

Труды МАИ. 2025. № 142
Trudy MAI. 2025. No. 142. (In Russ.)

Научная статья

УДК 51-74

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185117>

EDN: <https://www.elibrary.ru/TNMTHC>

МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ХАРАКТЕРНЫХ ПРОФИЛЕЙ КРЫЛА ТРАНСЗВУКОВОГО ТРАНСПОРТНОГО САМОЛЕТА

Андрей Владимирович Пантелеев¹, Виталий Константинович Гунчин²✉,

Иван Сергеевич Надоров³, Исак Азизович Ахмедов⁴,

Никита Андреевич Силаев⁵

^{1,2,3,4,5}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

Москва, Россия

²gunchinvk@mai.ru✉

Аннотация. Предложен подход к проектированию профилей крыла самолета на основе применения метаэвристических алгоритмов глобальной оптимизации. На первом этапе проекта определяется форма крыла в плане, которая характеризуется, прежде всего, такими параметрами, как: угол стреловидности по четверти хорд, сужение, удлинение, форма заднего и переднего наплывов (если они есть). Кроме того, уточняется распределение толщин по размаху крыла для обеспечения требуемых прочностных характеристик конструкции, а также требуемых внутренних объемов. Таким образом, при выборе формы крыла в плане и средней относительной толщины крыла коллектив конструкторов и инженеров должен найти оптимальные реше-

ния, удовлетворяющие противоречивым требованиям по достижению высоких значений аэродинамических и весовых характеристик с учетом заданных конструктивных ограничений. Далее осуществляется проектирование профилей, которые затем используются для создания теоретического контура крыла. Крыло образовано четырьмя секциями из профилей с заданными относительными толщинами. Для параметризации геометрии профиля используются многочлены Бернштейна, а для вычисления его аэродинамических характеристик – программная система, реализующая решение уравнений Навье–Стокса. Разработана схема проектирования на основе последовательного математического моделирования процесса обтекания и параметрической оптимизации. В качестве алгоритмов оптимизации использовалась модификация метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, а также метод Luus–Jaakola с последовательной редукцией области поиска. Продемонстрировано, что в результате применения предложенного подхода задаваемые проектировщиком начальные профили могут быть изменены с целью получения требуемых значений аэродинамических характеристик. Приведены численные результаты, подтвердившие эффективность подхода.

Ключевые слова: проектирование профиля крыла, параметризация профиля, мета-эвристические алгоритмы оптимизации, математическое моделирование, методы оптимизации

Для цитирования: Пантелеев А.В., Гунчин В.К., Надоров И.С., Ахмедов И.А., Силаев Н.А. Методы параметрической оптимизации в задаче проектирования характерных профилей крыла трансзвукового транспортного самолета // Труды МАИ. 2025. № 142. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185117>

Original article

PARAMETRIC OPTIMIZATION METHODS IN A TRANSONIC TRANSPORT AIRCRAFT CHARACTERISTIC WINGS AIRFOILS DESIGNING PROBLEM

Andrei V. Panteleev¹, Vitaly K. Gunchin²✉, Ivan S. Nadorov³,

Isak A. Akhmedov⁴, Nikita A. Silaev⁵

^{1,3,4,5}Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

²gunchinvk@mai.ru✉

Abstract. An approach to designing aircraft wing airfoils based on the use of metaheuristic global optimization algorithms is proposed. At the first stage of the project, the wing planform is determined, which is characterized, first of all, by such parameters as the quarter-chord sweep angle, taper ratio, aspect ratio, and the shape of the rear and front extensions (if any). In addition, the average relative thickness of the wing is specified to ensure the required strength characteristics of the structure, as well as the required internal volumes. Thus, when choosing the wing planform and wing average relative thickness, the team of designers and engineers must find optimal solutions that satisfy the conflicting requirements for achieving high values of aerodynamic and weight characteristics along with taking into account the specified design limitations. Next, the design of airfoils is carried out, which are then used to create a wing shape. The wing is formed by four sections from airfoils with specified thickness-to-chord ratio. Bernstein polynomials are used to parameterize the airfoil geometry, and a software system implementing the

solution of the Navier-Stokes equations is used to calculate its aerodynamic characteristics. A design scheme based on consistent mathematical modeling of the flow process and parametric optimization is developed. The optimization methods used were a modification of the moth-flame optimization algorithm and Luus–Jaakola method with successive reduction of the feasible solutions set. It is demonstrated that as a result of applying the proposed approach, the initial airfoils specified by the designer can be changed in order to obtain the required values of the aerodynamic characteristics. Numerical results confirming the effectiveness of the approach are presented.

Keywords: wing airfoil design, airfoil parameterization, wing polar, metaheuristic optimization algorithms, mathematical modeling, optimization methods

For citation: Panteleev A.V., Gunchin V.K., Nadorov I.S., Akhmedov I.A., Silaev N.A. Parametric optimization methods in a transonic transport aircraft characteristic wings airfoils designing problem. *Trudy MAI*. 2025. No. 142. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185117>

Введение

Для проектирования профиля крыла применяются различные подходы. При этом желательно использовать относительно небольшое число переменных при сохранении возможности обеспечения требуемых аэродинамических и геометрических характеристик профиля. Одновременно способ представления профиля должен иметь удобную интуитивную и геометрическую интерпретацию, позволяя проектировщику управлять процессом поиска на основе имеющегося опыта.

Известна трёхэтапная процедура аэродинамического проектирования крыла самолета [1]. На первом этапе выбирается начальная геометрия крыла по имеющимся данным от прототипов. На втором этапе она модифицируется путём решения обратной задачи с заданным благоприятным распределением коэффициента давления на поверхности для выбранного режима полёта. Заданное распределение давления выбирается проектировщиком так, чтобы минимизировать волновое, профильное и индуктивное сопротивления. Наконец, на третьем этапе включается процедура много режимной оптимизации. Показано, что спроектированное таким образом крыло отвечает требованиям с точки зрения интегральных аэродинамических характеристик для заданного режима полета (прежде всего крейсерского числа Маха). Переменными оптимизации являлись геометрические вариации базовых сечений крыла: крутка сечения, изменение толщины или вогнутости профиля, положение максимальной относительной толщины по хорде, отклонение носика и хвостика, изменение радиуса кривизны носика профиля, локальные вариации верхней поверхности. Предложенная методология, реализованная в алгоритмическом и программном обеспечении, позволила решить задачи проектирования крыльев большинства известных отечественных магистральных самолетов [2, 3].

В ряде публикаций [4–9] предлагается метод описания теоретического контура агрегатов планера самолета, получивший название CST (Class function / Shape function Transformation). При этом используется представление с помощью многочленов Бернштейна с неопределенными коэффициентами, подлежащими нахождению. Метод получил дальнейшее развитие и применение в [10–13].

Другим достаточно распространенным способом параметризации описания профиля является PARSEC (**Parameterised Sections**) [14]. В нем требуется нахождение 11 интуитивных параметров для описания профиля. Методы CST и PARSEC развивались и применялись в [11, 15].

При проектировании профилей также применяется метод деформации из базовых профилей (**Free-Form Deformation, FFD**) [17–20]. По узлам сетки находятся коэффициенты В-сплайнов для описания профиля. В качестве средства для оценки качества получаемых профилей используются решения уравнения Навье-Стокса (**Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, RANS**). Для решения задач оптимизации используется пакет SNOPT.

Отметим также метод корректной ортогональной декомпозиции (**Proper Orthogonal Decomposition, POD**), использующий алгоритм SVD (**Singular Value Decomposition**) [21–23]. Формируется базисное множество тренировочных профилей. Новые профили представляются в виде их линейной комбинации.

В [24–26] описан метод, основанный на понятиях родительской (эталонной) функции и генерирующих функций, для параметризации которых используются многочлены Бернштейна. (**Parent function/Generating functions Transformation, PGT**). Он используется в качестве процедуры аэродинамического проектирования профилей для аэродинамической компоновки лопасти несущего винта вертолета на основе оптимального сочетания форм профилей, формы крыла в плане и его геометрической крутки.

Кроме многочленов Бернштейна, применяемых в CST методе, для представления профилей могут быть использованы многочлены Hicks–Henne, Wagner, NACA

(National Advisory Committee for Aeronautics) и Лежандра [13], В-сплайны (B-splines), NURBS (non-uniform rational B-splines), радиально базисные функции (RBF) и многочлены Безье [22].

В качестве методов оптимизации для нахождения неизвестных параметров использовались градиентные методы первого порядка, квазиньютоновский метод с ограниченной памятью [1–3, 27], метод частиц в стае совместно с процедурой линейного поиска [13], генетический алгоритм [15, 16, 28, 29, 30], метод Нелдера–Мида [16].

Для получения аэродинамических характеристик профилей использовались как результаты физического моделирования обтекания в аэродинамической трубе, так и различные программы математического моделирования, включая комплексы программ решения уравнений Навье–Стокса [15, 20, 25, 27, 29].

В статье предлагается методика проектирования профиля крыла, состоящая из нескольких этапов: задания начального профиля и ограничений на положения его характерных точек, интервалов желаемых значений аэродинамических и геометрических характеристик профиля; формирования геометрической модели для решателя, в качестве которого используется программный пакет, реализующий процедуру решения уравнения Навье–Стокса; определения интегральных аэродинамических характеристик изолированного профиля, используемых для вычисления значений целевой функции с целью ее минимизации, применение комплекса программ метаэвристических алгоритмов глобальной условной оптимизации. В результате реализации итерационного процесса последовательного математического моделирования и параметрической оптимизации находится профиль, удовлетворяющий требовани-

ям проектировщика с точки зрения аэродинамических и геометрических характеристик.

Методология проектирования крыла трансзвукового самолета

Формирование аэродинамической компоновки крыла современного трансзвукового самолета является сложной научно-технической задачей. Как правило, на определенном этапе эскизного проекта определяется форма крыла в плане, которая характеризуется, прежде всего, такими параметрами как угол стреловидности по четверти хорд, сужение, удлинение по трапеции, а также формой заднего и переднего наплывов (если таковые имеются). Кроме того, задается распределение толщин по размаху крыла из условия обеспечения необходимых прочностных характеристик конструкции, а также требуемых внутренних объёмов. Таким образом, при выборе формы крыла в плане и толщины крыла коллективу проектировщиков и конструкторов необходимо найти оптимальные решения, которые обеспечивают удовлетворение противоречивых требований по достижению высоких значений аэродинамических и весовых характеристик наряду с учетом заданных конструктивных ограничений.

На рис. 1 представлен региональный самолет повышенной пассажиропропускной способности. Крейсерский режим полета данного самолета определяется числом $M = 0.8$ и коэффициентом подъемной силы $C_y = 0.57$. Заданы параметры формы крыла в плане: угол стреловидности крыла по четверти хорд 25 градусов, сужение 3.47, удлинение 10.45.

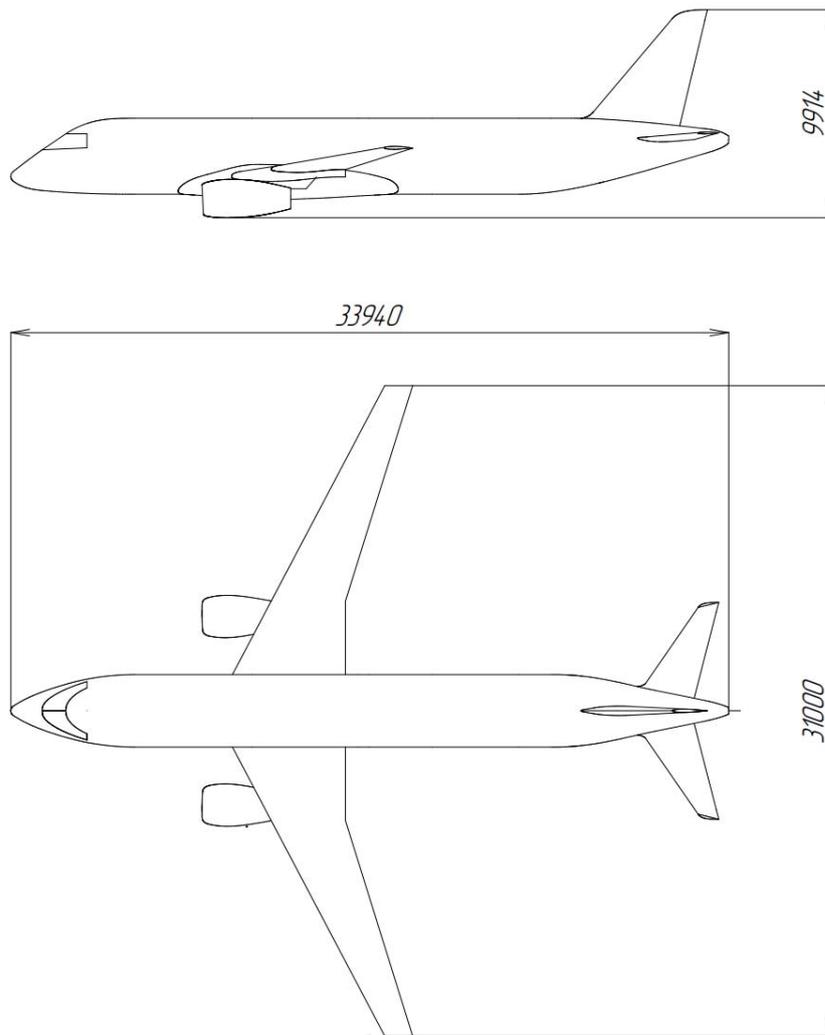


Рис. 1. Региональный самолет повышенной пассажировместимости

На первом этапе осуществляется проектирование профилей, которые затем используются для создания теоретического контура крыла. Крыло формируется по четырем сечениям из профилей с относительными толщинами: 14.5% в корне ($\bar{Z} = 0.10$), 12.5% в изломном сечении ($\bar{Z}=0.34$); 10.2% в сечении $\bar{Z}=0.72$, и 9.9% в конечном сечении ($\bar{Z} = 1.00$). Расположение сечений представлено на рис. 2, где \bar{Z} – относительное положение сечения по полуразмаху крыла.

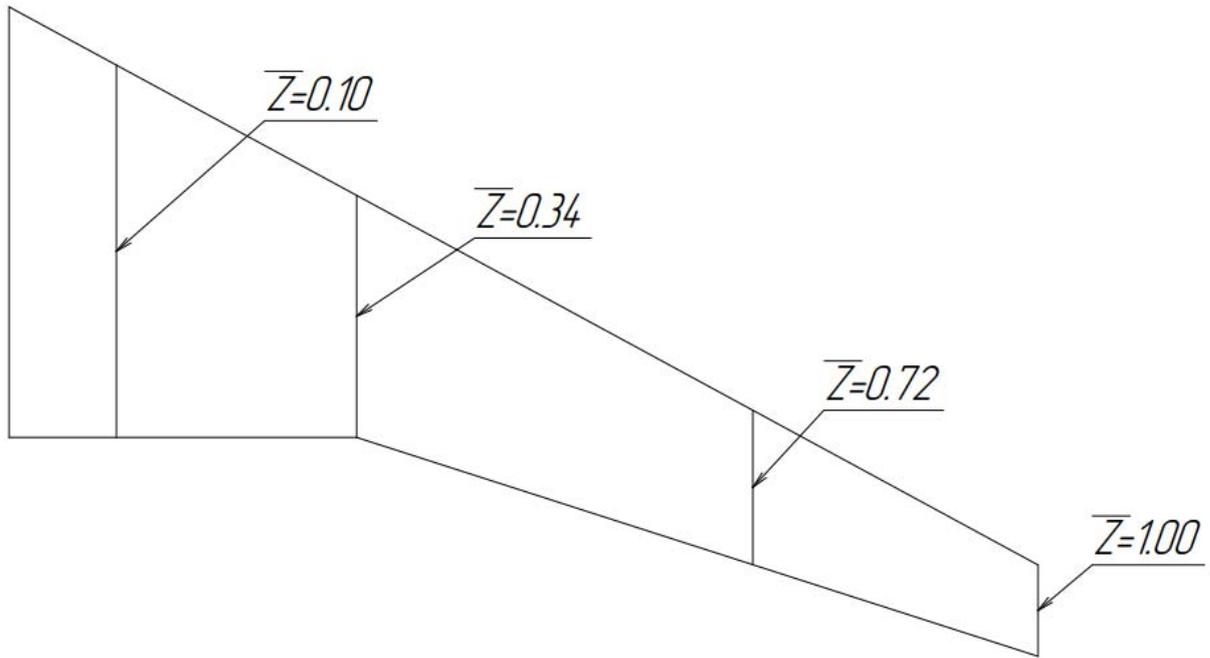


Рис. 2. Форма крыла в плане и расположение опорных сечений

Параметризация геометрии профиля

Будем использовать следующие обозначения: x, z – переменные геометрии профиля; c – величина хорды; $\zeta = \frac{z}{c}$ – безразмерное расстояние по оси ординат; $\psi = \frac{x}{c}$ – безразмерное расстояние по оси абсцисс; z_{UTE} – толщина задней кромки сверху (trailing edge); z_{LTE} – толщина задней кромки снизу.

Профиль крыла описывается двумя кривыми, описывающими геометрию верхней (Upper) и нижней (Lower) частей. Согласно CST методу [4–13] геометрия верхней и нижней частей профиля может быть представлена в форме

$$\left(\frac{z}{c}\right)_{Upper} = \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_2} \sum_{i=0}^{N_U} \left[W_U(i) \frac{N_U!}{i!(N_U-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_U-i} \right] + \frac{x}{c} \frac{z_{UTE}}{c}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{z}{c}\right)_{Lower} = \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_2} \sum_{i=0}^{N_L} \left[W_L(i) \frac{N_L!}{i!(N_L-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_L-i} \right] + \frac{x}{c} \frac{z_{LTE}}{c},$$

где функция $C_{N_2}^{N_1} \left(\frac{x}{c}\right) = \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_2}$ называется функцией класса профилей (Class function), которая задает конфигурацию профиля внутри фиксированного геометрического класса; N_1, N_2 – характерные параметры класса; а функции формы (Shape functions) верхней кромки и нижней кромки, определяемые разложением с применением полиномов Бернштейна порядков N_U, N_L соответственно, задающие конкретную форму профиля в рамках фиксированного класса, имеют вид

$$S_U \left(\frac{x}{c}\right) = \sum_{i=0}^{N_U} \left[W_U(i) \frac{N_U!}{i!(N_U-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_U-i} \right],$$

$$S_L \left(\frac{x}{c}\right) = \sum_{i=0}^{N_L} \left[W_L(i) \frac{N_L!}{i!(N_L-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_L-i} \right].$$

Параметрами, задающими профиль, являются неопределенные коэффициенты $W_U(i), i = 0, \dots, N_U; W_L(i), i = 0, \dots, N_L$. Последние слагаемые в формулах (1) контролируют толщину задней кромки крыла. Для классического профиля полагают $N_1 = 0,5; N_2 = 1$, что соответствует круглому носу и острой задней кромке. Порядок многочленов Бернштейна обычно задается в пределах от 2 до 15. Наилучшие результаты получаются, как правило, при значениях около 9 [10].

С учетом формул (1) может быть определена относительная толщина профиля как

$$\text{результат решения задачи одномерной оптимизации: } \left(\frac{z}{c}\right)_{Upper} - \left(\frac{z}{c}\right)_{Lower} \rightarrow \max_{0 \leq \frac{x}{c} \leq 1}.$$

Одновременно можно определить положение точки на хорде, соответствующей относительной толщине крыла.

Определение параметров профиля

Пусть известны пары опорных (базисных) точек:

$$\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^U, \quad \left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^L.$$

Они, как правило, задаются проектировщиком на основе опыта, при этом их расположение не обязательно равномерное. Проектировщик определяет промежутки возможного расположения опорных точек в виде левой и правой границ изменения значений их координат.

Введем обозначения:

$$W_U = \begin{pmatrix} W_U(0) \\ W_U(1) \\ \vdots \\ W_U(N_U) \end{pmatrix}, D_i \left(\frac{x_{jU}}{c}\right) = \frac{N_U!}{i!(N_U - i)!} \left(\frac{x_{jU}}{c}\right)^{i+N_1} \left(1 - \frac{x_{jU}}{c}\right)^{N_U+N_2-i}, i = 0, \dots, N_U; j = 0, \dots, N^U;$$

$$W_L = \begin{pmatrix} W_L(0) \\ W_L(1) \\ \vdots \\ W_L(N_L) \end{pmatrix}, D_i \left(\frac{x_{jL}}{c}\right) = \frac{N_L!}{i!(N_L - i)!} \left(\frac{x_{jL}}{c}\right)^{i+N_1} \left(1 - \frac{x_{jL}}{c}\right)^{N_L+N_2-i}, i = 0, \dots, N_L; j = 0, \dots, N^L;$$

$$Z_U = \begin{pmatrix} \frac{z_{0U}}{c} \\ c \\ \frac{z_{1U}}{c} \\ \vdots \\ \frac{z_{N^U U}}{c} \end{pmatrix}, \quad Z_L = \begin{pmatrix} \frac{z_{0L}}{c} \\ c \\ \frac{z_{1L}}{c} \\ \vdots \\ \frac{z_{N^L L}}{c} \end{pmatrix}, \quad X_U = \frac{z_{UTE}}{c} \begin{pmatrix} \frac{x_{0U}}{c} \\ c \\ \frac{x_{1U}}{c} \\ \vdots \\ \frac{x_{N^U U}}{c} \end{pmatrix}, \quad X_L = \frac{z_{LTE}}{c} \begin{pmatrix} \frac{x_{0L}}{c} \\ c \\ \frac{x_{1L}}{c} \\ \vdots \\ \frac{x_{N^L L}}{c} \end{pmatrix};$$

$$D_U = \begin{pmatrix} D_0\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) \\ D_0\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_0\left(\frac{x_{N^U U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{N^U U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{N^U U}}{c}\right) \end{pmatrix},$$

$$D_L = \begin{pmatrix} D_0\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) \\ D_0\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_0\left(\frac{x_{N^L L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{N^L L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{N^L L}}{c}\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (1) переписутся в матричной форме

$$D_U W_U = Z_U - X_U, \quad D_L W_L = Z_L - X_L. \quad (2)$$

Если $N^U = N_U$, $N^L = N_L$, их решение находится в виде

$$W_U = D_U^{-1}(Z_U - X_U), \quad W_L = D_L^{-1}(Z_L - X_L). \quad (3)$$

Если $N^U > N_U$, $N^L > N_L$, решение находится в форме

$$W_U = D_U^{-1}(Z_U - X_U), \quad W_L = D_L^{-1}(Z_L - X_L), \quad (4)$$

где D_U^{-1}, D_L^{-1} – псевдообратные матрицы [31].

Схема процесса проектирования профиля крыла как задача оптимизации

Процесс проектирования профиля начинается с задания начального профиля из множества допустимых. С этой целью проектировщик задает величину хорды, количество опорных точек и относительные координаты опорных точек для верхней и нижней образующих, а также промежутки их возможных значений. Фиксируются значения порядков полиномов Бернштейна N_U, N_L в (1). Параметры среды и число Маха в решателе задаются пользователем, исходя из информации о целевом режиме полета проектируемого самолета и геометрических характеристиках его крыла.

Задается диапазон изменения угла атаки $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ для передачи в решатель с целью построения поляры профиля и зависимости коэффициента момента тангажа от угла атаки на основе вычисляемых значений $C_y(\alpha)$, $C_x(\alpha)$, $m_{z_0}(\alpha)$.

Задаются промежутки допустимых значений интегральных аэродинамических характеристик, максимальной относительной толщины T , максимального значения

аэродинамического качества $K_{\max}(\alpha^*) = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$ и соответствующего ему

значения угла атаки $\alpha^* = \arg \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$; наивыгоднейшего значения $C_{y_{\text{ун}}} = C_y(\alpha^*)$;

максимального значения $C_y(\alpha)$: $C_{y_{\text{max}}} = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} C_y(\alpha)$; значения $C_{x_0} = C_x(\alpha^0)$, где

α^0 – значение угла атаки, при котором $C_y(\alpha^0) = 0$; значения m_{z_0} (корня уравнения

$m_{z_0}(\alpha) = 0$): $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$, $C_{y_{\text{ун}}} \in [\underline{C_{y_{\text{ун}}}}, \overline{C_{y_{\text{ун}}}}]$, $K_{\max} \in [\underline{K_{\max}}, \overline{K_{\max}}]$, $C_{y_{\text{max}}} \in [\underline{C_{y_{\text{max}}}}, \overline{C_{y_{\text{max}}}}]$,

$C_{x_0} \in [\underline{C_{x_0}}, \overline{C_{x_0}}]$, $m_{z_0} \in [\underline{m_{z_0}}, \overline{m_{z_0}}]$.

Задаются параметры целевой функции, характеризующей качество профиля:

$$I = \lambda_1 D(T) + \lambda_2 D(C_{yH}) + \lambda_3 D(K_{\max}) + \lambda_4 D(C_{y\max}) + \lambda_5 D(C_{x0}) + \lambda_6 D(m_{z0}), \quad (5)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ – весовые коэффициенты (их значения, как правило, убывают по величине с возрастанием номера, учитывая важность вклада каждого из слагаемых, а также его размерность),

$$D(T) = \begin{cases} (T - T_{\min})^2, T < T_{\min}, \\ 0, T \in [T_{\min}, T_{\max}], \\ (T - T_{\max})^2, T > T_{\max}, \end{cases} \quad D(C_{yH}) = \begin{cases} (C_{yH} - \underline{C}_{yH})^2, C_{yH} < \underline{C}_{yH}, \\ 0, C_{yH} \in [\underline{C}_{yH}, \overline{C}_{yH}], \\ (C_{yH} - \overline{C}_{yH})^2, C_{yH} > \overline{C}_{yH}, \end{cases}$$

$$D(K_{\max}) = \begin{cases} (K_{\max} - \underline{K}_{\max})^2, K_{\max} < \underline{K}_{\max}, \\ 0, K_{\max} \in [\underline{K}_{\max}, \overline{K}_{\max}], \\ (K_{\max} - \overline{K}_{\max})^2, K_{\max} > \overline{K}_{\max}, \end{cases} \quad D(C_{y\max}) = \begin{cases} (C_{y\max} - \underline{C}_{y\max})^2, C_{y\max} < \underline{C}_{y\max}, \\ 0, C_{y\max} \in [\underline{C}_{y\max}, \overline{C}_{y\max}], \\ (C_{y\max} - \overline{C}_{y\max})^2, C_{y\max} > \overline{C}_{y\max}, \end{cases}$$

$$D(C_{x0}) = \begin{cases} (C_{x0} - \underline{C}_{x0})^2, C_{x0} < \underline{C}_{x0}, \\ 0, C_{x0} \in [\underline{C}_{x0}, \overline{C}_{x0}], \\ (C_{x0} - \overline{C}_{x0})^2, C_{x0} > \overline{C}_{x0}, \end{cases} \quad D(m_{z0}) = \begin{cases} (m_{z0} - \underline{m}_{z0})^2, m_{z0} < \underline{m}_{z0}, \\ 0, m_{z0} \in [\underline{m}_{z0}, \overline{m}_{z0}], \\ (m_{z0} - \overline{m}_{z0})^2, m_{z0} > \overline{m}_{z0}. \end{cases}$$

Таким образом, задача проектирования профиля сводится к задаче параметрической условной минимизации значения целевой функции (5) при наличии интервальных ограничений, т.е. требуется найти такие опорные точки $\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^U$, $\left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^L$, чтобы достиглось минимальное значение функции (5).

Для решения задачи параметрической оптимизации используется набор из метаэвристических алгоритмов [32]: модифицированный и классический методы имитации поведения стаи мотыльков [33, 34], метод Luus–Jaakola [35], метод имитации

отжига с учетом интервальных ограничений, алгоритм перекоммутации (Path-Relinking). Результаты, полученные одним из указанных методов, могут быть улучшены другими. В качестве условий окончания процедуры оптимизации могут использоваться: максимальное число итераций, условие непревышения модуля разности значений целевой функции на соседних итерациях заданного порога. В качестве входной информации методу оптимизации передается матрица-столбец, содержащая значения координат опорных точек профиля.

Для передачи информации о текущей геометрии профиля в решатель формируется геометрическая модель. Решатель возвращает значения интегральных аэродинамических характеристик, которые сравниваются с целевыми значениями.

Общая схема, отражающая предложенную методологию проектирования, изображена на рис. 3. По окончании процесса последовательной оптимизации проектировщику выдается полученная наилучшая геометрия профиля вместе с его характеристиками для анализа.

В случае, если проектировщика не удовлетворяет полученный результат, он может изменить:

- положение и число опорных точек профиля;
- порядки полиномов в формулах (1);
- левые и правые границы в ограничениях;
- весовые коэффициенты в целевой функции (5);
- метод оптимизации и его параметры.

Расчет величины целевой функции выполняется по следующему алгоритму.

1. Задать:

- величину хорды c ;
- толщину задней кромки сверху и снизу: $\frac{z_{UTE}}{c}$, $\frac{z_{LTE}}{c}$;
- порядки многочленов Бернштейна N_U, N_L .

2. Задать числа узлов сверху N^U и снизу N^L (равными или превышающими N_U, N_L).

3. Задать узловые пары точек:

$$\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c} \right), j = 0, 1, \dots, N^U, \left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c} \right), j = 0, 1, \dots, N^L.$$

4. Найти коэффициенты $W_U = \begin{pmatrix} W_U(0) \\ W_U(1) \\ \vdots \\ W_U(N_U) \end{pmatrix}$, $W_L = \begin{pmatrix} W_L(0) \\ W_L(1) \\ \vdots \\ W_L(N_L) \end{pmatrix}$ по формулам (3) или

(4) в зависимости от соотношения порядков полиномов и числа узлов.

5. Передать параметры профиля в решатель. Задать шаг по углу атаки и получить точки поляры $C_y(\alpha_i)$, $C_x(\alpha_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ с заданным шагом при $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Получить значения $m_{z_0}(\alpha_i), i = 0, 1, \dots, N$.

6. Найти относительную толщину профиля крыла по формуле

$$T = \max_{\frac{x}{c} \in [0,1]} \left[\left[\frac{z}{c} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{Upper} - \left[\frac{z}{c} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{Lower} \right]$$

и положение соответствующей точки $\left(\frac{x}{c}\right)^* = \arg \max_{\frac{x}{c} \in [0,1]} \left[\left[\frac{z}{c} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{Upper} - \left[\frac{z}{c} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{Lower} \right]$.

В случае невыполнения условий $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$, $\left(\frac{x}{c}\right)^* \in \left[\left(\frac{x}{c}\right)_{\min}^*, \left(\frac{x}{c}\right)_{\max}^* \right]$, где границы отрезков задаются проектировщиком, вернуться к шагу 3, задавая новые узловые пары точек.

7. Найти характерные параметры поляры.

а) решить задачи интерполяции: $C_y(\alpha)$, $C_x(\alpha)$, $m_{z_0}(\alpha)$ при $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$;

б) вычислить максимальное значение аэродинамического качества

$$K_{\max}(\alpha^*) = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$$

и соответствующее значение угла атаки $\alpha^* = \arg \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$;

в) вычислить наивыгоднейшее значение $C_{yH} = C_y(\alpha^*)$;

г) максимальное значение $C_y(\alpha)$: $C_{y\max} = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} C_y(\alpha)$;

д) значение $C_{x_0} = C_x(\alpha^0)$, где α^0 – значение угла атаки, при котором

$C_y(\alpha^0) = 0$ (корень уравнения $C_y(\alpha) = 0$);

е) значение m_{z_0} как корень уравнения $m_{z_0}(\alpha) = 0$.

8. Вычислить величину критерия качества профиля по формуле (5).

Принцип взаимодействия блока оптимизации с решателем отражен на рис. 4.

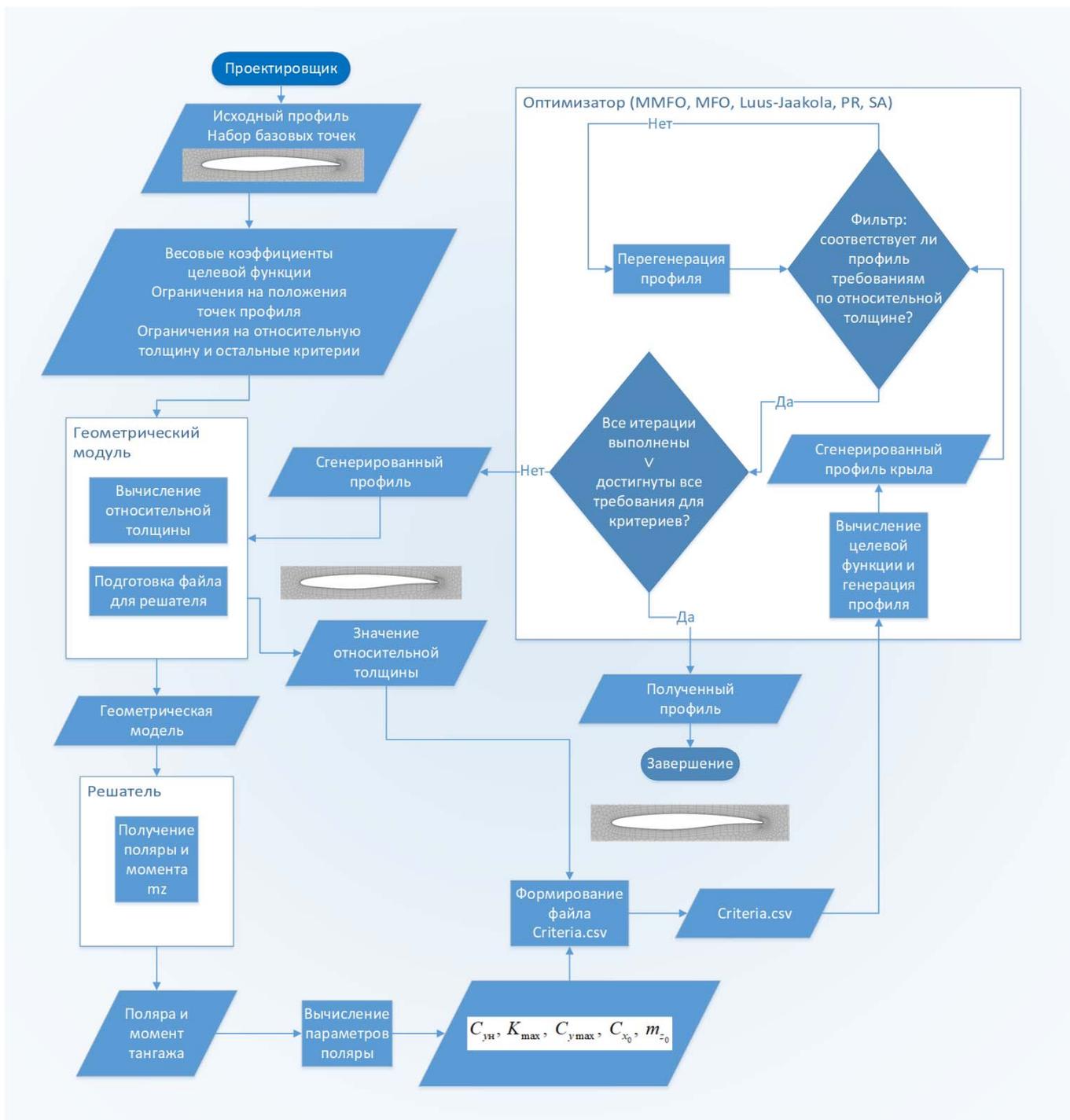


Рис. 3. Общая схема проектирования профиля крыла

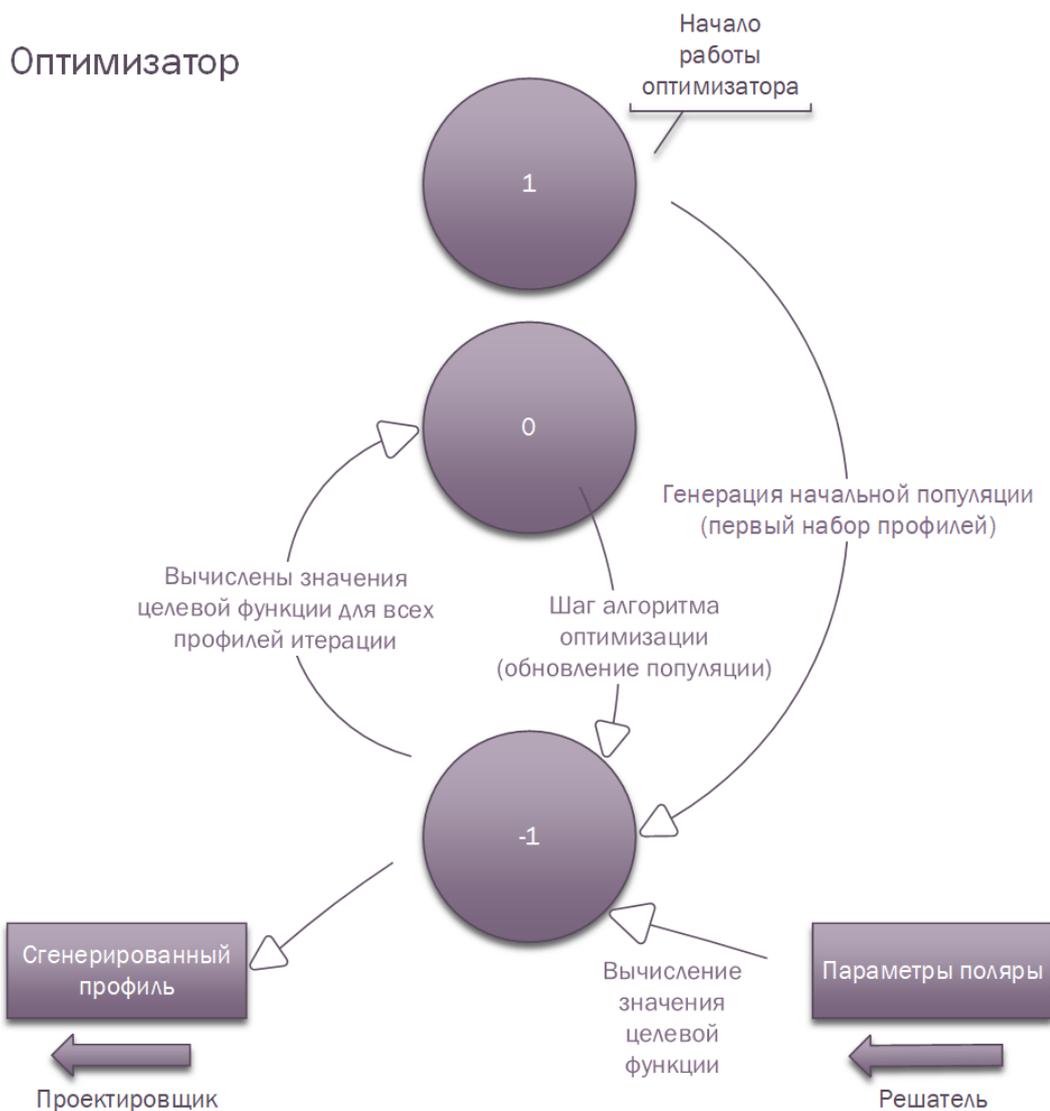


Рис. 4. Общая схема функционирования модуля оптимизации

Примеры решения задачи проектирования профилей крыла

Целевыми значениями являются аэродинамические и геометрические (длина хорды в метрах и относительная толщина) характеристики профилей. В табл. 1 представлены настройки решателя и параметры среды, принятые для моделирования (двухмерная постановка). Необходимые параметры неструктурированной расчетной сетки были получены подбором оптимальных значений дискретизации расчетной области (сеточная сходимость). Решение оптимизационной задачи осуществлялось на персональной ЭВМ.

Таблица 1.

Настройки решателя и параметры среды

Параметр	Значение
Тип решения	RANS
Модель турбулентности	SST (Menter) K-Omega
Параметр Y^+	0.12
Модель газа	Идеальный газ
Число Маха	0.7
Давление (Па)	22630

В качестве первого приближения принят известный профиль RAЕ 5213. Целевые аэродинамические и геометрические характеристики проектируемых профилей представлены в табл. 2.

Таблица 2.

Целевые аэродинамические и геометрические характеристики профилей

Параметр	$\bar{z} = 0.10$	$\bar{z} = 0.34$	$\bar{z} = 0.72$	$\bar{z} = 1.00$
C_{yH}	[0.45, 0.5]	[0.62, 0.65]	[0.73, 0.77]	[0.69, 0.75]
K_{max}	[25,35]	[40,50]	[40,50]	[40,50]
$C_{y_{max}}$	[0.8, 0.9]	[1.0, 1.1]	[1.1, 1.2]	[1.0, 1.1]
Абсолютная длина хорды (м)	5.400	3.510	2.238	1.322
Относительная толщина (%)	14.5	12.5	10.5	9.9

Порядок многочленов Бернштейна для верхней и нижней образующих одинаков и равен 4, количество базовых точек 16. Значения весовых коэффициентов целевой функции (5): $\lambda_1 = 0.25$; $\lambda_2 = 0.5$; $\lambda_3 = 0.25$; $\lambda_4 = 10^{-4}$, $\lambda_5 = 5 \cdot 10^{-5}$, $\lambda_6 = 10^{-5}$. При решении задачи оптимизации использована модификация [34] метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, с параметрами $Np = 10$, $s = 0.2$, $T = 50$, $\tau = 1$. Результатом решения являются геометрии профилей, представленные на рис. 5. На рис. 6 представлены поляры первого рода для полученных профилей.

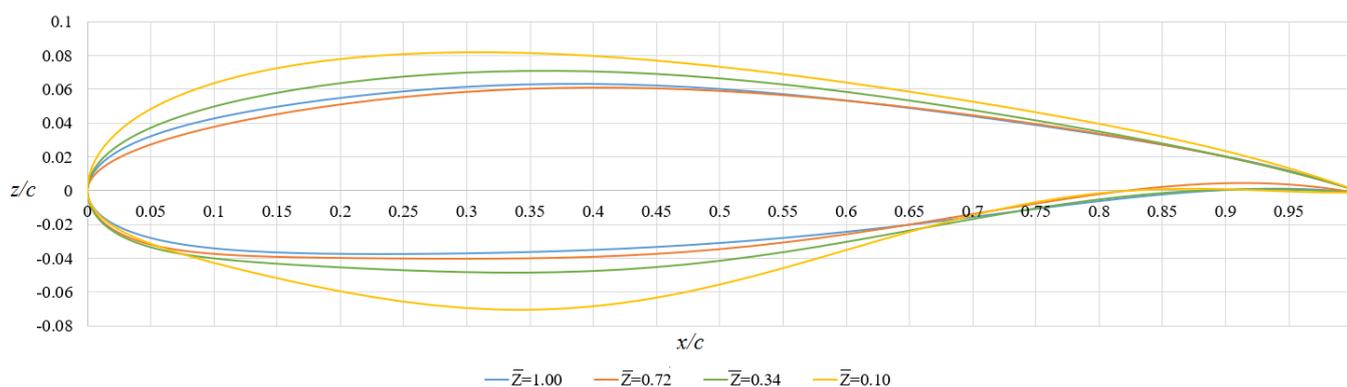


Рис. 5. Геометрии профилей, полученные в результате решения оптимизационной задачи

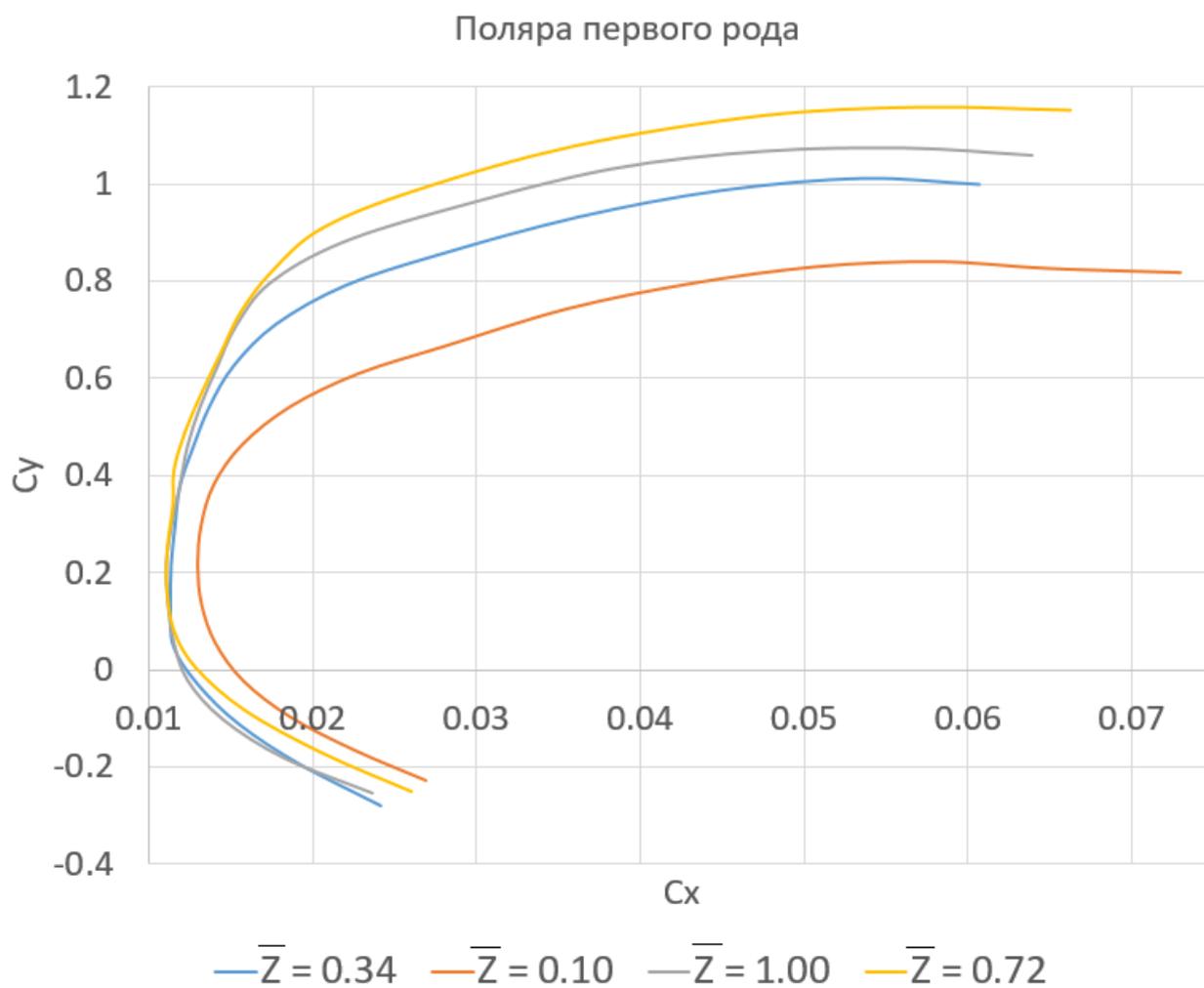


Рис. 6. Поляры первого рода

На рис. 7 представлено распределение коэффициента давления по хорде при C_{yH} для профилей, полученных в результате оптимизации. На рис. 8–11 представлены поля Маха для вышеуказанных профилей при C_{yH} .

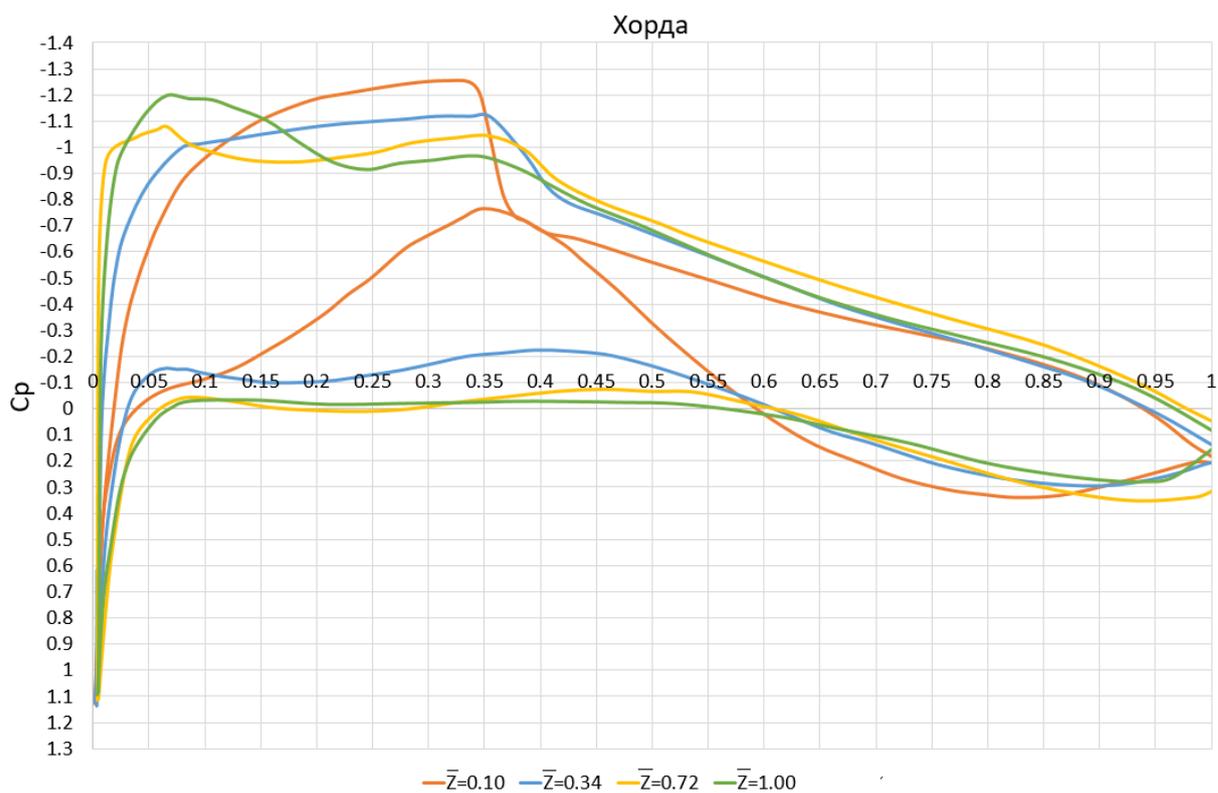


Рис. 7. Распределение коэффициента давления по хорде профилей

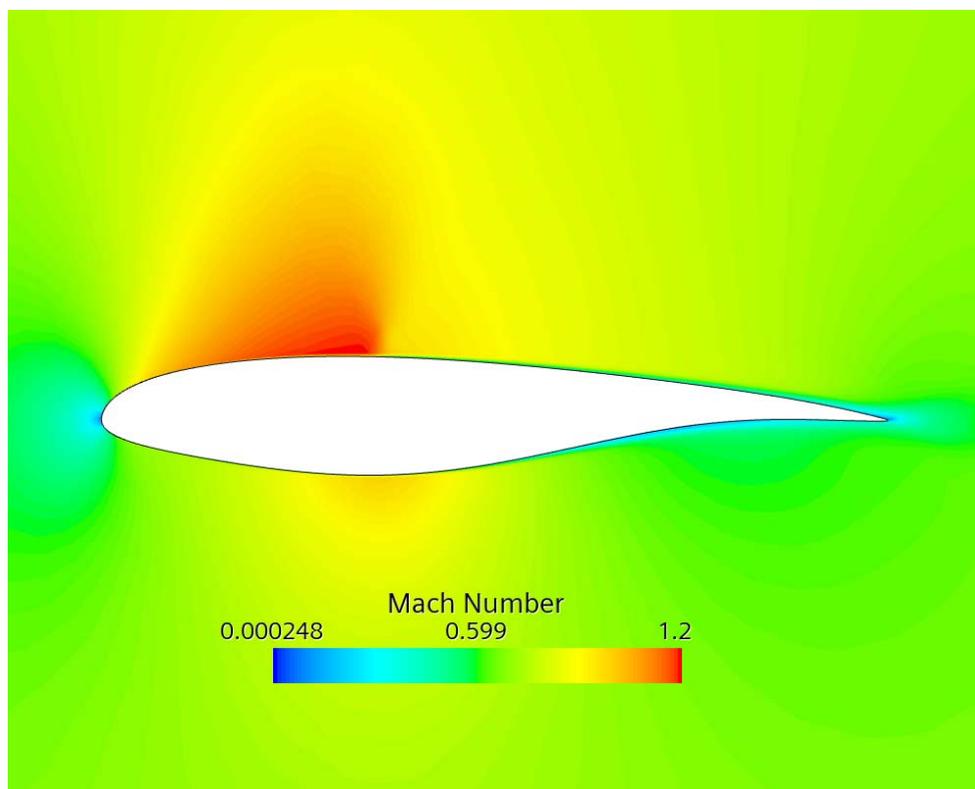


Рис. 8. Распределение полей Маха для профиля $\bar{z} = 0.10$

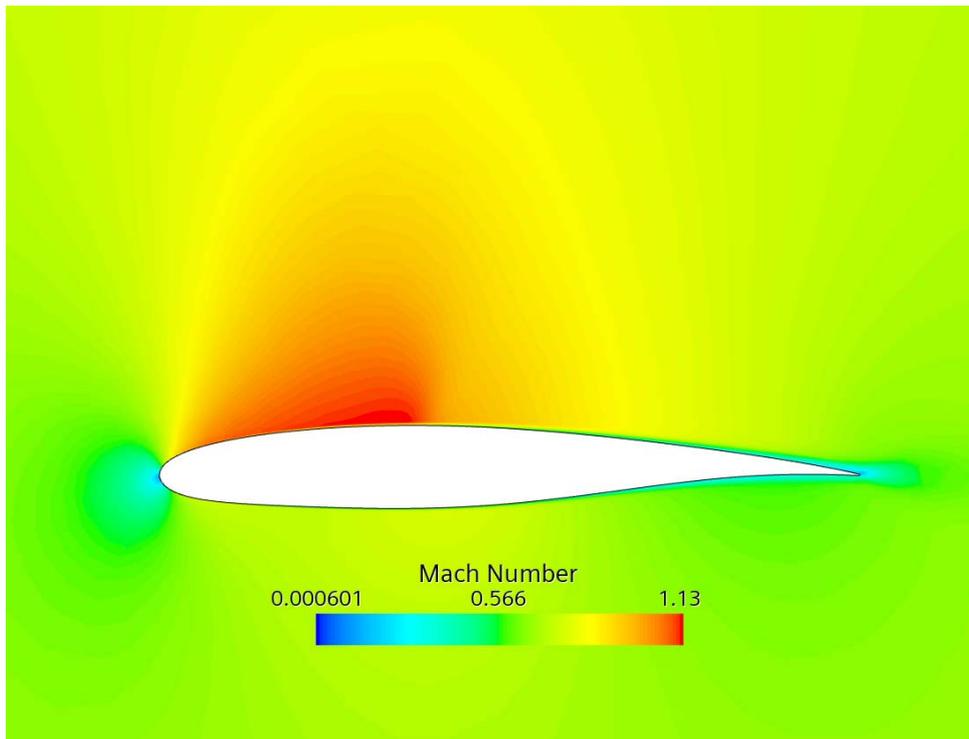


Рис. 9. Распределение полей Маха для профиля $\bar{Z} = 0.34$

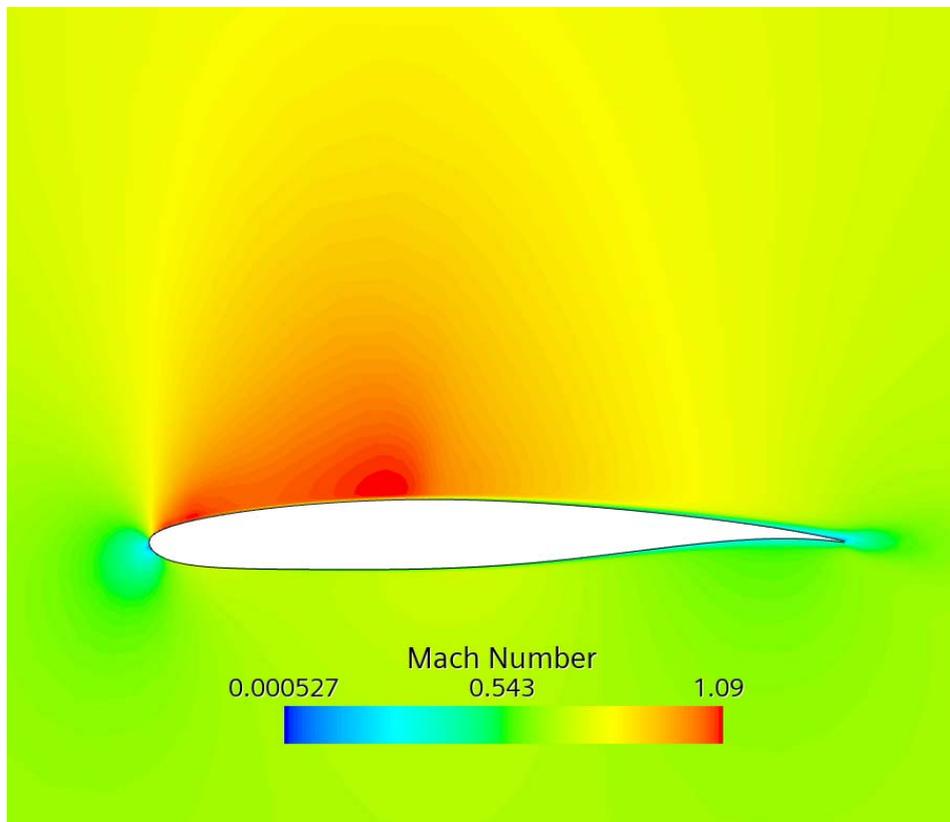


Рис. 10. Распределение полей Маха для профиля $\bar{Z} = 0.72$

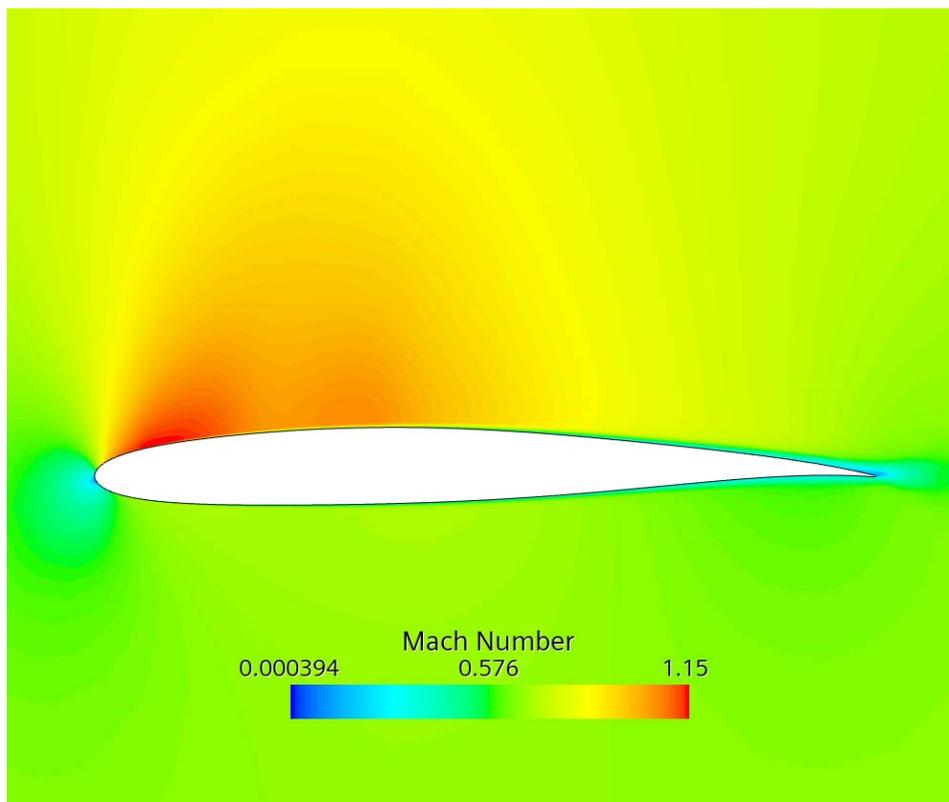


Рис. 11. Распределение полей Маха для профиля $\bar{z} = 1.00$

В табл. 3 представлены аэродинамические характеристики профилей, полученные в результате оптимизации.

Таблица 3.

Полученные аэродинамические характеристики профилей

Параметр	$\bar{z} = 0.10$	$\bar{z} = 0.34$	$\bar{z} = 0.72$	$\bar{z} = 1.00$
C_{yH}	0.46	0.63	0.74	0.70
K_{max}	29.48	41.33	46.98	46.23
$C_{y_{max}}$	0.84	1.01	1.15	1.07

Полученные в результате оптимизации профили удовлетворяют заданным проектировщиком требованиям с точки зрения геометрических и аэродинамических характеристик. Данные профили будут использованы для построения теоретического контура крыла, с целью его последующей оптимизации с учетом корневого и концевых эффектов в трехмерной постановке.

Заключение

Предложен метод проектирования аэродинамического профиля, заключающийся в нахождении координат его базовых точек, используемых для их аппроксимации CST методом, с целью получения требуемых аэродинамических и геометрических характеристик профиля. Проблема сведена к задаче последовательной конечномерной оптимизации, которая решается с помощью набора метаэвристических алгоритмов поиска условного глобального экстремума, где значение целевой функции находится с помощью специализированного решателя, реализующего процедуру математического моделирования процесса обтекания профиля. Полученные результаты составляют основу для последующего этапа проектирования теоретического контура крыла при решении задачи обтекания полной компоновки самолета.

Список источников

1. Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Карась О.В., Ковалев В.Е. Развитие методов аэродинамического проектирования крейсерской компоновки дозвуковых самолетов // Труды ЦАГИ. 2002. № 2655. С. 133-145.

2. Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Скоморохов С.И., Чернышёв И.Л. Расчётно-экспериментальные исследования скоростных крыльев перспективных магистральных самолётов // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=96601>
3. Пейгин С.В., Пущин Н.А., Болсуновский А.Л., Тимченко С.В. Оптимальное аэродинамическое проектирование крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 117–129. DOI: [10.17223/19988621/51/10](https://doi.org/10.17223/19988621/51/10)
4. Kulfan B.M. Aerodynamic of sonic flight. Research & Enabling Technology Boeing Commercial Airplanes. 2006. Available at: <http://brendakulfan.com/docs/tas3.pdf>
5. Kulfan B.M., Bussoletti J.E. "Fundamental" parametric geometry representations for aircraft component shapes // 11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference: The Modeling and Simulation Frontier for Multidisciplinary Design Optimization. 6 - 8 September 2006. Portsmouth, Virginia. AIAA--2006-6948
6. Kulfan B.M., Bussoletti J.E., Hilmes C.L. Pressures and drag characteristics of bodies of revolution at near sonic speeds including the effects of viscosity and wind tunnel walls // 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 8 - 11 Jan 2007. Reno, Nevada. 2007. AIAA--2007-0684. DOI: [10.2514/6.2007-684](https://doi.org/10.2514/6.2007-684)
7. Kulfan B.M. Universal parametric geometry representation method // Journal of Aircraft. January 2008. DOI: [10.2514/1.29958](https://doi.org/10.2514/1.29958)
8. Kulfan B.M. Recent extensions and applications of the “CST” universal parametric geometry representation method // Aeronautical Journal -New Series, AIAA-2007-7709, Sept. 2007, No. 114. P. 1153. DOI: [10.2514/6.2007-7709](https://doi.org/10.2514/6.2007-7709)

9. Kulfan B.M. Modification of CST airfoil representation methodology. 2020. URL: <https://www.researchgate.net/publication/343615711>
10. Lane K.L., Marshall D.D. A Surface parameterization method for airfoil optimization and high lift 2D geometries utilizing the CST methodology // 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 5 - 8 January 2009. Orlando, Florida 2009. AIAA 2009-1461.
11. Zhu F. Geometric parameterisation and aerodynamic shape optimisation. PhD thesis, University of Sheffield. 2014.
12. Zhu F., Qin N. Intuitive class/shape function parameterization for airfoils // AIAA Journal. 2014. V. 52, No. 1. P. 17–25. DOI: [10.2514/1.J052610](https://doi.org/10.2514/1.J052610)
13. Khurana M.S., Winarto H., Sinha A.K. Airfoil geometry parameterization through shape optimizer and computational fluid dynamics // 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2008. DOI: [10.2514/6.2008-295](https://doi.org/10.2514/6.2008-295)
14. Sobieczky H. Parametric airfoils and wings // Notes on Numerical Fluid Mechanics. 1998. V. 68, P. 71–87.
15. Akram M.T., Kim M.-H. Aerodynamic shape optimization of NREL S809 airfoil for wind turbine blades using Reynolds-Averaged Navier Stokes Model — Part II // Applied Sciences. 2021. V. 11, P. 2211. DOI: [10.3390/app11052211](https://doi.org/10.3390/app11052211)
16. Gardner B.A., Selig M.S. Airfoil design using a genetic algorithm and an inverse method // 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. AIAA 2003–0043. 6–9 January 2003. Reno, Nevada. DOI: [10.2514/6.2003-43](https://doi.org/10.2514/6.2003-43)

17. Sederberg T.W., Parry S.R. Free-form deformation of solid geometric models // 13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, Dallas, Texas. 1986. No. 4. P. 151–160. DOI: [10.1145/15886.15903](https://doi.org/10.1145/15886.15903)
18. Koo D., Zingg D.W. Progress in aerodynamic shape optimization based on the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations // 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting. AIAA-2016-1292. San Diego, California, January 2016. DOI: [10.2514/6.2016-1292](https://doi.org/10.2514/6.2016-1292)
19. Lee C., Koo D., Zingg D.W. Comparison of B-spline surface and free-form deformation geometry control for aerodynamic optimization // AIAA Journal. 2017. V. 55, P. 228–240. DOI: [10.2514/1.J055102](https://doi.org/10.2514/1.J055102)
20. Poole D.J., Allen C.B., Rendall T.C.S. Optimal domain element shapes for free-form aerodynamic shape control // Session: Aerodynamic Design: Analysis, Methodologies & Optimization Techniques II. AIAA 2015-0762. Published Online: 3 Jan 2015. DOI: [10.2514/6.2015-0762](https://doi.org/10.2514/6.2015-0762)
21. Toal D.J.J., Bresslo N.W., Keane A.J. Geometric filtration using proper orthogonal decomposition for aerodynamic design optimization // AIAA Journal. 2010. V. 48, No. 5. P. 916–928. DOI: [10.2514/1.41420](https://doi.org/10.2514/1.41420)
22. Masters D.A., Taylor N.J., Rendall T.C.S., Allen C.B., Poole D.J. Review of aerofoil parameterisation methods for aerodynamic shape optimization // 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, Jan 2015. DOI: [10.2514/6.2015-0761](https://doi.org/10.2514/6.2015-0761)
23. Masters D.A., Taylor N.J., Rendall T.C.S., Allen C.B., Poole D.J. A Geometric comparison of aerofoil shape parameterisation methods // 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting. No. AIAA 2016-0558. 4-8 January 2016, San Diego, California, USA. DOI: [10.2514/6.2016-0558](https://doi.org/10.2514/6.2016-0558)

24. Nikolsky A.A. Universal geometric transformation method PGT for aircraft design // 44th European rotorcraft forum. 2018. V. 1, No. 40. P. 456-467.
25. Никольский А.А. Применение метода PGT при оптимизации аэродинамических характеристик вертолетного профиля // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178466>
26. Никольский А.А. Численное решение обратной задачи профиля с использованием метода PGT // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177660>
27. Meheut M., Dumont A., Carrier G., Peter J. E. Gradient-based optimization of CRM wing-alone and wingbody-tail configurations by RANS adjoint technique // 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting. AIAA-2016-1293. San Diego. California. January 2016. DOI: [10.2514/6.2016-1293](https://doi.org/10.2514/6.2016-1293)
28. Peigin S., Epstein B. Robust handling of non-linear constraints for GA optimization of aerodynamic shapes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2004. V. 45 (12), P. 1339–1362. DOI: [10.1002/flid.747](https://doi.org/10.1002/flid.747)
29. Epstein B., Peigin S. Constrained aerodynamic optimization of three-dimensional wings driven by Navier-Stokes computations // AIAA Journal. 2005. V. 43 (9), P. 1946–1957. DOI: [10.2514/1.10308](https://doi.org/10.2514/1.10308)
30. Пархаев Е.С., Семенчиков Н.В. Некоторые вопросы оптимизации профиля крыла малоразмерного беспилотного летательного аппарата // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=56884>
31. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Физматгиз, 2010. - 559 с.

32. Пантелеев А.В., Скавинская Д.В. Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации. - М.: Факториал, 2023. - 564 с.
33. Mirjalili S. Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm // Knowledge-Based Systems. 2015. V. 89, P. 228–249. DOI: [10.1016/j.knosys.2015.07.006](https://doi.org/10.1016/j.knosys.2015.07.006)
34. Пантелеев А.В., Надоров И.С. Применение модификации метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, для решения задачи оптимального программного управления мобильным роботом // Моделирование и анализ данных. 2025. Т. 15, № 1. С. 81–109. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150105>
35. Luus R. Iterative Dynamic Programming. London, Chapman & Hall/CRC, 2000.331 p.

References

1. Bolsunovskii A.L., Buzoverya N.P., Karas' O.V., Kovalev V.E. Development of methods of aerodynamic design of cruise configuration of subsonic aircraft. *Trudy TSAGI*. 2002. No. 2655. P. 133-145. (In Russ.)
2. Bolsunovskii A.L., Buzoverya N.P., Skomorokhov C.I., Chernyshev I.L. Computational and experimental studies of high-speed wings for advanced long-haul aircraft. *Trudy MAI*. 2018. No. 101. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=96601>
3. Peigin S.V., Pushchin N.A., Bolsunovskii A.L., Timchenko S.V. An optimal aerodynamic design for the wing of a wide-body long-range aircraft. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 2018. No. 51. P. 117–129. DOI: [10.17223/19988621/51/10](https://doi.org/10.17223/19988621/51/10)

4. Kulfan B.M. *Aerodynamic of sonic flight. Research & Enabling Technology Boeing Commercial Airplanes*. 2006. Available at: <http://brendakulfan.com/docs/tas3.pdf>
5. Kulfan B.M., Bussoletti J.E. "Fundamental" parametric geometry representations for aircraft component shapes. *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference: The Modeling and Simulation Frontier for Multidisciplinary Design Optimization*. 6 - 8 September 2006. Portsmouth, Virginia. AIAA--2006-6948
6. Kulfan B.M., Bussoletti J.E., Hilmes C.L. Pressures and drag characteristics of bodies of revolution at near sonic speeds including the effects of viscosity and wind tunnel walls. *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. 8 - 11 Jan 2007. Reno, Nevada. 2007. AIAA--2007-0684. DOI: [10.2514/6.2007-684](https://doi.org/10.2514/6.2007-684)
7. Kulfan B.M. Universal parametric geometry representation method. *Journal of Aircraft*. January 2008. DOI: [10.2514/1.29958](https://doi.org/10.2514/1.29958)
8. Kulfan B.M. Recent extensions and applications of the "CST" universal parametric geometry representation method. *Aeronautical Journal -New Series*, AIAA-2007-7709, Sept. 2007, No. 114. P. 1153. DOI: [10.2514/6.2007-7709](https://doi.org/10.2514/6.2007-7709)
9. Kulfan B.M. *Modification of CST airfoil representation methodology*. 2020. URL: <https://www.researchgate.net/publication/343615711>
10. Lane K.L., Marshall D.D. A Surface parameterization method for airfoil optimization and high lift 2D geometries utilizing the CST methodology. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. 5 - 8 January 2009, Orlando, Florida 2009. AIAA 2009-1461.
11. Zhu F. *Geometric parameterisation and aerodynamic shape optimisation*. PhD thesis, University of Sheffield. 2014.

12. Zhu F., Qin N. Intuitive class/shape function parameterization for airfoils. *AIAA Journal*. 2014. V. 52, No. 1. P. 17–25. DOI: [10.2514/1.J052610](https://doi.org/10.2514/1.J052610)
13. Khurana M.S., Winarto H., Sinha A.K. Airfoil geometry parameterization through shape optimizer and computational fluid dynamics. *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2008. DOI: [10.2514/6.2008-295](https://doi.org/10.2514/6.2008-295)
14. Sobieczky H. Parametric airfoils and wings. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. 1998. V. 68, P. 71–87.
15. Akram M.T., Kim M.-H. Aerodynamic shape optimization of NREL S809 airfoil for wind turbine blades using Reynolds-Averaged Navier Stokes Model — Part II. *Applied Sciences*. 2021. V. 11, P. 2211. DOI: [10.3390/app11052211](https://doi.org/10.3390/app11052211)
16. Gardner B.A., Selig M.S. Airfoil design using a genetic algorithm and an inverse method. *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. AIAA 2003–0043. 6–9 January 2003. Reno, Nevada. DOI: [10.2514/6.2003-43](https://doi.org/10.2514/6.2003-43)
17. Sederberg T.W., Parry S.R. Free-form deformation of solid geometric models. *13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Dallas, Texas. 1986. No. 4. P. 151–160. DOI: [10.1145/15886.15903](https://doi.org/10.1145/15886.15903)
18. Koo D., Zingg D.W. Progress in aerodynamic shape optimization based on the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. AIAA-2016-1292. San Diego, California, January 2016. DOI: [10.2514/6.2016-1292](https://doi.org/10.2514/6.2016-1292)
19. Lee C., Koo D., Zingg D.W. Comparison of B-spline surface and free-form deformation geometry control for aerodynamic optimization. *AIAA Journal*. 2017. V. 55, P. 228–240. DOI: [10.2514/1.J055102](https://doi.org/10.2514/1.J055102)

20. Poole D.J., Allen C.B., Rendall T.C.S. Optimal domain element shapes for free-form aerodynamic shape control. *Session: Aerodynamic Design: Analysis, Methodologies & Optimization Techniques II*. AIAA 2015-0762. Published Online: 3 Jan 2015. DOI: [10.2514/6.2015-0762](https://doi.org/10.2514/6.2015-0762)
21. Toal D.J.J., Bresslo N.W., Keane A.J. Geometric filtration using proper orthogonal decomposition for aerodynamic design optimization. *AIAA Journal*. 2010. V. 48, No. 5. P. 916–928. DOI: [10.2514/1.41420](https://doi.org/10.2514/1.41420)
22. Masters D.A., Taylor N.J., Rendall T.C.S., Allen C.B., Poole D.J. Review of aerofoil parameterisation methods for aerodynamic shape optimization. *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Jan 2015. DOI: [10.2514/6.2015-0761](https://doi.org/10.2514/6.2015-0761)
23. Masters D.A., Taylor N.J., Rendall T.C.S., Allen C.B., Poole D.J. A Geometric comparison of aerofoil shape parameterisation methods. *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. No. AIAA 2016-0558. 4-8 January 2016, San Diego, California, USA. DOI: [10.2514/6.2016-0558](https://doi.org/10.2514/6.2016-0558)
24. Nikolsky A.A. Universal geometric transformation method PGT for aircraft design. *44th European rotorcraft forum*. 2018. V. 1, No. 40. P. 456-467.
25. Nikol'skii A.A. Helicopter airfoil design using the PGT technique. *Trudy MAI*. 2024. No. 134. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178466>
26. Nikol'skii A.A. Numerical solution of the inverse airfoil problem using the PGT technique. *Trudy MAI*. 2023. No. 133. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177660>
27. Meheut M., Dumont A., Carrier G., Peter J. E. Gradient-based optimization of CRM wing-alone and wingbody-tail configurations by RANS adjoint technique. *54th AIAA*

- Aerospace Sciences Meeting*. AIAA-2016-1293. San Diego. California. January 2016.
DOI: [10.2514/6.2016-1293](https://doi.org/10.2514/6.2016-1293)
28. Peigin S., Epstein B. Robust handling of non-linear constraints for GA optimization of aerodynamic shapes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2004. V. 45 (12), P. 1339–1362. DOI: [10.1002/flid.747](https://doi.org/10.1002/flid.747)
29. Epstein B., Peigin S. Constrained aerodynamic optimization of three-dimensional wings driven by Navier-Stokes computations. *AIAA Journal*. 2005. V. 43 (9), P. 1946–1957. DOI: [10.2514/1.10308](https://doi.org/10.2514/1.10308)
30. Parkhaev E.S., Semenchikov N.V. Some Aspects of Airfoil Optimization Process for Small Size Unmanned Aerial Vehicles Application. *Trudy MAI*. 2015. No. 80. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=56884>
31. Gantmakher F.R. *Teoriya matrirts* (Matrix Theory). Moscow: Fizmatgiz Publ., 2010. 559 p.
32. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. *Metaevristicheskie strategii i algoritmy global'noi optimizatsii* (Metaheuristic strategies and algorithms of global optimization). Moscow: Faktorial Publ., 2023. 564 p.
33. Mirjalili S. Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm. *Knowledge-Based Systems*. 2015. V. 89, P. 228–249. DOI: [10.1016/j.knosys.2015.07.006](https://doi.org/10.1016/j.knosys.2015.07.006)
34. Panteleev A.V., Nadorov I.S. Application of the Modified Method Simulating the Behavior of a Flock of Moths to Solve the Optimal Open Loop Control Problem of a Mobile Robot Movement. *Modelirovanie i analiz dannykh*. 2025. V. 15, No 1. P. 81–109. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150105>

35. Luus R. *Iterative Dynamic Programming*. London, Chapman & Hall/CRC, 2000. 331 p.

Статья поступила в редакцию 15.04.2025

Одобрена после рецензирования 21.04.2025

Принята к публикации 25.06.2025

The article was submitted on 15.04.2025; approved after reviewing on 21.04.2025;
accepted for publication on 25.06.2025