

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ КОМПОЗИЦИОННОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ СЛОЖНОМ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ.

Е.А.Ларичев, В.С. Сафронов, И.К.Туркин

В статье представлена методика определения критической динамической нагрузки композиционной оболочки при сложном динамическом термосиловом нагружении. Представлены результаты численного решения дифференциальных уравнений исследования динамического поведения цилиндрических оболочек из композиционных материалов.

1. Решение дифференциальных уравнений динамического поведения оболочечных конструкций из композиционного материала (КМ).

Рассматривается динамическое нагружение оболочки в течение времени t_1 . Закон распределения нагрузки представлен на графиках рис.1 (а, б). Для составления приближенных уравнений движения используется принцип Даламбера. В уравнения равновесия к заданным силам и динамическим реакциям соседних элементов оболочки (усилиям и моментам) добавляются инерционные силы. Составляющие результирующие силы инерции по направлениям X, Y, Z будут:

$$F_{\alpha}^n = \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy; \quad F_{\beta}^n = \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dy; \quad F_{\gamma}^n = \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy, \quad (1)$$

где γ – удельный вес материала; g – ускорение силы тяжести.

Инерция вращения элемента $h dx dy$ относительно направлений X и Y в этой модели оболочки не учитывается.

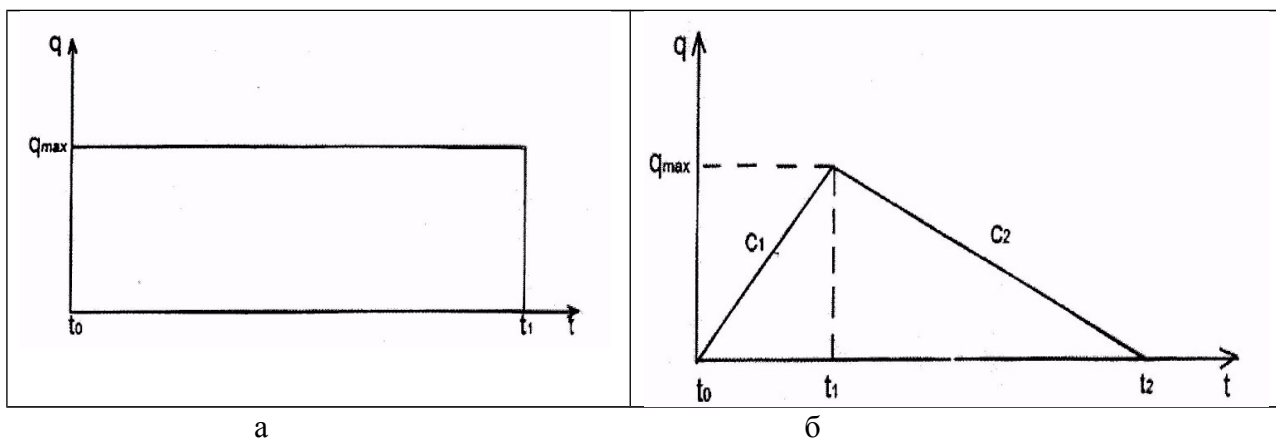


Рис.1 Зависимость скорости динамического нагружения внешним давлением.

Уравнения движения (элемента) в проекциях на направлениях касательных к линиям X, Y записывается в виде:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + P_x - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + P_y - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

С учетом уравнений в проекциях на направление нормали к срединной поверхности получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая допущения, что уравнения моментов не содержат членов, связанных с инерцией вращения элемента и отбрасывая члены высшего порядка малости, получим:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (4)$$

Используя зависимости [2]:

$$\begin{aligned} N_x = B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + C_{11}\delta_x + C_{12}\delta_y; N_y = B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + C_{21}\delta_x + C_{22}\delta_y, \\ N_{xy} = B_{33}\gamma_{xy} + C_{33}\chi_{xy}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + D_{11}\delta_x + D_{12}\delta_y; M_y = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + D_{21}\delta_x + D_{22}\delta_y, \\ M_{xy} = C_{33}\gamma_{xy} + D_{33}\chi_{xy}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\delta_x = \frac{\partial Q_x}{\partial x}; \quad \delta_y = \frac{\partial Q_y}{\partial y}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x}, \quad (8)$$

$$Q_x = -\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}, \quad (9)$$

и исключая Q_x и Q_y из уравнения (3) с помощью (9), с учетом (5), (6), (7), (8) получаем систему уравнений равновесия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + P_y - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& + q - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \quad (10)$$

где p_x , p_y , q – интенсивность заданных внешних нагрузок, приложенных к оболочке по направлениям X, Y, Z , $k_x = 0$; $k_y = \frac{1}{R}$, R - радиус оболочки.

Выражая усилия, входящие в уравнение (10) с учетом (5), (6), (7), (8), и рассматривая динамический процесс без учета распространения упругих волн (отбрасывая инерционные члены в первых двух уравнениях (10)) при отсутствии усилий p_x , p_y , запишем уравнения движения цилиндрической оболочки :

$$\begin{aligned}
& D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(2D + D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{z_1 w}{R^2} + \frac{z_2}{R} + \\
& + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + qR \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \quad (11)$$

Выражение (11) является линейризованным уравнением устойчивости оболочки из композиционного материала под воздействием сжимающего усилия N , температуры T и внешнего давления p . В выражении (11) изгибные жесткости D_x , D_y , D_{xy} , D находятся из выражений [1]:

$$D_x = D_{11} = \frac{B_{11} h^2}{12}; \quad D_y = D_{22} = \frac{B_{22} h^2}{12}; \quad D_{xy} = D_{12} = \frac{B_{12} h^2}{12}; \quad D = \frac{B_{33} h^2}{12}, \quad (12)$$

где B_{ij} – мембранные жесткости полностью пакета слоев, определяемые через мембранные жесткости каждого i -го слоя композита, учитывая углы армирования материала φ_i [1].

Величина z_1 определяется как:

$$z_1 = \frac{-\frac{B_{22}}{B_{11}} h E_x - h E_y}{1 - 2 \frac{B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} + \frac{B_{12}^4}{B_{11}^2 B_{22}^2} - \frac{1}{B_{11}} h E_x + \frac{B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} h E_x} \quad (13)$$

Величина z_2 является функцией от температуры T и определяется в виде:

$$z_2 = \frac{-\frac{B_{12}}{B_{11}} h E_x T \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \alpha_{xi} + h E_y T \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \alpha_{yi}}{1 - 2 \frac{B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} + \frac{B_{12}^4}{B_{11}^2 B_{22}^2} - \frac{1}{B_{11}} h E_x + \frac{B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} h E_x} \quad (14)$$

где

$$E_x = B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}}; E_y = B_{22} - \frac{B_{12}^2}{B_{11}} \quad (15)$$

Решение уравнения (11) удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания цилиндрической оболочки по торцам:

$$\begin{aligned} x=0, & \quad w(x, y) = 0, \quad v = 0; \\ x=1, & \quad w(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В то же время условия, формируемые для усилий и моментов являются динамическими т.е.:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (17)$$

При дифференцировании основного уравнения (11) удовлетворяются следующие начальные условия:

$$a) t_0 = 0; \quad q = q_{\max} t; \quad (18)$$

б) функция $q(t)$ задается в виде функции Хэвисайда, таким образом, чтобы амплитуда давления возрастала от 0,005 атм. до 0,3 атм:

$$q_0(t) = C_1 t - H(t - t_1) C_2 t_2 \left(\frac{t}{t_1} - 1 \right), \quad (19)$$

где C_1 – скорость возрастания кривой на участке от t_0 до t_1 ; C_2 – скорость возрастания кривой на участке от t_1 до t_2 . Коэффициент H задается в виде:

$$H = 0, \text{ если } t - t_1 < 0;$$

$$H = 1, \text{ если } t - t_1 \geq 0.$$

В случае шарнирного опирания, принимается следующее значение для прогиба:

$$w = f(t) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{ny}{R}, \quad (20)$$

где m – число полуволн по длине оболочки; n – число полных волн по окружности.

Подставляя (20) в (11) получим:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \{ [D_x \lambda_m^4 + 2(2D + D_{xy})(\lambda_m \lambda_n)^2 + D_y \lambda_n^4 + N \lambda_m^2 + q_{\max} R \lambda_n^2 + \frac{z_1}{R^2}] f + \frac{\gamma h}{q} f'' \} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y = -\frac{z_2}{R}$$

$$\text{где } \lambda_m = \frac{\pi m}{l}; \lambda_n = \frac{n}{R}.$$

После разложения $\frac{z_2}{R}$ в ряд получим:

$$\{[D_x \lambda_m^4 + 2(2D + D_{xy})(\lambda_m \lambda_n)^2 + D_y \lambda_n^4 + N \lambda_m^2 + q_{\max} R \lambda_n^2 + \frac{z_1}{R^2}]f + \frac{\gamma h}{q} f''\} = \frac{16}{\pi^2 mn R} \frac{z_2}{w_{mn}}.$$

Введя обозначения:

$$x = D_x \lambda_m^4 + 2(2D + D_{xy})(\lambda_m \lambda_n)^2 + D_y \lambda_n^4 + N \lambda_m^2 + q_{\max} R \lambda_n^2 + \frac{z_1}{R^2}, \quad (21)$$

$$A = \frac{16}{\pi^2 mn R} \frac{z_2}{w_{mn}},$$

получим : $\frac{\gamma h}{g} f'' + x f + A = 0,$ (22)

Общее решение однородного уравнения (22) находится в виде:

$$\frac{\gamma h}{g} f'' + x f = 0, \text{ где } f = e^{kt}, \quad (23)$$

$$\text{или } \frac{\gamma h}{g} k^2 + x = 0, \text{ где } k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{xg}{\gamma h}}. \quad (24)$$

Общее решение уравнения (24) сводятся к :

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{A}{k^2} \sin kt + C_1 \right) \sin kt + \left(\frac{A}{k^2} \cos kt + C_2 \right) \cos kt = \\ &= \frac{A}{k^2} + C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \end{aligned}, \quad (25)$$

где: $C_1(t) = \int C_1' dt = \frac{A}{k^2} \sin kt + C_1, C_2(t) = \int C_2' dt = \frac{A}{k^2} \cos kt + C_2.$

Начальные условия: при $t = 0 \quad f = 0 \Rightarrow 0 = C_2 \cos kt \cdot 0 + \frac{A}{k^2}, C_2 = -\frac{A}{k^2}.$

$$f' = 0 \Rightarrow C_1 k \cos kt - k C_2 \sin kt = 0, C_1 = 0.$$

Таким образом:

$$f = \frac{A}{k^2} (1 - \cos kt). \quad (26)$$

В принятых обозначениях получим:

$$f = \frac{16}{\pi^2 mn R} \frac{z_2}{gx} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{gx}{\gamma h}} t \right). \quad (27)$$

Отсюда: $w(t) = \frac{16}{\pi^2 mn R} \frac{z_2}{gx} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{gx}{\gamma h}} t \right) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y.$

Таким образом, выражение величины прогиба, изменяющегося по времени в зависимости от величины действующего давления q_{\max} , сжимающего усилий N и температуры T получим в следующем виде:

$$w(t) = \frac{16}{\pi^2 mn} \frac{z_2}{R} \frac{\gamma h}{g} \left[\frac{D_x \lambda_m^4 + 2(2D + D_{xy})(\lambda_m \lambda_n)^2 + D_y \lambda_n^4 + N \lambda_m^2 + q_{\max} R \lambda_n^2 + \frac{z_1}{R^2}}{R^2} \right] \times$$

$$\times \left(1 - \cos \frac{t \sqrt{g} \left[\frac{D_x \lambda_m^4 + (4D + 2D_{xy})(\lambda_m \lambda_n)^2 + D_y \lambda_n^4 + N \lambda_m^2 + q_{\max} R \lambda_n^2 + \frac{z_1}{R^2}}{\gamma h} \right]}{\gamma h} \right) \times \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \quad (28)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях u , v , w запишем в виде:

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{1}{R} - C_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x} + \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - C_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\ & + B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y^3} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - C_{33} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{C_{33}}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - C_{33} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + P_x - \\ & - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ & B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} - C_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\ & + \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - C_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + P_y - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ & C_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + C_{12} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \\ & + C_{21} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2} \frac{1}{R} - D_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_{22}}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2C_{33} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \\ & + 2C_{33} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2D_{33}}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k_x B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \\ & + k_x B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + k_x \frac{w}{R} - k_x C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - k_x C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \\ & + k_y B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + k_y B_{22} \frac{w}{R} + k_y C_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_y C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - k_y C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ & + B_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{1}{R} - C_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - C_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}) \frac{\partial w}{\partial y} + (B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{33} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{R} - C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}) \frac{\partial w}{\partial y} + (B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ & + B_{22} \frac{w}{R} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \frac{\partial w}{\partial y} + q - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (29) \end{aligned}$$

Если исключить из (29) (вследствие высшего порядка малости) нелинейные члены, получим систему линейных уравнений движения относительно трех функций u , v , w :

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{1}{R} - C_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x} + \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - C_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\
& + B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y^3} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - C_{33} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{C_{33}}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - C_{33} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + P_x - \\
& - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
& B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} - C_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\
& + \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - C_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + P_y - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\
& C_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + C_{12} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x} + \\
& + C_{21} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_{22}}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2C_{33} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \\
& + 2C_{33} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 4D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2D_{33}}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 2D_{33} + k_x B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \\
& + k_x B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + k_x \frac{w}{R} - k_x C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - k_x C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \\
& + k_y B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + k_y B_{22} \frac{w}{R} + k_y C_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_y C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - k_y C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q - \\
& - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Приравнявая в системе (30) смешанные жесткости C_{mn} к нулю и изменяя коэффициенты, стоящие перед u , v , w , u'' , v'' , w'' , на A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 , B_3 , C_1 , C_2 , C_3 , D_1 , получим:

$$\begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 u'' = 0 \\ A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_1 v'' = 0 \\ A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_1 w'' = q \end{cases}, \tag{31}$$

$$\text{где: } D_1 = -\frac{\gamma h}{g}, A_1 = -B_{11} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 - B_{33} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right),$$

$$B_1 = -B_{12} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \frac{n}{R} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \left(\frac{\pi m}{l}\right) - B_{33} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \frac{n}{R} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \frac{\pi m}{l},$$

$$C_1 = \frac{1}{R} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \frac{\pi m}{l},$$

$$A_2 = -B_{33} \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \frac{n}{R} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \frac{\pi m}{l} - B_{12} \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \frac{n}{R} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \frac{\pi m}{l},$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= -B_{33} \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 - B_{22} \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\
C_3 &= \frac{1}{R} \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \frac{n}{R} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), A_3 = -\frac{1}{R} B_{12} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \frac{\pi m}{l}, \\
B_3 &= -\frac{D_{12}}{R} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \frac{n}{R} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + \frac{D_{22}}{R} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^3 \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) + \\
&+ 2 \frac{D_{33}}{R} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \frac{n}{R} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 - \frac{1}{R} B_{22} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \frac{n}{R} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \\
C_3 &= -D_{12} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + \frac{1}{R} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) - \\
&- D_{22} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) - 4D_{33} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + \frac{1}{R^2} B_{22}
\end{aligned} \tag{32}$$

Характеристическое уравнение системы (31) запишем в виде:

$$\begin{vmatrix}
D_1 r^2 + A_1 & B_1 & C_1 \\
A_1 & B_2 + D_1 r^2 & C_2 \\
A_3 & B_3 & C_3 + D_1 r^2
\end{vmatrix} = 0,$$

или:

$$\begin{aligned}
&D_1^3 r^6 + r^4 (C_3 D_1^2 + D_1^2 B_2 + A_1 D_1^2) + r^2 (C_3 D_1 B_2 + C_3 A_1 D_1 + A_1 B_2 D_1 - D_1 C_1 A_3 - \\
&- A_2 B_1 D_1 - B_3 C_2 D_1) + C_3 A_1 B_2 + C_2 B_1 A_3 + A_2 B_3 C_1 - A_3 C_1 B_2 - A_2 B_1 C_3 - \\
&- B_3 C_2 A_1 = 0
\end{aligned} \tag{33}$$

Заменяя коэффициенты при r в (33) на :

$$\begin{aligned}
a &= D_1^3 \\
b &= C_3 D_1^2 + D_1^2 B_2 + A_1 D_1^2 \\
c &= C_3 D_1 B_2 + C_3 A_1 D_1 + A_1 B_2 D_1 - D_1 C_1 A_3 - A_2 B_1 D_1 - B_3 C_2 D_1 \\
d &= C_3 A_1 B_2 + C_2 B_1 A_3 + A_2 B_3 C_1 - A_3 C_1 B_2 - A_2 B_1 C_3 - B_3 C_2 A_1
\end{aligned}$$

получим : $ar^6 + br^4 + cr^2 + d = 0$ (34)

Заменяя r^2 на z , при $y = z + \frac{b}{3a}$ получим:

$$y^3 + 3ry + 2q = 0 \tag{35}$$

Частные решения системы (31) получим в виде :

$$w = \alpha_3 e^r; u = \alpha_2 e^r; v = \alpha_3 e^r; u'' = \alpha_1 r^2 e^r; w'' = \alpha_3 r^2 e^r; v'' = \alpha_2 r^2 e^r. \tag{36}$$

Подставляя (36) в систему (31) и деля почленно на e^r получим :

$$\begin{cases} A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 + D_1\alpha_1r^2 = 0 \\ A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3 + D_1\alpha_2r^2 = 0 \\ A_3\alpha_1 + B_3\alpha_2 + C_3\alpha_3 + D_1\alpha_3r^2 = qe^{-r} \end{cases} \quad (37)$$

Из системы (37) получим:

$$w = \alpha_3 e^r, \quad (38)$$

$$\text{где: } r = 2 \sqrt{-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{3ac - b^2}{9a^2}\right)^3}} + \sqrt{-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{3ac - b^2}{9a^2}\right)^3}}, \quad (39)$$

$$\alpha_3 = \frac{qe^{-r}}{\left(C_3 - \frac{A_3C_1}{A_1 + D_1r^2} + D_1r^2\right) \left(B_2 - \frac{A_2B_1}{A_1 + D_1r^2} + D_1r^2\right) \left(B_3 - \frac{A_3B_1}{A_1D_1r^2} + \left(C_2 - \frac{A_2B_1}{A_1 + D_1r^2}\right)\right)}. \quad (40)$$

Приравнивая выражения для прогибов (38) и (28) получим уравнение для определения критического давления при продольном сжатии и неравномерном поле температур:

$$\frac{16}{\pi^2 mn} \frac{z_2}{R} \frac{\gamma h}{g \left[D_x \lambda_m^4 + 2(2D + D_{xy})(\lambda_m \lambda_n)^2 + D_y \lambda_n^4 + N \lambda_m^2 + q_{\max} R \lambda_n^2 + \frac{z_1}{R^2} \right]} \times \left(1 - \cos \frac{t \sqrt{g \left[D_x \lambda_m^4 + (4D + 2D_{xy})(\lambda_m \lambda_n)^2 + D_y \lambda_n^4 + N \lambda_m^2 + q_{\max} R \lambda_n^2 + \frac{z_1}{R^2} \right]}}{\gamma h} \right) \times \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y = \alpha_3 e^r \quad (41)$$

Численное решение уравнения (41) позволяет получить значение критического динамического давления для композиционной оболочки при продольном сжатии и неравномерном поле температур.

2. Результаты численного решения дифференциальных уравнений исследования динамического поведения цилиндрических оболочек из КМ.

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую оболочку со следующими характеристиками: $R=0,265$ м; $L=0,39$ м. Осевые усилия: $N=0$ Н, 1000Н, 2000Н. Внешнее давление: $q_{\max}=0,5 \cdot 10^5$ Па; $0,6 \cdot 10^5$ Па; $0,7 \cdot 10^5$ Па; $0,8 \cdot 10^5$ Па; $0,9 \cdot 10^5$ Па; $1 \cdot 10^5$ Па. Начальное значение температуры: $T_0=20^\circ\text{C}$; 70°C ; 110°C . Углы армирования слоев: $\varphi_i = +45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 90^\circ$. Число волн по окружности $m=1, n=9$. T_{\max} рассчитывается при угле $\theta=0^\circ$. толщина элементарных слоев $h_i: 0,15 \cdot 10^{-3}$ м; $0,15 \cdot 10^{-3}$ м; $0,2 \cdot 10^{-3}$ м; $0,2 \cdot 10^{-3}$ м. Модули упругости $E_1, E_2 : 57 \cdot 10^9$ Па; $9 \cdot 10^9$ Па. Модуль сдвига в плоскости слоя $G_n: 5,2 \cdot 10^9$ Па. Коэффициент Пуассона $\mu_{12}, \mu_{21} : 0,11; 0,03$. Температурные коэффициенты линейного расширения $\alpha_1; \alpha_2: 0,16 \cdot 10^{-6}; 27,4 \cdot 10^{-6}$. Параметр времени t изменяется от 0 до 0,3 с интервалом: 0; 0,0025; 0,01; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3.

Результаты численного решения представлены на графиках (рис.2(а,б)).

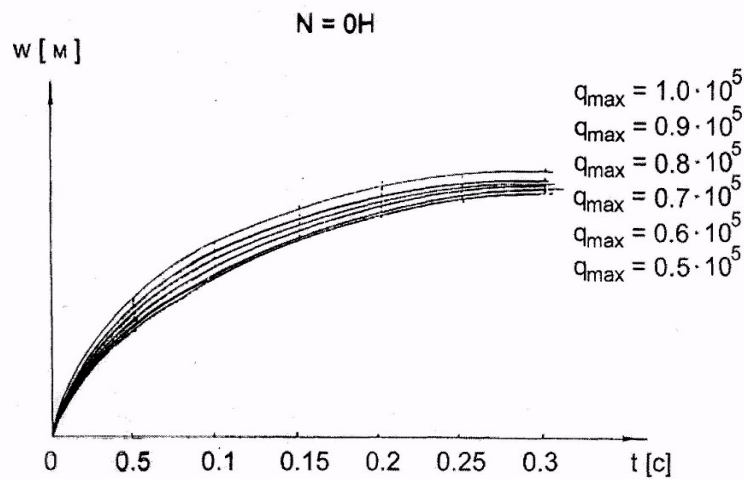


Рис. 2 (а) Зависимость струны динамического прогиба от времени при $N=0$ Н.

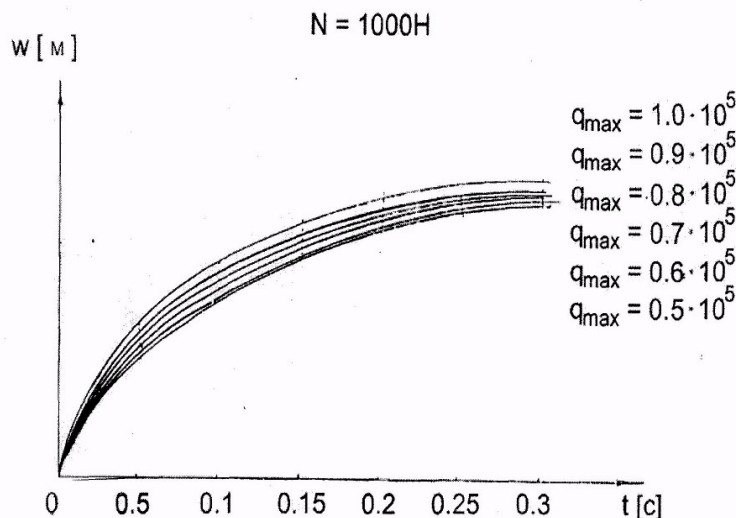


Рис.2(б)Зависимость струны динамического прогиба от времени при $N=1000$ Н.

Выводы.

В представленной статье получена методика определения критической динамической нагрузки и струны динамического прогиба от времени композиционной оболочки при сложном термосиловом нагружении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Статья из сборника

Е.А Ларичев, В.С.Сафронов, И.К. Туркин Исследование несущей способности композиционной оболочки при сложном динамическом термосиловом нагружении. //Материалы VIX международного симпозиума / Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Ярополец 2003г. М. МАИ,2003г. стр. 76-77.

2.Статья из сборника

Е.А Ларичев, В.С.Сафронов, И.К. Туркин Исследование несущей способности композиционной оболочки при действии статического и динамического внешнего давления, неравномерного нагрева и осевого сжатия. //Материалы 17 научно технической конференции / Конструкции и технологии получения изделий из не металлических материалов .Обниск.2004. стр.140-141.

Ларичев Евгений Александрович, аспирант кафедры авиационно-ракетные системы Московского авиационного института (государственного технического университета)

Телефон: 158-43-41, e-mail: evgenij-tarichev@rambler.ru

Сафронов Вячеслав Семенович, заместитель заведующего кафедры авиационно-ракетные системы Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.

Туркин Игорь Константинович, заведующий кафедры авиационно-ракетные системы

Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.

Телефон: 158-43-41, e-mail: turkin@mai602.ru