

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



ФАМ ВИНЬ ТХИЕН

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ И
КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Фирсанов Валерий Васильевич

Москва – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ	12
1.1. Обзор литературы	12
1.2. Постановка задачи.....	21
1.3. Алгоритм определения НДС оболочек	30
1.4. Выводы по первой главе.....	31
ГЛАВА II. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.....	33
2.1. Основные уравнения уточненной теории сферических оболочек.....	33
2.2. Преобразование двумерных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений	39
2.3. Методика и алгоритм решения сформулированной краевой задачи.....	41
2.4. Результаты параметрического анализа	47
2.4.1. Сравнение полученных результатов с опубликованными данными	47
2.4.2. НДС сферической оболочки под действием осесимметричной радиальной нагрузки.....	48
2.4.3. НДС сферической оболочки под действием ветровой нагрузки	50
2.5. Выводы по второй главе.....	52
ГЛАВА III. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.....	54
3.1. Основные уравнения уточненной теории конических оболочек	54
3.2. Преобразование двумерных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений	62

3.3. Методика и алгоритм решения сформулированной краевой задачи.....	63
3.4. Результаты параметрического анализа	70
3.4.1. НДС “погранслои” конической оболочки постоянной толщины	70
3.4.2. Расчет конической оболочки переменной толщины, несимметрично изменяющейся относительно срединной поверхности	71
3.4.3. Расчет конической оболочки под действием локальной нагрузки	73
3.5. Выводы по третьей главе.....	75
ГЛАВА IV. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК.....	77
4.1. Построение основных уравнений для многослойных ортотропных композитных оболочек вращения	77
4.2. Пологая сферическая оболочка двойкой кривизны.....	86
4.3. Сравнение полученных результатов с опубликованными данными	100
4.3.1. Расчет многослойных композитных сферических оболочек.....	100
4.3.2. Пологие ортотропные слоистые сферические оболочки	102
4.3.3. Сравнение полученных результатов с данными расчетов, основанными на уравнениях трехмерной теории упругости.....	106
4.4. НДС многослойной композитной оболочки	111
4.5. Выводы по четвертой главе.....	116
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	118
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	119
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	120
ПРИЛОЖЕНИЯ	132

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время элементы конструкций в виде оболочек широко применяются в ведущих отраслях промышленности: в авиационной и ракетной технике, судостроении, строительстве, энергомашиностроении, автомобилестроении. Инженерные расчеты оболочек базируются на результатах классической теории типа Кирхгофа – Лява, в основу которой была положена гипотеза о сохранении нормального элемента, позволившая привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. При определении напряженно-деформированного состояния (НДС) вблизи зон искажения напряженного состояния (области вблизи крепления элементов конструкций, стыков, скачкообразного изменения жесткостных характеристик, в том числе действия локальных и быстро изменяющихся нагрузок), а также элементов конструкций, выполненных из неоднородных материалов, классическая теория не дает удовлетворительного соответствия с практикой.

Как показывает опыт эксплуатации летательных аппаратов, в зонах крепления элементов конструкций наиболее часто происходят разрушения элементов конструкций. В этих зонах возникают дополнительные по отношению к классической теории НДС типа «погранслои», самоуравновешенные, быстро затухающие от зон искажения напряженного состояния, которые могут вносить значительный вклад в общее НДС оболочек.

Благодаря таким преимуществам, как высокая прочность и низкая плотность, многослойные композитные оболочки широко используются в различных областях машиностроения. Для таких оболочек распределение поперечных нормальных и касательных напряжений по толщине имеет важное значение в связи с их преждевременным разрушением, т.е. до достижения предела прочности материала.

Для описания объемного НДС необходимо построить уточненную теорию оболочек, базирующуюся на трехмерных уравнениях теории упругости. Такой

подход позволяет более точно определить НДС вблизи соединений и стыков оболочек, в том числе выполненных из неоднородных материалов. Учет трехмерности НДС в элементах конструкций в сочетании с методами механики разрушения дает возможность оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах, более обоснованно выбрать тип конструкционного материала и рациональным образом распределить его вблизи концентраторов напряжений, снизить массу изделий и, следовательно, сэкономить дорогостоящие конструкционные материалы, повысить эксплуатационную надёжность и снизить себестоимость инженерных сооружений.

Построение уточненных теорий и методов определения НДС сферических и конических оболочек позволит решить проблему расчета на прочность и долговечность таких авиационных конструкций как силовые корпуса летательных аппаратов, различные переходные зоны и стыки, сосуды высокого давления, резервуары и емкости для хранения жидких, газообразных продуктов, а также элементов конструкций в различных отраслях машиностроения и в строительном деле.



Рис. В.1. Сферические резервуары

Результаты расчета общего и местного НДС сферических и конических оболочек могут быть использованы при обосновании режимов лабораторных

статических и динамических испытаний.

Поэтому разработка методов прогнозирования НДС сферических и конических оболочек, уточняющих результаты классической теории и применяемых на этапах проектирования перспективной техники, представляет собой **актуальную проблему**.

Объект диссертационного исследования – сферические и конические оболочки, изготовленные из изотропных и многослойных ортотропных композиционных материалов.

Предмет исследования – математические модели НДС сферических и конических оболочек, позволяющие уточнить результаты классической теории.

Целью диссертационной работы является построение математических моделей НДС сферических и конических оболочек на основе уточненной теории; исследование НДС сферических и конических оболочек, изготовленных из изотропных и многослойных композиционных материалов при действии различных видов нагрузок.

Для реализации поставленной цели в диссертации были сформулированы и решены следующие задачи:

1. Построение системы уравнений равновесия изотропных сферических оболочек и соответствующих граничных условий на основе трехмерных уравнений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа. Разработка методики и алгоритма расчета НДС оболочки. Сравнение результатов расчетов, полученных в диссертации, с опубликованными данными других вариантов уточненных теорий. Анализ НДС оболочек под действием симметричной и несимметричной нагрузок, влияния изменяемости толщины.

2. Построение системы уравнений равновесия изотропных конических оболочек в перемещениях и граничных условиях. Разработка методики и алгоритма расчета НДС оболочки. Анализ НДС конических оболочек постоянной и переменной толщин под действием локальных и распределенных нагрузок.

3. Построение системы уравнений равновесия многослойных

композиционных оболочек вращения и соответствующих граничных условий. Разработка методики и алгоритма расчета НДС оболочки. Сравнение полученных расчетов с опубликованными данными других вариантов уточненной теории. Анализ НДС оболочек, влияния изменяемости толщины.

4. Построение системы уравнений равновесия для пологих сферических оболочек из многослойных композиционных материалов. Разработка методики и алгоритма расчета НДС оболочки. Анализ полученных результатов расчетов и сравнение с опубликованными данными других вариантов уточненной теории.

Методы исследования. Для построения математической модели оболочки применяются трехмерные уравнения теории упругости. С помощью вариационного принципа Лагранжа на основе уточненного выражения полной энергии оболочки за счет разложения её перемещений в полиномы по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява. В результате формулируются соответствующие краевые задачи. Для приведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами используются тригонометрические ряды. Решение сформулированной краевой задачи проводится последовательным применением методов конечных разностей и матричной прогонки с помощью компьютерной программы типа «Maple 18».

Достоверность и обоснованность результатов обеспечиваются корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела, применением для решения краевых задач строгих математических методов, а также сравнениями результатов расчета с данными других вариантов уточненной теории, опубликованными в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и Scopus.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Впервые построены основные уравнения равновесия для определения НДС сферических и конических оболочек на основе трехмерных уравнений теории

упругости с использованием представления компонентов НДС полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява с последующим применением вариационного принципа Лагранжа.

2. Впервые получены системы дифференциальных уравнений в перемещениях и соответствующие граничные условия для сферических и конических оболочек, изготовленных из изотропных и многослойных композиционных материалов.

3. Впервые показано, что для сферических и конических оболочек вблизи зон искажения НДС компоненты напряженного состояния, полученные по уточненной теории, существенно отличаются от соответствующих значений, определяемых по классической теории.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в следующем:

1. Предлагаемые математические модели, методы и алгоритмы расчета позволяют существенно уточнить НДС сферических и конических оболочек в зонах искажения напряженного состояния.

2. Проведены качественный и количественный анализы влияния вида нагружения, геометрических параметров на НДС типа «погранслои» в сферических и конических оболочках.

3. Доказано наличие поперечных нормальных и тангенциальных напряжений, соизмеримых с максимальными значениями основных нормальных напряжений, которые существенно повлияют на оценку прочности и долговечности оболочечных конструкций из изотропных и композиционных материалов.

4. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования при оценке прочности и долговечности конструкций объектов машиностроения различного назначения.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту:

1. Математические модели определения НДС сферических и конических оболочек, позволяющие существенно уточнить НДС в зонах искажения напряженного состояния.

2. Методики и алгоритмы расчета НДС оболочек, основанные на методах конечных разностей и матричной прогонки, для решения систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и алгебраических уравнений.

3. Доказательство существования быстро затухающих при удалении от зон искажения напряженного состояния поперечных нормальных и тангенциальных напряжений, одного порядка по величине с максимальными напряжениями основного (внутреннего) НДС, определяемого по классической теории.

4. Результаты анализа распределения НДС сферических и конических оболочек из изотропных и многослойных композиционных материалов по длине и толщине в зависимости от изменяемости толщины и характера нагрузок.

Апробация основных результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- XXV-м, XXVI-м международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Московская обл., г. Кременки, 2019, 2020;

- 18-ой, 19-ой Международных конференциях «Авиация и космонавтика». Москва, МАИ, 2019, 2020;

- XLVI Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения-2020», Москва, МАИ, 2020;

- XIII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ2020), Крым, 2020;

- Научном семинаре института № 9 «Общеинженерной подготовки», Московского авиационного института, 2021.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах [82-92,110], в том числе: 4 статьи в журналах из Перечня ВАК РФ; 2 статьи в журналах, цитируемых МБД SCOPUS и 6 тезисов докладов в материалах Международных конференций и симпозиумов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4-х глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы, 2-х приложений. Работа содержит 155 страниц, 37 рисунков, 12 таблиц. Список литературы содержит 132 наименования.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научных исследований, сформулированы цель и задачи исследования, определена научная новизна и практическая значимость полученных результатов, приведены основные результаты, выносимые на защиту и краткое содержание работы по главам.

В первой главе представлены обзор литературы по тематике диссертации и постановка задачи исследования; построены математические модели для определения уточненного НДС оболочек вращения.

Во второй главе на основе полученных в первой главе математических моделей построены уравнения равновесия и граничные условия для изотропной сферической оболочки. С помощью тригонометрических рядов по окружной координате уравнения в частных производных приведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулированная краевая задача решена последовательно применением методов конечных разностей и матричной прогонки.

Приведены примеры расчета НДС сферических оболочек при различных вариантах внешних нагрузок. Рассматривается также влияние изменения толщины на НДС сферических оболочек. Выполнено сравнение результатов расчета по уточненной теории с данными классической теории и с результатами других уточненных теорий.

В третьей главе на основе полученных в первой главе математических

моделей построены уравнения равновесия и граничные условия для изотропной конической оболочки. Задача приведения двумерных уравнений к обыкновенным дифференциальным осуществляется путем разложения компонент перемещений и внешних нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате. Решение сформулированной краевой задачи проводится методами конечных разностей и матричной прогонки.

Приведены примеры расчета НДС конических оболочек постоянной и переменной толщин при различных видах нагрузок. Выполнено сравнение результатов расчета по уточненной теории с данными классической теории.

В четвертой главе разработана уточненная математическая модель НДС многослойных ортотропных композиционных оболочек и построена система дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями. Разработан алгоритм определения НДС оболочки с применением методов конечных разностей и матричной прогонки.

Разработана уточненная математическая модель НДС для пологих многослойных композитных сферических оболочек. Краевая задача приведена к решению системы линейных алгебраических уравнений путем разложения компонент перемещений и внешних нагрузок в двойные тригонометрические ряды.

Приведены сравнения результатов, полученных в данной работе, с точными решениями, основанными на уравнениях трехмерной теории упругости и результатами ряда других известных уточненных теорий, опубликованными в международных журналах Scopus и Web of Science. Даны примеры расчета НДС многослойной композитной оболочки и графики непрерывного распределения напряжений по толщине оболочки.

ГЛАВА I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

В данной главе представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории пластин и оболочек. На основе трехмерных уравнений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа построена математическая модель уточненного НДС оболочек вращения.

1.1. Обзор литературы

В настоящее время элементы конструкций типа пластин и оболочек широко используются в ведущих отраслях промышленности: в авиа-, ракето-, приборо-, судостроении и др. Основы теории пластин и оболочек были заложены в XIX–XX вв. крупными учеными в области математики и механики: О. Коши, С. Пуассон, Сен Венан, Г. Кирхгоф. В 1874 г. Г. Ароном впервые была предпринята попытка вывода уравнений теории оболочек из уравнений теории упругости на основе метода Кирхгофа. Рождение современной теории оболочек связано с работами А. Лява, А. Бэссета и Х. Лэмба.

Наиболее значительный вклад в построение и развитие теории оболочек внесли: С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, И.Н. Векуа, В.В. Соколовский, В.З. Власов, И.И. Ворович, И.Г. Галеркин, К.З. Галимов, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, Н.А. Кильчевский, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, В.В. Новожилов, П.М. Огибалов, Ю.Н. Работнов, С.П. Тимошенко, К.Ф. Черных, И.Я. Штаерман и иностранные ученые Г. Рейсснер, Э. Мейсснер, Ф. Дишингер, В. Флюгге, Л. Доннелл и др.

Основным теоретическим результатам, полученным на основе классической теории оболочек, посвящены известные монографии В.З. Власова [15], А.Л. Гольденвейзера [27], А.И. Лурье [47], В.В. Новожилова [53], С.П. Тимошенко [73]. Фундаментальные исследования по нелинейной теории оболочек принадлежат

А.С. Вольмиру [17, 18] и Х.М. Муштари, К.З. Галимову [49]. Краткий очерк развития теории оболочек представлен в работах [17, 19, 43, 52]. Краткие обзоры исследований расчетов пластин и оболочек за различные периоды времени можно найти в работах отечественных [59, 60, 62, 75] и зарубежных [118, 119] ученых. Основные положения классической теории можно найти также в монографиях и учебных пособиях [8, 29, 32, 58, 95, 96].

Теория сферических и конических оболочек представляет собой части общей теории оболочек. Первым значительным успехом в расчете сферических оболочек была работа Г. Рейсснера [128], который привел к удобному виду дифференциальные уравнения, описывающие осесимметричную деформацию этих оболочек, и затем применил для их интегрирования асимптотический метод. В разработке упрощенных методов расчета оболочек вращения на осесимметричную нагрузку особенно велики заслуги И.Я. Штаермана, И. Геккелера и П.Л. Пастернака.

Общая задача расчета сферических оболочек, нагруженных произвольным образом, была решена впервые А. Хаверсом. Другими способами данная проблема решена также В.В. Соколовским [69], Ю. Репманом [66], А.Л. Гольденвейзером [22].

В.В. Новожилов [53] предложил метод расчета оболочек вращения, в том числе, конических и сферических оболочек. Оказывается, что получающиеся при этом дифференциальные уравнения допускают преобразования, аналогичные тем, какие возможны для уравнений в безмоментной теории оболочек. В итоге расчет оболочки вращения приводится к решению дифференциальной системы уравнений четвертого порядка, содержащей всего два уравнения.

Работа В.С. Черниной [94] посвящена расчету оболочек вращения на статическую нагрузку. Все задачи решаются в линейной постановке на основании технической теории оболочек в предположении идеальной упругости материала и малости деформаций. Решения осесимметричной задачи конической и сферической оболочек приводятся к системам разрешающих уравнений Мейснера

для различных видов распределенной нагрузки.

В работах [41, 42] А.Д. Коваленко излагается метод расчета конических оболочек постоянной и линейно-переменной толщины. Приводятся основные уравнения теории тонких конических оболочек и составляются разрешающие уравнения, описывающие задачи об осесимметричной и антисимметричной деформациях. Даются решения задач по расчету НДС оболочек под действием контурных, поверхностных, объемных сил и неравномерного нагрева, вызванного двумерным температурным полем. В этих работах в качестве основного математического аппарата использована теория гипергеометрических функций.

В работе [71] Д.В. Тарлаковского, Г.В. Федотенкова рассматривается пространственная задача о движении тонкой упругой сферической оболочки типа Тимошенко под действием произвольно распределенного нестационарного давления. Предлагается подход к разделению системы уравнений пространственного движения оболочки. Построены интегральные представления решения с ядрами в виде функций влияния и алгоритм для решения задачи о воздействии на оболочку нестационарного нормального давления. В работе [72] Д.В. Тарлаковского, Г.В. Федотенкова предлагается обобщенная линейная модель динамики тонкой упругой оболочки постоянной толщины. Перемещения оболочки и все характеристики рассматриваются в линейном приближении по нормальной координате. Уравнения движения построены на основании принципа Гамильтона и состоят из шести тензорных соотношений. Из этого принципа выведены и естественные граничные условия. Расчет сферических и конических оболочек также можно найти в работах [1, 10, 35, 55,56].

Широкие потребности различных отраслей современной техники в новых эффективных конструкциях и материалах создали предпосылки к интенсивному развитию теории многослойных оболочек. Основы теории анизотропных оболочек, и, в частности – ортотропных сферических и конических, можно найти в работах С. А. Амбарцумяна [5, 6], В.В. Болотина [9], В. В. Васильева [11], С. Г. Лехницкого [45], А.Н. Елпатьевского [34], И.Ф. Образцова [33,57], С.Н. Сухинина [70] и др.

Современная техника требует все более надежных, точных расчетных данных и ставит зачастую совершенно новые задачи, которые не могут быть удовлетворительно решены на основе классической теории оболочек. Следовательно, повышенный интерес к исследованиям по уточненным теориям оболочек объясняется не только относительной разработанностью классической теории Киргоффа-Лява, но и существенным расширением области инженерного приложения теории. Один из аспектов этих задач заключается в построении более достоверных методов определения НДС вблизи мест крепления конструкций, а также элементов конструкций, выполненных из неоднородных материалов.

Погрешности классической теории определяются мерой близости абстрактного материала к реальному, не допускающего поперечных деформаций, и переопределенностью задачи, что потребовало введения обобщенной поперечной силы Кирхгофа. Первая оценка погрешности классической теории проведена в работе В.В. Новожилова и Р.М. Финкельштейна [54]. Х.М. Муштари и К.З. Галимов [49] получили оценку, исходя из физических соображений. Оценка А.Л. Гольденвейзера [27] получена методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости и, в отличие от оценки В.В. Новожилова и Р.М. Финкельштейна, учитывает изменчивость НДС в оболочке. Классическая теория пластин и оболочек проверена временем и для ее использования имеется широкое поле практического применения. Однако физическую стройность классической теории нарушает необходимость введения поперечной силы Кирхгофа.

Чтобы устранить недостатки классической теории, Е. Рейсснер [127] предложил теорию сдвиговых деформаций первого порядка (FSDT). Поперечные отрезки прямых линий после деформации остаются прямыми, но не будут нормальными к срединной поверхности. На основе FSDT с использованием рядов по полиномам Чебышева решается задача для слоистых ортотропных сферических оболочек [97-99]. Другие исследования в рамках FSDT можно найти в работах [111,120,132].

Теория FSDT требует использовать поправочные коэффициенты сдвига, от

которых зависит точность результатов расчета. Ограничения классической теории и FSDT убедили исследователей разработать теорию сдвиговых деформаций высокого порядка (HSDT). На основе этой теории в последние несколько десятилетий появилось много результатов исследований пластин и оболочек, особенно из композиционных материалов. Редди и Liu [124] представили теорию сдвиговых деформаций параболической формы для оболочек из композитных ортотропных слоев. Основные уравнения выводятся с использованием принципа Гамильтона. Решены задачи изгиба и собственных колебаний цилиндрических и сферических оболочек. Mantari J.L. [116,117], Sayyad A.S. [129] использовали разные аппроксимации теории сдвиговых деформаций высокого порядка для исследований пластин и оболочек под действием различных видов нагрузок. Однако, их результаты не удовлетворяют естественным граничным условиям пластин и оболочек.

Один из возможных путей построения приближенной теории, свободной от гипотез Кирхгофа – Лява, состоит в применении асимптотических методов, в том числе метода прямого асимптотического интегрирования уравнения трехмерной теории упругости. Этот метод развивался усилиями И.И. Воровича [7,16], А.Л. Гольденвейзера [27] и их сотрудников. В обоих циклах работ отчетливо выявляется физически очевидное свойство НДС тонких оболочек, заключающееся в его разделении на внутреннее и краевое. В асимптотическом методе это дает возможность построить два итерационных процесса интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости для случая, когда область интегрирования является достаточно узкой. Первый из этих процессов позволяет строить с заданной асимптотической точностью внутренние интегралы. Вторым процессом определяется быстро меняющиеся краевые интегралы, локализованные вблизи краев или других линий искажения общего НДС оболочки и составляющие так называемый «погранслой». Асимптотические методы являются основными методами преобразования уравнений теории упругости в работах А.Л. Гольденвейзера [23-27], Э. Рейсса [126], А. Грина [112], В. Койтера [115], И.М.

Рапопорта [65], А.В. Колос [44], П.Е. Товстика [74], Л.А. Агаловяна [2-4], Ю.И. Димитриенко [30-31], Ю.Д. Каплунова [38] и других авторов, работы которых можно найти в обзорных докладах [21, 23].

В рамках вариационно-асимптотического метода с помощью специально построенной аппроксимирующей полиномиальной функции Вал. В. Фирсановым [76,77,105,106] была разработана уточненная теория определения НДС в прямоугольных, круглых пластинах и цилиндрических оболочках постоянной и переменной толщины вблизи жестко и упруго защемленных краев. В работе [106] указанный математический аппарат применяется для построения основного НДС круглой пластины с несимметрично изменяющейся переменной толщиной. Анализ показал, что при незначительном изменении параметра переменности толщины пластины можно получить существенное повышение показателей ее жесткости, прочности и весового совершенства по сравнению с пластиной постоянной толщины. В работе [77] при рассмотрении примера расчета прямоугольной пластинки с однородными упругими свойствами по трем направлениям установлено, что дополнительное самоуравновешенное НДС вблизи защемленного края вносит существенный вклад в общее напряженное состояние: максимальные изгибные напряжения уточняются на 21%, поперечные касательные напряжения в 5 раз превосходят соответствующие напряжения классической теории и поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, составляют 22,5% от максимальных изгибных напряжений.

В работах Е.М. Зверьева и Г.И. Макарова [36, 37] рассматривается построение теорий типа Тимошенко для статических и динамических задач теории балок, пластин и оболочек с помощью методов простых итераций и асимптотического интегрирования. Дана возможность отбросить второстепенные члены по отношению к главным, показана сходимость решения в асимптотическом смысле и получены простые модели задач.

На основе асимптотического метода в работах Б.В. Нерубайло [50, 51] решается задача о локальном воздействии нормального давления на тонкую

круговую оболочку. В качестве примера рассматривается коническая оболочка, находящаяся под действием локальных радиальных нагрузок.

Математические направления развития теории оболочек ведут свое начало в работах выдающихся математиков О. Коши [100] и С. Пуассона [122]. Обзор работ этого направления содержится в статье А.Л. Гольденвейзера и А.И. Лурье [28], в монографии [40], а также в статьях Н.А. Кильчевского [39], И.И. Воровича [20].

Коши и Пуассон предопределили общую стратегию построения теории оболочек, в основе которой лежит разложение перемещений, деформаций и напряжений в ряды по поперечной координате. Эта стратегия позволяет понизить размерность уравнений теории упругости на единицу. При этом увеличивается число двумерных уравнений до бесконечности, что имеет свои практические неудобства. Поэтому при построении теории оболочек основное внимание уделяется проблеме редукции бесконечной системы двумерных уравнений к конечной системе. Несколько разных способов такой редукции предлагается в монографиях Н.А. Кильчевского [40] и И.Н. Векуа [14]. Характерная особенность рассматриваемого направления развития теории оболочек состоит в том что, закон Гука и геометрия перемещений сплошной среды полностью удовлетворяются. Вследствие этого редукция бесконечной системы уравнений к конечной неизбежно входит в противоречие с локальными уравнениями равновесия. Из теорем теории упругости известно, что локальные уравнения равновесия доставляют минимум потенциальной энергии упругого тела, при котором реализуются истинные перемещения [48]. Отсюда следует, что решения редуцированных уравнений могут оказаться близкими к точным только в тех задачах, где нарушения локальных уравнений равновесия незначительны. В противном случае могут иметь место существенные ошибки.

В начале семидесятых годов прошлого столетия разрабатывались новые направления развития теории оболочек, в которых учет поперечных деформаций находится в полном соответствии с общими уравнениями механики сплошной среды. Одно из них в работах В.В. Васильева и С.А. Лурье [12, 13] называется

«энергетически согласованным» направлением; другое в работах В.В. Пикуля [61, 63, 64] – «физически состоятельным» направлением развития теории оболочек.

Ближайшими предшественниками физически состоятельного направления развития теории оболочек можно считать В.З. Власова [15], С.Г. Лехницкого [46] и С.А. Амбарцумяна [5, 6]. В работах С.А. Амбарцумяна, завершившего подходы В.З. Власова и С.Г. Лехницкого к построению классической теории оболочек, вывод всех соотношений теории слоистых анизотропных оболочек производится непосредственно из уравнений теории упругости в криволинейной ортогональной системе координат без привлечения элементов теории поверхностей. Этот метод наряду с концепцией сплошных сред с внутренними связями составляет фундамент физически состоятельного направления развития теории оболочек.

На основе энергетически согласованного направления развития теории оболочек в работе [13] В.В. Васильевым и С.А. Лурье решена задача сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пологих оболочек путем разложения искомым перемещений в ряды по нормальной координате. Вводится понятие согласованной теории и формулируются условия согласованности разложений для перемещений, которые связывают между собой количество слагаемых в разложениях перемещений по тангенциальным и поперечному направлениям. В качестве примера рассматривается осесимметричная задача о цилиндрической оболочке, для которой полученное решение хорошо сходится с точным.

В рамках этого направления в работах Вал. В. Фирсанова и его учеников [78-93, 107-109] исследуется НДС круговых цилиндрических, сферических, конических оболочек, прямоугольных и круглых пластин переменной толщины, в том числе выполненных из композиционных и пьезоматериалов. Приводятся уравнения для случая, когда при аппроксимации перемещений по толщине оболочки удерживаются слагаемые на один - два порядка выше, чем в классической теории оболочек типа Кирхгофа—Лява. Сформулированная краевая задача решается с помощью преобразования Лапласа. Показано, что поперечные

нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют один порядок с максимальными значениями основного изгибного напряжения.

В работе [78] рассматривается цилиндрическая оболочка переменной толщины. Установлено, что вблизи зон искажения компоненты напряженного состояния, полученные по уточненной теории, существенно отличаются от соответствующих значений, определенных по классической теории, не только в части поперечных нормальных и касательных напряжений, но и в части тангенциальных напряжений.

Математическая модель для расчета НДС подкрепленных цилиндрических оболочек построена в работе [79]. Наличие ребер в зонах нагружения оболочки существенно влияет на НДС обшивки, особенно в части поперечных нормальных напряжений. С ростом высоты ребер, продольные и тангенциальные нормальные напряжения существенно убывают, при этом поперечные нормальные напряжения увеличиваются пропорционально высоте ребер.

В работе [81] разработан вариант уточненной теории расчета НДС цилиндрических оболочек из пьезоматериалов. Получены система уравнений равновесия оболочек и соответствующие краевые условия при действии только электрического поля. В результате установлено, что электроупругие состояния оболочек существенно зависят от параметров пьезо-эффекта.

В работе [103] анализируется НДС многослойных композитных цилиндрических оболочек. Проведены сравнения расчетных результатов с данными, полученными на основе различных уточненных теорий.

В работе [80] построены двумерные уравнения для прямоугольных пластин с симметрично изменяющейся переменной толщиной. Рассматривается НДС пластин из изотропных материалов при совместном действии механических нагрузок и температур, которые существенно влияют на величины НДС типа «погранслой».

Для развития данного направления в теории сферических и конических оболочек можно поставить следующие задачи:

- построение уточненной математической модели сферических и конических оболочек;
- разработка методик и алгоритмов расчета НДС сферических и конических оболочек;
- количественная оценка результатов расчета в уточненной теории по отношению к классической теории;

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в методиках инженерных расчетов типовых авиационных конструкций и их соединений, а также при проектировании и оценке прочности машиностроительных и строительных конструкций.

Таким образом, несмотря на известные достижения в теории и методах расчета оболочек, имеется еще ряд нерешенных задач для уточненной теории сферических и конических оболочек. Поэтому исследование их НДС по уточненной теории продолжает сохранять свою актуальность. Решению этой проблемы и посвящена диссертация.

1.2. Постановка задачи

Рассматривается оболочка вращения, отнесенная к триортогональной криволинейной системе координат α_1, α_2, ξ . Координатные оси α_1, α_2 совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось ξ направлена по наружной нормали к этой поверхности. Обозначим через A_1, A_2 - коэффициенты первой квадратичной формы, R_1, R_2 - главные радиусы кривизны оболочки.

В соответствии с работами [12, 13, 93] искомые перемещения оболочки представляются в виде

$$\begin{aligned}
 U_1(\alpha_1, \alpha_2, \xi) &= \sum_{k=0}^3 u_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!}, \\
 U_2(\alpha_1, \alpha_2, \xi) &= \sum_{k=0}^3 v_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!},
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

$$U_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = \sum_{k=0}^2 w_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!}.$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют осям α_1, α_2 и ξ . Для варианта классической теории типа Кирхгофа – Лява в формулах (1.1) отбрасываются по два последних слагаемых.

Полагаем, что по внутренней ($\xi = -h_1$) и внешней ($\xi = +h_2$) поверхностях оболочки, а также на торцевых плоскостях действуют внешние распределенные нагрузки q_{i3}^{\pm}, q_{ji} , $i = \overline{1,3}$, $j = 1, 2$, соответственно.

Геометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} U_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_3, \\ e_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} U_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_3, \\ e_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial \xi}, e_{12} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} U_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} U_2 \right], \\ e_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_1, e_{23} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где коэффициенты Ламе H_k ($k = \overline{1,3}$) определяются формулами

$$H_i = A_i a_i, H_3 = 1, a_i = 1 + \frac{\xi}{R_i}, i = 1, 2.$$

Физические уравнения теории упругости принимаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11} e_{11} + A_{12} e_{22} + A_{13} e_{33}, \sigma_{22} = A_{21} e_{11} + A_{22} e_{22} + A_{23} e_{33}, \sigma_{12} = A_{44} e_{12}, \\ \sigma_{33} &= A_{31} e_{11} + A_{32} e_{22} + A_{33} e_{33}, \sigma_{13} = A_{55} e_{13}, \sigma_{23} = A_{66} e_{23}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

где коэффициенты A_{ij} ($i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,6}$) представляют собой упругие постоянные ортотропного материала оболочки

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \frac{E(\mu-1)}{(2\mu-1)(\mu+1)}, A_{44} = A_{55} = A_{66} = \frac{E}{2(\mu+1)},$$

$$A_{12} = A_{21} = A_{13} = A_{31} = A_{23} = A_{32} = -\frac{E\mu}{(2\mu-1)(\mu+1)},$$
(1.4)

где E - модуль Юнга, μ - коэффициент Пуассона.

Подставляя разложения (1.1) в геометрические соотношения (1.2), находим деформации

$$e_{11} = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{v_k}{A_2} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!},$$

$$e_{22} = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{u_k}{A_1} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!},$$

$$e_{33} = \sum_{k=1}^2 w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$e_{12} = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v_k \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_k \right) \frac{\xi^k}{k!},$$

$$e_{13} = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_1 a_1} \frac{\partial w_k}{\partial \alpha_1} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{u_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!},$$

$$e_{23} = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_2 a_2} \frac{\partial w_k}{\partial \alpha_2} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!}.$$
(1.5)

Для построения основных уравнений уточненного варианта теории оболочек используется вариационный принцип Лагранжа [27]

$$\delta L = \iiint (\sigma_{11} \delta e_{11} + \sigma_{22} \delta e_{22} + \sigma_{33} \delta e_{33} + \sigma_{12} \delta e_{12} + \sigma_{13} \delta e_{13} +$$

$$+ \sigma_{23} \delta e_{23}) A_1 A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\xi - \iint (q_{11} \delta U_1 + q_{12} \delta U_2 + q_{13} \delta U_3) A_2 a_2 d\alpha_2 d\xi -$$

$$- \iint (q_{21} \delta U_1 + q_{22} \delta U_2 + q_{23} \delta U_3) A_1 a_1 d\alpha_1 d\xi -$$

$$- \iint \left\{ q_{13}^+ [a_1 a_2 \delta U_1]_{(\xi=+h_2)} - q_{13}^- [a_1 a_2 \delta U_1]_{(\xi=-h_1)} + \right.$$

$$+ q_{23}^+ [a_1 a_2 \delta U_2]_{(\xi=+h_2)} - q_{23}^- [a_1 a_2 \delta U_2]_{(\xi=-h_1)} +$$

$$\left. + q_{33}^+ [a_1 a_2 \delta U_3]_{(\xi=+h_2)} - q_{33}^- [a_1 a_2 \delta U_3]_{(\xi=-h_1)} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0.$$
(1.6)

Подставляя разложения (1.1) и выражения (1.5) в (1.6), получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{-h_1}^{+h_2} \left\{ \sigma_{11} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\delta v_k}{A_2} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{\delta w_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!} \right] + \right. \\
& + \sigma_{22} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\delta u_k}{A_1} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{\delta w_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!} \right] + \sigma_{33} \sum_{k=1}^2 \delta w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} + \\
& + \sigma_{12} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_k \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_k \right) \frac{\xi^k}{k!} \right] + \\
& + \sigma_{13} \left[\sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_1 a_1} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_1} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 \delta u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{\delta u_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!} \right] + \\
& + \sigma_{23} \left[\sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_2 a_2} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_2} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 \delta v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{\delta v_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!} \right] \left. \right\} A_1 A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\xi - \quad (1.7) \\
& - \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{-h_1}^{+h_2} \left(q_{11} \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\xi^k}{k!} + q_{12} \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\xi^k}{k!} + q_{13} \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\xi^k}{k!} \right) A_2 a_2 d\alpha_2 d\xi - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{-h_1}^{+h_2} \left(q_{21} \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\xi^k}{k!} + q_{22} \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\xi^k}{k!} + q_{23} \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\xi^k}{k!} \right) A_1 a_1 d\alpha_1 d\xi - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left\{ q_{13}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{13}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)} + \right. \\
& + q_{23}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{23}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)} + \\
& \left. + q_{33}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{33}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0,
\end{aligned}$$

где $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$ – координаты криволинейных краев оболочки.

Введем следующие обозначения для внутренних и внешних силовых факторов:

$$\begin{aligned}
(N_1, N_{12}, Q_{13}, \overline{N}_1, \overline{N}_{12}, \overline{Q}_{13}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} a_2 (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) d\xi, \\
(M_1^{(k)}, M_{12}^{(k)}, M_{13}^{(k)}, \overline{M}_1^{(k)}, \overline{M}_{12}^{(k)}, \overline{M}_{13}^{(k)}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} a_2 (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (N_2, N_{21}, Q_{23}, \overline{N_2}, \overline{N_{21}}, \overline{Q_{23}}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} a_1(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) d\xi, \\ (M_2^{(k)}, M_{21}^{(k)}, M_{23}^{(k)}, \overline{M_2^{(k)}}, \overline{M_{21}^{(k)}}, \overline{M_{23}^{(k)}}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} a_1(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$(T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, T_3^{(k)}) = \int_{-h_1}^{+h_2} a_1 a_2 (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi,$$

$$P_1^{(k)} = q_{13}^+ \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{13}^- \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)},$$

$$P_2^{(k)} = q_{23}^+ \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{23}^- \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)},$$

$$P_3^{(k)} = q_{33}^+ \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{33}^- \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)}.$$

Тогда уравнение (1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left[A_2 N_1 \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\delta v_0}{A_2} \right) + \frac{A_1 A_2 N_1}{R_1} \delta w_0 + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^3 A_2 M_1^{(k)} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\delta v_k}{A_2} \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_1 A_2 M_1^{(k)}}{R_1} \delta w_k + \\ &+ A_1 N_2 \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\delta u_0}{A_1} \right) + \frac{A_1 A_2 N_2}{R_2} \delta w_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^3 A_1 M_2^{(k)} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\delta u_k}{A_1} \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_1 A_2 M_2^{(k)}}{R_2} \delta w_k + \sum_{k=1}^2 A_1 A_2 T_3^{(k)} \delta w_k + \\ &+ A_1 N_{21} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_0 \right) + A_2 N_{12} \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_0 \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^3 A_1 M_{21}^{(k)} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_k \right) + \sum_{k=1}^3 A_2 M_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_k \right) + \\ &+ A_2 Q_{13} \frac{\partial \delta w_0}{\partial \alpha_1} - Q_{13} \frac{A_1 A_2 \delta u_0}{R_1} + \sum_{k=1}^2 A_2 M_{13}^{(k)} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_1} + \sum_{k=1}^3 A_1 A_2 T_1^{(k)} \delta u_k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{k=1}^3 \frac{A_1 A_2}{R_1} M_{13}^{(k)} \delta u_k + A_1 Q_{23} \frac{\partial \delta w_0}{\partial \alpha_2} - Q_{23} \frac{A_1 A_2 \delta v_0}{R_2} + \sum_{k=1}^2 A_1 M_{23}^{(k)} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_2} + \\
& + \sum_{k=1}^3 A_1 A_2 T_2^{(k)} \delta v_k - \sum_{k=1}^3 \frac{A_1 A_2}{R_2} M_{23}^{(k)} \delta v_k \Big] d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left(\overline{N_1} \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 \overline{M_1^{(k)}} \delta u_k + \overline{N_{12}} \delta v_0 + \sum_{k=1}^3 \overline{M_{12}^{(k)}} \delta v_k + \overline{Q_{13}} \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 \overline{M_{13}^{(k)}} \delta w_k \right) A_2 d\alpha_2 - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \left(\overline{N_{21}} \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 \overline{M_{21}^{(k)}} \delta u_k + \overline{N_2} \delta v_0 + \sum_{k=1}^3 \overline{M_2^{(k)}} \delta v_k + \overline{Q_{23}} \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 \overline{M_{23}^{(k)}} \delta w_k \right) A_1 d\alpha_1 - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left(\sum_{k=0}^3 P_1^{(k)} \delta u_k + \sum_{k=0}^3 P_2^{(k)} \delta v_k + \sum_{k=0}^2 P_3^{(k)} \delta w_k \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Интегрируя слагаемые в уравнении (1.9) по частям, находим

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left[-\frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} \delta u_0 + N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta v_0 + \frac{A_1 A_2 N_1}{R_1} \delta w_0 + \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 \left(-\frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial \alpha_1} \delta u_k + M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta v_k \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_1 A_2 M_1^{(k)}}{R_1} \delta w_k - \\
& - \frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} \delta v_0 + N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_0 + \frac{A_1 A_2 N_2}{R_2} \delta w_0 + \\
& + \sum_{k=1}^3 \left(-\frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial \alpha_2} \delta v_k + M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_k \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_1 A_2 M_2^{(k)}}{R_2} \delta w_k + \sum_{k=1}^2 A_1 A_2 T_3^{(k)} \delta w_k + \\
& - \frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial \alpha_2} \delta u_0 - N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_0 - \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha_1} \delta v_0 - N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_0 + \\
& - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} \delta u_k + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_k \right) - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_1} \delta v_k + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_k \right) - \\
& - \frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial \alpha_1} \delta w_0 - Q_{13} \frac{A_1 A_2 \delta u_0}{R_1} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} \delta w_k + \sum_{k=1}^3 A_1 A_2 T_1^{(k)} \delta u_k + \\
& - \sum_{k=1}^3 \frac{A_1 A_2}{R_1} M_{13}^{(k)} \delta u_k - \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial \alpha_2} \delta w_0 - Q_{23} \frac{A_1 A_2 \delta v_0}{R_2} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} \delta w_k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^3 A_1 A_2 T_2^{(k)} \delta v_k - \sum_{k=1}^3 \frac{A_1 A_2}{R_2} M_{23}^{(k)} \delta v_k - \\
& - A_1 A_2 \left(\sum_{k=0}^3 P_1^{(k)} \delta u_k + \sum_{k=0}^3 P_2^{(k)} \delta v_k + \sum_{k=0}^2 P_3^{(k)} \delta w_k \right) \Big] d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& + \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left((N_1 - \bar{N}_1) \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 (M_1^{(k)} - \bar{M}_1^{(k)}) \delta u_k + (N_{12} - \bar{N}_{12}) \delta v_0 + \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 (M_{12}^{(k)} - \bar{M}_{12}^{(k)}) \delta v_k + (Q_{13} - \bar{Q}_{13}) \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 (M_{13}^{(k)} - \bar{M}_{13}^{(k)}) \delta w_k \Big) A_2 d\alpha_2 - \\
& + \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \left((N_{21} - \bar{N}_{21}) \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 (M_{21}^{(k)} - \bar{M}_{21}^{(k)}) \delta u_k + (N_2 - \bar{N}_2) \delta v_0 + \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 (M_2^{(k)} - \bar{M}_2^{(k)}) \delta v_k + (Q_{23} - \bar{Q}_{23}) \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 (M_{23}^{(k)} - \bar{M}_{23}^{(k)}) \delta w_k \Big) A_1 d\alpha_1 = \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left\{ \left[\frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{13}}{R_1} + P_1^{(0)} \right) \right] \delta u_0 + \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{13}^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)} \right) \right] \delta u_k + \\
& + \left[\frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{23}}{R_2} + P_2^{(0)} \right) \right] \delta v_0 + \\
& + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{23}^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)} \right) \right] \delta v_k + \\
& + \left[\frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - P_3^{(0)} \right) \right] \delta w_0 - \\
& + \sum_{k=1}^2 \left[\frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} \right) \right] \delta w_k \Big\} d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& + \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left((N_1 - \bar{N}_1) \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 (M_1^{(k)} - \bar{M}_1^{(k)}) \delta u_k + (N_{12} - \bar{N}_{12}) \delta v_0 + \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 (M_{12}^{(k)} - \bar{M}_{12}^{(k)}) \delta v_k + (Q_{13} - \bar{Q}_{13}) \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 (M_{13}^{(k)} - \bar{M}_{13}^{(k)}) \delta w_k \Big) A_2 d\alpha_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \left((N_{21} - \overline{N_{21}}) \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 (M_{21}^{(k)} - \overline{M_{21}^{(k)}}) \delta u_k + (N_2 - \overline{N_2}) \delta v_0 + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^3 (M_2^{(k)} - \overline{M_2^{(k)}}) \delta v_k + (Q_{23} - \overline{Q_{23}}) \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 (M_{23}^{(k)} - \overline{M_{23}^{(k)}}) \delta w_k \right) A_1 d\alpha_1 = 0.
\end{aligned}$$

В силу независимости и произвольности вариаций искомых обобщенных перемещений, из последнего выражения получим систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{13}}{R_1} + P_1^{(0)} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{13}^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1, 3}, \\
& \frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{23}}{R_2} + P_2^{(0)} \right) = 0, \tag{1.10} \\
& \frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{23}^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1, 3}, \\
& \frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - P_3^{(0)} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1, 2}.
\end{aligned}$$

Граничные условия представляются в следующем виде:

на краях $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_1 = \alpha_1^{(2)}$

$$u_0 = \overline{u_0} \vee N_1 = \overline{N_1}, v_0 = \overline{v_0} \vee N_{12} = \overline{N_{12}}, w_0 = \overline{w_0} \vee Q_{13} = \overline{Q_{13}},$$

$$u_k = \overline{u_k} \vee M_1^{(k)} = \overline{M_1^{(k)}}, v_k = \overline{v_k} \vee M_{12}^{(k)} = \overline{M_{12}^{(k)}}, k = \overline{1, 3} \tag{1.11}$$

$$w_k = \overline{w_k} \vee M_{13}^{(l)} = \overline{M_{13}^{(l)}}, l = \overline{1, 2}$$

на краях $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)}$ и $\alpha_2 = \alpha_2^{(2)}$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \overline{u_0} \vee N_{21} = \overline{N_{21}}, v_0 = \overline{v_0} \vee N_2 = \overline{N_2}, w_0 = \overline{w_0} \vee Q_{23} = \overline{Q_{23}}, \\
u_k &= \overline{u_k} \vee M_{21}^{(k)} = \overline{M_{21}^{(k)}}, v_k = \overline{v_k} \vee M_2^{(k)} = \overline{M_2^{(k)}}, k = \overline{1,3} \\
w_k &= \overline{w_k} \vee M_{23}^{(l)} = \overline{M_{23}^{(l)}}, l = \overline{1,2}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где $\overline{u_k}, \overline{v_k}, \overline{w_l}, k = 0..3, l = 0..2$ – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

Краевые условия (1.11), (1.12) охватывают все возможные условия закрепления оболочки и их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (1.11) уточненной теории.

Сформулируем граничные условия при стандартном закреплении краев оболочки, воспользовавшись стандартными граничными условиями трехмерной теории упругости [6, 53]:

свободный край

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} \text{ и } \alpha_1 = \alpha_1^{(2)}: \overline{N_1} = \overline{N_{12}} = \overline{M_1^{(k)}} = \overline{M_{12}^{(k)}} = \overline{Q_{13}} = \overline{M_{13}^{(l)}} = 0, k = \overline{1,3}, l = 1, 2, \\
\alpha_2 = \alpha_2^{(1)} \text{ и } \alpha_2 = \alpha_2^{(2)}: \overline{N_{21}} = \overline{N_2} = \overline{M_{21}^{(k)}} = \overline{M_2^{(k)}} = \overline{Q_{23}} = \overline{M_{23}^{(l)}} = 0, k = \overline{1,3}, l = 1, 2,
\end{aligned}$$

шарнирно опертый край

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} \text{ и } \alpha_1 = \alpha_1^{(2)}: \overline{N_1} = \overline{N_{12}} = \overline{M_1^{(k)}} = \overline{M_{12}^{(k)}} = w_l = 0 \text{ или} \\
\overline{N_1} = \overline{M_1^{(k)}} = v_0 = v_k = w_l = 0, k = \overline{1,3}, l = \overline{0,2}, \\
\alpha_2 = \alpha_2^{(1)} \text{ и } \alpha_2 = \alpha_2^{(2)}: \overline{N_{21}} = \overline{N_2} = \overline{M_{21}^{(k)}} = \overline{M_2^{(k)}} = w_l = 0 \text{ или} \\
\overline{N_2} = \overline{M_2^{(k)}} = u_0 = u_k = w_l = 0, k = \overline{1,3}, l = \overline{0,2},
\end{aligned}$$

жестко защемленный край

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} \text{ и } \alpha_1 = \alpha_1^{(2)}: u_0 = u_k = v_0 = v_k = w_l = 0 \text{ или} \\
u_0 = u_k = \overline{N_{12}} = \overline{M_{12}^{(k)}} = w_l = 0, k = \overline{1,3}, l = 1, 2, \\
\alpha_2 = \alpha_2^{(1)} \text{ и } \alpha_2 = \alpha_2^{(2)}: u_0 = u_k = v_0 = v_k = w_l = 0 \text{ или} \\
v_0 = v_k = \overline{N_{21}} = \overline{M_{21}^{(k)}} = w_l = 0, k = \overline{1,3}, l = 1, 2.
\end{aligned}$$

1.3. Алгоритм определения НДС оболочек

Подставляя компоненты напряжений из физических уравнений (1.3) с учетом формул (1.5) в выражения для обобщенных усилий (1.8), а затем полученные выражения в уравнения равновесия (1.10), находим систему дифференциальных уравнений в частных производных 22-го порядка относительно 11 обобщенных перемещений $u_k, v_k, w_l, k = \overline{0..3}; l = \overline{0..2}$. Решая сформулированную систему уравнений с учетом граничных условий (1.11), (1.12), получим искомые обобщенные перемещения.

Компоненты деформации оболочки определяются при подстановке найденных перемещений в геометрические соотношения (1.5). Тангенциальные напряжения получаются из формул (1.3).

Поперечные компоненты напряжения оболочки находятся из уравнений равновесия трехмерной теории упругости, что обеспечивает их полное удовлетворение

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 a_2 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 a_1 \sigma_{12}) + A_1 A_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (a_1 a_2 \sigma_{13}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} a_1 \sigma_{22} + \\
 & + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} a_2 \sigma_{21} + \frac{A_1 A_2}{R_1} a_2 \sigma_{31} = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 a_1 \sigma_{22}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 a_2 \sigma_{21}) + A_1 A_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (a_1 a_2 \sigma_{23}) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} a_2 \sigma_{11} + \\
 & + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} a_1 \sigma_{12} + \frac{A_1 A_2}{R_2} a_1 \sigma_{32} = 0, \\
 & A_1 A_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (a_1 a_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 a_2 \sigma_{31}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 a_1 \sigma_{32}) - \frac{A_1 A_2}{R_1} a_2 \sigma_{11} - \frac{A_1 A_2}{R_2} a_1 \sigma_{22} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Проинтегрировав уравнения (1.13) по толщине оболочки от $-h_1$ до ξ , находим выражения для определения поперечных напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} = & -\frac{1}{a_1^2 a_2} \int_{-h_1}^{\xi} \left[\frac{a_1 a_2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_1^2}{A_2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_2} + \frac{a_1^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \right. \\
& \left. + \frac{2a_1 a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} \right] d\xi + \frac{(a_1^2 a_2)_{\xi=-h_1}}{a_1^2 a_2} q_{13}^-, \\
\sigma_{23} = & -\frac{1}{a_1 a_2^2} \int_{-h_1}^{\xi} \left[\frac{a_1 a_2}{A_2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{a_2^2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_2^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \right. \\
& \left. + \frac{2a_1 a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{12} \right] d\xi + \frac{(a_1 a_2^2)_{\xi=-h_1}}{a_1 a_2^2} q_{23}^-, \\
\sigma_{33} = & -\frac{1}{a_1 a_2} \int_{-h_1}^{\xi} \left[\frac{a_2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_1}{A_2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \alpha_2} - \frac{a_2}{R_1} \sigma_{11} - \frac{a_1}{R_2} \sigma_{22} + \frac{a_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{13} + \right. \\
& \left. + \frac{a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{23} \right] d\xi + \frac{(a_1 a_2)_{\xi=-h_1}}{a_1 a_2} q_{33}^-.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

С помощью данного алгоритма напряженно-деформированное состояние оболочек полностью определяется. При этом удовлетворяются уравнения равновесия теории упругости во всех внутренних точках оболочек и выполняются граничные условия на всей поверхности оболочек.

1.4. Выводы по первой главе

1. Представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории оболочек, показана актуальность темы диссертации и намечены основные задачи исследования напряженно-деформированного состояния сферических и конических оболочек.

2. На основании представления перемещений полиномами по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории и вариационного принципа Лагранжа построены двумерные уравнения уточненной теории оболочек и сформулированы соответствующие граничные условия.

3. Разработан алгоритм определения НДС оболочек вращения, при котором

удовлетворяются уравнения равновесия трехмерной теории упругости во всех внутренних точках оболочки и выполняются граничные условия на лицевых и торцевых поверхностях.

ГЛАВА II. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

2.1. Основные уравнения уточненной теории сферических оболочек

Рассматривается сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ из изотропного материала, отнесенная к ортогональной системе координат θ, φ, ξ (рис. 1). Здесь θ представляет собой угол между осью оболочки и нормалью к поверхности оболочки, φ - угол, определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге, а ось ξ направлена по внешней нормали к срединной поверхности.

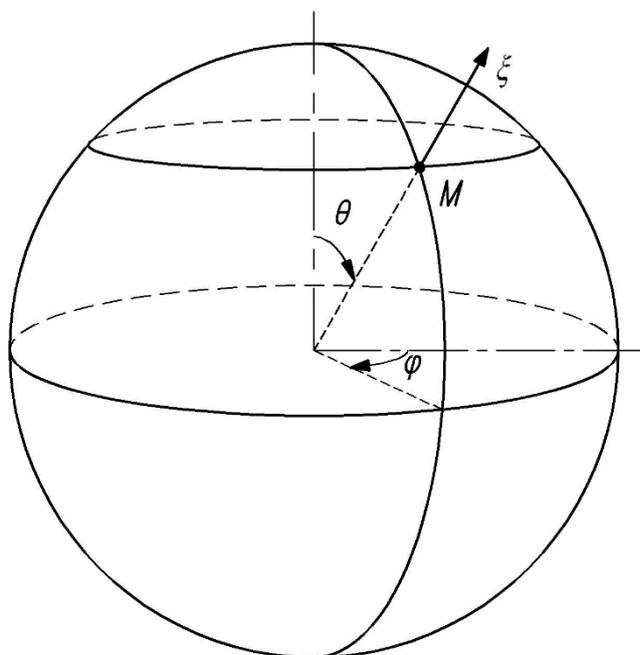


Рис. 2.1. Сферическая оболочка.

Для рассматриваемой оболочки имеют место следующие равенства:

$$\alpha_1 = \theta, \alpha_2 = \varphi, R_1 = R_2 = R, h_1 = h_2 = h, \quad (2.1)$$

$$A_1 = R, A_2 = R \sin \theta, a_1 = a_2 = 1 + r\xi, r = \frac{1}{R}.$$

Поставляя выражения (2.1) в (1.5), находим выражения для деформаций сферических оболочек

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{R + \xi} \left(\sum_{k=0}^3 \frac{\partial u_k}{\partial \theta} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 w_k \frac{\xi^k}{k!} \right), \\
e_{22} &= \frac{1}{R + \xi} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + u_k \cos \theta \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 w_k \frac{\xi^k}{k!} \right], \\
e_{33} &= \sum_{k=1}^2 w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}, \\
e_{12} &= \frac{1}{R + \xi} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \varphi} - v_k \cos \theta \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{\partial v_k}{\partial \theta} \frac{\xi^k}{k!} \right], \\
e_{13} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{R + \xi} \frac{\partial w_k}{\partial \theta} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{u_k}{R + \xi} \frac{\xi^k}{k!}, \\
e_{23} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{(R + \xi) \sin \theta} \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k}{R + \xi} \frac{\xi^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Из физических уравнений (1.3) с учетом (2.2) находятся выражения для напряжений сферических оболочек

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{1}{R + \xi} \left\{ \sum_{k=0}^3 \left[A_{i1} \frac{\partial u_k}{\partial \theta} + \frac{A_{i2}}{\sin \theta} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + u_k \cos \theta \right) \right] \frac{\xi^k}{k!} + (A_{i1} + A_{i2}) \sum_{k=0}^2 w_k \frac{\xi^k}{k!} + \right. \\
&\quad \left. + A_{i3} (R + \xi) \sum_{k=1}^2 w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} \right\}, i = \overline{1,3}, \\
\sigma_{12} &= \frac{A_{44}}{R + \xi} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \varphi} - v_k \cos \theta \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{\partial v_k}{\partial \theta} \frac{\xi^k}{k!} \right], \\
\sigma_{13} &= A_{55} \left[\sum_{k=0}^2 \frac{1}{R + \xi} \frac{\partial w_k}{\partial \theta} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{u_k}{R + \xi} \frac{\xi^k}{k!} \right], \\
\sigma_{23} &= A_{66} \left[\sum_{k=0}^2 \frac{1}{(R + \xi) \sin \theta} \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k}{R + \xi} \frac{\xi^k}{k!} \right].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Поставляя выражения (2.1) в (1.10), получим систему уравнений равновесия для сферической оболочки

$$\frac{\partial(N_1 \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \varphi} - N_2 \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} (r Q_{13} + P_1^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{\partial(M_1^{(k)} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{21}^{(k)}}{\partial \varphi} - M_2^{(k)} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} (r M_{13}^{(k)} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)}) = 0, k = \overline{1,3},$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial(N_{12} \sin \theta)}{\partial \theta} + N_{21} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} (rQ_{23} + P_2^{(0)}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(M_{12}^{(k)} \sin \theta)}{\partial \theta} + M_{21}^{(k)} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} (rM_{23}^{(k)} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)}) = 0, k = \overline{1, 3},$$

$$\frac{\partial(Q_{13} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial \varphi} - \frac{\sin \theta}{r} (rN_1 + rN_2 - P_3^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{\partial(M_{13}^{(k)} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{23}^{(k)}}{\partial \varphi} - \frac{\sin \theta}{r} (rM_1^{(k)} + rM_2^{(k)} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)}) = 0, k = \overline{1, 2}.$$

Подставляя выражения для обобщенных усилий (1.8) в уравнения равновесия (2.4) с учетом формул (1.4), (2.1), (2.3), находим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{\partial}{\partial \theta} + H_{11}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{22}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(H_2^{iv_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + H_{12}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) v_k + \\ & + \sum_{n=0}^2 H_1^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial \theta} = H^{iq_{13}^+} q_{13}^+ - H^{iq_{13}^-} q_{13}^-, \quad i = \overline{1, 4}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(H_2^{iu_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + H_{12}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(H_0^{iv_k} + H_1^{iv_k} \frac{\partial}{\partial \theta} + H_{11}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{22}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k + \\ & + \sum_{n=0}^2 H_2^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = H^{iq_{23}^+} q_{23}^+ - H^{iq_{23}^-} q_{23}^-, \quad i = \overline{5, 8}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 H_2^{iv_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \sum_{n=0}^2 \left(H_0^{iw_n} + H_1^{iw_n} \frac{\partial}{\partial \theta} + H_{11}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + H_{22}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n = H^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - H^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9, 11}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь переменные коэффициенты H^i представляют собой функции, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала оболочки и угла θ , их выражения приведены в Приложении I.

Граничные условия (1.11), (1.12) представляются в виде

- для краев $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \bar{u}_0 \vee \frac{Ehr}{15(2\mu-1)(1+\mu)} \left[6(h^4 r^4 - 5) \left(-(\mu-1) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \mu ctg \theta u_0 + w_0 \right) + \right. \\
&+ 6h^4 r^3 \left((\mu-1) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \mu ctg \theta u_1 - \left(1 + \frac{5\mu}{6h^4 r^4} \right) w_1 \right) + \\
&+ h^2 (3h^2 r^2 - 5) \left(-(\mu-1) \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \mu ctg \theta u_2 + \left(1 - \frac{10\mu}{3h^2 r^2 - 5} \right) w_2 \right) + \\
&\left. + rh^4 \left((\mu-1) \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \mu ctg \theta u_3 \right) \right] = \bar{N}_1; \\
u_1 &= \bar{u}_1 \vee \frac{Ehr}{15(2\mu-1)(1+\mu)} \left[10h^2 \left((\mu-1) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \mu ctg \theta u_1 - (1+\mu) w_1 \right) + \right. \\
&\left. - \frac{10h^2 \mu}{r} w_2 + h^4 \left((\mu-1) \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \mu ctg \theta u_3 \right) \right] = \bar{M}_1^{(1)}; \\
u_2 &= \bar{u}_2 \vee \frac{Ehr}{35(2\mu-1)(1+\mu)} \left[\frac{5}{3} h^2 (3h^4 r^4 - 7) \left(-(\mu-1) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \mu ctg \theta u_0 + w_0 \right) + \right. \\
&+ 5h^6 r^3 \left((\mu-1) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \mu ctg \theta u_1 - \left(1 + \frac{7\mu}{3h^4 r^4} \right) w_1 \right) + \\
&+ \frac{1}{2} h^4 (5h^2 r^2 - 7) \left(-(\mu-1) \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \mu ctg \theta u_2 + \left(1 - \frac{14\mu}{5h^2 r^2 - 7} \right) w_2 \right) + \\
&\left. + \frac{5}{6} rh^6 \left((\mu-1) \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \mu ctg \theta u_3 \right) \right] = \bar{M}_1^{(2)}; \\
u_3 &= \bar{u}_3 \vee \frac{Ehr}{35(2\mu-1)(1+\mu)} \left[\frac{7}{3} h^4 \left((\mu-1) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \mu ctg \theta u_1 - (1+\mu) w_1 \right) + \right. \\
&\left. - \frac{7h^4 \mu}{3r} w_2 + \frac{5}{18} h^6 \left((\mu-1) \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \mu ctg \theta u_3 \right) \right] = \bar{M}_1^{(3)}; \\
v_0 &= \bar{v}_0 \vee \frac{Ehr}{30(1+\mu)} \left[6(h^4 r^4 - 5) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + ctg \theta v_0 \right) + \right. \\
&+ 6h^4 r^3 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - ctg \theta v_1 \right) + h^2 (3h^2 r^2 - 5) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + ctg \theta v_2 \right) + \\
&\left. + rh^4 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - ctg \theta v_3 \right) \right] = \bar{N}_{12};
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$v_1 = \overline{v_1} \vee \frac{Eh^3 r}{30(1+\mu)} \left[10 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \text{ctg} \theta v_1 \right) + h^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \text{ctg} \theta v_3 \right) \right] = \overline{M_{12}^{(1)}};$$

$$v_2 = \overline{v_2} \vee \frac{Ehr}{30(1+\mu)} \left[\frac{5}{7} h^2 (3h^4 r^4 - 7) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta v_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{15}{7} h^6 r^3 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \text{ctg} \theta v_1 \right) + \frac{3}{14} h^4 (5h^2 r^2 - 7) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta v_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{5}{14} rh^6 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - \text{ctg} \theta v_3 \right) \right] = \overline{M_{12}};$$

$$v_3 = \overline{v_3}^* \vee \frac{Eh^5 r}{30(1+\mu)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \text{ctg} \theta v_1 + \frac{5}{42} h^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \text{ctg} \theta v_3 \right) \right] = M_{21}^{*(3)};$$

$$w_0 = \overline{w_0} \vee \frac{Ehr}{5(1+\mu)} \left[(h^4 r^4 - 5) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + u_0 \right) + h^4 r^3 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - \left(1 - \frac{5}{h^4 r^4} \right) u_1 \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \frac{h^2 (3h^2 r^2 - 5)}{\sin \theta} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + \frac{1}{6} \frac{h^2 (3h^2 r^2 + 5)}{\sin \theta} u_2 - \frac{1}{6} \frac{h^2 (h^2 r^2 - 5)}{r} u_3 \right] = \overline{Q_{13}};$$

$$w_1 = \overline{w_1} \vee \frac{Ehr}{15(1+\mu)} \left[\frac{5h^2}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \frac{5h^2}{r} u_2 + h^4 u_3 \right] = \overline{M_{13}^{(1)}};$$

$$w_2 = \overline{w_2} \vee \frac{Ehr}{15(1+\mu)} \left[\frac{5}{14} h^2 (3h^4 r^4 - 7) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + u_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{15}{14} h^6 r^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - \frac{5}{14} \frac{h^2 (3h^4 r^4 - 7)}{r} u_1 - \frac{3}{28} h^4 (5h^2 r^2 - 7) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{3}{28} h^4 (5h^2 r^2 + 7) u_2 - \frac{1}{28} \frac{h^4 (5h^2 r^2 - 21)}{r} u_3 \right] = \overline{M_{13}^{(2)}};$$

- для краев $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \bar{u}_0 \vee \frac{Ehr}{15(2\mu-1)(1+\mu)} \left[6(h^4 r^4 - 5) \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - (\mu-1) \text{ctg} \theta u_0 + w_0 \right) + \right. \\
&+ 6h^4 r^3 \left(-\mu \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + (\mu-1) \text{ctg} \theta u_1 - \left(1 + \frac{5\mu}{6h^4 r^4} \right) w_1 \right) + \\
&+ h^2 (3h^2 r^2 - 5) \left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} - (\mu-1) \text{ctg} \theta u_2 + \left(1 - \frac{10\mu}{3h^2 r^2 - 5} \right) w_2 \right) + \\
&\left. + rh^4 \left(-\mu \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + (\mu-1) \text{ctg} \theta u_3 \right) \right] = \bar{N}_{21}; \\
u_1 &= \bar{u}_1 \vee \frac{Eh^3 r}{15(2\mu-1)(1+\mu)} \left[10 \left(-\mu \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + (\mu-1) \text{ctg} \theta u_1 - (1+\mu) w_1 \right) + \right. \\
&\left. - \frac{10\mu}{r} w_2 + h^2 \left(-\mu \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + (\mu-1) \text{ctg} \theta u_3 \right) \right] = \bar{M}_{21}^{(1)}; \tag{2.7} \\
u_2 &= \bar{u}_2 \vee \frac{Ehr}{35(2\mu-1)(1+\mu)} \left[\frac{5}{3} h^2 (3h^4 r^4 - 7) \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - (\mu-1) \text{ctg} \theta u_0 + w_0 \right) + \right. \\
&+ 5h^6 r^3 \left(-\mu \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + (\mu-1) \text{ctg} \theta u_1 - \left(1 + \frac{7\mu}{3h^4 r^4} \right) w_1 \right) + \\
&+ \frac{1}{2} h^4 (5h^2 r^2 - 7) \left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} - (\mu-1) \text{ctg} \theta u_2 + \left(1 - \frac{14\mu}{5h^2 r^2 - 7} \right) w_2 \right) + \\
&\left. + \frac{5}{6} rh^6 \left(-\mu \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + (\mu-1) \text{ctg} \theta u_3 \right) \right] = \bar{M}_{21}^{(2)}; \\
u_3 &= \bar{u}_3 \vee \frac{Ehr}{35(2\mu-1)(1+\mu)} \left[\frac{7}{3} h^4 \left(-\mu \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + (\mu-1) \text{ctg} \theta u_1 - (1+\mu) w_1 \right) + \right. \\
&\left. - \frac{7h^4 \mu}{3r} w_2 + \frac{5}{18} h^6 \left(-\mu \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{(\mu-1)}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + (\mu-1) \text{ctg} \theta u_3 \right) \right] = \bar{M}_{21}^{(3)}; \\
v_0 &= \bar{v}_0 \vee \frac{Ehr}{30(1+\mu)} \left[6(h^4 r^4 - 5) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta v_0 \right) + \right. \\
&+ 6h^4 r^3 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \text{ctg} \theta v_1 \right) + h^2 (3h^2 r^2 - 5) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta v_2 \right) + \\
&\left. + rh^4 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \text{ctg} \theta v_3 \right) \right] = \bar{N}_2;
\end{aligned}$$

$$v_1 = \overline{v_1} \vee \frac{Eh^3 r}{30(1+\mu)} \left[10 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta v_1 \right) + h^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta v_3 \right) \right] = \overline{M_2^{(1)}};$$

$$v_2 = \overline{v_2} \vee \frac{Ehr}{30(1+\mu)} \left[\frac{5}{7} h^2 (3h^4 r^4 - 7) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta v_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{15}{7} h^6 r^3 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta v_1 \right) + \frac{3}{14} h^4 (5h^2 r^2 - 7) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta v_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{5}{14} rh^6 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta v_3 \right) \right] = \overline{M_2^{(2)}};$$

$$v_3 = \overline{v_3} \vee \frac{Eh^5 r}{30(1+\mu)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta v_1 + \frac{5}{42} h^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta v_3 \right) \right] = \overline{M_2^{(3)}};$$

$$w_0 = \overline{w_0} \vee \frac{Ehr}{5(1+\mu)} \left[(h^4 r^4 - 5) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + v_0 \right) + h^4 r^3 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} - \left(1 - \frac{5}{h^4 r^4} \right) v_1 \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \frac{h^2 (3h^2 r^2 - 5)}{\sin \theta} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{6} \frac{h^2 (3h^2 r^2 + 5)}{\sin \theta} v_2 - \frac{1}{6} \frac{h^2 (h^2 r^2 - 5)}{r} v_3 \right] = \overline{Q_{23}};$$

$$w_1 = \overline{w_1} \vee \frac{Ehr}{15(1+\mu)} \left[\frac{5h^2}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \frac{5h^2}{r} v_2 + h^4 v_3 \right] = \overline{M_{23}^{(1)}};$$

$$w_2 = \overline{w_2} \vee \frac{Ehr}{15(1+\mu)} \left[\frac{5}{14} h^2 (3h^4 r^4 - 7) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + v_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{15}{14} h^6 r^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} - \frac{5}{14} \frac{h^2 (3h^4 r^4 - 7)}{r} v_1 - \frac{3}{28} h^4 (5h^2 r^2 - 7) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{3}{28} h^4 (5h^2 r^2 + 7) v_2 - \frac{1}{28} \frac{h^4 (5h^2 r^2 - 21)}{r} v_3 \right] = \overline{M_{23}^{(2)}}.$$

2.2. Преобразование двумерных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим два случая: оболочка находится под действием симметричной и несимметричной нагрузок.

В первом случае компоненты НДС оболочки не зависят от угла φ и перемещения в окружном направлении $v_k = 0, k = \overline{0, 3}$, что позволяет из (2.5)

получить следующую систему:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{d}{d\theta} + H_{11}^{iu_m} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) u_m + \sum_{n=0}^2 H_1^{iw_n} \frac{dw_n}{d\theta} = 0, \quad i = \overline{1,4}, \\
 & \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{d}{d\theta} \right) u_m + \sum_{n=0}^2 \left(H_0^{iw_n} + H_1^{iw_n} \frac{d}{d\theta} + H_{11}^{iw_n} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) w_n = \\
 & = H^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - H^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9,11}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Если оболочка находится под действием несимметричной нагрузки, приведем систему уравнений (2.5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов. Для этой цели представим внешние нагрузки и перемещения в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 q_{13}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)13}^{\pm}(\theta) \cos(z\varphi), \\
 q_{23}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)23}^{\pm}(\theta) \sin(z\varphi), \\
 q_{33}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)33}^{\pm}(\theta) \cos(z\varphi), \\
 u_m(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} U_{mz}(\theta) \cos(z\varphi), \quad m = \overline{0,3}, \\
 v_k(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} V_{kz}(\theta) \sin(z\varphi), \quad k = \overline{0,3}, \\
 w_n(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} W_{nz}(\theta) \cos(z\varphi), \quad n = \overline{0,2}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Подставляя разложения (2.9) в систему (2.5) и сравнивая коэффициенты тригонометрических рядов в левых и правых частях, находим

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} - z^2 H_{22}^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{d}{d\theta} + H_{11}^{iu_m} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 \left(H_2^{iv_k} + H_{12}^{iv_k} \frac{d}{d\theta} \right) V_{kz} + \\
& + \sum_{n=0}^2 H_1^{iw_n} \frac{dW_{nz}}{d\theta} = H^{iq_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - H^{iq_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1,4}; \\
& z \sum_{m=0}^3 \left(-H_2^{iu_m} - H_{12}^{iu_m} \frac{d}{d\theta} \right) U_{mz} + \sum_{k=0}^3 \left(H_0^{iv_k} - z^2 H_{22}^{iv_k} + H_1^{iv_k} \frac{d}{d\theta} + H_{11}^{iv_k} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) V_{kz} - \\
& - z \sum_{n=0}^2 H_2^{iw_n} W_{nz} = H^{iq_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - H^{iq_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5,8}; \\
& \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{d}{d\theta} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 H_2^{iv_k} V_{kz} + \sum_{n=0}^2 \left(H_0^{iw_n} - z^2 H_{22}^{iw_n} + H_1^{iw_n} \frac{d}{d\theta} + \right. \\
& \left. + H_{11}^{iw_n} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) W_{nz} = H^{iq_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - H^{iq_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9,11}, z = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Системы (2.8) и (2.10) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения. Для решения указанных систем предлагается использовать метод конечных разностей, который имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами. Во – первых, он позволяет решать систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами; во – вторых, достаточно мелкая разбивка оболочки в ее краевой зоне дает возможность учесть дополнительные НДС типа “пограничный слой”; в – третьих, правые части системы уравнений (2.8) и (2.10), соответствующие нагрузочным членам, могут представлять собой не только аналитические функции, но и функции ступенчатого вида.

2.3. Методика и алгоритм решения сформулированной краевой задачи

В качестве примера рассматривается оболочка, жестко заземленная по двум краям $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$. Тогда граничные условия на этих краях записываются в виде

$$u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2.$$

Уравнения (2.8) и (2.10) решаются конечно-разностным методом [67, 68]. Производные 1-го и 2-го порядков аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2s} + O(s^2); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{s^2} + O(s^2).$$

Из уравнений (2.8) получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(\left(\frac{H_{11}^{iu_m}}{s^2} - \frac{H_1^{iu_m}}{2s} \right) u_m^{j-1} + \left(\frac{-2H_{11}^{iu_m}}{s^2} + H_0^{iu_m} \right) u_m^j + \left(\frac{H_{11}^{iu_m}}{s^2} + \frac{H_1^{iu_m}}{2s} \right) u_m^{j+1} \right) + \\
& + \sum_{n=0}^2 \left(\frac{-H_1^{iw_n}}{2s} w_n^{j-1} + \frac{H_1^{iw_n}}{2s} w_n^{j+1} \right) = 0, \quad i = \overline{1,4}; \\
& \sum_{m=0}^3 \left(\frac{-H_1^{iu_m}}{2s} u_m^{j-1} + H_0^{iu_m} u_m^j + \frac{H_1^{iu_m}}{2s} u_m^{j+1} \right) + \\
& + \sum_{n=0}^2 \left(\left(\frac{H_{11}^{iw_n}}{s^2} - \frac{H_1^{iw_n}}{2s} \right) w_n^{j-1} + \left(\frac{-2H_{11}^{iw_n}}{s^2} + H_0^{iw_n} \right) w_n^j + \left(\frac{H_{11}^{iw_n}}{s^2} + \frac{H_1^{iw_n}}{2s} \right) w_n^{j+1} \right) = \\
& = H^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - H^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9,11}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{0,3}, \quad n = \overline{0,2}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Аналогично система (2.10) приводится к виду

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(\left(\frac{H_{11}^{iu_m}}{s^2} - \frac{H_1^{iu_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j-1} + \left(\frac{-2H_{11}^{iu_m}}{s^2} + H_0^{iu_m} - z^2 H_{22}^{iu_m} \right) U_{mz}^j + \left(\frac{H_{11}^{iu_m}}{s^2} + \frac{H_1^{iu_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j+1} \right) + \\
& + \sum_{k=0}^3 \left(\frac{-zH_{12}^{iv_k}}{2s} V_{kz}^{j-1} + zH_2^{iv_k} V_{kz}^j + \frac{zH_{12}^{iv_k}}{2s} V_{kz}^{j+1} \right) + \\
& + \sum_{n=0}^2 \left(\frac{-H_1^{iw_n}}{2s} W_{nz}^{j-1} + \frac{H_1^{iw_n}}{2s} W_{nz}^{j+1} \right) = H^{iq_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - H^{iq_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1,4}; \\
& \sum_{m=0}^3 \left(\frac{zH_{12}^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} - zH_2^{iu_m} U_{mz}^j - \frac{zH_{12}^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \\
& + \sum_{k=0}^3 \left(\left(\frac{H_{11}^{iv_m}}{s^2} - \frac{H_1^{iv_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j-1} + \left(\frac{-2H_{11}^{iv_m}}{s^2} + H_0^{iv_m} - z^2 H_{22}^{iv_m} \right) V_{kz}^j + \left(\frac{H_{11}^{iv_m}}{s^2} + \frac{H_1^{iv_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j+1} \right) - \\
& - \sum_{n=0}^2 zH_2^{iw_n} W_{nz}^j = H^{iq_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - H^{iq_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5,8}; \\
& \sum_{m=0}^3 \left(\frac{-H_1^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} + H_0^{iu_m} U_{mz}^j + \frac{H_1^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \sum_{k=0}^3 zH_2^{iv_m} V_{kz}^j + \\
& + \sum_{n=0}^2 \left(\left(\frac{H_{11}^{iw_n}}{s^2} - \frac{H_1^{iw_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j-1} + \left(\frac{-2H_{11}^{iw_n}}{s^2} + H_0^{iw_n} - z^2 H_{22}^{iw_n} \right) W_{nz}^j + \left(\frac{H_{11}^{iw_n}}{s^2} + \frac{H_1^{iw_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j+1} \right) = \\
& = H^{iq_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - H^{iq_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9,11}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{0,3}, \quad k = \overline{0,3}, \quad n = \overline{0,2}, \quad z = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где s , $(N+1)$ – соответственно шаг конечно-разностной схемы и число узлов.

Системы (2.11) и (2.12) представляют собой системы линейных алгебраических уравнений и решаются методом матричной прогонки [67].

Представим эти системы в виде следующих векторно-матричных уравнений:

$$A_j X_{j-1} + B_j X_j + C_j X_{j+1} = F_j, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$X_0 = X_N = \Theta.$$

Здесь Θ - нулевая матрица;

$X_j, F_j, j = \overline{1, N-1}$ - векторы искомым перемещений и векторы правых частей;

$A_j, B_j, C_j, j = \overline{1, N-1}$ - матрицы коэффициентов.

Для системы (2.11) имеем

$$X_j = [u_0^j, w_0^j, u_1^j, w_1^j, u_2^j, w_2^j, u_3^j]^T,$$

$$F_j = [0, 0, 0, 0, H^{9q_{33}^+} q_{33}^+ - H^{9q_{33}^-} q_{33}^-, H^{10q_{33}^+} q_{33}^+ - H^{10q_{33}^-} q_{33}^-, H^{11q_{33}^+} q_{33}^+ - H^{11q_{33}^-} q_{33}^-]^T;$$

A_j, B_j, C_j , - матрицы коэффициентов размером 7×7 , для которых справедливы

представления

$$A_j := \begin{bmatrix} \frac{H_{11}^{1u_0}}{s^2} - \frac{H_1^{1u_0}}{2s}, & \frac{-H_1^{1w_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{1u_1}}{s^2} - \frac{H_1^{1u_1}}{2s}, & \frac{-H_1^{1w_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{1u_2}}{s^2} - \frac{H_1^{1u_2}}{2s}, & \frac{-H_1^{1w_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{1u_3}}{s^2} - \frac{H_1^{1u_3}}{2s} \\ \frac{H_{11}^{2u_0}}{s^2} - \frac{H_1^{2u_0}}{2s}, & \frac{-H_1^{2w_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{2u_1}}{s^2} - \frac{H_1^{2u_1}}{2s}, & \frac{-H_1^{2w_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{2u_2}}{s^2} - \frac{H_1^{2u_2}}{2s}, & \frac{-H_1^{2w_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{2u_3}}{s^2} - \frac{H_1^{2u_3}}{2s} \\ \frac{H_{11}^{3u_0}}{s^2} - \frac{H_1^{3u_0}}{2s}, & \frac{-H_1^{3w_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{3u_1}}{s^2} - \frac{H_1^{3u_1}}{2s}, & \frac{-H_1^{3w_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{3u_2}}{s^2} - \frac{H_1^{3u_2}}{2s}, & \frac{-H_1^{3w_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{3u_3}}{s^2} - \frac{H_1^{3u_3}}{2s} \\ \frac{H_{11}^{4u_0}}{s^2} - \frac{H_1^{4u_0}}{2s}, & \frac{-H_1^{4w_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{4u_1}}{s^2} - \frac{H_1^{4u_1}}{2s}, & \frac{-H_1^{4w_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{4u_2}}{s^2} - \frac{H_1^{4u_2}}{2s}, & \frac{-H_1^{4w_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{4u_3}}{s^2} - \frac{H_1^{4u_3}}{2s} \\ \frac{-H_1^{9u_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{9w_0}}{s^2} - \frac{H_1^{9w_0}}{2s}, & \frac{-H_1^{9u_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{9w_1}}{s^2} - \frac{H_1^{9w_1}}{2s}, & \frac{-H_1^{9u_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{9w_2}}{s^2} - \frac{H_1^{9w_2}}{2s}, & \frac{-H_1^{9u_3}}{2s} \\ \frac{-H_1^{10u_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{10w_0}}{s^2} - \frac{H_1^{10w_0}}{2s}, & \frac{-H_1^{10u_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{10w_1}}{s^2} - \frac{H_1^{10w_1}}{2s}, & \frac{-H_1^{10u_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{10w_2}}{s^2} - \frac{H_1^{10w_2}}{2s}, & \frac{-H_1^{10u_3}}{2s} \\ \frac{-H_1^{11u_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{11w_0}}{s^2} - \frac{H_1^{11w_0}}{2s}, & \frac{-H_1^{11u_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{11w_1}}{s^2} - \frac{H_1^{11w_1}}{2s}, & \frac{-H_1^{11u_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{11w_2}}{s^2} - \frac{H_1^{11w_2}}{2s}, & \frac{-H_1^{11u_3}}{2s} \end{bmatrix},$$

$$B_j := \begin{bmatrix} \frac{-2H_{11}^{1u_0}}{s^2} + H_0^{1u_0}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{1u_1}}{s^2} + H_0^{1u_1}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{1u_2}}{s^2} + H_0^{1u_2}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{1u_3}}{s^2} + H_0^{1u_3} \\ \frac{-2H_{11}^{2u_0}}{s^2} + H_0^{2u_0}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{2u_1}}{s^2} + H_0^{2u_1}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{2u_2}}{s^2} + H_0^{2u_2}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{2u_3}}{s^2} + H_0^{2u_3} \\ \frac{-2H_{11}^{3u_0}}{s^2} + H_0^{3u_0}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{3u_1}}{s^2} + H_0^{3u_1}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{3u_2}}{s^2} + H_0^{3u_2}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{3u_3}}{s^2} + H_0^{3u_3} \\ \frac{-2H_{11}^{4u_0}}{s^2} + H_0^{4u_0}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{4u_1}}{s^2} + H_0^{4u_1}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{4u_2}}{s^2} + H_0^{4u_2}, & 0, & \frac{-2H_{11}^{4u_3}}{s^2} + H_0^{4u_3} \\ H_0^{9u_0}, & \frac{-2H_{11}^{9w_0}}{s^2} + H_0^{9w_0}, & H_0^{9u_1}, & \frac{-2H_{11}^{9w_1}}{s^2} + H_0^{9w_1}, & H_0^{9u_2}, & \frac{-2H_{11}^{9w_2}}{s^2} + H_0^{9w_2}, & H_0^{9u_3} \\ H_0^{10u_0}, & \frac{-2H_{11}^{10w_0}}{s^2} + H_0^{10w_0}, & H_0^{10u_1}, & \frac{-2H_{11}^{10w_1}}{s^2} + H_0^{10w_1}, & H_0^{10u_2}, & \frac{-2H_{11}^{10w_2}}{s^2} + H_0^{10w_2}, & H_0^{10u_3} \\ H_0^{11u_0}, & \frac{-2H_{11}^{11w_0}}{s^2} + H_0^{11w_0}, & H_0^{11u_1}, & \frac{-2H_{11}^{11w_1}}{s^2} + H_0^{11w_1}, & H_0^{11u_2}, & \frac{-2H_{11}^{11w_2}}{s^2} + H_0^{11w_2}, & H_0^{11u_3} \end{bmatrix},$$

$$C_j := \begin{bmatrix} \frac{H_{11}^{1u_0}}{s^2} + \frac{H_1^{1u_0}}{2s}, & \frac{H_1^{1w_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{1u_1}}{s^2} + \frac{H_1^{1u_1}}{2s}, & \frac{H_1^{1w_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{1u_2}}{s^2} + \frac{H_1^{1u_2}}{2s}, & \frac{H_1^{1w_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{1u_3}}{s^2} + \frac{H_1^{1u_3}}{2s} \\ \frac{H_{11}^{2u_0}}{s^2} + \frac{H_1^{2u_0}}{2s}, & \frac{H_1^{2w_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{2u_1}}{s^2} + \frac{H_1^{2u_1}}{2s}, & \frac{H_1^{2w_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{2u_2}}{s^2} + \frac{H_1^{2u_2}}{2s}, & \frac{H_1^{2w_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{2u_3}}{s^2} + \frac{H_1^{2u_3}}{2s} \\ \frac{H_{11}^{3u_0}}{s^2} + \frac{H_1^{3u_0}}{2s}, & \frac{H_1^{3w_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{3u_1}}{s^2} + \frac{H_1^{3u_1}}{2s}, & \frac{H_1^{3w_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{3u_2}}{s^2} + \frac{H_1^{3u_2}}{2s}, & \frac{H_1^{3w_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{3u_3}}{s^2} + \frac{H_1^{3u_3}}{2s} \\ \frac{H_{11}^{4u_0}}{s^2} + \frac{H_1^{4u_0}}{2s}, & \frac{H_1^{4w_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{4u_1}}{s^2} + \frac{H_1^{4u_1}}{2s}, & \frac{H_1^{4w_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{4u_2}}{s^2} + \frac{H_1^{4u_2}}{2s}, & \frac{H_1^{4w_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{4u_3}}{s^2} + \frac{H_1^{4u_3}}{2s} \\ \frac{H_1^{9u_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{9w_0}}{s^2} + \frac{H_1^{9w_0}}{2s}, & \frac{H_1^{9u_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{9w_1}}{s^2} + \frac{H_1^{9w_1}}{2s}, & \frac{H_1^{9u_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{9w_2}}{s^2} + \frac{H_1^{9w_2}}{2s}, & \frac{H_1^{9u_3}}{2s} \\ \frac{H_1^{10u_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{10w_0}}{s^2} + \frac{H_1^{10w_0}}{2s}, & \frac{H_1^{10u_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{10w_1}}{s^2} + \frac{H_1^{10w_1}}{2s}, & \frac{H_1^{10u_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{10w_2}}{s^2} + \frac{H_1^{10w_2}}{2s}, & \frac{H_1^{10u_3}}{2s} \\ \frac{H_1^{11u_0}}{2s}, & \frac{H_{11}^{11w_0}}{s^2} + \frac{H_1^{11w_0}}{2s}, & \frac{H_1^{11u_1}}{2s}, & \frac{H_{11}^{11w_1}}{s^2} + \frac{H_1^{11w_1}}{2s}, & \frac{H_1^{11u_2}}{2s}, & \frac{H_{11}^{11w_2}}{s^2} + \frac{H_1^{11w_2}}{2s}, & \frac{H_1^{11u_3}}{2s} \end{bmatrix}.$$

Аналогично для системы (2.12) имеем следующие матрицы:

$$\begin{aligned}
X_j &= \left[U_{0z}^j, V_{0z}^j, W_{0z}^j, U_{1z}^j, V_{1z}^j, W_{1z}^j, U_{2z}^j, V_{2z}^j, W_{2z}^j, U_{3z}^j, V_{2z}^j \right]^T, \\
F_j &= \left[H^{1q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - H^{1q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, H^{2q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - H^{2q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, H^{3q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - H^{3q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \right. \\
&, H^{4q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - H^{4q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, H^{5q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - H^{5q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, H^{6q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - H^{6q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \\
&, H^{7q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - H^{7q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, H^{8q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - H^{8q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, H^{9q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - H^{9q_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \\
&, \left. H^{10q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - H^{10q_{33}^-} Q_{(z)33}^-, H^{11q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - H^{11q_{33}^-} Q_{(z)33}^- \right]^T;
\end{aligned}$$

A_i, B_i, C_i - квадратные матрицы коэффициентов размером 11×11 , определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_i &= \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,11} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11,1} & A_{11,2} & A_{11,3} & \dots & A_{11,11} \end{bmatrix}, & B_i &= \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \dots & B_{1,11} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \dots & B_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{11,1} & B_{11,2} & B_{11,3} & \dots & B_{11,11} \end{bmatrix}, \\
C_i &= \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & \dots & C_{1,11} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & \dots & C_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{11,1} & C_{11,2} & C_{11,3} & \dots & C_{11,11} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты матриц определяются равенствами

$$\begin{aligned}
A_{i,1} &= \frac{H_{11}^{iu_0}}{s^2} - \frac{H_1^{iu_0}}{2s}, A_{i,2} = -\frac{zH_{12}^{iv_0}}{2s}, A_{i,3} = -\frac{H_1^{iw_0}}{2s}, A_{i,4} = \frac{H_{11}^{iu_1}}{s^2} - \frac{H_1^{iu_1}}{2s}, A_{i,5} = -\frac{zH_{12}^{iv_1}}{2s}, \\
A_{i,6} &= -\frac{H_1^{iw_1}}{2s}, A_{i,7} = \frac{H_{11}^{iu_2}}{s^2} - \frac{H_1^{iu_2}}{2s}, A_{i,8} = -\frac{zH_{12}^{iv_2}}{2s}, A_{i,9} = -\frac{H_1^{iw_2}}{2s}, A_{i,10} = \frac{H_{11}^{iu_3}}{s^2} - \frac{H_1^{iu_3}}{2s}, \\
A_{i,11} &= -\frac{zH_{12}^{iv_3}}{2s}, i = \overline{1,4}; \\
A_{i,1} &= \frac{zH_{12}^{iu_0}}{2s}, A_{i,2} = \frac{H_{11}^{iv_0}}{s^2} - \frac{H_1^{iv_0}}{2s}, A_{i,3} = 0, A_{i,4} = \frac{zH_{12}^{iu_1}}{2s}, A_{i,5} = \frac{H_{11}^{iv_1}}{s^2} - \frac{H_1^{iv_1}}{2s}, A_{i,6} = 0, \\
A_{i,7} &= \frac{zH_{12}^{iu_2}}{2s}, A_{i,8} = \frac{H_{11}^{iv_2}}{s^2} - \frac{H_1^{iv_2}}{2s}, A_{i,9} = 0, A_{i,10} = \frac{zH_{12}^{iu_3}}{2s}, A_{i,11} = \frac{H_{11}^{iv_3}}{s^2} - \frac{H_1^{iv_3}}{2s}, i = \overline{5,8}; \\
A_{i,1} &= \frac{-H_1^{iu_0}}{2s}, A_{i,2} = 0, A_{i,3} = \frac{H_{11}^{iw_0}}{s^2} - \frac{H_1^{iw_0}}{2s}, A_{i,4} = \frac{-H_1^{iu_1}}{2s}, A_{i,5} = 0, A_{i,6} = \frac{H_{11}^{iw_1}}{s^2} - \frac{H_1^{iw_1}}{2s}, \\
A_{i,7} &= \frac{-H_1^{iu_2}}{2s}, A_{i,8} = 0, A_{i,9} = \frac{H_{11}^{iw_2}}{s^2} - \frac{H_1^{iw_2}}{2s}, A_{i,10} = \frac{-H_1^{iu_3}}{2s}, A_{i,11} = 0, i = \overline{9,11};
\end{aligned}$$

$$B_{i,1} = \frac{-2H_{11}^{iu_0}}{s^2} + H_0^{iu_0} - z^2 H_{22}^{iu_0}, B_{i,2} = zH_2^{iv_0}, B_{i,3} = 0, B_{i,4} = \frac{-2H_{11}^{iu_1}}{s^2} + H_0^{iu_1} - z^2 H_{22}^{iu_1},$$

$$B_{i,5} = zH_2^{iv_1}, B_{i,6} = 0, B_{i,7} = \frac{-2H_{11}^{iu_2}}{s^2} + H_0^{iu_2} - z^2 H_{22}^{iu_2}, B_{i,8} = zH_2^{iv_2}, B_{i,9} = 0,$$

$$B_{i,10} = \frac{-2H_{11}^{iu_3}}{s^2} + H_0^{iu_3} - z^2 H_{22}^{iu_3}, B_{i,11} = zH_2^{iv_3}, i = \overline{1,4};$$

$$B_{i,1} = -zH_2^{iu_0}, B_{i,2} = \frac{-2H_{11}^{iv_0}}{s^2} + H_0^{iv_0} - z^2 H_{22}^{iv_0}, B_{i,3} = -zH_2^{iw_0}, B_{i,4} = -zH_2^{iu_1},$$

$$B_{i,5} = \frac{-2H_{11}^{iv_1}}{s^2} + H_0^{iv_1} - z^2 H_{22}^{iv_1}, B_{i,6} = -zH_2^{iw_1}, B_{i,7} = -zH_2^{iu_2},$$

$$B_{i,8} = \frac{-2H_{11}^{iv_2}}{s^2} + H_0^{iv_2} - z^2 H_{22}^{iv_2}, B_{i,9} = -zH_2^{iw_2}, B_{i,10} = -zH_2^{iu_3},$$

$$B_{i,11} = \frac{-2H_{11}^{iv_3}}{s^2} + H_0^{iv_3} - z^2 H_{22}^{iv_3}, i = \overline{5,8};$$

$$B_{i,1} = H_0^{iu_0}, B_{i,2} = zH_2^{iv_0}, B_{i,3} = \frac{-2H_{11}^{iw_0}}{s^2} + H_0^{iw_0} - z^2 H_{22}^{iw_0}, B_{i,4} = H_0^{iu_1},$$

$$B_{i,5} = zH_2^{iv_1}, B_{i,6} = \frac{-2H_{11}^{iw_1}}{s^2} + H_0^{iw_1} - z^2 H_{22}^{iw_1}, B_{i,7} = H_0^{iu_2}, B_{i,8} = zH_2^{iv_2},$$

$$B_{i,9} = \frac{-2H_{11}^{iw_2}}{s^2} + H_0^{iw_2} - z^2 H_{22}^{iw_2}, B_{i,10} = H_0^{iu_3}, B_{i,11} = zH_2^{iv_3}, i = \overline{9,11};$$

$$C_{i,1} = \frac{H_{11}^{iu_0}}{s^2} + \frac{H_1^{iu_0}}{2s}, C_{i,2} = \frac{zH_{12}^{iv_0}}{2s}, C_{i,3} = \frac{H_1^{iw_0}}{2s}, C_{i,4} = \frac{H_{11}^{iu_1}}{s^2} + \frac{H_1^{iu_1}}{2s}, C_{i,5} = \frac{zH_{12}^{iv_1}}{2s},$$

$$C_{i,6} = \frac{H_1^{iw_1}}{2s}, C_{i,7} = \frac{H_{11}^{iu_2}}{s^2} + \frac{H_1^{iu_2}}{2s}, C_{i,8} = \frac{zH_{12}^{iv_2}}{2s}, C_{i,9} = \frac{H_1^{iw_2}}{2s}, C_{i,10} = \frac{H_{11}^{iu_3}}{s^2} + \frac{H_1^{iu_3}}{2s},$$

$$C_{i,11} = \frac{zH_{12}^{iv_3}}{2s}, i = \overline{1,4};$$

$$C_{i,1} = \frac{-zH_{12}^{iu_0}}{2s}, C_{i,2} = \frac{H_{11}^{iv_0}}{s^2} + \frac{H_1^{iv_0}}{2s}, C_{i,3} = 0, C_{i,4} = \frac{-zH_{12}^{iu_1}}{2s}, C_{i,5} = \frac{H_{11}^{iv_1}}{s^2} + \frac{H_1^{iv_1}}{2s},$$

$$C_{i,6} = 0, C_{i,7} = \frac{-zH_{12}^{iu_2}}{2s}, C_{i,8} = \frac{H_{11}^{iv_2}}{s^2} + \frac{H_1^{iv_2}}{2s}, C_{i,9} = 0, C_{i,10} = \frac{-zH_{12}^{iu_3}}{2s},$$

$$C_{i,11} = \frac{H_{11}^{iv_3}}{s^2} + \frac{H_1^{iv_3}}{2s}, i = \overline{5,8};$$

$$C_{i,1} = \frac{H_1^{iu_0}}{2s}, C_{i,2} = 0, C_{i,3} = \frac{H_{11}^{iw_0}}{s^2} + \frac{H_1^{iw_0}}{2s}, C_{i,4} = \frac{H_1^{iu_1}}{2s}, C_{i,5} = 0, C_{i,6} = \frac{H_{11}^{iw_1}}{s^2} + \frac{H_1^{iw_1}}{2s},$$

$$C_{i,7} = \frac{H_1^{iu_2}}{2s}, C_{i,8} = 0, C_{i,9} = \frac{H_{11}^{iw_2}}{s^2} + \frac{H_1^{iw_2}}{2s}, C_{i,10} = \frac{H_1^{iu_3}}{2s}, C_{i,11} = 0, i = \overline{9,11}.$$

Векторы искоемых перемещений X_j находятся в виде

$$X_j = P_j X_{j+1} + Q_j, j = \overline{1, N-1}. \quad (2.13)$$

Здесь

$$X_0 = X_N = \Theta,$$

$$P_1 = -(B_1)^{-1} C_1, P_j = -(B_j + A_j P_{j-1})^{-1} C_j,$$

$$Q_1 = (B_1)^{-1} F_1, Q_j = (B_j + A_j P_{j-1})^{-1} (F_j - A_j Q_{j-1}), j = \overline{2, N-1}.$$

Таким образом, с помощью формул (2.13) определяются перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. Определив перемещения, деформации оболочки находятся по формулам (2.2), тангенциальные напряжения - из соотношений закона Гука (2.3). Поперечные напряжения получаются по формулам (1.14).

2.4. Результаты параметрического анализа

2.4.1. Сравнение полученных результатов с опубликованными данными

Для проверки полученных в диссертации результатов проводится их сравнение с результатами других уточненных теорий, опубликованными в международных журналах Scopus и Web of Science.

Рассматривается изотропная сферическая оболочка, жестко закрепленная по нижнему контуру основания и имеющая следующие параметры: радиус $R = 2280 \text{ мм}$, толщина $2h = 76,2 \text{ мм}$, коэффициент Пуассона $\mu = 1/6$, модуль Юнга $E = 0,7 \times 10^5 \text{ Н / мм}^2$, угол $\theta_2 = 35^\circ$ (рис. 2.2). Оболочка находится под действием нагрузки $q = 0,0069 \text{ Н / мм}^2$, равномерно распределенной на внутренней поверхности.

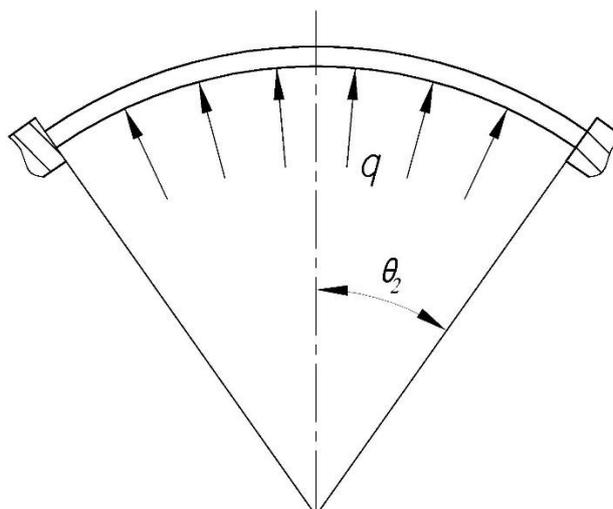


Рис. 2.2. Изотропная сферическая оболочка

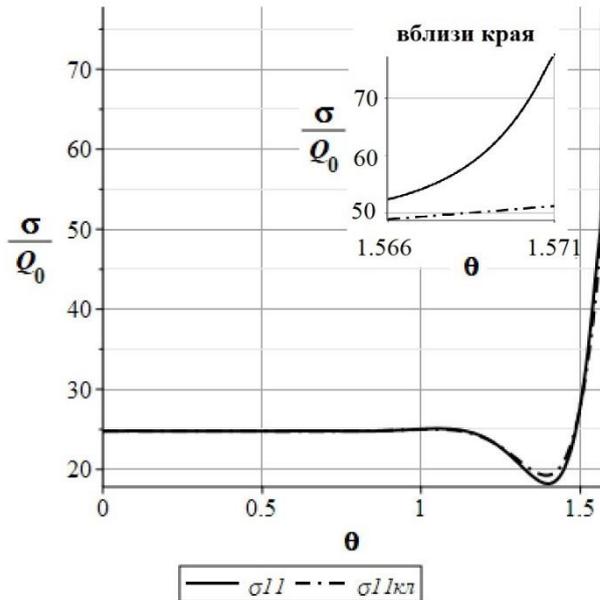
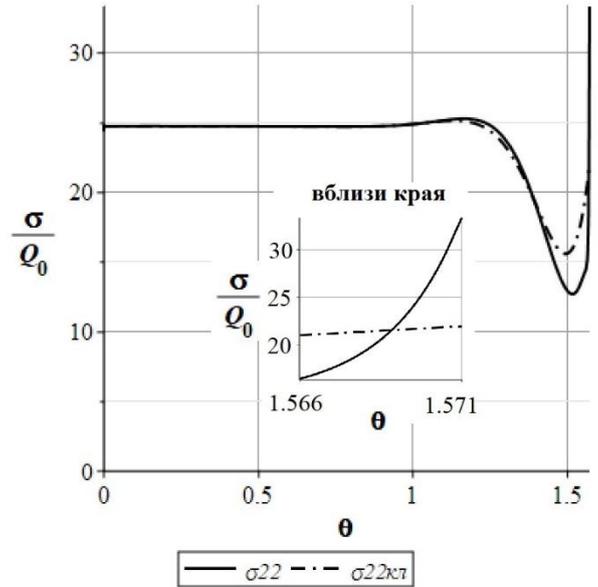
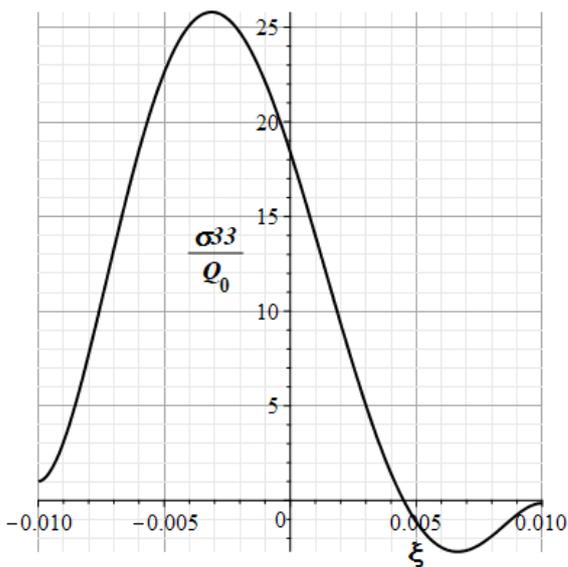
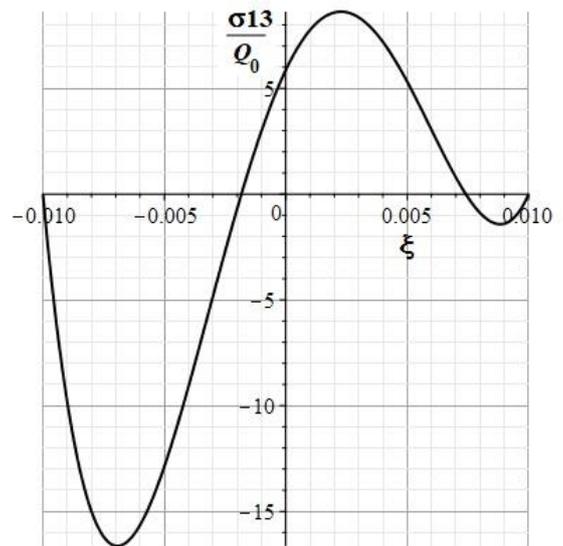
В таблице 2.1 приведены результаты расчета максимального прогиба оболочки. Из анализа данных таблицы 2.1, можно установить, что результат, полученный в данной работе, практически совпадает с результатами, представленными [98], [123] и [104].

Таблица 2.1. Сравнение максимальный прогиб оболочки

	R.S. Alwar [98]	Rao S.R. [123]	El-Nady [104]	В данной работе
W_{\max} (mm)	0.004163	0.003965	0.004112	0.004155

2.4.2. НДС сферической оболочки под действием осесимметричной радиальной нагрузки

На рис. 2.3 – 2.6 показаны результаты расчета НДС полусферической оболочки, жестко закрепленной по нижнему контуру основания и имеющей следующие параметры: радиус $R = 1\text{ м}$, относительная полутолщина $h / R = 1 / 100$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Оболочка находится под действием нагрузки, равномерно распределенной на внутренней поверхности.

Рис. 2.3. Изменение σ_{11} по углу θ Рис. 2.4. Изменение σ_{22} по углу θ Рис. 2.5. Изменение σ_{33} по толщине наРис. 2.6. Изменение σ_{13} по толщине

$$\text{краю } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{на краю } \theta = \frac{\pi}{2}$$

Отметим, что аббревиатура «кл» соответствует результатам расчета по классической теории.

Анализируя графики на рис. 2.3 – 2.6 можно установить следующее:

1. Максимальное нормальное напряжение σ_{11} , определяемое по уточненной теории, превышает значение этого же напряжения, соответствующего классической теории, на 50%.

2. Максимальное нормальное напряжение σ_{22} , соответствующее уточненной теории, превышает напряжение, определяемое по классической теории, на 45 %.

3. Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 35% и максимальное касательное напряжение σ_{13} - 22 % от основного изгибного напряжения σ_{11} .

4. При удалении от края напряжения, полученные по уточненной и классической теориям, практически совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов.

2.4.3. НДС сферической оболочки под действием ветровой нагрузки

Рассматривается полусферическая оболочка, жестко защемленная по нижнему контуру основания, со следующими параметрами: радиус $R=0,8\text{ м}$, относительная полутолщина $h/R=1/100$, коэффициент Пуассона $\mu=0,3$. Оболочка находится под действием ветровой нагрузки (рис. 2.7):

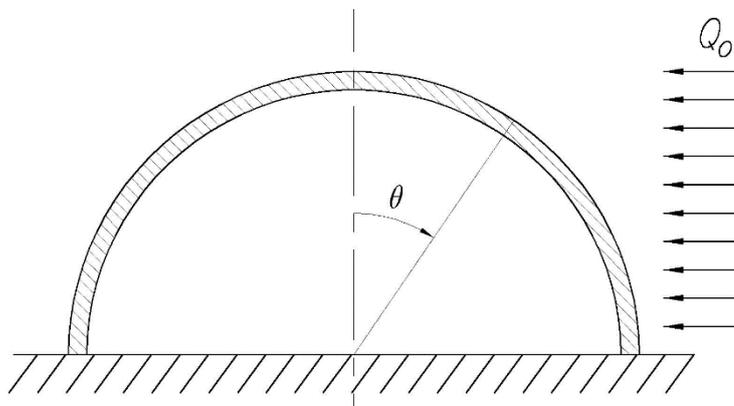


Рис. 2.7. Полусферическая оболочка под действием ветровой нагрузки

В этом случае имеем: $q_{33}^+(\theta, \varphi) = Q_0 \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $q_{13}^+ = q_{23}^+ = q_{33}^- = 0$, $z = 1$. На рис. 2.8 – 2.11 показаны результаты расчета в сечении $\varphi = 0$.

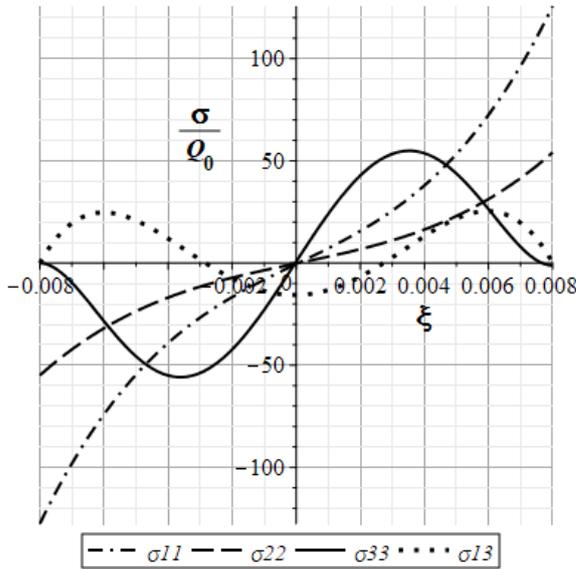


Рис. 2.8. Изменение напряжений по толщине на краю $\theta = \frac{\pi}{2}$

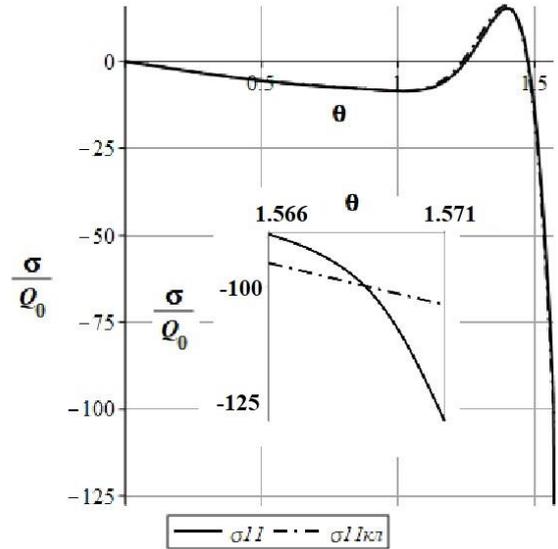


Рис. 2.9. Изменение σ_{11} по углу θ

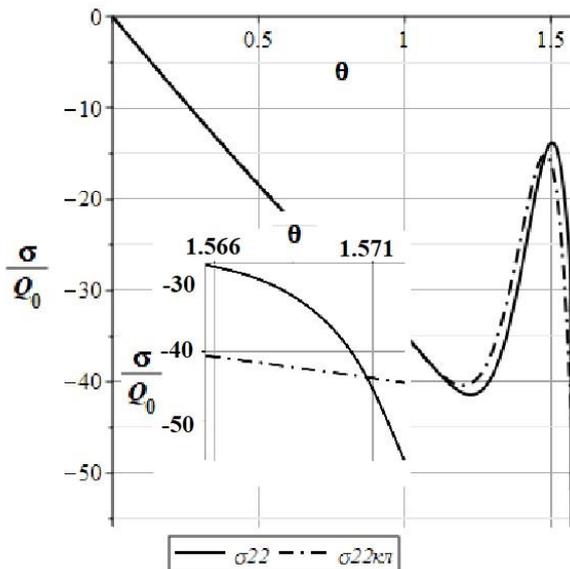


Рис. 2.10. Изменение σ_{22} по углу θ

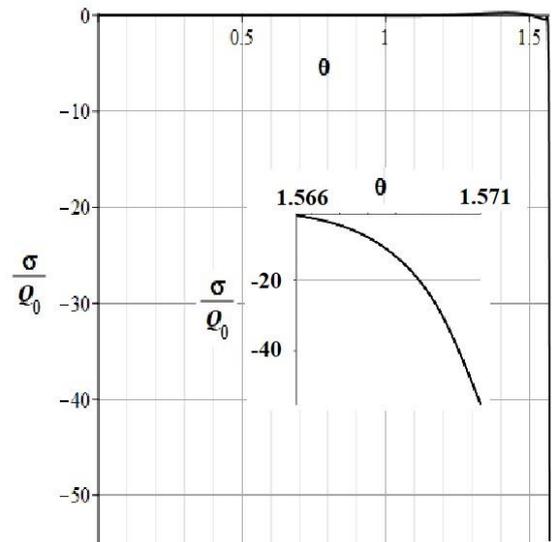


Рис. 2.11. Изменение σ_{33} по углу θ

Здесь аббревиатура «кл» соответствует результатам расчета по классической теории.

Анализ полученных результатов (рис. 2.8 – 2.11) показывает, что при удалении от края напряжения, полученные по уточненной и классической теориям, практически совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов. Напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные меридианальные напряжения σ_{11} - на 23% (рис. 2.9) и окружные σ_{22} - на 25% (рис.

2.10). Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 44 % и максимальное касательное напряжение σ_{13} - 20 % от основного изгибного напряжения σ_{11} (рис 2.8).

В таблице 2.2 приведены результаты расчета максимальных напряжений при различных значениях относительной толщины. В данной таблице обозначено: кл – классическая теория оболочек, утч – уточненная теория.

Таблица 2.2. Максимальные напряжения при различных значениях толщины

		σ_{11} / Q_0	σ_{22} / Q_0	σ_{33} / Q_0	σ_{13} / Q_0
h/R=0,005	кл	201,73	86,46	0	0
	утч	238,59	103,47	113,92	41,7
h/R=0,008	кл	128,21	54,95	0	0
	утч	156,08	67,33	70,06	29,87
h/R=0,01	кл	103,44	44,29	0	0
	утч	127,57	54,83	55,82	25,3
h/R=0,02	кл	52,85	22,65	0	0
	утч	68	29,18	28	15,02
h/R=0,04	кл	26,9	11,53	0	0
	утч	36,35	15,59	14,45	8,91
h/R=0,06	кл	21,59	9,26	0	0
	утч	29,73	12,74	11,75	7,56

Из анализа данных таблицы 2.2, можно установить, что при изменении относительной толщины оболочки в пределах от 0,005 до 0,06 погрешность классической теории по напряжениям составляет: для σ_{11} - 19 ÷ 38%, для σ_{22} - 19 ÷ 38%, для σ_{33} - 40 ÷ 48% и для σ_{13} - 18 ÷ 25% от основного изгибного напряжения σ_{11} .

2.5. Выводы по второй главе

1. На основе уточненной теории для сферических оболочек получены

двумерные уравнения равновесия в перемещениях и соответствующие граничные условия.

2. Краевая задача оболочки приведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий путем разложения компонент перемещений и внешних нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате.

3. Разработан алгоритм определения НДС оболочки с применением метода конечных разностей и матричной прогонки.

4. Приведены примеры расчетов и параметрического анализа НДС сферических оболочек при различных вариантах внешней нагрузки и изменения толщины оболочки. Установлено, что в зоне искажения напряженного состояния нормальные тангенциальные напряжения существенно уточняются и поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют один порядок с максимальными значениями основного изгибного напряжения. При удалении от края напряжения, полученные по уточненной и классической теориям совпадают. Результаты расчета максимального прогиба оболочки, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами других уточненных теорий, опубликованными в международных журналах Scopus и Web of Science, что подтверждает достоверность полученных результатов.

ГЛАВА III. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

3.1. Основные уравнения уточненной теории конических оболочек

Рассматривается коническая оболочка переменной толщины, отнесенная к ортогональной системе криволинейных координат x, φ, ξ . Здесь x представляет собой расстояние по образующей от вершины конуса, φ - угол между некоторой аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета, а ось ξ направлена по внешней нормали к срединной поверхности. Обозначим через γ - половину угла конусности.

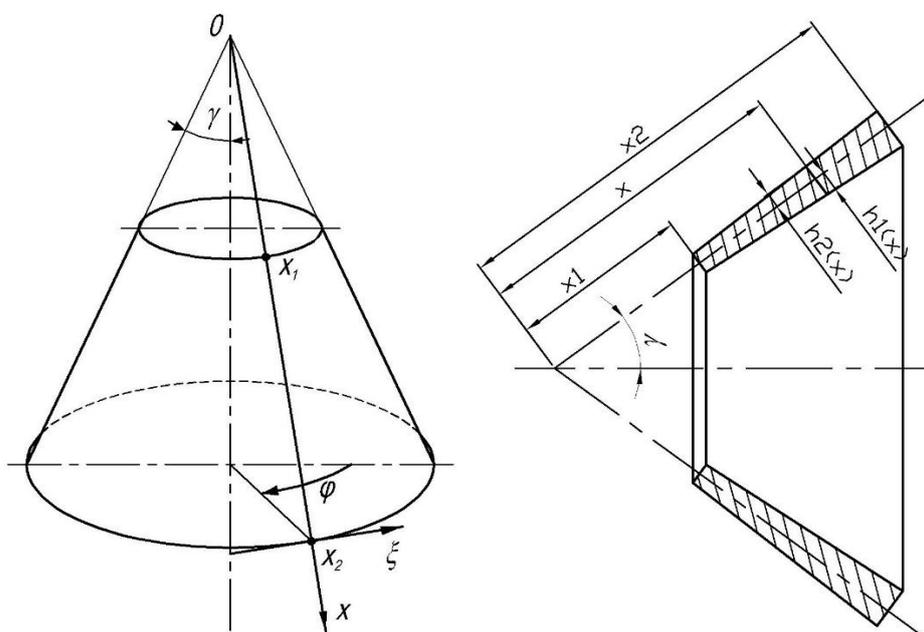


Рис. 3.1. Коническая оболочка переменной толщины

Для рассматриваемой оболочки имеют место следующие равенства:

$$\alpha_1 = x, \alpha_2 = \varphi, R_1 = \infty, R_2 = \frac{x}{\operatorname{ctg} \gamma}, \quad (3.1)$$

$$A_1 = 1, A_2 = x \sin \gamma, a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{\xi \operatorname{ctg} \gamma}{x}.$$

Тогда формулы для деформаций оболочки принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \sum_{k=0}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{\xi^k}{k!}, \\
e_{22} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + u_k \sin \gamma \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k \cos \gamma}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \frac{\xi^k}{k!}, \\
e_{33} &= \sum_{k=1}^2 w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}, \\
e_{12} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \varphi} - v_k \sin \gamma \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{\xi^k}{k!}, \\
e_{13} &= \sum_{k=0}^2 \frac{\partial w_k}{\partial x} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}, \\
e_{23} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k \cos \gamma}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \frac{\xi^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Поставляя выражения (3.2) в физические соотношения (1.3), находим выражения для напряжений конических оболочек

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \sum_{k=0}^3 \left[A_{i1} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{A_{i2}}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + u_k \sin \gamma \right) \right] \frac{\xi^k}{k!} + \\
&+ A_{i2} \sum_{k=0}^2 \frac{w_k \cos \gamma}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \frac{\xi^k}{k!} + A_{i3} \sum_{k=1}^2 w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}, i = \overline{1,3}, \\
\sigma_{12} &= A_{44} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \varphi} - v_k \sin \gamma \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{\xi^k}{k!} \right], \\
\sigma_{13} &= A_{55} \left[\sum_{k=0}^2 \frac{\partial w_k}{\partial x} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} \right], \\
\sigma_{23} &= A_{66} \left[\sum_{k=0}^2 \frac{1}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k \cos \gamma}{(x \sin \gamma + \xi \cos \gamma)} \frac{\xi^k}{k!} \right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Поставляя выражения (3.1) в (1.10), получим систему уравнений равновесия для конических оболочек

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(N_1 x \sin \gamma)}{\partial x} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \varphi} - N_2 \sin \gamma + P_1^{(0)} x \sin \gamma &= 0 \\
\frac{\partial(M_1^{(k)} x \sin \gamma)}{\partial x} + \frac{\partial M_{21}^{(k)}}{\partial \varphi} - M_2^{(k)} \sin \gamma + (P_1^{(k)} - T_1^{(k)}) x \sin \gamma &= 0, k = \overline{1,3},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial (N_{12} x \sin \gamma)}{\partial x} + N_{21} \sin \gamma + (Q_{23} \cos \gamma + P_2^{(0)} x \sin \gamma) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial (M_{12}^{(k)} x \sin \gamma)}{\partial x} + M_{21}^{(k)} \sin \gamma + M_{23}^{(k)} \cos \gamma + (P_2^{(k)} - T_2^{(k)}) x \sin \gamma = 0, k = \overline{1, 3},$$

$$\frac{\partial (Q_{13} x \sin \gamma)}{\partial x} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial \varphi} - (N_2 \cos \gamma - P_3^{(0)} x \sin \gamma) = 0$$

$$\frac{\partial (M_{13}^{(k)} x \sin \gamma)}{\partial x} + \frac{\partial M_{23}^{(k)}}{\partial \varphi} - M_2^{(k)} \cos \gamma + (P_3^{(k)} - T_3^{(k)}) x \sin \gamma = 0, k = \overline{1, 2}.$$

Подставляя выражения для обобщенных усилий (1.8) в уравнения (3.4) с учетом формул (1.4), (3.1), (3.3), находим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^3 \left(K_0^{iu_m} + K_1^{iu_m} \frac{\partial}{\partial x} + K_{11}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(K_2^{iv_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_{12}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \right) v_k + \\ & + \sum_{n=0}^2 \left(K_0^{iw_n} + K_1^{iw_n} \frac{\partial}{\partial x} \right) w_n = K^{iq_{13}^+} q_{13}^+ - K^{iq_{13}^-} q_{13}^-, \quad i = \overline{1, 4}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(K_2^{iu_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_{12}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(K_0^{iv_k} + K_1^{iv_k} \frac{\partial}{\partial x} + K_{11}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k + \\ & + \sum_{n=0}^2 K_2^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = K^{iq_{23}^+} q_{23}^+ - K^{iq_{23}^-} q_{23}^-, \quad i = \overline{5, 8}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(K_0^{iu_m} + K_1^{iu_m} \frac{\partial}{\partial x} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 K_2^{iv_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \sum_{n=0}^2 \left(K_0^{iw_n} + K_1^{iw_n} \frac{\partial}{\partial x} + K_{11}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n \\ & = K^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - K^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9, 11}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь переменные коэффициенты K^i представляют собой функции, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала оболочки и координаты x , их выражения представлены в Приложении II.

Граничные условия (1.11), (1.12) принимают следующий вид:

- для краев $x = x_1$ и $x = x_2$:

$$\begin{aligned}
u_0 = \bar{u}_0 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{15(2\mu - 1)(1 + \mu)} & \left\{ (\mu - 1) \left[\frac{15(\Lambda_1 c + 2xs)}{2xs} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{5(2c\Lambda_2 + 3xs\Lambda_1)}{2xs} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{8xs} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left. \frac{(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{8xs} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] + \frac{3\mu(\Lambda_4 c^4 - 5x^4 s^4)}{x^5 s^5} \left(u_0 s + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \right. \\
& + w_0 c) - \frac{3\mu(2\Lambda_4 c^3 + 5x^3 s^3 \Lambda_1)}{2x^4 s^4} \left(u_1 s + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1 c \right) + \frac{\mu(3\Lambda_4 c^2 - 5x^2 s^2 \Lambda_2)}{2x^3 s^3} \left(u_2 s + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \right. \\
& + w_2 c) - \left. \frac{\mu[4\Lambda_4 c + 5xs\Lambda_3]}{8x^2 s^2} \left(u_3 s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) - \frac{15\mu}{2} \left(\frac{\Lambda_1 c}{xs} + 2 \right) w_1 + \frac{5\mu}{2} \left(\frac{2\Lambda_2 c}{xs} + 3\Lambda_1 \right) w_2 \right\} = \bar{N}_1; \\
u_1 = \bar{u}_1 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{15(2\mu - 1)(1 + \mu)} & \left\{ (\mu - 1) \left[\frac{5(2c\Lambda_2 + 3xs\Lambda_1)}{2xs} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{4xs} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \frac{3(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{8xs} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left. \frac{(5c\Lambda_5 + 6xs\Lambda_4)}{12xs} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] + \frac{5\mu(\Lambda_5 c^4 + 3x^4 s^4 \Lambda_1)}{2x^5 s^5} \left(u_0 s + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \right. \\
& + w_0 c) - \frac{5\mu(\Lambda_5 c^3 + 2x^3 s^3 \Lambda_2)}{2x^4 s^4} \left(u_1 s + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1 c \right) + \frac{5\mu(2\Lambda_5 c^2 + 3x^2 s^2 \Lambda_3)}{8x^3 s^3} \left(u_2 s + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \right. \\
& + w_2 c) - \left. \frac{\mu[5\Lambda_5 c + 6xs\Lambda_4]}{12x^2 s^2} \left(u_3 s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) - \left(\frac{5\Lambda_2 c}{xs} + \frac{3}{2} \Lambda_1 \right) \mu w_1 + \left(\frac{15\Lambda_3 c}{2xs} + \Lambda_2 \right) \mu w_2 \right\} = \bar{M}_1^{(1)}; \\
u_2 = \bar{u}_2 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{15(2\mu - 1)(1 + \mu)} & \left\{ (\mu - 1) \left[\frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{8xs} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{3(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{8xs} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \frac{(5c\Lambda_5 + 6xs\Lambda_4)}{8xs} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left. \frac{5(6c\Lambda_6 + 7xs\Lambda_5)}{168xs} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] + \frac{5\mu(3\Lambda_6 c^4 - 7x^4 s^4 \Lambda_2)}{14x^5 s^5} \left(u_0 s + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \right. \\
& + w_0 c) - \frac{15\mu(4\Lambda_6 c^3 + 7x^3 s^3 \Lambda_3)}{56x^4 s^4} \left(u_1 s + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1 c \right) + \frac{3\mu(5\Lambda_6 c^2 + 7x^2 s^2 \Lambda_4)}{28x^3 s^3} \left(u_2 s + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \right. \\
& + w_2 c) - \left. \frac{5\mu[6\Lambda_6 c + 7xs\Lambda_5]}{168x^2 s^2} \left(u_3 s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) - \left(\frac{105\Lambda_3 c}{xs} + \frac{5}{2} \Lambda_2 \right) \mu w_1 + \right. \\
& \left. + \left(\frac{3\Lambda_4 c}{2xs} + \frac{15\Lambda_3}{8} \right) \mu w_2 \right\} = \bar{M}_1^{(2)};
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
u_3 = \bar{u}_3 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{15(2\mu - 1)(1 + \mu)} & \left\{ (\mu - 1) \left[\frac{(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{8xs} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{(5c\Lambda_5 + 6xs\Lambda_4)}{12xs} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \frac{5(6c\Lambda_6 + 7xs\Lambda_5)}{168xs} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left. \frac{5(7c\Lambda_7 + 8xs\Lambda_6)}{672xs} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] + \frac{5\mu(\Lambda_7c^4 - 2x^4s^4\Lambda_3)}{16x^5s^5} \left(u_0s + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + w_0c \right) \\
& - \frac{\mu(5\Lambda_7c^3 + 8x^3s^3\Lambda_4)}{16x^4s^4} \left(u_1s + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1c \right) + \frac{5\mu(3\Lambda_7c^2 - 4x^2s^2\Lambda_5)}{96x^3s^3} \left(u_2s + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + w_2c \right) + \\
& \left. - \frac{5\mu[7\Lambda_7c + 8xs\Lambda_6]}{672x^2s^2} \left(u_3s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) - \left(\frac{\Lambda_4c}{2xs} + \frac{5}{8}\Lambda_3 \right) \mu w_1 - \left(\frac{5\Lambda_5c}{12xs} + \frac{\Lambda_4}{2} \right) \mu w_2 \right\} = \overline{M_1^{(3)}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_0 = \bar{v}_0 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{60(1 + \mu)} & \left\{ \left[\frac{15(\Lambda_1c + 2xs)}{2xs} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{5(2c\Lambda_2 + 3xs\Lambda_1)}{2xs} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{8xs} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{8xs} \frac{\partial v_3}{\partial x} \right] + \frac{3(\Lambda_4c^4 - 5x^4s^4)}{x^5s^5} \left(v_0s - \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) - \frac{3(2\Lambda_4c^3 + 5x^3s^3\Lambda_1)}{2x^4s^4} \left(v_1s - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \\
& + \frac{(3\Lambda_4c^2 - 5x^2s^2\Lambda_2)}{2x^3s^3} \left(v_2s - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) - \left. \frac{[4\Lambda_4c + 5xs\Lambda_3]}{8x^2s^2} \left(v_3s - \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) \right\} = \overline{N_2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 = \bar{v}_1 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{30(1 + \mu)} & \left\{ \left[\frac{5(2c\Lambda_2 + 3xs\Lambda_1)}{2xs} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{4xs} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{3(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{8xs} \right. \right. \\
& \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} + \left. \frac{(5c\Lambda_5 + 6xs\Lambda_4)}{12xs} \frac{\partial v_3}{\partial x} \right] + \frac{5(\Lambda_5c^4 - 3x^4s^4\Lambda_1)}{2x^5s^5} \left(v_0s - \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) - \frac{5(\Lambda_5c^3 + 2x^3s^3\Lambda_2)}{2x^4s^4} \left(v_1s - \right. \\
& \left. - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{5(2\Lambda_5c^2 + 3x^2s^2\Lambda_3)}{8x^3s^3} \left(v_2s - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) - \left. \frac{[5\Lambda_5c + 6xs\Lambda_4]}{12x^2s^2} \left(u_3s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) \right\} = \overline{M_2^{(1)}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2 = \bar{v}_2 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{30(1 + \mu)} & \left\{ \left[\frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{8xs} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{3(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{8xs} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{(5c\Lambda_5 + 6xs\Lambda_4)}{8xs} \right. \right. \\
& \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} + \left. \frac{5(6c\Lambda_6 + 7xs\Lambda_5)}{168xs} \frac{\partial v_3}{\partial x} \right] + \frac{5(3\Lambda_6c^4 - 7x^4s^4\Lambda_2)}{14x^5s^5} \left(v_0s - \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) - \frac{15(4\Lambda_6c^3 + 7x^3s^3\Lambda_3)}{56x^4s^4} \\
& \cdot \left(v_1s - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{3(5\Lambda_6c^2 + 7x^2s^2\Lambda_4)}{28x^3s^3} \left(v_2s - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) - \left. \frac{5[6\Lambda_6c + 7xs\Lambda_5]}{168x^2s^2} \left(v_3s + \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) \right\} = \overline{M_2^{(2)}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3 = \bar{v}_3 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{30(1 + \mu)} & \left\{ \left[\frac{(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{8xs} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{(5c\Lambda_5 + 6xs\Lambda_4)}{12xs} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \frac{5(6c\Lambda_6 + 7xs\Lambda_5)}{168xs} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \left. \frac{5(7c\Lambda_7 + 8xs\Lambda_6)}{672xs} \frac{\partial v_3}{\partial x} \right] + \frac{5(\Lambda_7 c^4 - 2x^4 s^4 \Lambda_3)}{16x^5 s^5} \left(v_0 s - \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) \\
& - \frac{(5\Lambda_7 c^3 + 8x^3 s^3 \Lambda_4)}{16x^4 s^4} \left(v_1 s - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{5(3\Lambda_7 c^2 - 4x^2 s^2 \Lambda_5)}{96x^3 s^3} \left(v_2 s - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) - \\
& \left. - \frac{5[7\Lambda_7 c + 8xs\Lambda_6]}{672x^2 s^2} \left(v_3 s + \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) \right\} = \overline{M}_2^{(3)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_0 = \bar{w}_0 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{5(1 + \mu)} & \left\{ \frac{5(\Lambda_1 c + 2xs)}{4xs} \left(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{5(2c\Lambda_2 + 3xs\Lambda_1)}{12xs} \left(u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{48xs} \left(u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right\} = \overline{Q}_{13};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1 = \bar{w}_1 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{5(1 + \mu)} & \left\{ \frac{5(2c\Lambda_2 + 3xs\Lambda_1)}{12xs} \left(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{24xs} \left(u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{16xs} \left(u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right\} = \overline{M}_{13}^{(1)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 = \bar{w}_2 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{5(1 + \mu)} & \left\{ \frac{5(3c\Lambda_3 + 4xs\Lambda_2)}{48xs} \left(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{(4c\Lambda_4 + 5xs\Lambda_3)}{16xs} \left(u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{(5c\Lambda_5 + 6xs\Lambda_4)}{48xs} \left(u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right\} = \overline{M}_{13}^{(2)};
\end{aligned}$$

- для краев $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$:

$$\begin{aligned}
u_0 = \bar{u}_0 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(2\mu - 1)(1 + \mu)} & \left\{ -\mu \left(3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{3\Lambda_1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\Lambda_2}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\Lambda_3}{8} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \right. \\
& + (\mu - 1) \left[\frac{1}{4x^4 s^4} (-3\Lambda_3 c^3 + 4\Lambda_2 c^2 xs - 6\Lambda_1 c x^2 s^2 + 12x^3 s^3) \left(u_0 s + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + w_0 c \right) - \right. \\
& - \frac{1}{4x^3 s^3} (-3\Lambda_3 c^2 + 4\Lambda_2 c xs - 6\Lambda_1 x^2 s^2) \left(u_1 s + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1 c \right) + \frac{1}{4x^2 s^2} (-3\Lambda_3 c + 4\Lambda_2 xs) \cdot \\
& \left. \left. \left(u_2 s + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + w_2 c \right) + \frac{\Lambda_3}{8xs} \left(u_3 s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) \right] - 3\mu w_1 - \frac{3\mu\Lambda_1}{2} w_2 \right\} = \overline{N}_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 = \bar{u}_1 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(2\mu - 1)(1 + \mu)} & \left\{ -\mu \left(\frac{3\Lambda_1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \Lambda_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{3\Lambda_3}{8} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\Lambda_4}{10} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \right. \\
& + (\mu - 1) \left[\frac{-1}{20x^4s^4} (12\Lambda_4c^3 - 15\Lambda_3c^2xs + 20\Lambda_2cx^2s^2 - 30\Lambda_1x^3s^3) \left(u_0s + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + w_0c \right) + \right. \\
& + \frac{1}{20x^3s^3} (12\Lambda_4c^2 - 15\Lambda_3cxs + 20\Lambda_2x^2s^2) \left(u_1s + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1c \right) - \frac{3}{40x^2s^2} (4\Lambda_4c - \\
& \left. \left. - 5\Lambda_3xs) \left(u_2s + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + w_2c \right) + \frac{\Lambda_4}{10xs} \left(u_3s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{3\mu\Lambda_1}{2} w_1 - \mu\Lambda_2 w_2 \left. \right\} = \overline{M}_1^{(1)}; \\
u_2 = \bar{u}_2 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(2\mu - 1)(1 + \mu)} & \left\{ -\mu \left(\frac{\Lambda_2}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{3\Lambda_3}{8} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{3\Lambda_4}{20} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\Lambda_5}{24} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \right. \\
& + (\mu - 1) \left[\frac{1}{40x^4s^4} (-10\Lambda_5c^3 + 12\Lambda_4c^2xs - 15\Lambda_3cx^2s^2 + 20\Lambda_2x^3s^3) \left(u_0s + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + w_0c \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{40x^3s^3} (-10\Lambda_5c^2 + 12\Lambda_4cxs - 15\Lambda_3x^2s^2) \left(u_1s + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1c \right) + \frac{1}{40x^2s^2} (-5\Lambda_5c + \right. \\
& \left. + 6\Lambda_4xs) \left(u_2s + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + w_2c \right) + \frac{\Lambda_5}{24xs} \left(u_3s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{3\mu\Lambda_2}{2} w_1 - \frac{3\mu\Lambda_3}{8} w_2 \left. \right\} = \overline{M}_1^{(2)}; \tag{3.7} \\
u_3 = \bar{u}_3 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(2\mu - 1)(1 + \mu)} & \left\{ -\mu \left(\frac{\Lambda_3}{8} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\Lambda_4}{10} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\Lambda_5}{24} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\Lambda_6}{84} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \right. \\
& + (\mu - 1) \left[\frac{-1}{840x^4s^4} (60\Lambda_6c^3 - 70\Lambda_5c^2xs + 84\Lambda_4cx^2s^2 - 105\Lambda_3x^3s^3) \left(u_0s + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + w_0c \right) + \right. \\
& + \frac{1}{420x^3s^3} (30\Lambda_6c^2 - 35\Lambda_5cxs + 42\Lambda_4x^2s^2) \left(u_1s + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1c \right) - \frac{1}{168x^2s^2} (6\Lambda_6c - \\
& \left. - 7\Lambda_5xs) \left(u_2s + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + w_2c \right) + \frac{\Lambda_6}{84xs} \left(u_3s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{\mu\Lambda_3}{8} w_1 - \frac{\mu\Lambda_4}{10} w_2 \left. \right\} = \overline{M}_1^{(3)}; \\
v_0 = \bar{v}_0 \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(1 + \mu)} & \left\{ 3 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{3\Lambda_1}{4} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\Lambda_2}{4} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\Lambda_3}{16} \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{1}{4x^4s^4} (-3\Lambda_3c^3 + \right. \\
& + 4\Lambda_2c^2xs - 6\Lambda_1cx^2s^2 + 12x^3s^3) \left(-v_0s + \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{4x^3s^3} (-3\Lambda_3c^2 + 4\Lambda_2cxs - \\
& \left. - 6\Lambda_1x^2s^2) \left(v_1s - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{(-3\Lambda_3c + 4\Lambda_2xs)}{4x^2s^2} \left(-v_2s + \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{\Lambda_3}{16xs} \left(-v_3s + \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) \right\} = \overline{N}_2;
\end{aligned}$$

$$v_1 = \overline{v_1} \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(1 + \mu)} \left\{ \frac{3\Lambda_1}{4} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\Lambda_2}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{3\Lambda_3}{16} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\Lambda_4}{20} \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{1}{40x^4s^4} (12\Lambda_4c^3 - \right. \\ \left. - 15\Lambda_3c^2xs + 20\Lambda_2cx^2s^2 - 30\Lambda_1x^3s^3) \left(-v_0s + \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{40x^3s^3} (12\Lambda_4c^2 - 15\Lambda_3cxs + \right. \\ \left. + 20\Lambda_2x^2s^2) \left(v_1s - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) - \frac{3(4\Lambda_4c - 5\Lambda_3xs)}{80x^2s^2} \left(-v_2s + \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{\Lambda_4}{10xs} \left(v_3s - \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) \right\} = \overline{M_2^{(1)}};$$

$$v_2 = \overline{v_2} \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(1 + \mu)} \left\{ \frac{\Lambda_2}{4} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{3\Lambda_3}{16} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{3\Lambda_4}{40} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\Lambda_5}{48} \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{1}{80x^4s^4} (-10\Lambda_5c^3 + \right. \\ \left. + 12\Lambda_4c^2xs - 15\Lambda_3cx^2s^2 + 20\Lambda_2x^3s^3) \left(-v_0s + \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{80x^3s^3} (-10\Lambda_5c^2 + 12\Lambda_4cxs - \right. \\ \left. - 15\Lambda_3x^2s) \left(v_1s - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{(-5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs)}{80x^2s^2} \left(-v_2s + \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{\Lambda_5}{48xs} \left(u_3s + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) \right\} = \overline{M_2^{(2)}};$$

$$v_3 = \overline{v_3} \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(1 + \mu)} \left\{ \frac{\Lambda_3}{16} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\Lambda_4}{20} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\Lambda_5}{48} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\Lambda_6}{168} \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{1}{1680x^4s^4} (60\Lambda_6c^3 - \right. \\ \left. - 70\Lambda_5c^2xs + 84\Lambda_4cx^2s^2 - 105\Lambda_3x^3s^3) \left(v_0s - \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{840x^3s^3} (30\Lambda_6c^2 - 35\Lambda_5cxs + \right. \\ \left. + 42\Lambda_4x^2s^2) \left(-v_1s + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{(6\Lambda_6c - 7\Lambda_5xs)}{336x^2s^2} \left(v_2s - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{\Lambda_6}{168xs} \left(-v_3s + \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) \right\} = \overline{M_2^{(3)}};$$

$$w_0 = \overline{w_0} \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(1 + \mu)} \left\{ \frac{1}{8x^4s^4} (-3\Lambda_3c^3 + 4\Lambda_2c^2xs - 6\Lambda_1cx^2s^2 + 12x^3s^3) \left(-u_0c + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8x^3s^3} (-3\Lambda_3c^2 + 4\Lambda_2cxs - 6\Lambda_1x^2s^2) \left(u_1c - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{8x^2s^2} (-3\Lambda_3c + 4\Lambda_2xs) \left(-u_2c + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{3}{2}u_1 + \frac{3}{4}\Lambda_1u_2 + \frac{1}{16xs} (\Lambda_3c + 4\Lambda_2xs)u_3 \right\} = \overline{Q_{13}};$$

$$w_1 = \overline{w_1} \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(1 + \mu)} \left\{ \frac{1}{40x^4s^4} (12\Lambda_4c^3 - 15\Lambda_3c^2xs + 20\Lambda_2cx^2s^2 - 30\Lambda_1x^3s^3) \left(-u_0c + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{40x^3s^3} (12\Lambda_4c^2 - 15\Lambda_3cxs + 20\Lambda_2x^2s^2) \left(u_1c - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{3}{80x^2s^2} (4\Lambda_4c - \right. \\ \left. - 5\Lambda_3xs) \left(-u_2c + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{3}{4}\Lambda_1u_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2u_2 - \frac{1}{80xs} (4\Lambda_4c - 15\Lambda_3xs)u_3 \right\} = \overline{M_{13}^{(1)}};$$

$$w_2 = \overline{w_2} \vee \frac{E(h_1 + h_2)}{3(1 + \mu)} \left\{ \frac{1}{80x^4s^4} \left(-10\Lambda_5c^3 + 12\Lambda_4c^2xs - 15\Lambda_3cx^2s^2 + 20\Lambda_2x^3s^3 \right) \left(-u_0c + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{80x^3s^3} \left(-10\Lambda_5c^2 + 12\Lambda_4cxs - 15\Lambda_3x^2s^2 \right) \left(u_1c - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{80x^2s^2} \left(-5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs \right) \left(-u_2c + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{1}{4}\Lambda_2u_1 + \frac{15}{80}\Lambda_3u_2 - \frac{1}{240xs} \left(5\Lambda_5c - 18\Lambda_3xs \right) u_3 \right\} = \overline{M_{13}^{(2)}}.$$

В выражениях граничных условий и Приложении II используются обозначения:

$$c = \cos \gamma, s = \sin \gamma,$$

$$\Lambda = h_2 - h_1, \Lambda_2 = h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2, \Lambda_3 = (h_2 - h_1)(h_1^2 + h_2^2),$$

$$\Lambda_4 = h_1^4 - h_1^3h_2 + h_1^2h_2^2 - h_1h_2^3 + h_2^4, \Lambda_5 = h_2^5 - h_2^4h_1 + h_2^3h_1^2 - h_2^2h_1^3 + h_2h_1^4 - h_1^5,$$

$$\Lambda_6 = h_1^6 - h_1^5h_2 + h_1^4h_2^2 - h_1^3h_2^3 + h_1^2h_2^4 - h_1h_2^5 + h_2^6,$$

$$\Lambda_7 = h_2^7 - h_2^6h_1 + h_2^5h_1^2 - h_2^4h_1^3 + h_2^3h_1^4 - h_2^2h_1^5 + h_2h_1^6 - h_1^7.$$

3.2. Преобразование двумерных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим два случая: оболочка находится под действием симметричной и несимметричной нагрузок.

В первом случае компоненты НДС оболочки не зависят от угла φ и перемещения в окружном направлении $v_k = 0, k = \overline{0,3}$, что позволяет из (3.5) получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^3 \left(K_0^{iu_m} + K_1^{iu_m} \frac{d}{dx} + K_{11}^{iu_m} \frac{d^2}{dx^2} \right) u_m + \sum_{n=0}^2 \left(K_0^{iw_n} + K_1^{iw_n} \frac{d}{dx} \right) w_n = 0, \quad i = \overline{1,4}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(K_0^{iu_m} + K_1^{iu_m} \frac{d}{dx} \right) u_m + \sum_{n=0}^2 \left(K_0^{iw_n} + K_1^{iw_n} \frac{d}{dx} + K_{11}^{iw_n} \frac{d^2}{dx^2} \right) w_n \\ & = K^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - K^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9,11}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если оболочка находится под действием несимметричной нагрузки, приведем систему двумерных уравнений (3.5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов. Для этой цели представим внешние нагрузки и перемещения в следующем виде:

$$\begin{aligned}
q_{13}^{\pm}(x, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)13}^{\pm}(x) \cos(z\varphi), \\
q_{23}^{\pm}(x, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)23}^{\pm}(x) \sin(z\varphi), \\
q_{33}^{\pm}(x, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)33}^{\pm}(x) \cos(z\varphi), \\
u_m(x, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} U_{mz}(x) \cos(z\varphi), \quad m = \overline{0, 3}, \\
v_k(x, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} V_{kz}(x) \sin(z\varphi), \quad k = \overline{0, 3}, \\
w_n(x, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} W_{nz}(x) \cos(z\varphi), \quad n = \overline{0, 2}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставляя разложения (3.9) в систему (3.5) и сравнивая коэффициенты тригонометрических рядов в левых и правых частях, находим

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^3 \left(K_0^{iu_m} - z^2 K_{22}^{iu_m} + K_1^{iu_m} \frac{d}{dx} + K_{11}^{iu_m} \frac{d^2}{dx^2} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 \left(K_2^{iv_k} + K_{12}^{iv_k} \frac{d}{dx} \right) V_{kz} + \\
&+ \sum_{n=0}^2 \left(K_0^{iw_n} + K_1^{iw_n} \frac{d}{dx} \right) W_{nz} = K^{iq_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - K^{iq_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1, 4}; \\
&z \sum_{m=0}^3 \left(-K_2^{iu_m} - K_{12}^{iu_m} \frac{d}{dx} \right) U_{mz} + \sum_{k=0}^3 \left(K_0^{iv_k} - z^2 K_{22}^{iv_k} + K_1^{iv_k} \frac{d}{dx} + K_{11}^{iv_k} \frac{d^2}{dx^2} \right) V_{kz} - \\
&- z \sum_{n=0}^2 K_2^{iw_n} W_{nz} = K^{iq_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - K^{iq_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5, 8}; \\
&\sum_{m=0}^3 \left(K_0^{iu_m} + K_1^{iu_m} \frac{d}{dx} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 K_2^{iv_k} V_{kz} + \sum_{n=0}^2 \left(K_0^{iw_n} - z^2 K_{22}^{iw_n} + K_1^{iw_n} \frac{d}{dx} + \right. \\
&\left. + K_{11}^{iw_n} \frac{d^2}{dx^2} \right) W_{nz} = K^{iq_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - K^{iq_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9, 11}, \quad z = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Системы (3.8) и (3.10) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения. Для решения указанных систем используется метод конечных разностей.

3.3. Методика и алгоритм решения сформулированной краевой задачи

В качестве примера рассматривается оболочка, жестко заземленная по двум краям $x = x_1$ и $x = x_2$. Тогда граничные условия на этих краях

$$u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2.$$

Производные 1-го и 2-го порядков в уравнениях (3.8) и (3.10) аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2s} + O(s^2); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{s^2} + O(s^2).$$

Из уравнений (3.8) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^3 \left(\left(\frac{K_{11}^{iu_m}}{s^2} - \frac{K_1^{iu_m}}{2s} \right) u_m^{j-1} + \left(\frac{-2K_{11}^{iu_m}}{s^2} + K_0^{iu_m} \right) u_m^j + \left(\frac{K_{11}^{iu_m}}{s^2} + \frac{K_1^{iu_m}}{2s} \right) u_m^{j+1} \right) + \\ & + \sum_{n=0}^2 \left(\frac{-K_1^{iw_n}}{2s} w_n^{j-1} + K_{i0}^{w_n} w_n^j + \frac{K_1^{iw_n}}{2s} w_n^{j+1} \right) = 0, \quad i = \overline{1, 4}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(\frac{-K_1^{iu_m}}{2s} u_m^{j-1} + K_0^{iu_m} u_m^j + \frac{K_1^{iu_m}}{2s} u_m^{j+1} \right) + \\ & + \sum_{n=0}^2 \left(\left(\frac{K_{11}^{iw_n}}{s^2} - \frac{K_1^{iw_n}}{2s} \right) w_n^{j-1} + \left(\frac{-2K_{11}^{iw_n}}{s^2} + K_0^{iw_n} \right) w_n^j + \left(\frac{K_{11}^{iw_n}}{s^2} + \frac{K_1^{iw_n}}{2s} \right) w_n^{j+1} \right) = \\ & = K^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - K^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9, 11}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{0, 3}, \quad n = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Аналогично система (3.10) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^3 \left(\left(\frac{K_{11}^{iu_m}}{s^2} - \frac{K_1^{iu_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j-1} + \left(\frac{-2K_{11}^{iu_m}}{s^2} + K_0^{iu_m} - z^2 K_{22}^{iu_m} \right) U_{mz}^j + \left(\frac{K_{11}^{iu_m}}{s^2} + \frac{K_1^{iu_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j+1} \right) + \\ & + \sum_{k=0}^3 \left(\frac{-zK_{12}^{iv_k}}{2s} V_{kz}^{j-1} + zK_2^{iv_k} V_{kz}^j + \frac{zK_{12}^{iv_k}}{2s} V_{kz}^{j+1} \right) + \\ & + \sum_{n=0}^2 \left(\frac{-K_1^{iw_n}}{2s} W_{nz}^{j-1} + \frac{K_1^{iw_n}}{2s} W_{nz}^{j+1} \right) = K^{iq_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - K^{iq_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1, 4}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(\frac{zK_{12}^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} - zK_2^{iu_m} U_{mz}^j - \frac{zK_{12}^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \\ & + \sum_{k=0}^3 \left(\left(\frac{K_{11}^{iv_m}}{s^2} - \frac{K_1^{iv_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j-1} + \left(\frac{-2K_{11}^{iv_m}}{s^2} + K_0^{iv_m} - z^2 K_{22}^{iv_m} \right) V_{kz}^j + \left(\frac{K_{11}^{iv_m}}{s^2} + \frac{K_1^{iv_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j+1} \right) - \\ & - \sum_{n=0}^2 zK_2^{iw_n} W_{nz}^j = K^{iq_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - K^{iq_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5, 8}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(\frac{-K_1^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} + K_0^{iu_m} U_{mz}^j + \frac{K_1^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \sum_{k=0}^3 z K_2^{iv_m} V_{kz}^j + \\
& + \sum_{n=0}^2 \left(\left(\frac{K_{11}^{iw_n}}{s^2} - \frac{K_1^{iw_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j-1} + \left(\frac{-2K_{11}^{iw_n}}{s^2} + K_0^{iw_n} - z^2 K_{22}^{iw_n} \right) W_{nz}^j + \left(\frac{K_{11}^{iw_n}}{s^2} + \frac{K_1^{iw_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j+1} \right) = \\
& = K^{iq_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - K^{iq_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9,11}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{0,3}, \quad k = \overline{0,3}, \quad n = \overline{0,2}, \quad z = 0,1,2,\dots,
\end{aligned}$$

где s , $(N+1)$ – соответственно шаг конечно-разностной схемы и число узлов.

Системы (3.11) и (3.12) представляют собой системы линейных алгебраических уравнений и решаются методом матричной прогонки, аналогично пункту 2.3. Представим эти системы векторно-матричными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned}
& A_j X_{j-1} + B_j X_j + C_j X_{j+1} = F_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \\
& X_0 = X_N = \Theta.
\end{aligned}$$

Здесь Θ - нулевая матрица;

$X_j, F_j, j = \overline{1, N-1}$ - векторы искомых перемещений и векторы правых частей;

$A_j, B_j, C_j, j = \overline{1, N-1}$ - матрицы коэффициентов.

В этом случае матрицы $A_j, B_j, C_j, X_j, F_j, j = \overline{1, N-1}$ для системы (3.11) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
& X_j = \left[u_0^j, w_0^j, u_1^j, w_1^j, u_2^j, w_2^j, u_3^j \right]^T, \\
& F_j = \left[0, 0, 0, 0, K^{9q_{33}^+} q_{33}^+ - K^{9q_{33}^-} q_{33}^-, K^{10q_{33}^+} q_{33}^+ - K^{10q_{33}^-} q_{33}^-, K^{11q_{33}^+} q_{33}^+ - K^{11q_{33}^-} q_{33}^- \right]^T;
\end{aligned}$$

$$A_j := \begin{bmatrix} \frac{K_{11}^{1u_0}}{s^2} - \frac{K_1^{1u_0}}{2s}, \frac{-K_1^{1w_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{1u_1}}{s^2} - \frac{K_1^{1u_1}}{2s}, \frac{-K_1^{1w_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{1u_2}}{s^2} - \frac{K_1^{1u_2}}{2s}, \frac{-K_1^{1w_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{1u_3}}{s^2} - \frac{K_1^{1u_3}}{2s} \\ \frac{K_{11}^{2u_0}}{s^2} - \frac{K_1^{2u_0}}{2s}, \frac{-K_1^{2w_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{2u_1}}{s^2} - \frac{K_1^{2u_1}}{2s}, \frac{-K_1^{2w_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{2u_2}}{s^2} - \frac{K_1^{2u_2}}{2s}, \frac{-K_1^{2w_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{2u_3}}{s^2} - \frac{K_1^{2u_3}}{2s} \\ \frac{K_{11}^{3u_0}}{s^2} - \frac{K_1^{3u_0}}{2s}, \frac{-K_1^{3w_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{3u_1}}{s^2} - \frac{K_1^{3u_1}}{2s}, \frac{-K_1^{3w_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{3u_2}}{s^2} - \frac{K_1^{3u_2}}{2s}, \frac{-K_1^{3w_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{3u_3}}{s^2} - \frac{K_1^{3u_3}}{2s} \\ \frac{K_{11}^{4u_0}}{s^2} - \frac{K_1^{4u_0}}{2s}, \frac{-K_1^{4w_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{4u_1}}{s^2} - \frac{K_1^{4u_1}}{2s}, \frac{-K_1^{4w_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{4u_2}}{s^2} - \frac{K_1^{4u_2}}{2s}, \frac{-K_1^{4w_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{4u_3}}{s^2} - \frac{K_1^{4u_3}}{2s} \\ \frac{-K_1^{9u_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{9w_0}}{s^2} - \frac{K_1^{9w_0}}{2s}, \frac{-K_1^{9u_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{9w_1}}{s^2} - \frac{K_1^{9w_1}}{2s}, \frac{-K_1^{9u_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{9w_2}}{s^2} - \frac{K_1^{9w_2}}{2s}, \frac{-K_1^{9u_3}}{2s} \\ \frac{-K_1^{10u_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{10w_0}}{s^2} - \frac{K_1^{10w_0}}{2s}, \frac{-K_1^{10u_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{10w_1}}{s^2} - \frac{K_1^{10w_1}}{2s}, \frac{-K_1^{10u_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{10w_2}}{s^2} - \frac{K_1^{10w_2}}{2s}, \frac{-K_1^{10u_3}}{2s} \\ \frac{-K_1^{11u_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{11w_0}}{s^2} - \frac{K_1^{11w_0}}{2s}, \frac{-K_1^{11u_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{11w_1}}{s^2} - \frac{K_1^{11w_1}}{2s}, \frac{-K_1^{11u_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{11w_2}}{s^2} - \frac{K_1^{11w_2}}{2s}, \frac{-K_1^{11u_3}}{2s} \end{bmatrix};$$

$$B_j := \begin{bmatrix} \frac{-2K_{11}^{1u_0}}{s^2} + K_0^{1u_0}, K_0^{1w_0}, \frac{-2K_{11}^{1u_1}}{s^2} + K_0^{1u_1}, K_0^{1w_1}, \frac{-2K_{11}^{1u_2}}{s^2} + K_0^{1u_2}, K_0^{1w_2}, \frac{-2K_{11}^{1u_3}}{s^2} + K_0^{1u_3} \\ \frac{-2K_{11}^{2u_0}}{s^2} + K_0^{2u_0}, K_0^{2w_0}, \frac{-2K_{11}^{2u_1}}{s^2} + K_0^{2u_1}, K_0^{2w_1}, \frac{-2K_{11}^{2u_2}}{s^2} + K_0^{2u_2}, K_0^{2w_2}, \frac{-2K_{11}^{2u_3}}{s^2} + K_0^{2u_3} \\ \frac{-2K_{11}^{3u_0}}{s^2} + K_0^{3u_0}, K_0^{3w_0}, \frac{-2K_{11}^{3u_1}}{s^2} + K_0^{3u_1}, K_0^{3w_1}, \frac{-2K_{11}^{3u_2}}{s^2} + K_0^{3u_2}, K_0^{3w_2}, \frac{-2K_{11}^{3u_3}}{s^2} + K_0^{3u_3} \\ \frac{-2K_{11}^{4u_0}}{s^2} + K_0^{4u_0}, K_0^{4w_0}, \frac{-2K_{11}^{4u_1}}{s^2} + K_0^{4u_1}, K_0^{4w_1}, \frac{-2K_{11}^{4u_2}}{s^2} + K_0^{4u_2}, K_0^{4w_2}, \frac{-2K_{11}^{4u_3}}{s^2} + K_0^{4u_3} \\ K_0^{9u_0}, \frac{-2K_{11}^{9w_0}}{s^2} + K_0^{9w_0}, K_0^{9u_1}, \frac{-2K_{11}^{9w_1}}{s^2} + K_0^{9w_1}, K_0^{9u_2}, \frac{-2K_{11}^{9w_2}}{s^2} + K_0^{9w_2}, K_0^{9u_3} \\ K_0^{10u_0}, \frac{-2K_{11}^{10w_0}}{s^2} + K_0^{10w_0}, K_0^{10u_1}, \frac{-2K_{11}^{10w_1}}{s^2} + K_0^{10w_1}, K_0^{10u_2}, \frac{-2K_{11}^{10w_2}}{s^2} + K_0^{10w_2}, K_0^{10u_3} \\ K_0^{11u_0}, \frac{-2K_{11}^{11w_0}}{s^2} + K_0^{11w_0}, K_0^{11u_1}, \frac{-2K_{11}^{11w_1}}{s^2} + K_0^{11w_1}, K_0^{11u_2}, \frac{-2K_{11}^{11w_2}}{s^2} + K_0^{11w_2}, K_0^{11u_3} \end{bmatrix};$$

$$C_j := \begin{bmatrix} \frac{K_{11}^{1u_0}}{s^2} + \frac{K_1^{1u_0}}{2s}, \frac{K_1^{1w_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{1u_1}}{s^2} + \frac{K_1^{1u_1}}{2s}, \frac{K_1^{1w_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{1u_2}}{s^2} + \frac{K_1^{1u_2}}{2s}, \frac{K_1^{1w_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{1u_3}}{s^2} + \frac{K_1^{1u_3}}{2s} \\ \frac{K_{11}^{2u_0}}{s^2} + \frac{K_1^{2u_0}}{2s}, \frac{K_1^{2w_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{2u_1}}{s^2} + \frac{K_1^{2u_1}}{2s}, \frac{K_1^{2w_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{2u_2}}{s^2} + \frac{K_1^{2u_2}}{2s}, \frac{K_1^{2w_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{2u_3}}{s^2} + \frac{K_1^{2u_3}}{2s} \\ \frac{K_{11}^{3u_0}}{s^2} + \frac{K_1^{3u_0}}{2s}, \frac{K_1^{3w_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{3u_1}}{s^2} + \frac{K_1^{3u_1}}{2s}, \frac{K_1^{3w_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{3u_2}}{s^2} + \frac{K_1^{3u_2}}{2s}, \frac{K_1^{3w_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{3u_3}}{s^2} + \frac{K_1^{3u_3}}{2s} \\ \frac{K_{11}^{4u_0}}{s^2} + \frac{K_1^{4u_0}}{2s}, \frac{K_1^{4w_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{4u_1}}{s^2} + \frac{K_1^{4u_1}}{2s}, \frac{K_1^{4w_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{4u_2}}{s^2} + \frac{K_1^{4u_2}}{2s}, \frac{K_1^{4w_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{4u_3}}{s^2} + \frac{K_1^{4u_3}}{2s} \\ \frac{K_1^{9u_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{9w_0}}{s^2} + \frac{K_1^{9w_0}}{2s}, \frac{K_1^{9u_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{9w_1}}{s^2} + \frac{K_1^{9w_1}}{2s}, \frac{K_1^{9u_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{9w_2}}{s^2} + \frac{K_1^{9w_2}}{2s}, \frac{K_1^{9u_3}}{2s} \\ \frac{K_1^{10u_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{10w_0}}{s^2} + \frac{K_1^{10w_0}}{2s}, \frac{K_1^{10u_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{10w_1}}{s^2} + \frac{K_1^{10w_1}}{2s}, \frac{K_1^{10u_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{10w_2}}{s^2} + \frac{K_1^{10w_2}}{2s}, \frac{K_1^{10u_3}}{2s} \\ \frac{K_1^{11u_0}}{2s}, \frac{K_{11}^{11w_0}}{s^2} + \frac{K_1^{11w_0}}{2s}, \frac{K_1^{11u_1}}{2s}, \frac{K_{11}^{11w_1}}{s^2} + \frac{K_1^{11w_1}}{2s}, \frac{K_1^{11u_2}}{2s}, \frac{K_{11}^{11w_2}}{s^2} + \frac{K_1^{11w_2}}{2s}, \frac{K_1^{11u_3}}{2s} \end{bmatrix}.$$

Аналогично для системы (3.12) имеем следующие матрицы:

$$X_j = [U_{0z}^j, V_{0z}^j, W_{0z}^j, U_{1z}^j, V_{1z}^j, W_{1z}^j, U_{2z}^j, V_{2z}^j, W_{2z}^j, U_{3z}^j, V_{2z}^j]^T,$$

$$F_j = [K^{1q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - K^{1q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, K^{2q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - K^{2q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, K^{3q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - K^{3q_{13}^-} Q_{(z)13}^-,$$

$$, K^{4q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - K^{4q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, K^{5q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - K^{5q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, K^{6q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - K^{6q_{23}^-} Q_{(z)23}^-,$$

$$, K^{7q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - K^{7q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, K^{8q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - K^{8q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, K^{9q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - K^{9q_{33}^-} Q_{(z)33}^-,$$

$$, K^{10q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - K^{10q_{33}^-} Q_{(z)33}^-, K^{11q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - K^{11q_{33}^-} Q_{(z)33}^-]^T;$$

A_i, B_i, C_i - квадратные матрицы коэффициентов размером 11×11 , определяемые следующим образом:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,11} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11,1} & A_{11,2} & A_{11,3} & \dots & A_{11,11} \end{bmatrix};$$

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \dots & B_{1,11} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \dots & B_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{11,1} & B_{11,2} & B_{11,3} & \dots & B_{11,11} \end{bmatrix};$$

$$C_i = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & \dots & C_{1,11} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & \dots & C_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{11,1} & C_{11,2} & C_{11,3} & \dots & C_{11,11} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матриц определяются равенствами

$$A_{i,1} = \frac{K_{11}^{iu_0}}{s^2} - \frac{K_1^{iu_0}}{2s}, A_{i,2} = -\frac{zK_{12}^{iv_0}}{2s}, A_{i,3} = -\frac{K_1^{iw_0}}{2s}, A_{i,4} = \frac{K_{11}^{iu_1}}{s^2} - \frac{K_1^{iu_1}}{2s}, A_{i,5} = -\frac{zK_{12}^{iv_1}}{2s},$$

$$A_{i,6} = -\frac{K_1^{iw_1}}{2s}, A_{i,7} = \frac{K_{11}^{iu_2}}{s^2} - \frac{K_1^{iu_2}}{2s}, A_{i,8} = -\frac{zK_{12}^{iv_2}}{2s}, A_{i,9} = -\frac{K_1^{iw_2}}{2s}, A_{i,10} = \frac{K_{11}^{iu_3}}{s^2} - \frac{K_1^{iu_3}}{2s},$$

$$A_{i,11} = -\frac{zK_{12}^{iv_3}}{2s}, i = \overline{1,4};$$

$$A_{i,1} = \frac{zK_{12}^{iu_0}}{2s}, A_{i,2} = \frac{K_{11}^{iv_0}}{s^2} - \frac{K_1^{iv_0}}{2s}, A_{i,3} = 0, A_{i,4} = \frac{zK_{12}^{iu_1}}{2s}, A_{i,5} = \frac{K_{11}^{iv_1}}{s^2} - \frac{K_1^{iv_1}}{2s}, A_{i,6} = 0,$$

$$A_{i,7} = \frac{zK_{12}^{iu_2}}{2s}, A_{i,8} = \frac{K_{11}^{iv_2}}{s^2} - \frac{K_1^{iv_2}}{2s}, A_{i,9} = 0, A_{i,10} = \frac{zK_{12}^{iu_3}}{2s}, A_{i,11} = \frac{K_{11}^{iv_3}}{s^2} - \frac{K_1^{iv_3}}{2s}, i = \overline{5,8};$$

$$A_{i,1} = \frac{-K_1^{iu_0}}{2s}, A_{i,2} = 0, A_{i,3} = \frac{K_{11}^{iw_0}}{s^2} - \frac{K_1^{iw_0}}{2s}, A_{i,4} = \frac{-K_1^{iu_1}}{2s}, A_{i,5} = 0, A_{i,6} = \frac{K_{11}^{iw_1}}{s^2} - \frac{K_1^{iw_1}}{2s},$$

$$A_{i,7} = \frac{-K_1^{iu_2}}{2s}, A_{i,8} = 0, A_{i,9} = \frac{K_{11}^{iw_2}}{s^2} - \frac{K_1^{iw_2}}{2s}, A_{i,10} = \frac{-K_1^{iu_3}}{2s}, A_{i,11} = 0, i = \overline{9,11};$$

$$B_{i,1} = \frac{-2K_{11}^{iu_0}}{s^2} + K_0^{iu_0} - z^2 K_{22}^{iu_0}, B_{i,2} = zK_2^{iv_0}, B_{i,3} = K_0^{1w_0}, B_{i,4} = \frac{-2K_{11}^{iu_1}}{s^2} + K_0^{iu_1} - z^2 K_{22}^{iu_1},$$

$$B_{i,5} = zK_2^{iv_1}, B_{i,6} = K_0^{1w_1}, B_{i,7} = \frac{-2K_{11}^{iu_2}}{s^2} + K_0^{iu_2} - z^2 K_{22}^{iu_2}, B_{i,8} = zK_2^{iv_2}, B_{i,9} = K_0^{1w_2},$$

$$B_{i,10} = \frac{-2K_{11}^{iu_3}}{s^2} + K_0^{iu_3} - z^2 K_{22}^{iu_3}, B_{i,11} = zK_2^{iv_3}, i = \overline{1,4};$$

$$B_{i,1} = -zK_2^{iu_0}, B_{i,2} = \frac{-2K_{11}^{iv_0}}{s^2} + K_0^{iv_0} - z^2 K_{22}^{iv_0}, B_{i,3} = -zK_2^{iw_0}, B_{i,4} = -zK_2^{iu_1},$$

$$B_{i,5} = \frac{-2K_{11}^{iv_1}}{s^2} + K_0^{iv_1} - z^2 K_{22}^{iv_1}, B_{i,6} = -zK_2^{iw_1}, B_{i,7} = -zK_2^{iu_2},$$

$$B_{i,8} = \frac{-2K_{11}^{iv_2}}{s^2} + K_0^{iv_2} - z^2 K_{22}^{iv_2}, B_{i,9} = -zK_2^{iw_2}, B_{i,10} = -zK_2^{iu_3},$$

$$B_{i,11} = \frac{-2K_{11}^{iv_3}}{s^2} + K_0^{iv_3} - z^2 K_{22}^{iv_3}, i = \overline{5,8};$$

$$B_{i,1} = K_0^{iu_0}, B_{i,2} = zK_2^{iv_0}, B_{i,3} = \frac{-2K_{11}^{iw_0}}{s^2} + K_0^{iw_0} - z^2K_{22}^{iw_0}, B_{i,4} = K_0^{iu_1},$$

$$B_{i,5} = zK_2^{iv_1}, B_{i,6} = \frac{-2K_{11}^{iw_1}}{s^2} + K_0^{iw_1} - z^2K_{22}^{iw_1}, B_{i,7} = K_0^{iu_2}, B_{i,8} = zK_2^{iv_2},$$

$$B_{i,9} = \frac{-2K_{11}^{iw_2}}{s^2} + K_0^{iw_2} - z^2K_{22}^{iw_2}, B_{i,10} = K_0^{iu_3}, B_{i,11} = zK_2^{iv_3}, i = \overline{9,11};$$

$$C_{i,1} = \frac{K_{11}^{iu_0}}{s^2} + \frac{K_1^{iu_0}}{2s}, C_{i,2} = \frac{zK_{12}^{iv_0}}{2s}, C_{i,3} = \frac{K_1^{iw_0}}{2s}, C_{i,4} = \frac{K_{11}^{iu_1}}{s^2} + \frac{K_1^{iu_1}}{2s}, C_{i,5} = \frac{zK_{12}^{iv_1}}{2s},$$

$$C_{i,6} = \frac{K_1^{iw_1}}{2s}, C_{i,7} = \frac{K_{11}^{iu_2}}{s^2} + \frac{K_1^{iu_2}}{2s}, C_{i,8} = \frac{zK_{12}^{iv_2}}{2s}, C_{i,9} = \frac{K_1^{iw_2}}{2s}, C_{i,10} = \frac{K_{11}^{iu_3}}{s^2} + \frac{K_1^{iu_3}}{2s},$$

$$C_{i,11} = \frac{zK_{12}^{iv_3}}{2s}, i = \overline{1,4};$$

$$C_{i,1} = \frac{-zK_{12}^{iu_0}}{2s}, C_{i,2} = \frac{K_{11}^{iv_0}}{s^2} + \frac{K_1^{iv_0}}{2s}, C_{i,3} = 0, C_{i,4} = \frac{-zK_{12}^{iu_1}}{2s}, C_{i,5} = \frac{K_{11}^{iv_1}}{s^2} + \frac{K_1^{iv_1}}{2s},$$

$$C_{i,6} = 0, C_{i,7} = \frac{-zK_{12}^{iu_2}}{2s}, C_{i,8} = \frac{K_{11}^{iv_2}}{s^2} + \frac{K_1^{iv_2}}{2s}, C_{i,9} = 0, C_{i,10} = \frac{-zK_{12}^{iu_3}}{2s},$$

$$C_{i,11} = \frac{K_{11}^{iv_3}}{s^2} + \frac{K_1^{iv_3}}{2s}, i = \overline{5,8};$$

$$C_{i,1} = \frac{K_1^{iu_0}}{2s}, C_{i,2} = 0, C_{i,3} = \frac{K_{11}^{iw_0}}{s^2} + \frac{K_1^{iw_0}}{2s}, C_{i,4} = \frac{K_1^{iu_1}}{2s}, C_{i,5} = 0, C_{i,6} = \frac{K_{11}^{iw_1}}{s^2} + \frac{K_1^{iw_1}}{2s},$$

$$C_{i,7} = \frac{K_1^{iu_2}}{2s}, C_{i,8} = 0, C_{i,9} = \frac{K_{11}^{iw_2}}{s^2} + \frac{K_1^{iw_2}}{2s}, C_{i,10} = \frac{K_1^{iu_3}}{2s}, C_{i,11} = 0, i = \overline{9,11}.$$

Векторы искоемых перемещений X_j находятся из выражения

$$X_j = P_j X_{j+1} + Q_j, j = \overline{1, N-1}.$$

Здесь

$$X_0 = X_N = \Theta,$$

$$P_1 = -(B_1)^{-1} C_1, P_j = -(B_j + A_j P_{j-1})^{-1} C_j,$$

$$Q_1 = (B_1)^{-1} F_1, Q_j = (B_j + A_j P_{j-1})^{-1} (F_j - A_j Q_{j-1}), j = \overline{2, N-1}.$$

Расчеты проведены с помощью программы для ЭВМ. В результате получены перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. Определив перемещения, деформации оболочки находятся по формулам (3.2),

тангенциальные напряжения - из соотношений закона Гука (3.3). Поперечные напряжения получаются по формулам (1.14).

3.4. Результаты параметрического анализа

В этом разделе на основании разработанной математической модели приведены результаты расчетов НДС конических оболочек постоянной и переменной толщины. В качестве примера расчета рассматривается замкнутая коническая оболочка, жестко защемленная на краях $x = x_1$, $x = x_2$, со следующими параметрами: половина угла конусности $\gamma = \frac{\pi}{4}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

3.4.1. НДС “погранслоя” конической оболочки постоянной толщины

Рассматривается коническая оболочка постоянной толщины со следующими параметрами: начало и конец оболочки вдоль оси $x_1 = 1 \text{ м}$, $x_2 = 3x_1$, полутолщина оболочки $h_1 = h_2 = h = 0,02x_1$. Оболочка находится под действием нагрузки Q_0 , равномерно распределенной на внутренней поверхности.

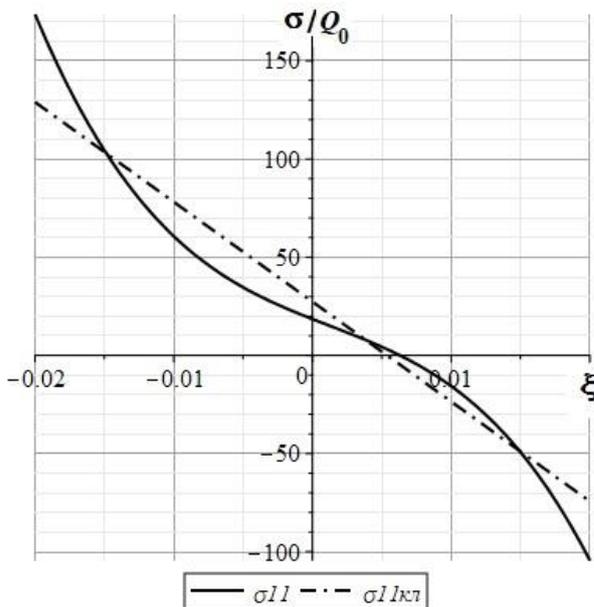


Рис. 3.2. Изменение σ_{11} по толщине на краю $x = x_2$

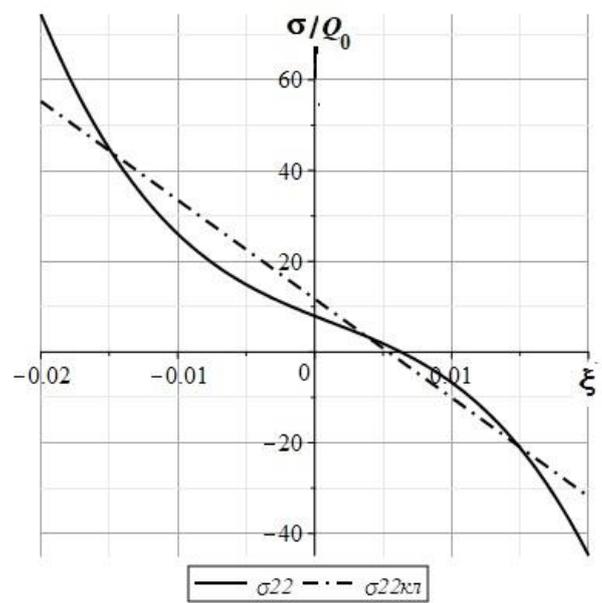
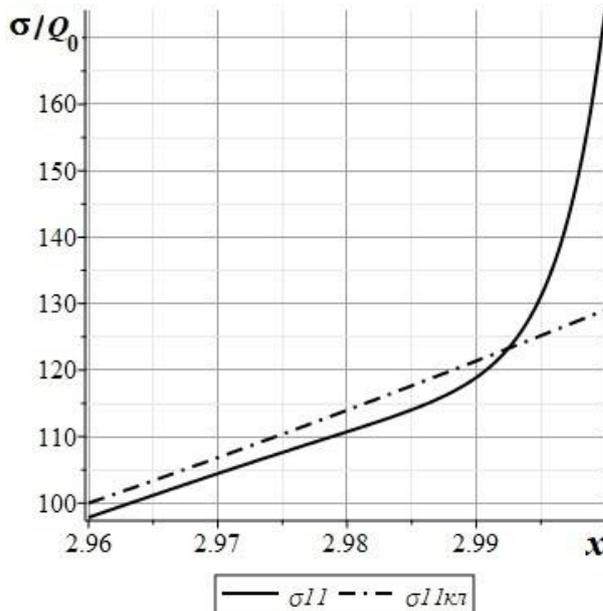
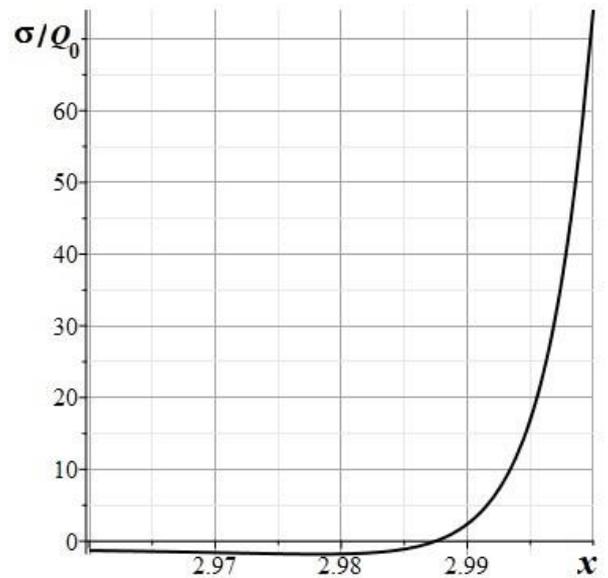


Рис. 3.3. Изменение σ_{22} по толщине на краю $x = x_2$

Рис. 3.4. Изменение σ_{11} в краевой зонеРис. 3.5. Изменение σ_{33} в краевой зоне

Графики рис. 3.2 – 3.5 иллюстрируют изменения нормальных и касательных напряжений в краевой зоне оболочки. Отметим, что аббревиатура «кл» соответствует результатам расчета по классической теории.

Анализируя графики на рис. 3.2 – 3.5 можно установить, что максимальные нормальные напряжения в зоне жестко заземленного края существенно уточняются, а именно: σ_{11} - на 35 % (рис. 3.2, 3.4) и σ_{22} - 36 % (рис. 3.3). Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 42,5 % от основного изгибного напряжения σ_{11} (рис 3.5).

3.4.2. Расчет конической оболочки переменной толщины, несимметрично изменяющейся относительно срединной поверхности

Рассматривается коническая оболочка переменной толщины, имеющая начало и конец вдоль оси, определяемые координатами $x_1 = 0,1 м$, $x_2 = 5x_1$. Оболочка находится под действием равномерно распределенной нагрузки Q_0 по внутренней поверхности, т.е. имеем осесимметричный случай. Толщина оболочки изменяется по следующему закону:

$$h_1 = h_0 + k_0(x - x_1), k_0 = 1/400,$$

$$h_2 = h_0 = 0,02x_1.$$

На рис. 3.6 – 3.9 показаны результаты расчета НДС оболочки. Отметим, что аббревиатура «кл» соответствует данным расчета по классической теории.

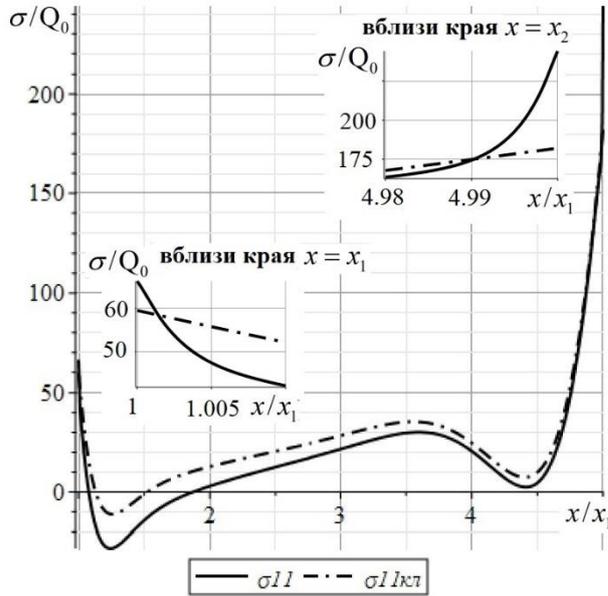


Рис. 3.6. Изменение σ_{11} по длине оболочки

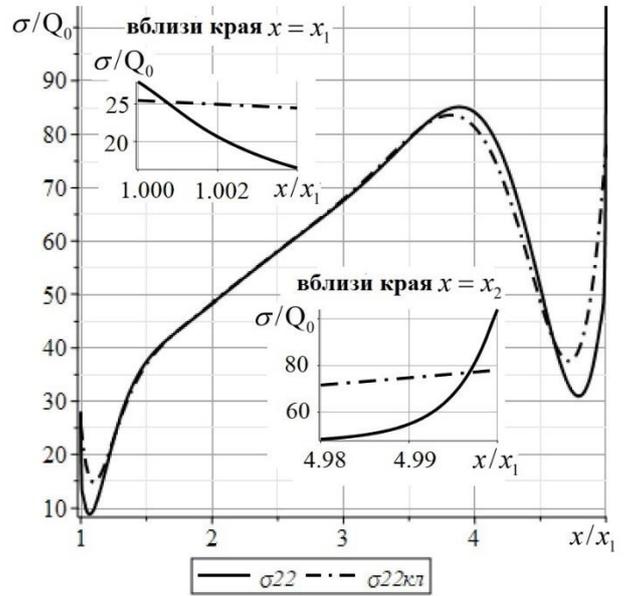


Рис. 3.7. Изменение σ_{22} по длине

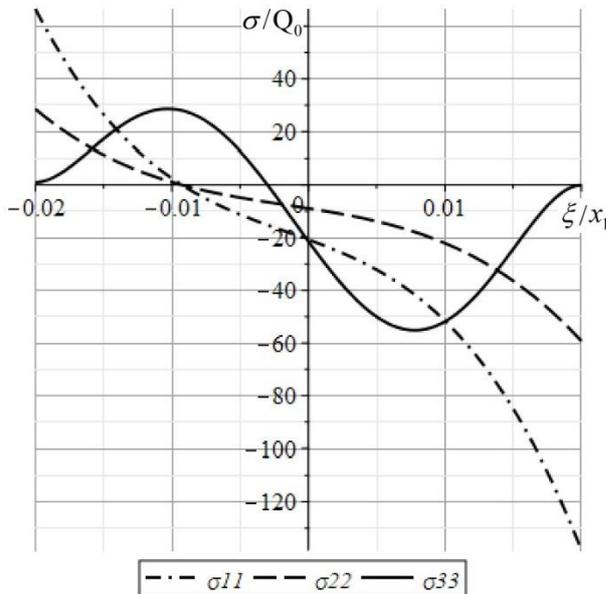


Рис. 3.8. Изменение напряжений по толщине на краю $x = x_1$

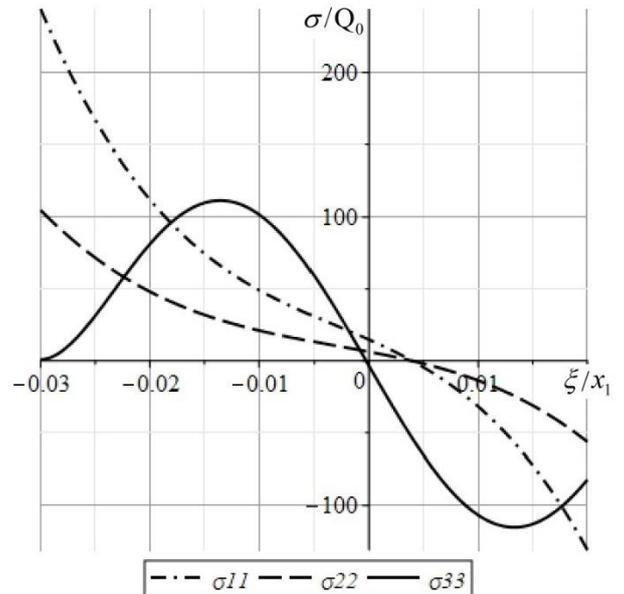


Рис. 3.9. Изменение напряжений по толщине на краю $x = x_2$

Анализ графиков на рис. 3.6 и рис. 3.7 показывает, что максимальные

напряжения σ_{11} и σ_{22} , определяемые по уточненной теории, превышают значения этих же напряжений, соответствующих классической теории, на 12% для края $x = x_1$ и на 35% для края $x = x_2$. Дополнительные максимальные поперечные нормальные напряжения σ_{33} достигают значение порядка 40 % от основного изгибного напряжения σ_{11} на краю $x = x_1$ (рис. 3.8) и 45% на краю $x = x_2$ (рис. 3.9).

3.4.3. Расчет конической оболочки под действием локальной нагрузки

В качестве примера расчета рассматривается коническая оболочка со следующими параметрами: координаты начала и конца по образующей оболочки $x_1 = 1\text{м}$, $x_2 = 6x_1$, относительная полутолщина $\varepsilon = 0,02$. Оболочка находится под действием следующих видов нагрузок:

- локальной нагрузки, равномерно распределенной на части внутренней поверхности оболочки

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 \leq x < x_1^1 \\ Q_0 & \text{при } x_1^1 \leq x \leq x_2^1 \\ 0 & \text{при } x_2^1 < x \leq x_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

- локальной нагрузки, линейно распределенной на части внутренней поверхности оболочки

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 \leq x < x_1^1 \\ Q_0 x & \text{при } x_1^1 \leq x \leq x_2^1 \\ 0 & \text{при } x_2^1 < x \leq x_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

где $x_1^1 = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{\tau}{2}$, $x_2^1 = \frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{\tau}{2}$, τ - ширина полосы нагружения.

На рис. 3.10 – 3.11 показаны результаты расчета НДС оболочки. На рис. 3.10 показан результат расчета при $\tau = 1/10x_1$ для случая нагрузки (3.13). Анализируя полученный результат, можно сделать следующий вывод: вблизи жесткого защемленных краев и зон приложения локальной нагрузки имеют место быстро затухающие дополнительные напряженные состояния.

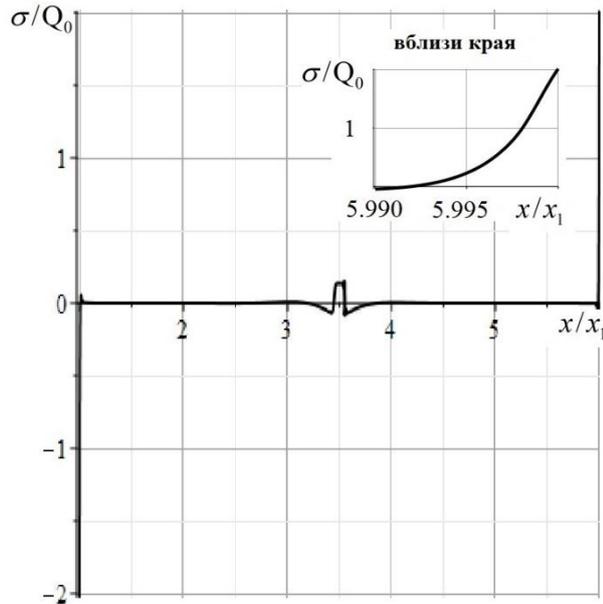


Рис. 3.10. Изменение поперечного нормального напряжения по длине оболочки

Далее рассматривается влияние размера полосы нагружения на НДС оболочки. Предполагается, что оболочка находится под действием нагрузки (3.14) при $\tau = 1/5x_1$ (рис. 3.11а), $\tau = 2x_1$ (рис. 3.11б) и $\tau = 4x_1$ (рис. 3.11в).

Анализ графиков на рис. 3.11 показывает, что:

- дополнительные поперечные напряжения «пограничного слоя» σ_{33} составляют более 40% от максимальных нормальных напряжений σ_{11} ;
- при увеличении ширины полосы нагружения поперечные нормальные напряжения «погранслоя» возрастают.

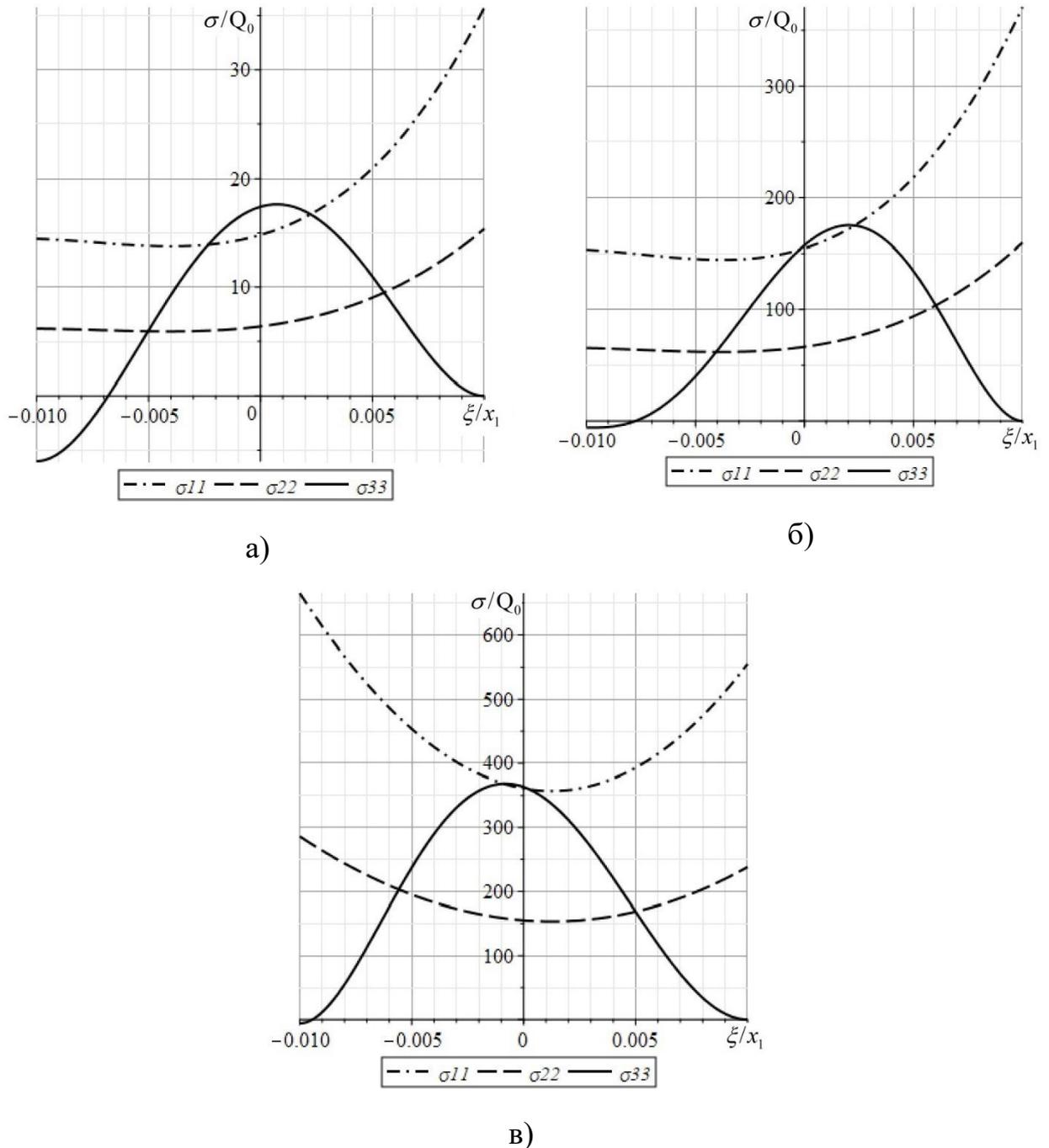


Рис. 3.11. Изменение напряжений по толщине на краю $x = x_2$ при различных размерах полосы нагружения

3.5. Выводы по третьей главе

1. На основе уточненной теории для конических оболочек получены двумерные уравнения равновесия и соответствующие граничные условия в перемещениях.

2. Краевая задача конической оболочки приведена к решению обыкновенных

дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий путем разложения компонент перемещений и внешних нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате.

3. Разработан алгоритм определения НДС конической оболочки с применением метода конечных разностей и матричной прогонки.

4. Приведены примеры расчетов и параметрического анализа НДС конических оболочек постоянной и переменной толщин. Установлено, что в зоне искажения напряженного состояния нормальные тангенциальные напряжения существенно уточняются и поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют один порядок с максимальными значениями основного изгибного напряжения. При удалении от края напряжения, полученные по уточненной и классической теориям совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов.

ГЛАВА IV. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

4.1. Построение основных уравнений для многослойных ортотропных композитных оболочек вращения

Рассматривается многослойная композитная оболочка вращения, отнесенная к триортогональной криволинейной системе координат α_1, α_2, ξ . Координатные оси α_1, α_2 совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось ξ направлена по наружной нормали к этой поверхности. Основное направление армирования волокон каждого слоя, соответственно, совпадает с направлением локальной системы координат $O123$ (рис.4.1).

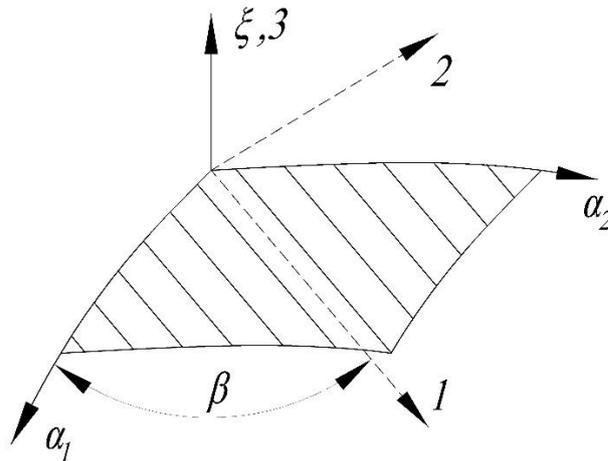


Рис. 4.1. Основное направление армирования волокон каждого слоя

В соответствии с работами [12, 13, 93] перемещения представляются в виде

$$\begin{aligned}
 U_1(\alpha_1, \alpha_2, \xi) &= \sum_{k=0}^3 u_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!}, \\
 U_2(\alpha_1, \alpha_2, \xi) &= \sum_{k=0}^3 v_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!}, \\
 U_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi) &= \sum_{k=0}^2 w_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют осям α_1, α_2 и ξ .

Полагаем, что по внутренней ($\xi = -h_1$) и внешней ($\xi = +h_2$) поверхностях оболочки, а также на торцевых плоскостях действуют внешние распределенные

нагрузки q_{i3}^{\pm}, q_{ji} , $i = \overline{1,3}$, $j = 1, 2$, соответственно.

Деформации оболочки определяются как

$$\{e_{\alpha_1 \alpha_2 \xi}\} = \{e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\xi}, e_{\alpha_2 \xi}, e_{\alpha_1 \xi}, e_{\alpha_1 \alpha_2}\}^T, \quad (4.2)$$

где, компоненты деформаций находятся с помощью геометрических соотношений

$$\begin{aligned} e_{\alpha_1} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} U_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_3, \\ e_{\alpha_2} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} U_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_3, \\ e_{\xi} &= \frac{\partial U_3}{\partial \xi}, e_{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} U_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} U_2 \right], \\ e_{\alpha_1 \xi} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_1, e_{\alpha_2 \xi} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

где коэффициенты Ламе H_k ($k = \overline{1,3}$) определяются формулами

$$H_i = A_i a_i, H_3 = 1, a_i = 1 + \frac{\xi}{R_i}, i = 1, 2.$$

Подставляя разложения (4.1) в геометрические соотношения (4.3), находим деформации

$$\begin{aligned} e_{\alpha_1} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{v_k}{A_2} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!}, \\ e_{\alpha_2} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{u_k}{A_1} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!}, \\ e_{\xi} &= \sum_{k=1}^2 w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}, \\ e_{\alpha_1 \alpha_2} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v_k \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_k \right) \frac{\xi^k}{k!}, \\ e_{\alpha_1 \xi} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_1 a_1} \frac{\partial w_k}{\partial \alpha_1} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{u_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!}, \\ e_{\alpha_2 \xi} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_2 a_2} \frac{\partial w_k}{\partial \alpha_2} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Закон Гука для n -го слоя в локальной системе координат $O123$ имеет следующий вид:

$$\{\sigma_{123}^{(n)}\} = [C^{(n)}] \{e_{123}^{(n)}\}. \quad (4.5)$$

Здесь $\{\sigma_{123}^{(n)}\} = [\sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{33}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{13}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}]^T$ - вектор напряжений n -го слоя оболочки, $\{e_{123}^{(n)}\} = [e_{11}^{(n)}, e_{22}^{(n)}, e_{33}^{(n)}, e_{23}^{(n)}, e_{13}^{(n)}, e_{12}^{(n)}]^T$ - вектор деформаций n -го слоя, $[C^{(n)}]$

- матрица жесткости n -го слоя

$$[C^{(n)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(n)} & C_{12}^{(n)} & C_{13}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(n)} & C_{22}^{(n)} & C_{23}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(n)} & C_{23}^{(n)} & C_{33}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$C_{11}^{(n)} = \frac{E_1^{(n)} (1 - \mu_{23}^{(n)} \mu_{32}^{(n)})}{\mu^{(n)}}, \quad C_{12}^{(n)} = \frac{E_1^{(n)} (\mu_{21}^{(n)} + \mu_{31}^{(n)} \mu_{23}^{(n)})}{\mu^{(k)}},$$

$$C_{13}^{(n)} = \frac{E_1^{(n)} (\mu_{31}^{(n)} + \mu_{21}^{(n)} \mu_{32}^{(n)})}{\mu^{(n)}}, \quad C_{22}^{(n)} = \frac{E_2^{(n)} (1 - \mu_{13}^{(n)} \mu_{31}^{(n)})}{\mu^{(n)}},$$

$$C_{23}^{(n)} = \frac{E_2^{(n)} (\mu_{32}^{(n)} + \mu_{12}^{(n)} \mu_{31}^{(n)})}{\mu^{(k)}}, \quad C_{33}^{(n)} = \frac{E_3^{(n)} (1 - \mu_{12}^{(n)} \mu_{21}^{(n)})}{\mu^{(n)}},$$

$$C_{44}^{(n)} = G_{23}^{(n)}, \quad C_{55}^{(n)} = G_{13}^{(n)}, \quad C_{66}^{(n)} = G_{12}^{(n)},$$

$$\mu^{(n)} = (1 - \mu_{12}^{(n)} \mu_{21}^{(n)} - \mu_{23}^{(n)} \mu_{32}^{(n)} - \mu_{13}^{(n)} \mu_{31}^{(n)} - 2\mu_{13}^{(n)} \mu_{32}^{(n)} \mu_{21}^{(n)}),$$

где $E_i^{(n)}$ - модуль Юнга, $G_{ij}^{(n)}$ - модуль сдвига, $\mu_{ij}^{(n)}$ - коэффициенты Пуассона

материала k -го слоя; между ними имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\mu_{12}^{(n)}}{E_1^{(n)}} = \frac{\mu_{21}^{(n)}}{E_2^{(n)}}, \quad \frac{\mu_{13}^{(n)}}{E_1^{(n)}} = \frac{\mu_{31}^{(n)}}{E_3^{(n)}}, \quad \frac{\mu_{23}^{(n)}}{E_2^{(n)}} = \frac{\mu_{32}^{(n)}}{E_3^{(n)}}. \quad (4.7)$$

Связь между напряжениями и деформациями n -го слоя в общей системе координат $O\alpha_1\alpha_2\xi$ определяется следующей формулой [125]:

$$\{\sigma_{\alpha_1\alpha_2\xi}^{(n)}\} = [T^{(n)}]^T [C^{(n)}] [T^{(n)}] \{e_{\alpha_1\alpha_2\xi}^{(n)}\}. \quad (4.8)$$

Здесь $[T^{(n)}]$ - матрица перехода, принимаемая в виде

$$[T^{(n)}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta^{(n)} & \sin^2 \beta^{(n)} & 0 & 0 & 0 & \sin \beta^{(n)} \cos \beta^{(n)} \\ \sin^2 \beta^{(n)} & \cos^2 \beta^{(n)} & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta^{(n)} \cos \beta^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta^{(n)} & -\sin \beta^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \beta^{(n)} & \cos \beta^{(n)} & 0 \\ -\sin 2\beta^{(n)} & \sin 2\beta^{(n)} & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \beta^{(n)} - \sin^2 \beta^{(n)} \end{bmatrix}$$

и $\{\sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \xi}^{(n)}\} = \{\sigma_{\alpha_1}^{(n)}, \sigma_{\alpha_2}^{(n)}, \sigma_{\xi}^{(n)}, \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)}, \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)}, \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)}\}^T$, - вектор напряжений n -го слоя

оболочки в общей системе координат $O\alpha_1\alpha_2\xi$.

Равенство (4.8) может быть переписано следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha_1}^{(n)} \\ \sigma_{\alpha_2}^{(n)} \\ \sigma_{\xi}^{(n)} \\ \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)} \\ \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)} \\ \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} Q_{11}^{(n)} & Q_{12}^{(n)} & Q_{13}^{(n)} & 0 & 0 & Q_{16}^{(n)} \\ Q_{21}^{(n)} & Q_{22}^{(n)} & Q_{23}^{(n)} & 0 & 0 & Q_{26}^{(n)} \\ Q_{31}^{(n)} & Q_{31}^{(n)} & Q_{33}^{(n)} & 0 & 0 & Q_{36}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(n)} & Q_{45}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45}^{(n)} & Q_{55}^{(n)} & 0 \\ Q_{16}^{(n)} & Q_{26}^{(n)} & Q_{36}^{(n)} & 0 & 0 & Q_{66}^{(n)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} e_{\alpha_1} \\ e_{\alpha_2} \\ e_{\xi} \\ e_{\alpha_2 \xi} \\ e_{\alpha_1 \xi} \\ e_{\alpha_1 \alpha_2} \end{array} \right\}. \quad (4.9)$$

Здесь компоненты матрицы жесткости $Q_{ij}, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
Q_{11}^{(n)} &= C_{11}^{(n)} \cos^4 \beta^{(n)} + C_{22}^{(n)} \sin^4 \beta^{(n)} + 2(C_{12}^{(n)} + 2C_{66}^{(n)}) \sin^2 \beta^{(n)} \cos^2 \beta^{(n)}, \\
Q_{12}^{(n)} &= (C_{11}^{(n)} + C_{22}^{(n)} - 4C_{66}^{(n)}) \sin^2 \beta^{(n)} \cos^2 \beta^{(n)} + C_{12}^{(n)} (\cos^4 \beta^{(n)} + \sin^4 \beta^{(n)}), \\
Q_{13}^{(n)} &= C_{12}^{(n)} \cos^2 \beta^{(n)} + C_{23}^{(n)} \sin^2 \beta^{(n)}, \\
Q_{16}^{(n)} &= (C_{11}^{(n)} - C_{12}^{(n)} - 2C_{66}^{(n)}) \sin \beta^{(n)} \cos^3 \beta^{(n)} + (C_{12}^{(n)} - C_{22}^{(n)} + 2C_{66}^{(n)}) \sin^3 \beta^{(n)} \cos \beta^{(n)}, \\
Q_{22}^{(n)} &= C_{11}^{(n)} \sin^4 \beta^{(n)} + C_{22}^{(n)} \cos^4 \beta^{(n)} + 2(C_{12}^{(n)} + 2C_{66}^{(n)}) \sin^2 \beta^{(n)} \cos^2 \beta^{(n)}, \\
Q_{23}^{(n)} &= C_{12}^{(n)} \sin^2 \beta^{(n)} + C_{23}^{(n)} \cos^2 \beta^{(n)}, \\
Q_{26}^{(n)} &= (C_{11}^{(n)} - C_{12}^{(n)} - 2C_{66}^{(n)}) \sin^3 \beta^{(n)} \cos \beta^{(n)} + (C_{12}^{(n)} - C_{22}^{(n)} + 2C_{66}^{(n)}) \sin \beta^{(n)} \cos^3 \beta^{(n)}, \\
Q_{33}^{(n)} &= C_{33}^{(n)}, \\
Q_{36}^{(n)} &= (C_{12}^{(n)} - C_{23}^{(n)}) \sin \beta^{(n)} \cos \beta^{(n)}, \\
Q_{44}^{(n)} &= C_{44}^{(n)} \cos^2 \beta^{(n)} + C_{55}^{(n)} \sin^2 \beta^{(n)}, \\
Q_{45}^{(n)} &= (C_{55}^{(n)} - C_{44}^{(n)}) \sin \beta^{(n)} \cos \beta^{(n)}, \\
Q_{55}^{(n)} &= C_{44}^{(n)} \sin^2 \beta^{(n)} + C_{55}^{(n)} \cos^2 \beta^{(n)}, \\
Q_{66}^{(n)} &= [C_{11}^{(n)} + C_{22}^{(n)} - 2(C_{12}^{(n)} + C_{66}^{(n)})] \sin^2 \beta^{(n)} \cos^2 \beta^{(n)} + C_{66}^{(n)} (\cos^4 \beta^{(n)} + \sin^4 \beta^{(n)}), \\
Q_{ij}^{(n)} &= Q_{ji}^{(n)}, i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}.
\end{aligned}$$

Для ортотропных композитных материалов $Q_{16}^{(n)} = Q_{26}^{(n)} = Q_{36}^{(n)} = Q_{45}^{(n)} = 0$, т.к.

$\sin \beta^{(n)} \cos \beta^{(n)} = 0$, тогда уравнения (4.9) принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha_1}^{(n)} \\ \sigma_{\alpha_2}^{(n)} \\ \sigma_{\xi}^{(n)} \\ \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)} \\ \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)} \\ \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} Q_{11}^{(n)} & Q_{12}^{(n)} & Q_{13}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^{(n)} & Q_{22}^{(n)} & Q_{23}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31}^{(n)} & Q_{31}^{(n)} & Q_{33}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(n)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} e_{\alpha_1} \\ e_{\alpha_2} \\ e_{\xi} \\ e_{\alpha_2 \xi} \\ e_{\alpha_1 \xi} \\ e_{\alpha_1 \alpha_2} \end{array} \right\}. \quad (4.10)$$

Для построения основных уравнений уточненного варианта теории оболочек используется вариационный принцип Лагранжа [27]

$$\begin{aligned}
\delta L = & \sum_{n=1}^N \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left(\sigma_{\alpha_1}^{(n)} \delta e_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_2}^{(n)} \delta e_{\alpha_2} + \sigma_{\xi}^{(n)} \delta e_{\xi} + \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)} \delta e_{\alpha_1 \alpha_2} + \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)} \delta e_{\alpha_1 \xi} + \right. \\
& \left. + \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)} \delta e_{\alpha_2 \xi} \right) A_1 A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\xi - \sum_{n=1}^N \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left(q_{11} \delta U_1 + q_{12} \delta U_2 + \right. \\
& \left. + q_{13} \delta U_3 \right) A_2 a_2 d\alpha_2 d\xi - \sum_{n=1}^N \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left(q_{21} \delta U_1 + q_{22} \delta U_2 + q_{23} \delta U_3 \right) A_1 a_1 d\alpha_1 d\xi - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left\{ q_{13}^+ [a_1 a_2 \delta U_1]_{(\xi=+h_2)} - q_{13}^- [a_1 a_2 \delta U_1]_{(\xi=-h_1)} + \right. \\
& \left. + q_{23}^+ [a_1 a_2 \delta U_2]_{(\xi=+h_2)} - q_{23}^- [a_1 a_2 \delta U_2]_{(\xi=-h_1)} + \right. \\
& \left. + q_{33}^+ [a_1 a_2 \delta U_3]_{(\xi=+h_2)} - q_{33}^- [a_1 a_2 \delta U_3]_{(\xi=-h_1)} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь N – количество слоев. Подставляя разложения (4.1) и выражения (4.4) в (4.11), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left\{ \sigma_{\alpha_1}^{(n)} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\delta v_k}{A_2} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{\delta w_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!} \right] + \right. \\
& \left. + \sigma_{\alpha_2}^{(n)} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\delta u_k}{A_1} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{\delta w_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!} \right] + \sigma_{\xi}^{(n)} \sum_{k=1}^2 \delta w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} + \right. \\
& \left. + \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_k \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_k \right) \frac{\xi^k}{k!} \right] + \right. \\
& \left. + \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)} \left[\sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_1 a_1} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_1} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 \delta u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{\delta u_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!} \right] + \right. \\
& \left. + \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)} \left[\sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_2 a_2} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_2} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 \delta v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{\delta v_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!} \right] \right\} A_1 A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\xi - \\
& - \sum_{n=1}^N \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left(q_{11} \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\xi^k}{k!} + q_{12} \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\xi^k}{k!} + q_{13} \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\xi^k}{k!} \right) A_2 a_2 d\alpha_2 d\xi - \\
& - \sum_{n=1}^N \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left(q_{21} \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\xi^k}{k!} + q_{22} \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\xi^k}{k!} + q_{23} \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\xi^k}{k!} \right) A_1 a_1 d\alpha_1 d\xi - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left\{ q_{13}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{13}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)} + \right.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
& +q_{23}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{23}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)} + \\
& +q_{33}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{33}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)} \left. \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0.
\end{aligned}$$

Введем для внутренних и внешних силовых факторов следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
(N_1, N_{12}, Q_{13}, \overline{N_1}, \overline{N_{12}}, \overline{Q_{13}}) &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} a_2 (\sigma_{\alpha_1}^{(n)}, \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)}, \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) d\xi, \\
(M_1^{(k)}, M_{12}^{(k)}, M_{13}^{(k)}, \overline{M_1^{(k)}}, \overline{M_{12}^{(k)}}, \overline{M_{13}^{(k)}}) &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} a_2 (\sigma_{\alpha_1}^{(n)}, \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)}, \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \\
(N_2, N_{21}, Q_{23}, \overline{N_2}, \overline{N_{21}}, \overline{Q_{23}}) &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} a_1 (\sigma_{\alpha_2}^{(n)}, \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)}, \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) d\xi, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$(M_2^{(k)}, M_{21}^{(k)}, M_{23}^{(k)}, \overline{M_2^{(k)}}, \overline{M_{21}^{(k)}}, \overline{M_{23}^{(k)}}) = \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} a_1 (\sigma_{\alpha_2}^{(n)}, \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(n)}, \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi,$$

$$(T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, T_3^{(k)}) = \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} a_1 a_2 (\sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)}, \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)}, \sigma_{\xi}^{(n)}) \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi,$$

$$P_1^{(k)} = q_{13}^+ \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{13}^- \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)},$$

$$P_2^{(k)} = q_{23}^+ \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{23}^- \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)},$$

$$P_3^{(k)} = q_{33}^+ \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)} - q_{33}^- \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)}.$$

где верхней чертой помечены внешние силовые факторы, заданные на краях оболочки.

Поставляя выражения (4.13) в (4.12), после преобразований получим систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{13}}{R_1} + P_1^{(0)} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{13}^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1,3}; \\
& \frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{23}}{R_2} + P_2^{(0)} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{23}^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1,3}; \\
& \frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - P_3^{(0)} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1,2}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

В общем случае граничные условия представляются в следующем виде:

на краях $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_1 = \alpha_1^{(2)}$

$$\begin{aligned}
& \overline{u}_0 = \overline{u}_0 \vee N_1 = \overline{N}_1, \overline{v}_0 = \overline{v}_0 \vee N_{12} = \overline{N}_{12}, \overline{w}_0 = \overline{w}_0 \vee Q_{13} = \overline{Q}_{13}, \\
& \overline{u}_k = \overline{u}_k \vee M_1^{(k)} = \overline{M}_1^{(k)}, \overline{v}_k = \overline{v}_k \vee M_{12}^{(k)} = \overline{M}_{12}^{(k)}, k = \overline{1,3} \\
& \overline{w}_k = \overline{w}_k \vee M_{13}^{(l)} = \overline{M}_{13}^{(l)}, l = \overline{1,2}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

на краях $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)}$ и $\alpha_2 = \alpha_2^{(2)}$

$$\begin{aligned}
& \overline{u}_0 = \overline{u}_0 \vee N_{21} = \overline{N}_{21}, \overline{v}_0 = \overline{v}_0 \vee N_2 = \overline{N}_2, \overline{w}_0 = \overline{w}_0 \vee Q_{23} = \overline{Q}_{23}, \\
& \overline{u}_k = \overline{u}_k \vee M_{21}^{(k)} = \overline{M}_{21}^{(k)}, \overline{v}_k = \overline{v}_k \vee M_2^{(k)} = \overline{M}_2^{(k)}, k = \overline{1,3} \\
& \overline{w}_k = \overline{w}_k \vee M_{23}^{(l)} = \overline{M}_{23}^{(l)}, l = \overline{1,2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

где $\overline{u}_k, \overline{v}_k, \overline{w}_l, k = 0..3, l = 0..2$ – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

Алгоритм определения НДС оболочек. Отметим, что полученная система уравнений равновесия (4.14) и граничные условия (4.15), (4.16) для многослойной

композитной оболочки аналогичны системе (1.10) и граничным условиям (1.11), (1.12) для изотропной.

Для расчета перемещений многослойной композитной сферической оболочки, подставляя компоненты напряжений (4.10), с учетом формул (2.1) и (4.4), в выражения для обобщенных усилий (4.13), а затем полученные выражения в уравнения равновесия (4.14), находим систему дифференциальных уравнений в частных производных 22-го порядка относительно 11 обобщенных перемещений $u_k, v_k, w_l, k = \overline{0..3}; l = \overline{0..2}$. Для решения сформулированной краевой задачи последовательно применяются: разложение перемещений и нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате, методы конечных разностей и матричной прогонки, аналогично пунктам 2.2 и 2.3 для изотропной сферической оболочки.

Для расчета перемещения многослойной композитной конической оболочки, подставляя компоненты напряжений (4.10), с учетом формул (3.1) и (4.4), в выражения для обобщенных усилий (4.13), а затем полученные выражения в уравнения равновесия (4.14), находим систему дифференциальных уравнений в перемещениях. Для решения сформулированной краевой задачи последовательно применяются: разложение перемещений и нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате, методы конечных разностей и матричной прогонки, аналогично пунктам 3.2 и 3.3 для изотропной конической оболочки.

В результате находим перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. Компоненты деформации оболочки определяются при подстановке найденных перемещений в соотношения (4.4). Тангенциальные напряжения получаются из формул (4.10).

Поперечные напряжения n -го слоя определяются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)} &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_1^2 a_2} \int_{h^{(i-1)}}^{h^{(i)}} \left[\frac{a_1 a_2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{\alpha_1}^{(i)}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_1^2}{A_2} \frac{\partial \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(i)}}{\partial \alpha_2} + \frac{a_1^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\sigma_{\alpha_1}^{(i)} - \sigma_{\alpha_2}^{(i)}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 a_1 a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(i)} \right] d\xi + \frac{(a_1^2 a_2)_{\xi=-h_1}}{a_1^2 a_2} q_{13}^-, \\
\sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)} &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_1 a_2^2} \int_{h^{(i-1)}}^{h^{(i)}} \left[\frac{a_1 a_2}{A_2} \frac{\partial \sigma_{\alpha_2}^{(i)}}{\partial \alpha_2} + \frac{a_2^2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(i)}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_2^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\sigma_{\alpha_2}^{(i)} - \sigma_{\alpha_1}^{(i)}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 a_1 a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^{(i)} \right] d\xi + \frac{(a_1 a_2^2)_{\xi=-h_1}}{a_1 a_2^2} q_{23}^-, \\
\sigma_{\xi}^{(n)} &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_1 a_2} \int_{h^{(i-1)}}^{h^{(i)}} \left[\frac{a_2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_1}{A_2} \frac{\partial \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)}}{\partial \alpha_2} - \frac{a_2}{R_1} \sigma_{\alpha_1}^{(n)} - \frac{a_1}{R_2} \sigma_{\alpha_2}^{(n)} + \frac{a_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{\alpha_1 \xi}^{(n)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{\alpha_2 \xi}^{(n)} \right] d\xi + \frac{(a_1 a_2)_{\xi=-h_1}}{a_1 a_2} q_{33}^-.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2. Пологая сферическая оболочка двоякой кривизны

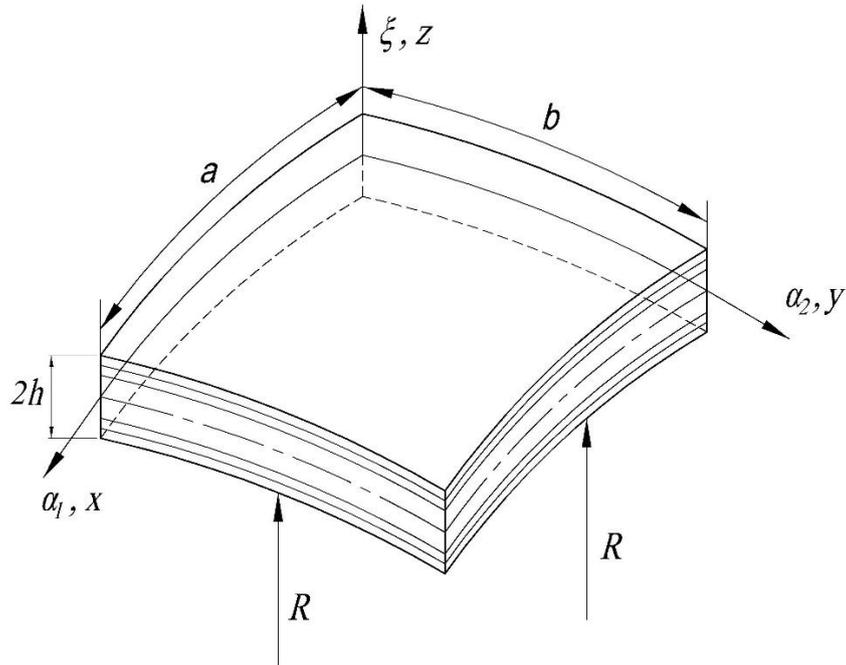


Рис. 4.2. Система координат для пологой сферической оболочки двоякой кривизны

Рассматривается полая сферическая оболочка двоякой кривизны, как

показано на рис. 4.2. Оболочка нагружается поперечными нагрузками q_{33}^+ на внешней и q_{33}^- на внутренней поверхностях.

Первая квадратичная форма запишется как

$$ds^2 = R^2 d\alpha_1^2 + R^2 d\alpha_2^2 = dx^2 + dy^2, dx = R d\alpha_1, dy = R d\alpha_2, dz = d\xi.$$

Обозначим через a и b – длины криволинейных границ оболочки.

Перемещения аппроксимируются в виде

$$\begin{aligned} U_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^3 u_k(x, y) \frac{z^k}{k!}, \\ U_2(x, y, z) &= \sum_{k=0}^3 v_k(x, y) \frac{z^k}{k!}, \\ U_3(x, y, z) &= \sum_{k=0}^2 w_k(x, y) \frac{z^k}{k!}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют осям x , y и z .

Формулы для деформации оболочки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{R}{R+z} \left(\sum_{k=0}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R} \frac{z^k}{k!} \right), \\ e_y &= \frac{R}{R+z} \left(\sum_{k=0}^3 \frac{\partial v_k}{\partial y} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R} \frac{z^k}{k!} \right), \\ e_z &= \sum_{k=1}^2 w_k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}, \\ e_{xy} &= \frac{R}{R+z} \left(\sum_{k=0}^3 \frac{\partial u_k}{\partial y} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{z^k}{k!} \right), \\ e_{xz} &= \sum_{k=0}^2 \frac{R}{R+z} \frac{\partial w_k}{\partial x} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{u_k}{R+z} \frac{z^k}{k!}, \\ e_{yz} &= \sum_{k=0}^2 \frac{R}{R+z} \frac{\partial w_k}{\partial y} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k}{R+z} \frac{z^k}{k!}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

ИЛИ

$$e_x = \frac{R}{R+z} \left(e_x^0 + e_x^1 z + e_x^2 \frac{z^2}{2} + e_x^3 \frac{z^3}{3!} \right), e_y = \frac{R}{R+z} \left(e_y^0 + e_y^1 z + e_y^2 \frac{z^2}{2} + e_y^3 \frac{z^3}{3!} \right), \quad (4.20)$$

$$e_z = e_z^0 + e_z^1 z, e_{xy} = \frac{R}{R+z} \left(e_{xy}^0 + e_{xy}^1 z + e_{xy}^2 \frac{z^2}{2} + e_{xy}^3 \frac{z^3}{3!} \right),$$

$$e_{xz} = \frac{R}{R+z} \left(e_{xz}^0 + e_{xz}^1 z + e_{xz}^2 \frac{z^2}{2} + e_{xz}^3 \frac{z^3}{3!} \right) + e_{xz}^{*0} + e_{xz}^{*1} z + e_{xz}^{*2} \frac{z^2}{2},$$

$$e_{yz} = \frac{R}{R+z} \left(e_{yz}^0 + e_{yz}^1 z + e_{yz}^2 \frac{z^2}{2} + e_{yz}^3 \frac{z^3}{3!} \right) + e_{yz}^{*0} + e_{yz}^{*1} z + e_{yz}^{*2} \frac{z^2}{2},$$

где

$$e_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R}, e_x^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{w_1}{R}, e_x^2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{w_2}{R}, e_x^3 = \frac{\partial u_3}{\partial x},$$

$$e_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w_0}{R}, e_y^1 = \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{w_1}{R}, e_y^2 = \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{w_2}{R}, e_y^3 = \frac{\partial v_3}{\partial y}, \quad (4.21)$$

$$e_z^0 = w_1, e_z^1 = w_2, e_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, e_{xy}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}, e_{xy}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}, e_{xy}^3 = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x},$$

$$e_{xz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{u_0}{R}, e_{xz}^1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{u_1}{R}, e_{xz}^2 = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{u_2}{R}, e_{xz}^3 = -\frac{u_3}{R}, e_{xz}^{*0} = u_1, e_{xz}^{*1} = u_2, e_{xz}^{*2} = u_3,$$

$$e_{yz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{v_0}{R}, e_{yz}^1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{v_1}{R}, e_{yz}^2 = \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{v_2}{R}, e_{yz}^3 = -\frac{v_3}{R}, e_{yz}^{*0} = v_1, e_{yz}^{*1} = v_2, e_{yz}^{*2} = v_3,$$

Связь между напряжениями и деформациями n -го слоя представляется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(n)} \\ \sigma_y^{(n)} \\ \sigma_z^{(n)} \\ \sigma_{yz}^{(n)} \\ \sigma_{xz}^{(n)} \\ \sigma_{xy}^{(n)} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} Q_{11}^{(n)} & Q_{12}^{(n)} & Q_{13}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^{(n)} & Q_{22}^{(n)} & Q_{23}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31}^{(n)} & Q_{31}^{(n)} & Q_{33}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(n)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{array} \right\}. \quad (4.22)$$

Для построения основных уравнений уточненного варианта теории оболочек используется вариационный принцип Лагранжа

$$\delta L = \sum_{n=1}^N \iiint (\sigma_x^{(n)} \delta e_x + \sigma_y^{(n)} \delta e_y + \sigma_z^{(n)} \delta e_z + \sigma_{xy}^{(n)} \delta e_{xy} + \sigma_{xz}^{(n)} \delta e_{xz} + \sigma_{yz}^{(n)} \delta e_{yz}) \quad (4.23)$$

$$\sigma_{yz}^{(n)} \delta e_{yz} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 dx dy dz - \iint \left\{ q_{33}^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 \delta w^+ - q_{33}^- \left(1 - \frac{h}{R}\right)^2 \delta w^- \right\} dx dy = 0,$$

где $w^+ = w_0 + hw_1 + \frac{h^2}{2} w_2$, $w^- = w_0 - hw_1 + \frac{h^2}{2} w_2$,

Подставляя разложения (4.20) в (4.23), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \iiint \left\{ \sigma_x^{(n)} \left(\delta e_x^0 + z \delta e_x^1 + \frac{z^2}{2} \delta e_x^2 + \frac{z^3}{3!} \delta e_x^3 \right) + \sigma_y^{(n)} \left(\delta e_y^0 + z \delta e_y^1 + \frac{z^2}{2} \delta e_y^2 + \frac{z^3}{3!} \delta e_y^3 \right) + \right. \\ & + \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_z^{(n)} \left(\delta e_z^0 + z \delta e_z^1 \right) + \sigma_{xy}^{(n)} \left(\delta e_{xy}^0 + z \delta e_{xy}^1 + \frac{z^2}{2} \delta e_{xy}^2 + \frac{z^3}{3!} \delta e_{xy}^3 \right) + \\ & + \sigma_{xz}^{(n)} \left(\delta e_{xz}^0 + z \delta e_{xz}^1 + \frac{z^2}{2} \delta e_{xz}^2 + \frac{z^3}{3!} \delta e_{xz}^3 \right) + \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{xz}^{(n)} \left(\delta e_{xz}^{*0} + z \delta e_{xz}^{*1} + \frac{z^2}{2} \delta e_{xz}^{*2} \right) + \\ & + \sigma_{yz}^{(n)} \left(\delta e_{yz}^0 + z \delta e_{yz}^1 + \frac{z^2}{2} \delta e_{yz}^2 + \frac{z^3}{3!} \delta e_{yz}^3 \right) + \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{yz}^{(n)} \left(\delta e_{yz}^{*0} + z \delta e_{yz}^{*1} + \right. \\ & \left. + \frac{z^2}{2} \delta e_{yz}^{*2} \right) \left. \right\} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dx dy dz - \iint \left\{ q_{33}^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 \delta w^+ - q_{33}^- \left(1 - \frac{h}{R}\right)^2 \delta w^- \right\} dx dy = \\ & = \iint \left\{ N_x \delta e_x^0 + M_x^1 \delta e_x^1 + M_x^2 \delta e_x^2 + M_x^3 \delta e_x^3 + N_y \delta e_y^0 + M_y^1 \delta e_y^1 + M_y^2 \delta e_y^2 + M_y^3 \delta e_y^3 + \right. \\ & + T_z \delta e_z^0 + T_z^1 \delta e_z^1 + N_{xy} \delta e_{xy}^0 + M_{xy}^1 \delta e_{xy}^1 + M_{xy}^2 \delta e_{xy}^2 + M_{xy}^3 \delta e_{xy}^3 + \\ & + Q_{xz} \delta e_{xz}^0 + M_{xz}^1 \delta e_{xz}^1 + M_{xz}^2 \delta e_{xz}^2 + M_{xz}^3 \delta e_{xz}^3 + T_{xz} \delta e_{xz}^{*0} + T_{xz}^1 \delta e_{xz}^{*1} + T_{xz}^2 \delta e_{xz}^{*2} + \\ & + Q_{yz} \delta e_{yz}^0 + M_{yz}^1 \delta e_{yz}^1 + M_{yz}^2 \delta e_{yz}^2 + M_{yz}^3 \delta e_{yz}^3 + T_{yz} \delta e_{yz}^{*0} + T_{yz}^1 \delta e_{yz}^{*1} + T_{yz}^2 \delta e_{yz}^{*2} + \\ & \left. - P^{(0)} \delta w_0 - P^{(1)} \delta w_1 - P^{(2)} \delta w_2 \right\} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь используются следующие обозначения обобщенных усилий:

$$\begin{aligned} \left\{ N_x \quad M_x^1 \quad M_x^2 \quad M_x^3 \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_x^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \quad \frac{z^3}{6} \right\}^T dz, \\ \left\{ N_y \quad M_y^1 \quad M_y^2 \quad M_y^3 \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_y^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \quad \frac{z^3}{6} \right\}^T dz, \\ \left\{ N_{xy} \quad M_{xy}^1 \quad M_{xy}^2 \quad M_{xy}^3 \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_{xy}^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \quad \frac{z^3}{6} \right\}^T dz, \\ \left\{ Q_{xz} \quad M_{xz}^1 \quad M_{xz}^2 \quad M_{xz}^3 \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_{xz}^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \quad \frac{z^3}{6} \right\}^T dz, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \left\{ Q_{yz} \quad M_{yz}^1 \quad M_{yz}^2 \quad M_{yz}^3 \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_{yz}^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \quad \frac{z^3}{6} \right\}^T dz, \\ \left\{ T_{xz}^0 \quad T_{xz}^1 \quad T_{xz}^2 \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_{xz}^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R} \right)^2 \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \right\}^T dz, \\ \left\{ T_{yz}^0 \quad T_{yz}^1 \quad T_{yz}^2 \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_{yz}^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R} \right)^2 \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \right\}^T dz, \\ \left\{ T_z^0 \quad T_z^1 \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_z^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R} \right)^2 \left\{ 1 \quad z \right\}^T dz, \\ P^{(k)} &= q_{33}^+ \left(1 + \frac{h}{R} \right)^2 \frac{h^k}{k!} - q_{33}^- \left(1 - \frac{h}{R} \right)^2 \frac{(-h)^k}{k!}, k = \overline{0, 2}. \end{aligned}$$

По аналогии с разделом 4.1, преобразуем вариационное уравнение (4.24), в результате получим систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{Q_{xz}}{R} &= 0, \\ \frac{\partial M_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{M_{xz}^{(k)}}{R} - T_{xz}^{(k-1)} &= 0, k = \overline{1, 3}; \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{Q_{yz}}{R} &= 0, \\ \frac{\partial M_y^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{M_{yz}^{(k)}}{R} - T_{yz}^{(k-1)} &= 0, k = \overline{1, 3}; \\ \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - \frac{N_x}{R} - \frac{N_y}{R} + P^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial M_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^{(k)}}{\partial y} - \frac{M_x^{(k)}}{R} - \frac{M_y^{(k)}}{R} - T_z^{(k-1)} + P^{(k)} &= 0, k = \overline{1, 2}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \left\{ A_{ij}^k \quad B_{ij}^k \quad C_{ij}^k \quad D_{ij}^k \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \frac{z^k}{k!} Q_{ij}^{(n)} \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \quad \frac{z^3}{6} \right\}^T dz, k = \overline{0, 3}, \\ \left\{ As_{ij}^k \quad Bs_{ij}^k \quad Cs_{ij}^k \quad Ds_{ij}^k \right\}^T &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^k}{k!} Q_{ij}^{(n)} \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \quad \frac{z^3}{6} \right\}^T dz, \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\left\{ As_{ij}^{*k} \quad Bs_{ij}^{*k} \quad Cs_{ij}^{*k} \right\}^T = \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left(1 + \frac{z}{R} \right)^2 \frac{z^k}{k!} Q_{ij}^{(n)} \left\{ 1 \quad z \quad \frac{z^2}{2} \right\}^T dz, k = \overline{0,3}, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}.$$

где $Q_{ij}^{(n)}$ - компоненты жесткости, определяемой по формуле (4.10).

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \sigma_x^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz = \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left(Q_{11}^{(n)} e_x + Q_{12}^{(n)} e_y + Q_{13}^{(n)} e_z \right) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz = \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left\{ Q_{11}^{(n)} \frac{R}{R+z} \left(e_x^0 + e_x^1 z + e_x^2 \frac{z^2}{2} + e_x^3 \frac{z^3}{3!} \right) + Q_{12}^{(n)} \frac{R}{R+z} \left(e_y^0 + e_y^1 z + e_y^2 \frac{z^2}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e_y^3 \frac{z^3}{3!} \right) + Q_{13}^{(n)} \left(e_z^0 + e_z^1 z \right) \right\} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz = \sum_{n=1}^N \int_{h^{(n-1)}}^{h^{(n)}} \left\{ Q_{11}^{(n)} \left(e_x^0 + e_x^1 z + e_x^2 \frac{z^2}{2} + e_x^3 \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\ &\quad \left. + Q_{12}^{(n)} \left(e_y^0 + e_y^1 z + e_y^2 \frac{z^2}{2} + e_y^3 \frac{z^3}{3!} \right) + Q_{13}^{(n)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left(e_z^0 + e_z^1 z \right) \right\} dz = \\ &= A_{11}^0 e_x^0 + B_{11}^0 e_x^1 + C_{11}^0 e_x^2 + D_{11}^0 e_x^3 + A_{12}^0 e_y^0 + B_{12}^0 e_y^1 + C_{12}^0 e_y^2 + D_{12}^0 e_y^3 + A_{13}^0 e_z^0 + B_{13}^0 e_z^1. \end{aligned}$$

Аналогично, преобразуем остальные обобщенные усилия, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ M_x^1 \\ M_x^2 \\ M_x^3 \\ N_y \\ M_y^1 \\ M_y^2 \\ M_y^3 \\ T_z^0 \\ T_z^1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccc} A_{11}^0 & B_{11}^0 & C_{11}^0 & D_{11}^0 & A_{12}^0 & B_{12}^0 & C_{12}^0 & D_{12}^0 & A_{13}^0 & B_{13}^0 \\ A_{11}^1 & B_{11}^1 & C_{11}^1 & D_{11}^1 & A_{12}^1 & B_{12}^1 & C_{12}^1 & D_{12}^1 & A_{13}^1 & B_{13}^1 \\ A_{11}^2 & B_{11}^2 & C_{11}^2 & D_{11}^2 & A_{12}^2 & B_{12}^2 & C_{12}^2 & D_{12}^2 & A_{13}^2 & B_{13}^2 \\ A_{11}^3 & B_{11}^3 & C_{11}^3 & D_{11}^3 & A_{12}^3 & B_{12}^3 & C_{12}^3 & D_{12}^3 & A_{13}^3 & B_{13}^3 \\ A_{21}^0 & B_{21}^0 & C_{21}^0 & D_{21}^0 & A_{22}^0 & B_{22}^0 & C_{22}^0 & D_{22}^0 & A_{23}^0 & B_{23}^0 \\ A_{21}^1 & B_{21}^1 & C_{21}^1 & D_{21}^1 & A_{22}^1 & B_{22}^1 & C_{22}^1 & D_{22}^1 & A_{23}^1 & B_{23}^1 \\ A_{21}^2 & B_{21}^2 & C_{21}^2 & D_{21}^2 & A_{22}^2 & B_{22}^2 & C_{22}^2 & D_{22}^2 & A_{23}^2 & B_{23}^2 \\ A_{21}^3 & B_{21}^3 & C_{21}^3 & D_{21}^3 & A_{22}^3 & B_{22}^3 & C_{22}^3 & D_{22}^3 & A_{23}^3 & B_{23}^3 \\ A_{31}^0 & B_{31}^0 & C_{31}^0 & D_{31}^0 & A_{32}^0 & B_{32}^0 & C_{32}^0 & D_{32}^0 & A_{33}^0 & B_{33}^0 \\ A_{31}^1 & B_{31}^1 & C_{31}^1 & D_{31}^1 & A_{32}^1 & B_{32}^1 & C_{32}^1 & D_{32}^1 & A_{33}^1 & B_{33}^1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} e_x^0 \\ e_x^1 \\ e_x^2 \\ e_x^3 \\ e_y^0 \\ e_y^1 \\ e_y^2 \\ e_y^3 \\ e_z^0 \\ e_z^1 \end{array} \right\}, \quad (4.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{xy} \\ M_{xy}^1 \\ M_{xy}^2 \\ M_{xy}^3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} A_{66}^0 & B_{66}^0 & C_{66}^0 & D_{66}^0 \\ A_{66}^1 & B_{66}^1 & C_{66}^1 & D_{66}^1 \\ A_{66}^2 & B_{66}^2 & C_{66}^2 & D_{66}^2 \\ A_{66}^3 & B_{66}^3 & C_{66}^3 & D_{66}^3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} e_{xy}^0 \\ e_{xy}^1 \\ e_{xy}^2 \\ e_{xy}^3 \end{array} \right\}, \quad (4.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{xz} \\ M_{xz}^1 \\ M_{xz}^2 \\ M_{xz}^3 \\ T_{xz}^0 \\ T_{xz}^1 \\ T_{xz}^2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccc} A_{55}^0 & B_{55}^0 & C_{55}^0 & D_{55}^0 & As_{55}^0 & Bs_{55}^0 & Cs_{55}^0 \\ A_{55}^1 & B_{55}^1 & C_{55}^1 & D_{55}^1 & As_{55}^1 & Bs_{55}^1 & Cs_{55}^1 \\ A_{55}^2 & B_{55}^2 & C_{55}^2 & D_{55}^2 & As_{55}^2 & Bs_{55}^2 & Cs_{55}^2 \\ A_{55}^3 & B_{55}^3 & C_{55}^3 & D_{55}^3 & As_{55}^3 & Bs_{55}^3 & Cs_{55}^3 \\ As_{55}^0 & Bs_{55}^0 & Cs_{55}^0 & Ds_{55}^0 & As_{55}^{*0} & Bs_{55}^{*0} & Cs_{55}^{*0} \\ As_{55}^1 & Bs_{55}^1 & Cs_{55}^1 & Ds_{55}^1 & As_{55}^{*1} & Bs_{55}^{*1} & Cs_{55}^{*1} \\ As_{55}^2 & Bs_{55}^2 & Cs_{55}^2 & Ds_{55}^2 & As_{55}^{*2} & Bs_{55}^{*2} & Cs_{55}^{*2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} e_{xz}^0 \\ e_{xz}^1 \\ e_{xz}^2 \\ e_{xz}^3 \\ e_{xz}^{*0} \\ e_{xz}^{*1} \\ e_{xz}^{*2} \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{yz} \\ M_{yz}^1 \\ M_{yz}^2 \\ M_{yz}^3 \\ T_{yz}^0 \\ T_{yz}^1 \\ T_{yz}^2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccc} A_{44}^0 & B_{44}^0 & C_{44}^0 & D_{44}^0 & As_{44}^0 & Bs_{44}^0 & Cs_{44}^0 \\ A_{44}^1 & B_{44}^1 & C_{44}^1 & D_{44}^1 & As_{44}^1 & Bs_{44}^1 & Cs_{44}^1 \\ A_{44}^2 & B_{44}^2 & C_{44}^2 & D_{44}^2 & As_{44}^2 & Bs_{44}^2 & Cs_{44}^2 \\ A_{44}^3 & B_{44}^3 & C_{44}^3 & D_{44}^3 & As_{44}^3 & Bs_{44}^3 & Cs_{44}^3 \\ As_{44}^0 & Bs_{44}^0 & Cs_{44}^0 & Ds_{44}^0 & As_{44}^{*0} & Bs_{44}^{*0} & Cs_{44}^{*0} \\ As_{44}^1 & Bs_{44}^1 & Cs_{44}^1 & Ds_{44}^1 & As_{44}^{*1} & Bs_{44}^{*1} & Cs_{44}^{*1} \\ As_{44}^2 & Bs_{44}^2 & Cs_{44}^2 & Ds_{44}^2 & As_{44}^{*2} & Bs_{44}^{*2} & Cs_{44}^{*2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} e_{yz}^0 \\ e_{yz}^1 \\ e_{yz}^2 \\ e_{yz}^3 \\ e_{yz}^{*0} \\ e_{yz}^{*1} \\ e_{yz}^{*2} \end{array} \right\}. \quad (4.31)$$

Подставляя выражения N_x , N_{xy} , Q_{xz} из (4.28) – (4.30) в первое уравнение системы (4.26) с учетом (4.21), находим

$$\begin{aligned} & A_{11}^0 \frac{\partial e_x^0}{\partial x} + B_{11}^0 \frac{\partial e_x^1}{\partial x} + C_{11}^0 \frac{\partial e_x^2}{\partial x} + D_{11}^0 \frac{\partial e_x^3}{\partial x} + A_{12}^0 \frac{\partial e_y^0}{\partial x} + B_{12}^0 \frac{\partial e_y^1}{\partial x} + C_{12}^0 \frac{\partial e_y^2}{\partial x} + D_{12}^0 \frac{\partial e_y^3}{\partial x} + \\ & + As_{13}^0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + Bs_{13}^0 \frac{\partial w_2}{\partial x} + A_{66}^0 \frac{\partial e_{xy}^0}{\partial y} + B_{66}^0 \frac{\partial e_{xy}^1}{\partial y} + C_{66}^0 \frac{\partial e_{xy}^2}{\partial y} + D_{66}^0 \frac{\partial e_{xy}^3}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{R} \left(A_{55}^0 e_{xz}^0 + B_{55}^0 e_{xz}^1 + C_{55}^0 e_{xz}^2 + D_{55}^0 e_{xz}^3 + As_{55}^0 e_{xz}^{*0} + Bs_{55}^0 e_{xz}^{*1} + Cs_{55}^0 e_{xz}^{*2} \right) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& A_{11}^0 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + B_{11}^0 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + C_{11}^0 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + D_{11}^0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \\
& + A_{12}^0 \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + B_{12}^0 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + C_{12}^0 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + D_{12}^0 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \\
& + A_{s_{13}}^0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + B_{s_{13}}^0 \frac{\partial w_2}{\partial x} + A_{66}^0 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{66}^0 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \right) + C_{66}^0 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} \right) + \\
& + D_{66}^0 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} \right) + A_{55}^0 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{u_0}{R^2} \right) + B_{55}^0 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{u_1}{R^2} \right) + C_{55}^0 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{u_2}{R^2} \right) - \\
& - D_{55}^0 \frac{u_3}{R^2} + \frac{A_{s_{55}}^0}{R} u_1 + \frac{B_{s_{55}}^0}{R} u_2 + \frac{C_{s_{55}}^0}{R} u_3 = -\frac{A_{55}^0}{R^2} u_0 + A_{11}^0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66}^0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \\
& + \left(\frac{A_{s_{55}}^0}{R} - \frac{B_{55}^0}{R^2} \right) u_1 + B_{11}^0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + B_{66}^0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \left(\frac{B_{s_{55}}^0}{R} - \frac{C_{55}^0}{R^2} \right) u_2 + C_{11}^0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + C_{66}^0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \\
& + \left(\frac{C_{s_{55}}^0}{R} - \frac{D_{55}^0}{R^2} \right) u_3 + D_{11}^0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + D_{66}^0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + (A_{12}^0 + A_{66}^0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \\
& + (B_{12}^0 + B_{66}^0) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + (C_{12}^0 + C_{66}^0) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + (D_{12}^0 + D_{66}^0) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \frac{A_{11}^0 + A_{12}^0 + A_{55}^0}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \\
& + \frac{B_{11}^0 + B_{12}^0 + B_{55}^0 + R A_{s_{13}}^0}{R} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{C_{11}^0 + C_{12}^0 + C_{55}^0 + R B_{s_{13}}^0}{R} \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично, преобразуем остальные уравнения системы (4.26), в результате получим следующую систему дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(\Phi_0^{iu_m} + \Phi_{11}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi_{22}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \Phi_{12}^{iv_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial y} + \sum_{n=0}^2 \Phi_1^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1,4} \\
& \sum_{m=0}^3 \Phi_{12}^{iu_m} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x \partial y} + \sum_{k=0}^3 \left(\Phi_0^{iv_k} + \Phi_{11}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi_{22}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_k + \sum_{n=0}^2 \Phi_2^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial y} = 0, \quad i = \overline{5,8} \\
& \sum_{m=0}^3 \Phi_1^{iu_m} \frac{\partial u_m}{\partial x} + \sum_{k=0}^3 \Phi_2^{iv_k} \frac{\partial v_k}{\partial y} + \sum_{n=0}^2 \left(\Phi_0^{iw_n} + \Phi_{11}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi_{22}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_n = \Phi^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - \Phi^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9,11}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Phi_0^{1u_0} &= -\frac{A_{55}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{1u_0} = A_{11}^0, \Phi_{22}^{1u_0} = A_{66}^0, \Phi_0^{1u_1} = \frac{A_{s_{55}}^0}{R} - \frac{B_{55}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{1u_1} = B_{11}^0, \Phi_{22}^{1u_1} = B_{66}^0, \\
\Phi_0^{1u_2} &= \frac{B_{s_{55}}^0}{R} - \frac{C_{55}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{1u_2} = C_{11}^0, \Phi_{22}^{1u_2} = C_{66}^0, \Phi_0^{1u_3} = \frac{C_{s_{55}}^0}{R} - \frac{D_{55}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{1u_3} = D_{11}^0, \Phi_{22}^{1u_3} = D_{66}^0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{12}^{1v_0} &= A_{12}^0 + A_{66}^0, \Phi_{12}^{1v_1} = B_{12}^0 + B_{66}^0, \Phi_{12}^{1v_2} = C_{12}^0 + C_{66}^0, \Phi_{12}^{1v_3} = D_{12}^0 + D_{66}^0, \\
\Phi_1^{1w_0} &= \frac{A_{11}^0 + A_{12}^0 + A_{55}^0}{R}, \Phi_1^{1w_1} = \frac{B_{11}^0 + B_{12}^0 + B_{55}^0 + RAs_{13}^0}{R}, \Phi_1^{1w_2} = \frac{C_{11}^0 + C_{12}^0 + C_{55}^0 + RBs_{13}^0}{R}, \\
\Phi_0^{2u_0} &= \frac{As_{55}^0}{R} - \frac{A_{55}^1}{R^2}, \Phi_{11}^{2u_0} = A_{11}^1, \Phi_{22}^{2u_0} = A_{66}^1, \Phi_0^{2u_1} = \frac{As_{55}^1}{R} + \frac{Bs_{55}^0}{R} - \frac{B_{55}^1}{R^2} - As_{55}^{*0}, \\
\Phi_{11}^{2u_1} &= B_{11}^1, \Phi_{22}^{2u_1} = B_{66}^1, \Phi_0^{2u_2} = \frac{Bs_{55}^1}{R} + \frac{Cs_{55}^0}{R} - \frac{C_{55}^1}{R^2} - Bs_{55}^0, \Phi_{11}^{2u_2} = C_{11}^1, \Phi_{22}^{2u_2} = C_{66}^1, \\
\Phi_0^{2u_3} &= \frac{Cs_{55}^1}{R} + \frac{Ds_{55}^0}{R} - \frac{D_{55}^1}{R^2} - Cs_{55}^{*0}, \Phi_{11}^{2u_3} = D_{11}^1, \Phi_{22}^{2u_3} = D_{66}^1, \Phi_{12}^{2v_0} = A_{12}^1 + A_{66}^1, \\
\Phi_{12}^{2v_1} &= B_{12}^1 + B_{66}^1, \Phi_{12}^{2v_2} = C_{12}^1 + C_{66}^1, \Phi_{12}^{2v_3} = D_{12}^1 + D_{66}^1, \Phi_1^{2w_0} = \frac{A_{11}^1 + A_{12}^1 + A_{55}^1 - RAs_{55}^0}{R}, \\
\Phi_1^{2w_1} &= \frac{B_{11}^1 + B_{12}^1 + B_{55}^1 + R(As_{13}^1 - Bs_{55}^0)}{R}, \Phi_1^{2w_2} = \frac{C_{11}^1 + C_{12}^1 + C_{55}^1 + R(Bs_{13}^1 - Cs_{55}^0)}{R}, \\
\Phi_0^{3u_0} &= \frac{As_{55}^1}{R} - \frac{A_{55}^2}{R^2}, \Phi_{11}^{3u_0} = A_{11}^2, \Phi_{22}^{3u_0} = A_{66}^2, \Phi_0^{3u_1} = \frac{As_{55}^2}{R} + \frac{Bs_{55}^1}{R} - \frac{B_{55}^2}{R^2} - As_{55}^{*1}, \\
\Phi_{11}^{3u_1} &= B_{11}^2, \Phi_{22}^{3u_1} = B_{66}^2, \Phi_0^{3u_2} = \frac{Bs_{55}^2}{R} + \frac{Cs_{55}^1}{R} - \frac{C_{55}^2}{R^2} - Bs_{55}^{*1}, \Phi_{11}^{3u_2} = C_{11}^2, \Phi_{22}^{3u_2} = C_{66}^2, \\
\Phi_0^{3u_3} &= \frac{Cs_{55}^2}{R} + \frac{Ds_{55}^1}{R} - \frac{D_{55}^2}{R^2} - Cs_{55}^{*1}, \Phi_{11}^{3u_3} = D_{11}^2, \Phi_{22}^{3u_3} = D_{66}^2, \Phi_{12}^{3v_0} = A_{12}^2 + A_{66}^2, \\
\Phi_{12}^{3v_1} &= B_{12}^2 + B_{66}^2, \Phi_{12}^{3v_2} = C_{12}^2 + C_{66}^2, \Phi_{12}^{3v_3} = D_{12}^2 + D_{66}^2, \Phi_1^{3w_0} = \frac{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{55}^2 - RAs_{55}^1}{R}, \\
\Phi_1^{3w_1} &= \frac{B_{11}^2 + B_{12}^2 + B_{55}^2 + R(As_{13}^2 - Bs_{55}^1)}{R}, \Phi_1^{3w_2} = \frac{C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{55}^2 + R(Bs_{13}^2 - Cs_{55}^1)}{R}, \\
\Phi_0^{4u_0} &= \frac{As_{55}^2}{R} - \frac{A_{55}^3}{R^2}, \Phi_{11}^{4u_0} = A_{11}^3, \Phi_{22}^{4u_0} = A_{66}^3, \Phi_0^{4u_1} = \frac{As_{55}^3}{R} + \frac{Bs_{55}^2}{R} - \frac{B_{55}^3}{R^2} - As_{55}^{*2}, \\
\Phi_{11}^{4u_1} &= B_{11}^3, \Phi_{22}^{4u_1} = B_{66}^3, \Phi_0^{4u_2} = \frac{Bs_{55}^3}{R} + \frac{Cs_{55}^2}{R} - \frac{C_{55}^3}{R^2} - Bs_{55}^{*2}, \Phi_{11}^{4u_2} = C_{11}^3, \Phi_{22}^{4u_2} = C_{66}^3, \\
\Phi_0^{4u_3} &= \frac{Cs_{55}^3}{R} + \frac{Ds_{55}^2}{R} - \frac{D_{55}^3}{R^2} - Cs_{55}^{*2}, \Phi_{11}^{4u_3} = D_{11}^3, \Phi_{22}^{4u_3} = D_{66}^3, \Phi_{12}^{4v_0} = A_{12}^3 + A_{66}^3, \\
\Phi_{12}^{4v_1} &= B_{12}^3 + B_{66}^3, \Phi_{12}^{4v_2} = C_{12}^3 + C_{66}^3, \Phi_{12}^{4v_3} = D_{12}^3 + D_{66}^3, \Phi_1^{4w_0} = \frac{A_{11}^3 + A_{12}^3 + A_{55}^3 - RAs_{55}^2}{R}, \\
\Phi_1^{4w_1} &= \frac{B_{11}^3 + B_{12}^3 + B_{55}^3 + R(As_{13}^3 - Bs_{55}^2)}{R}, \Phi_1^{4w_2} = \frac{C_{11}^3 + C_{12}^3 + C_{55}^3 + R(Bs_{13}^3 - Cs_{55}^2)}{R}, \\
\Phi_{12}^{5u_0} &= A_{21}^0 + A_{66}^0, \Phi_{12}^{5u_1} = B_{21}^0 + B_{66}^0, \Phi_{12}^{5u_2} = C_{21}^0 + C_{66}^0, \Phi_{12}^{5u_3} = D_{21}^0 + D_{66}^0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_0^{5v_0} &= -\frac{A_{44}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{5v_0} = A_{66}^0, \Phi_{22}^{5v_0} = A_{22}^0, \Phi_0^{5v_1} = \frac{As_{44}^0}{R} - \frac{B_{44}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{5v_1} = B_{66}^0, \Phi_{22}^{5v_1} = B_{22}^0, \\
\Phi_0^{5v_2} &= \frac{Bs_{44}^0}{R} - \frac{C_{44}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{5v_2} = C_{66}^0, \Phi_{22}^{5v_2} = C_{22}^0, \Phi_0^{5v_3} = \frac{Cs_{44}^0}{R} - \frac{D_{44}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{5v_3} = D_{66}^0, \Phi_{22}^{5v_3} = D_{22}^0, \\
\Phi_2^{5w_0} &= \frac{A_{21}^0 + A_{22}^0 + A_{44}^0}{R}, \Phi_2^{5w_1} = \frac{B_{21}^0 + B_{22}^0 + B_{44}^0 + As_{23}^0 R}{R}, \Phi_2^{5w_2} = \frac{C_{21}^0 + C_{22}^0 + C_{44}^0 + Bs_{23}^0 R}{R}, \\
\Phi_{12}^{6u_0} &= A_{21}^1 + A_{66}^1, \Phi_{12}^{6u_1} = B_{21}^1 + B_{66}^1, \Phi_{12}^{6u_2} = C_{21}^1 + C_{66}^1, \Phi_{12}^{6u_3} = D_{21}^1 + D_{66}^1, \\
\Phi_0^{6v_0} &= \frac{As_{44}^0}{R} - \frac{A_{44}^1}{R^2}, \Phi_{11}^{6v_0} = A_{66}^1, \Phi_{22}^{6v_0} = A_{22}^1, \Phi_0^{6v_1} = \frac{As_{44}^1}{R} + \frac{Bs_{44}^0}{R} - \frac{B_{44}^1}{R^2} - As_{44}^{*0}, \\
\Phi_{11}^{6v_1} &= B_{66}^1, \Phi_{22}^{6v_1} = B_{22}^1, \Phi_0^{6v_2} = \frac{Bs_{44}^1}{R} + \frac{Cs_{44}^0}{R} - \frac{C_{44}^1}{R^2} - Bs_{44}^{*0}, \Phi_{11}^{6v_2} = C_{66}^1, \Phi_{22}^{6v_2} = C_{22}^1, \\
\Phi_0^{6v_3} &= \frac{Cs_{44}^1}{R} + \frac{Ds_{44}^0}{R} - \frac{D_{44}^1}{R^2} - Cs_{44}^{*0}, \Phi_{11}^{6v_3} = D_{66}^1, \Phi_{22}^{6v_3} = D_{22}^1, \Phi_2^{6w_0} = \frac{A_{21}^1 + A_{22}^1 + A_{44}^1 - RAs_{44}^0}{R}, \\
\Phi_2^{6w_1} &= \frac{B_{21}^1 + B_{22}^1 + B_{44}^1 + R(As_{23}^1 - Bs_{44}^0)}{R}, \Phi_2^{6w_2} = \frac{C_{21}^1 + C_{22}^1 + C_{44}^1 + R(Bs_{23}^1 - Cs_{44}^0)}{R}, \\
\Phi_{12}^{7u_0} &= A_{21}^2 + A_{66}^2, \Phi_{12}^{7u_1} = B_{21}^2 + B_{66}^2, \Phi_{12}^{7u_2} = C_{21}^2 + C_{66}^2, \Phi_{12}^{7u_3} = D_{21}^2 + D_{66}^2, \\
\Phi_0^{7v_0} &= \frac{As_{44}^1}{R} - \frac{A_{44}^2}{R^2}, \Phi_{11}^{7v_0} = A_{66}^2, \Phi_{22}^{7v_0} = A_{22}^2, \Phi_0^{7v_1} = \frac{As_{44}^2}{R} + \frac{Bs_{44}^1}{R} - \frac{B_{44}^2}{R^2} - As_{44}^{*1}, \\
\Phi_{11}^{7v_1} &= B_{66}^2, \Phi_{22}^{7v_1} = B_{22}^2, \Phi_0^{7v_2} = \frac{Bs_{44}^2}{R} + \frac{Cs_{44}^1}{R} - \frac{C_{44}^2}{R^2} - Bs_{44}^{*1}, \Phi_{11}^{7v_2} = C_{66}^2, \Phi_{22}^{7v_2} = C_{22}^2, \\
\Phi_0^{7v_3} &= \frac{Cs_{44}^2}{R} + \frac{Ds_{44}^1}{R} - \frac{D_{44}^2}{R^2} - Cs_{44}^{*1}, \Phi_{11}^{7v_3} = D_{66}^2, \Phi_{22}^{7v_3} = D_{22}^2, \Phi_2^{7w_0} = \frac{A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{44}^2 - RAs_{44}^1}{R}, \\
\Phi_2^{7w_1} &= \frac{B_{21}^2 + B_{22}^2 + B_{44}^2 + R(As_{23}^2 - Bs_{44}^1)}{R}, \Phi_2^{7w_2} = \frac{C_{21}^2 + C_{22}^2 + C_{44}^2 + R(Bs_{23}^2 - Cs_{44}^1)}{R}, \\
\Phi_{12}^{8u_0} &= A_{21}^3 + A_{66}^3, \Phi_{12}^{8u_1} = B_{21}^3 + B_{66}^3, \Phi_{12}^{8u_2} = C_{21}^3 + C_{66}^3, \Phi_{12}^{8u_3} = D_{21}^3 + D_{66}^3, \\
\Phi_0^{8v_0} &= \frac{As_{44}^2}{R} - \frac{A_{44}^3}{R^2}, \Phi_{11}^{8v_0} = A_{66}^3, \Phi_{22}^{8v_0} = A_{22}^3, \Phi_0^{8v_1} = \frac{As_{44}^3}{R} + \frac{Bs_{44}^2}{R} - \frac{B_{44}^3}{R^2} - As_{44}^{*2}, \\
\Phi_{11}^{8v_1} &= B_{66}^3, \Phi_{22}^{8v_1} = B_{22}^3, \Phi_0^{8v_2} = \frac{Bs_{44}^3}{R} + \frac{Cs_{44}^2}{R} - \frac{C_{44}^3}{R^2} - Bs_{44}^{*2}, \Phi_{11}^{8v_2} = C_{66}^3, \Phi_{22}^{8v_2} = C_{22}^3, \\
\Phi_0^{8v_3} &= \frac{Cs_{44}^3}{R} + \frac{Ds_{44}^2}{R} - \frac{D_{44}^3}{R^2} - Cs_{44}^{*2}, \Phi_{11}^{8v_3} = D_{66}^3, \Phi_{22}^{8v_3} = D_{22}^3, \Phi_2^{8w_0} = \frac{A_{21}^3 + A_{22}^3 + A_{44}^3 - RAs_{44}^2}{R}, \\
\Phi_2^{8w_1} &= \frac{B_{21}^3 + B_{22}^3 + B_{44}^3 + R(As_{23}^3 - Bs_{44}^2)}{R}, \Phi_2^{8w_2} = \frac{C_{21}^3 + C_{22}^3 + C_{44}^3 + R(Bs_{23}^3 - Cs_{44}^2)}{R},
\end{aligned}$$

$$\Phi_1^{9u_0} = \frac{A_{55}^0 + A_{11}^0 + A_{21}^0}{R}, \Phi_1^{9u_1} = \frac{B_{55}^0 + B_{11}^0 + B_{21}^0 - RAs_{55}^0}{R}, \Phi_1^{9u_2} = \frac{B_{55}^0 + B_{11}^0 + B_{21}^0 - RAs_{55}^0}{R},$$

$$\Phi_1^{9u_3} = \frac{D_{55}^0 + D_{11}^0 + D_{21}^0 - RCs_{55}^0}{R}, \Phi_1^{9v_0} = \frac{A_{44}^0 + A_{12}^0 + A_{22}^0}{R}, \Phi_1^{9v_1} = \frac{B_{55}^0 + B_{11}^0 + B_{21}^0 - RAs_{55}^0}{R},$$

$$\Phi_1^{9v_2} = \frac{C_{44}^0 + C_{12}^0 + C_{22}^0 - RBs_{44}^0}{R}, \Phi_1^{9v_3} = \frac{D_{44}^0 + D_{12}^0 + D_{22}^0 - RCs_{44}^0}{R},$$

$$\Phi_0^{9w_0} = \frac{A_{11}^0 + A_{21}^0 + A_{12}^0 + A_{22}^0}{R^2}, \Phi_{11}^{9w_0} = -A_{55}^0, \Phi_{22}^{9w_0} = -A_{44}^0,$$

$$\Phi_0^{9w_1} = \frac{B_{11}^0 + B_{21}^0 + B_{12}^0 + B_{22}^0 + R(As_{13}^0 + As_{23}^0)}{R^2}, \Phi_{11}^{9w_1} = -B_{55}^0, \Phi_{22}^{9w_1} = -B_{44}^0,$$

$$\Phi_0^{9w_2} = \frac{C_{11}^0 + C_{21}^0 + C_{12}^0 + C_{22}^0 + R(Bs_{13}^0 + Bs_{23}^0)}{R^2}, \Phi_{11}^{9w_2} = -C_{55}^0, \Phi_{22}^{9w_2} = -C_{44}^0,$$

$$\Phi_1^{10u_0} = \frac{1}{R}(A_{55}^1 + A_{11}^1 + A_{21}^1 + RAs_{31}^0), \Phi_1^{10u_1} = \frac{1}{R}(B_{55}^1 + B_{11}^1 + B_{21}^1 + R(Bs_{31}^0 - As_{55}^1)),$$

$$\Phi_1^{10u_2} = \frac{1}{R}(C_{55}^1 + C_{11}^1 + C_{21}^1 + R(Cs_{31}^0 - Bs_{55}^1)), \Phi_1^{10u_3} = \frac{1}{R}(D_{55}^1 + D_{11}^1 + D_{21}^1 + R(Ds_{31}^0 - Cs_{55}^1)),$$

$$\Phi_1^{10v_0} = \frac{1}{R}(A_{44}^1 + A_{12}^1 + A_{22}^1 + RAs_{32}^0), \Phi_1^{10v_1} = \frac{1}{R}(B_{44}^1 + B_{12}^1 + B_{22}^1 + R(Bs_{32}^0 - As_{44}^1)),$$

$$\Phi_1^{10v_2} = \frac{1}{R}(C_{44}^1 + C_{12}^1 + C_{22}^1 + R(Cs_{32}^0 - Bs_{44}^1)), \Phi_1^{10v_3} = \frac{1}{R}(D_{44}^1 + D_{12}^1 + D_{22}^1 + R(Ds_{32}^0 - Cs_{44}^1)),$$

$$\Phi_0^{10w_0} = \frac{1}{R}(A_{11}^1 + A_{21}^1 + A_{12}^1 + A_{22}^1 + R(As_{31}^0 + As_{32}^0)), \Phi_{11}^{10w_0} = -A_{55}^1, \Phi_{22}^{10w_0} = -A_{44}^1,$$

$$\Phi_0^{10w_1} = \frac{1}{R}(B_{11}^1 + B_{21}^1 + B_{12}^1 + B_{22}^1 + R(Bs_{31}^0 + Bs_{32}^0) + R(As_{13}^1 + As_{23}^1 + RAs_{33}^{*0})), \Phi_{11}^{10w_1} = -B_{55}^1,$$

$$\Phi_{22}^{10w_1} = -B_{44}^1, \Phi_0^{10w_2} = \frac{1}{R}(C_{11}^1 + C_{21}^1 + C_{12}^1 + C_{22}^1 + R(Cs_{31}^0 + Cs_{32}^0) + R(Bs_{13}^1 + Bs_{23}^1 + RBs_{33}^{*0})),$$

$$\Phi_{11}^{10w_2} = -C_{55}^1, \Phi_{22}^{10w_2} = -C_{44}^1,$$

$$\Phi_1^{11u_0} = \frac{1}{R}(A_{55}^2 + A_{11}^2 + A_{21}^2 + RAs_{31}^1), \Phi_1^{11u_1} = \frac{1}{R}(B_{55}^2 + B_{11}^2 + B_{21}^2 + R(Bs_{31}^1 - As_{55}^2)),$$

$$\Phi_1^{11u_2} = \frac{1}{R}(C_{55}^2 + C_{11}^2 + C_{21}^2 + R(Cs_{31}^1 - Bs_{55}^2)), \Phi_1^{11u_3} = \frac{1}{R}(D_{55}^2 + D_{11}^2 + D_{21}^2 + R(Ds_{31}^1 - Cs_{55}^2)),$$

$$\Phi_1^{11v_0} = \frac{1}{R}(A_{44}^2 + A_{12}^2 + A_{22}^2 + RAs_{32}^1), \Phi_1^{11v_1} = \frac{1}{R}(B_{44}^2 + B_{12}^2 + B_{22}^2 + R(Bs_{32}^1 - As_{44}^2)),$$

$$\Phi_1^{11v_2} = \frac{1}{R}(C_{44}^2 + C_{12}^2 + C_{22}^2 + R(Cs_{32}^1 - Bs_{44}^2)), \Phi_1^{11v_3} = \frac{1}{R}(D_{44}^2 + D_{12}^2 + D_{22}^2 + R(Ds_{32}^1 - Cs_{44}^2)),$$

$$\begin{aligned}\Phi_0^{11w_0} &= \frac{1}{R} \left(A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{12}^2 + A_{22}^2 + R \left(As_{31}^1 + As_{32}^1 \right) \right), \Phi_{11}^{11w_0} = -A_{55}^2, \Phi_{22}^{11w_0} = -A_{44}^2, \\ \Phi_0^{11w_1} &= \frac{1}{R} \left(B_{11}^2 + B_{21}^2 + B_{12}^2 + B_{22}^2 + R \left(Bs_{31}^1 + Bs_{32}^1 \right) + R \left(As_{13}^2 + As_{23}^2 + RAs_{33}^{*1} \right) \right), \Phi_{11}^{11w_1} = -B_{55}^2, \\ \Phi_{22}^{11w_1} &= -B_{44}^2, \Phi_0^{11w_2} = \frac{1}{R} \left(C_{11}^2 + C_{21}^2 + C_{12}^2 + C_{22}^2 + R \left(Cs_{31}^1 + Cs_{32}^1 \right) + R \left(Bs_{13}^2 + Bs_{23}^2 + RBs_{33}^{*1} \right) \right), \\ \Phi_{11}^{11w_2} &= -C_{55}^2, \Phi_{22}^{11w_2} = -C_{44}^2,\end{aligned}$$

В представленной работе принимаются классические условия шарнирно опертой по четырем краям оболочки

$$\overline{N}_1 = \overline{M}_1^{(k)} = v_k = w_l = 0 \text{ при } x = 0, a,$$

$$\overline{N}_2 = \overline{M}_2^{(k)} = v_k = w_l = 0, \quad k = \overline{1,3}, \quad l = \overline{0,2} \text{ при } y = 0, b.$$

Представим внешние нагрузки и перемещения в следующем виде:

$$\begin{aligned}q_{33}^{\pm} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^{\pm} \sin \kappa x \sin \psi y; u_k = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{k,mn} \cos \kappa x \sin \psi y, \quad k = \overline{0,3}; \\ v_k &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{k,mn} \sin \kappa x \cos \psi y; \quad k = \overline{0,3}, \quad w_k = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{k,mn} \sin \kappa x \sin \psi y, \quad k = \overline{0,2};\end{aligned} \quad (4.33)$$

где $\kappa = \frac{m\pi}{a}$, $\psi = \frac{n\pi}{b}$, q_{mn} - коэффициенты разложения в ряд Фурье [125],

принимающие следующие значения:

- для синусоидальной нагрузки: $q_{mn} = q_0$,

- для равномерной нагрузки: $q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$, $(m, n = 1, 3, 5, \dots)$,

- для сосредоточенной нагрузки в точке (x_0, y_0) : $q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$.

Поставляя разложения (4.33) в уравнения (4.32), находим

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^3 \left(\Phi_0^{iu_k} - \kappa^2 \Phi_{11}^{iu_k} - \psi^2 \Phi_{22}^{iu_k} \right) U_{k,mn} - \sum_{k=0}^3 \kappa \psi \Phi_{12}^{iv_k} V_{k,mn} + \sum_{k=0}^2 \kappa \Phi_1^{iw_k} W_{k,mn} &= 0, \quad i = \overline{1,4}, \\ -\sum_{k=0}^3 \kappa \psi \Phi_{12}^{iu_k} U_{k,mn} + \sum_{k=0}^3 \left(\Phi_0^{iv_k} - \kappa^2 \Phi_{11}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \psi^2 \Phi_{22}^{iv_k} \right) V_{k,mn} + \sum_{k=0}^2 \psi \Phi_2^{iw_k} W_{k,mn} &= 0, \quad i = \overline{5,8}, \quad (4.34) \\ \sum_{k=0}^3 -\kappa \Phi_1^{iu_k} U_{k,mn} - \sum_{k=0}^3 \psi \Phi_2^{iv_k} V_{k,mn} + \sum_{k=0}^2 \left(\Phi_0^{iw_k} - \kappa^2 \Phi_{11}^{iw_k} - \psi^2 \Phi_{22}^{iw_k} \right) W_{k,mn} &= \pm \Phi^{iq_{33}^{\pm}} q_{mn}^{\pm}, \quad i = \overline{9,11}.\end{aligned}$$

Система (4.34) может быть представлена в следующем виде:

$$[K][X] = [F] \quad (4.35)$$

Здесь $[X], [F]$ - векторы искомых перемещений и заданных нагрузок:

$$[X] = [U_{0,mn}, V_{0,mn}, W_{0,mn}, U_{1,mn}, V_{1,mn}, W_{1,mn}, U_{2,mn}, V_{2,mn}, W_{2,mn}, U_{3,mn}, V_{3,mn}]^T,$$

$$[F] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \pm\Phi^{9q_{33}^\pm} q_{mn}^\pm, \pm\Phi^{10q_{33}^\pm} q_{mn}^\pm, \pm\Phi^{11q_{33}^\pm} q_{mn}^\pm]^T;$$

$[K]$ - матрицы порядка 11×11 , коэффициенты которой определяются равенствами

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= \Phi_0^{1u_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{1u_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{1u_0}, K_{1,2} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{1v_0}, K_{1,3} = \kappa\Phi_1^{1w_0}, K_{1,4} = \Phi_0^{1u_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{1u_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{1u_1}, \\ K_{1,5} &= -\kappa\psi\Phi_{12}^{1v_1}, K_{1,6} = \kappa\Phi_1^{1w_1}, K_{1,7} = \Phi_0^{1u_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{1u_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{1u_2}, K_{1,8} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{1v_2}, K_{1,9} = \kappa\Phi_1^{1w_2}, \\ K_{1,10} &= \Phi_0^{1u_3} - \kappa^2 \Phi_{11}^{1u_3} - \psi^2 \Phi_{22}^{1u_3}, K_{1,11} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{1v_3}, K_{2,1} = \Phi_0^{2u_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{2u_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{2u_0}, \\ K_{2,2} &= -\kappa\psi\Phi_{12}^{2v_0}, K_{2,3} = \kappa\Phi_1^{2w_0}, K_{2,4} = \Phi_0^{2u_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{2u_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{2u_1}, K_{2,5} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{2v_1}, K_{2,6} = \kappa\Phi_1^{2w_1}, \\ K_{2,7} &= \Phi_0^{2u_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{2u_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{2u_2}, K_{2,8} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{2v_2}, K_{2,9} = \kappa\Phi_1^{2w_2}, \\ K_{2,10} &= \Phi_0^{2u_3} - \kappa^2 \Phi_{11}^{2u_3} - \psi^2 \Phi_{22}^{2u_3}, K_{2,11} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{2v_3}, K_{3,1} = \Phi_0^{3u_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{3u_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{3u_0}, \\ K_{3,2} &= -\kappa\psi\Phi_{12}^{3v_0}, K_{3,3} = \kappa\Phi_1^{3w_0}, K_{3,4} = \Phi_0^{3u_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{3u_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{3u_1}, K_{3,5} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{3v_1}, K_{3,6} = \kappa\Phi_1^{3w_1}, \\ K_{3,7} &= \Phi_0^{3u_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{3u_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{3u_2}, K_{3,8} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{3v_2}, K_{3,9} = \kappa\Phi_1^{3w_2}, \\ K_{3,10} &= \Phi_0^{3u_3} - \kappa^2 \Phi_{11}^{3u_3} - \psi^2 \Phi_{22}^{3u_3}, K_{3,11} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{3v_3}, K_{4,1} = \Phi_0^{4u_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{4u_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{4u_0}, \\ K_{4,2} &= -\kappa\psi\Phi_{12}^{4v_0}, K_{4,3} = \kappa\Phi_1^{4w_0}, K_{4,4} = \Phi_0^{4u_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{4u_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{4u_1}, K_{4,5} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{4v_1}, K_{4,6} = \kappa\Phi_1^{4w_1}, \\ K_{4,7} &= \Phi_0^{4u_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{4u_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{4u_2}, K_{4,8} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{4v_2}, K_{4,9} = \kappa\Phi_1^{4w_2}, \\ K_{4,10} &= \Phi_0^{4u_3} - \kappa^2 \Phi_{11}^{4u_3} - \psi^2 \Phi_{22}^{4u_3}, K_{4,11} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{4v_3}, K_{5,1} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{5u_0}, \\ K_{5,2} &= \Phi_0^{5v_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{5v_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{5v_0}, K_{5,3} = \psi\Phi_2^{5w_0}, K_{5,4} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{5u_1}, K_{5,5} = \Phi_0^{5v_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{5v_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{5v_1}, \\ K_{5,6} &= \psi\Phi_2^{5w_1}, K_{5,7} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{5u_2}, K_{5,8} = \Phi_0^{5v_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{5v_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{5v_2}, K_{5,9} = \psi\Phi_2^{5w_2}, \\ K_{5,10} &= -\kappa\psi\Phi_{12}^{5u_3}, K_{5,11} = \Phi_0^{5v_3} - \kappa^2 \Phi_{11}^{5v_3} - \psi^2 \Phi_{22}^{5v_3}, K_{6,1} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{6u_0}, \\ K_{6,2} &= \Phi_0^{6v_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{6v_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{6v_0}, K_{6,3} = \psi\Phi_2^{6w_0}, K_{6,4} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{6u_1}, K_{6,5} = \Phi_0^{6v_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{6v_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{6v_1}, \\ K_{6,6} &= \psi\Phi_2^{6w_1}, K_{6,7} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{6u_2}, K_{6,8} = \Phi_0^{6v_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{6v_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{6v_2}, K_{6,9} = \psi\Phi_2^{6w_2}, \\ K_{6,10} &= -\kappa\psi\Phi_{12}^{6u_3}, K_{6,11} = \Phi_0^{6v_3} - \kappa^2 \Phi_{11}^{6v_3} - \psi^2 \Phi_{22}^{6v_3}, K_{7,1} = -\kappa\psi\Phi_{12}^{7u_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{7,2} &= \Phi_0^{7v_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{7v_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{7v_0}, K_{7,3} = \psi \Phi_2^{7w_0}, K_{7,4} = -\kappa \psi \Phi_{12}^{7u_1}, K_{7,5} = \Phi_0^{7v_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{7v_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{7v_1}, \\
K_{7,6} &= \psi \Phi_2^{7w_1}, K_{7,7} = -\kappa \psi \Phi_{12}^{7u_2}, K_{7,8} = \Phi_0^{7v_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{7v_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{7v_2}, K_{7,9} = \psi \Phi_2^{7w_2}, \\
K_{7,10} &= -\kappa \psi \Phi_{12}^{7u_3}, K_{7,11} = \Phi_0^{7v_3} - \kappa^2 \Phi_{11}^{7v_3} - \psi^2 \Phi_{22}^{7v_3}, K_{8,1} = -\kappa \psi \Phi_{12}^{8u_0}, \\
K_{8,2} &= \Phi_0^{8v_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{8v_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{8v_0}, K_{8,3} = \psi \Phi_2^{8w_0}, K_{8,4} = -\kappa \psi \Phi_{12}^{8u_1}, K_{8,5} = \Phi_0^{8v_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{8v_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{8v_1}, \\
K_{8,6} &= \psi \Phi_2^{8w_1}, K_{8,7} = -\kappa \psi \Phi_{12}^{8u_2}, K_{8,8} = \Phi_0^{8v_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{8v_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{8v_2}, K_{8,9} = \psi \Phi_2^{8w_2}, \\
K_{8,10} &= -\kappa \psi \Phi_{12}^{8u_3}, K_{8,11} = \Phi_0^{8v_3} - \kappa^2 \Phi_{11}^{8v_3} - \psi^2 \Phi_{22}^{8v_3}, K_{9,1} = -\kappa \Phi_1^{9u_0}, \\
K_{9,2} &= -\psi \Phi_2^{9v_0}, K_{9,3} = \Phi_0^{9w_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{9w_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{9w_0}, K_{9,4} = -\kappa \Phi_1^{9u_1}, K_{9,5} = -\psi \Phi_2^{9v_1}, \\
K_{9,6} &= \Phi_0^{9w_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{9w_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{9w_1}, K_{9,7} = -\kappa \Phi_1^{9u_2}, K_{9,8} = -\psi \Phi_2^{9v_2}, \\
K_{9,9} &= \Phi_0^{9w_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{9w_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{9w_2}, K_{9,10} = -\kappa \Phi_1^{9u_3}, K_{9,11} = -\psi \Phi_2^{9v_3}, \\
K_{10,1} &= -\kappa \Phi_1^{10u_0}, K_{10,2} = -\psi \Phi_2^{10v_0}, K_{10,3} = \Phi_0^{10w_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{10w_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{10w_0}, K_{10,4} = -\kappa \Phi_1^{10u_1}, \\
K_{10,5} &= -\psi \Phi_2^{10v_1}, K_{10,6} = \Phi_0^{10w_1} - \alpha^2 \Phi_{11}^{10w_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{10w_1}, K_{10,7} = -\kappa \Phi_1^{10u_2}, K_{10,8} = -\psi \Phi_2^{10v_2}, \\
K_{10,9} &= \Phi_0^{10w_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{10w_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{10w_2}, K_{10,10} = -\kappa \Phi_1^{10u_3}, K_{10,11} = -\psi \Phi_2^{10v_3}, \\
K_{11,1} &= -\kappa \Phi_1^{11u_0}, K_{11,2} = -\psi \Phi_2^{11v_0}, K_{11,3} = \Phi_0^{11w_0} - \kappa^2 \Phi_{11}^{11w_0} - \psi^2 \Phi_{22}^{11w_0}, K_{11,4} = -\kappa \Phi_1^{11u_1}, \\
K_{11,5} &= -\psi \Phi_2^{11v_1}, K_{11,6} = \Phi_0^{11w_1} - \kappa^2 \Phi_{11}^{11w_1} - \psi^2 \Phi_{22}^{11w_1}, K_{11,7} = -\kappa \Phi_1^{11u_2}, K_{11,8} = -\psi \Phi_2^{11v_2}, \\
K_{11,9} &= \Phi_0^{11w_2} - \kappa^2 \Phi_{11}^{11w_2} - \psi^2 \Phi_{22}^{11w_2}, K_{11,10} = -\kappa \Phi_1^{11u_3}, K_{11,11} = -\psi \Phi_2^{11v_3},
\end{aligned}$$

Система (4.35) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и решается с помощью программы для ЭВМ. В результате получены значения перемещения $U_{k,mm}, V_{k,mm}, W_{l,mm}, k = \overline{0,3}, l = \overline{0,2}$. Поставляя эти значения последовательно в (4.33), (4.19), находим деформации оболочки. Тангенциальные напряжения определяются из соотношений (4.22). Поперечные напряжения n -го слоя определяются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости

$$\sigma_{xz}^{(n)} = -\sum_{i=1}^n \frac{R}{(R+z)^3} \int_{h^{(i-1)}}^{h^{(i)}} (R+z)^2 \left(\frac{\partial \sigma_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right) dz,$$

$$\sigma_{yz}^{(n)} = -\sum_{i=1}^n \frac{R}{(R+z)^3} \int_{h^{(i-1)}}^{h^{(i)}} (R+z)^2 \left(\frac{\partial \sigma_y^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial x} \right) dz,$$

$$\sigma_z^{(n)} = -\sum_{i=1}^n \frac{R}{(R+z)^2} \int_{h^{(i-1)}}^{h^{(i)}} (R+z) \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(i)}}{\partial y} - \frac{\sigma_x^{(i)}}{R} - \frac{\sigma_x^{(i)}}{R} \right) dz + \frac{(R-h)^3}{(R+z)^3} q_{33}^-.$$

4.3. Сравнение полученных результатов с опубликованными данными

4.3.1. Расчет многослойных композитных сферических оболочек

В качестве примера расчета рассматривается многослойная композитная оболочка, жестко заземленная на двух краях $\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 90^\circ$ (рис. 4.3.). Эта оболочка рассматривается в работах Alwar [97,98] на основе теории FSDT и в работах Wu [101] в рамках асимптотического метода.

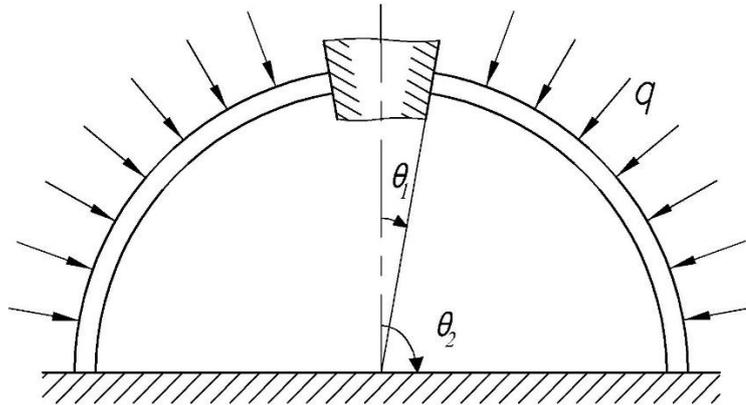


Рис. 4.3. Многослойная композитная сферическая оболочка

Значения безразмерных прогибов и напряжений определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{wE_2(2h)^3 \times 10^4}{q_0 R^4 (\theta_2 - \theta_1)^4}, (\bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_\varphi) = \frac{1}{q_0 S^4} (\sigma_\theta, \sigma_\varphi), \bar{\sigma}_{\theta\xi} = \frac{\sigma_{\theta\xi}}{q_0 S}, \bar{\sigma}_\xi = \frac{\sigma_\xi}{q_0}, \\ S &= \frac{R}{2h}, \theta_3 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

В таблицах 4.1 и 4.2. приведены результаты расчета безразмерного прогиба на параллели $\theta = \theta_3$ оболочки, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки $q = q_0$ на наружной поверхности. Материал каждого слоя оболочки в таблице 4.1 имеет следующие параметры: модули упругости $E_1 / E_2 = 5, 10, 15, 30, E_3 = E_2, G_{12} = G_{31} = G_{23} = 0.428E_2$, коэффициенты Пуассона $\mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.28$, относительная толщина $S = 20$. Материал каждого слоя оболочки в таблице 4.2 имеет следующие параметры: модули упругости $E_1 / E_2 = 20, E_3 = E_2, G_{12} = G_{31} = G_{23} = 0.5E_2$, коэффициенты Пуассона $\mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.28$, относительная толщина $S = 30$.

В таблице 4.3 приведен результат расчета безразмерного прогиба на параллели $\theta = \theta_3$ двухслойной оболочки $[90^\circ/0]$, находящейся под действием асимметричной нагрузки $q = q_0 \cos \theta$ на наружной поверхности. Материал каждого слоя имеет следующие параметры: модули упругости $E_1 / E_2 = 20$, $E_3 = E_2$, $G_{12} = G_{31} = G_{23} = 0.5E_2$, коэффициенты Пуассона $\mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.28$, относительная толщина $S = 30$.

Таблица 4.1

E_1/E_2	Alwar [97]	Wu [101]	В данной работе
[90°/0]			
5	1.1541	1.1495	1.1503
10	0.6480	0.6432	0.6411
15	0.4500	0.4454	0.4439
30	0.2443	0.2327	0.2309
[90°/0/90°/0]			
5	1.1710	1.1715	1.1821
10	0.6650	0.6630	0.6618
15	0.4636	0.4621	0.4574
30	0.2429	0.2420	0.2351
[90°/0/0/90°]			
5	1.1470	1.1435	1.1530
10	0.6463	0.6438	0.6456
15	0.4500	0.4479	0.4474
30	0.2354	0.2349	0.2319

Таблица 4.2

	R.S. Alwar [98]	R.S. Alwar [99]	El-Nady [104]	В данной работе
[90°/0]				
\bar{w}	0.14741	0.14782	0.14855	0.14742

Таблица 4.3

	R.S. Alwar [98]	В данной работе
\bar{w}	0.50788	0.50788

Из анализа данных таблиц 4.1 - 4.3, можно установить, что численные результаты, полученные в данной работе при симметричной и асимметричной нагрузках, практически совпадают с результатами, представленными Alwar [97,98], Wu [101], El-Nady [104].

4.3.2. Пологие ортотропные слоистые сферические оболочки

Рассматриваются шарнирно опертые пологие многослойные композитные сферические оболочки, находящихся под действием различных видов нагрузок. Механические свойства каждого слоя заданы следующим образом:

$$E_1 / E_2 = 25, E_3 = E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.25$$

и длины криволинейных границ оболочки принимаются как $b = a$.

В таблицах 4.4 - 4.6 приведены результаты расчета безразмерного максимального прогиба в центре оболочек под действием синусоидальной, равномерной и сосредоточенной нагрузок соответственно. Эти результаты сравниваются с данными, опубликованными в международных журналах Scopus и Web of Science на основе других уточненных теорий.

Значения безразмерных прогибов определяются по следующей формуле:

$$\bar{w} = w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right) \frac{E_2 (2h)^3 \times 10^2}{q_0 a^4}.$$

Таблица 4.4

R/a	Теории	[90°/0]		[0/90°/0]		[0/90°/90°/0]	
		a/h=200	a/h=20	a/h=200	a/h=20	a/h=200	a/h=20
5	FSDT [124]	1.1948	11.429	1.0337	6.4253	1.0279	6.3623
	Reddy et Liu [124]	1.1937	11.166	1.0321	6.7688	1.0264	6.7865
	Mantari et al. [117]	1.1940	11.022	1.0329	6.9647	1.0271	6.9249
	Hossain et al. [113]	1.1943	11.724	1.0355	6.6004	1.0294	6.5330
	В данной работе	1.1972	11.495	1.0361	6.9732	1.0304	6.9965
10	FSDT [124]	3.5760	12.123	2.4109	6.6247	2.4030	6.5595
	Reddy et Liu [124]	3.5733	11.896	2.4099	7.0325	2.4024	7.0536
	Mantari et al. [117]	3.5750	11.732	2.4136	7.2441	2.4058	7.2032
	Hossain et al. [113]	3.5793	12.263	2.4155	6.7028	2.4073	6.6361
	В данной работе	3.5794	12.064	2.4151	7.1378	2.4075	7.1651
20	FSDT [124]	7.1270	12.309	3.6150	6.6756	3.6104	6.6099
	Reddy et Liu [124]	7.1236	12.094	3.6170	7.1016	3.6133	7.1237
	Mantari et al. [117]	7.1291	11.9241	3.6250	7.3175	3.6207	7.2763
	Hossain et al. [113]	7.1320	12.376	3.6184	6.7122	3.6137	6.6460
	В данной работе	7.1295	12.188	6.6207	7.1642	3.6170	7.1925
50	FSDT [124]	9.8717	12.362	4.2027	6.6902	4.2015	6.4244
	Reddy et Liu [124]	9.8692	12.150	4.2071	7.1212	4.2071	7.1436
	Mantari et al. [117]	9.8791	11.9790	4.2177	7.3383	4.2170	7.2970
	Hossain et al. [113]	9.8743	12.388	4.2039	6.7041	4.2027	6.6381
	В данной работе	9.8716	12.205	4.2087	7.1611	4.2088	7.1896
100	FSDT [124]	10.446	12.370	4.3026	6.6923	4.3021	6.6264
	Reddy et Liu [124]	10.444	12.158	4.3074	7.1240	4.3082	7.1464
	Mantari et al. [117]	10.455	11.986	4.3186	7.3413	4.3186	7.3000
	Hossain et al. [113]	10.448	12.383	4.3032	6.6992	4.3027	6.6332
	В данной работе	10.445	12.201	4.3085	7.1569	4.3093	7.1854

Таблица 4.5

R/a	Теории	[90°/0]		[0/90°/0]		[0/90°/90°/0]	
		a/h=200	a/h=20	a/h=200	a/h=20	a/h=200	a/h=20
5	FSDT [124]	1.7535	19.944	1.5118	9.7937	1.5358	9.8249
	Reddy et Liu [124]	1.7519	17.566	1.5092	10.332	1.5332	10.476
	Mantari et al. [117]	1.7524	17.370	1.5101	10.645	1.5341	10.691
	Hossain et al. [113]	1.7523	18.424	1.5143	10.071	1.5380	10.098
	В данной работе	1.7570	18.070	1.5152	10.659	1.5392	10.810
10	FSDT [124]	5.5428	19.065	3.6445	10.110	3.7208	10.141
	Reddy et Liu [124]	5.5388	18.744	3.6426	10.752	3.7195	10.904
	Mantari et al. [117]	5.5414	18.517	3.6482	11.091	3.7245	11.137
	Hossain et al. [113]	5.5484	19.290	3.6518	10.232	3.7281	10.263
	В данной работе	5.5482	18.994	3.6507	10.925	3.7276	11.083
20	FSDT [124]	11.273	19.365	5.5473	10.191	5.6618	10.222
	Reddy et Liu [124]	11.268	19.064	5.5503	10.862	5.666	11.017
	Mantari et al. [117]	11.277	18.827	5.5627	11.208	5.6775	11.254
	Hossain et al. [113]	11.282	19.472	5.5529	10.248	5.6673	10.279
	В данной работе	11.277	19.197	5.5561	10.969	5.6719	11.129
50	FSDT [124]	15.714	19.452	6.4827	10.214	6.6148	10.245
	Reddy et Liu [124]	15.711	19.155	6.4895	10.893	6.6234	11.049
	Mantari et al. [117]	15.727	18.916	6.5062	11.241	6.6389	11.288
	Hossain et al. [113]	15.719	19.493	6.4847	10.236	6.6168	10.267
	В данной работе	15.715	19.226	6.4921	10.965	6.6261	11.126
100	FSDT [124]	16.645	19.464	6.6421	10.218	6.7772	10.249
	Reddy et Liu [124]	16.642	19.168	6.6496	10.898	6.7866	11.053
	Mantari et al. [117]	16.660	18.929	6.6671	11.246	6.8029	11.292
	Hossain et al. [113]	16.647	19.485	6.6430	10.229	6.7781	10.260
	В данной работе	16.643	19.219	6.6513	10.959	6.7883	11.119

Таблица 4.6

R/a	Теории	[90°/0]		[0/90°/0]		[0/90°/90°/0]	
		a/h=200	a/h=20	a/h=200	a/h=20	a/h=200	a/h=20
5	FSDT [124]	-	7.1015	-	5.1410	-	4.9360
	Reddy et Liu [124]	-	5.8953	-	4.4340	-	4.3574
	Mantari et al. [117]	0.8195	5.5548	0.7027	4.2993	0.6380	4.2306
	Touratier [130]	0.8222	5.8309	0.7030	4.4174	0.6383	4.3481
	В данной работе	0.8234	5.7341	0.7018	4.0138	0.6368	3.9017
10	FSDT [124]	-	7.3836	-	5.2273	-	5.0186
	Reddy et Liu [124]	-	6.1913	-	4.5470	-	4.4690
	Mantari et al. [117]	1.8340	5.8422	1.3418	4.4184	1.2267	4.3467
	Touratier [130]	1.8369	6.1260	1.3418	4.5321	1.2267	4.4614
	В данной работе	1.8381	5.9542	1.3397	4.0738	1.2244	3.9619
20	FSDT [124]	-	7.4692	-	5.2594	-	5.0496
	Reddy et Liu [124]	-	6.2714	-	4.5765	-	4.4982
	Mantari et al. [117]	3.2776	5.9198	1.8667	4.4497	1.7261	4.3772
	Touratier [130]	3.2808	6.2058	1.8665	4.5622	1.7259	4.4911
	В данной работе	3.2799	5.9991	1.8620	4.0800	1.7214	3.9683
50	FSDT [124]	-	7.4909	-	5.2657	-	5.0557
	Reddy et Liu [124]	-	6.2943	-	4.5849	-	4.5065
	Mantari et al. [117]	4.3845	5.9420	2.1179	4.4585	1.9688	4.3858
	Touratier [130]	4.3879	6.2286	2.1174	4.5707	1.9685	4.4996
	В данной работе	4.3835	6.0027	2.1111	4.0753	1.9622	3.9641
100	FSDT [124]	-	7.4940	-	5.2666	-	5.0565
	Reddy et Liu [124]	-	6.2976	-	4.5861	-	4.5077
	Mantari et al. [117]	4.6159	5.9452	2.1604	4.4598	2.0101	4.3870
	Touratier [130]	4.6195	6.2319	2.1599	4.5719	2.0097	4.5008
	В данной работе	4.6138	6.0000	2.1531	4.0725	2.0030	3.9614

Из анализа данных таблиц 4.4 - 4.6, можно установить, что численные результаты безразмерных максимальных прогибов оболочек под действием различных видов нагрузок, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами, представленными исследователями, использующими другие уточненные теории, что подтверждает достоверность предлагаемой уточненной теории.

4.3.3. Сравнение полученных результатов с данными расчетов, основанными на уравнениях трехмерной теории упругости

Для оценки точности предлагаемой уточненной теории, проводилось еще сравнение полученных результатов с точными решениями, основанными на трехмерной теории упругости для ортотропных многослойных композитных пластин и цилиндрических оболочек (т.к. точные решения для сферических и конических оболочек в литературе отсутствуют).

Рассматриваются трехслойные $[0/90^0/0]$ композитные пластины ($R = \infty$) с шарнирным опиранием по контуру, находящихся под действием синусоидальной нагрузки. Механические свойства каждого слоя заданы следующим образом:

$$E_1 / E_2 = 25, E_3 = E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.25$$

и длины криволинейных границ пластины принимаются как $b = a$.

В таблицах 4.7 - 4.8 приведено сравнение результатов, полученных в данной работе и в работах других исследователей, основанных на различных вариантах уточненных теорий с точными решениями, заданными Pagano [121]. Здесь значения безразмерных напряжений определяются по следующим формулам:

$$\overline{\sigma_x} = \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{(2h)^2}{q_0 a^2}, \overline{\sigma_y} = \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{6} \right) \frac{(2h)^2}{q_0 a^2}, \overline{\sigma_{xy}} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \frac{(2h)^2}{q_0 a^2},$$

$$\overline{\sigma_{xz}} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{a}{2}, 0 \right) \frac{2h}{q_0 a}, \overline{\sigma_{yz}} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) \frac{2h}{q_0 a}.$$

Точность уточненных теории оценивается путем расчета отклонения Δ (%) по сравнению с 3D точными решениями, представленными Pagano [121] для различных значений относительной толщины ($a/2h$).

Таблица 4.7

a/2h	Теории	$\overline{\sigma}_x$		$\overline{\sigma}_y$		$\overline{\sigma}_{xy}$	
			Δ (%)		Δ (%)		Δ (%)
4	Pagano [121]	0.755	Ref.	0.556	Ref.	0.051	Ref.
	Reddy et Liu [124]	0.735	2.8	-	-	-	-
	Karama et al. [114]	0.775	2.6	0.502	9.7	0.052	2.2
	Mantari et al. [117]	0.823	9.0	0.497	10.6	0.054	6.1
	В данной работе	0.788	4.8	0.483	13.1	0.490	3.0
10	Pagano [121]	0.590	Ref.	0.288	Ref.	0.029	Ref.
	Reddy et Liu [124]	0.568	3.7	-	-	-	-
	Karama et al. [114]	0.576	2.4	0.272	5.6	0.028	2.8
	Mantari et al. [117]	0.588	0.3	0.276	4.2	0.029	0.3
	В данной работе	0.584	1.0	0.269	6.7	0.028	3.7
20	Pagano [121]	0.552	Ref.	0.210	Ref.	0.023	Ref.
	Reddy et Liu [124]	0.548	0.7	0.205	2.4	0.023	1.3
	Karama et al. [114]	0.551	0.2	0.206	1.9	0.023	1.0
	В данной работе	0.550	0.3	0.205	2.6	0.023	0.2
50	Pagano [121]	0.541	Ref.	0.185	Ref.	0.022	Ref.
	Reddy et Liu [124]	0.540	0.2	0.183	1.1	0.022	0.0
	Karama et al. [114]	0.541	0.0	0.184	0.5	0.022	0.5
	В данной работе	0.541	0.0	0.184	0.1	0.022	0.1
100	Pagano [121]	0.539	Ref.	0.181	Ref.	0.021	Ref.
	Reddy et Liu [124]	0.539	0.0	-	-	-	-
	Karama et al. [114]	0.538	0.2	0.180	0.6	0.021	0.0
	Mantari et al. [117]	0.539	0.0	0.181	0.0	0.021	0.5
	В данной работе	0.539	0.0	0.181	0.0	0.021	0.0

Таблица 4.8

a/2h	Теории	$\overline{\sigma_{xz}}$		$\overline{\sigma_{yz}}$	
			Δ (%)		Δ (%)
4	Pagano [121]	0.282	Ref.	0.217	Ref.
	Reddy et Liu [124]	-	-	0.183	15.7
	Karama et al. [114]	0.220	22.0	0.191	12.1
	Mantari et al. [117]	0.245	13.1	0.201	7.5
	В данной работе	0.279	1.21	0.210	3.3
10	Pagano [121]	0.357	Ref.	0.123	Ref.
	Reddy et Liu [124]	-	-	0.103	15.9
	Karama et al. [114]	0.272	23.8	0.108	12.1
	Mantari et al. [117]	0.314	12.0	0.115	6.4
	В данной работе	0.366	2.6	0.118	3.9
20	Pagano [121]	0.385	Ref.	0.094	Ref.
	Karama et al. [114]	0.285	26.0	0.086	8.3
	Mantari et al. [117]	0.331	14.0	0.090	4.1
	В данной работе	0.387	0.6	0.092	1.7
50	Pagano [121]	0.393	Ref.	0.084	Ref.
	Karama et al. [114]	0.289	26.5	0.079	6.4
	Mantari et al. [117]	0.336	14.5	0.082	2.6
	В данной работе	0.394	0.4	0.084	0.3
100	Pagano [121]	0.395	Ref.	0.083	Ref.
	Reddy et Liu [124]	-	-	0.075	9.4
	Karama et al. [114]	0.289	26.8	0.078	6.0
	Mantari et al. [117]	0.337	14.7	0.081	2.2
	В данной работе	0.395	0.5	0.083	0.5

Анализ данных таблиц 4.7 - 4.8 показывает, что предлагаемая в данной работе математическая модель уточненной теории дает лучше результаты по сравнению с результатами остальных авторов, особенно для поперечных касательных напряжений $\overline{\sigma_{xz}}$ и $\overline{\sigma_{yz}}$. Наибольшее отклонение составляет 13,1% для $\overline{\sigma_y}$ при $a/2h = 4$. Чем больше значения R/a , тем меньше отклонения. При $a/2h=50$ и $a/2h=100$ результаты, полученные в данной работе практически совпадают с результатами Рагано.

Далее, рассматривается многослойная композитная цилиндрическая оболочка $[90^\circ/0/90^\circ]$ с шарнирным опиранием на обоих торцах (рис. 4.4.). Для цилиндрической оболочки имеют место следующие равенства:

$$\alpha_1 = x, \alpha_2 = \theta, R_1 = \infty, R_2 = R,$$

$$A_1 = R, A_2 = R, a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{z}{R}.$$

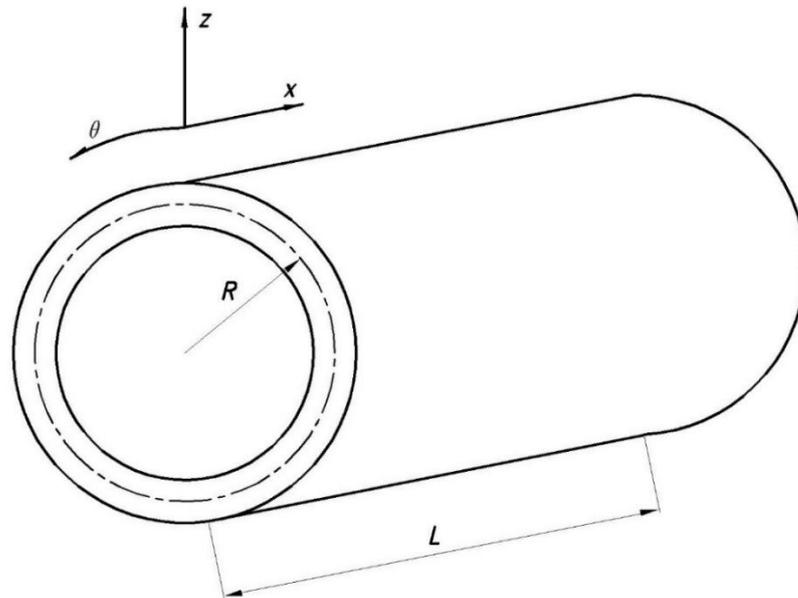


Рис. 4.4. Многослойная композитная цилиндрическая оболочка

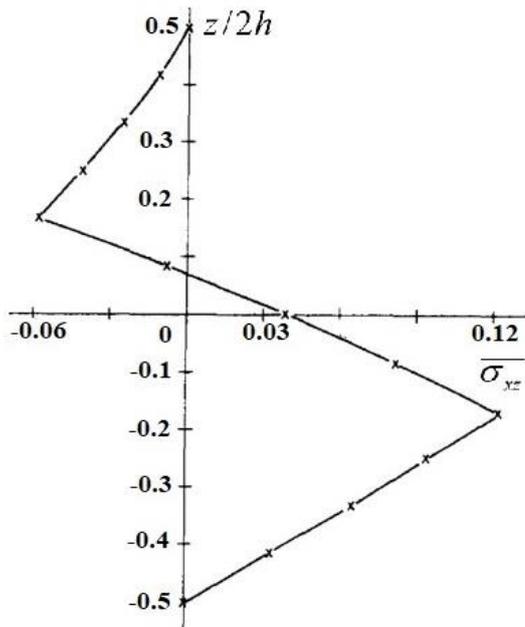
Оболочка находится под действием синусоидальной нагрузки $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos 4\theta$ на внутренней поверхности, где L – длина оболочки.

Механические свойства каждого слоя заданы следующим образом:

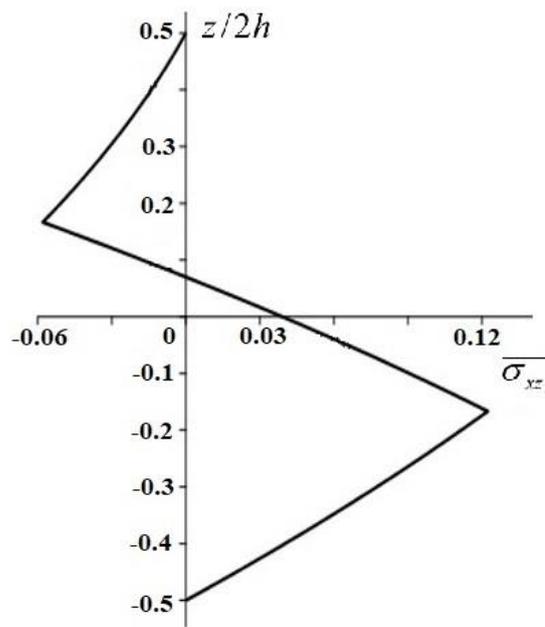
$$E_1 / E_2 = 25, E_3 = E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.25.$$

На рис. 4.5 и 4.6. показано сравнение графиков изменения нормальных и касательных поперечных напряжений оболочки по толщине для случая $L=4R$. Здесь используются следующие обозначения:

$$\overline{\sigma_z} = \frac{\sigma_z\left(\frac{L}{2}, 0\right)}{q_0}, \quad \overline{\sigma_{xz}} = \sigma_{xz}(0, 0) \frac{10}{q_0 S}, \quad S = \frac{R}{2h}.$$

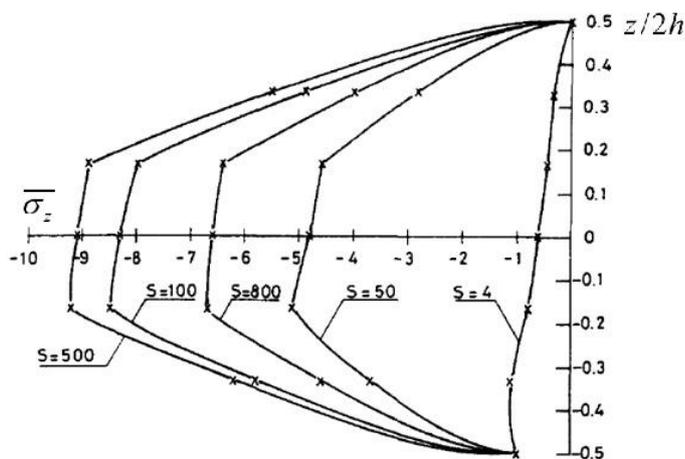


а) в работе Varadan [131]

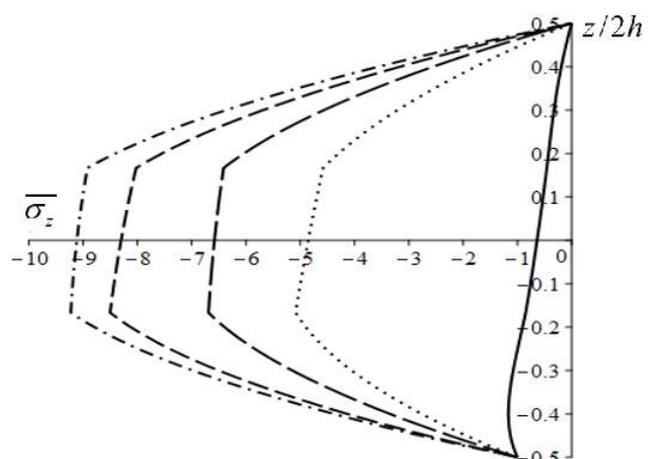


б) в данной работе

Рис. 4.5. Изменение поперечных касательных напряжений по толщине оболочки



а) в работе Varadan [131]



б) в данной работе

Рис. 4.6. Изменение поперечных нормальных напряжений по толщине оболочки

Анализ рис. 4.5 - 4.6 показывает, что результаты, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами [131].

4.4. НДС многослойной композитной оболочки

Рассматривается композитная трехслойная $[0/90^0/0]$ сферическая оболочка, жестко защемленная на двух краях $\theta_1 = 10^0, \theta_2 = 90^0$ (рис. 4.3.). На рис. 4.7. - 4.10 показаны графики изменения по толщине безразмерных напряжений на краю $\theta = \theta_2$ и на параллели $\theta = \theta_3 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ оболочки, изготовленной из материала AS/3501 [125], с различными относительными толщинами S . Оболочка находится под действием равномерно распределенной нагрузки q_0 на наружной поверхности. Значения безразмерных прогибов и напряжений определяются по формулам (4.36).

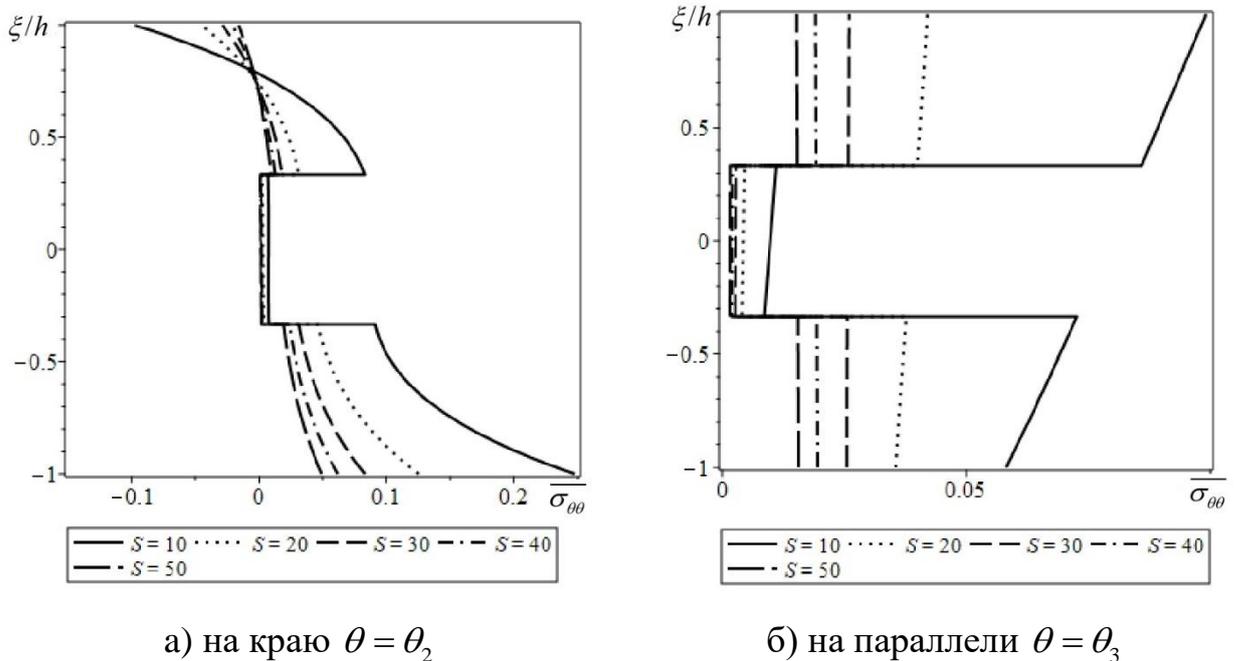
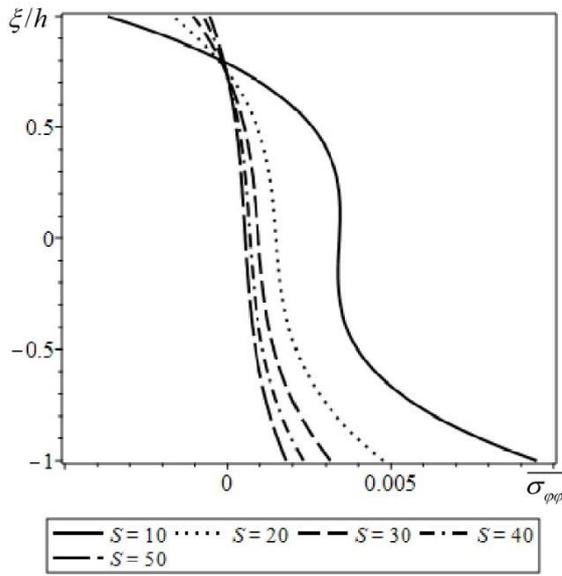
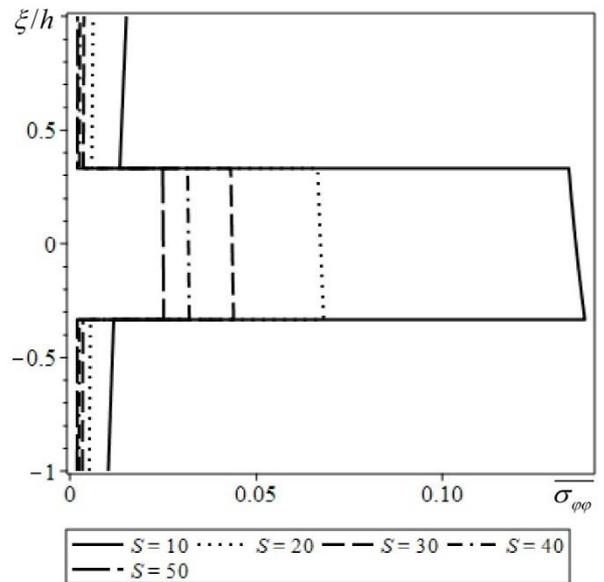


Рис. 4.7. Изменение $\overline{\sigma}_\theta$ по толщине

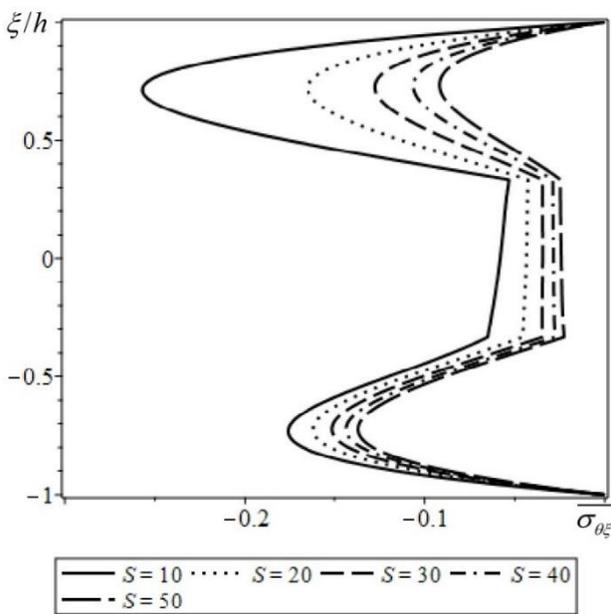


а) на краю $\theta = \theta_2$

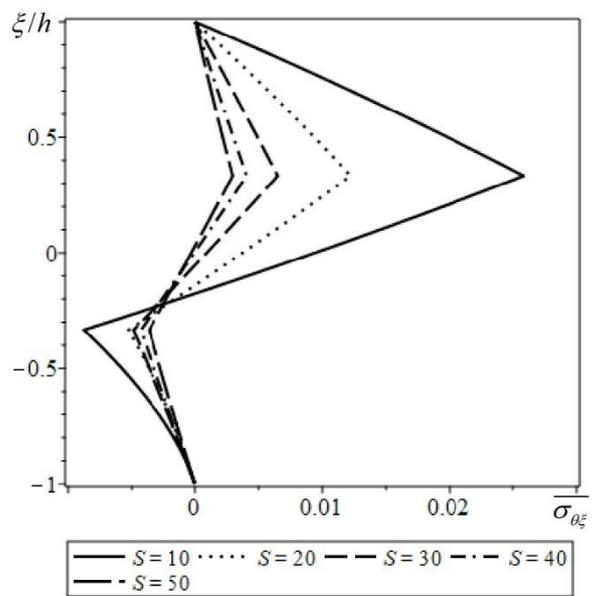


б) на параллели $\theta = \theta_3$

Рис. 4.8. Изменение $\overline{\sigma_\varphi}$ по толщине

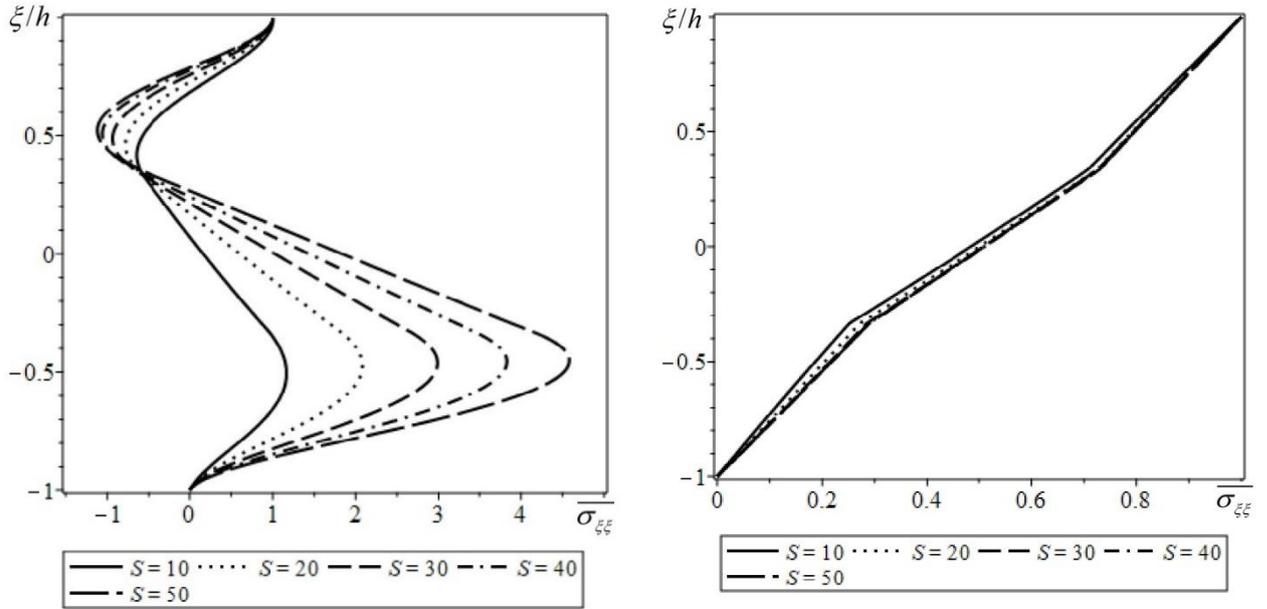


а) на краю $\theta = \theta_2$



б) на параллели $\theta = \theta_3$

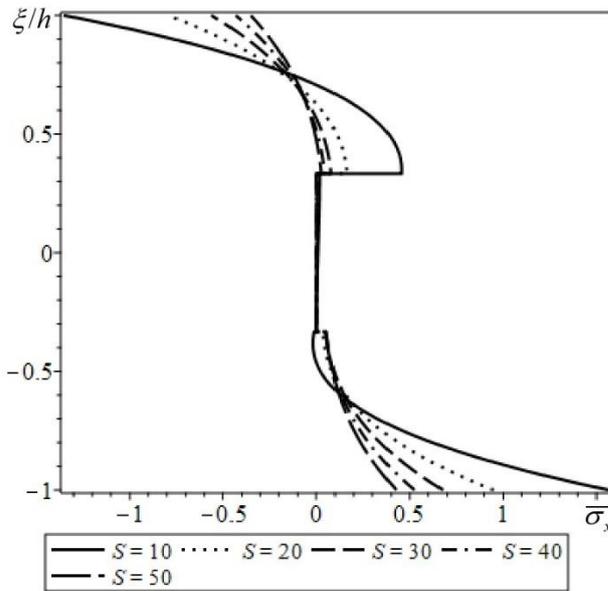
Рис. 4.9. Изменение $\overline{\sigma_{\theta\xi}}$ по толщине

а) на краю $\theta = \theta_2$ б) на параллели $\theta = \theta_3$ Рис. 4.10. Изменение $\overline{\sigma_\xi}$ по толщине

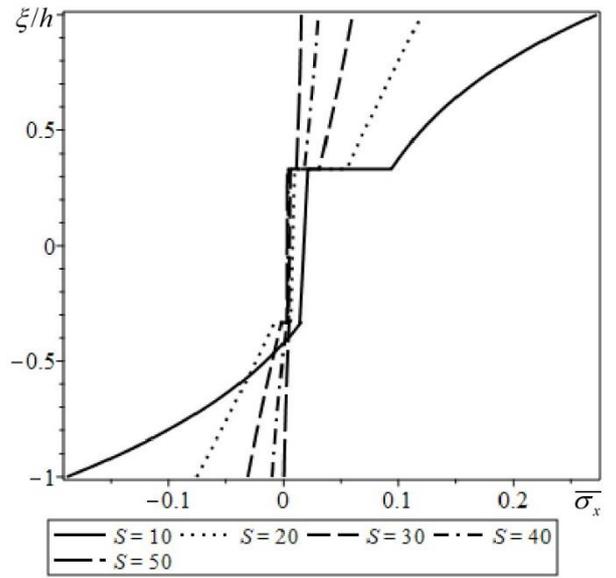
Далее, рассматривается композитная трехслойная $[0/90^\circ/0]$ коническая оболочка, жестко зашпеленная на двух краях $x = x_1, x = x_2 = 3x_1$, угол половины конусности $\gamma = \frac{\pi}{4}$. На рис. 4.11. - 4.14 показаны графики изменений по толщине

безразмерных напряжений на краю $x = x_2$ и на параллели $x = x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ оболочки, изготовленной из материала AS/3501 [125], с различными относительными толщинами S . Оболочка находится под действием равномерно распределенной нагрузки q_0 на наружной поверхности. Значения безразмерных прогибов и напряжений определяются по следующим формулам:

$$\left(\overline{\sigma_x}, \overline{\sigma_\varphi}\right) = \frac{1}{q_0 S^4} (\sigma_x, \sigma_\varphi), \overline{\sigma_{x\xi}} = \frac{\sigma_{x\xi}}{q_0 S}, \overline{\sigma_\xi} = \frac{\sigma_\xi}{q_0}, S = \frac{x_1}{2h}.$$

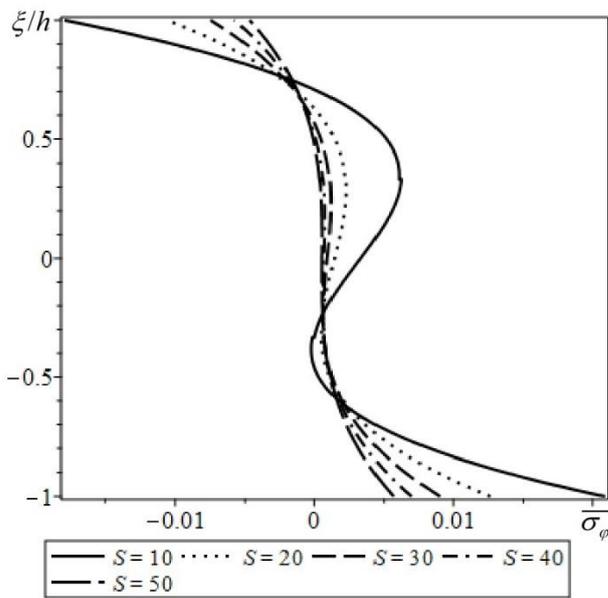


а) на краю $x = x_2$

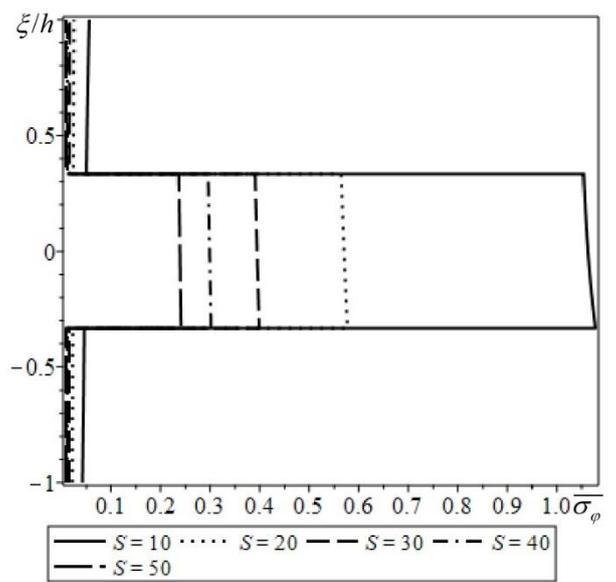


б) на параллели $x = x_3$

Рис. 4.11. Изменение $\overline{\sigma_x}$ по толщине

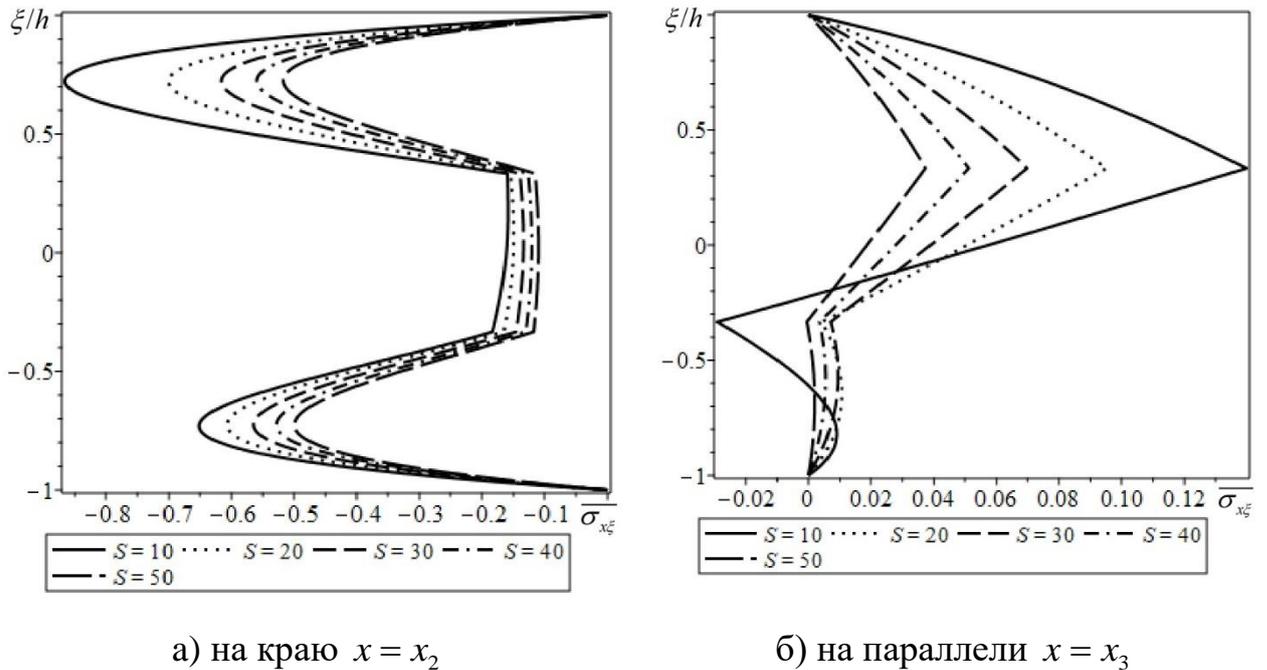
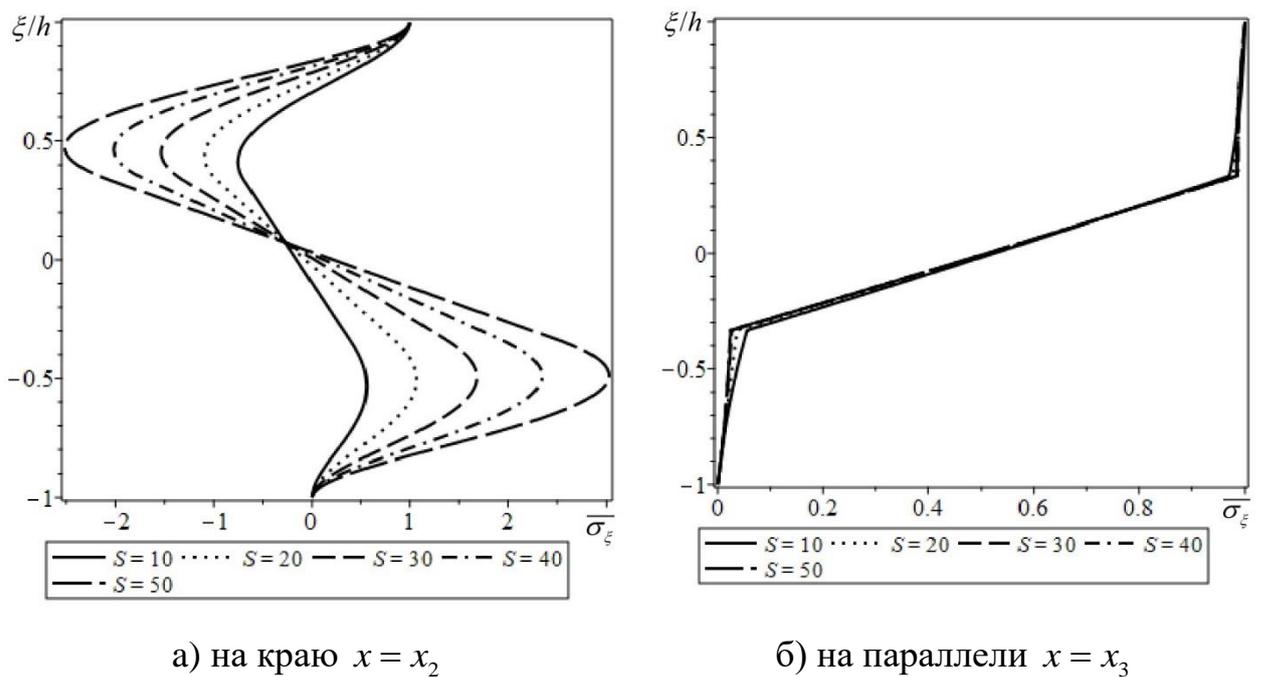


а) на краю $x = x_2$



б) на параллели $x = x_3$

Рис. 4.12. Изменение $\overline{\sigma_\phi}$ по толщине

Рис. 4.13. Изменение $\overline{\sigma_{x\xi}}$ по толщинеРис. 4.14. Изменение $\overline{\sigma_{\xi}}$ по толщине

Анализируя графики на рис. 4.7 – 4.14 можно установить следующее:

- предлагаемая математическая модель позволяет определить непрерывное распределение напряжений по толщине оболочки, что очень важно для композитных материалов;
- напряжения в краевых зонах как тонкой, так и толстой оболочек

превосходят максимальные напряжения на параллели $\theta = \theta_3 (x = x_3)$;

- Поперечные нормальные и касательные напряжения принимают существенное значение на краях оболочек.

4.5. Выводы по четвертой главе

1. На основании представления перемещений полиномами по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории и вариационного принципа Лагранжа построены математические модели уточненной теории многослойных композитных оболочек и соответствующие граничные условия в перемещениях. Разработан алгоритм определения НДС оболочки.

2. На основе уточненной теории для пологих многослойных композитных сферических оболочек получены двумерные уравнения равновесия. Краевая задача приведена к решению СЛАУ путем разложения компонент перемещений и внешних нагрузок в двойные тригонометрические ряды. Сформулированная система решается с помощью программы для ЭВМ.

3. Приведены сравнения результатов, полученных в данной работе с точными решениями, основанными на основе трехмерной теории упругости и результатами ряда других известных уточненных теорий, опубликованных в международных журналах Scopus и Web of Science. Установлено, что численные результаты расчета максимального прогиба оболочки, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами других уточненных теорий, что подтверждает достоверность полученных результатов. Предлагаемая математическая модель уточненной теории оказывается более точной, особенно для определении поперечных нормальных и касательных напряжений, чем другие варианты уточненных теорий.

4. Приведены примеры расчета НДС многослойной композитной сферической и конической оболочек. Предлагаемая математическая модель позволяет определить непрерывное распределение напряжений по толщине оболочки. Установлено, что в краевой зоне многослойных оболочек возникают

значительные по величине поперечные нормальные и касательные напряжения, для определения которых рекомендуются использовать предлагаемую математическую модель уточненной теорий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Для оболочек вращения построены математические модели уточненной теории, основанной на трехмерных уравнениях теории упругости с применением аппроксимации компонентов НДС полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява .

2. Применяя вариационный принцип Лагранжа к уточненному выражению полной энергии оболочек вращения построены системы уравнений равновесия в перемещениях в частных производных с переменными коэффициентами и сформулированы соответствующие граничные условия для сферических, в том числе пологих, и конических оболочек, изготовленных из изотропных и многослойных композиционных материалов.

3. Проведено сравнение полученных результатов с данными классической и других вариантов уточненной теории, опубликованными в международных журналах Scopus и WoS, подтвердившее достоверность предлагаемой математической модели НДС.

4. Проведены расчеты и параметрический анализ НДС рассматриваемых оболочек. Показано, что вблизи зон искажения НДС (жестко защемленный край, локальное нагружение) компоненты напряженного состояния, полученные по предлагаемой модели, существенно отличаются от аналогов, соответствующих классической теории, не только в части поперечных нормальных (до 48%) и касательных (до 25%) напряжений, но и в части нормальных тангенциальных напряжений (до 50%) от наибольшего напряжения, соответствующего классической теории.

5. Предлагаемые математические модели НДС сферических и конических оболочек позволяют определить непрерывное распределение напряжений по толщине оболочки, что очень важно для расчета прочности и долговечности элементов конструкций из композиционных материалов.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

НДС – напряженно-деформированное состояние

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1969. 402 с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 111-125.
4. Агаловян Л.А. О возможностях асимптотического метода в вопросах теории пластин и оболочек // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Сб. статей, посвященный 90 летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван: Гитутюн, 2012. С. 33–42.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266 с.
7. Базаренко Н.А., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // ПММ. 1965. 29. № 6. С. 1035–1052.
8. Болотин В.В., Вольмир А.С., Диментберг М.Ф. и др. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справ.: в 3-х томах / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Т. 3. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.
9. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
10. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. Учебное пособие для студентов. М.: Машиностроение, 1973. 456 с.
11. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
12. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1990. № 2. С. 158-167.

13. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139-146.
14. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
15. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. 475 с.
16. Виленская Т.В., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины // ПММ. 1966. Т. 30. № 2. С. 278–295.
17. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
18. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
19. Вольмир А.С. Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек за период с 1941 по 1957 г. // Расчеты пространственных конструкций. М.: Госстройиздат, 1958. Вып. 4. С. 451-475.
20. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Т. 3. Механика твердого тела. М.: Наука. 1966. С. 116-136.
21. Ворович И.И. Общие проблемы теории пластин и оболочек // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку. 1966. Обзорные докл. М.: Наука, 1966. С. 896-903.
22. Гольденвейзер А.Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки // ПММ. 1944. Т. 8. № 6. С. 441-467.
23. Гольденвейзер А.Л. Некоторые вопросы общей линейной теории оболочек // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории пластинок и оболочек, Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 749-754.
24. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134-149.
25. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //

- ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
26. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593-608.
 27. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
 28. Гольденвейзер А.Л., Лурье А.И. О математической теории равновесия упругих оболочек // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 5. С. 565-592.
 29. Даревский В.М. Основы теории оболочек // Тр. Центр ин-та авиац. моторостр. 1998. № 1309. С. 3-193.
 30. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин // Математическое моделирование и численные методы. 2018. № 1 (17). С. 16-40.
 31. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория тонких двухслойных упругих пластин с проскальзыванием слоев // Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 1 (21). С. 3-26.
 32. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука: Под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука, 1982. 567 с.
 33. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ. 1983. Т.15. С. 3-68.
 34. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М.: Машиностроение, 1972. 168 с.
 35. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
 36. Зверьяев Е.М. Непротиворечивая теория оболочек // ПММ. 2016. Т. 80. Вып.5. С. 590-596.
 37. Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308-321.
 38. Каплунов Ю.Д. Интегрирование уравнений динамического погранслоя // Изв.

- АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 148 – 160.
39. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек // Тр. 2-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 58-69.
 40. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Ч. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 355 с.
 41. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 287 с.
 42. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А., Полищук Т.И. Расчет конических оболочек при антисимметричных нагрузках. Киев: Изд-во АН УССР, 1966. 495с.
 43. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. М.: Высш. школа, 1963. 278 с.
 44. Колос А.В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 582-589.
 45. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Физматгиз, 1957. 463 с.
 46. Лехницкий С.Г. Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 71-91.
 47. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
 48. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
 49. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
 50. Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П. Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной нагрузки // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 115-124.
 51. Нерубайло Б.В., Смирнов Л.Г. К решению задач упругости конических

- оболочек // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 5. С. 150-165.
52. Новожилов В.В. Краткий очерк развития теории оболочек в СССР // Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та. 1970. Вып. VI-VII. С. 3-23.
53. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
54. Новожилов В.В., Финкельштейн Р. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 331-340.
55. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
56. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для авиационных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1986. 536 с.
57. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
58. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: МГУ, 1969. 696 с.
59. Ониашвили О.Д. Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций // Строительная механика в СССР. 1917-1957 / Под ред. И.М. Рабиновича. М.: Стройиздат, 1957. С. 160-196.
60. Ониашвили О.Д. Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций // Строительная механика в СССР. 1917-1967 / Под ред. И.М. Рабиновича. М.: Стройиздат, 1969. С. 165-202.
61. Пикуль В.В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 18-25.
62. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Изв. АН. МТТ. 2000. № 2. С. 153-168.
63. Пикуль В.В. Теория и расчет слоистых конструкций. М.: Наука, 1985. 183 с.
64. Пикуль В.В. Физические корректные модели материала упругих оболочек //

Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 103-108.

65. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М.: Машиностроение, 1967. 360 с.
66. Репман Ю.В. Расчет сферических оболочек по моментной теории на несимметричную нагрузку. В кн.: Пластинки и оболочки. М.: Госстройнадат.1939. С. 106-148.
67. Самарский А.А. Теория разностных схем. 2-е изд. М: Наука, 1983. 616 с.
68. Самарский А.А, Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 532 с.
69. Соколовский В.В. О расчете сферической оболочки // Докл. АН СССР. 1937. Т. 16. № 1. С. 19-24.
70. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 248 с.
71. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Изв. АН. МТТ. 2015. № 2. С. 118-128.
72. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Михайлова Е. Ю. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.- матем. науки. 2018. Т. 160. № 3. С. 561-577.
73. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
74. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
75. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Изд. 2-е, доп. и перераб. СПб.: Стройиздат, 1975. 256 с.
76. Фирсанов В.В. Напряженное состояние «пограничный слой» - краевое кручение цилиндрической оболочки // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 6. С. 144 – 153.
77. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок

- из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. Изд. ИПРИМ РАН. 2002. Т.8. №1. С.28-64.
78. Фирсанов В.В., Доан Ч.Н., Хиеу Л.Ч. Уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 4. С. 198-211.
79. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98866>.
80. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины при температурном воздействии // Тепловые процессы в технике. 2019. Т.11. №. 8. С.365-373.
81. Фирсанов В.В., Нгуен Л.Х., Чан Н.Д. Исследование электроупругостного состояния цилиндрических оболочек из пьезоматериалов на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111376>.
82. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Исследование напряженного состояния конической оболочки в зоне жесткого защемления в рамках неклассической теории // Материалы XXVI международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Сборник тезисов докладов. том 1. 2020. с. 226 – 227.
83. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Математическая модель напряженного состояния конической оболочки на основе варианта неклассической теории // XLVI Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения-2020». Сборник тезисов докладов. 2020.С. 922-923.
84. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженное состояние в краевой зоне конической оболочки по уточненной теории // Проблемы машиностроения и надежности

- машин. 2021. № 1. С. 64 – 71 (Val.V. Firsanov, V.T. Pham. The Stress State in the Boundary Region of a Conical Shell according to a Refined Theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2021. Vol. 50. No.1. pp. 51-57).
85. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки по уточненной теории // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Сборник тезисов докладов. 2019. С. 208 – 209.
86. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженное состояние «пограничный слой» в сферических оболочках по уточненной теории // 18-я Международная конференция Авиация и космонавтика. Сборник тезисов докладов. 2019. С. 34-35.
87. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние конической оболочки переменной толщины на основе трёхмерных уравнений теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 2. С. 189-200.
88. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104174>.
89. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки под действием произвольной нагрузки на основе неклассической теории // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 3, С. 359-368.
90. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Уточненная теория расчета конической оболочки переменной толщины // XIII Международная конференция по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020). Сборник тезисов докладов. 2020. С. 355-356.
91. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Уточненная теория расчета многослойной ортотропной композитной оболочки вращения // 19-я Международная

- конференция Авиация и космонавтика. Сборник тезисов докладов. 2020. С. 32-33.
92. Фирсанов В.В., Фам В.Т, Чан Н.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=118893>.
93. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек // Вестник МАИ. 2011. Т. 18. № 1. С. 194-207.
94. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 456 с.
95. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Общая теория. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
96. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. 395 с.
97. Alwar R. S., Narasimhan M. C. Application of Chebyshev polynomials to the analysis of laminated axisymmetric spherical shells // Compos. Struct., 1990, vol. 15(3), pp. 215-237.
98. Alwar, R. S., Narasimhan M. C. Analysis of laminated orthotropic spherical shells subjected to asymmetric loads // Computers and Structures, 1991, vol. 41(4), pp. 611-620.
99. Alwar, R. S., Nath Y. Application of Chebyshev polynomials to the nonlinear analysis of circular plates // Int. J. Mech. Sci., 1976, vol. 18 (11-12), pp. 589-595.
100. Cauchy A. Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide // Dans: Exercice de mathématique. 1828. № 3.
101. Chih-Ping Wu, Jyh-Yeuan Lo. Three-dimensional elasticity solutions of laminated annular spherical shells // Journal of Engineering Mechanics, 2000, vol. 126 (8), pp. 882-885.
102. Chih-Ping Wu, Yi-Hwa Tsai. Asymptotic DQ solutions of functionally graded annular spherical shells // European Journal of Mechanics, A/Solids, 2004, vol.

- 23(2), pp. 283-299.
103. Doan T.N., Van Thom D., Thanh N.T., Van Chuong P., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory // *Composite Structures*. 2020. Vol. 232. 111526. Doi: 10.1016/j.compstruct.2019.111526.
 104. El-Nady A.O., Negm H.M. Analysis of arbitrarily laminated composite spherical shells by chebyshev series // *Journal of Engineering and Applied Science*, 2004, vol. 51 (4), pp. 777-794.
 105. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // *Journal of machinery, manufacture and reliability*, 2016, vol. 5, no. 6, pp. 515-522.
 106. Firsanov V.V. The Basic Stress - Strain State of a Circular Plate of Variable Thickness Based on a Nonclassical Theory // *Journal of machinery, manufacture and reliability*, 2019, vol. 48, no. 1, pp. 54-60.
 107. Firsanov V.V. The Stressed State of the “Boundary Layer” Type in Cylindrical Shells Investigated according to a Nonclassical Theory // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018. Vol. 47. №. 3. Pp. 241-248.
 108. Firsanov V.V., Doan C.N. Energy-consistent theory of cylindrical shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2011. T. 40. № 6. Pp. 543-548.
 109. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory // *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 2015. Vol. 6. Issue 2. Pp. 135-166.
 110. Firsanov Val.V., Pham Vinh Thien. Research of the Stress-Strain State of Conical Shell Under the Action of Local Load Based on the Non-Classical Theory. *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 2020, Vol. 43, No. 4, pp. 24-32.
 111. Gould P.L. *Analysis of plates and shells*. Prentice-Hall. 1999.
 112. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells // *Proc. R. Soc.* 1962. V.A. 266,

- № 1325. P. 143-160.
113. Hossain S.J., Sinha P.K., Sheikh A.H. A finite element formulation for the analysis of laminated composite shells // *Comput Struct*, 2004, vol. 82 (20-21), pp. 1623-1638.
 114. Karama M, Afaq KS, Mistou S. A new theory for laminated composite plates // *Proc IMechE. Part L: J Mater Des Appl*, 2009, vol. 223 (2), pp. 53-62.
 115. Koiter W.T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells // *Proc. IUTAM Sympos. Theory Thin Elastic Shells*, Delft, 1959. Amsterdam, 1960.
 116. Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates // *Composites Part B: Engineering*, 2012, vol. 43(3), pp. 1489-1499.
 117. Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes C. Bending and free vibration analysis of isotropic multilayered plates and shells by using a new accurate higher order shear deformation theory // *Compos B*, 2012, vol. 43(8), pp. 3348-3360.
 118. Nash W.A. Bibliography on shells and shell-like structures // Part I. David W. Taylor. Model Basin Report 863 (Washington D.C.), 1954.
 119. Nash W.A. Bibliography on shells and shell-like structures // Part II. Department of Engineering mechanic. Engineering and Industrial Experiment Station University of Florida, Gainesville. Florida, June, 1957.
 120. Owen D. R. J., Li Z. H. A Refined Analysis of Laminated Plates by finite Element Displacement Methods I: Fundamentals and Static Analysis. *Computers and Structures*. 1987. Vol. 26 No. 6. P. 907–914.
 121. Pagano N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // *J Compos Mater*. 1970. Vol. 4 (1). pp. 20–34.
 122. Poisson S. Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps elastiques // *Mem. Acad. Sci. Paris*. 1829. № 8. P. 357-570; 623-627.
 123. Rao S.R., Ganesan N. Interlaminar stresses in spherical shells // *Comput Struct*, 1997, vol. 65 (4), pp. 575-583.

124. Reddy J., Liu C. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int J Eng Sci.* 1985. Vol. 23. pp. 319-330.
125. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis* (2nd ed.). New York: CRC Press, 2004. 831 pp.
126. Reiss E. A theory for the small rotationally symmetric deformations of cylindrical shells // *Communications. Pure and Appl. Math.* V. XIII. 1960. P. 973.
127. Reissner E. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *ASME Journal of Applied Mechanics.* 1945. Vol. 12. № 2. P. 68–77.
128. Reissner H. Spannungen in Kugelschalen (Kuppeln). *H. Müller-Breslau Festschrift, Leipzig, 1912*, pp.181-193.
129. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Static and free vibration analysis of laminated composite and sandwich spherical shells using a generalized higher-order shell theory // *Compos. Struct.*, 2019, vol. 219, pp. 129-146.
130. Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci.* 1991;29(8):901–16.
131. Varadan T.K., Bhaskar K. Bending of laminated orthotropic cylindrical shells - An elasticity approach // *Compos. Struct.*, 1991, vol. 17 (2), pp. 141-156.
132. Whitney J. The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *J Compos Mater.* 1969. Vol. 3. pp. 534-547.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I. Значения переменных коэффициентов разрешающих уравнений краевой задачи для изотропных сферических оболочек постоянной толщины.

$$H_0^{1u_0} = -\frac{1}{\sin \theta} (h^4 r^4 - 5) (\sin^2 \theta + 2(1 - \mu) \cos^2 \theta), H_1^{1u_0} = -2(\mu - 1) (h^4 r^4 - 5) \cos \theta,$$

$$H_{11}^{1u_0} = -2(\mu - 1) (h^4 r^4 - 5) \sin \theta, H_{22}^{1u_0} = -\frac{1}{\sin \theta} (2\mu - 1) (h^4 r^4 - 5),$$

$$H_2^{1v_0} = (4\mu - 3) (h^4 r^4 - 5) \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{1v_0} = h^4 r^4 - 5, H_1^{1w_0} = -(2\mu - 3) (h^4 r^4 - 5) \sin \theta,$$

$$H_0^{1u_1} = \frac{1}{r \sin \theta} (2h^4 r^4 (1 - \mu) \cos^2 \theta + (h^4 r^4 + 10\mu - 5) \sin^2 \theta), H_1^{1u_1} = 2(\mu - 1) h^4 r^3 \cos \theta,$$

$$H_{11}^{1u_1} = 2(\mu - 1) h^4 r^3 \sin \theta, H_{22}^{1u_1} = \frac{1}{\sin \theta} (2\mu - 1) h^4 r^3, H_2^{1v_1} = -(4\mu - 3) h^4 r^3 \operatorname{ctg} \theta,$$

$$H_{12}^{1v_1} = -h^4 r^3, H_1^{1w_1} = \frac{1}{r} (2\mu h^4 r^4 - 3h^4 r^4 - 10\mu) \sin \theta,$$

$$H_0^{1u_2} = -\frac{h^2}{6 \sin \theta} ((6h^2 r^2 - 10)(1 - \mu) \cos^2 \theta + (3h^2 r^2 - 20\mu + 5) \sin^2 \theta),$$

$$H_1^{1u_2} = -\frac{1}{3} (\mu - 1) h^2 (3h^2 r^2 - 5) \cos \theta, H_{11}^{1u_2} = -\frac{1}{3} (\mu - 1) h^2 (3h^2 r^2 - 5) \sin \theta,$$

$$H_{22}^{1u_2} = -\frac{1}{6 \sin \theta} (2\mu - 1) h^2 (3h^2 r^2 - 5), H_2^{1v_2} = \frac{1}{6} (4\mu - 3) h^2 (3h^2 r^2 - 5) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$H_{12}^{1v_2} = \frac{1}{6} h^2 (3h^2 r^2 - 5), H_1^{1w_2} = -\frac{1}{6r} h^2 (6\mu h^2 r^2 - 9h^2 r^2 + 10\mu + 15) \sin \theta,$$

$$H_0^{1u_3} = \frac{h^2}{6r \sin \theta} (2h^2 r^2 (1 - \mu) \cos^2 \theta + (h^2 r^2 + 10\mu - 5) \sin^2 \theta),$$

$$H_1^{1u_3} = \frac{1}{3} (\mu - 1) h^4 r \cos \theta, H_{11}^{1u_3} = \frac{1}{3} (\mu - 1) h^4 r \sin \theta, H_{22}^{1u_3} = \frac{1}{6 \sin \theta} (2\mu - 1) h^4 r,$$

$$H_2^{1v_3} = -\frac{1}{6} (4\mu - 3) h^4 r \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{1v_3} = -\frac{h^4 r}{6},$$

$$H_0^{1q_{13p}} = \frac{5}{Er^2 h} (2\mu - 1) (\mu + 1) (hr + 1)^2 \sin \theta,$$

$$H_0^{1q_{13m}} = -\frac{5}{Er^2 h} (2\mu - 1) (\mu + 1) (hr - 1)^2 \sin \theta,$$

$$H_0^{2u_0} = -\frac{1}{5h^2 r} 3(2\mu - 1) (h^4 r^4 - 5) \sin \theta, H_1^{2u_0} = 0, H_{11}^{2u_0} = 0, H_{22}^{2u_0} = 0,$$

$$H_2^{2v_0} = 0, H_{12}^{2v_0} = 0, H_1^{2w_0} = \frac{3}{5h^2 r} (2\mu - 1) (h^4 r^4 - 5) \sin \theta,$$

$$H_0^{2u_1} = \frac{10(1-\mu)h^2r^2 \cos^2 \theta + (6\mu h^4r^4 - 3h^4r^4 + 10\mu h^2r^2 - 30\mu + 15)\sin^2 \theta}{5h^2r^2 \sin \theta},$$

$$H_1^{2u_1} = 2(\mu - 1)\cos \theta, H_{11}^{2u_1} = 2(\mu - 1)\sin \theta, H_{22}^{2u_1} = \frac{1}{\sin \theta}(2\mu - 1),$$

$$H_2^{2v_1} = -(4\mu - 3)\operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{2v_1} = -1, H_1^{2w_1} = -\frac{1}{5r}(6\mu h^2r^2 - 3h^2r^2 + 10\mu + 10)\sin \theta,$$

$$H_0^{2u_2} = -\frac{1}{10r}(2\mu - 1)(3h^2r^2 + 5)\sin \theta, H_1^{2u_2} = 0, H_{11}^{2u_2} = 0, H_{22}^{2u_2} = 0, H_2^{2v_2} = 0, H_{12}^{2v_2} = 0,$$

$$H_1^{2w_2} = \frac{1}{10r}(6\mu h^2r^2 - 3h^2r^2 - 30\mu + 5)\sin \theta,$$

$$H_0^{2u_3} = \frac{1}{10r^2 \sin \theta}(2(1-\mu)h^2r^2 \cos^2 \theta + (4\mu h^2r^2 - h^2r^2 - 10\mu + 5)\sin^2 \theta),$$

$$H_1^{2u_3} = \frac{1}{5}(\mu - 1)h^2 \cos \theta, H_{11}^{2u_3} = \frac{1}{5}h^2 \sin \theta, H_{22}^{2u_3} = \frac{h^2}{10\sin \theta}(2\mu - 1),$$

$$H_2^{2v_3} = -\frac{1}{10}(4\mu - 3)h^2 \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{2v_3} = -\frac{h^2}{10}, H_0^{2q_{13p}} = \frac{3}{Eh^2r^2}(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr + 1)^2 \sin \theta,$$

$$H_0^{2q_{13m}} = \frac{3}{Eh^2r^2}(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr - 1)^2 \sin \theta,$$

$$H_0^{3u_0} = -\frac{1}{\sin \theta}(3h^4r^4 - 7)((4\mu - 1)\sin^2 \theta + 2(1-\mu)\cos^2 \theta),$$

$$H_1^{3u_0} = -2(3h^4r^4 - 7)(\mu - 1)\cos \theta, H_{11}^{3u_0} = -2(3h^4r^4 - 7)(\mu - 1)\sin \theta,$$

$$H_{22}^{3u_0} = -\frac{1}{\sin \theta}(2\mu - 1)(3h^4r^4 - 7), H_2^{3v_0} = (3h^4r^4 - 7)(4\mu - 3)\operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{3v_0} = 3h^4r^4 - 7,$$

$$H_1^{3w_0} = (3h^4r^4 - 7)(2\mu + 1)\sin \theta,$$

$$H_0^{3u_1} = \frac{1}{r \sin \theta}(6h^4r^4(1-\mu)\cos^2 \theta + (3h^4r^4(4\mu - 1) - 7(2\mu - 1))\sin^2 \theta),$$

$$H_1^{3u_1} = 6h^4r^3(\mu - 1)\cos \theta, H_{11}^{3u_1} = 6(\mu - 1)h^4r^3 \sin \theta, H_{22}^{3u_1} = \frac{3}{\sin \theta}(2\mu - 1)h^4r^3,$$

$$H_2^{3v_1} = -3h^4r^3(4\mu - 3)\operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{3v_1} = -3h^4r^3, H_2^{3w_1} = -\frac{1}{r}(3h^4r^4(2\mu + 1) + 14(3\mu - 1))\sin \theta,$$

$$H_0^{3u_2} = -\frac{1}{10r^2 \sin \theta}\{6h^2r^2(5h^2r^2 - 7)(1-\mu)\cos^2 \theta + (15h^4r^4(4\mu - 1) - 21h^2r^2 +$$

$$+140(2\mu - 1))\sin^2 \theta\}, H_1^{3u_2} = -\frac{3}{5}h^2(5h^2r^2 - 7)(\mu - 1)\cos \theta,$$

$$H_{11}^{3u_2} = -\frac{3}{5}(\mu - 1)h^2(5h^2r^2 - 7)\sin \theta, H_{22}^{3u_2} = -\frac{3}{10\sin \theta}(2\mu - 1)h^2(5h^2r^2 - 7),$$

$$\begin{aligned}
H_2^{3v_2} &= \frac{3}{10}h^2(5h^2r^2 - 7)(4\mu - 3)\text{ctg}\theta, H_{12}^{3v_2} = \frac{3}{10}h^2(5h^2r^2 - 7), \\
H_1^{3w_2} &= \frac{3}{10}h^2(5h^2r^2(2\mu + 1) - 7(6\mu + 1))\sin\theta, \\
H_0^{3u_3} &= \frac{1}{10r\sin\theta}h^2(10h^2r^2(1 - \mu)\cos^2\theta + (5(4\mu - 1)h^2r^2 - 49(2\mu - 1))\sin^2\theta), \\
H_1^{3u_3} &= h^4r(\mu - 1)\cos\theta, H_{11}^{3u_3} = h^4r(\mu - 1)\sin\theta, H_{22}^{3u_3} = \frac{1}{2\sin\theta}h^4r(2\mu - 1), \\
H_2^{3v_3} &= -\frac{1}{2}h^4r(4\mu - 3)\text{ctg}\theta, H_{12}^{3v_3} = -\frac{h^4r}{2}, H_0^{3q_{13p}} = \frac{21}{Er^2h}(hr + 1)^2(2\mu - 1)(\mu + 1)\sin\theta, \\
H_0^{3q_{13m}} &= -\frac{21}{Er^2h}(hr - 1)^2(2\mu - 1)(\mu + 1)\sin\theta, \\
H_0^{4u_0} &= -\frac{5}{14r}(2\mu - 1)(3h^4r^4 - 7)\sin\theta, H_1^{4u_0} = 0, \\
H_{11}^{4u_0} &= 0, H_{22}^{4u_0} = 0, H_2^{4v_0} = 0, H_{12}^{4v_0} = 0, H_1^{4w_0} = \frac{5}{14r}(2\mu - 1)(3h^4r^4 - 7)\sin\theta, \\
H_0^{4u_1} &= \frac{1}{14r^2\sin\theta}(14(1 - \mu)h^2r^2\cos^2\theta + (15(2\mu - 1)h^4r^4 + 14\mu h^2r^2 - 70\mu + 35)\sin^2\theta), \\
H_1^{4u_1} &= (\mu - 1)h^2\cos\theta, H_{11}^{4u_1} = (\mu - 1)h^2\sin\theta, H_{22}^{4u_1} = \frac{1}{2\sin\theta}h^2(2\mu - 1), \\
H_2^{4v_1} &= -\frac{1}{2}(4\mu - 3)h^2\text{ctg}\theta, H_{12}^{4v_1} = -\frac{h^2}{2}, H_1^{4w_1} = -\frac{3}{14}(5(2\mu - 1)h^2r^2 + 14\mu)h^2\sin\theta, \\
H_0^{4u_2} &= -\frac{1}{28r}(2\mu - 1)(15h^2r^2 + 49)h^2\sin\theta, H_1^{4u_2} = 0, H_{11}^{4u_2} = 0, H_{22}^{4u_2} = 0, H_2^{4v_2} = 0, \\
H_{12}^{4v_2} &= 0, H_1^{4w_2} = \frac{1}{28r}(15(2\mu - 1)h^2r^2 - 70\mu + 21)h^2\sin\theta, \\
H_0^{4u_3} &= \frac{1}{84r^2\sin\theta}h^2(10(1 - \mu)h^2r^2\cos^2\theta + (5h^2r^2 - 126\mu + 63)\sin^2\theta), \\
H_1^{4u_3} &= \frac{5}{42}(\mu - 1)h^4\cos\theta, H_{11}^{4u_3} = \frac{5}{42}(\mu - 1)h^4\sin\theta, H_{22}^{4u_3} = \frac{5}{84\sin\theta}(2\mu - 1)h^4, \\
H_2^{4v_3} &= -\frac{5}{84}(4\mu - 3)h^4\text{ctg}\theta, H_{12}^{4v_3} = -\frac{5}{84}h^4, \\
H_0^{4q_{13p}} &= \frac{5}{2Er^2}(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr + 1)^2\sin\theta, H_0^{4q_{13m}} = \frac{5}{Er^2}(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr - 1)^2\sin\theta, \\
H_2^{5u_0} &= -(4\mu - 3)(h^4r^4 - 5)\text{ctg}\theta, H_{12}^{5u_0} = h^4r^4 - 5, H_0^{5v_0} = \frac{1}{\sin\theta}(2\mu - 1)(h^4r^4 - 5)\cos^2\theta, \\
H_1^{5v_0} &= -(2\mu - 1)(h^4r^4 - 5)\cos\theta, H_{11}^{5v_0} = -(2\mu - 1)(h^4r^4 - 5)\sin\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{22}^{5v_0} &= -\frac{2}{\sin \theta}(\mu - 1)(h^4 r^4 - 5), H_2^{5w_0} = -(2\mu - 3)(h^4 r^4 - 5), \\
H_2^{5u_1} &= (4\mu - 3)h^4 r^3 \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{5u_1} = -h^4 r^3, H_0^{5v_1} = \frac{1}{r \sin \theta}(2\mu - 1)(5 \sin^2 \theta - h^4 r^4 \cos^2 \theta), \\
H_1^{5v_1} &= (2\mu - 1)h^4 r^3 \cos \theta, H_{11}^{5v_1} = (2\mu - 1)h^4 r^3 \sin \theta, H_{22}^{5v_1} = \frac{2}{\sin \theta}(\mu - 1)h^4 r^3, \\
H_2^{5w_1} &= \frac{1}{r}(2\mu h^4 r^4 - 3h^4 r^4 - 10\mu), H_2^{5u_2} = -\frac{1}{6}(4\mu - 3)h^2(3h^2 r^2 - 5) \operatorname{ctg} \theta, \\
H_{12}^{5u_2} &= \frac{1}{6}h^2(3h^2 r^2 - 5), H_0^{5v_2} = \frac{1}{6 \sin \theta}(2\mu - 1)h^2((3h^2 r^2 - 5)\cos^2 \theta + 10\sin^2 \theta), \\
H_1^{5v_2} &= -\frac{1}{6}(2\mu - 1)h^2(3h^2 r^2 - 5)\cos \theta, H_{11}^{5v_2} = -\frac{1}{6}(2\mu - 1)h^2(3h^2 r^2 - 5)\sin \theta, \\
H_{22}^{5v_2} &= -\frac{1}{3 \sin \theta}(\mu - 1)h^2(3h^2 r^2 - 5), H_2^{5w_2} = -\frac{1}{6}h^2(6\mu h^2 r^2 - 9h^2 r^2 + 10\mu + 15), \\
H_2^{5u_3} &= \frac{1}{6}(4\mu - 3)h^4 r \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{5u_3} = -\frac{1}{6}h^4 r, \\
H_0^{5v_3} &= \frac{1}{6r \sin \theta}(2\mu - 1)h^2(5 \sin^2 \theta - h^2 r^2 \cos^2 \theta), \\
H_1^{5v_3} &= \frac{1}{6}(2\mu - 1)h^4 r \cos \theta, H_{11}^{5v_3} = \frac{1}{6}(2\mu - 1)h^4 r \sin \theta, H_{22}^{5v_3} = \frac{1}{3 \sin \theta}(\mu - 1)h^4 r, \\
H_0^{5q_{23p}} &= \frac{5}{Er^2 h}(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr + 1)^2 \sin \theta, H_0^{5q_{23m}} = -\frac{5}{Er^2 h}(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr - 1)^2 \sin \theta, \\
H_2^{6u_0} &= 0, H_{12}^{6u_0} = 0, H_0^{6v_0} = \frac{-3}{5h^2 r}(2\mu - 1)(h^4 r^4 - 5)\sin \theta, H_1^{6v_0} = 0, H_{11}^{6v_0} = 0, H_{22}^{6v_0} = 0, \\
H_2^{6w_0} &= \frac{3}{5h^2 r}(2\mu - 1)(h^4 r^4 - 5), H_2^{6u_1} = (4\mu - 3) \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{6u_1} = -1, \\
H_0^{6v_1} &= \frac{1}{5h^2 r^2 \sin \theta}(2\mu - 1)((3h^4 r^4 + 5h^2 r^2 - 15)\sin^2 \theta - 5h^2 r^2 \cos^2 \theta), \\
H_1^{6v_1} &= (2\mu - 1)\cos \theta, H_{11}^{6v_1} = (2\mu - 1)\sin \theta, H_{22}^{6v_1} = \frac{2(\mu - 1)}{\sin \theta}, \\
H_2^{6w_1} &= -\frac{3}{5}(2\mu - 1)h^2 r^2 - 2(\mu + 1), H_2^{6u_2} = 0, H_{12}^{6u_2} = 0, \\
H_0^{6v_2} &= -\frac{1}{10r}(2\mu - 1)(3h^2 r^2 + 5)\sin \theta, H_1^{6v_2} = 0, H_{11}^{6v_2} = 0, H_{22}^{6v_2} = 0, \\
H_2^{6w_2} &= \frac{1}{10r}(6\mu h^2 r^2 - 3h^2 r^2 - 30\mu + 5), H_2^{2u_3} = \frac{1}{10}(4\mu - 3)h^2 \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{6u_3} = -\frac{h^2}{10},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0^{6v_3} &= \frac{1}{10r^2 \sin \theta} (2\mu - 1) \left((2h^2 r^2 - 5) \sin^2 \theta - h^2 r^2 \cos^2 \theta \right), H_1^{6v_3} = \frac{1}{10} (2\mu - 1) h^2 \cos \theta, \\
H_{11}^{6v_3} &= \frac{(2\mu - 1) h^2 \sin \theta}{10}, H_{22}^{6v_3} = \frac{(\mu - 1) h^2}{5 \sin \theta}, H_0^{6q_{23p}} = \frac{3}{Eh^2 r^2} (2\mu - 1) (\mu + 1) (hr + 1)^2 \sin \theta, \\
H_0^{6q_{23m}} &= \frac{3}{Eh^2 r^2} (2\mu - 1) (\mu + 1) (hr - 1)^2 \sin \theta, \\
H_2^{7u_0} &= -(4\mu - 3) (3h^4 r^4 - 7) \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{7u_0} = 3h^4 r^4 - 7, \\
H_0^{7v_0} &= \frac{-1}{\sin \theta} (2\mu - 1) (3h^4 r^4 - 7) (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta), H_1^{7v_0} = -(2\mu - 1) (3h^4 r^4 - 7) \cos \theta, \\
H_{11}^{7v_0} &= -(2\mu - 1) (3h^4 r^4 - 7) \sin \theta, H_{22}^{7v_0} = -\frac{2}{\sin \theta} (\mu - 1) (3h^4 r^4 - 7), \\
H_2^{7w_0} &= (3h^4 r^4 - 7) (2\mu + 1), H_2^{7u_1} = 3(4\mu - 3) h^4 r^3 \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{7u_1} = -3h^4 r^3, \\
H_0^{7v_1} &= \frac{1}{r \sin \theta} (2\mu - 1) \left((6h^4 r^4 - 7) \sin^2 \theta - 3h^4 r^4 \cos^2 \theta \right), H_1^{7v_1} = 3(2\mu - 1) h^4 r^3 \cos \theta, \\
H_{11}^{7v_1} &= 3(2\mu - 1) h^4 r^3 \sin \theta, H_{22}^{7v_1} = \frac{6h^4 r^3 (\mu - 1)}{\sin \theta}, H_2^{7w_1} = -\frac{1}{r} (3h^4 r^4 (2\mu + 1) + 14(3\mu - 1)), \\
H_2^{7u_2} &= \frac{-3}{10} (4\mu - 3) h^2 (5h^2 r^2 - 7) \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{7u_2} = \frac{3}{10} h^2 (5h^2 r^2 - 7), \\
H_0^{7v_2} &= -\frac{1}{10r^2 \sin \theta} (2\mu - 1) \left(10(3h^4 r^4 + 14) \sin^2 \theta - 3h^2 r^2 (5h^2 r^2 - 7) \cos^2 \theta \right), \\
H_1^{7v_2} &= -\frac{3}{10} (2\mu - 1) h^2 (5h^2 r^2 - 7) \cos \theta, H_{11}^{7v_2} = -\frac{3}{10} (2\mu - 1) h^2 (5h^2 r^2 - 7) \sin \theta, \\
H_{22}^{7v_2} &= -\frac{3}{10 \sin \theta} (\mu - 1) h^2 (5h^2 r^2 - 7), H_2^{7w_2} = \frac{3}{10} h^2 (5h^2 r^2 (2\mu + 1) - 7(6\mu + 1)), \\
H_2^{7u_3} &= \frac{1}{2} (4\mu - 3) h^4 r \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{7u_3} = -\frac{h^4 r}{2}, \\
H_0^{7v_3} &= \frac{1}{10r \sin \theta} (2\mu - 1) h^2 \left((10h^2 r^2 - 49) \sin^2 \theta - 5h^2 r^2 \cos^2 \theta \right), \\
H_1^{7v_3} &= \frac{(2\mu - 1) h^4 r \cos \theta}{2}, H_{11}^{7v_3} = \frac{(2\mu - 1) h^4 r \sin \theta}{2}, H_{22}^{7v_3} = \frac{(\mu - 1) h^4 r}{\sin \theta}, \\
H_0^{7q_{23p}} &= \frac{21}{Er^2 h} (2\mu - 1) (\mu + 1) (hr + 1)^2 \sin \theta, \\
H_0^{7q_{23m}} &= -\frac{21}{Er^2 h} (2\mu - 1) (\mu + 1) (hr - 1)^2 \sin \theta, \\
H_2^{8u_0} &= 0, H_{12}^{8u_0} = 0, H_0^{8v_0} = -\frac{5}{14r} (2\mu - 1) (3h^4 r^4 - 7) \sin \theta, H_1^{8v_0} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{11}^{8v_0} &= 0, H_{22}^{8v_0} = 0, H_2^{8w_0} = \frac{5}{14r}(2\mu - 1)(3h^4 r^4 - 7), \\
H_2^{8u_1} &= \frac{1}{2}(4\mu - 3)h^2 \operatorname{ctg} \theta, H_{12}^{8u_1} = -\frac{h^2}{2}, \\
H_0^{8v_1} &= \frac{1}{14r^2 \sin \theta}(2\mu - 1)\left((15h^4 r^4 + 7h^2 r^2 - 35)\sin^2 \theta - 7h^2 r^2 \cos^2 \theta\right), \\
H_1^{8v_1} &= \frac{(2\mu - 1)h^2 \cos \theta}{2}, H_{11}^{8v_1} = \frac{(2\mu - 1)h^2 \sin \theta}{2}, H_{22}^{8v_1} = \frac{(\mu - 1)h^2}{\sin \theta}, \\
H_2^{8w_1} &= -\frac{3}{14}(5(2\mu - 1)h^2 r^2 + 14\mu)h^2, H_2^{8u_2} = 0, H_{12}^{8u_2} = 0, \\
H_0^{8v_2} &= -\frac{1}{28r}(2\mu - 1)(15h^2 r^2 + 49)h^2 \sin \theta, H_1^{8v_2} = 0, H_{11}^{8v_2} = 0, H_{22}^{8v_2} = 0, \\
H_2^{8w_2} &= \frac{1}{28r}(15(2\mu - 1)h^2 r^2 - 70\mu + 21)h^2, H_2^{8u_3} = \frac{5}{84}(4\mu - 3)h^4 \operatorname{ctg} \theta, \\
H_{12}^{8u_3} &= -\frac{5h^4}{84}, H_0^{8v_3} = -\frac{1}{84r^2 \sin \theta}(2\mu - 1)h^2(5h^2 r^2 \cos^2 \theta + 63\sin^2 \theta), \\
H_1^{8v_3} &= \frac{5}{84}(2\mu - 1)h^4 \cos \theta, H_{11}^{8v_3} = \frac{5(2\mu - 1)h^4 \sin \theta}{84}, H_{22}^{8v_3} = \frac{5(\mu - 1)h^4}{42\sin \theta}, \\
H_0^{8q_{23p}} &= \frac{5(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr + 1)^2 \sin \theta}{2Er^2}, H_0^{8q_{23m}} = \frac{5(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr - 1)^2 \sin \theta}{Er^2}, \\
H_0^{9u_0} &= (2\mu - 3)(h^4 r^4 - 5)\cos \theta, H_1^{9u_0} = (2\mu - 3)(h^4 r^4 - 5)\sin \theta, \\
H_2^{9v_0} &= (2\mu - 3)(h^4 r^4 - 5), H_0^{9w_0} = -4(h^4 r^4 - 5)\sin \theta, \\
H_1^{9w_0} &= -(2\mu - 1)(h^4 r^4 - 5)\cos \theta, H_{11}^{9w_0} = -(2\mu - 1)(h^4 r^4 - 5)\sin \theta, \\
H_{22}^{9w_0} &= -\frac{2}{\sin \theta}(\mu - 1)(h^4 r^4 - 5), H_0^{9u_1} = -\frac{1}{r}(2\mu h^4 r^4 - 3h^4 r^4 - 10\mu + 5)\cos \theta, \\
H_1^{9u_1} &= -\frac{1}{r}(2\mu h^4 r^4 - 3h^4 r^4 - 10\mu + 5)\sin \theta, H_2^{9v_1} = -\frac{1}{r}(2\mu h^4 r^4 - 3h^4 r^4 - 10\mu + 5), \\
H_0^{9w_1} &= \frac{4}{r}(h^4 r^4 + 5\mu)\sin \theta, H_1^{9w_1} = (2\mu - 1)h^4 r^3 \cos \theta, H_{11}^{9w_1} = (2\mu - 1)h^4 r^3 \sin \theta, \\
H_{22}^{9w_1} &= \frac{1}{\sin \theta}(2\mu - 1)h^4 r^3, H_0^{9u_2} = \frac{1}{6}h^2(6\mu h^2 r^2 - 9h^2 r^2 + 10\mu + 5)\cos \theta, \\
H_1^{9u_2} &= \frac{1}{6}h^2(6\mu h^2 r^2 - 9h^2 r^2 + 10\mu + 5)\sin \theta, H_2^{9v_2} = \frac{1}{6}h^2(6\mu h^2 r^2 - 9h^2 r^2 + 10\mu + 5), \\
H_0^{9w_2} &= \frac{-2}{3}h^2(3h^2 r^2 - 10\mu - 5)\sin \theta, H_1^{9w_2} = -\frac{1}{6}(2\mu - 1)h^2(3h^2 r^2 - 5)\cos \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{11}^{9w_2} &= -\frac{1}{6}(2\mu-1)h^2(3h^2r^2-5)\sin\theta, H_{22}^{9w_2} = -\frac{1}{6\sin\theta}(2\mu-1)h^2(3h^2r^2-5), \\
H_0^{9u_3} &= -\frac{1}{6r}h^2(2\mu h^2r^2-3h^2r^2-10\mu+5)\cos\theta, \\
H_1^{9u_3} &= -\frac{1}{6r}h^2(2\mu h^2r^2-3h^2r^2-10\mu+5)\sin\theta, \\
H_2^{9v_3} &= -\frac{1}{6r}h^2(2\mu h^2r^2-3h^2r^2-10\mu+5), \\
H_0^{9q_{33p}} &= \frac{5(2\mu-1)(\mu+1)(hr+1)^2\sin\theta}{Er^2h}, H_0^{9q_{33m}} = -\frac{5(2\mu-1)(\mu+1)(hr-1)^2\sin\theta}{Er^2h}, \\
H_0^{10u_0} &= \frac{-6}{5h^2r}\mu(h^4r^4-5)\cos\theta, H_1^{10u_0} = \frac{-6}{5h^2r}\mu(h^4r^4-5)\sin\theta, \\
H_2^{10v_0} &= \frac{-6}{5h^2r}\mu(h^4r^4-5), H_0^{10w_0} = \frac{-12}{5h^2r}\mu(h^4r^4-5)\sin\theta, H_1^{10w_0} = 0, H_{11}^{10w_0} = 0, \\
H_{22}^{10w_0} &= 0, H_0^{10u_1} = \frac{2}{5}(3\mu h^2r^2+5\mu+5)\cos\theta, H_1^{10u_1} = \frac{2}{5}(3\mu h^2r^2+5\mu+5)\sin\theta, \\
H_2^{10v_1} &= \frac{1}{5}(6\mu h^2r^2+10\mu+10), H_0^{10w_1} = \frac{6}{5h^2r^2}(2\mu h^4r^4+5\mu h^2r^2+5h^2r^2-5\mu+5)\sin\theta, \\
H_1^{10w_1} &= (2\mu-1)\cos\theta, H_{11}^{10w_1} = (2\mu-1)\sin\theta, H_{22}^{10w_1} = \frac{2\mu-1}{\sin\theta}, \\
H_0^{10u_2} &= \frac{-1}{5r}(3\mu h^2r^2-15\mu+5)\cos\theta, H_1^{10u_2} = \frac{-1}{5r}(3\mu h^2r^2-15\mu+5)\sin\theta, \\
H_2^{10v_2} &= \frac{-1}{5r}(3\mu h^2r^2-15\mu+5), H_0^{10w_2} = \frac{-2}{5r}(3\mu h^2r^2-5\mu-10)\sin\theta, H_1^{10w_2} = 0, \\
H_{11}^{10w_2} &= 0, H_{22}^{10w_2} = 0, H_0^{10u_3} = \frac{4\mu h^2\cos\theta}{5}, H_1^{10u_3} = \frac{4\mu h^2\sin\theta}{5}, H_2^{10v_3} = \frac{4\mu h^2}{5}, \\
H_0^{10q_{33p}} &= \frac{3(2\mu-1)(\mu+1)(hr+1)^2\sin\theta}{Eh^2r^2}, H_0^{10q_{33m}} = \frac{3(2\mu-1)(\mu+1)(hr-1)^2\sin\theta}{Eh^2r^2}, \\
H_0^{11u_0} &= -3(2\mu+3)(3h^4r^4-7)\cos\theta, H_1^{11u_0} = -(2\mu+3)(3h^4r^4-7)\sin\theta, \\
H_2^{11v_0} &= -(2\mu+3)(3h^4r^4-7), H_0^{11w_0} = -4(3h^4r^4-7)(2\mu+1)\sin\theta, \\
H_1^{11w_0} &= -(3h^4r^4-7)(2\mu-1)\cos\theta, H_{11}^{11w_0} = -(2\mu-1)(3h^4r^4-7)\sin\theta, \\
H_{22}^{11w_0} &= -\frac{2}{\sin\theta}(\mu-1)(3h^4r^4-7), H_0^{11u_1} = \frac{1}{r}(3h^4r^4(2\mu+3)+7(6\mu-1))\cos\theta, \\
H_1^{11u_1} &= \frac{1}{r}(3h^4r^4(2\mu+3)+7(6\mu-1))\sin\theta, H_2^{11v_1} = \frac{1}{r}(3h^4r^4(2\mu+3)+7(6\mu-1)),
\end{aligned}$$

$$H_0^{11w_1} = \frac{4}{r} (3h^4 r^4 (2\mu + 1) + 7(\mu + 2)) \sin \theta, H_1^{11w_1} = 3(2\mu - 1)h^4 r^3 \cos \theta,$$

$$H_{11}^{11w_1} = 3(2\mu - 1)h^4 r^3 \sin \theta, H_{22}^{11w_1} = \frac{6}{\sin \theta} h^4 r^3 (\mu - 1),$$

$$H_0^{11u_2} = -\frac{3}{10} h^2 (5h^2 r^2 (2\mu + 3) - 7(6\mu + 1)) \cos \theta,$$

$$H_1^{11u_2} = -\frac{3}{10} h^2 (5h^2 r^2 (2\mu + 3) - 7(6\mu + 1)) \sin \theta,$$

$$H_2^{11u_2} = -\frac{3}{10} h^2 (5h^2 r^2 (2\mu + 3) - 7(6\mu + 1)),$$

$$H_0^{11w_2} = -\frac{2}{5r^2} (15h^4 r^4 (2\mu + 1) - 21h^2 r^2 (2\mu + 3) + 70(\mu - 1)) \sin \theta,$$

$$H_1^{11w_2} = -\frac{3}{10} (2\mu - 1)h^2 (5h^2 r^2 - 7) \cos \theta, H_{11}^{11w_2} = -\frac{3}{10} (2\mu - 1)h^2 (5h^2 r^2 - 7) \sin \theta,$$

$$H_{22}^{11w_2} = -\frac{3}{10 \sin \theta} (2\mu - 1)h^2 (5h^2 r^2 - 7),$$

$$H_0^{11u_3} = \frac{1}{10r} h^2 (5h^2 r^2 (2\mu + 3) + 7(10\mu - 3)) \cos \theta,$$

$$H_1^{11u_3} = \frac{1}{10r} h^2 (5h^2 r^2 (2\mu + 3) + 7(10\mu - 3)) \sin \theta,$$

$$H_2^{11u_3} = \frac{1}{10r} h^2 (5h^2 r^2 (2\mu + 3) + 7(10\mu - 3)),$$

$$H_0^{11q_{33p}} = \frac{21(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr + 1)^2 \sin \theta}{Er^2 h}, H_0^{11q_{33m}} = -\frac{21(2\mu - 1)(\mu + 1)(hr - 1)^2 \sin \theta}{Er^2 h},$$

Приложение II. Значения переменных коэффициентов разрешающих уравнений краевой задачи для изотропных конических оболочек переменной толщины.

$$\begin{aligned}
K_0^{1u_0} &= \frac{-1}{2x^5s^3} \left(48\mu\Lambda_4c^4 - 15(\mu-1)\Lambda_3c^3xs + 20(\mu-1)\Lambda_2c^2x^2s^2 - 30(\mu-1)\Lambda cx^3s^3 + \right. \\
&+ 60(\mu-1)x^4s^4 \left. \right), K_1^{1u_0} = \frac{6}{x^4s^3} \left(\mu\Lambda_4c^4 + 5(\mu-1)x^4s^4 \right), K_{11}^{1u_0} = 15(\mu-1)(\Lambda c + 2xs), \\
K_{22}^{1u_0} &= \frac{5}{4x^4s^4} (2\mu-1) \left(4\Lambda_2c^2xs - 3\Lambda_3c^3 - 6\Lambda cx^2s^2 + 12x^3s^3 \right), \\
K_2^{1v_0} &= \frac{-1}{4x^5s^4} \left(96\mu\Lambda_4c^4 - 15(4\mu-3)\Lambda_3c^3xs + 20(4\mu-3)\Lambda_2c^2x^2s^2 - \right. \\
&- 30(4\mu-3)\Lambda cx^3s^3 + 60(4\mu-3)x^4s^4 \left. \right), K_{12}^{1v_0} = \frac{3}{x^4s^4} \left(2\mu\Lambda_4c^4 - 5x^4s^4 \right), \\
K_0^{1w_0} &= \frac{-c}{2x^5s^4} \left(48\mu\Lambda_4c^4 - 15(\mu-1)\Lambda_3c^3xs + 20(\mu-1)\Lambda_2c^2x^2s^2 - 30(\mu-1)\Lambda cx^3s^3 + \right. \\
&+ 60(\mu-1)x^4s^4 \left. \right), K_1^{1w_0} = \frac{6}{x^4s^4} \mu c \left(\Lambda_4c^4 - 5x^4s^4 \right), \\
K_0^{1u_1} &= \frac{1}{2x^4s^2} \left(36\mu\Lambda_4c^3 - 15(\mu-1)\Lambda_3c^2xs + 20(\mu-1)\Lambda_2cx^2s^2 - 30(\mu-1)\Lambda x^3s^3 \right), \\
K_1^{1u_1} &= -\frac{3}{x^3s^2} \left(2\mu\Lambda_4c^3 - 5(\mu-1)\Lambda x^3s^3 \right), K_{11}^{1u_1} = 5(\mu-1)(2\Lambda_2c + 3\Lambda xs), \\
K_{22}^{1u_1} &= \frac{-5}{4x^3s^3} (2\mu-1) \left(4\Lambda_2cxs - 3\Lambda_3c^2 - 6\Lambda x^2s^2 \right), \\
K_2^{1v_1} &= \frac{1}{4x^4s^3} \left(72\mu\Lambda_4c^3 - 15(4\mu-3)\Lambda_3c^2xs + 20(4\mu-3)\Lambda_2cx^2s^2 - 30(4\mu-3)\Lambda x^3s^3 \right), \\
K_{12}^{1v_1} &= -\frac{3}{2x^3s^3} \left(4\mu\Lambda_4c^3 + 5\Lambda x^3s^3 \right), \\
K_0^{1w_1} &= \frac{c}{2x^4s^2} \left(36\mu\Lambda_4c^3 - 15(\mu-1)\Lambda_3c^2xs + 20(\mu-1)\Lambda_2cx^2s^2 - 30(\mu-1)\Lambda x^3s^3 \right), \\
K_1^{1w_1} &= -\frac{6\mu}{x^3s^3} \left(\Lambda_4c^4 + 5\Lambda x^3s^3 + 5x^4s^4 \right), \\
K_0^{1u_2} &= -\frac{1}{4x^3s} \left(24\mu\Lambda_4c^2 - 15(\mu-1)\Lambda_3cxs + 20(\mu-1)\Lambda_2x^2s^2 \right), \\
K_1^{1u_2} &= \frac{1}{x^2s} \left(3\mu\Lambda_4c^2 + 5(\mu-1)\Lambda_2x^2s^2 \right), K_{11}^{1u_2} = \frac{5}{4}(\mu-1)(4\Lambda_2xs + 3\Lambda_3c), \\
K_{22}^{1u_2} &= \frac{5}{8x^2s^2} (2\mu-1) \left(4\Lambda_2xs - 3c\Lambda_3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2^{1v_2} &= -\frac{1}{8x^3s^2} \left(48\mu\Lambda_4c^2 - 15(4\mu - 3)\Lambda_3cxs + 20(4\mu - 3)\Lambda_2x^2s^2 \right), \\
K_{12}^{1v_2} &= \frac{1}{2x^2s^2} \left(6\mu\Lambda_4c^2 - 5\Lambda_2x^2s^2 \right), \\
K_0^{1w_2} &= -\frac{c}{4x^3s} \left(24\mu\Lambda_4c^2 - 15(\mu - 1)\Lambda_3cxs + 20(\mu - 1)\Lambda_2x^2s^2 \right), \\
K_1^{1w_2} &= \frac{3\mu}{x^2s^2} \left(\Lambda_4c^3 - 5\Lambda_2cx^2s^2 - 5\Lambda_3x^3s^3 \right), K_0^{1u_3} = \frac{1}{4x^2} \left(4\mu\Lambda_4c - 5(\mu - 1)\Lambda_3xs \right), \\
K_1^{1u_3} &= -\frac{1}{4x} \left(4\mu\Lambda_4c - 5(\mu - 1)\Lambda_3xs \right), K_{11}^{1u_3} = \frac{1}{4} (\mu - 1) (4\Lambda_4c + 5\Lambda_3xs), \\
K_{22}^{1u_3} &= \frac{5}{8xs} (2\mu - 1)\Lambda_3, K_2^{1v_3} = \frac{1}{8x^2s} \left(8\mu\Lambda_4c - 5(4\mu - 3)\Lambda_3xs \right), \\
K_{12}^{1v_3} &= -\frac{1}{8xs} \left(8\mu\Lambda_4c + 5\Lambda_3xs \right), K_0^{1q_{13p}} = \frac{30(2\mu - 1)(\mu + 1)(h_2c + xs)}{E(h_2 + h_1)}, \\
K_0^{1q_{13m}} &= \frac{30(2\mu - 1)(\mu + 1)(h_1c - xs)}{E(h_2 + h_1)}, \\
K_0^{2u_0} &= \frac{1}{2x^5s^3} \left(-40\mu\Lambda_5c^4 + 12(\mu - 1)\Lambda_4c^3xs - 15(\mu - 1)\Lambda_3c^2x^2s^2 + \right. \\
&\quad \left. + 20(\mu - 1)\Lambda_2cx^3s^3 - 30(\mu - 1)\Lambda x^4s^4 \right), K_1^{2u_0} = \frac{5}{x^4s^3} \left(\mu\Lambda_4c^4 + 3(\mu - 1)\Lambda x^4s^4 \right), \\
K_{11}^{2u_0} &= 5(\mu - 1)(2\Lambda_2c + 3\Lambda xs), \\
K_{22}^{2u_0} &= \frac{-1}{4x^4s^4} (2\mu - 1) \left(12\Lambda_4c^3 + 15\Lambda_3c^2xs + 20\Lambda_2cx^2s^2 - 30\Lambda x^3s^3 \right), \\
K_2^{2v_0} &= \frac{1}{4x^5s^4} \left(-80\mu\Lambda_5c^4 + 12(4\mu - 3)\Lambda_4c^3xs - 15(4\mu - 3)\Lambda_3c^2x^2s^2 + \right. \\
&\quad \left. + 20(4\mu - 3)\Lambda_2cx^3s^3 - 30(4\mu - 3)\Lambda x^4s^4 \right), K_{12}^{2v_0} = \frac{5}{2x^4s^4} \left(2\mu\Lambda_5c^4 - 3\Lambda x^4s^4 \right), \\
K_0^{2w_0} &= \frac{c}{2x^5s^4} \left(-40\mu\Lambda_5c^4 + 12(\mu - 1)\Lambda_4c^3xs - 15(\mu - 1)\Lambda_3c^2x^2s^2 + \right. \\
&\quad \left. + 20(\mu - 1)\Lambda_2cx^3s^3 - 30(\mu - 1)\Lambda x^4s^4 \right), \\
K_1^{2w_0} &= \frac{5}{2x^4s^4} \left(2\mu\Lambda_5c^5 + 3(4\mu - 3)\Lambda cx^4s^4 + 6(2\mu - 1)x^5s^5 \right), \\
K_0^{2u_1} &= \frac{-1}{2x^4s^2} \left(-30\mu\Lambda_5c^3 + 12(\mu - 1)\Lambda_4c^2xs - 15(\mu - 1)\Lambda_3cx^2s^2 + \right. \\
&\quad \left. + 20(\mu - 1)\Lambda_2x^3s^3 + 15(2\mu - 1)x^4s^2(\Lambda c + 2xs) \right),
\end{aligned}$$

$$K_1^{2u_1} = \frac{5}{x^3 s^2} (\mu \Lambda_5 c^3 + 2(\mu - 1) \Lambda_2 x^3 s^3), K_{11}^{2u_1} = \frac{5}{2} (\mu - 1) (3\Lambda_3 c + 4\Lambda_2 x s),$$

$$K_{22}^{2u_1} = \frac{1}{4x^3 s^3} (2\mu - 1) (12\Lambda_4 c^2 - 15\Lambda_3 c x s + 20\Lambda_2 x^2 s^2),$$

$$K_2^{2v_1} = \frac{-1}{4x^4 s^3} (-60\mu \Lambda_5 c^3 + 12(4\mu - 3) \Lambda_4 c^2 x s - 15(4\mu - 3) \Lambda_3 c x^2 s^2 +$$

$$+ 20(4\mu - 3) \Lambda_2 x^3 s^3), K_{12}^{2v_1} = \frac{5}{x^3 s^3} (\mu \Lambda_5 c^3 - \Lambda_2 x^3 s^3),$$

$$K_0^{2w_1} = \frac{c}{2x^4 s^3} (-30\mu \Lambda_5 c^3 + 12(\mu - 1) \Lambda_4 c^2 x s - 15(\mu - 1) \Lambda_3 c x^2 s^2 + 20(\mu - 1) \Lambda_2 x^3 s^3),$$

$$K_1^{2w_1} = \frac{5}{2x^3 s^3} (-2\mu \Lambda_5 c^4 + 3(4\mu - 3) \Lambda x^4 s^4 + 2(6\mu - 1) \Lambda_2 c x^3 s^3),$$

$$K_0^{2u_2} = \frac{1}{4x^3 s} (-20\mu \Lambda_5 c^2 + 12(\mu - 1) \Lambda_4 c x s - 15(\mu - 1) \Lambda_3 x^2 s^2 +$$

$$+ 20(2\mu - 1) \Lambda_2 c x^3 s + 30(2\mu - 1) \Lambda x^4 s^2), K_1^{2u_2} = \frac{5}{4x^2 s} (2\mu \Lambda_5 c^2 + 3(\mu - 1) \Lambda_3 x^2 s^2),$$

$$K_{11}^{2u_2} = \frac{3}{4} (\mu - 1) (4\Lambda_4 c + 5\Lambda_3 x s), K_{22}^{2u_2} = \frac{-3}{8x^2 s^2} (2\mu - 1) (4\Lambda_4 c - 5\Lambda_3 x s),$$

$$K_2^{2v_2} = \frac{1}{8x^3 s^2} (-40\mu \Lambda_5 c^2 + 12(4\mu - 3) \Lambda_4 c x s - 15(4\mu - 3) \Lambda_3 x^2 s^2),$$

$$K_{12}^{2v_2} = \frac{5}{8x^2 s^2} (4\mu \Lambda_5 c^2 - 3\Lambda_3 x^2 s^2),$$

$$K_0^{2w_2} = -\frac{c}{4x^3 s^2} (-20\mu \Lambda_5 c^2 + 12(\mu - 1) \Lambda_4 c x s - 15(\mu - 1) \Lambda_3 x^2 s^2),$$

$$K_1^{2w_2} = \frac{-5}{8x^2 s^2} (-4\mu \Lambda_5 c^3 + 3(8\mu - 1) \Lambda_3 c x^2 s^2 + 4(6\mu - 1) \Lambda_2 x^3 s^3),$$

$$K_0^{2u_3} = \frac{-1}{24x^2} (-20\mu \Lambda_5 c + 24(\mu - 1) \Lambda_4 x s + 60(2\mu - 1) \Lambda_2 x^3 s + 45(2\mu - 1) \Lambda_3 c x^2 s^2),$$

$$K_1^{2u_3} = \frac{1}{6x} (-5\mu \Lambda_5 c + 6(\mu - 1) \Lambda_4 x s), K_{11}^{2u_3} = \frac{1}{6} (\mu - 1) (5\Lambda_5 c + 6\Lambda_4 x s),$$

$$K_{22}^{2u_3} = \frac{1}{2x s} (2\mu - 1) \Lambda_4,$$

$$K_2^{2v_3} = \frac{1}{6x^2 s} (5\mu \Lambda_5 c - 3(4\mu - 3) \Lambda_4 x s), K_{12}^{2v_3} = \frac{-1}{6x s} (5\mu \Lambda_5 c + 3\Lambda_4 x s),$$

$$K_0^{2q_{13p}} = \frac{30h_2 (2\mu - 1) (\mu + 1) (h_2 c + x s)}{E(h_2 + h_1)}, K_0^{2q_{13m}} = -\frac{30h_1 (2\mu - 1) (\mu + 1) (h_1 c - x s)}{E(h_2 + h_1)},$$

$$\begin{aligned}
K_0^{3u_0} &= \frac{-1}{2x^5s^3} \left(240\mu\Lambda_6c^4 - 70(\mu-1)\Lambda_5c^3xs + 84(\mu-1)\Lambda_4c^2x^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. -105(\mu-1)\Lambda_3cx^3s^3 + 140(\mu-1)\Lambda_2x^4s^4 \right), K_1^{3u_0} = \frac{10}{x^4s^3} \left(3\mu\Lambda_6c^4 + 7(\mu-1)\Lambda_2x^4s^4 \right), \\
K_{11}^{3u_0} &= \frac{35}{2}(\mu-1)(3\Lambda_3c + 4\Lambda_2xs), \\
K_{22}^{3u_0} &= \frac{7}{4x^4s^4} (2\mu-1) \left(-10\Lambda_5c^3 + 12\Lambda_4c^2xs - 15\Lambda_3cx^2s^2 + 20\Lambda_2x^3s^3 \right), \\
K_2^{3v_0} &= \frac{-1}{4x^5s^4} \left(480\mu\Lambda_6c^4 - 70(4\mu-3)\Lambda_5c^3xs + 84(4\mu-3)\Lambda_4c^2x^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. -105(4\mu-3)\Lambda_3cx^3s^3 + 140(4\mu-3)\Lambda_2x^4s^4 \right), K_{12}^{3v_0} = \frac{5}{x^4s^4} \left(6\mu\Lambda_6c^4 - 7\Lambda_2x^4s^4 \right), \\
K_0^{3w_0} &= \frac{-c}{2x^5s^4} \left(240\mu\Lambda_6c^4 - 70(\mu-1)\Lambda_5c^3xs + 84(\mu-1)\Lambda_4c^2x^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. -105(\mu-1)\Lambda_3cx^3s^3 + 140(\mu-1)\Lambda_2x^4s^4 \right), \\
K_1^{3w_0} &= \frac{5}{x^4s^4} \left(6\mu\Lambda_6c^5 - 14(3\mu-1)\Lambda_2cx^4s^4 - 6(2\mu-1)\Lambda x^5s^5 \right), \\
K_0^{3u_1} &= \frac{-1}{2x^4s^2} \left(180\mu\Lambda_6c^3 - 70(\mu-1)\Lambda_5c^2xs + 84(\mu-1)\Lambda_4cx^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. -105(\mu-1)\Lambda_3x^3s^3 - 140(2\mu-1)\Lambda_2cx^4s^2 - 210(2\mu-1)\Lambda x^5s^3 \right), \\
K_1^{3u_1} &= \frac{-15}{2x^3s^2} \left(4\mu\Lambda_6c^3 - 7(\mu-1)\Lambda_3x^3s^3 \right), K_{11}^{3u_1} = \frac{21}{2}(\mu-1)(4\Lambda_4c + 5\Lambda_3xs), \\
K_{22}^{3u_1} &= \frac{-7}{4x^3s^3} (2\mu-1) \left(-10\Lambda_5c^2 + 12\Lambda_4cxs - 15\Lambda_3x^2s^2 \right), \\
K_2^{3v_1} &= \frac{1}{4x^4s^3} \left(360\mu\Lambda_6c^3 - 70(4\mu-3)\Lambda_5c^2xs + 84(4\mu-3)\Lambda_4cx^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. -105(4\mu-3)\Lambda_3x^3s^3 \right), K_{12}^{3v_1} = \frac{-15}{4x^3s^3} \left(8\mu\Lambda_6c^3 - 7\Lambda_3x^3s^3 \right), \\
K_0^{3w_1} &= \frac{c}{2x^4s^3} \left(180\mu\Lambda_6c^3 - 70(\mu-1)\Lambda_5c^2xs + 84(\mu-1)\Lambda_4cx^2s^2 - 105(\mu-1)\Lambda_3x^3s^3 \right), \\
K_1^{3w_1} &= \frac{-5}{2x^3s^3} \left(12\mu\Lambda_6c^4 + 21(4\mu-1)\Lambda_3cx^3s^3 + 28(3\mu-1)\Lambda_2x^4s^4 \right), \\
K_0^{3u_2} &= \frac{-1}{2x^3s} \left(60\mu\Lambda_6c^2 - 35(\mu-1)\Lambda_5cxs + 42(\mu-1)\Lambda_4x^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. -105(2\mu-1)\Lambda_3cx^3s - 140(2\mu-1)\Lambda_2x^4s^2 \right), K_1^{3u_2} = \frac{3}{x^2s} \left(5\mu\Lambda_6c^2 + 7(\mu-1)\Lambda_4x^2s^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{11}^{3u_2} &= \frac{7}{2}(\mu-1)(5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs), K_{22}^{3u_2} = \frac{7}{4x^2s^2}(2\mu-1)(-5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs), \\
K_2^{3v_2} &= \frac{-1}{4x^3s^2}(120\mu\Lambda_6c^2 - 35(4\mu-3)\Lambda_5cxs + 42(4\mu-3)\Lambda_4x^2s^2), \\
K_{12}^{3v_2} &= \frac{3}{2x^2s^2}(10\mu\Lambda_6c^2 - 7\Lambda_4x^2s^2), \\
K_0^{3w_2} &= -\frac{c}{2x^3s^2}(60\mu\Lambda_6c^2 - 35(\mu-1)\Lambda_5cxs + 42(\mu-1)\Lambda_4x^2s^2), \\
K_1^{3w_2} &= \frac{3}{4x^2s^2}(20\mu\Lambda_6c^3 - 28(5\mu-1)\Lambda_4cx^2s^2 - 35(4\mu-1)\Lambda_3x^3s^3), \\
K_0^{3u_3} &= \frac{1}{12x^2}(60\mu\Lambda_6c - 70(\mu-1)\Lambda_5xs - 252(2\mu-1)\Lambda_4cx^2 - 315(2\mu-1)\Lambda_3x^3s), \\
K_1^{3u_3} &= \frac{-5}{6x}(6\mu\Lambda_6c - 7(\mu-1)\Lambda_5xs), K_{11}^{3u_3} = \frac{5}{6}(\mu-1)(6\Lambda_6c + 7\Lambda_5xs), \\
K_{22}^{3u_3} &= \frac{35}{12xs}(2\mu-1)\Lambda_5, K_2^{3v_3} = \frac{5}{12x^2s}(12\mu\Lambda_6c - 7(4\mu-3)\Lambda_5xs), \\
K_{12}^{3v_3} &= \frac{-5}{12xs}(12\mu\Lambda_6c + 7\Lambda_5xs), K_0^{3q_{13p}} = \frac{210}{E(h_2 + h_1)}h_2^2(2\mu-1)(\mu+1)(h_2c + xs), \\
K_0^{3q_{13m}} &= \frac{210}{E(h_2 + h_1)}h_1^2(2\mu-1)(\mu+1)(h_1c - xs), \\
K_0^{4u_0} &= \frac{1}{12x^5s^3}(-210\mu\Lambda_7c^4 + 60(\mu-1)\Lambda_6c^3xs - 70(\mu-1)\Lambda_5c^2x^2s^2 + \\
&+ 84(\mu-1)\Lambda_4cx^3s^3 - 105(\mu-1)\Lambda_3x^4s^4), K_1^{4u_0} = \frac{35}{8x^4s^3}(\mu\Lambda_7c^4 + 2(\mu-1)\Lambda_3x^4s^4), \\
K_{11}^{4u_0} &= \frac{7}{4}(\mu-1)(4\Lambda_4c + 4\Lambda_3xs), \\
K_{22}^{4u_0} &= \frac{-1}{24x^4s^4}(2\mu-1)(60\Lambda_6c^3 - 70\Lambda_5c^2xs + 84\Lambda_4cx^2s^2 - 105\Lambda_3x^3s^3), \\
K_2^{4v_0} &= \frac{1}{24x^5s^4}(-420\mu\Lambda_7c^4 + 60(4\mu-3)\Lambda_6c^3xs - 70(4\mu-3)\Lambda_5c^2x^2s^2 + \\
&+ 84(4\mu-3)\Lambda_4cx^3s^3 - 105(4\mu-3)\Lambda_3x^4s^4), K_{12}^{4v_0} = \frac{35}{8x^4s^4}(\mu\Lambda_7c^4 - \Lambda_3x^4s^4), \\
K_0^{4w_0} &= \frac{c}{12x^5s^4}(-210\mu\Lambda_7c^4 + 60(\mu-1)\Lambda_6c^3xs - 70(\mu-1)\Lambda_5c^2x^2s^2 + \\
&+ 84(\mu-1)\Lambda_4cx^3s^3 - 105(\mu-1)\Lambda_3x^4s^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1^{4w_0} &= \frac{-35}{8x^4s^4}(-\mu\Lambda_7c^5 + (8\mu - 3)\Lambda_3cx^4s^4 + 4(2\mu - 1)\Lambda_2x^5s^5), \\
K_0^{4u_1} &= \frac{-1}{24x^4s^2}(-315\mu\Lambda_7c^3 + 120(\mu - 1)\Lambda_6c^2xs - 140(\mu - 1)\Lambda_5cx^2s^2 + \\
&+ 168(\mu - 1)\Lambda_4x^3s^3 - 315(2\mu - 1)\Lambda_3cx^4s^2 + 420(2\mu - 1)\Lambda_2x^5s^3), \\
K_1^{4u_1} &= \frac{7}{8x^3s^2}(-5\mu\Lambda_7c^3 + 8(\mu - 1)\Lambda_4x^3s^3), K_{11}^{4u_1} = \frac{7}{6}(\mu - 1)(5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs), \\
K_{22}^{4u_1} &= \frac{1}{12x^3s^3}(2\mu - 1)(30\Lambda_6c^2 - 35\Lambda_5cxs + 42\Lambda_4x^2s^2), \\
K_2^{4v_1} &= \frac{-1}{24x^4s^3}(-315\mu\Lambda_7c^3 + 60(4\mu - 3)\Lambda_6c^2xs - 70(4\mu - 3)\Lambda_5cx^2s^2 + \\
&+ 84(4\mu - 3)\Lambda_4x^3s^3), K_{12}^{4v_1} = \frac{-7}{8x^3s^3}(5\mu\Lambda_7c^3 + 4\Lambda_4x^3s^3), \\
K_0^{4w_1} &= \frac{-c}{24x^4s^3}(-315\mu\Lambda_7c^3 + 120(\mu - 1)\Lambda_6c^2xs - 140(\mu - 1)\Lambda_5cx^2s^2 + \\
&+ 168(\mu - 1)\Lambda_4x^3s^3), K_1^{4w_1} = \frac{-7}{8x^3s^3}(5\mu\Lambda_7c^4 + 4(10\mu - 3)\Lambda_4cx^3s^3 + 5(8\mu - 3)\Lambda_3x^4s^4), \\
K_0^{4u_2} &= \frac{1}{24x^3s}(-105\mu\Lambda_7c^2 + 60(\mu - 1)\Lambda_6cxs - 70(\mu - 1)\Lambda_5x^2s^2 + \\
&+ 252(2\mu - 1)\Lambda_4cx^3s - 315(2\mu - 1)\Lambda_3x^4s^2), K_1^{4u_2} = \frac{-35}{48x^2s}(3\mu\Lambda_7c^2 + 4(\mu - 1)\Lambda_5x^2s^2), \\
K_{11}^{4u_2} &= \frac{5}{12}(\mu - 1)(6\Lambda_6c + 7\Lambda_5xs), K_{22}^{4u_2} = \frac{-5}{24x^2s^2}(2\mu - 1)(6\Lambda_6c - 7\Lambda_5xs), \\
K_2^{4v_2} &= \frac{5}{24x^3s^2}(-21\mu\Lambda_7c^2 + 6(4\mu - 3)\Lambda_6cxs - 7(4\mu - 3)\Lambda_5x^2s^2), \\
K_{12}^{4v_2} &= \frac{35}{48x^2s^2}(3\mu\Lambda_7c^2 - 2\Lambda_5x^2s^2), \\
K_0^{4w_2} &= \frac{5c}{24x^3s^2}(-21\mu\Lambda_7c^2 + 12(\mu - 1)\Lambda_6cxs - 14(\mu - 1)\Lambda_5x^2s^2), \\
K_1^{4w_2} &= \frac{-7}{16x^2s^2}(-5\mu\Lambda_7c^3 + 10(4\mu - 1)\Lambda_5cx^2s^2 + 4(10\mu - 3)\Lambda_4x^3s^3), \\
K_0^{4u_3} &= \frac{-1}{48x^2}(-35\mu\Lambda_7c + 40(\mu - 1)\Lambda_6xs + 210(2\mu - 1)\Lambda_5cx^2 + 252(2\mu - 1)\Lambda_4x^3s), \\
K_1^{4u_3} &= \frac{5}{48x}(-7\mu\Lambda_7c + 8(\mu - 1)\Lambda_6xs), K_{11}^{4u_3} = \frac{5}{48}(\mu - 1)(7\Lambda_7c + 8\Lambda_6xs), \\
K_{22}^{4u_3} &= \frac{5}{12xs}(2\mu - 1)\Lambda_6, K_2^{4v_3} = \frac{5}{48x^2s}(7\mu\Lambda_7c - 4(4\mu - 3)\Lambda_6xs),
\end{aligned}$$

$$K_{12}^{4v_3} = \frac{-5}{48xs}(7\mu\Lambda_7c + 4\Lambda_6xs), K_0^{4q_{13p}} = \frac{35}{E(h_2 + h_1)}h_2^3(2\mu - 1)(\mu + 1)(h_2c + xs),$$

$$K_0^{4q_{13m}} = -\frac{35}{E(h_2 + h_1)}h_1^3(2\mu - 1)(\mu + 1)(h_1c - xs),$$

$$K_2^{5u_0} = \frac{1}{4x^5s^4}(48\mu(2\mu - 1)\Lambda_4c^4 - 15(4\mu - 3)\Lambda_3c^3xs + 20(4\mu - 3)\Lambda_2c^2x^2s^2 - 30(4\mu - 3)\Lambda cx^3s^3 + 60(4\mu - 3)x^4s^4), K_{12}^{5u_0} = \frac{-3}{x^4s^4}((2\mu - 1)\Lambda_4c^4 + 5x^4s^4),$$

$$K_0^{5v_0} = -\frac{2\mu - 1}{4x^5s^4}(48\Lambda_4c^4s + (-15\Lambda_3c^3x + 20\Lambda_2c^2x^2s - 30\Lambda cx^3s^2 + 60x^4s^3)(c^2 + s^2)),$$

$$K_1^{5v_0} = \frac{3}{x^4s^3}(2\mu - 1)(\Lambda_4c^4 + 5x^4s^4), K_{11}^{5v_0} = \frac{15}{2}(2\mu - 1)(\Lambda c + 2xs),$$

$$K_{22}^{5v_0} = \frac{5}{2x^4s^4}(\mu - 1)(-3\Lambda_3c^3 + 4\Lambda_2c^2xs - 6\Lambda cx^2s^2 + 12x^3s^3),$$

$$K_2^{5w_0} = \frac{5c}{4x^4s^4}(4\mu - 3)(-3\Lambda_3c^3 + 4c^2\Lambda_2xs - 6\Lambda cx^2s^2 + 12x^3s^3),$$

$$K_2^{5u_1} = \frac{-1}{4x^4s^3}(36(2\mu - 1)\mu\Lambda_4c^3 - 15(4\mu - 3)\Lambda_3c^2xs + 20(4\mu - 3)\Lambda_2cx^2s^2 - 30(4\mu - 3)\Lambda x^3s^3), K_{12}^{5u_1} = \frac{3}{x^3s^3}((2\mu - 1)\Lambda_4c^3 - 5\Lambda x^3s^3),$$

$$K_0^{5v_1} = \frac{2\mu - 1}{4x^4s^3}(36\Lambda_4c^3s + (-15\Lambda_3c^2x + 20\Lambda_2cx^2s - 30\Lambda x^3s^2)(c^2 + s^2) + 60cx^4s^3),$$

$$K_1^{5v_1} = -\frac{3}{2x^3s^2}(2\mu - 1)(2\Lambda_4c^3 - 5\Lambda x^3s^3), K_{11}^{5v_1} = \frac{5}{2}(2\mu - 1)(2\Lambda_2c + 3\Lambda xs),$$

$$K_{22}^{5v_1} = \frac{-5}{2x^3s^3}(\mu - 1)(-3\Lambda_3c^2 + 4\Lambda_2cxs - 6\Lambda x^2s^2),$$

$$K_2^{5w_1} = \frac{-5}{4x^3s^3}(-3(4\mu - 3)\Lambda_3c^3 + 4(4\mu - 3)\Lambda_2c^2xs - 6(4\mu - 3)\Lambda cx^2s^2 + 24\mu x^3s^3),$$

$$K_2^{5u_2} = \frac{1}{8x^3s^2}(24(2\mu - 1)\Lambda_4c^2 - 15(4\mu - 3)\Lambda_3cxs + 20(4\mu - 3)\Lambda_2x^2s^2),$$

$$K_{12}^{5u_2} = \frac{-1}{2x^2s^2}(3(2\mu - 1)\Lambda_4c^2 + 5\Lambda_2x^2s^2),$$

$$K_0^{5v_2} = -\frac{2\mu - 1}{8x^3s^2}(24\Lambda_4c^2s + (-15\Lambda_3cx + 20\Lambda_2x^2s)(c^2 + s^2) - 60\Lambda cx^3s^2),$$

$$K_1^{5v_2} = \frac{1}{2x^2s}(2\mu - 1)(3\Lambda_4c^2 + 5\Lambda_2x^2s^2), K_{11}^{5v_2} = \frac{5}{8}(2\mu - 1)(4\Lambda_2xs + 3\Lambda_3c),$$

$$K_{22}^{5v_2} = \frac{5}{4x^2s^2}(\mu-1)(4\Lambda_2xs - 3\Lambda_3c),$$

$$K_2^{5w_2} = \frac{5}{8x^2s^2}(-3(4\mu-3)\Lambda_3c^2 + 4(4\mu-3)\Lambda_2cxs - 24\mu\Lambda x^2s^2),$$

$$K_2^{5u_3} = -\frac{1}{8x^2s}(4(2\mu-1)\Lambda_4c - 5(4\mu-3)\Lambda_3xs), K_{12}^{5u_3} = \frac{1}{8xs}(4(2\mu-1)\Lambda_4c - 5\Lambda_3xs),$$

$$K_0^{5v_3} = \frac{2\mu-1}{8x^2s}(4\Lambda_4cs - 5\Lambda_3cx(c^2 + s^2) + 20\Lambda_2cx^2s),$$

$$K_1^{5v_3} = -\frac{1}{8x}(2\mu-1)(4\Lambda_4c - 5\Lambda_3xs), K_{11}^{5v_3} = \frac{1}{8}(2\mu-1)(4\Lambda_4c + 5\Lambda_3xs),$$

$$K_{22}^{5v_3} = \frac{5}{4xs}(\mu-1)\Lambda_3, K_0^{5q_{23p}} = \frac{30}{E(h_2 + h_1)}(2\mu-1)(\mu+1)(h_2c + xs),$$

$$K_0^{5q_{23m}} = \frac{30}{E(h_2 + h_1)}(2\mu-1)(\mu+1)(h_1c - xs),$$

$$K_2^{6u_0} = \frac{-1}{4x^5s^4}(-40(2\mu-1)\mu\Lambda_5c^4 + 12(4\mu-3)\Lambda_4c^3xs - 15(4\mu-3)\Lambda_3c^2x^2s^2 +$$

$$+ 20(4\mu-3)\Lambda_2cx^3s^3 - 30(4\mu-3)\Lambda x^4s^4), K_{12}^{6u_0} = \frac{-5}{2x^4s^4}((2\mu-1)\Lambda_5c^4 + 3\Lambda x^4s^4),$$

$$K_0^{6v_0} = \frac{2\mu-1}{4x^5s^3}(-40\Lambda_5c^4 + 12\Lambda_4c^3xs - 15\Lambda_3(c^2 + s^2)c^2x^2 + 20\Lambda_2cx^3s(c^2 + s^2) -$$

$$- 30\Lambda(c^2 + s^2)x^4s^2 + 60cx^5s^3), K_1^{6v_0} = \frac{5}{2x^4s^3}(2\mu-1)(\Lambda_5c^4 + 3\Lambda x^4s^4),$$

$$K_{11}^{6v_0} = \frac{5(2\mu-1)}{2}(2\Lambda_2c + 3\Lambda xs), K_{22}^{6v_0} = \frac{-(\mu-1)}{2x^4s^4}(12\Lambda_4c^3 + 15\Lambda_3c^2xs +$$

$$+ 20\Lambda_2cx^2s^2 - 30\Lambda x^3s^3), K_2^{6w_0} = \frac{-1}{4x^4s^4}(24(\mu-1)\Lambda_4c^4 - 15(4\mu-3)\Lambda_3c^3xs +$$

$$+ 20(4\mu-3)\Lambda_2c^2x^2s^2 - 30(4\mu-3)\Lambda cx^3s^3 + 60(2\mu-1)x^4s^4),$$

$$K_2^{6u_1} = \frac{1}{4x^4s^3}(-30(2\mu-1)\Lambda_5c^3 + 12(4\mu-3)\Lambda_4c^2xs - 15(4\mu-3)\Lambda_3cx^2s^2 +$$

$$+ 20(4\mu-3)\Lambda_2x^3s^3), K_{12}^{6u_1} = \frac{-5}{2x^3s^3}((2\mu-1)\Lambda_5c^3 + 2\Lambda_2x^3s^3),$$

$$K_0^{6v_1} = -\frac{2\mu-1}{4x^4s^2}(-30\Lambda_5c^3 + 12\Lambda_4c^2xs - 15\Lambda_3(c^2 + s^2)cx^2 + 20\Lambda_2x^3s(c^2 + s^2) -$$

$$- 30\Lambda cx^4s^2 + 60x^5s^3), K_1^{6v_1} = \frac{5}{2x^3s^2}(2\mu-1)(\Lambda_5c^3 + 2\Lambda_2x^3s^3),$$

$$\begin{aligned}
K_{11}^{6v_1} &= -\frac{5}{4}(2\mu-1)(3\Lambda_3c-4\Lambda_2xs), K_{22}^{6v_1} = \frac{\mu-1}{2x^3s^3}(12\Lambda_4c^2-15\Lambda_3cxs+20\Lambda_2x^2s^2), \\
K_2^{6w_1} &= \frac{1}{4x^3s^3}(24(\mu-1)\Lambda_4c^3-15(4\mu-3)\Lambda_3c^2xs+20(4\mu-3)\Lambda_2cx^2s^2-30(4\mu-1)\Lambda x^3s^3), \\
K_2^{6u_2} &= \frac{-1}{8x^3s^2}(-20(2\mu-1)\Lambda_5c^2+12(4\mu-3)\Lambda_4cxs-15(4\mu-3)\Lambda_3x^2s^2), \\
K_{12}^{6u_2} &= \frac{-5}{8x^2s^2}(2(2\mu-1)\Lambda_5c^2-3\Lambda_3x^2s^2), \\
K_0^{6v_2} &= \frac{2\mu-1}{8x^3s}(-20\Lambda_5c^2+12\Lambda_4cxs-15\Lambda_3(c^2+s^2)x^2+20\Lambda_2cx^3s-60\Lambda x^4s^2), \\
K_1^{6v_2} &= \frac{5}{8x^2s}(2\mu-1)(2\Lambda_5c^2+3\Lambda_3x^2s^2), K_{11}^{6v_2} = \frac{3}{8}(2\mu-1)(4\Lambda_4c+5\Lambda_3xs), \\
K_{22}^{6v_2} &= \frac{-3}{4x^2s^2}(\mu-1)(4\Lambda_4c-5\Lambda_3xs), \\
K_2^{6w_2} &= \frac{-1}{8x^2s^2}(24(\mu-1)\Lambda_4c^2-15(4\mu-3)\Lambda_3cxs+20(6\mu-1)\Lambda_2x^2s^2), \\
K_2^{6u_3} &= \frac{1}{12x^2s}(-5(2\mu-1)\Lambda_5c+6(4\mu-3)\Lambda_4xs), K_{12}^{6u_3} = \frac{1}{12xs}(5(2\mu-1)\Lambda_5c-6\Lambda_4xs), \\
K_0^{6v_3} &= -\frac{2\mu-1}{24x^2}(-10\Lambda_5c+12\Lambda_4xs-15\Lambda_3cx^2+60\Lambda_2x^3s), \\
K_1^{6v_3} &= \frac{1}{12x}(2\mu-1)(-5\Lambda_5c+6\Lambda_4xs), K_{11}^{6v_3} = \frac{1}{12}(2\mu-1)(5\Lambda_5c+6\Lambda_4xs), \\
K_{22}^{6v_3} &= \frac{1}{xs}(\mu-1)\Lambda_4, K_0^{6q_{23p}} = \frac{30}{E(h_2+h_1)}h_2(2\mu-1)(\mu+1)(h_2c+xs), \\
K_0^{6q_{23m}} &= -\frac{30h_1}{E(h_2+h_1)}(2\mu-1)(\mu+1)(h_1c-xs), \\
K_2^{7u_0} &= \frac{1}{4x^5s^4}(240(2\mu-1)\Lambda_6c^4-70(4\mu-3)\Lambda_5c^3xs+84(4\mu-3)\Lambda_4c^2x^2s^2+ \\
&-105(4\mu-3)\Lambda_3cx^3s^3+140(4\mu-3)\Lambda_2x^4s^4), K_{12}^{7u_0} = -\frac{5}{x^4s^4}(3(2\mu-1)\Lambda_6c^4+7\Lambda_2x^4s^4), \\
K_0^{7v_0} &= \frac{2\mu-1}{4x^5s^4}(-240\Lambda_6c^4s-70(c^2+s^2)\Lambda_5c^3x-84\Lambda_4c^2x^2s(c^2+s^2)+ \\
&+105\Lambda_3cx^3s^2(c^2+s^2)-140\Lambda_2x^4s^3(c^2+s^2)+420\Lambda cx^5s^4), \\
K_1^{7v_0} &= \frac{5}{x^4s^3}(2\mu-1)(3\Lambda_6c^4+7\Lambda_2x^4s^4), K_{11}^{7v_0} = \frac{35}{4}(2\mu-1)(3\Lambda_3c+4\Lambda_2xs), \\
K_{22}^{7v_0} &= \frac{7}{2x^4s^4}(\mu-1)(-10\Lambda_5c^3+12\Lambda_4c^2xs-15\Lambda_3cx^2s^2+20\Lambda_2x^3s^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2^{7w_0} &= \frac{7}{4x^4s^4} (10\Lambda_5c^4 + 12(4\mu - 3)\Lambda_4c^3xs + 15(4\mu - 3)\Lambda_3c^2x^2s^2 + \\
&+ 20(4\mu - 3)\Lambda_2cx^3s^3 - 60(2\mu - 1)\Lambda x^4s^4), \\
K_2^{7u_1} &= \frac{-1}{4x^4s^3} (180(2\mu - 1)\Lambda_6c^3 - 70(4\mu - 3)\Lambda_5c^2xs + 84(4\mu - 3)\Lambda_4cx^2s^2 - \\
&- 105(4\mu - 3)\Lambda_3x^3s^3), K_{12}^{7u_1} = \frac{15}{4x^3s^3} (4(2\mu - 1)\Lambda_6c^3 - 7\Lambda_3x^3s^3), \\
K_0^{7v_1} &= -\frac{2\mu - 1}{4x^4s^3} (-180\Lambda_6c^3s - 70(c^2 + s^2)\Lambda_5c^2x - 84\Lambda_4cx^2s(c^2 + s^2) + \\
&+ 105\Lambda_3x^3s^2(c^2 + s^2) - 140\Lambda_2cx^4s^3 + 420\Lambda x^5s^4), \\
K_1^{7v_1} &= \frac{-15}{4x^3s^2} (2\mu - 1)(4\Lambda_6c^3 - 7\Lambda_3x^3s^3), K_{11}^{7v_1} = \frac{21}{4} (2\mu - 1)(4\Lambda_4c + 5\Lambda_3xs), \\
K_{22}^{7v_1} &= \frac{-7}{2x^3s^3} (\mu - 1)(-10\Lambda_5c^2 + 12\Lambda_4cxs - 15\Lambda_3x^2s^2), \\
K_2^{7w_1} &= \frac{-7}{4x^3s^3} (10\Lambda_5c^3 + 12(4\mu - 3)\Lambda_4c^2xs + 15(4\mu - 3)\Lambda_3cx^2s^2 + 40(3\mu - 1)\Lambda_2x^3s^3), \\
K_2^{7u_2} &= \frac{1}{4x^3s^2} (60(2\mu - 1)\Lambda_6c^2 - 35(4\mu - 3)\Lambda_5cxs + 42(4\mu - 3)\Lambda_4x^2s^2), \\
K_{12}^{7u_2} &= \frac{-3}{2x^2s^2} (5(2\mu - 1)\Lambda_6c^2 + 7\Lambda_4x^2s^2), \\
K_0^{7v_2} &= -\frac{2\mu - 1}{4x^3s^2} (60\Lambda_6c^2s + 35\Lambda_5(c^2 + s^2)cx + 42\Lambda_4x^2s(c^2 + s^2) + 280\Lambda_2x^4s^3), \\
K_1^{7v_2} &= \frac{3}{2x^2s} (2\mu - 1)(5\Lambda_6c^2 + 7\Lambda_4x^2s^2), K_{11}^{7v_2} = \frac{7}{4} (2\mu - 1)(5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs), \\
K_{22}^{7v_2} &= \frac{7}{2x^2s^2} (\mu - 1)(-5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs), \\
K_2^{7w_2} &= \frac{7}{4x^2s^2} (5\Lambda_5c^2 + 6(4\mu - 3)\Lambda_4cxs - 15(4\mu - 1)\Lambda_3x^2s^2), \\
K_2^{7u_3} &= \frac{-5}{12x^2s} (6(2\mu - 1)\Lambda_6c - 7(4\mu - 3)\Lambda_5xs), K_{12}^{7u_3} = \frac{5}{12xs} (6(2\mu - 1)\Lambda_6c - 7\Lambda_5xs), \\
K_0^{7v_3} &= \frac{2\mu - 1}{12x^2s} (-30\Lambda_6cs - 35\Lambda_5(c^2 + s^2)x - 42\Lambda_4cx^2s + 315\Lambda_3x^3s^2), \\
K_1^{7v_3} &= \frac{-5}{12x} (2\mu - 1)(6\Lambda_6c - 7\Lambda_5xs), K_{11}^{7v_3} = \frac{5}{12} (2\mu - 1)(6\Lambda_6c + 7\Lambda_5xs), \\
K_{22}^{7v_3} &= \frac{35}{6xs} (\mu - 1)\Lambda_5, K_0^{7q_{23p}} = \frac{210}{E(h_2 + h_1)} h_2^2 (2\mu - 1)(\mu + 1)(h_2c + xs), \\
K_0^{7q_{23m}} &= \frac{210}{E(h_2 + h_1)} h_1^2 (2\mu - 1)(\mu + 1)(h_1c - xs),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2^{8u_0} &= \frac{-1}{12x^5s^4} \left(-210(2\mu-1)\Lambda_7c^4 + 60(4\mu-3)\Lambda_6c^3xs - 70(4\mu-3)\Lambda_5c^2x^2s^2 + \right. \\
&+ 84(4\mu-3)\Lambda_4cx^3s^3 - 105(4\mu-3)\Lambda_3x^4s^4 \left. \right), K_{12}^{8u_0} = -\frac{35}{8x^4s^4} \left((2\mu-1)\Lambda_7c^4 + 2\Lambda_3x^4s^4 \right), \\
K_0^{8v_0} &= \frac{-(2\mu-1)}{12x^5s^4} \left(210\Lambda_7c^4s + 60\Lambda_6c^3x(2c^2-s^2) + 70\Lambda_5(c^2+s^2)x^2s + \right. \\
&- 84\Lambda_4cx^3s^2(c^2+s^2) + 105\Lambda_3x^4s^3(c^2+s^2) - 420\Lambda_2cx^5s^4 \left. \right), \\
K_1^{8v_0} &= \frac{35}{8x^4s^3} (2\mu-1)(\Lambda_7c^4 + 2\Lambda_3x^4s^4), K_{11}^{8v_0} = \frac{7}{4} (2\mu-1)(4\Lambda_4c + 5\Lambda_3xs), \\
K_{22}^{8v_0} &= \frac{-(\mu-1)}{6x^4s^4} \left(60\Lambda_6c^3 - 70\Lambda_5c^2xs + 84\Lambda_4cx^2s^2 - 105\Lambda_3x^3s^3 \right), \\
K_2^{8w_0} &= \frac{1}{12x^4s^4} \left(120\mu\Lambda_6c^4 + 70(4\mu-3)\Lambda_5c^3xs - 84(4\mu-3)\Lambda_4c^2x^2s^2 + \right. \\
&+ 105(4\mu-3)\Lambda_3cx^3s^3 - 420(2\mu-1)\Lambda_2x^4s^4 \left. \right), \\
K_2^{8u_1} &= \frac{1}{24x^4s^3} \left(-315(2\mu-1)\Lambda_7c^3 + 120(4\mu-3)\Lambda_6c^2xs - 140(4\mu-3)\Lambda_5cx^2s^2 + \right. \\
&+ 168(4\mu-3)\Lambda_4x^3s^3 \left. \right), K_{12}^{8u_1} = \frac{7}{8x^3s^3} \left(5(2\mu-1)\Lambda_7c^3 - 8\Lambda_4x^3s^3 \right), \\
K_0^{8v_1} &= \frac{2\mu-1}{24x^4s^3} \left(315\Lambda_7c^3s + 120\Lambda_6c^2x(2c^2-s^2) + 140\Lambda_5c(c^2+s^2)x^2s + \right. \\
&- 168\Lambda_4x^3s^2(c^2+s^2) + 210\Lambda_3cx^4s^3 - 840\Lambda_2x^5s^4 \left. \right), \\
K_1^{8v_1} &= \frac{7}{8x^3s^2} (2\mu-1)(-5\Lambda_7c^3 + 8\Lambda_4x^3s^3), K_{11}^{8v_1} = \frac{7}{6} (2\mu-1)(5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs), \\
K_{22}^{8v_1} &= \frac{1}{3x^3s^3} (\mu-1)(30\Lambda_6c^2 - 35\Lambda_5cxs + 42\Lambda_4x^2s^2), \\
K_2^{8w_1} &= \frac{-1}{12x^3s^3} \left(120\mu\Lambda_6c^3 + 70(4\mu-3)\Lambda_5c^2xs - 84(4\mu-3)\Lambda_4cx^2s^2 + 105(4\mu-3)\Lambda_3x^3s^3 \right) \\
K_2^{8u_2} &= \frac{-5}{24x^3s^2} \left(-21(2\mu-1)\Lambda_7c^2 + 12(4\mu-3)\Lambda_6cxs - 14(4\mu-3)\Lambda_5x^2s^2 \right), \\
K_{12}^{8u_2} &= -\frac{35}{48x^2s^2} \left(3(2\mu-1)\Lambda_7c^2 + 4\Lambda_5x^2s^2 \right), \\
K_0^{8v_2} &= \frac{-(2\mu-1)}{24x^3s^2} \left(105\Lambda_7c^2s + 60\Lambda_6cx(2c^2-s^2) + 70\Lambda_5(c^2+s^2)x^2s + \right. \\
&+ 84\Lambda_4cx^3s^2 + 630\Lambda_3x^4s^3 \left. \right), K_{11}^{8v_2} = \frac{35}{48x^2s} (2\mu-1)(3\Lambda_7c^2 + 4\Lambda_5x^2s^2), \\
K_{11}^{8v_2} &= \frac{5}{12} (2\mu-1)(6\Lambda_6c + 7\Lambda_5xs), K_{22}^{8v_2} = \frac{-5(\mu-1)}{6x^2s^2} (6\Lambda_6c - 7\Lambda_5xs), \\
K_2^{8w_2} &= \frac{1}{12x^2s^2} \left(60\mu\Lambda_6c^2 + 35(4\mu-3)\Lambda_5cxs - 42(10\mu-3)\Lambda_4x^2s^2 \right),
\end{aligned}$$

$$K_2^{8u_3} = \frac{5}{48x^2s} (7(2\mu-1)\Lambda_7c - 4(4\mu-3)\Lambda_6xs), K_{12}^{8u_3} = \frac{5}{48xs} (7(2\mu-1)\Lambda_7c - 8\Lambda_6xs),$$

$$K_0^{8v_3} = \frac{(2\mu-1)}{48x^2s} (35\Lambda_7cs + 40\Lambda_6x(2c^2 - s^2) + 140\Lambda_5cx^2s + 504\Lambda_4x^3s^2),$$

$$K_1^{8v_3} = \frac{5}{48x} (2\mu-1)(-7\Lambda_7c + 8\Lambda_6xs),$$

$$K_{11}^{8v_3} = \frac{5}{48} (2\mu-1)(7\Lambda_7c + 8\Lambda_6xs), K_{22}^{8v_3} = \frac{5}{3xs} (\mu-1)\Lambda_6,$$

$$K_0^{8q_{23p}} = \frac{70}{E(h_2 + h_1)} h_2^3 (2\mu-1)(\mu+1)(h_2c + xs),$$

$$K_0^{8q_{23m}} = -\frac{70}{E(h_2 + h_1)} h_1^3 (2\mu-1)(\mu+1)(h_1c - xs),$$

$$K_0^{9u_0} = \frac{-5}{2x^4s^3} (\mu-1)(-3\Lambda_3c^3 + 4c^2\Lambda_2xs - 6c\Lambda x^2s^2 + 12x^3s^3), K_1^{9u_0} = 30c\mu,$$

$$K_2^{9v_0} = \frac{-5}{4x^4s^4} (4\mu-3)c(-3\Lambda_3c^3 + 4\Lambda_2c^2xs - 6c\Lambda x^2s^2 + 12x^3s^3),$$

$$K_0^{9w_0} = \frac{-5(\mu-1)c^2}{2x^4s^4} (-3\Lambda_3c^3 + 4c^2\Lambda_2xs - 6c\Lambda x^2s^2 + 12x^3s^3),$$

$$K_1^{9w_0} = 15(2\mu-1)s, K_{11}^{9w_0} = \frac{15}{2} (2\mu-1)(\Lambda c + 2xs),$$

$$K_{22}^{9w_0} = \frac{5}{4x^4s^4} (2\mu-1)(-3\Lambda_3c^3 + 4\Lambda_2c^2xs - 6\Lambda cx^2s^2 + 12x^3s^3),$$

$$K_0^{9u_1} = \frac{5}{2x^3s^2} (-3(\mu-1)\Lambda_3c^3 + 4c^2(\mu-1)\Lambda_2xs - 6c(\mu-1)\Lambda x^2s^2 + 6(2\mu-1)x^3s^3),$$

$$K_1^{9u_1} = \frac{15}{2} (4\mu-1)\Lambda c + 15(2\mu-1)xs,$$

$$K_2^{9v_1} = \frac{5}{4x^3s^3} (-3(4\mu-3)\Lambda_3c^3 + 4c^2(4\mu-3)\Lambda_2xs - 6c(4\mu-3)\Lambda x^2s^2 + 12(2\mu-1)x^3s^3),$$

$$K_0^{9w_1} = \frac{5c}{2x^3s^3} (-3(\mu-1)\Lambda_3c^3 + 4c^2(\mu-1)\Lambda_2xs - 6(\mu-1)\Lambda cx^2s^2 + 12\mu x^3s^3),$$

$$K_1^{9w_1} = \frac{15(2\mu-1)\Lambda}{2} s, K_{11}^{9w_1} = \frac{5}{2} (2\mu-1)(2\Lambda_2c + 3\Lambda xs),$$

$$K_{22}^{9w_1} = \frac{-5}{4x^3s^3} (2\mu-1)(-3\Lambda_3c^2 + 4\Lambda_2cxs - 6\Lambda x^2s^2),$$

$$K_0^{9u_2} = \frac{-5}{4x^2s} (-3(\mu-1)\Lambda_3c^2 + 4c(\mu-1)\Lambda_2xs - 6(2\mu-1)\Lambda x^2s^2),$$

$$K_1^{9u_2} = 5(3\mu - 1)\Lambda_2 c + \frac{15}{2}(2\mu - 1)\Lambda_2 xs,$$

$$K_2^{9v_2} = \frac{-5}{8x^2s^2}(-3(4\mu - 3)\Lambda_3c^2 + 4c(4\mu - 3)\Lambda_2xs - 24\mu\Lambda x^2s^2),$$

$$K_0^{9w_2} = \frac{-5c}{4x^2s^2}(-3(\mu - 1)\Lambda_3c^2 + 4c(\mu - 1)\Lambda_2xs - 12\mu\Lambda x^2s^2),$$

$$K_1^{9w_2} = \frac{5}{2}(2\mu - 1)\Lambda_2s, K_{11}^{9w_2} = \frac{5}{8}(2\mu - 1)(4\Lambda_2xs + 3\Lambda_3c),$$

$$K_{22}^{9w_2} = \frac{5}{8x^2s^2}(2\mu - 1)(4\Lambda_2xs - 3\Lambda_3c), K_0^{9u_3} = \frac{5}{4x}(-c(\mu - 1)\Lambda_3 + 2(2\mu - 1)\Lambda_2xs),$$

$$K_1^{9u_3} = \frac{15}{8}(8\mu - 1)\Lambda_3c + \frac{5}{2}(2\mu - 1)\Lambda_2xs, K_2^{9v_3} = \frac{5}{8xs}(-c(4\mu - 3)\Lambda_3 + 4(2\mu - 1)\Lambda_2xs),$$

$$K_0^{9q_{33p}} = \frac{30}{E(h_2 + h_1)}(2\mu - 1)(\mu + 1)(h_2c + xs),$$

$$K_0^{9q_{33m}} = \frac{30}{E(h_2 + h_1)}(2\mu - 1)(\mu + 1)(h_1c - xs),$$

$$K_0^{10u_0} = \frac{-1}{2x^4s^3}(12\Lambda_4c^4 + 15(\mu - 1)\Lambda_3c^3xs - 20(\mu - 1)\Lambda_2c^2x^2s^2 +$$

$$+ 30(\mu - 1)\Lambda cx^3s^3 - 60\mu x^4s^4), K_1^{10u_0} = 30\mu(\Lambda c + xs),$$

$$K_2^{10v_0} = \frac{1}{4x^4s^4}(12(2\mu - 3)\Lambda_4c^4 - 15(4\mu - 3)\Lambda_3c^3xs + 20(4\mu - 3)\Lambda_2c^2x^2s^2 +$$

$$- 30(4\mu - 3)\Lambda cx^3s^3 + 120\mu x^4s^4),$$

$$K_0^{10w_0} = \frac{-c}{2x^4s^4}(12\Lambda_4c^4 + 15(\mu - 1)\Lambda_3c^3xs - 20(\mu - 1)\Lambda_2c^2x^2s^2 +$$

$$+ 30(\mu - 1)\Lambda cx^3s^3 - 60\mu x^4s^4), K_1^{10w_0} = \frac{15}{2}(2\mu - 1)\Lambda s,$$

$$K_{11}^{10w_0} = \frac{5}{2}(2\mu - 1)(2\Lambda_2c + 3\Lambda xs),$$

$$K_{22}^{10w_0} = \frac{-1}{4x^4s^4}(2\mu - 1)(12\Lambda_4c^3 - 15\Lambda_3c^2xs + 20\Lambda_2cx^2s^2 - 30\Lambda x^3s^3),$$

$$K_0^{10u_1} = \frac{1}{2x^3s^2}(12\Lambda_4c^3 + 15(\mu - 1)\Lambda_3c^2xs - 20(\mu - 1)\Lambda_2cx^2s^2 + 15(4\mu - 1)\Lambda cx^3s^3),$$

$$K_1^{10u_1} = 5(6\mu - 1)\Lambda_2c + \frac{15}{2}(4\mu - 1)\Lambda xs,$$

$$\begin{aligned}
K_2^{10v_1} &= \frac{-1}{4x^3s^3} \left(12(2\mu-3)\Lambda_4c^3 - 15(4\mu-3)\Lambda_3c^2xs + 20(4\mu-3)\Lambda_2cx^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. - 30(4\mu-1)\Lambda x^3s^3 \right), K_0^{10w_1} = \frac{1}{2x^3s^3} \left(12\Lambda_4c^4 + 15(\mu-1)\Lambda_3c^3xs - 20(\mu-1)\Lambda_2c^2x^2s^2 + \right. \\
&\quad \left. + 30(\mu-1)\Lambda cx^3s^3 - 60(\mu-1)x^4s^4 \right), K_1^{10w_1} = 5(2\mu-1)\Lambda_2s, K_1^{10w_1} = 5(2\mu-1)\Lambda_2s, \\
K_{11}^{10w_1} &= \frac{5}{4}(2\mu-1)(3\Lambda_3c + 4\Lambda_2xs), K_{22}^{10w_1} = \frac{1}{4x^3s^3} (2\mu-1)(12\Lambda_4c^2 - 15\Lambda_3cxs + 20\Lambda_2x^2s^2), \\
K_0^{10u_2} &= \frac{-1}{4x^2s} \left(12\Lambda_4c^2 + 15(\mu-1)\Lambda_3cxs - 20(3\mu-1)\Lambda_2c^2x^2s^2 \right), \\
K_1^{10u_2} &= \frac{15}{4}(4\mu-1)\Lambda_3c + 5(3\mu-1)\Lambda_2xs, \\
K_2^{10v_2} &= \frac{1}{8x^2s^2} \left(12(2\mu-3)\Lambda_4c^2 - 15(4\mu-3)\Lambda_3cxs + 40(3\mu-1)\Lambda_2x^2s^2 \right), \\
K_0^{10w_2} &= \frac{-1}{4x^2s^2} \left(12\Lambda_4c^3 + 15(\mu-1)\Lambda_3c^2xs - 20(\mu+2)\Lambda_2cx^2s^2 + 60(\mu-1)\Lambda x^3s^3 \right), \\
K_1^{10w_2} &= \frac{5}{2}(2\mu-1)\Lambda_3s, K_{11}^{10w_2} = \frac{3}{8}(2\mu-1)(4\Lambda_4c + 5\Lambda_3xs), \\
K_{22}^{10w_2} &= \frac{-3}{8x^2s^2} (2\mu-1)(4\Lambda_4c - 5\Lambda_3xs), \\
K_0^{10u_3} &= \frac{1}{8x} (8\Lambda_4c + 5(8\mu-3)\Lambda_3xs), K_1^{10u_3} = \frac{1}{2} (10\mu-3)\Lambda_4c + \frac{5}{8} (8\mu-3)\Lambda_3xs, \\
K_2^{10v_3} &= \frac{-1}{8xs} \left(4(2\mu-3)\Lambda_4c - 5(8\mu-3)\Lambda_3xs \right), \\
K_0^{10q_{33p}} &= \frac{30}{E(h_2+h_1)} h_2 (2\mu-1)(\mu+1)(h_2c+xs), \\
K_0^{10q_{33m}} &= -\frac{30}{E(h_2+h_1)} h_1 (2\mu-1)(\mu+1)(h_1c-xs), \\
K_0^{11u_0} &= \frac{7}{2x^4s^3} \left(-10(\mu+1)\Lambda_5c^4 - 12(\mu-1)\Lambda_4c^3xs + 15(\mu-1)\Lambda_3c^2x^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. - 20(\mu-1)\Lambda_2cx^3s^3 + 60\mu\Lambda x^4s^4 \right), K_1^{11u_0} = 210\mu(\Lambda_2c + \Lambda xs), \\
K_2^{11v_0} &= \frac{7}{4x^4s^4} \left(-30\Lambda_5c^4 - 12(4\mu-3)\Lambda_4c^3xs + 15(4\mu-3)\Lambda_3c^2x^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. - 15(4\mu-3)\Lambda_2cx^3s^3 + 120\mu\Lambda x^4s^4 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_0^{11w_0} &= \frac{7c}{2x^4s^4} \left(-10(\mu+1)\Lambda_5c^4 - 12(\mu-1)\Lambda_4c^3xs + 15(\mu-1)\Lambda_3c^2x^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. -20(\mu-1)\Lambda_2cx^3s^3 + 60\mu\Lambda x^4s^4 \right), K_1^{11w_0} = 35(2\mu-1)\Lambda_2s, \\
K_{11}^{11w_0} &= \frac{35}{4}(2\mu-1)(3\Lambda_3c + 4\Lambda_2xs), \\
K_{22}^{11w_0} &= \frac{7}{4x^4s^4}(2\mu-1)(-10\Lambda_5c^3 + 12\Lambda_4c^2xs - 15\Lambda_3cx^2s^2 + 20\Lambda_2x^3s^3), \\
K_0^{11u_1} &= \frac{-7}{2x^3s^2} \left(-10(\mu+1)\Lambda_5c^3 - 12(\mu-1)\Lambda_4c^2xs + 15(\mu-1)\Lambda_3cx^2s^2 - 10(6\mu-1)\Lambda_2x^3s^3 \right), \\
K_1^{11u_1} &= \frac{105}{4}(8\mu-1)\Lambda_3c + 35(6\mu-1)\Lambda_2xs, \\
K_2^{11v_1} &= \frac{-7}{4x^3s^3} \left(-30\Lambda_5c^3 - 12(4\mu-3)\Lambda_4c^2xs + 15(4\mu-3)\Lambda_3cx^2s^2 - 20(6\mu-1)\Lambda_2x^3s^3 \right), \\
K_0^{11w_1} &= \frac{-7}{2x^3s^3} \left(-10(\mu+1)\Lambda_5c^4 - 12(\mu-1)\Lambda_4c^3xs + 15(\mu-1)\Lambda_3c^2x^2s^2 - \right. \\
&\quad \left. -20(\mu+2)\Lambda_2cx^3s^3 + 60(\mu-1)\Lambda x^4s^4 \right), K_1^{11w_1} = \frac{105}{4}(2\mu-1)\Lambda_3s, \\
K_{11}^{11w_1} &= \frac{21}{4}(2\mu-1)(4\Lambda_4c + 5\Lambda_3xs), \\
K_{22}^{11w_1} &= \frac{-7}{4x^3s^3}(2\mu-1)(-10\Lambda_5c^2 + 12\Lambda_4cxs - 15\Lambda_3x^2s^2), \\
K_0^{11u_2} &= \frac{7}{4x^2s} \left(-10(\mu+1)\Lambda_5c^2 - 12(\mu-1)\Lambda_4cxs + 15(4\mu-1)\Lambda_3cx^2s^2 \right), \\
K_1^{11u_2} &= 21(5\mu-1)\Lambda_4c + \frac{105}{4}(4\mu-1)\Lambda_3xs, \\
K_2^{11v_2} &= \frac{21}{4x^2s^2} \left(-5\Lambda_5c^2 - 2(4\mu-3)\Lambda_4cxs + 5(4\mu-1)\Lambda_3x^2s^2 \right), \\
K_0^{10w_2} &= \frac{7}{2x^2s^2} \left(-5(\mu+1)\Lambda_5c^3 - 6(\mu-1)\Lambda_4c^2xs + 30\Lambda_3cx^2s^2 - 40(\mu-1)\Lambda_2x^3s^3 \right), \\
K_1^{11w_2} &= \frac{21}{2}(2\mu-1)\Lambda_4s, K_{11}^{11w_2} = \frac{7}{4}(2\mu-1)(5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs), \\
K_{22}^{11w_2} &= \frac{7}{4x^2s^2}(2\mu-1)(-5\Lambda_5c + 6\Lambda_4xs), \\
K_0^{11u_3} &= \frac{-7}{6x} \left(-5(\mu+1)\Lambda_5c - 3(10\mu-3)\Lambda_4xs \right), \\
K_1^{11u_3} &= \frac{35}{4}(4\mu-1)\Lambda_5c + \frac{7}{2}(10\mu-3)\Lambda_4xs,
\end{aligned}$$

$$K_2^{11v_3} = \frac{7}{4xs} (5\Lambda_5 c + 2(10\mu - 3)\Lambda_4 xs),$$

$$K_0^{11q_{33p}} = \frac{210}{E(h_2 + h_1)} h_2^2 (2\mu - 1)(\mu + 1)(h_2 c + xs),$$

$$K_0^{11q_{33m}} = \frac{210}{E(h_2 + h_1)} h_1^2 (2\mu - 1)(\mu + 1)(h_1 c - xs),$$