x^2,-\tau^2\right)+\\
& +\tau^3\left[k_2^2\left(x^2,-\tau^2\right)-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),\\
S_{2,22}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right) = {} & 2k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_2\left(x^2,-\tau^2\right)+\\
& +\tau^2\left[5k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-5k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)-2\tau^2\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+\\
& +\tau^4\left[k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)-k_2^4\left(x^2,-\tau^2\right)\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right),\\
S_{2,21}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right) = {} & 2\tau k_1\left(\tau^2,-x^2\right)k_2\left(-\tau^2,x^2\right)+\\
& +2\beta_{12}\tau k_2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3\left(\tau^2,-x^2\right)\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)+\tau^2\right]+\\
& +\tau^3\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\
& -\beta_{12}\tau^3k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\left[k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right),\\
S_{2,22}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right) = {} & 2\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-\tau^4\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+\\
& +5\tau^2\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_1^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\
& -\tau^4\left[k_1^4\left(\tau^2,-x^2\right)+k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)\right]k_1^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_2^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)+\\
& +2\beta_{12}k_2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3\left(\tau^2,-x^2\right)\left[k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)+5\tau^2\right]-\\
& -\beta_{12}\tau^2\left\{5k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\left[k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]+\right.\\
& \left.+4\tau^2\left[k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)-k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]\right\}k_2^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-1/2}\left(\tau^2,-x^2\right)-\\
& -\beta_{12}\tau^4k_1^2\left(\tau^2,-x^2\right)\left[k_2^4\left(-\tau^2,x^2\right)+k_3^4\left(\tau^2,-x^2\right)\right]k_2^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)k_3^{-3/2}\left(\tau^2,-x^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
S_{2.21}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=S_{2.21}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=S_{2.21}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right),
$$

$$
S_{2,22}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=S_{2,22}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=S_{2,22}^{(1)}\left(x,\tau;\gamma_1\right),
$$

$$S_{3,1}^{(1)}\left(x,\tau\right)=\frac{3}{2}\beta_3\gamma_1^2xk_1\left(\tau^2,-x^2\right)\Big\{\tau^2\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)+k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right]-$$
$$-2k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(-\tau^2,x^2\right)\Big\}-$$
$$-\beta_3xk_1^{3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)\left[\tau^2\left(\gamma_2^2+\gamma_3^2\right)-2\gamma_2^2k_{23}^2\left(-\tau^2,x^2\right)-2\gamma_3^2k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right],$$
$$S_{3,1}^{(2)}\left(x,\tau\right)=\frac{3}{2}\beta_3\gamma_1^2xk_1\left(\tau^2,-x^2\right)\Big\{\tau^2\left[k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)-k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)\right]-$$
$$-2k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)\Big\}+$$
$$+\beta_3xk_1^{3/2}\left(\tau^2,-x^2\right)\left[\tau^2\left(\gamma_2^2-\gamma_3^2\right)-2\gamma_2^2k_3^2\left(\tau^2,-x^2\right)+2\gamma_3^2k_2^2\left(-\tau^2,x^2\right)\right].$$

Из (2.34) и (2.35) следует, что $\Gamma_{13,1}(x,\tau)$ - четная, а $\Gamma_{33,1}(x,\tau)$ и $\Gamma_{\sigma,1}(x,\tau)$ - нечетные функции по x. Тогда, применяя для первой из них утверждение 1 при $\nu=1$, а для двух других утверждение 2 при $\nu=0$, получаем следующие результаты:

$$G_{0rzu}^{(1)}(r,\tau)=2C_1r\int_0^r\frac{\Gamma_{13,1}(x,\tau)}{(r^2-x^2)^{3/2}}dx,\ G_{0zzu}^{(1)}(r,\tau)=2C_2\int_0^r\frac{x\Gamma_{33,1}(x,\tau)}{(r^2-x^2)^{3/2}}dx,$$
$$G_{0\sigma u}^{(1)}(r,\tau)=2C_3\int_0^r\frac{x\Gamma_{\sigma,1}(x,\tau)}{(r^2-x^2)^{3/2}}dx. \tag{2.39}$$

$$\Gamma_{13,1}\left(x,\tau\right)=\sigma_{13}^{(2)}\left(x,\tau\right)\left[H\left(|x|-\tau/\gamma_2\right)-H\left(|x|-\tau/\gamma_3\right)\right]+$$
$$+\sigma_{13}^{(1)}\left(x,\tau\right)\left[H\left(|x|-\tau/\gamma_3\right)-H\left(|x|-\tau/\gamma_1\right)\right],$$
$$\Gamma_{33,1}\left(x,\tau\right)=\sigma_{33}^{(2)}\left(x,\tau\right)\left[H\left(|x|-\tau/\gamma_2\right)-H\left(|x|-\tau/\gamma_3\right)\right]+$$
$$+\sigma_{33}^{(1)}\left(x,\tau\right)\left[H\left(|x|-\tau/\gamma_3\right)-H\left(|x|-\tau/\gamma_1\right)\right], \tag{2.40}$$
$$\Gamma_{\sigma,1}\left(x,\tau\right)=\sigma_{\sigma}^{(2)}\left(x,\tau\right)\left[H\left(|x|-\tau/\gamma_2\right)-H\left(|x|-\tau/\gamma_3\right)\right]+$$
$$+\sigma_{\sigma}^{(1)}\left(x,\tau\right)\left[H\left(|x|-\tau/\gamma_3\right)-H\left(|x|-\tau/\gamma_1\right)\right].$$

В развернутом виде соотношения (2.39) записываются так:

$$\begin{aligned} G_{0rzu}^{(1)}(r,\tau) = 2rC_1 \Big\{ & J\left[\sigma_{13}^{(1)}\left(x,\tau\right);\tau/\gamma_3\,, r\right]\left[H\left(\tau-\gamma_1 r\right)-H\left(\tau-\gamma_3 r\right)\right]+ \\ & + J\left[\sigma_{13}^{(1)}\left(x,\tau\right);\tau/\gamma_3\,,\tau/\gamma_1\right]H\left(\gamma_1 r-\tau\right)+ \\ & + J\left[\sigma_{13}^{(2)}\left(x,\tau\right);\tau/\gamma_2\,, r\right]\left[H\left(\tau-\gamma_3 r\right)-H\left(\tau-\gamma_2 r\right)\right]+ \\ & + J\left[\sigma_{13}^{(2)}\left(x,\tau\right);\tau/\gamma_2\,,\tau/\gamma_3\right]H\left(\gamma_3 r-\tau\right)\Big\}; \end{aligned} \qquad (2.41)$$

$$\begin{aligned} G_{0zzu}^{(1)} = 2C_2 \Big\{ & J\left[x\sigma_{33}^{(1)}(x,\tau);\tau/\gamma_3\,, r\right][H(\tau-r\gamma_1)-H(\tau-r\gamma_3)]+ \\ & + J\left[x\sigma_{33}^{(1)}(x,\tau);\tau/\gamma_3,\tau/\gamma_1\right]H\left(\gamma_1 r-\tau\right)+ \\ & + J\left[x\sigma_{33}^{(2)}(x,\tau);\tau/\gamma_2\,, r\right][H(\tau-r\gamma_3)-H(\tau-r\gamma_2)]+ \\ & + J\left[x\sigma_{33}^{(2)}(x,\tau);\tau/\gamma_2,\tau/\gamma_3\right]H\left(\gamma_3 r-\tau\right)\Big\}; \end{aligned} \qquad (2.42)$$

$$\begin{aligned} G_{0\sigma u}^{(1)} = 2C_3 \Big\{ & J\left[x\sigma_{\sigma}^{(1)}(x,\tau);\tau/\gamma_3\,, r\right][H(\tau-r\gamma_1)-H(\tau-r\gamma_3)]+ \\ & + J\left[x\sigma_{\sigma}^{(1)}(x,\tau);\tau/\gamma_3,\tau/\gamma_1\right]H\left(\gamma_1 r-\tau\right)+ \\ & + J\left[x\sigma_{\sigma}^{(2)}(x,\tau);\tau/\gamma_2\,, r\right][H(\tau-r\gamma_3)-H(\tau-r\gamma_2)]+ \\ & + J\left[x\sigma_{\sigma}^{(2)}(x,\tau);\tau/\gamma_2,\tau/\gamma_3\right]H\left(\gamma_3 r-\tau\right)\Big\}. \end{aligned} \qquad (2.43)$$

Здесь

$$C_1 = -\frac{\eta_1}{2\pi},\; C_2 = -\frac{\eta_1}{2\pi}, C_3 = -\frac{1}{2\pi}. \qquad (2.44)$$

В этих формулах использовано следующее обозначение:

$$J\left[f\left(x,\tau\right);x_1,x_2\right] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x,\tau)}{\left(r^2-x^2\right)^{3/2}}dx.. \qquad (2.45)$$

В них и далее учтено, что для многих материалов имеют место неравенства

$$\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2\,.$$

Если точка $x = r$ принадлежит отрезку интегрирования, то интегралы в (2.41) - (2.43) понимаются в смысле регуляризованных значений. В частности,

$$\begin{aligned} J\left[f\left(x,\tau\right);a,r\right] &= \int_a^r \frac{f(x,\tau) - f(r,\tau)}{\left(r^2 - x^2\right)^{3/2}}dx - \frac{af(r,\tau)}{r^2\sqrt{r^2 - a^2}}, \\ J\left[xf\left(x,\tau\right);a,r\right] &= \int_a^r \frac{x\left[f(x,\tau) - f(r,\tau)\right]}{\left(r^2 - x^2\right)^{3/2}}dx - \frac{f(r,\tau)}{\sqrt{r^2 - a^2}}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

2.6. Примеры расчетов

В качестве заполняющего полуплоскость материала рассматриваем песчаник, поры которого насыщены керосином, со следующими физическими характеристиками [15, 43]:

$A = 0,4026 \cdot 10^4$ МПа, $N = 0,2493 \cdot 10^3$ МПа, $R = 0,672 \cdot 10^4$ МПа,
$Q = 0,295 \cdot 10^4$ МПа,$\rho_{11} =\ \ 0,6087.10^{-3}$ кг/м^3,
$\rho_{22} =\ \ 0,2159.10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{12} = -0,19.10^{-5}$ кг/м^3.

Этим величинам соответствуют следующие значения безразмерных параметров:

$\beta_0 = 0,3; \beta_1 = 0,8757; \beta_2 = -10,3287; \beta_3 = 0,0088; \gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2,1612;$
$\gamma_3 = 1,963; \eta_1 = 0,055099; \eta_2 = 0,889802; \eta_3 = 0,651991; \eta_4 = 1,485214.$

Результаты расчетов представлены на рис. 2.1 - 2.3 в виде графиков функций влияния (на осях ординат указаны соответствующие напряжения). Сплошные кривые соответствуют моменту времени $\tau = 0,15$, точечные - $\tau = 0,3$, а пунктирные - $\tau = 0,45$. Отметим, что разрывы второго рода на графиках имеют место в точках, соответствующих поверхностным волнам типа Рэлея.

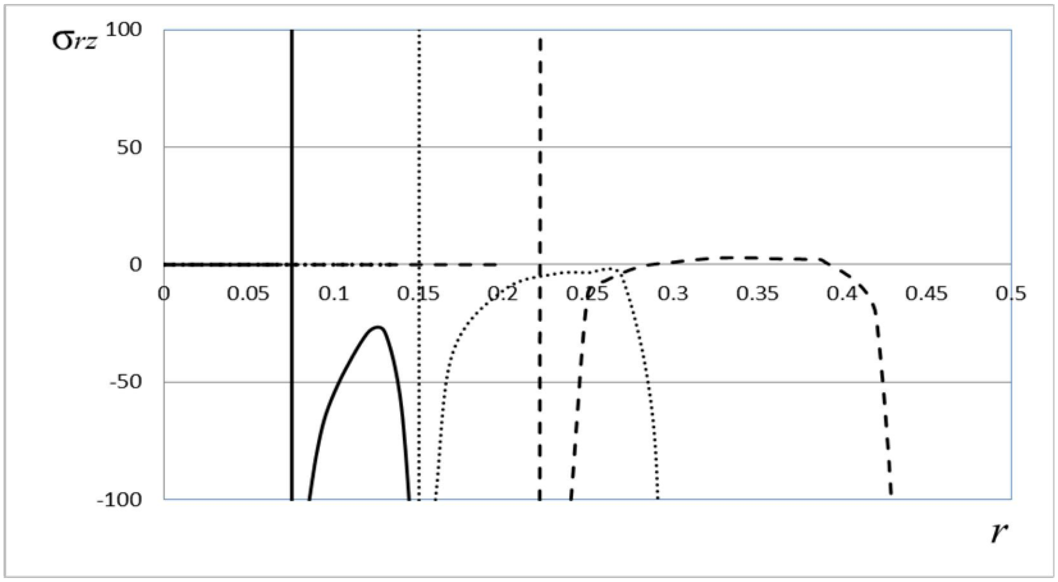

σrz
100
50
0
-50
-100
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
r

Рис. 2.1.

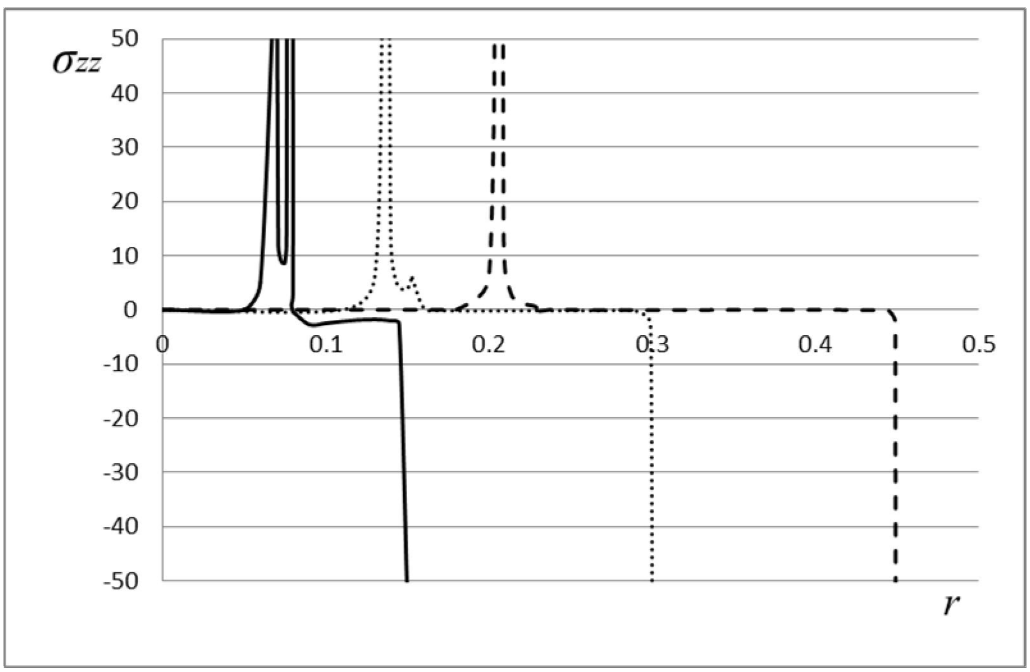

σzz
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
r

Рис. 2.2.

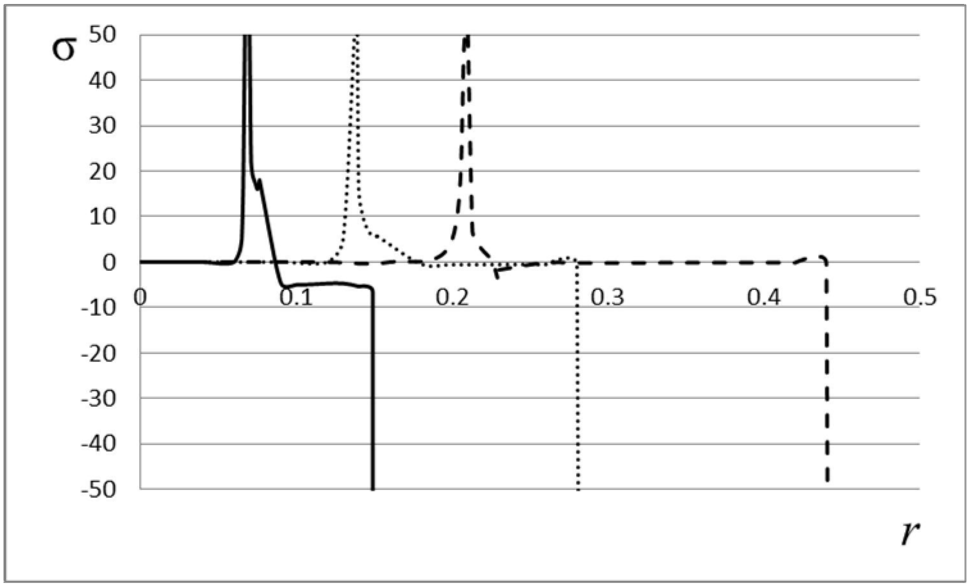


Рис. 2.3.

Глава 3

Полупространство под действием силовых возмущений (граничные условия второй группы)

3.1. Изображения функций влияния первой подгруппы

Аналогично главе 2 к граничным условиям (1.33) применяем указанные в п.2.1 интегральные преобразования:

$$\sigma_{rz}^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi},\ \sigma_{zz}^{HL}\Big|_{z=0} = \sigma^{HL}\Big|_{z=0} = 0\,. \tag{3.1}$$

Постановка соотношений (2.6) в граничные условия (3.1) приводит к подобной (2.9) системе линейных алгебраических уравнений к относительно столбца постоянных интегрирования $\mathbf{C}$ [20, 25]:

$$\mathbf{A}_2\mathbf{C} = -\frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_1, \tag{3.2}$$

где

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2qk_1(q^2,s^2) & 2qk_2(q^2,s^2) & -\kappa_3(q^2,s^2) \\ \kappa_1(q^2,s^2) & \kappa_2(q^2,s^2) & -2qk_3(q^2,s^2) \\ s^2\lambda_{231}\gamma_1^2 & s^2\lambda_{232}\gamma_2^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её решение имеет вид:

$$\begin{gathered} C_l = (-1)^{3-l}\lambda_{23(3-l)}\gamma_{3-l}^2\frac{qk_3(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)}\quad (l=1,2), \\ C_3 = \frac{\lambda_{231}\gamma_1^2\kappa_2(q^2,s^2) - \lambda_{232}\gamma_2^2\kappa_1(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где

$$R_1(q,s) = -\lambda_{231}\gamma_1^2\left[\kappa_2(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2) - 4q^2k_2(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)\right] - \\ - \lambda_{232}\gamma_2^2\left[4q^2k_1(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2) - \kappa_1(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2)\right]. \quad (3.4)$$

Учитывая эти равенства, из (2.5) и (2.6) находим изображения функций влияния:

$$\begin{aligned} G_{urz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \\ G_{wrz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \\ G_{Urz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \\ G_{Wrz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s); \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} G_{rzrz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \\ G_{zzrz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \\ G_{\sigma rz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= \sigma^{HL} = \sum_{l=1}^{2} \sigma_l^{HL}(q,s)E_j(q,z,s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
u_l^{HL} = (-1)^{3-l}\lambda_{23(3-l)}\gamma_{3-l}^2\,\frac{q^2 k_3(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)},\\
u_3^{HL} = k_3(q^2,s^2)\frac{\lambda_{231}\gamma_1^2\kappa_2(q^2,s^2)-\lambda_{232}\gamma_2^2\kappa_1(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)},\\
w_1^{HL} = (-1)^{3-l}\lambda_{23(3-l)}\gamma_{3-l}^2\,\frac{qk_l(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)},\\
w_3^{HL} = q\frac{\lambda_{231}\gamma_1^2\kappa_2(q^2,s^2)-\lambda_{232}\gamma_2^2\kappa_1(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)},\\
U_j^{HL} = \beta_j u_j^{HL},\;\; W_j^{HL} = \beta_j w_j^{HL};
\end{gathered} \tag{3.7}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^{3-l}2\lambda_{23(3-l)}\gamma_{(3-l)}^2\,\frac{q^2k_3(q^2,s^2)k_l(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)},\\
\sigma_{rz3}^{HL} = \kappa_3(q^2,s^2)\frac{\lambda_{231}\gamma_1^2\kappa_2(q^2,s^2)-\lambda_{232}\gamma_2^2\kappa_1(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)},\\
\sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^{3-l}\lambda_{23(3-l)}\gamma_{(3-l)}^2\,\frac{q\kappa_l(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)},\\
\sigma_{zz3}^{HL} = qk_3(q^2,s^2)\frac{\lambda_{231}\gamma_1^2\kappa_2(q^2,s^2)-\lambda_{232}\gamma_2^2\kappa_1(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)},\\
\sigma_l^{HL} = (-1)^{3-l}\lambda_{23l}\gamma_l^2\lambda_{23(3-l)}\gamma_{(3-l)}^2\,\frac{qs^2k_3(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)}.
\end{gathered} \tag{3.8}
$$

3.2. Изображения функций влияния второй подгруппы

В этом варианте изображения соответствующих граничных условий (1.35) записывается так:

$$
\sigma_{rz}\big|_{z=0} = 0,\quad \sigma_{zz}\big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}\quad \sigma\big|_{z=0} = 0\,. \tag{3.9}
$$

Постановка соотношений (2.6) в граничные условия (3.9) приводит к аналогичной (3.2) системе линейных алгебраических уравнений (столбец $\mathbf{b}_2$ указан в (2.17)) [19, 21]:

$$\mathbf{A}_2\mathbf{C} = \frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_2 . \tag{3.10}$$

Её решение имеет вид

$$\begin{gathered} C_l = (-1)^l \lambda_{23(3-l)} \gamma^2_{(3-l)} \frac{\kappa_3(q^2, s^2)}{2\pi R_1(q^2, s^2)} \ \ (l = 1, 2) \\ C_3 = -q \frac{\lambda_{231}\gamma_1^2 k_2(q^2, s^2) - \lambda_{232}\gamma_2^2 k_1(q^2, s^2)}{\pi R_1(q^2, s^2)}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

В результате изображения перемещений и напряжений (соответсвующие функции влияния) записываются так:

$$\begin{gathered} G^{(2)HL}_{uzz}\left(r, \tau, z\right) = u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q, s) E_j(q, z, s), \\ G^{(2)HL}_{wzz}\left(r, \tau, z\right) = w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q, s) E_j(q, z, s), \\ G^{(2)HL}_{Uzz}\left(r, \tau, z\right) = U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q, s) E_j(q, z, s), \\ G^{(2)HL}_{Wzz}\left(r, \tau, z\right) = W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q, s) E_j(q, z, s); \end{gathered} \tag{3.12}$$

$$G_{rzrz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right)=\sigma_{rz}^{HL}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{rzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),$$

$$G_{zzrz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right)=\sigma_{zz}^{HL}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{zzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s), \tag{3.13}$$

$$G_{\sigma rz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right)=\sigma^{HL}=\sum_{l=1}^{2}\sigma_{l}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).$$

Здесь

$$u_l^{HL}=(-1)^l\lambda_{23(3-l)}\gamma_{(3-l)}^2\frac{q\kappa_3(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)},$$

$$u_3^{HL}=-k_3(q^2,s^2)q\frac{\lambda_{231}\gamma_1^2k_2(q^2,s^2)-\lambda_{232}\gamma_2^2k_1(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)},$$

$$w_1^{HL}=(-1)^l\lambda_{23(3-l)}\gamma_{(3-l)}^2\frac{\kappa_3(q^2,s^2)k_l(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)},$$

$$w_3^{HL}=-q^2\frac{\lambda_{231}\gamma_1^2k_2(q^2,s^2)-\lambda_{232}\gamma_2^2k_1(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)}, \tag{3.14}$$

$$U_j^{HL}=\beta_ju_j^{HL},\quad W_j^{HL}=\beta_jw_j^{HL};$$

$$\sigma_{rzl}^{HL}=(-1)^{3-l}\lambda_{23(3-l)}\gamma_{(3-l)}^2\frac{q\kappa_3(q^2,s^2)k_l(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)},$$

$$\sigma_{rz3}^{HL}=q\kappa_3(q^2,s^2)\frac{\lambda_{231}\gamma_1^2k_2(q^2,s^2)-\lambda_{232}\gamma_2^2k_1(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)},$$

$$\sigma_{zzl}^{HL}=(-1)^{3-l}\lambda_{23(3-l)}\gamma_{(3-l)}^2\frac{\kappa_3(q^2,s^2)\kappa_l(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)},$$

$$\sigma_{zz3}^{HL}=2q^2k_3(q^2,s^2)\frac{\lambda_{231}\gamma_1^2k_2(q^2,s^2)-\lambda_{232}\gamma_2^2k_1(q^2,s^2)}{\pi R_1(q^2,s^2)}, \tag{3.15}$$

$$\sigma_l^{HL}=(-1)^{3-l}\lambda_{23l}\gamma_l^2\lambda_{23(3-l)}\gamma_{(3-l)}^2\frac{s^2\kappa_3(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)}.$$

3.3. Изображения функций влияния третьей подгруппы

В этой случае используем изображения граничных условий (1.37):

$$\sigma_{rz}^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL}\Big|_{z=0} = 0 \quad \sigma^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}. \tag{3.16}$$

Постановка соотношений (2.6) в граничные условия (3.16) приводит к системе линейных алгебраических уравнений (3.10) с измененной правой частью относительно постоянных интегрирования (столбец $\mathbf{b}_3$ указан в (2.24)) [20, 21]:

$$\mathbf{A}_2\mathbf{C} = \frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_3. \tag{3.17}$$

Вычисляя её решение

$$C_l = (-1)^{3-l}\,\frac{\kappa_{3-l}(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2) - 4q^2k_{3-l}(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{2\pi s^2 R_1(q^2,s^2)},$$
$$C_3 = -q\,\frac{\kappa_1(q^2,s^2)k_2(q^2,s^2) - \kappa_2(q^2,s^2)k_1(q^2,s^2)}{\pi s^2 R_1(q^2,s^2)},$$

из (2.5) и (2.6) находим искомые функции влияния:

$$\begin{gathered}
G_{u\sigma}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) = u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{w\sigma}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) = w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{U\sigma}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) = U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{W\sigma}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) = W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s);
\end{gathered} \tag{3.18}$$

$$
\begin{aligned}
G_{rzrz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3}\sigma_{rzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{zzrz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3}\sigma_{zzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{\sigma rz}^{(2)HL}\left(r,\tau,z\right) &= \sigma^{HL} = \sum_{l=1}^{2}\sigma_{l}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
u_l^{HL} = (-1)^{3-l}q\,\frac{\kappa_{3-l}(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2)-4q^2k_{3-l}(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{2\pi s^2R_1(q^2,s^2)},\\
u_3^{HL} = -qk_3(q^2,s^2)\frac{\kappa_1(q^2,s^2)k_2(q^2,s^2)-\kappa_2(q^2,s^2)k_1(q^2,s^2)}{\pi s^2R_1(q^2,s^2)},\\
w_1^{HL} = (-1)^{3-l}k_l(q^2,s^2)\frac{\kappa_{3-l}(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2)-4q^2k_{3-l}(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{2\pi s^2R_1(q^2,s^2)},\\
w_3^{HL} = -q^2\,\frac{\kappa_1(q^2,s^2)k_2(q^2,s^2)-\kappa_2(q^2,s^2)k_1(q^2,s^2)}{\pi s^2R_1(q^2,s^2)},\\
U_j^{HL} = \beta_j u_j^{HL},\;\; W_j^{HL} = \beta_j w_j^{HL};
\end{gathered}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^{l}q\,\frac{\kappa_{3-l}(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2)-4q^2k_{3-l}(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{\pi s^2R_1(q^2,s^2)},\\
\sigma_{rz3}^{HL} = q\kappa_3(q^2,s^2)\frac{\kappa_1(q^2,s^2)k_2(q^2,s^2)-\kappa_2(q^2,s^2)k_1(q^2,s^2)}{\pi s^2R_1(q^2,s^2)},\\
\sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^{l}\kappa_l(q^2,s^2)\frac{\kappa_{3-l}(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2)-4q^2k_{3-l}(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{2\pi s^2R_1(q^2,s^2)},\\
\sigma_{zz3}^{HL} = 2q^2\,\frac{\kappa_1(q^2,s^2)k_2(q^2,s^2)-\kappa_2(q^2,s^2)k_1(q^2,s^2)}{\pi s^2R_1(q^2,s^2)},\\
\sigma_{l}^{HL} = (-1)^{l}\lambda_{23l}\gamma_l^2\,\frac{\kappa_{3-l}(q^2,s^2)\kappa_3(q^2,s^2)-4q^2k_{3-l}(q^2,s^2)k_3(q^2,s^2)}{2\pi R_1(q^2,s^2)}.
\end{gathered}
\tag{3.21}
$$

3.4. Оригиналы функций влияния второй группы

Поскольку оригиналы всех функций влияния находятся аналогично, то ограничимся только третьей подгруппой. При этом будем рассматривать только напряжения на границе $z=0$. Соответствующие нетривиальные изображения определяются формулами (3.18) и (3.20):

$$
\begin{aligned}
&G_{0u\sigma}^{(2)HL}=G_{u\sigma}^{(2)HL}\Big|_{z=0}=\sum_{j=1}^{3}u_j^{HL}(q,s,0), \quad G_{0w\sigma}^{(2)HL}=G_{w\sigma}^{(2)HL}\Big|_{z=0}=\sum_{j=1}^{3}w_j^{HL}(q,s,0),\\
&G_{0U\sigma}^{(2)HL}=G_{U\sigma}^{(2)HL}\Big|_{z=0}=\sum_{j=1}^{3}U_j^{HL}(q,s,0), \quad G_{0W\sigma}^{(2)HL}=G_{W\sigma}^{(2)HL}\Big|_{z=0}=\sum_{j=1}^{3}W_j^{HL}(q,s,0).
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Сравнение этих функций с изображениями функций влияния $\tilde{\Gamma}_{u,2}^{(2)}(x,\tau)$ и $\tilde{\Gamma}_{w,2}^{(2)}(x,\tau)$ для плоской задачи [46-48] показывает, что имеют место равенства:

$$
\begin{aligned}
&G_{0u\sigma}^{(2)HL}\left(q,s\right)=\frac{\eta_1 i}{2\pi}\tilde{\Gamma}_{u,2}^{FL}\left(q,s\right),\ G_{0w\sigma}^{(2)HL}\left(q,s\right)=-\frac{\eta_1}{2\pi}\tilde{\Gamma}_{w,2}^{FL}\left(q,s\right)\\
&G_{0U\sigma}^{(2)HL}=\frac{\eta_1 i}{2\pi}\tilde{\Gamma}_{U,2}^{FL}\left(q,s\right),\ G_{0W\sigma}^{(2)HL}=-\frac{\eta_1}{2\pi}\tilde{\Gamma}_{W,2}^{FL}\left(q,s\right)
\end{aligned}
. \tag{3.23}
$$

При этом функции $\tilde{\Gamma}_{u,2}^{(2)}(x,\tau)$ и $\tilde{\Gamma}_{w,2}^{(2)}(x,\tau)$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}_{u,2}^{(2)}\left(x,\tau\right)=\sum_{k=1}^{3}\tilde{u}^{(k)}\left(x,\tau\right)H\left(\tau-\gamma_k\left|x\right|\right),\\
&\tilde{\Gamma}_{U,2}^{(2)}\left(x,\tau\right)=\sum_{k=1}^{3}\tilde{U}^{(k)}\left(x,\tau\right)H\left(\tau-\gamma_k\left|x\right|\right),\\
&\tilde{\Gamma}_{w,2}^{(2)}\left(x,\tau\right)=\sum_{k=1}^{3}\tilde{w}^{(k)}\left(x,\tau\right)H\left(\tau-\gamma_k\left|x\right|\right),\\
&\tilde{\Gamma}_{W,2}^{(2)}\left(x,\tau\right)=\sum_{k=1}^{3}\tilde{W}^{(k)}\left(x,\tau\right)H\left(\tau-\gamma_k\left|x\right|\right).
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}^{(1)}(x,\tau)=u^{(2)}(x,\tau),\ \tilde{w}^{(1)}(x,\tau)=w^{(2)}(x,\tau),\\
&\tilde{u}^{(2)}(x,\tau)=u^{(4)}(x,\tau)-u^{(3)}(x,\tau),\ \tilde{u}^{(3)}(x,\tau)=u^{(3)}(x,\tau)-u^{(2)}(x,\tau),\\
&\tilde{w}^{(2)}(x,\tau)=w^{(4)}(x,\tau)-w^{(3)}(x,\tau),\ \tilde{w}^{(3)}(x,\tau)=w^{(3)}(x,\tau)-w^{(2)}(x,\tau),\\
&\tilde{U}^{(1)}(x,\tau)=U^{(2)}(x,\tau),\ \tilde{W}^{(1)}(x,\tau)=\mathrm{W}^{(2)}(x,\tau)\\
&\tilde{U}^{(2)}(x,\tau)=U^{(4)}(x,\tau)-U^{(3)}(x,\tau),\tilde{U}^{(3)}(x,\tau)=U^{(3)}(x,\tau)-U^{(2)}(x,\tau)\\
&\tilde{W}^{(2)}(x,\tau)=W^{(4)}(x,\tau)-W^{(3)}(x,\tau),\tilde{W}^{(3)}(x,\tau)=W^{(3)}(x,\tau)-W^{(2)}(x,\tau),
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

где

$$
\begin{aligned}
u^{(2)}(x,\tau)=&-\beta_{11}\frac{\operatorname{sign}x}{\pi}\tau_{+}+\frac{(\beta_{12}-1)\tau}{\pi Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[-4\kappa_3\frac{\tau^2}{x^2}Q_1^{(2)}(x,\tau)-\chi_1\tau^2Q_{21}^{(2)}(x,\tau)+\right.\\
&\left.+\chi_2x^2Q_{22}^{(2)}(x,\tau)-4\chi_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{23}^{(2)}(x,\tau)\right]-2\beta_{11}Q_5(x,\tau)-\\
&-\frac{8\chi_3\tau^3}{\pi Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_3^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)+\frac{Q_3^{(2)}(x,\tau;\gamma_2)}{x^2}\right]+\\
&+\frac{2(\beta_{12}+1)\tau}{\pi Q_{(0)}^{(1)}(x,\tau)}\left[\chi_1\tau^2Q_{41}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)-\chi_2x^2Q_{42}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)+4\chi_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{43}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u^{(3)}(x,\tau)=&-\beta_{11}\frac{\operatorname{sign}x}{\pi}\tau_{+}+\frac{(\beta_{12}-1)\tau}{\pi Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[-4\chi_3\frac{\tau^2}{x^2}Q_1^{(3)}(x,\tau)+\chi_1\tau^2Q_{21}^{(3)}(x,\tau)+\right.\\
&\left.-\chi_2x^2Q_{22}^{(3)}(x,\tau)+4\chi_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{23}^{(3)}(x,\tau)\right]+\\
&+\frac{8\chi_3\tau^3}{\pi Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_3^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)-\frac{Q_3^{(3)}(x,\tau;\gamma_2)}{x^2}\right]-\\
&-\frac{2(\beta_{12}+1)\tau}{\pi Q_{(0)}^{(2)}(x,\tau)}\left[\chi_1\tau^2Q_{41}^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)-\chi_2x^2Q_{42}^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)+4\chi_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{43}^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)\right],
\end{aligned}
$$

$$
u^{(4)}(x,\tau)=-\beta_{11}\frac{\operatorname{sign}x}{\pi}\tau_{+},
$$

$$U^{(2)}\left(x,\tau\right)=-\beta_{11}\beta_1\frac{\mathrm{sign}x}{\pi}\tau_+ +\frac{\left(\beta_{12}\beta_1-\beta_2\right)\tau}{\pi Q_0^{(1)}\left(x,\tau\right)}\left[4\kappa_3\frac{\tau^2}{x^2}Q_1^{(2)}\left(x,\tau\right)-\kappa_1\tau^2 Q_{21}^{(2)}\left(x,\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\kappa_2 x^2 Q_{22}^{(2)}\left(x,\tau\right)-4\kappa_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{23}^{(2)}\left(x,\tau\right)\right]+2\beta_{11}\beta_3 Q_5\left(x,\tau\right)-$$

$$-\frac{8\kappa_3\beta_3\tau^3}{\pi Q_0^{(1)}\left(x,\tau\right)}\left[\beta_{12}Q_3^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)+\frac{Q_3^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)}{x^2}\right]-$$

$$-\frac{2\beta_3\beta_{12}\tau}{\pi Q_{(0)}^{(1)}\left(x,\tau\right)}\left[\kappa_1\tau^2 Q_{41}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)-\kappa_2 x^2 Q_{42}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)+4\kappa_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{43}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)\right]-$$

$$-\frac{2\beta_3\tau}{\pi Q_{(0)}^{(1)}\left(x,\tau\right)}\left[\kappa_1\tau^2 Q_{41}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)-\kappa_2 x^2 Q_{42}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)+4\kappa_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{43}^{(2)}\left(x,\tau,\gamma_2\right)\right],$$

$$U^{(3)}\left(x,\tau\right)=-\beta_{11}\beta_1\frac{\mathrm{sign}x}{\pi}\tau_+ +\frac{\left(\beta_{12}\beta_1-\beta_2\right)\tau}{\pi Q_0^{(2)}\left(x,\tau\right)}\left[-4\kappa_3\frac{\tau^2}{x^2}Q_1^{(3)}\left(x,\tau\right)+\kappa_1\tau^2 Q_{21}^{(3)}\left(x,\tau\right)-\right.$$

$$\left.-\kappa_2 x^2 Q_{22}^{(3)}\left(x,\tau\right)+4\kappa_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{23}^{(3)}\left(x,\tau\right)\right]+$$

$$+\frac{8\kappa_3\beta_3\tau^3}{\pi Q_0^{(2)}\left(x,\tau\right)}\left[\beta_{12}Q_3^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)-\frac{Q_3^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)}{x^2}\right]+$$

$$+\frac{2\beta_3\beta_{12}\tau}{\pi Q_{(0)}^{(2)}\left(x,\tau\right)}\left[\kappa_1\tau^2 Q_{41}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)-\kappa_2 x^2 Q_{42}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)+4\kappa_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{43}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)\right]+$$

$$+\frac{2\beta_3\tau}{\pi Q_{(0)}^{(2)}\left(x,\tau\right)}\left[\kappa_1\tau^2 Q_{41}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)-\kappa_2 x^2 Q_{42}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)+4\kappa_3\frac{\tau^4}{x^2}Q_{43}^{(3)}\left(x,\tau,\gamma_2\right)\right],$$

$$U^{(4)}\left(x,\tau\right)=-\beta_{11}\beta_1\frac{signx}{\pi}\tau_+;$$

$$w^{(2)}(x,\tau) = -\beta_{11}Q_{10}(x,\tau) - \frac{4\chi_3\tau^2}{\pi x^2 Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_6^{(2)}(x,\tau;\gamma_1) + Q_6^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right] +$$

$$+\frac{\chi_1\tau^2}{\pi Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_7^{(2)}(x,\tau;\gamma_1) + Q_7^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right] +$$

$$+\frac{\chi_2 x^2}{\pi Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_8^{(2)}(x,\tau;\gamma_1) - Q_8^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right] +$$

$$+\frac{4\chi_3\tau^4}{\pi x^2 Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_9^{(2)}(x,\tau;\gamma_1) + Q_9^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right],$$

$$w^{(3)}(x,\tau) = -\beta_{11}Q_{10}(x,\tau) + \frac{4\chi_3\tau^2}{\pi x^2 Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_6^{(3)}(x,\tau;\gamma_1) + Q_6^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right] -$$

$$-\frac{\chi_1\tau^2}{\pi Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_7^{(3)}(x,\tau;\gamma_1) + Q_7^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right] -$$

$$-\frac{\chi_2 x^2}{\pi Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_8^{(3)}(x,\tau;\gamma_1) + Q_8^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right] +$$

$$+\frac{4\chi_3\tau^4}{\pi x^2 Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_9^{(3)}(x,\tau;\gamma_1) - Q_9^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right],$$

$$w^{(4)}(x,\tau) = -\beta_{11}Q_{10}(x,\tau).$$

$$W^{(2)}(x,\tau)=-\beta_{11}\beta_1 Q_{10}(x,\tau)-\frac{4\kappa_3\tau^2}{\pi x^2 Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}\beta_1 Q_6^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)+\beta_2 Q_6^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+$$

$$+\frac{\kappa_1\tau^2}{\pi Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}\beta_1 Q_7^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)+\beta_2 Q_7^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+$$

$$+\frac{\kappa_2 x^2}{\pi Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}\beta_1 Q_8^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)-\beta_2 Q_8^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+$$

$$+\frac{4\kappa_3\tau^4}{\pi x^2 Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}\beta_1 Q_9^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)+\beta_2 Q_9^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right]-$$

$$-2\beta_{11}\beta_3 Q_{11}(x,\tau)+\frac{8\kappa_3\beta_3\tau^4}{\pi x^2 Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_{12}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)+Q_{12}^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+$$

$$+\frac{2\kappa_1\beta_3\tau^4}{\pi Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_{13}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)-Q_{13}^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+$$

$$+\frac{2\kappa_2\beta_3\tau^2 x^2}{\pi Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_{14}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)+Q_{14}^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right]-$$

$$\left.-\frac{8\kappa_3\beta_3\tau^6}{\pi x^2 Q_0^{(1)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}Q_{15}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1)+Q_{15}^{(2)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+\right\};$$

$$W^{(3)}(x,\tau)=-\beta_{11}\beta_1 Q_{10}(x,\tau)+\frac{4\kappa_3\tau^2}{\pi x^2 Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}\beta_1 Q_6^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)+\beta_2 Q_6^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right]-$$

$$-\frac{\kappa_1\tau^2}{\pi Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}\beta_1 Q_7^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)+\beta_2 Q_7^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right]-$$

$$-\frac{\kappa_2 x^2}{\pi Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}\beta_1 Q_8^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)+\beta_2 Q_8^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+$$

$$+\frac{4\kappa_3\tau^4}{\pi x^2 Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12}\beta_1 Q_9^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)-\beta_2 Q_9^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right]-$$

$$-2\beta_{11}\beta_3 Q_{11}(x,\tau)-\frac{8\beta_3\kappa_3\tau^4}{\pi x^2 Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12} Q_{12}^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)+Q_{12}^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+$$

$$-\frac{2\beta_3\kappa_1\tau^4}{\pi Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12} Q_{13}^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)+Q_{13}^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right]+$$

$$+\frac{2\beta_3\kappa_2\tau^2 x^2}{\pi Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12} Q_{14}^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)-Q_{14}^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right]-$$

$$\left.-\frac{8\beta_3\kappa_3\tau^6}{\pi x^2 Q_0^{(2)}(x,\tau)}\left[\beta_{12} Q_{15}^{(3)}(x,\tau;\gamma_1)-Q_{15}^{(3)}(x,\tau,\gamma_2)\right]\right\},$$

$$W^{(4)}(x,\tau)=-\beta_{11}\beta_1 Q_{10}(x,\tau)-\beta_{11}\beta_1 Q_{11}(x,\tau);$$

В этих формулах использованы обозначения в дополнение к (2.36)

$$\chi_1=2\left[-\left(\xi_1\gamma_1^2+\gamma_3^2\eta_1\right)\right],\ \chi_2=-\gamma_3^2\xi_1\gamma_1^2,\ \chi_3=\eta_1,$$

и следующие функции:

$$Q_{20}^{(1)}(x,\tau) = -4\eta_1\xi_3\gamma_1^2\tau^2\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2},$$
$$Q_{30}^{(1)}(x,\tau) = 4\eta_1\xi_4\gamma_2^2\tau^2\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2},$$
$$Q_{20}^{(2)}(x,\tau) = 4\eta_1\xi_3\gamma_1^2\mathrm{sign}x\tau^2\sqrt{\tau^2-\gamma_3^2x^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2},$$
$$Q_{30}^{(2)}(x,\tau) = -4\eta_1\xi_4\gamma_2^2\tau^2\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\tau^2-\gamma_3^2x^2},$$
$$Q_{40}(x,\tau) = \left(\gamma_3^2x^2-2\tau^2\right)\left[\xi_3\gamma_1^2\left(\xi_2\gamma_2^2x^2-2\eta_1\tau^2\right)-\xi_4\gamma_2^2\left(\xi_1\gamma_1^2x^2-2\eta_1\tau^2\right)\right],$$
$$Q_0^{(1)}(x,\tau) = \left[Q_{20}^{(1)}(x,\tau)+Q_{40}(x,\tau)\right]^2+\left[Q_{30}^{(1)}(x,\tau)\right]^2,$$
$$Q_0^{(2)}(x,\tau) = \left[Q_{30}^{(2)}(x,\tau)+Q_{40}(x,\tau)\right]^2+\left[Q_{20}^{(2)}(x,\tau)\right]^2;$$

$$Q_1^{(2)}(x,\tau) = \frac{Q_{30}^{(1)}(x,\tau)}{4\eta_1\xi_4\gamma_2^2\tau^2}\left[Q_{20}^{(1)}(x,\tau)+Q_{40}(x,\tau)\right], \quad Q_1^{(3)}(x,\tau) = -\frac{Q_{30}^{(2)}(x,\tau)}{4\eta_1\xi_4\gamma_2^2\tau^2}Q_{20}^{(2)}(x,\tau),$$
$$Q_{21}^{(2)}(x,\tau) = Q_{30}^{(1)}(x,\tau), \quad Q_{21}^{(3)}(x,\tau) = Q_{20}^{(2)}(x,\tau);$$

$$Q_{22}^{(2)}(x,\tau) = Q_{30}^{(1)}(x,\tau), \quad Q_{22}^{(3)}(x,\tau) = Q_{20}^{(2)}(x,\tau);$$

$$Q_{23}^{(2)}(x,\tau) = Q_{30}^{(1)}(x,\tau), \quad Q_{23}^{(3)}(x,\tau) = Q_{20}^{(2)}(x,\tau);$$

$$Q_3^{(2)}(x,\tau;\gamma_1) = \frac{\left(\gamma_1^2x^2-\tau^2\right)\left(\gamma_3^2x^2-\tau^2\right)}{\left(\gamma_1^2x^2-2\tau^2\right)}Q_{20}^{(1)}(x,\tau),$$

$$Q_3^{(3)}(x,\tau;\gamma_1) = \frac{\left(\gamma_1^2x^2-\tau^2\right)\left(\gamma_3^2x^2-\tau^2\right)}{\left(\gamma_1^2x^2-2\tau^2\right)}Q_{20}^{(2)}(x,\tau);$$

$$Q_3^{(2)}(x,\tau;\gamma_2) = \frac{\mathrm{sign}x\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}\left(\gamma_3^2x^2-\tau^2\right)}{\left(\gamma_1^2x^2-2\tau^2\right)}\left[Q_{20}^{(1)}(x,\tau)+Q_{40}(x,\tau)\right],$$
$$Q_3^{(3)}(x,\tau;\gamma_2) = \frac{\mathrm{sign}x\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}\left(\gamma_3^2x^2-\tau^2\right)}{\left(\gamma_1^2x^2-2\tau^2\right)}\left[Q_{30}^{(2)}(x,\tau)+Q_{40}(x,\tau)\right],$$

$$Q_{41}^{(2)}(x,\tau;\gamma_1) = \frac{\mathrm{sign}x\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}\left[Q_{20}^{(1)}(x,\tau)+Q_{40}(x,\tau)\right],$$
$$Q_{41}^{(3)}(x,\tau;\gamma_1) = \frac{\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\tau^2-\gamma_3^2x^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}Q_{20}^{(2)}(x,\tau),$$

$$Q_{41}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\frac{\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}Q_{30}^{(1)}\left(x,\tau\right),$$

$$Q_{41}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\frac{\mathrm{sign}x\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}\sqrt{\tau^2-\gamma_3^2x^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}\left[Q_{30}^{(2)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right],$$

$$Q_{42}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_{41}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right),Q_{42}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_{41}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right);$$

$$Q_{42}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_{41}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right),Q_{42}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_{41}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right);$$

$$Q_{43}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_{42}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right),Q_{43}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_{42}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right);$$

$$Q_{43}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_{42}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right);Q_{43}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_{42}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right);$$

$$Q_5\left(x,\tau\right)=-\frac{\tau}{\pi x^2}\frac{\mathrm{sign}x\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2},$$

$$Q_6^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\mathrm{sign}x\left(\gamma_1^2x^2-\tau^2\right)\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2}Q_{30}^{(1)}\left(x,\tau\right),$$

$$Q_6^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\mathrm{sign}x\left(\gamma_1^2x^2-\tau^2\right)\sqrt{\tau^2-\gamma_3^2x^2}\left[Q_{30}^{(2)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right];$$

$$Q_6^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}\left[Q_{20}^{(1)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right],$$

$$Q_6^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\tau^2-\gamma_3^2x^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}Q_{20}^{(2)}\left(x,\tau\right);$$

$$Q_7^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\left[Q_{20}^{(1)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right],$$

$$Q_7^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\left[Q_{30}^{(2)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right];$$

$$Q_7^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}Q_{30}^{(1)}\left(x,\tau\right),\ Q_7^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}Q_{20}^{(2)}\left(x,\tau\right);$$

$$Q_9^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_8^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_7^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right);$$

$$Q_9^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_8^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_7^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right);$$

$$Q_9^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_8^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_7^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right);$$

$$Q_9^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_8^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_7^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right);$$

$$Q_{11}\left(x,\tau\right)=\frac{\tau^2}{\pi x^2}\frac{\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2};\ Q_{12}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\frac{\left(\gamma_1^2x^2-\tau^2\right)\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2}}{\gamma_1^2x^2-2\tau^2}Q_{30}^{(1)}\left(x,\tau\right),$$

$$Q_{12}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\frac{\left(\gamma_1^2x^2-\tau^2\right)\sqrt{\tau^2-\gamma_3^2x^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}\left[Q_{30}^{(2)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right];$$

$$Q_{12}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\frac{\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\gamma_3^2x^2-\tau^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}\left[Q_{20}^{(1)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right],$$

$$Q_{12}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\frac{\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}\sqrt{\tau^2-\gamma_3^2x^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}Q_{20}^{(2)}\left(x,\tau\right);$$

$$Q_{13}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\frac{\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}\left[Q_{20}^{(1)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right],$$

$$Q_{13}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=\frac{\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}\left[Q_{30}^{(2)}\left(x,\tau\right)+Q_{40}\left(x,\tau\right)\right];$$

$$Q_{13}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\frac{\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}}{\gamma_3^2x^2-2\tau^2}Q_{30}^{(1)}\left(x,\tau\right),\ Q_{13}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=\frac{\sqrt{\gamma_2^2x^2-\tau^2}}{\gamma_2^2x^2-2\tau^2}Q_{20}^{(2)}\left(x,\tau\right);$$

$$Q_{10}\left(x,\tau\right)=\frac{\gamma_1^2x}{\pi\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}}-\frac{x}{\pi}\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2x^2}$$

$$Q_{15}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_{14}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_{13}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_1\right),$$

$$Q_{15}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_{14}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right)=Q_{13}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_1\right);$$

$$Q_{15}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_{14}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_{13}^{(2)}\left(x,\tau;\gamma_2\right),$$

$$Q_{15}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_{14}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right)=Q_{13}^{(3)}\left(x,\tau;\gamma_2\right).$$

Из (3.24) следует, что $\tilde{\Gamma}_{u,2}^{(2)}(x,\tau),\tilde{\Gamma}_{U,2}^{(2)}(x,\tau)$ - нечетные, а $\tilde{\Gamma}_{w,2}^{(2)}(x,\tau),\tilde{\Gamma}_{W,2}^{(2)}(x,\tau)$ - четные функции по x. Применяя теперь для первой из них утверждение 2 при $\nu=1$, а для второй утверждение 1 при $\nu=0$, получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned}
&G^{(2)}_{0u\sigma}(r,\tau)=\frac{\eta_1}{\pi}\left[\frac{1}{r}\tilde{\Gamma}^{(2)}_{u,2}(r,\tau)-r\int_r^\infty\frac{\tilde{\Gamma}^{(2)}_{u,2}(x,\tau)}{(x^2-r^2)^{3/2}}dx\right],\\
&G^{(2)}_{0U\sigma}(r,\tau)=\frac{\eta_1}{\pi}\left[\frac{1}{r}\tilde{\Gamma}^{(2)}_{U,2}(r,\tau)-r\int_r^\infty\frac{\tilde{\Gamma}^{(2)}_{U,2}(x,\tau)}{(x^2-r^2)^{3/2}}dx\right],\qquad .\\
&G^{(2)}_{0w\sigma}(r,\tau)=\frac{\eta_1}{\pi}\int_r^\infty\frac{x\tilde{\Gamma}^{(2)}_{w,2}(x,\tau)}{(x^2-r^2)^{3/2}}dx,\ G^{(2)}_{0W\sigma}(r,\tau)=\frac{\eta_1}{\pi}\int_r^\infty\frac{x\tilde{\Gamma}^{(2)}_{W,2}(x,\tau)}{(x^2-r^2)^{3/2}}dx.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

В развернутом виде с учетом (3.24) эти представления записываются так:

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}_{0u\sigma}(r,\tau)=\frac{\eta_1}{\pi r}\tilde{\Gamma}^{(2)}_{u,2}(r,\tau)-\frac{\eta_1 r}{\pi}\sum_{k=1}^{3}I\left[\tilde{u}^{(k)}\left(x,\tau\right);r,\tau/\gamma_k\right]H\left(\tau-\gamma_k r\right),\\
&\tilde{G}_{0U\sigma}(r,\tau)=\frac{\eta_1}{\pi r}\tilde{\Gamma}^{(2)}_{U,2}(r,\tau)-\frac{\eta_1 r}{\pi}\sum_{k=1}^{3}I\left[\tilde{U}^{(k)}\left(x,\tau\right);r,\tau/\gamma_k\right]H\left(\tau-\gamma_k r\right),\\
&\tilde{G}_{0w\sigma}(r,\tau)=\frac{\eta_1 r}{\pi}\sum_{k=1}^{3}I\left[x\tilde{w}^{(k)}\left(x,\tau\right);r,\tau/\gamma_k\right]H\left(\tau-\gamma_k r\right),\\
&\tilde{G}_{0W\sigma}(r,\tau)=\frac{\eta_1 r}{\pi}\sum_{k=1}^{3}I\left[x\tilde{W}^{(k)}\left(x,\tau\right);r,\tau/\gamma_k\right]H\left(\tau-\gamma_k r\right).
\end{aligned}\tag{3.27}$$

В этих формулах использовано следующее обозначение:

$$I\left[f\left(x,\tau\right);x_1,x_2\right]=\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x,\tau)}{\left(x^2-r^2\right)^{3/2}}dx.. \tag{3.28}$$

Если точка $x=r$ принадлежит отрезку интегрирования, то интегралы в (3.27) понимаются в смысле регуляризованных значений. В частности,

$$\begin{aligned}
&I\left[f\left(x,\tau\right);r,a\right]=\int_r^a\frac{f(x,\tau)-f(r,\tau)}{\left(x^2-r^2\right)^{3/2}}dx-\frac{af(r,\tau)}{r^2\sqrt{a^2-r^2}},\\
&I\left[xf\left(x,\tau\right);r,a\right]=\int_r^a\frac{x\left[f(x,\tau)-f(r,\tau)\right]}{\left(x^2-r^2\right)^{3/2}}dx-\frac{f(r,\tau)}{\sqrt{a^2-r^2}}.
\end{aligned}\tag{3.29}$$

3.5. Пример расчетов

Рассматривается материал с физическими характеристиками, указанными в п.2.6.

Результаты расчетов представлены на рис. 3.1 – 3.4 в виде графиков функций влияния (на осях ординат указаны соответствующие перемещения). Сплошные кривые соответствуют моменту времени $\tau = 0{,}15$, точечные - $\tau = 0{,}3$, а пунктирные - $\tau = 0{,}45$. Аналогично п. 2.6 разрывы второго рода на графиках имеют место в точках, соответствующих поверхностным волнам типа Рэлея.

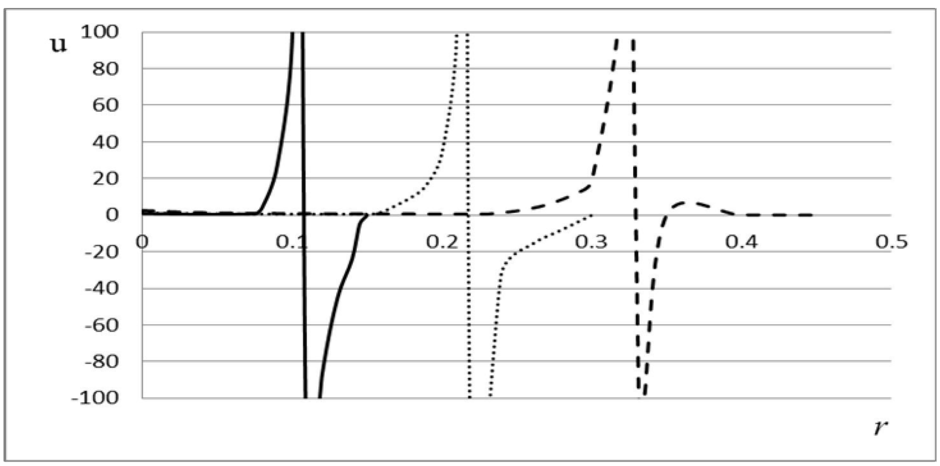


Рис.3.1

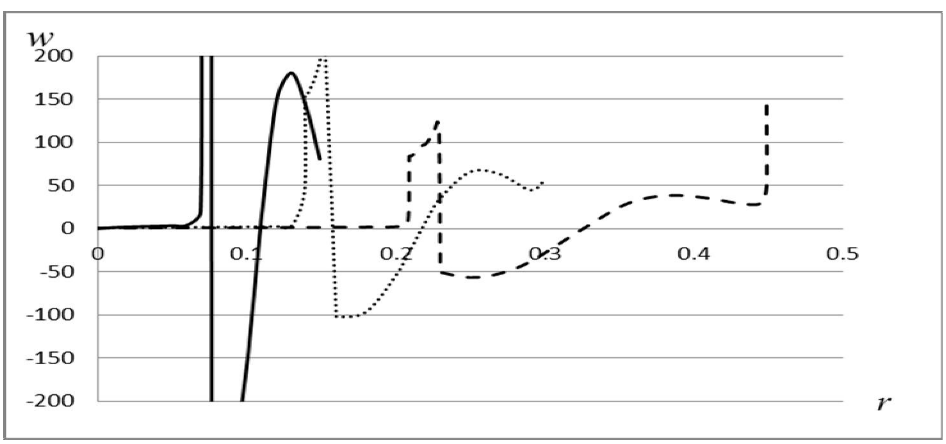


Рис.3.2

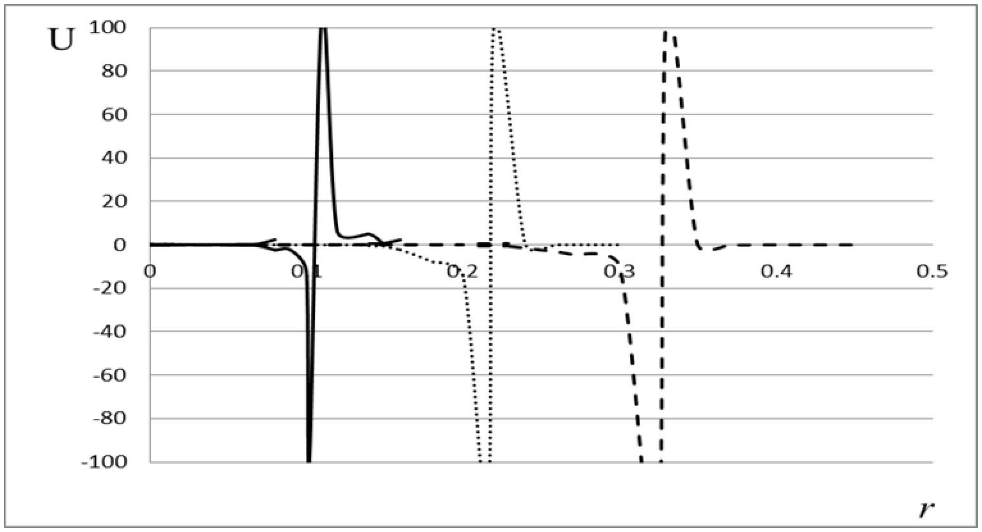

U
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
r

Рис.3.3

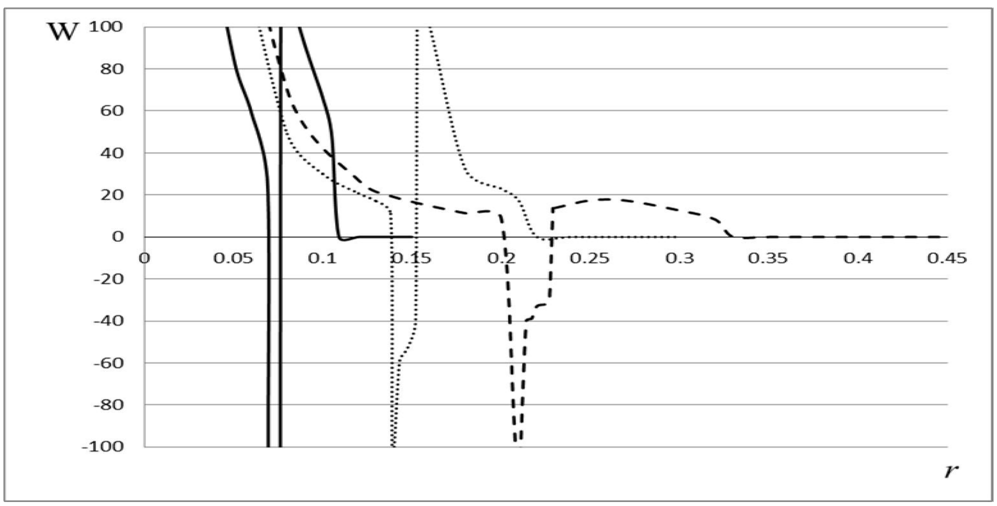

W
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
r

Рис.3.4

Глава 4

Полупространство под действием смешанных возмущений

(граничные условия третьей группы)

4.1. Изображения функций влияния первой подгруппы

К граничным условиям (1.41) применяем указанные в п. 2.1 преобразования:

$$w^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \quad W^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \ \sigma_{rz}^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \tag{4.1}$$

Отсюда с учетом соотношений (2.5) и (2.6) получаем аналогичную (2.7) систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования [23]:

$$\mathbf{A}_3\mathbf{C} = \frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_1, \tag{4.2}$$

где

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2qk_1(q^2,s^2) & 2qk_2(q^2,s^2) & -\kappa_3(q^2,s^2) \\ k_1(q^2,s^2) & k_2(q^2,s^2) & -q \\ \beta_1 k_1(q^2,s^2) & \beta_2 k_2(q^2,s^2) & -\beta_3 q \end{pmatrix}$$

Подставляя ее решение

$$C_1 = -\frac{q\beta_{23}}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2 k_1(q^2,s^2)}, \ C_2 = \frac{q\beta_{13}}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2 k_2(q^2,s^2)}, \ C_3 = \frac{\beta_{12}}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2}. \tag{4.3}$$

в (2.5) и (2.6) находим изображения соответствующих функций влияния:

$$
\begin{aligned}
G_{urz}^{(3)HL} &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{wrz}^{(3)HL} &= w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{Urz}^{(3)HL} &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{Wrz}^{(3)HL} &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{zzrz}^{(3)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{rzrz}^{(3)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{\sigma rz}^{(3)HL} &= \sigma_{\sigma u}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{\sigma uj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&u_l^{HL}(q,z,s) = (-1)^{3-l}\frac{\beta_{(3-l)3}q^2}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2 k_l(q^2,s^2)},\ u_3^{HL}(q,z,s) = \frac{\beta_{12}k_3(q^2,s^2)}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2},\\
&w_l^{HL}(q,z,s) = (-1)^{3-l}\frac{q^2\beta_{(3-l)3}}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2},\ w_3^{HL}(q,z,s) = \frac{\beta_{12}q}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2},\\
&U_j^{HL} = \beta_j u_j^{HL},\quad W_j^{HL}(q,z,s) = \beta_j w_j^{HL};
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rzl}^{HL}(q,z,s) = (-1)^{l}\frac{q^2\beta_{(3-l)3}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2 k_l(q^2,s^2)},\ \sigma_{rz3}^{HL}(q,z,s) = -\frac{\kappa_3(q^2,s^2)}{2\pi\gamma_3^2 s^2},\\
&\sigma_{zzl}^{HL}(q,z,s) = (-1)^{l}\frac{q\beta_{(3-l)3}\kappa_l(q^2,s^2)}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2 k_l(q^2,s^2)},\ \sigma_{zz3}^{HL}(q,z,s) = -\frac{qk_3(q^2,s^2)}{\pi\gamma_3^2 s^2},\\
&\sigma_l^{HL}(q,z,s) = (-1)^{l}\frac{\lambda_{23l}\gamma_l^2 q\beta_{(3-l)3}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2 k_l(q^2,s^2)}.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

В этих формулах и далее использованы обозначения

$$\beta_{3(3-l)} = \beta_3 - \beta_{3-l} \quad \left(l = 1,2\right). \tag{4.8}$$

4.2. Изображения функций влияния второй подгруппы

В этой случае изображения соответсвуюших граничных условий (1.43) заменяется так:

$$w^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad W^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \; \sigma_{rz}^{HL}\Big|_{z=0} = 0. \tag{4.9}$$

Постановка сюда соотношений (2.5) и (2.6) приводит к аналогичной (2.17) системе линейных алгебраических уравнений [23]:

$$\mathbf{A}_3\mathbf{C} = -\frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_2, \tag{4.10}$$

Её решение записывается так:

$$C_1 = -\frac{2\beta_{32}q^2 - \beta_2\gamma_3^2 s^2}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2 k_1(q^2, s^2)}, \; C_2 = \frac{(2\beta_{31}q^2 - \beta_1\gamma_3^2 s^2)}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2 k_2(q^2, s^2)}, \; C_3 = -\frac{q}{\pi\gamma_3^2 s^2}, \tag{4.11}$$

Учитывая эти равенства, из (2.5) и (2.6) получаем изображения соответствующих функций влияния [23]:

$$
\begin{aligned}
G_{uw}^{(3)HL} &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{ww}^{(3)HL} &= w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{Uw}^{(3)HL} &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{Ww}^{(3)HL} &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s);
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{zzw}^{(3)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{rzw}^{(3)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{\sigma w}^{(3)HL} &= \sigma^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{j}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
u_l^{HL} = (-1)^{3-l}\left(\frac{\beta_{3(3-l)}q^3s^{-2}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2k_l(q^2,s^2)} - \frac{q\beta_{(3-l)}}{2\pi\beta_{12}k_l(q^2,s^2)}\right),\ u_3^{HL} = -\frac{qk_3(q^2,s^2)}{\pi\gamma_3^2s^2},\\
w_l^{HL} = (-1)^{3-l}\left(\frac{\beta_{3(3-l)}q^2s^{-2}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2} - \frac{\beta_{(3-l)}}{2\pi\beta_{12}}\right),\ w_3^{HL} = -\frac{q^2}{\pi\gamma_3^2s^2};
\end{gathered}
\tag{4.14}
$$

$$\sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^l \left[\frac{2\beta_{3(3-l)}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2} \frac{q^4}{s^2 k_l(q^2, s^2)} + \frac{\beta_{3(3-l)}\varsigma_l - \beta_{3-l}\gamma_3^2}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q^2}{k_l(q^2, s^2)} - \frac{\beta_{3-l}\varsigma_l}{2\pi\beta_{12}} \frac{s^2}{k_l(q^2, s^2)} \right],$$

$$\sigma_{zz3}^{HL} = 2q \frac{qk_3(q^2, s^2)}{\pi\gamma_3^2 s^2}, \ \sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^l \frac{q\left(2\beta_{3(3-l)}q^2 - \beta_{3-l}\gamma_3^2 s^2\right)}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2 s^2}, \tag{4.15}$$

$$\sigma_{rz3}^{HL} = \frac{q(2q^2 + \gamma_3^2 s^2)}{\pi\gamma_3^2 s^2}, \ \sigma_l^{HL} = (-1)^l \lambda_{23l}\gamma_l^2 \frac{2\beta_{3(3-l)}q^2 - \beta_{3-l}\gamma_3^2 s^2}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2 k_l(q^2, s^2)}.$$

В этих формулах и далее использованы обозначения

$$\varsigma_l = \left(2 + \lambda_{12l}\right)\gamma_l^2 \ \ \left(l = 1, 2\right). \tag{4.16}$$

4.3. Изображения функций влияния третьей подгруппы

В этом варианте используем изображения граничных условий (1.45):

$$w^{HL}\big|_{z=0} = 0, \ W^{HL}\big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \ \sigma_{rz}^{HL}\big|_{z=0} = 0 \ . \tag{4.17}$$

Постановка соотношений (2.5) и (2.6) в эти граничные условия приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования [23]:

$$\mathbf{A}_3\mathbf{C} = -\frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_3, \tag{4.18}$$

Её решение имеет вид:

$$C_1 = -\frac{1}{2\pi\beta_{12}k_1(q^2, s^2)}, \ C_2 = \frac{1}{2\pi\beta_{12}k_2(q^2, s^2)}, \ C_3 = 0. \tag{4.19}$$

Учитывая эти равенства, из (2.5) и (2.6) находим изображения соответствующих функций влияния [23]:

$$
\begin{aligned}
G_{uW}^{(3)HL} &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{wW}^{(3)HL} &= w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{UW}^{(3)HL} &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{WW}^{(3)HL} &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s);
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{zzW}^{(3)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{rzW}^{(3)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{\sigma W}^{(3)HL} &= \sigma_{\sigma u}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{\sigma uj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
u_l^{HL} = (-1)^{3-l}\frac{q}{2\pi\beta_{12}k_l(q^2,s^2)},\ u_3^{HL} = 0,\\
w_l^{HL} = (-1)^{3-l}\frac{1}{2\pi\beta_{12}},\ w_3^{HL} = 0;
\end{gathered}
\tag{4.22}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^l\frac{\kappa_l(q^2,s^2)}{2\pi\beta_{12}k_l(q^2,s^2)},\ \sigma_{zz3}^{HL} = 0,\ \sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^l\frac{2q}{2\pi\beta_{12}},\\
\sigma_{rz3}^{HL} = 0,\ \sigma_l^{HL} = (-1)^l\lambda_{23l}\gamma_l^2\frac{1}{2\pi\beta_{12}k_l(q^2,s^2)}.
\end{gathered}
\tag{4.23}
$$

4.4. Оригиналы функций влияния третьей группы

Изображения функций влияния этой группы, как следует и п.п. 2.1 – 2.3, по сравнению с функциями, полученными в гл. 2 и 3 имеют более простую структуру. Поэтому их оригиналы могут быть найдены с помощью последовательного обращения преобразований Лапласа и Ханкеля с помощью их свойств и таблиц [12]. В качестве примера ограничимся только функциями влияния второй подгруппы. Соответствующие изображения определяется формулами (4.12) - (4.15).

Предварительно с помощью (4.14) и (4.15) преобразуем слагаемые в (4.12) и (4.13) следующим образом [23]:

$$
\begin{aligned}
&u_j^{HL}E_j(q,z,s)=(-1)^{3-j}\left(\frac{\beta_{3(3-j)}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2}q^2s^{-2}-\frac{\beta_{3-j}}{2\pi\beta_{12}}\right)f_{1j}^{HL}(q,s,z),\\
&u_3^{HL}E_3(q,z,s)=-\frac{1}{\pi\gamma_3^2}f_{23}^{HL}(q,s,z);\\
&w_j^{HL}E_j(q,z,s)=(-1)^{3-j}\left(\frac{\beta_{3(3-j)}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2}q^2s^{-2}-\frac{\beta_{3-j}}{2\pi\beta_{12}}\right)f_{7j}^{HL}(q,s,z)\\
&w_3^{HL}E_3(q,z,s)=-\frac{1}{\pi\gamma_3^2}q^2s^{-2}f_{73}^{HL}(q,s,z);\\
&\sigma_{zzj}^{HL}E_j(q,z,s)=\frac{(-1)^j}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\Big[4\beta_{3(3-j)}q^4s^{-4}+2\left(\beta_{3(3-j)}\varsigma_j-\beta_{3-j}\gamma_3^2\right)q^2s^{-2}-\\
&\qquad\qquad -\beta_{3-j}\gamma_3^2\varsigma_j\Big]f_{4j}^{HL}(q,s,z),\\
&\sigma_{zz3}^{HL}E_3(q,z,s)=\frac{2}{\pi\gamma_3^2}q^2s^{-2}f_{53}^{HL}(q,s,z),\ \sigma_{rz3}^{HL}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\gamma_3^2}q^2s^{-2}+1\right)f_{63}^{HL}(q,s,z),\\
&\sigma_{rzj}^{HL}E_j(q,z,s)=\frac{(-1)^j}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\left(2\beta_{3(3-j)}q^2s^{-2}-\beta_{3-j}\gamma_3^2\right)f_{6j}^{HL}(q,s,z),\\
&\sigma_j^{HL}E_j(q,z,s)=\frac{(-1)^j\lambda_{23j}\gamma_j^2}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\Big[2\beta_{3(3-j)}f_{3j}^{HL}(q,s,z)-\beta_{3-j}f_{4j}^{HL}(q,s,z)\Big].
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Здесь

$$f_{1l}^{HL}(q,s,z)=\frac{qE_l(q,s,z)}{k_l(q^2,s^2)},\ f_{2l}^{HL}(q,s,z)=\frac{qk_l(q^2,s^2)}{s^2}E_l(q,s,z),$$
$$f_{3l}^{HL}(q,s,z)=\frac{q^2E_l(q,s,z)}{k_l(q^2,s^2)},\quad f_{4l}^{HL}(q,s,z)=\frac{s^2E_l(q,s,z)}{k_l(q^2,s^2)},\tag{4.25}$$
$$f_{5l}^{HL}(q,s,z)=k_l(q^2,s^2)E_l(q,s,z),\quad f_{6l}^{HL}(q,s,z)=qE_l(q,s,z).$$
$$f_{7l}^{HL}(q,z,s)=E_l(q,z,s)$$

Оригиналы этих и связанных с ними функций имеют вид ($r_3=\sqrt{r^2+z^2}$, $H(\tau)$ - функция Хевисайда) [23]:

$$f_{1l}(r,\tau,z)=\frac{r}{r_3^3}\left[\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l r_3\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\right],$$

$$f_{2l}(r,\tau,z)=$$
$$=\frac{r}{r_3^6}\left[3\tau(4z^2-r^2)H(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l^2 r_3(5z^2-3r^2)\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l^3 r_3^2 z^2\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\right],$$

$$f_{3l}(r,\tau,z)=\frac{2z^2-r^2}{r_3^5}\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l\frac{2z^2-r^2}{r_3^4}\delta'(\tau-\gamma_l r_3)-\gamma_l^2\frac{r^2}{r_3^3}\delta''(\tau-\gamma_l r_3),$$

$$f_{4l}(r,\tau,z)=\frac{1}{r_3}\delta''(\tau-\gamma_l r_3),$$
$$f_{5l}(r,\tau,z)=r_3^{-5}(2z^2-r^2)H(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l^2 z^2 r_3^3\delta(\tau-\gamma_l r_3),\tag{4.26}$$
$$f_{6l}(r,\tau,z)=\frac{rz}{r_3^3}\left[\frac{3}{r_3^2}\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\frac{3\gamma_l}{r_3}\delta'(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l^2\delta''(\tau-\gamma_l r_3)\right];$$

$$f_{7l}(r,z,\tau)=\frac{z}{r_3^3}\left[\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l r_3\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\right],$$

$$\left[q^2 s^{-2} f_{7l}(q,z,s)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=$$

$$=-\frac{z}{r_3^4}\left[3\tau\frac{3r^2-2z^2}{r_3^2}H(\tau-\gamma_l r_3)+2\gamma_l^2\frac{2r^2-z^2}{r_3}\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l^3 r^2\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\right],$$

$$\begin{aligned}\left[q^2 s^{-2} f_{5l}(q,s,z)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}&=\tau\frac{9r^4-72r^2z^2+24z^4}{r_3^9}H(\tau-\gamma_l r_3)+\\&+\gamma_l^2\frac{4r^4-31r^2z^2+10z^4}{r_3^7}\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l^3\frac{r^4-7r^2z^2+2z^4}{r_3^6}\delta'(\tau-\gamma_l r_3)-\\&-\gamma_l^4\frac{r^2z^2}{r_3^5}\delta''(\tau-\gamma_l r_3),\end{aligned}\tag{4.27}$$

$$\left[q^2 s^{-2} f_{1l}(q,s,z)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=$$

$$=\frac{r}{r_3^4}\left[\frac{3\tau(4z^2-r^2)}{r_3^2}H(\tau-\gamma_l r_3)+\frac{2\gamma_l(2z^2-r^2)}{r_3}\delta(\tau-\gamma_l r_3)-\gamma_l^3 r^2\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\right],$$

$$\begin{aligned}\left[q^2 s^{-2} f_{4l}(q,s,z)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}&=\frac{2z^2-r^2}{r_3^5}\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l\frac{2z^2-r^2}{r_3^4}\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\\&-\gamma_l^2\frac{r^2}{r_3^3}\delta''(\tau-\gamma_l r_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[q^4 s^{-4} f_{4l}(q,s,z)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}&=\rho_0\tau H(\tau-\gamma_l r)+\rho_2\gamma_l^2\delta(\tau-\gamma_l r)+\rho_3\gamma_l^3\delta'(\tau-\gamma_l r)+\\&+\rho_4\gamma_l^4\delta''(\tau-\gamma_l r),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q^2 s^{-2}\left[f_{6l}(q,s,z)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}&=\zeta_0\tau H(\tau-\gamma_l r_3)+\zeta_2\gamma_l{}^2\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\zeta_3\gamma_l^3\delta'(\tau-\gamma_l r_3)+\\&+\zeta_4\gamma_l^4\delta''(\tau-\gamma_l r_3).\end{aligned}$$

В результате приходим к следующим равенствам для оригиналов слагаемых в формулах (4.20) и (4.21) ($j=1,2,3;\ \ l=1,2$) [23]:

$$\left[u_j^{HL}E_j(q,z,s)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=u_{jr}(r,\tau,z)+u_{js}(r,\tau,z),$$
$$\left[w_j^{HL}E_j(q,z,s)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=w_{jr}(r,\tau,z)+w_{js}(r,\tau,z),$$
$$\left[U_j^{HL}E_j(q,z,s)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=U_{jr}(r,\tau,z)+U_{js}(r,\tau,z),$$
$$\left[W_j^{HL}E_j(q,z,s)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=W_{jr}(r,\tau,z)+W_{js}(r,\tau,z), \tag{4.28}$$
$$\left[\sigma_{zzj}^{HL}E_j(q,z,s)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=\sigma_{zzjr}(r,\tau,z)+\sigma_{zzjs}(r,\tau,z),$$
$$\left[\sigma_{rzj}^{HL}E_j(q,z,s)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=\sigma_{rzjr}(r,\tau,z)+\sigma_{rzjs}(r,\tau,z),$$
$$\sigma_l(r,\tau,z)=\frac{(-1)^l\lambda_{23l}\gamma_l^2}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2r_3}\left\{\beta_{3(3-l)}\frac{2z^2-r^2}{r_3^4}\left[\delta(\tau-\gamma_lr)+\gamma_lr_3\delta'(\tau-\gamma_lr)\right]-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\beta_{3(3-l)}\gamma_l^2r^2}{r_3^2}+\frac{1}{2}\beta_{3-l}\right)\delta''(\tau-\gamma_lr)\right\};$$

Здесь

$$u_{lr}(r,\tau,z)=\frac{3(-1)^{3-l}\beta_{3(3-l)}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2r_3^6}\tau r(4z^2-r^2)H(\tau-\gamma_lr_3),$$
$$u_{3r}(r,\tau,z)=-\frac{3r\tau(4z^2-r^2)}{\pi\gamma_3^2r_3^6}H(\tau-\gamma_3r_3),$$
$$w_{lr}(r,\tau,z)=\frac{3(-1)^l\beta_{3(3-l)}\tau z(3r^2-2z^2)}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2r_3^6}H(\tau-\gamma_lr_3), \tag{4.29}$$
$$w_{3r}(r,\tau,z)=\frac{1}{\pi\gamma_3^2}\frac{3z\tau(3r^2-2z^2)}{r_3^6}H(\tau-\gamma_3r_3),$$
$$W_{jr}(r,\tau,z)=\beta_j\mathrm{w}_{jr}(r,\tau,z),$$
$$U_{jr}(r,\tau,z)=\beta_ju_{jr}(r,\tau,z);$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{zzlr}(r,\tau,z)=\frac{4(-1)^{l}\beta_{3(3-l)}\rho_{0}}{2\pi\beta_{12}\gamma_{3}^{2}}\tau H(\tau-\gamma_{l}r),\\
&\sigma_{zz3r}(r,\tau,z)=\frac{2\tau(9r^{4}-72r^{2}z^{2}+24z^{4})}{\pi\gamma_{3}^{2}r_{3}^{9}}H(\tau-\gamma_{3}r_{3}),\\
&\sigma_{rzlr}(r,\tau,z)=\frac{2\tau(-1)^{j}\beta_{3(3-j)}R_{1}(r,z)}{\pi\beta_{12}\gamma_{3}^{2}}H(\tau-\gamma_{l}r_{3}),\\
&\sigma_{rz3r}(r,\tau,z)=-\frac{6z\tau(3r^{2}-2z^{2})}{\pi\gamma_{3}^{2}r_{3}^{6}}H(\tau-\gamma_{3}r_{3});
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{ls}(r,\tau,z)=\frac{(-1)^{3-l}r}{2\pi\beta_{12}\gamma_{3}^{2}r_{3}^{5}}\Big\{&\big[4\beta_{3(3-l)}\gamma_{l}(2z^{2}-r^{2})-\beta_{3-l}\gamma_{3}^{2}r_{3}^{2}\big]\delta(\tau-\gamma_{l}r_{3})-\\
&-\big[2\beta_{3(3-l)}\gamma_{l}^{3}r^{3}+\beta_{3-l}\gamma_{3}^{2}r_{3}^{2}\big]r_{3}\delta'(\tau-\gamma_{l}r_{3})\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{ls}(r,\tau,z)=\frac{(-1)^{l}r}{2\pi\beta_{12}\gamma_{3}^{2}r_{3}^{5}}\Big\{&\big[2\beta_{3(3-j)}\gamma_{l}^{2}z(2r^{2}-z^{2})-\beta_{3-l}\gamma_{3}^{2}zr_{3}^{2}\big]\delta(\tau-\gamma_{l}r_{3})\\
&+\big[2\beta_{3(3-j)}zr_{3}\gamma_{l}^{3}r^{2}-\beta_{3-l}\gamma_{3}^{2}z\gamma_{l}r_{3}^{3}\big]\delta'(\tau-\gamma_{l}r_{3})\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
u_{3s}(r,\tau,z)=-\frac{r}{\pi r_{3}^{5}}\big[(5z^{2}-3r^{2})\delta(\tau-\gamma_{3}r_{3})+\gamma_{3}r_{3}z^{2}\delta'(\tau-\gamma_{3}r_{3})\big],
$$

$$
w_{3s}(r,\tau,z)=\frac{z}{\pi\gamma_{3}^{2}r_{3}^{5}}\big\{2\gamma_{3}^{2}(2r^{2}-z^{2})\delta(\tau-\gamma_{3}r_{3})+\gamma_{3}^{3}r^{2}\delta'(\tau-\gamma_{3}r_{3})\big\},
$$

$$
U_{js}(r,\tau,z)=\beta_{j}u_{js}(r,\tau,z),
$$

$$
W_{js}(r,\tau,z)=\beta_{j}\mathrm{w}_{js}(r,\tau,z),;
$$

$$\sigma_{zzls}(r,\tau,z)=\frac{(-1)^l}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\left\{2\left[2\beta_{3(3-l)}\rho_2\gamma_l^2+\left(\beta_{3(3-l)}\varsigma_l-\beta_{3-l}\gamma_3^2\right)\frac{2z^2-r^2}{r_3^5}\right]\delta(\tau-\gamma_l r)+\right.$$

$$+2\left[2\beta_{3(3-l)}\rho_3\gamma_l^3+\gamma_l\left(\beta_{3(3-l)}\varsigma_l-\beta_{3-l}\gamma_3^2\right)\frac{2z^2-r^2}{r_3^4}\right]\delta'(\tau-\gamma_l r)+$$

$$\left.+\left[4\beta_{3(3-l)}\rho_4\gamma_l^4-\left(2\beta_{3(3-l)}\varsigma_l-2\beta_{3-l}\gamma_3^2\right)\frac{\gamma_l^2 r^2}{r_3^3}-\frac{\beta_{3-l}\gamma_l^2\varsigma_l}{r_3}\right]\right\}\delta''(\tau-\gamma_l r),$$

$$\sigma_{zz3s}(r,\tau,z)=\frac{2}{\pi r_3^5}\left[\frac{4r^4-31r^2z^2+10z^4}{r_3^2}\delta(\tau-\gamma_3 r_3)+\right.$$

$$\left.+\gamma_3\frac{r^4-7r^2z^2+2z^4}{r_3}\delta'(\tau-\gamma_3 r_3)-\gamma_3^2 r^2 z^2\delta''(\tau-\gamma_3 r_3)\right],$$

$$\sigma_{rzjs}(r,\tau,z)=\frac{(-1)^j}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2 r_3^5}\left[2\beta_{3-j}\gamma_l^2 R_2(r,z)r_3^5-3\beta_{3-j}\gamma_3^2 rz\right]\delta(\tau-\gamma_l r_3)+$$

$$+\left[2\beta_{3-j}\gamma_l^3 R_3(r,z)r_3^5-3\beta_{3-j}\gamma_3^2 rz\gamma_l r_3\right]\delta'(\tau-\gamma_l r_3)+$$

$$+\left[2\beta_{3-j}\gamma_l^4 R_4(r,z)r_3^5-\beta_{3-j}\gamma_3^2 rz\gamma_l^2 r_3^2\right]\delta''(\tau-\gamma_l r_3)$$

$$\sigma_{rz3s}(r,\tau,z)=\frac{1}{\pi\gamma_3^2 r_3^5}\left\{\left[2\gamma_l^2 z(2r^2-z^2)+\gamma_3^2 z r_3^2\right]\delta(\tau-\gamma_l r_3)\right.$$

$$\left.+\left[2zr_3\gamma_l^3 r^2+\gamma_3^2 z\gamma_l r_3^3\right]\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\right\} \tag{4.31}$$

Тогда в соответствии с (4.28) имеют место равенства:

$$
\begin{gathered}
G_{uw}^{(3)}(r,\tau,z)=u_r(r,\tau,z)+u_s(r,\tau,z),\\
G_{ww}^{(3)}(r,\tau,z)=w_r(r,\tau,z)+w_s(r,\tau,z),\\
G_{Uw}^{(3)}(r,\tau,z)=U_r(r,\tau,z)+U_s(r,\tau,z),\\
G_{Ww}^{(3)}(r,\tau,z)=W_r(r,\tau,z)+W_s(r,\tau,z),\\
u_r(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}u_{jr}(r,\tau,z),\; u_s(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}u_{js}(r,\tau,z),\\
w_r(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}w_{jr}(r,\tau,z),\; w_s(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}w_{js}(r,\tau,z),\\
U_r(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}U_{jr}(r,\tau,z),\; U_s(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}U_{js}(r,\tau,z),\\
W_r(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}W_{jr}(r,\tau,z),\; W_s(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}W_{js}(r,\tau,z);
\end{gathered}
\tag{4.32}
$$

$$
\begin{gathered}
G_{zzw}^{(3)}(r,\tau,z)=\sigma_{zzr}(r,\tau,z)+\sigma_{zzs}(r,\tau,z),\\
G_{rzw}^{(3)}(r,\tau,z)=\sigma_{rzr}(r,\tau,z)+\sigma_{rzs}(r,\tau,z),\\
G_{\sigma w}^{(3)}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_j(r,\tau,z);\\
\sigma_{zzr}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{zzjr}(r,\tau,z),\; \sigma_{zzs}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{zzjs}(r,\tau,z),\\
\sigma_{rzr}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{rzjr}(r,\tau,z),\; \sigma_{rzs}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{rzjs}(r,\tau,z).
\end{gathered}
\tag{4.33}
$$

4.5. Примеры расчетов

Результаты вычислений для материала с физическими характеристиками, указанными в п.2.6, по формулам (4.30), (4.31), (4.33) регулярных составляющих функций влияния $u_r(r,\tau,z)$, $U_r(r,\tau,z)$, $w_r(r,\tau,z)$, $W_r(r,\tau,z)$, $\sigma_{rzr}(r,\tau,z)$ и $\sigma_{zzr}(r,\tau,z)$ в зависимости от координаты z при $r=0{,}3$

представлены на рис. 4.1 – 4.6. Сплошные кривые соответствуют моменту времени $\tau = 0.7$, точечные - $\tau = 0.8$, а пунктирные - $\tau = 0.9$.

Отметим, что разрывы на графиках имеют место в точках, $r_3 = \tau/\gamma_k$ $(k = 1,2,3)$, определяющих фронты волн в скелете и жидкости.

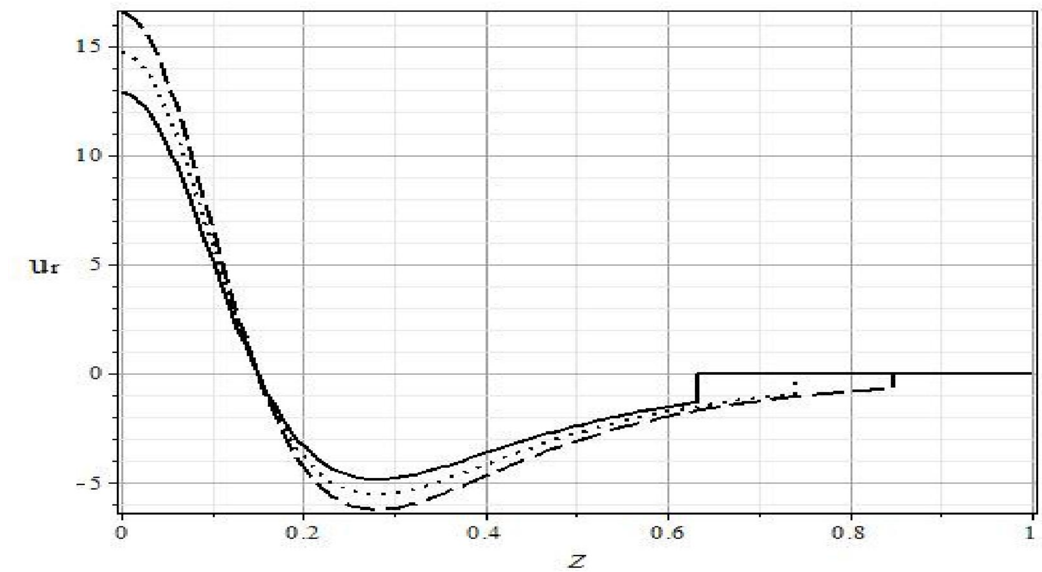


Рис. 4.1.

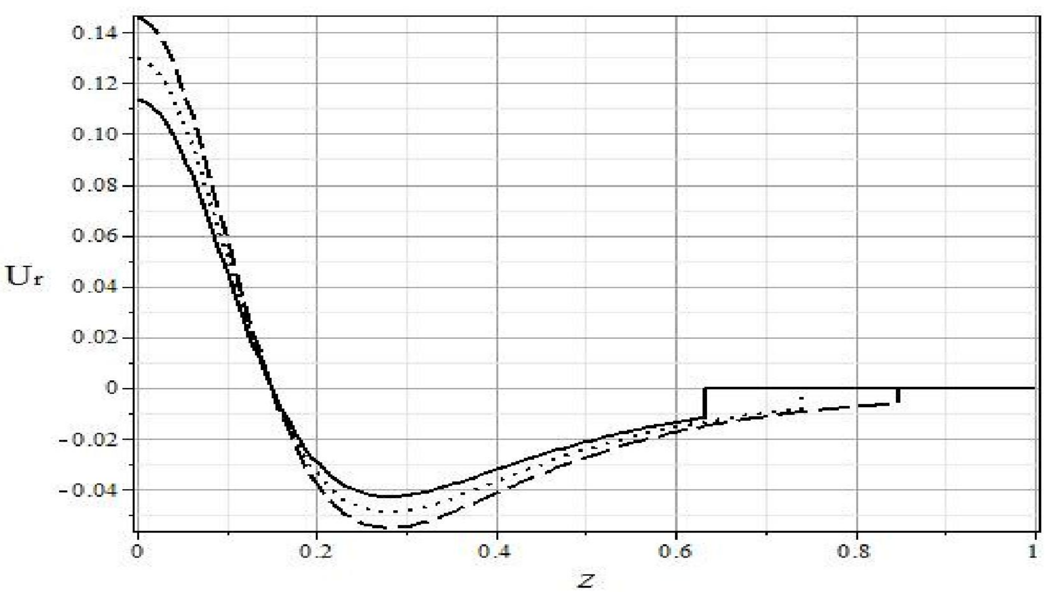


Рис. 4.2.

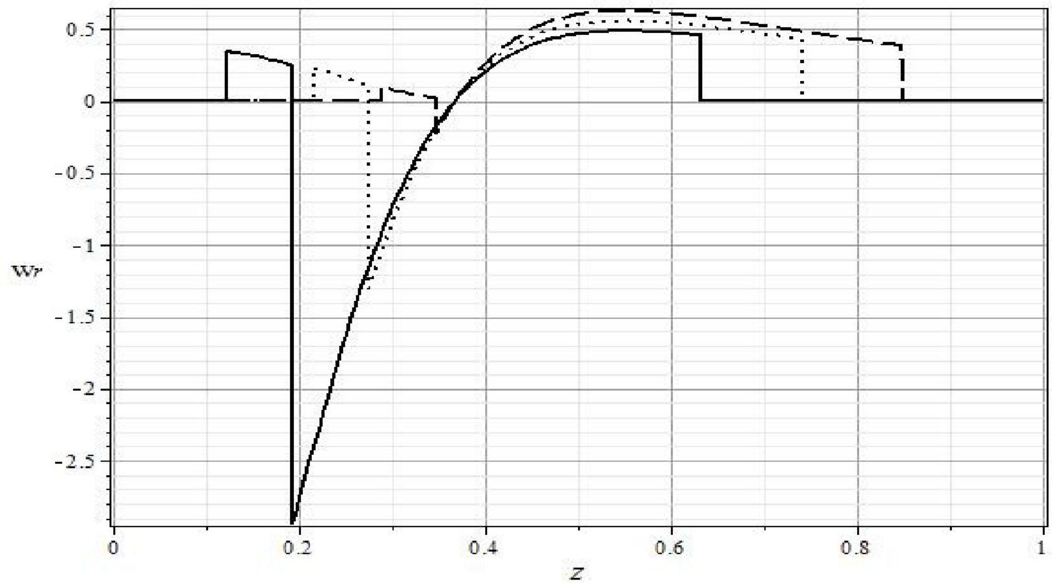


Рис. 4.3.

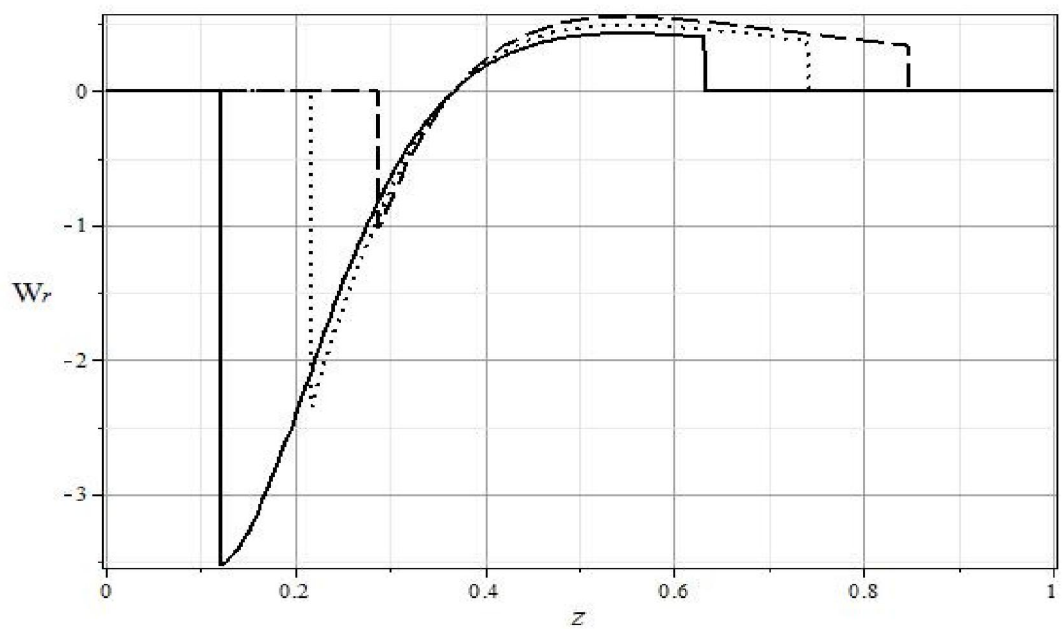


Рис. 4.4.

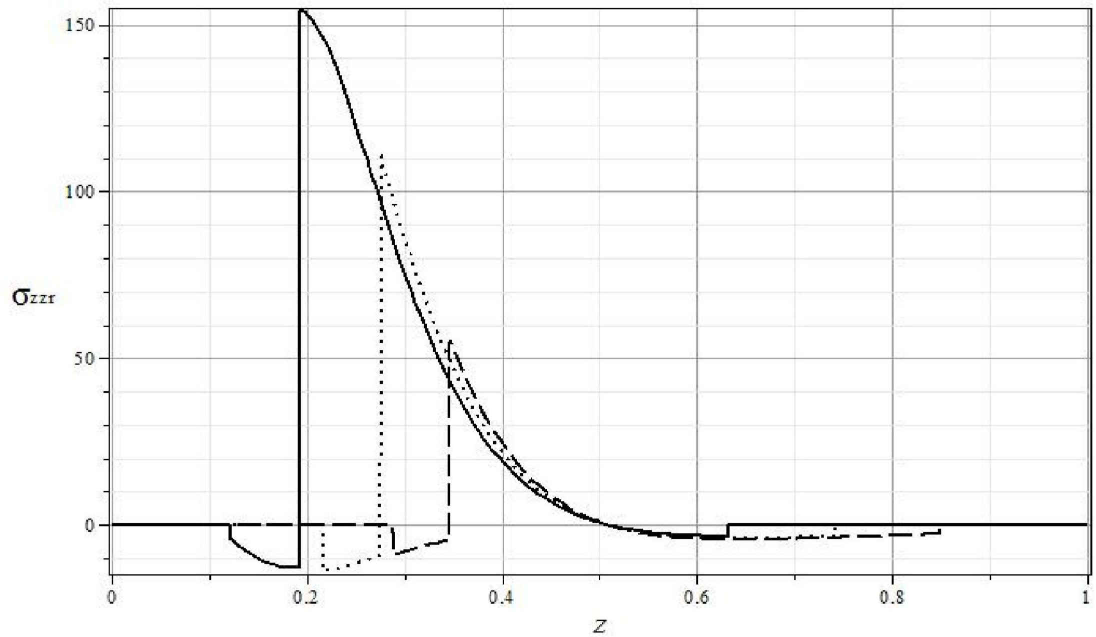

150
100
50
0
σzzr
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
z

Рис. 4.5.

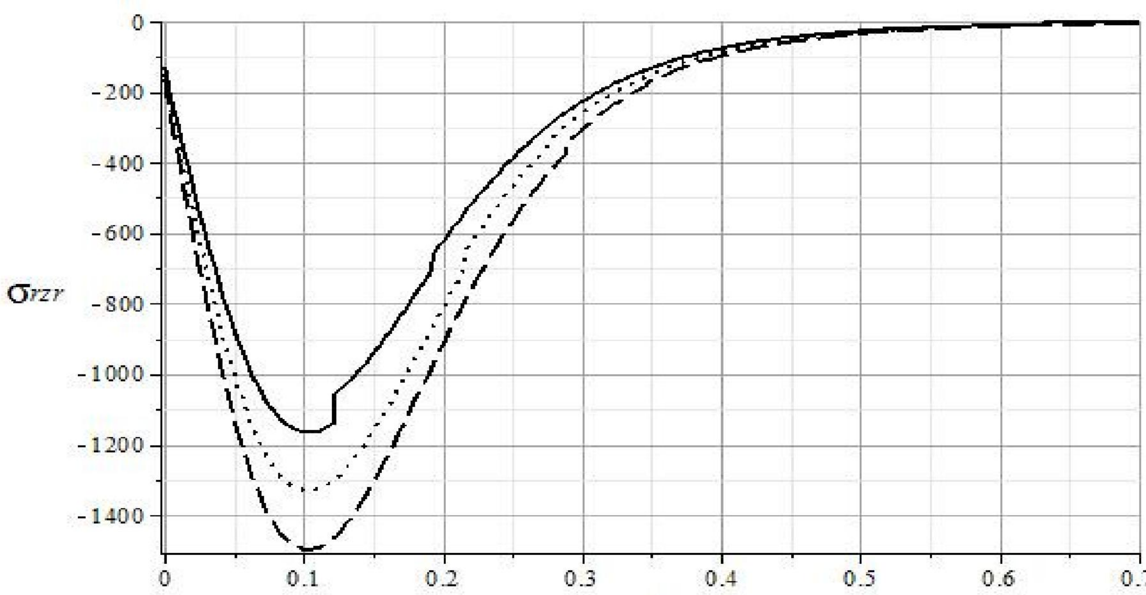

0
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
-1400
σrzr
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
z

Рис. 4.6.

Глава 5

Полупространство под действием смешанных возмущений

(граничные условия четвертой группы)

5.1. Изображения функций влияния первой подгруппы

К граничным условиям (1.49) применяем использованные ранее преобразования:

$$u^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi},\ \sigma_{zz}^{HL}\Big|_{z=0} = 0,\ \sigma^{HL}\Big|_{z=0} = 0 \tag{5.1}$$

Отсюда с учетом соотношений (2.5) и (2.6) получаем аналогичную (2.7) систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования [25]:

$$\mathbf{A}_4\mathbf{C} = -\frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_1, \tag{5.2}$$

где

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} q & q & -k_3(q^2,s^2) \\ \kappa_1(q^2,s^2) & \kappa_2(q^2,s^2) & -2qk_3(q^2,s^2) \\ s^2\lambda_{231}\gamma_1^2 & s^2\lambda_{232}\gamma_2^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Ее решение имеет вид:

$$\begin{gathered} C_1 = \frac{\xi q}{\pi(\zeta_2^2 - \xi\zeta_1^2)s^2},\ C_2 = \frac{-q}{\pi(\zeta_2^2 - \xi\zeta_1^2)s^2}, \\ C_3 = \frac{\xi\kappa_1(q^2,s^2) - \kappa_2(q^2,s^2)}{2\pi(\zeta_2^2 - \xi\zeta_1^2)s^2k_3(q^2,s^2)},\ \xi = \frac{\lambda_{232}\gamma_2^2}{\lambda_{231}\gamma_1^2}, \end{gathered} \tag{5.4}$$

где величины ζ_l^2 определяются равенствами (4.16).

Используя его и формулы (2.5) и (2.6), находим изображения соответствующих функций влияния:

$$
\begin{aligned}
G_{uu}^{(4)HL} &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{wu}^{(4)HL} &= w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{Uu}^{(4)HL} &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{Wu}^{(4)HL} &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s) E_j(q,z,s);
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{zzu}^{(4)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{rzu}^{(4)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s),\\
G_{\sigma u}^{(4)HL} &= \sigma_{\sigma u}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{\sigma uj}^{HL}(q,s) E_j(q,z,s).
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
& u_l^{HL} = (-1)^l \frac{\xi^{2-l} q^2}{\pi(\zeta_2^2 - \xi\zeta_1^2)s^2},\ u_3^{HL} = \frac{\xi\kappa_1(q^2,s^2) - \kappa_2(q^2,s^2)}{2\pi(\zeta_2^2 - \xi\zeta_1^2)s^2},\\
& w_l^{HL} = (-1)^l \frac{\xi^{2-l} q k_l(q^2,s^2)}{\pi(\zeta_2^2 - \xi\zeta_1^2)s^2},\ w_3^{HL} = q\,\frac{\xi\kappa_1(q^2,s^2) - \kappa_2(q^2,s^2)}{2\pi(\zeta_2^2 - \xi\zeta_1^2)s^2 k_3(q^2,s^2)},\\
& U_j^{HL} = \beta_j u_j^{HL},\ \ W_j^{HL}(q,z,s) = \beta_j w_j^{HL};
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

$$\sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^{3-l}\frac{2\xi^{2-l}q^2k_l(q^2,s^2)}{\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\ \sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^{3-l}\frac{\xi^{2-l}q\kappa_l(q^2,s^2)}{\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},$$

$$\sigma_{rz3}^{HL} = -\frac{\xi\kappa_1(q^2,s^2)-\kappa_2(q^2,s^2)}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2k_3(q^2,s^2)}\kappa_2(q^2,s^2),\tag{5.8}$$

$$\sigma_{zz3}^{HL} = -2q\frac{\xi\kappa_1(q^2,s^2)-\kappa_2(q^2,s^2)}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\ \sigma_l^{HL} = (-1)^{3-l}\frac{\xi^{2-l}q\lambda_{23l}\gamma_l^2}{\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)}.$$

5.2. Изображения функций влияния второй подгруппы

Соответствующие изображения граничных условий (1.51) записываются так:

$$u^{HL}\Big|_{z=0} = 0,\ \sigma_{zz}^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi},\ \sigma^{HL}\Big|_{z=0} = 0\,.\tag{5.9}$$

Постановка сюда соотношений (2.5) и (2.6) приводит к аналогичной (2.17) системе линейных алгебраических уравнений [25]:

$$\mathbf{A}_4\mathbf{C} = \frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_2,\tag{5.10}$$

Подставляя её решение

$$C_1 = \frac{-\xi}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\ C_2 = \frac{1}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},$$

$$C_3 = \frac{q(1-\xi)}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2k_3(q^2,s^2)}\tag{5.11}$$

в (2.5) и (2.6) получаем изображения соответствующих функций влияния:

$$
\begin{aligned}
G_{uzz}^{(4)HL} &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{wzz}^{(4)HL} &= w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{Uzz}^{(4)HL} &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{Wzz}^{(4)HL} &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s);
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{zzzz}^{(4)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{rzzz}^{(4)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{\sigma zz}^{(4)HL} &= \sigma_{\sigma}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{j}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&u_l^{HL} = (-1)^{3-l}\frac{q\xi^{2-l}}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\; u_3^{HL} = \frac{q(1-\xi)}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\\
&w_l^{HL} = (-1)^{3-l}\frac{\xi^{2-l}k_l(q^2,s^2)}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\; w_3^{HL} = \frac{q^2(1-\xi)}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2k_3(q^2,s^2)},\\
&U_j^{HL} = \beta_j u_j^{HL},\;\; W_j^{HL} = \beta_j w_j^{HL};
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rzl}^{HL} = (-1)^{l}\frac{q\xi^{2-l}k_l(q^2,s^2)}{\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\; \sigma_{rz3}^{HL} = -\frac{q(1-\xi)\kappa_3(q^2,s^2)}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2k_3(q^2,s^2)},\\
&\sigma_{zzl}^{HL} = (-1)^{l}\frac{\xi^{2-l}\kappa_l(q^2,s^2)}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\;\; \sigma_{zz3}^{HL} = \frac{q^2(1-\xi)}{\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)s^2},\\
&\sigma_{l}^{HL} = (-1)^{l}\lambda_{23l}\gamma_l^2\frac{\xi^{2-l}}{2\pi(\zeta_2^2-\xi\zeta_1^2)}
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

5.3. Изображения функций влияния третьей подгруппы

В этой случае используем изображения граничных условий (1.53) записываются следующим образом:

$$u^{HL}\Big|_{z=0} = 0,\ \sigma_{zz}^{HL}\Big|_{z=0} = 0,\ \sigma^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}. \tag{5.16}$$

Постановка соотношений (2.5) и (2.6) в (5.16) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования [25]:

$$\mathbf{A}_4\mathbf{C} = \frac{1}{2\pi}\mathbf{b}_3, \tag{5.17}$$

Её решение имеет вид:

$$\begin{gathered}
C_1 = \frac{-\zeta_2^2}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2 - \lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)},\ C_2 = \frac{\zeta_1^2}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2 - \lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)},\\
C_3 = \frac{q(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2 - \lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)k_3(q^2, s^2)}.
\end{gathered} \tag{5.18}$$

Учитывая эти равенства, из (2.5) и (2.6) находим изображения соответствующих функций влияния:

$$
\begin{aligned}
G_{u\sigma}^{(4)HL} &= u^{HL} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{w\sigma}^{(4)HL} &= w^{HL} = \sum_{j=1}^{3} w_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{U\sigma}^{(4)HL} &= U^{HL} = \sum_{j=1}^{3} U_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{W\sigma}^{(4)HL} &= W^{HL} = \sum_{j=1}^{3} W_j^{HL}(q,s)E_j(q,z,s);
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{zz\sigma}^{(4)HL} &= \sigma_{zz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{zzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{rz\sigma}^{(4)HL} &= \sigma_{rz}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{rzj}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
G_{\sigma\sigma}^{(4)HL} &= \sigma_{\sigma}^{HL} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{j}^{HL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&u_l^{HL} = \frac{(-1)^{3-l} q\zeta_{3-l}^2}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2 - \lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)},\ u_3^{HL} = \frac{q(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2 - \lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)},\\
&w_l^{HL} = \frac{(-1)^{3-l}\zeta_{3-l}^2 k_l(q^2,s^2)}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2 - \lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)},\\
&w_3^{HL} = \frac{q^2(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2 - \lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)k_3(q^2,s^2)},\\
&U_j^{HL}(q,s) = \beta_j u_j^{HL}(q,s),\ W_j^{HL}(q,s) = \beta_j w_j^{HL}(q,s);
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

$$\sigma_{rzl}^{HL}=\frac{(-1)^l q\zeta_{3-l}^2 k_l(q^2,s^2)}{\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2-\lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)},\ \sigma_{rz3}^{HL}=\frac{q(\zeta_1^2-\zeta_2^2)\kappa_3(q^2,s^2)}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2-\lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)k_3(q^2,s^2)},$$

$$\sigma_{zzl}^{HL}=\frac{(-1)^l \zeta_{3-l}^2 \kappa_l(q^2,s^2)}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2-\lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)},\ \sigma_{zz3}^{HL}=-\frac{q^2(\zeta_1^2-\zeta_2^2)\kappa_3(q^2,s^2)}{\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2-\lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)k_3(q^2,s^2)},\quad (5.22)$$

$$\sigma_l^{HL}=(-1)^l\frac{\zeta_{3-l}^2\lambda_{23l}\gamma_l^2}{2\pi s^2(\lambda_{232}\gamma_2^2\zeta_1^2-\lambda_{231}\gamma_1^2\zeta_2^2)}.$$

5.4. Оригиналы функций влияния четвертой группы

Поскольку оригиналы всех функций влияния находятся этой группы аналогично, то ограничимся только третьей подгруппой. Предварительно преобразуем слагаемые в (5.19) и (5.20) с учетом (5.21) и (5.22) следующим образом [25]:

$$u_j^{HL}\left(q,s,z\right)E_j(q,z,s)=A_j q s^{-2}E_j(q,z,s),\ U_j^{HL}=\beta_j u_j^{HL},\ W_j^{HL}=\beta_j w_j^{HL},$$

$$w_l^{HL}\left(q,s,z\right)E_l(q,z,s)=A_l s^{-2}k_l(q^2,s^2)E_l(q,z,s),\ A_l=-\frac{a_l}{2\pi m\gamma_l^2}\ \left(l=1,2\right),$$

$$w_3^{HL}\left(q,s,z\right)E_3(q,z,s)=\frac{A_3q^2}{s^2k_3(q,s)}E_3(q,z,s),\ A_3=\frac{a_3}{2\pi m\gamma_1^2\gamma_2^2},\quad (5.23)$$

$$a_1=\beta_0\left(2+\lambda_{122}\right)-\left(1-\beta_0\right)\lambda_{232},\ a_2=\left(1-\beta_0\right)\lambda_{231}-\beta_0\left(2+\lambda_{121}\right),$$

$$a_3=a_1\gamma_2^2+a_2\gamma_1^2,\ m=\left(2+\lambda_{122}\right)\lambda_{231}-\left(2+\lambda_{121}\right)\lambda_{232}\ (j=1,2,3);$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{rzl}^{HL}\left(q,s,z\right)E_l(q,z,s)=-2A_l q s^{-2}k_l(q^2,s^2)E_l(q,z,s),\\
\sigma_l^{HL}\left(q,s,z\right)E_l(q,z,s)=-A_l\lambda_{23l}\gamma_l^2E_l(q,z,s),\\
\sigma_{zzl}^{HL}\left(q,s,z\right)E_l(q,z,s)=-A_l s^{-2}\kappa_l(q^2,s^2)E_l(q,z,s),\\
\sigma_{rz3}^{HL}\left(q,s,z\right)E_3(q,z,s)=-A_3\frac{q\kappa_3(q^2,s^2)}{s^2k_3(q^2,s^2)}E_3(q,z,s),\\
\sigma_{zz3}^{HL}\left(q,s,z\right)E_3(q,z,s)=-\frac{2A_3q^2}{s^2}E_3(q,z,s).
\end{gathered}\quad (5.24)$$

Структура полученных изображений в (5.23) и (5.24) аналогично п.4.4 позволяет вычислить оригиналы аналитически последовательным обращением преобразований с применением их свойств и таблиц [12]. При этом используются следующие дополнения и уточнения к указанным таблицам для оригиналов преобразования Ханкеля $z > 0, \mathrm{Re}\, a > 0,\ r_3 = \sqrt{r^2 + z^2}$ [25]:

$$\left[\sqrt{q^2 + a^2} e^{-z\sqrt{q^2+a^2}}\right]^{H_0^{-1}} = \frac{1}{r_3^3}\left[\frac{2z^2 - r^2}{r_3}\left(a + \frac{1}{r_3}\right) + a^2 z^2\right] e^{-ar_3},$$

$$\left[q^2 e^{-z\sqrt{q^2+a^2}}\right]^{H_0^{-1}} = -\frac{z}{r_3^4}\left[3\frac{3r^2 - 2z^2}{r_3^2}\left(a + \frac{1}{r_3}\right) + 2a^2\frac{2r^2 - z^2}{r_3} + a^3 r^2\right] e^{-ar_3}, \quad (5.25)$$

$$\left[q e^{-z\sqrt{q^2+a^2}}\right]^{H_1^{-1}} = \frac{rz}{r_3^3}\left(\frac{3}{r_3^2} + \frac{3a}{r_3} + a^2\right) e^{-ar_3},$$

$$\left[\frac{q^3 e^{-z\sqrt{q^2+a^2}}}{\sqrt{q^2 + a^2}}\right]^{H_1^{-1}} = \frac{r}{r_3^4}\left[3\frac{4z^2 - r^2}{r_3^2}\left(a + \frac{1}{r_3}\right) + 2a^2\frac{2z^2 - r^2}{r_3} - a^3 r^2\right] e^{-ar_3},$$

$$\left[q\sqrt{q^2 + a^2} e^{-z\sqrt{q^2+a^2}}\right]^{H_1^{-1}} = \frac{r}{r_3^4}\left[3\frac{4z^2 - r^2}{r_3^2}\left(a + \frac{1}{r_3}\right) + a^2\frac{5z^2 - r^2}{r_3} + a^3 z^2\right] e^{-ar_3}$$

В результате приходим к следующим равенствам для оригиналов слагаемых в формулах (5.19) и (5.20) $j = 1,2,3\ l = 1,2$

$$\begin{aligned}
&\left[u_j^{HL} E_j(q,z,s)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}} = u_{jr}(r,\tau,z) + u_{js}(r,\tau,z),\\
&\left[w_j^{HL} E_j(q,z,s)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}} = w_{jr}(r,\tau,z) + w_{js}(r,\tau,z),\\
&\left[U_j^{HL} E_j(q,z,s)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}} = U_{jr}(r,\tau,z) + U_{js}(r,\tau,z),\\
&\left[W_j^{HL} E_j(q,z,s)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}} = W_{jr}(r,\tau,z) + W_{js}(r,\tau,z),\\
&\left[\sigma_{zzj}^{HL} E_j(q,z,s)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}} = \sigma_{zzjr}(r,\tau,z) + \sigma_{zzjs}(r,\tau,z),\\
&\left[\sigma_{rzj}^{HL} E_j(q,z,s)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}} = \sigma_{rzjr}(r,\tau,z) + \sigma_{rzjs}(r,\tau,z),
\end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\sigma_l(x,\tau,z)=\frac{-A_l\lambda_{23l}\gamma_l^2 z}{r_3^3}\left[\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l r_3\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\right]. \tag{5.27}$$

Здесь

$$\begin{gathered}u_{jr}(x,\tau,z)=3A_j\frac{\tau rz}{r_3^5}H(\tau-\gamma_j r_3),\ w_{jr}(x,\tau,z)=A_j\tau\frac{2z^2-r^2}{r_3^5}H(\tau-\gamma_j r_3),\\ U_{jr}(x,\tau,z)=\beta_j u_{jr}(x,\tau,z),W_{jr}(x,\tau,z)=\beta_j w_{jr}(x,\tau,z);\end{gathered} \tag{5.28}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{zzjr}(r,\tau,z)=6A_j\tau z\frac{3r^2-2z^2}{r_3^7}H(\tau-\gamma_j r_3),\\ \sigma_{rzjr}(x,\tau,z)=-A_j\frac{6\tau r}{r_3^7}(4z^2-r^2)H(\tau-\gamma_j r_3),\end{gathered} \tag{5.29}$$

$$u_{js}(x,\tau,z)=A_j\gamma_j^2\frac{rz}{r_3^3}\delta(\tau-\gamma_j r_3),U_{js}(x,\tau,z)=\beta_j u_{js}(x,\tau,z); \tag{5.30}$$

$$\begin{gathered}w_{ls}(x,\tau,z)=A_l\gamma_l^2\frac{z^2}{r_3^3}\delta(\tau-\gamma_l r_3),\ w_{3s}(x,\tau,z)=-A_3\gamma_3^2\frac{z^2}{r_3^3}\delta(\tau-\gamma_3 r_3),\\ W_{js}(x,\tau,z)=\beta_j w_{js}(x,\tau,z)\end{gathered} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zzls}(r,\tau,z)=-\frac{A_l\gamma_l^2 z}{r_3^2}\Bigg[&\frac{1}{r_3}\left(\lambda_{12l}+6\frac{z^2-r^2}{r_3^2}\right)\delta(\tau-\gamma_l r_3)\\ &+\gamma_l\left(\lambda_{12l}+\frac{2z^2}{r_3^2}\right)\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\Bigg],\\ \sigma_{zz3s}(x,\tau,z)=\frac{2A_3\gamma_3^2 z}{r_3^4}\Bigg[&2\frac{2r^2-z^2}{r_3}\delta(\tau-\gamma_3 r_3)\\ &+\gamma_3 r^2\delta'(\tau-\gamma_3 r_3)\Bigg];\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\sigma_{rzls}\left(x,\tau,z\right)=-2A_l\gamma_l^2\,\frac{r}{r_3^5}\Big[\left(5z^2-r^2\right)\delta\left(\tau-\gamma_l r_3\right)\;+\gamma_l r_3^3 z^2\delta'\left(\tau-\gamma_l r_3\right)\Big],$$
$$\sigma_{rz3s}\left(x,\tau,z\right)=-A_3\gamma_3^2\,\frac{r}{r_3^4}\left[\frac{3}{r_3}\left(3z^2-r^2\right)\delta\left(\tau-\gamma_3 r_3\right)+\gamma_3\left(z^2-r^2\right)\delta'\left(\tau-\gamma_3 r_3\right)\right]. \qquad (5.33)$$

Тогда в соответствии с (5.19), (5.19) и (5.26) получаем следующие равенства для функций влияния [20]:

$$\begin{gathered}
G_{uw}^{(4)}(r,\tau,z)=u_r(r,\tau,z)+u_s(r,\tau,z),\\
G_{ww}^{(4)}(r,\tau,z)=w_r(r,\tau,z)+w_s(r,\tau,z),\\
G_{Uw}^{(4)}(r,\tau,z)=U_r(r,\tau,z)+U_s(r,\tau,z),\\
G_{Ww}^{(4)}(r,\tau,z)=W_r(r,\tau,z)+W_s(r,\tau,z),\\
u_r(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}u_{jr}(r,\tau,z),\; u_s(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}u_{js}(r,\tau,z),\\
w_r(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}w_{jr}(r,\tau,z),\; w_s(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}w_{js}(r,\tau,z),\\
U_r(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}U_{jr}(r,\tau,z),\; U_s(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}U_{js}(r,\tau,z),\\
W_r(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}W_{jr}(r,\tau,z),\; W_s(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}W_{js}(r,\tau,z);
\end{gathered} \qquad (5.34)$$

$$\begin{gathered}
G_{zzw}^{(4)}(r,\tau,z)=\sigma_{zzr}(r,\tau,z)+\sigma_{zzs}(r,\tau,z),\\
G_{rzw}^{(4)}(r,\tau,z)=\sigma_{rzr}(r,\tau,z)+\sigma_{rzs}(r,\tau,z),\\
G_{\sigma w}^{(4)}(r,\tau,z)=\sum_{l=1}^{2}\sigma_l(r,\tau,z);\\
\sigma_{zzr}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{zzjr}(r,\tau,z),\; \sigma_{zzs}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{zzjs}(r,\tau,z),\\
\sigma_{rzr}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{rzjr}(r,\tau,z),\; \sigma_{rzs}(r,\tau,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{rzjs}(r,\tau,z).
\end{gathered} \qquad (5.35)$$

5.5. Примеры расчетов

Результаты вычислений для материала с физическими характеристиками, указанными в п.2.6, по формулам (5.34) и (5.35) регулярных составляющих функций влияния $u_r(r,\tau,z)$, $U_r(r,\tau,z), w_r(r,\tau,z)$ $W_r(r,\tau,z)$ $\sigma_{zzr}(r,\tau,z)$ и $\sigma_{rzr}(r,\tau,z)$ в зависимости от координаты z при $r=0,3$ представлены на рис. 5.1 – 5.6.

Сплошные кривые соответствуют моменту времени $\tau=0,4$, точечные - $\tau=0,5$, а пунктирные - $\tau=0,6$. Аналогично п. 4.5 разрывы на графиках имеют место в точках, $r_3=\tau/\gamma_k$ $(k=1,2,3)$, определяющих фронты волн в скелете и жидкости.

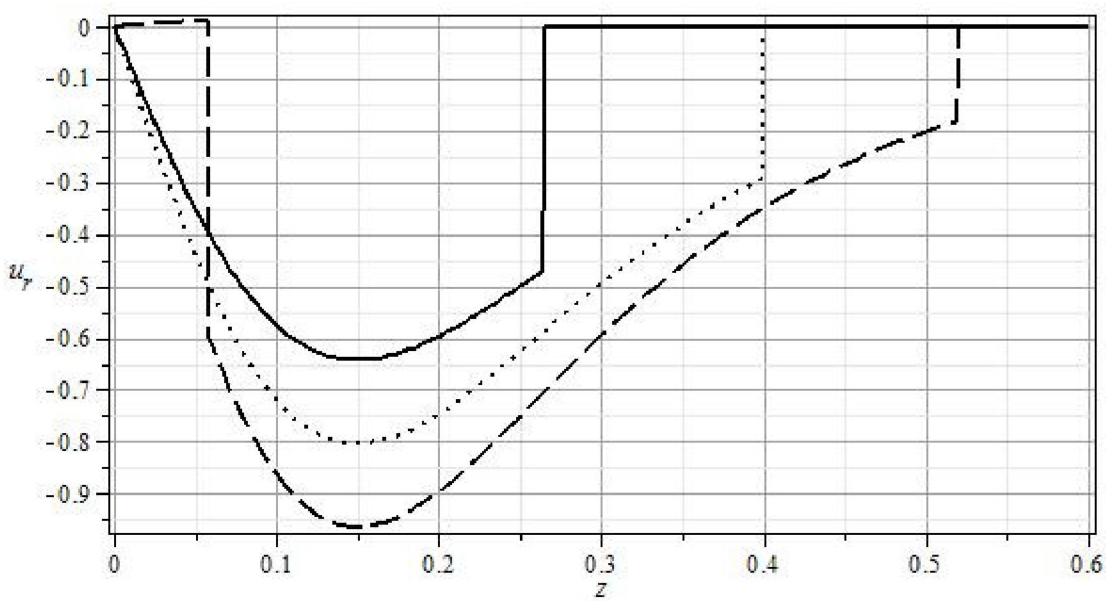
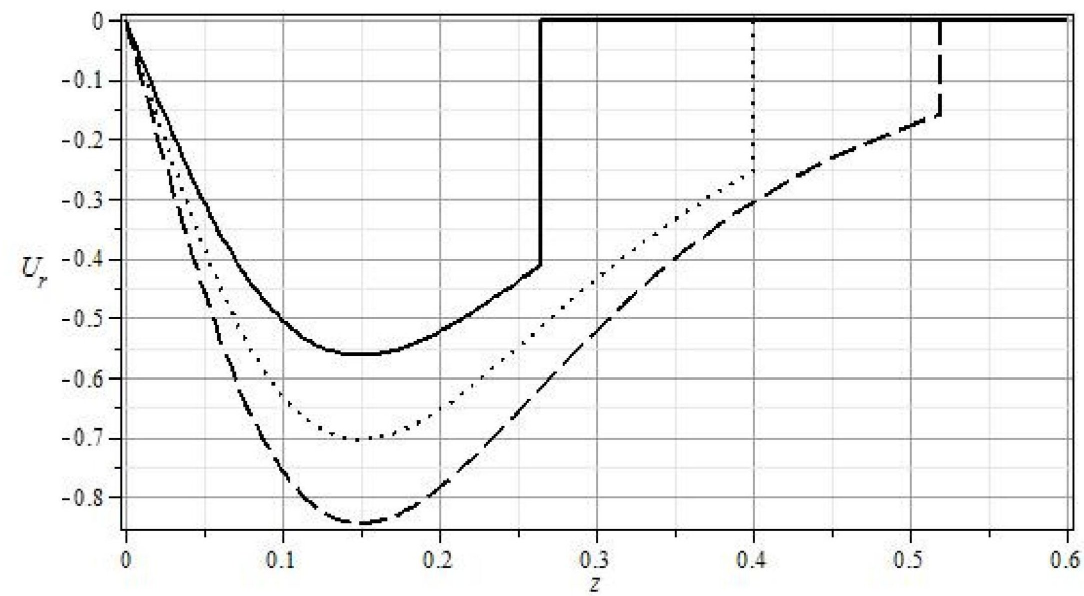
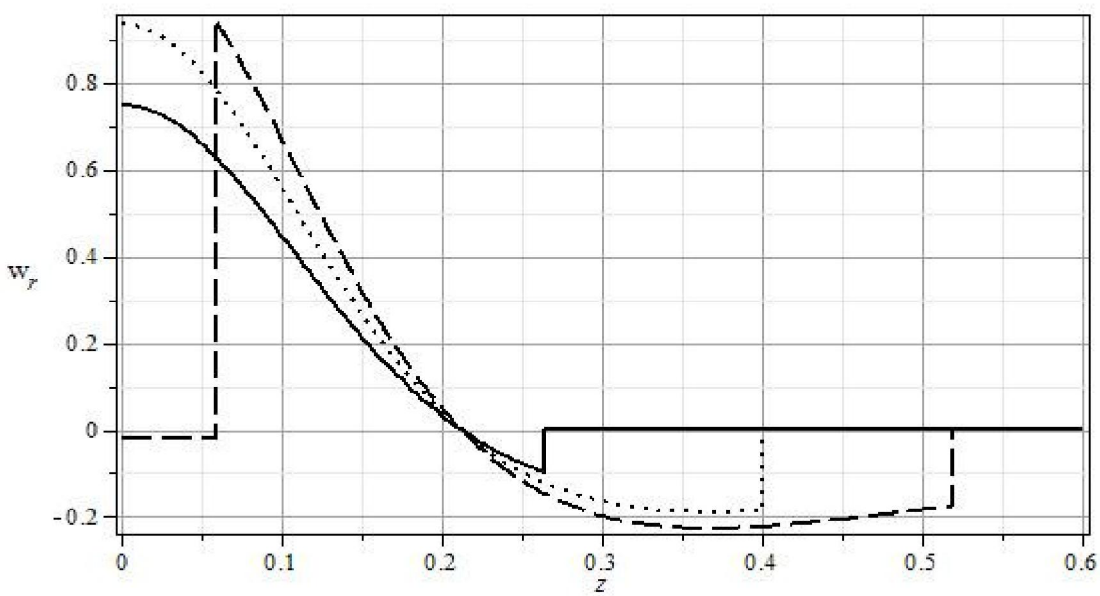


Рис. 5.1



0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
U_r
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
z

Рис. 5.2



0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
w_r
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
z

Рис. 5.3

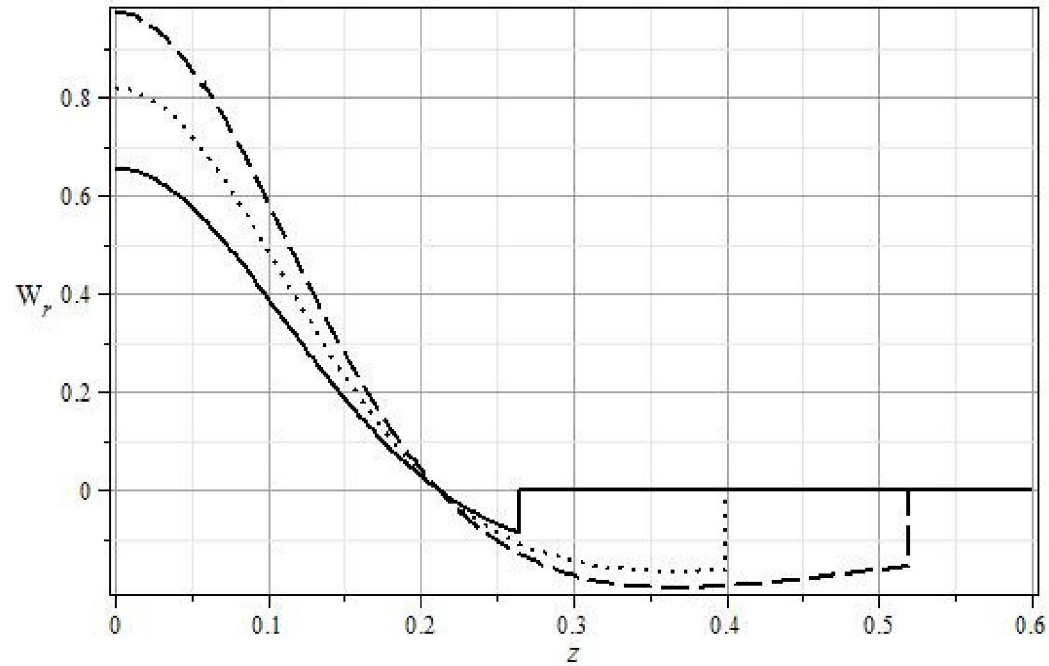

0.8
0.6
W_r 0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
z

Рис. 5.4

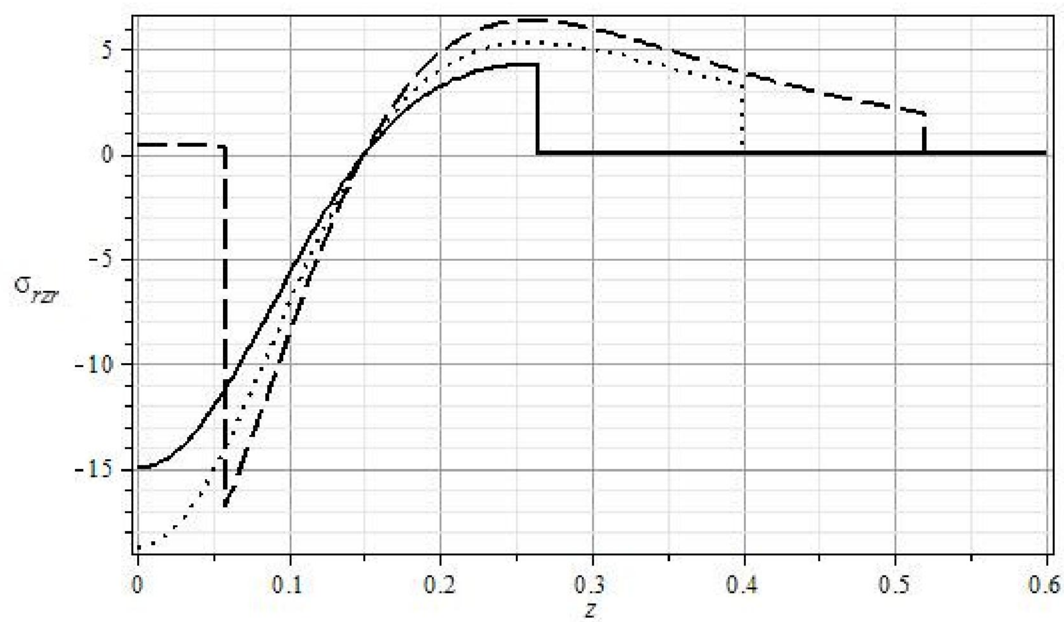

5
0
-5
σ_{rzr}
-10
-15
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
z

Рис. 5.5

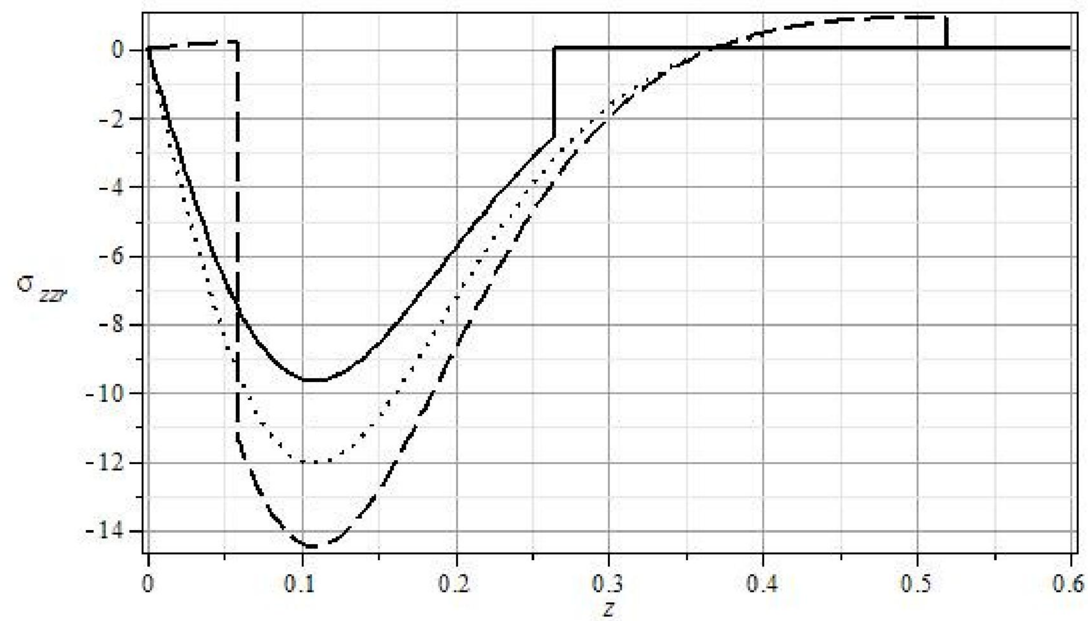


Рис. 5.6

Заключение

Основные результаты диссертационной работы следующие.

1. Построены интегральные представления решения осесиметричной задачи о распространении нестационарных поверхностных возмущений в упруго-пористом полупространстве.

2. Дана классификация всех ядер интегральных представлений (поверхностных функций влияния) и найдены их изображения в пространстве интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля.

3. Оригиналы функций влияния для двух групп найдены с использованием связи осесимметричной и плоской задач.

4. Показано, что оригиналы функций влияния для двух других групп могут быть построены с помощью последовательного обращения преобразований. Найдены их явные выражения.

Список использованной литературы

1. **Абдуллаев С.А., Соатов Я.У.** Распространение упругих волн, вызванных движущейся нагрузкой, в изотропном упругом пористом полупространстве, насыщенном жидкостью // Изв. АН УзССР. Сер. техн. н. - 1986, № 6. - С. 64-67.

2. **Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С.** Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности / Межвуз.сб. Вып. 71. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. – С. 164-171.

3. **Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А.** Гранично-элементное решение динамической посадки пороупругой колонны // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз.сб.– Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – Вып. 72. – 2010. – С.154-158.

4. **Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С.** Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межиузовский сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2008. Вы.70. С. 71-78.

5. **Балуева А.В.** Новый метод решения пространственных задач для упругой пористой среды с полостями и трещинами при возможном налегании их поверхностей Числ. методы решения задач фильтрации многофаз. несжимаемой жидкости // Новосибирск, 1987. - С. 33-37.

6. **Баженов В.Г., Игумнов Л.А.** Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями: Монография. Москва: Изд-во Физматлит, 2008. – 352с.

7. **Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С., Литвинчук С.Ю.** Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. Вып. №40. С. 1-20.

8. **Био М.А.** Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Сб.переводов, № 6. - С. 103-135.

9. **Боровиков В.А.** Дифракция на многоугольниках и многогранниках. - М.: Наука, 1966. - 455 с.

10. **Гафурбаева С.М., Наримов Ш.Н.** Направленное сосредоточенное воздействие в насыщенных пористых средах // Ташк. политехн. ин-т., 1990. - 9 с.

11. **Гафурбаева С.М., Наримов Ш.Н.** Автомодельные решения одной пространственной задачи теории насыщенных пористых сред. –Ташкент: Ташк. хим.-технол. ин-т., 1992. – 12 с.

12. **Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В**. Волны в сплошных средах. - М.: Физматлит, 2004. - 472 с.

13. **Горшков А.Г., Салиев А.А., Тарлаковский Д.В.** Распространение нестационарных возмущений от сферической полости в упруго-пористой среде // ДАН УзССР, 1987, № 7. - С. 15-16.

14. **Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В**. Динамические контактные задачи с подвижными границами. - М.: Физматлит, 1995. - 352 с.

15. **Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.** Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. - М.: Наука, 1990. - 352 с.

16. **Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А**. Дифракция упругих волн. - Киев: Наукова думка, 1978. - 204 с.

17. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В**. Осесимметричные нестационарные колебания упруго-пористого полупространства под действием поверхностного возмущения // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 24–29 сентября 2012 г.). - Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2012. – С. 314-319.

18. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В**. Упруго-пористое полупространство под действием осесимметричного нестационарного поверхностного кинематического возмущения // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы. – Львов: ИППММ им. Я.С. Подстригача. – 2012. - С. 51 – 55.

19. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В**. Упруго-пористое полупространство под действием нестационарной нормальной силы // Тезисы докладов IV Всерос. симпоз. «Механика композиционных материалов и конструкций», 4-6 декабря 2012 г. – М.: ИПРИМ РАН, 2012. – С. 33.

20. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В**. Распространение осесимметричных нестационарных возмущений в упруго-пористой плуплоскости под действием поверхностных касательных напряжений // Сб. тезисов докладов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновация в авиации и космонавтике – 2013», 16-18 апреля 2013 года. – М.: ООО «Принт-салон», 2013. – С. 280-281.

21. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В**. Распространение нестационарных возмущений в упруго-пористой полуплоскости по действием поверхностной

нормальной силы // Научная конференция «Ломоносовские чтения-2013». – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. - С. 128-129.

22. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В.** Действие на упруго-пористое полупространство осесимметричной нестационарной поверхностной нагрузки // Материалы XIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы конструкций и сплошной сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. - М.: ООО «ТР-принт», 2013. - С 21-22.

23. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В.** Упруго-пористое полупространство под действием осесимметричного нестационарного нормального перемецения его границы // 2-я Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем». Т.1., 2014 – М.: ООО «Сам Полиграфист». - С. 70-77.

24. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В**. Распространение осесимметричных поверхностных возмущений в упруго-пористом полупространстве // Электронный журнал “Труды МАИ”,2014, № 76, http://www.mai.ru/science/trudy.

25. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В**. Действие на границы упруго-пористого полупространства с касательной диафрагмой нестационарной нормальной осесиметричной нагрузки // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014, Т. 20, № 1. - С 148-158.

26. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В.** Осесимметричная задача о действии нестационарных поверхностных касательных перемещений на упруго-пористое полупространство // Материалы XX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы конструкций и сплошной сред» им. А.Г. Горшкова – 2014. - С. 16-17.

27. **Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В.** Упруго- пористое полупространство под действием осесимметричного нестационарного нормального перемецения его границы // 2-я Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем» - ИПРИМ РАН - 2013. – С. 27 – 28.

28. **Дмитриев В. Л.** Распространение линейных волн в насыщенных пористых средах с учетом межфазного теплообмена: Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Башк. гос. ун-т, Уфа, 2005. - 24 с.

29. **Джонс Д.Р.** Распространение импульса в пористоупругом теле // Тр. амер. об-ва инж. мех., Сер.Е: Прикл.мех, 1969, Т. 36, №4. - С.237-241.

30. **Егоров А. Г., Зайцев А. Н., Костерин А. В., Скворцов Э. В.** Акустические волны в насыщенной пористой среде // Числ. методы решения задач фильтрации многофаз. несжимаемой жидкости. – Новосибирск, 1987. - С. 115-119.

31. **Егоров А. Г., Костерин А. В**. О движении катка по поверхности насыщенного пористого полупространства // Докл. РАН, 1998, Т. 360, №6. - С.762-764.

32. **Егоров А. Г., Костерин А. В., Скворцов Э.В**. Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. -102 с.

33. **Игумнов Л.А., Карелин И.С**. Решение трехмерных задач динамической теории пороупругости методом граничных элементов с применением паралельных вычислений // Весник Нижегородского университета им. Н.И.

Лобачевского. Сер.Механика. Н.Новгород: Изд-во: Нижегородского госуниверситета. 2011, №3(1). - С. 153-157.

34. **Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А**. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 45 с.

35. **Клейман Я.З**. Задача о волновых движениях в двухкомпонетной средою // Изв. АН СССР, ОТН. Сер. мех. и мат., 1960, №1. - С.60-70.

36. **Ляхов Г.М.** Ударные волны в многокомпонентных средах // Изв. АН СССР, ОТН. Сер. мех. и мат., 1959. - С.46-50.

37. **Ляхов Г.М**. Основы динамики взрывных волн в грунтах и жидких средах. - М.: Недра, 1974. - 200 с.

38. **Ляхов Г.М., Полякова И.И.** Волны в плотных средах и нагрузки на сооружения. - М.: Недра, 1967. - 231 с.

39. **Мардонов Б.О**. Распространении одномерных волн в двух- компонентных средах. - Изв. АН УзССР, сер.техн.наук, 1983. -С. 56-59.

40. **Мардонов Б.О., Ибраимов О.** Распространение цилиндрической волны в пористой среде // Изв. АН УзССР, сер. техн. наук, 1972, №4. - С.69-72.

41. **Малков М.А.** Двумерная задача об упругом соударении стержней // Докл. АН СССР, 1973, Т.148, № 4. - С.782-785.

42. **Михайлов Д.Н., Николаевский В.Н.** Динамика потока в пористых средах при нестационарных фазовых проницаемостях // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа, 2000, № 5. - С. 103-113.

43. **Наримов Ш.Н.** Волновые процессы в насыщенных пористых средах. – Ташкент: Мехнат, 1988. - 304 с.

44. **Николаевский В.Н.** О распространение продольных волн в насыщенных жидкостю упругих пористых средах // Инж. журн. - 1963, Т.3, вып.2. - С. 251-261.

45. **Николаевский В.Н., Баскиев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Т.А.** Механика насыщенных пористых сред. - М.: Недра, 1970. - 355 с.

46. **Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В.** Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости // Электронный журнал «Труды МАИ», 2012, №53, www.mai.ru/science/trudy/.

47. **Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В**. Распространение нестационарных поверхностных кинематических возмущений в упруго-пористой полуплоскости // Механика композиционных материалов и конструкций, 2010, Т. 17, № 4. – С.567.576.

48. **Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В**. Дейстаие нестационарныой поверхностной нагрузки на упруго-пористую полуплоскость // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им А.Г Горшкова». Т. 2. - М.: ООО «ТР-принт», 2012. -С.54-55.

49. **Партон В.З.** Распространение цилиндрических и сферических волн уплотнения в водонасыщенном грунте в линейном приближении // Инж. журн., 1964, Т. 4, № 1. - С. 121-126.

50. **Рахматулин Х.А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движении сжимаемых сред // ПММ, 1956, Т. 20, вып.2. - С. 196-201.

51. **Рахматулин Х.А., Соатов Я.У., Филиппов И.Г., Артыков Т.У.** Волны в двухкомпонентных средах. - Ташкент: ФАН, 1974. -226 с.

52. **Соатов Я.У., Наримов Ш.Н., Кудратов О**. Действие сосредоточенных сил в бесконечном насыщенном пористом пространстве. - Ташкент: Ташк. политехн. ин-т., 1986. - 19 с.

53. **Соатов Я.У., Наримов Ш.Н., Кудратов О**. Стационарные поля смещений при действии сосредоточенной подвижной нагрузки движущейся вдоль линии с постоянной сверхзвуковой скоростью - Ташкент: Ташк. политехн. ин-т., 1986. - 11с.

54. **Сагомонян А.Я., Поручиков В.Б.** Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. - М.: Изд-во МГУ, 1970. - 120 с.

55. **Сагомонян А.Я**. Волны напряжения в сплошных средах. – М.: Изд. МГУ, 1985. - 416 с.

56. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. – М: ИЛ, 1955. - 688 с.

57. **Слепян Л.И, Яколев Ю.С.** Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л: Судостроение, 1980. -344 с.

58. **Соатов Я.У.** Плоские задачи механики упруго-пористых сред. - Ташкент: ФАН, 1975. - 249 с.

59. **Тарлаковский Д.В., Данг Куанг Занг.** Исследование процесса распространения осесимметричных поверхностных возмущений в упруго-пористом полупространстве с использованием связи с плоской задачей // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция

механики. 14–23 апреля 2014 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. – М.: Издательство Московского университета, 2014. - С. 131.

60. **Трофимчук А.Н**. Асимптотические решения нестационарных контактных задач для насыщенных жидкостью пористоупругих сред // Смеш. задачи мех. деформируем. тела: 4 Всес. конф., 26-29 сент., 1989: Тез. докл. Ч. 2. Одесса, 1989. - С. 111.

61. **Трофимчук А. Н**. Численное моделирование динамического поведения пористоупругой насыщенной жидкостью среды // Доп. Нац. АН Украіни, 1998, № 11. - С. 44-48.

62. **Трофимчук А. Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А.** Динамика пористо-упругих насыщенных жидкостью сред. – К.: Наука. Думка, 2003. - 230 с.

63. **Филиппов И.Г., Бахрамов Б.М.** Волны в упругих однородных и неоднородных средах. – Ташкент: ФАН, 1978. - 150 с.

64. **Филиппов И.Г., Бахрамов Б.М**. Некоторые задачи волновой динамики сплошных сред и вырожденных упругих систем. – Ташкент: ФАН, 1981. - 158 с.

65. **Филиппов И.Г., Чебан В.Г**. Неустановившиеся движения сплошных сжимаемых сред // Кишинев: ШТИНИЦА, 1973. - С.369.

66. **Филиппов И.Г**. К теории дифракции цилиндрических упругих и слабых ударных волн. – ПММ, 1964, Т. 28, вып.2. - С. 264-304.

67. **Филиппов А.Ф.** Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн // ПММ, 1956, Т. 20, вып. 6. - С.688-703.

68. **Флорин В.А.** Основы механики грунтов, Т. 1. – Л.: Стройиздат, 1959. – 356 с.

69. **Френкель Я.И.** К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР, сер. геогр. и геоф. – 1944. -С. 133-150.

70. **Цвинкер К., Костен К**. Звукопоглощающие материалы. - М.: Изд-во иностр. лит., 1952. - 160 с.

71. **Чебан В.Г.** Динамическая задача о нормальном ударе четверти упругого полупространства о неподвижную преграду. - Изв. АН Молд. ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук, 1971. - С.19-28.

72. **Шехтер О.Я**. Распространение сферических волн в водонасьпценных грунтах // Вибрация оснований и фундаментов. Сб. НИИ Оснований, 1953, №22. - С. 47-78.

73. **Эйслер Л.А**. К вопросу о построении системы уравнений движения водонасыщенного несвязанного грунта как многокомпонентной среды. - Изв. ВНИИГ, 1968. - С. 236-245.

74. **Aramaki Gunji, Yasuhara Kazuya**. Application of the boundary element method for axisymmetric Biot's consolidation // Eng. Anal., 1985, № 4. - P. 184-191.

75. **Berryman James G., Thigpen Lewis, Chin Raymond C. Y**. Bulk elastic wave propagation in partially saturated porous solids // J. Acoust. Soc. Amer. - 1988, V. 84, №1. - P. 360-373.

76. **Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves if fluid–saturated porous solid. I. Low frequency range. // J. of the Acoust. Soc. of Amer., 1956, V. 28, № 2. - P.168-178.

77. **Biot M.A**. Theory of propagation of elastic waves if fluid–saturated porous solid. II. Higher freguency range. // J. of the Acoust. Soc. of Amer., 1956, V. 28, № 2. - P.179-191.

78. **Choch S. Ch**. Diffraction of compressional wave by rigid quarter-space // Gerlans Beitrage zur Geophysik, 1968, V. 77, № 4. - P. 353-362.

79. **Diebels S., Ehlers W**. Dynamik poroser Medien // Z. angew. Math. und Mech. – 1995, V. 75, Suppl. V. 1. - P. 151-152.

80. **Dziecielsk R.** Propagation of acceleration waves in a nonlinear porous medium // Теор. и прикл. мех., 5 Нац. конгр., Варна, 23-29 сент., 1985. Докл., кн. 2. - София, 1985. - С. 586-591.

81. **Dravinski M., Thau S.A.** Multiple diffraction of elastic waves by rigid rectangular foundation: plane-strain model // ASME, J. of Appl. Mech., Ser. E, 1976, V. 3, № 2. - P. 291-294.

82. **Gajo A., Mongiovi L**. An analytical solution for the transient response of saturated linear elastic porous media // Int. J. Numer. and Anal. Meth. Geomech., 1995, V. 19, № 6. - C. 399-433.

83. **Kumar R., Miglani A., Garg N. R**. Axisymmetric deformation of an isotropic elastic liquid-saturated porous medium using an eigenvalue approach // Int. J. Appl. Mech. and Eng., 2007, V. 12, № 4. - P. 1009-1025.

84. **Kumar R., Miglani Aseem, Garg N.R**. Plain strain problem of poroelasticity using eigenvalue approach // Proc. Indian Acad. Sci. Earth and Planet. Sci., 2000, V. 109, № 3. - P.371-380.

85. **Kraut E.A**. Diffraction of elastic waves by a rigid 90 wedge. Pt. I // Bulletin of the Seismologic. Soc. of Amer., 1968, V. 58, № 3. - P.1083-1096.

86. **Quiroga-Goode G., Carcione J. M.** Wave dynamics at an interface between porous media // Bull. geofis. teor. ed appl., 1997, V. 38, № 3. - P. 165-178.

87. **Sarmcu К. S., Thayuddin M**. Jorsional loading of a semi–infinite poroelastic cylinder // Indian J. of Pure and Apple. Math., 1978, V. 9, № 11. - P. 1147-1153.

88. **Van der Kogel H.** Wave phenomena // Comput. and Geotechn., 1987, V. 3, № 1. - P. 21-28.

89. **Yew C.H., Jogi P.N., Cray K.E.** Ettimation of the mechanical properties of fluid-saturated rocks using the measurea wave // Trans. ASME, J. Energe Resour. Technol., 1979, V. 101, № 2. - P.112-116.

90. **Yew C.H., Jogi P.N.** The determination of Biots parameters for sandstones // Exp. Mech., 1978, V. 18, № 5. - P.167-172.

91. **Zhang Wenfei.** A numerical method for wave propagation in viscoelastic stratified porous media // Transp. Porous Media, 2005, V. 61, № 1. - P. 15-24.