

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи



Кольжанова Дарья Юрьевна

**Моделирование конечных упругих деформаций
слоистых композиционных материалов
на основе метода асимптотического осреднения**

ДИССЕРТАЦИЯ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор
Димитриенко Ю.И.

Москва, 2021 г.

Оглавление

Введение.....	6
1 Разработка математических моделей слоистых композиционных материалов с периодической структурой и конечными деформациями	16
1.1 Постановка задачи нелинейной теории упругости для сжимаемых композиционных материалов с периодической структурой и конечными деформациями	16
1.2 Универсальные модели A_n определяющих соотношений для сжимаемых сред.....	18
1.2.1 Общее представление определяющих соотношений для моделей класса A_n	18
1.3 Постановка задачи нелинейной упругости для несжимаемых композиционных материалов с периодической структурой и конечными деформациями.....	25
1.4 Универсальные модели B_n определяющих соотношений для несжимаемых сред.....	26
1.4.1 Общее представление определяющих соотношений для моделей класса B_n	26
1.4.2 Полулинейные модели B_n для несжимаемых сред	27
1.5 Метод асимптотического осреднения для сжимаемых слоистых композиционных материалов с конечными деформациями.....	31
1.5.1 Асимптотическое решение задачи нелинейной теории упругости для сжимаемых сред	31
1.5.2 Локальные задачи нелинейной теории упругости для сжимаемых сред	34
1.5.3 Осредненная задача нелинейной теории упругости для сжимаемого композиционного материала.....	36
1.6 Метод асимптотического осреднения для несжимаемых слоистых композиционных материалов с конечными деформациями.....	37
1.6.1 Асимптотическое решение задачи нелинейной теории упругости для несжимаемых сред	37

1.6.2 Локальные задачи нелинейной теории упругости для несжимаемых сред ...	39
1.6.3 Осредненная задача нелинейной теории упругости для несжимаемого композиционного материала.....	40
1.6.4 Общее представление эффективных определяющих соотношений для композита с помощью метода асимптотического осреднения.....	42
2 Разработка эффективных определяющих соотношений для сжимаемых трансверсально-изотропных композитов	46
2.1 Решение локальной задачи нулевого приближения для сжимаемых материалов	46
2.2 Метод численного расчета эффективных определяющих соотношений для сжимаемого композита	48
2.2.1 Общий алгоритм метода.....	48
2.2.2 Алгоритм вычисления собственных значений и собственных векторов тензора искажений	51
2.3 Задача об одноосном растяжении слоистой сжимаемой композитной пластины.....	54
2.3.1 Одноосное деформирование слоистой пластины	54
2.3.2 Одноосное деформирование вдоль направления в плоскости слоев композита	55
2.3.3 Одноосное деформирование вдоль направления, перпендикулярного к плоскости слоев композита	56
2.4 Результаты численного моделирования при одноосном деформировании композита	58
2.5 Сравнительный анализ различных моделей A_n при одноосном деформировании.....	65
2.5.1 Экспериментальные данные по дуотану и бутадиен-нитрильному каучуку.	65
2.5.2 Определение материальных констант моделей A_n	66
2.5.3 Численное моделирование деформирования слоистого композита дуотан-каучук при одноосном растяжении	69
2.6 Задача о сдвиге сжимаемого слоистого композита	72

2.7 Модель эффективной трансверсально-изотропной сжимаемой среды	74
2.8 Методика нахождения параметров модели трансверсально-изотропного сжимаемого композита	79
2.9 Одноосное растяжение пластины в плоскости трансверсальной изотропии ...	80
2.10 Одноосное растяжение вдоль оси трансверсальной изотропии.....	83
2.11 Формулировка задачи поиска параметров модели	84
2.12 Расчет параметров модели эффективного слоистого композиционного материала как трансверсально-изотропной среды	86
3 Разработка эффективных определяющих соотношений для несжимаемых трансверсально-изотропных композитов	90
3.1 Решение локальной задачи нулевого приближения для несжимаемых материалов	90
3.2 Численный алгоритм построения определяющих соотношений несжимаемого композита	93
3.3 Задача об одноосном растяжении слоистой несжимаемой композитной пластины.....	93
3.4 Результаты численных расчетов диаграмм одноосного деформирования для несжимаемых композитов	97
3.5 Задача о сдвиге несжимаемого слоистого композита	102
3.6 Модель трансверсально-изотропных несжимаемых сред	105
3.7 Методика нахождения параметров модели трансверсально-изотропной несжимаемой среды	108
3.8 Одноосное растяжение в плоскости трансверсальной изотропии.....	111
3.9 Расчет диаграмм деформирования для двуслойного композиционного материала, состоящего из реальных материалов.....	112
3.10 Одноосное растяжение вдоль оси трансверсальной изотропии.....	115
3.11 Двухосное растяжение вдоль направлений, перпендикулярных оси трансверсальной изотропии	116
3.12 Формулировка задачи поиска параметров модели несжимаемого трансверсально-изотропного композита.....	119

3.13 Результаты численного решения моделирования трансверсально-изотропного несжимаемого композита	120
3.14 Расчет эффективных параметров модели слоистого композиционного материала как трансверсально-изотропной среды	121
4 Задача о цилиндрическом изгибе слоистой композиционной пластины	123
4.1 Постановка осредненной задачи цилиндрического изгиба трансверсально-изотропной пластины.....	123
4.2 Решение осредненной задачи о цилиндрическом изгибе трансверсально-изотропной пластины	125
4.3 Результаты численного решения осредненной задачи.....	135
4.4 Напряжения в слоях композитной слоистой пластины при цилиндрическом изгибе.....	140
Выводы	148
Список литературы	149

Введение

В разных отраслях промышленности активно применяют композиционные материалы, состоящие из резиноподобных или эластомерных матриц, армированных волокнами, дисперсными частицами или тканевыми наполнителями. Такие материалы представляют значительный интерес, так как обладают удачными сочетаниями свойств, в частности относительно высокой прочностью и достаточно большой предельной деформацией разрушения, обусловленной способностью резин деформироваться без разрушения в области больших деформаций (до 800-900%). К изделиям из эластомеров можно отнести: мембраны и оболочки, силовые и уплотнительные элементы, резинометаллические шарниры, тонкие резинометаллические элементы, шины, амортизаторы и виброгасители, муфты, изоляционные и токопроводящие материалы, трансплантационные материалы, клеи, пленки и многое другое. Высокоэластичная деформация, достигающая сотен процентов, носит сдвиговый характер. Модуль сдвига в зависимости от степени наполнения эластомера меняется примерно в пределах 0,1 – 15 МПа, поэтому эластомеры относят к низкокомодульным материалам [46-52, 88].

Многообещающее начало использованию эластомеров положено при создании искусственных органов. Совсем недавно стэндфордские химики разработали материал, который растягивается в 100 раз от изначального размера, а затем сжимается назад без потери свойств. Уникальные свойства нового эластомера открывают потрясающие возможности по его использованию в различных областях промышленности, в том числе в робототехнике и медицине, например, как основа для искусственной кожи и искусственных мышц [57, 102].

Слоистые композиционные материалы находят большое применение для изготовления силовых конструкций летательных аппаратов, искусственных спутников, теплоизолирующих покрытий шаттлов, космических зондов, а также

всё чаще применяются для изготовления обшивок воздушных и космических аппаратов, и наиболее нагруженных силовых элементов, а также, активно применяются в шинной промышленности. При разработке конкретного слоистого композиционного материала учитывается, прежде всего, его цель. Поэтому такой композит может состоять из слоев с одинаковыми значениями упругих констант или же различными для каждого конкретного слоя, а также с различными или одинаковыми толщинами слоев. Зачастую свойства композитов представляют собой нечто большее, чем среднее от свойств отдельных его компонентов, что можно объяснить синергетическим эффектом [14].

Основное содержание работ по механике композиционных материалов состоит в сведении задачи неоднородной (чаще всего изотропной) теории упругости к задаче однородной анизотропной теории. Это достигается введением так называемых эффективных модулей (характеристик), которые либо вычисляются различными методами (как стохастическими, так и детерминированными), либо определяются экспериментально как средние характеристики материала в целом.

Для определения параметров, ответственных за степень сжимаемости эластомера, необходимы дополнительные испытания. Так известны эксперименты при одноосном деформированном состоянии [1, 84], имеются методы определения сжимаемости резин, основанные на измерении длины образцов, подвергающихся воздействию гидростатического давления [58]. В работе [25] разработан метод, отличающийся более высокой точностью и предусматривающий измерение суммарного объема цилиндрических образцов и инертной жидкости при воздействии гидростатического давления.

Однако экспериментальное определение всех, в особенности нелинейных, свойств композитов с различными схемами армирования требует достаточно сложных экспериментов. Поэтому наряду с экспериментальными исследованиями важны также вычислительные методы нахождения средних (эффективных) нелинейных свойств композиционных материалов. Также существует потребность развития нелинейных математических моделей и методов, которые

позволили бы определять не только общие характеристики таких материалов, но и локально описывать происходящие в них процессы деформирования.

Одним из мотивов для изучения эффективных модулей слоистого материала является широкое использование такого материала в качестве модели более сложных неоднородных материалов, например, композитов, армированных трехмерными сетками волокон.

Важно отметить, что существующие алгоритмы и способы моделирования таких характеристик являются приближенными и основаны на различных гипотезах и допущениях. Это позволяет получить сравнительно простые аналитические соотношения для упругих эффективных характеристик, но не позволяют рассчитать их наиболее точно в математическом смысле.

Достаточно хорошо развиты методы расчета эффективных характеристик в области малых деформаций. Высокоперспективным в этой области является метод асимптотического осреднения, который был предложен Н.С. Бахваловым и Г.П. Панасенко [6, 7, 8, 9].

Впервые метод осреднения был применен в небесной механике при исследовании движения планет вокруг Солнца. Потом этот метод стали использовать в нелинейной теории колебаний, теории автоматического регулирования и в решении ряда других проблем. Отметим, что во всех исходных уравнениях явно или неявно присутствует малый параметр, так что метод осреднения можно считать вариантом метода возмущений или метода разложения по малому параметру [18-22, 73]. Вопрос о вычислении эффективных характеристик неоднородных сред с периодической структурой ставился еще в классических работах Пуассона, Максвелла, Рэля, Фойгта – Рейсса. Фойгт [121] предложил вычислять параметры поликристаллов осреднением соответствующих величин по объему и ориентации, Рейсс [120] использовал для этой же цели осреднение компонент обратного тензора. В дальнейшем было показано, что метод Фойгта дает верхнюю, а Рейсса – нижнюю оценки эффективных параметров [64, 87, 108]. Однако, «вилка» между этими приближениями («вилка» Хилла) может достигать весьма больших величин [98, 102]. Поэтому на практике

при построении осредненных соотношений часто используются приемы, оценка области применимости которых сильно затруднена, а возможности уточнения отсутствуют.

Впервые асимптотически точная схема вычисления эффективных характеристик слоистых сред была предложена в работах [63, 64].

Дальнейшее развитие математического моделирования процессов, протекающих в неоднородных средах с периодической структурой, связано с теорией осреднения дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами.

Первые результаты по осреднению дифференциальных уравнений в частных производных дивергентного вида были получены в работах [3, 5, 11]. Дальнейшее развитие теории осреднения процессов в периодических структурах связано с работами [97, 98, 115, 116]. В целом, МАО активно развивался благодаря большому количеству работ со всего мира. Для изучения поведения упругих пластин он применялся Резцовым М.В. [75, 78, 79], Lewinski Т. [111, 112], Димитриенко Ю.И. [26], а также Болотиным В.В. для многослойных конструкций [12]. С помощью МАО решением разнообразных задач теории упругости занимались Григорян С.С. [22], Маневич Л.И., Павленко А.В. [64, 65, 74], Каламкаров А.Л., Кудрявцев Б.А., Партон В.З. [54], Образцов И.Ф. [72], Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. [13], а также Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. [15] для сред со случайной структурой. Некоторым современным приложениям метода осреднения посвящены многие работы [39-45, 67, 68, 69, 86, 87, 89-93, 100, 101, 104, 108, 109, 110, 114, 117, 118]

Более подробную библиографию по теории осреднения можно найти в [6, 10, 13, 22, 52, 54, 63, 66, 73, 80, 88, 108, 122].

Таким образом, асимптотический метод осреднения является строгим и широко используемым эффективным математическим подходом для описания задач деформирования конструкций из композиционных материалов, он дает асимптотически правильное представление их решения. Сложность этого метода

оправдывается возможностью получения более точного приближения искомого решения по сравнению с теорией, использующей только эффективные свойства (теория эффективного модуля [2, 54, 76]).

В настоящее время большинство результатов в области расчетов резинотехнических изделий выполнено методами нелинейной теории упругости, предусматривающими использование определяющих уравнений, построенных на основе известных потенциалов для эластомеров – Трелоара, Муни-Ривлина, Бартенева-Хазановича с привлечением гипотезы о механической несжимаемости материала, Арруды-Бойса, Огдена [94, 96, 119] и др.

Проблема формулировки уравнений состояния при конечных деформациях, в том числе и для высокоэластичных материалов, является объектом интенсивных исследований. Результаты этих исследований приведены в монографиях Ильюшина А.А. [53], Лурье А.И. [62], Гольденблатта И.И. [17], Новожилова В.В. [71], Гузя А.Н. [25], Работнова Ю.Н. [77], Грина и Адкинса [24], Локетта [13], Дзя [50], Труделла [82], Хаазе [83], Кристенсена [58] и др.

В механике высокоэластичных материалов, практическое применение которых зачастую эффективно именно в области конечных деформаций, реализация аналитического аппарата линейной теории затруднительна. Этим обстоятельством объясняется резкое сокращение количества решенных в этой области практических задач по сравнению с линейной теорией. Тем не менее, возможности использования существующих идей и методов исследования линейных задач в механике эластомеров далеко не исчерпаны, соответствующий аппарат находит достойное применение в многочисленных задачах, связанных с изучением динамики и устойчивости, предварительно нагруженных тел. Большинство реальных материалов, способных претерпевать значительные упругие деформации, обладают малой сжимаемостью. Обычно в расчетах их считают несжимаемыми. Однако иногда приходится принимать во внимание и малую сжимаемость. Поэтому необходимо иметь закон упругости, учитывающий неодинаковую реакцию материала на объемную и сдвиговые деформации [85].

Существует важный класс композитных материалов – армированные высокоэластичные ткани, пористые эластомеры (латексная губка, пористая и ячеистая резина и т.д.), которые в отличие от сплошных эластомеров обладают заметной сжимаемостью. Их рассмотрению посвящено весьма мало теоретических и экспериментальных работ [88, 109].

Для описания деформирования изотропных сжимаемых эластомеров используются модели, предложенные в работах Синьорини, Мурнагана, Блейца, а также Пенга и Ландела [24, 62, 107].

Вопрос о степени применимости того или иного потенциала в каждой конкретной задаче механики эластомеров остается открытым, тем не менее описание механического поведения эластомеров с помощью упругого потенциала общепризнанно, хотя единого мнения о форме его записи, пределах применимости и точности описания не выработано [62].

Механические и структурные свойства высокоэластичных резиноподобных материалов меняются в весьма широком спектре и достаточно чувствительны к химическому составу, технологии изготовления и особенностям режима эксплуатации. В связи с этим, механическое поведение всех видов эластомеров не может быть описано одной конкретной моделью. Выбор той или иной модели для описания процесса деформирования для каждого вида эластомера осуществляется индивидуально и требует экспериментального обоснования и подтверждения. Для расчета определяющих соотношений несжимаемых нелинейно-упругих сред для случая конечных деформаций в данной работе использованы универсальные представления моделей нелинейно-упругих сред с конечными деформациями, предложенные Ю.И.Димитриенко [27-32, 36-37].

Решая задачи, связанные с изучением свойств периодических неоднородных сред, а также происходящих в этих средах процессов, можно еще до изготовления композитов предсказывать их свойства на основании микроструктуры и свойств отдельных их компонентов, а также создать композиционный материал с заданными характеристиками или оптимальными для предполагаемого применения свойствами. Некоторые методы решения такой задачи представлены

в [34, 35]. Однако большинство этих методов неприменимы для случая конечных деформаций, ввиду сильной физической нелинейности механического поведения фаз композита, а также геометрической нелинейности задачи. Именно поэтому расчет точных эффективных упругих характеристик является важнейшим этапом проектирования и изготовления конструкций в целом, что влечет за собой актуальность данного исследования.

Актуальность темы обоснована перспективностью применения в технике композиционных материалов на основе эластомеров, а также отсутствием в настоящее время общепризнанных методов моделирования свойств анизотропных композитов с конечными деформациями.

Объектом исследования являются слоистые композиционные материалы с конечными деформациями, рассматриваемые как неоднородная твердая упругая среда с периодической структурой.

Цель диссертационной работы состоит в разработке определяющих соотношений для анизотропных слоистых композиционных материалов с конечными деформациями и периодической структурой, с использованием универсальных моделей сред для совершенствования расчетов диаграмм деформирования.

Задачами настоящей работы являются:

– разработка варианта метода асимптотического осреднения слоистых композиционных материалов при конечных деформациях с использованием универсального представления определяющих соотношений для комплекса различных моделей сред;

– разработка численного алгоритма решения задач на ячейке периодичности для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями;

– разработка методики построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных сжимаемых композитов с конечными деформациями на основе численного решения серии локальных задач;

- разработка методики построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями на основе численного решения серии локальных задач;

- проведение численного моделирования эффективных диаграмм деформирования слоистых композиционных материалов с конечными деформациями.

Методы исследования. В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

- метод асимптотического осреднения;

- методы оптимизации;

- численные итерационные методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с аналитическим решением.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

- разработка варианта метода асимптотического осреднения слоистых композиционных материалов при конечных деформациях с использованием универсального представления определяющих соотношений для комплекса различных моделей сред;

- разработка методики построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с конечными деформациями на основе численного решения серии локальных задач;

- модели эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с конечными деформациями, относящиеся к классу универсальных моделей.

Практическая значимость диссертационной работы. Метод расчета эффективных диаграмм деформирования и напряжений в слоях композиционного материала может быть использован при проектировании композиционных материалов с заданными свойствами для конструкций летательных аппаратов, многослойных шин, амортизаторов.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на:

Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, Москва, 17-19 мая 2016;

Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2017) МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2017;

VII Международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, май 2018;

Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 5-8 декабря 2018;

2-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2019;

Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2019) МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2019;

3-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2020;

научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (Москва, 2015-2020 гг.);

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы 6 публикаций [27-32], в том числе 3 в изданиях из списка ВАК [27,28,31] и 2 статьи [29,30] в журнале, индексируемом в Scopus.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, выводов и списка литературы из 123 наименований. Работа изложена на 160 листах, содержит 64 рисунка.

1 Разработка математических моделей слоистых композиционных материалов с периодической структурой и конечными деформациями

1.1 Постановка задачи нелинейной теории упругости для сжимаемых композиционных материалов с периодической структурой и конечными деформациями

Рассмотрим неоднородную упругую твердую среду V с конечными деформациями, которая в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$ обладает периодической структурой и для нее можно выделить повторяющийся элемент – ячейку периодичности (ЯП) $\overset{\circ}{V}_\xi$, которая состоит из N – компонент $\overset{\circ}{V}_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1, \dots, N$. Эйлеровы координаты каждой материальной точки в отсчетной и актуальной конфигурациях обозначаются как x^k и $\overset{\circ}{x}^k$ соответственно, а лагранжевы координаты – X^i . Последние полагаются совпадающими с декартовыми, т.е. $X^i = \overset{\circ}{x}^i$.

Для неоднородной среды рассмотрим задачу нелинейной теории упругости в лагранжевом описании в общей формулировке с использованием универсальных моделей – моделей класса A_n , предложенных в [33] для сжимаемых сред с конечными деформациями.

$$\overset{\circ}{\nabla}_i P^{ij} + \overset{\circ}{\rho} f^j = 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{V}, \quad (1.1)$$

$$P^{ij} = \overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(F^{kl}, X^m), \quad X^i \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \quad (1.2)$$

$$F^k{}_l = \delta_l^k + \overset{\circ}{\nabla}_l u^k, \quad X^i \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \quad (1.3)$$

$$\overset{\circ}{n}_i [P^{ij}] = 0, \quad [u^i] = 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.4)$$

$$\overset{\circ}{n}_i P^{ij} = t_e^j, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad u^i = u_e^i, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2. \quad (1.5)$$

Здесь (1.1) – уравнение равновесия, (1.2) – определяющие соотношения нелинейно-упругой среды, (1.3) – кинематическое соотношение, (1.4) – условия идеального контакта на поверхностях раздела $\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}$ α -ой и β -ой компонент композита, (1.5) – граничные условия на частях $\overset{\circ}{\Sigma}_1$ и $\overset{\circ}{\Sigma}_2$ внешней поверхности композита $\left(\overset{\circ}{\Sigma}_1 \cup \overset{\circ}{\Sigma}_2 = \partial \overset{\circ}{V} \right)$.

В выражении (1.4) $[P^{ij}]$ – скачок функции на границе раздела $\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}$ компонент композита. Все компоненты векторов и тензоров отнесены к неподвижному ортонормированному базису e_k – отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$.

Также введены обозначения для:

$\overset{\circ}{\rho}$ – плотности,

$\overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}$ – компонент тензора определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита,

P^{ij} – компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа,

F^k_l – компонент тензора градиента деформаций,

u^k – компонент вектора перемещений,

$\overset{\circ}{n}_i$ – компонент вектора нормали к поверхности в $\overset{\circ}{K}$,

t_e^j – компонент вектора поверхностных усилий,

u_e^i – компонент вектора заданных перемещений поверхности,

f^j – компонент вектора плотности массовых сил,

$\overset{\circ}{\nabla}_i = \frac{\partial}{\partial X^i}$ – набла оператора.

Решение задач нелинейной теории упругости с использованием универсальных моделей A_n ищется относительно поля вектора перемещений

$u^k = u^k(X^i)$, после нахождения которого координаты произвольной точки композита вычисляются по формуле: $x^k(X^i) = \overset{\circ}{x}^k(X^i) + u^k(X^i)$.

1.2 Универсальные модели A_n определяющих соотношений для сжимаемых сред

1.2.1 Общее представление определяющих соотношений для моделей класса A_n

Тензор определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита упругих сред с конечными деформациями имеет сложный неявно-заданный вид и для модели A_n зависит от компонент градиента деформаций F^k_l и лагранжевых координат X^i (разрывным образом):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{0ij}(F^k_l, X^m) &= \overset{\circ}{\rho}(X^m) E^{0ijsq}(F^k_l) \psi_{sq}(C^{np}, X^m), \\ C^{np} &= \frac{1}{n-III} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\gamma}^{(n-III)/2} \overset{\circ}{Q}_{\alpha}^n \overset{\circ}{Q}_{\alpha}^p - \frac{1}{n-III} \delta^{np}, \\ E^{0ijsq}(F^k_l) &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \overset{\circ}{E}_{\alpha\beta} Q_{\alpha}^i Q_{\beta}^j \overset{\circ}{Q}_{\beta}^s \overset{\circ}{Q}_{\alpha}^q, \\ \psi_{sq}(C^{np}, X^m) &= \frac{\partial}{\partial C^{np}} \psi(C^{np}, X^m). \end{aligned} \tag{1.6}$$

В (1.6) обозначены:

$\psi(C^{np}, X^m)$ – упругий потенциал (различный для каждого компонента композита, и поэтому зависящий явно от X^i),

C^{np} – компоненты симметричных тензоров энергетических деформаций,

E^{0ijsq} – компоненты тензора энергетической эквивалентности,

$\overset{\circ}{Q}_\alpha^i(F^k_l)$ и $Q_\beta^j(F^k_l)$ – матрицы собственных векторов левого и правого тензора искажений (являются неявными функциями только от F^k_l),

$E_{\alpha\beta}^0(\lambda_\alpha)$ – функции собственных значений λ_α тензоров искажений,

λ_α – собственные значения тензора искажений $(F^k_l)^T F^l_j$, которые являются функциями только от компонент тензора F^k_l .

Собственные значения λ_α и матрицы собственных векторов $\overset{\circ}{Q}_\alpha^i(F^k_l)$ вычисляются как решение следующих уравнений на собственные значения

$$((F^k_l)^T F^l_j - \lambda_\alpha^2 \delta_j^k) \overset{\circ}{Q}_\alpha^j = 0$$

Матрицы собственных векторов $Q_\beta^j(F^k_l)$ вычисляются как решение сопряженных уравнений на собственные значения

$$(F^k_l (F^l_j)^T - \lambda_\alpha^2 \delta_j^k) Q_\alpha^j = 0$$

Функции $E_{\alpha\beta}^0(\lambda_\alpha)$ собственных значений λ_α тензоров искажений вычисляются с помощью следующих формул

$$\overset{(n)\circ}{E}_{\alpha\beta} = \frac{\overset{\circ}{\rho} E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\rho \lambda_\alpha}, \quad (1.7)$$

где

$$I E_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda_\alpha \lambda_\beta},$$

$$II E_{\alpha\beta} = \frac{2}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta},$$

$$IV E_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta},$$

$$V E_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta.$$

Упругий потенциал $\psi(C^{np}, X^m)$ является функцией от инвариантов $I_\gamma(C^{np})$ энергетических тензоров деформации

$$\psi(C^{np}, X^m) = \psi(I_\gamma(C^{np}), X^m).$$

Все компоненты композита (слои) предполагаются изотропными, поэтому число независимых инвариантов $I_\gamma(C^{np})$ равно трем, и в качестве таких инвариантов можно выбрать главные инварианты

$$\begin{aligned} I_1(C^{np}) &= C^{np} \delta_{np}, \\ I_2(C^{kp}) &= \frac{1}{2}(I_1^2(C^{kp}) - C^{kp} C^{ms} \delta_{km} \delta_{ps}), \\ I_3(C^{np}) &= \det(C^{np}). \end{aligned}$$

Тогда определяющие соотношения в (1.6) можно представить следующим образом

$$\mathcal{F}^{0ij}(F^k, X^m) = \sum_{\gamma=1}^3 \overset{\circ}{\varphi}_\gamma E^{0ijsq} I_{\gamma sq}, \quad (1.8)$$

$$I_{\gamma kl} = \frac{\partial I_\gamma(C^{sp})}{\partial C^{kl}},$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_\gamma = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma} \right).$$

1.2.1.1 Определяющие соотношения для моделей класса A_V

Достаточно сложный и не имеющий аналитического выражения вид тензорной функции определяющих соотношений в системе (1.6) значительно упрощается для моделей класса A_V , а также частично и для моделей класса A_γ . Наиболее сложными для численной реализации являются модели A_{II} , A_{IV} , для

которых необходимо вычислять собственные значения и матрицы собственных векторов.

Рассмотрим модели класса A_v .

Поскольку

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\rho} \\ \underline{\rho} \\ \rho \end{pmatrix} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\rho} \\ \underline{\rho} \\ \rho \end{pmatrix} \mathbf{F}^{-1} \cdot \left(\mathbf{F} \cdot \overset{v}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^T \right) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\rho} \\ \underline{\rho} \\ \rho \end{pmatrix} \overset{v}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (1.9)$$

и подставляя в нее выражение для тензорной функции, получается

$$\mathbf{P} = \overset{v}{\mathcal{F}}_A^{\circ}(\mathbf{F}, \theta) = \sum_{\gamma=1}^3 \overset{\circ}{\varphi}_{\gamma} \mathbf{I}_{\gamma}^{(s)} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (1.10)$$

где

$$\overset{\circ}{\varphi}_{\gamma} = \overset{\circ}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_{\gamma}^{(s)}} \right), \quad (1.11)$$

$$\psi = \psi(I_{\gamma}^{(s)}(C), \theta), \quad (1.12)$$

$$\mathbf{I}_{\gamma}^{(s)} = \frac{\partial I_{\gamma}^{(s)}}{\partial \mathbf{C}}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}). \quad (1.14)$$

Выражение (1.10) – тензорная функция, имеющая явное аналитическое представление.

Вычислять собственные базисы и собственные значения для этой модели при построении функции (1.10) не требуется. Указанное преимущество выделяет модель A_v среди других при использовании материального описания. Такая модель наиболее широко используется на практике при численном решении задачи упругости с конечными деформациями.

1.2.1.2 Определяющие соотношения для моделей класса A_I

Следующей по уровню сложности в материальном описании является модель A_I .

Определяющие соотношения (1.10) в модели A_I заменяют следующим выражением:

$$\mathbf{P} = \overset{I}{\mathcal{F}}_A^\circ(\mathbf{F}, \theta) = \sum_{\gamma=1}^3 \overset{\circ}{\varphi}_\gamma \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{I}_\gamma^{(s)} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (1.15)$$

где

$$\overset{\circ}{\varphi}_\gamma = \overset{\circ}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma^{(s)}} \right), \quad (1.16)$$

$$\psi = \psi(I_\gamma^{(s)}(\Lambda), \theta), \quad (1.17)$$

$$\mathbf{I}_\gamma^{(s)} = \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial \Lambda}, \quad (1.18)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T}). \quad (1.19)$$

В этой модели можно и не вычислять собственные значения и собственные векторы, однако дополнительно по сравнению с моделью A_V , требуется обращать тензор F^{-1} .

1.2.1.3 Полулинейные модели A_n

Конкретизация моделей A_n осуществляется за счет выбора потенциала $\psi(I_\gamma^{(n)}(C^{np}), X^m)$ в конкретной форме, как функции трех переменных.

Рассмотрим одну из относительно простых моделей – полулинейные модели A_n , в которых

$$\psi(I_\gamma(C^{np}), X^m) = \frac{1}{2} l_1(\xi)(I_1(C^{is}))^2 + l_2(\xi)(I_1(C^{is} C_s^k)).$$

Тогда энергетический тензор напряжений имеет следующий вид:

$$\mathbf{T} = J \left(l_1 I_1 \left(\mathbf{C} \right) \mathbf{E} + 2l_2 \mathbf{C} \right), \quad (1.20)$$

где J – отношение плотностей среды в конфигурациях K и $\overset{\circ}{K}$

$$J = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} = \frac{1}{\det F} = \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}}{g}}, \quad (1.21)$$

или (1.20) в покомпонентном виде:

$$T_{kl} = J \left(l_1 I_1 \left(\mathbf{C} \right) \delta_{kl} + 2l_2 C_{kl} \right). \quad (1.22)$$

Для вычисления тензора напряжений Коши используем тензоры энергетической эквивалентности ${}^4 E^{(n)}$:

$$\mathbf{T} = {}^4 \mathbf{E}^{(n)} \cdot \mathbf{T}, \quad (1.23)$$

или в покомпонентной записи

$$T^{ij} = {}^4 E_A^{ijkl} T_{kl}. \quad (1.24)$$

В свою очередь тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа

$$\mathbf{P} = \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}}{g}} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \quad (1.25)$$

или

$$\mathbf{P} = \frac{1}{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}. \quad (1.26)$$

Учитывая вышесказанное получаем выражение

$$\mathbf{P} = \frac{1}{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^4 \mathbf{E}^{(n)} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{J} J {}^4 \mathbf{E}^0 \cdot \left(l_1 I_1 \mathbf{E} + 2l_2 \mathbf{C} \right) = {}^4 \mathbf{E}^0 \cdot \left(l_1 I_1 \mathbf{E} + 2l_2 \mathbf{C} \right). \quad (1.27)$$

Для изотропной линейной модели функции φ_γ и ψ_γ имеют следующий вид:

$$\varphi_1 = (l_1 + 2l_2) I_1, \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= -2l_2, \\
\varphi_3 &= 0, \\
\psi_1 &= l_1 I_1, \\
\psi_2 &= 2l_2, \\
\psi_3 &= \frac{\rho}{\rho}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Распишем инварианты

$$\begin{aligned}
I_1 \left(\mathbf{C} \right) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}, \\
I_2 \left(\mathbf{C} \right) &= \frac{1}{2} \left(I_1^2 \left(\mathbf{C} \right) - I_1 \left(\mathbf{C}^2 \right) \right) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}^2, \\
I_3 \left(\mathbf{C} \right) &= \det \mathbf{C}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

и производные от инвариантов:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(I_1 \left(\mathbf{C} \right) \right)}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{E}, \\
\frac{\partial \left(I_2 \left(\mathbf{C} \right) \right)}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{E} I_1 \left(\mathbf{C} \right) - \mathbf{C}^T, \\
\frac{\partial \left(I_3 \left(\mathbf{C} \right) \right)}{\partial \mathbf{C}} &= I_3 \left(\mathbf{C} \right) - \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{T^2} - I_1 \left(\mathbf{C} \right) \mathbf{C}^T + \mathbf{E} I_2 \left(\mathbf{C} \right).
\end{aligned} \tag{1.31}$$

В системе (1.8) остается определить матрицы Якоби и собственные значения.

1.3 Постановка задачи нелинейной упругости для несжимаемых композиционных материалов с периодической структурой и конечными деформациями

Для случая неоднородной слоистой среды, каждый слой которой является несжимаемым материалом, рассмотрим задачу нелинейной теории упругости в лагранжевом описании в общей формулировке с использованием универсальных моделей – моделей класса B_n , предложенных в [33] (для несжимаемых сред с конечными деформациями)

$$\overset{\circ}{\nabla}_i P^{ij} + \overset{\circ}{\rho} f^j = 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{V}, \quad (1.32)$$

$$P^{ij} = -pF^{-1ij} + \overset{(n)}{\mathcal{F}}^{0ij}(F^{kl}, X^m), \quad X^i \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \quad (1.33)$$

$$F^k_l = \delta_l^k + \overset{\circ}{\nabla}_l u^k, \quad X^i \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \quad (1.34)$$

$$\det(F^k_l) = 1, \quad (1.35)$$

$$\overset{\circ}{n}_i [P^{ij}] = 0, \quad [u^i] = 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.36)$$

$$\overset{\circ}{n}_i P^{ij} = t_e^j, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad u^i = u_e^i, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2. \quad (1.37)$$

Здесь (1.32) – уравнения равновесия, (1.33) – определяющие соотношения нелинейно-упругой среды, (1.34) – кинематическое соотношение, (1.35) – условие несжимаемости, (1.36) – условия идеального контакта на поверхностях раздела $\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}$ α -ой и β -ой компонент композита, (1.37) – граничные условия на частях $\overset{\circ}{\Sigma}_1$ и $\overset{\circ}{\Sigma}_2$ внешней поверхности композита $\left(\overset{\circ}{\Sigma}_1 \cup \overset{\circ}{\Sigma}_2 = \partial \overset{\circ}{V} \right)$.

Решение задач нелинейной теории упругости с использованием универсальных моделей B_n ищется относительно поля вектора перемещений $u^k = u^k(X^i)$ и гидростатического давления $p(X^i)$, после нахождения которых

координаты произвольной точки композита вычисляются по формуле:

$$x^k(X^i) = \overset{\circ}{x}^k(X^i) + u^k(X^i).$$

1.4 Универсальные модели B_n определяющих соотношений для несжимаемых сред

1.4.1 Общее представление определяющих соотношений для моделей класса B_n

Тензор определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита упругих сред с конечными деформациями имеет сложный неявно-заданный вид и для модели B_n зависит – от гидростатического давления p , компонент градиента деформаций F^k_l и лагранжевых координат X^i (разрывным образом):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{0ij}(F^k_l, X^m) &= \overset{0}{\rho}(X^m) E^{0ijsq}(F^k_l) \psi_{sq}(G^{pr}, X^m), \\ \psi_{sq}(G^{pr}, X^m) &= \frac{\partial}{\partial G^{sq}} \psi(G^{pr}, X^m), \\ E^{0ijsq}(F^k_l) &= \sum_{\gamma, \omega=1}^3 E_{\gamma\omega}^0 \overset{0}{Q}_\gamma^i \overset{0}{Q}_\omega^j \overset{0}{Q}_\omega^s \overset{0}{Q}_\gamma^q, \\ G^{pr} &= \frac{1}{n-3} \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_\gamma^{n-3} \overset{0}{Q}_\gamma^p \overset{0}{Q}_\gamma^r, \\ (F^{-1})^{ij} &= \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_\gamma^{-1} \overset{\circ}{Q}_\gamma^i \overset{\circ}{Q}_\gamma^j. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Здесь обозначен $\psi(G^{pr}, X^m)$ – упругий потенциал, различный для каждого слоя композита, и поэтому зависящий явно от координат X^m , G^{pr} – компоненты

симметричного тензора энергетических мер деформации [36]. Остальные обозначения введены выше для моделей A_n сжимаемых сред.

1.4.2 Полулинейные модели B_n для несжимаемых сред

1.4.2.1 Общее представление полулинейных моделей B_n

Для несжимаемых твердых сплошных сред наиболее широко на практике используют полулинейные модели B_n [33]:

$$\mathbf{T} = -\frac{P}{n-III} \mathbf{G}^{-1} + \left(m + l_1 I_1 \left(\mathbf{G} \right) \right) \mathbf{E} + 2l_2 \mathbf{G}. \quad (1.39)$$

Здесь

$\mathbf{T}^{(n)}$ – энергетический тензор деформаций,

$\mathbf{G}^{(n)}$ – энергетическая мера деформаций,

$I_1 \left(\mathbf{G}^{(n)} \right)$ – первый инвариант тензора $\mathbf{G}^{(n)}$,

а l_1, l_2, m – упругие константы, различные для разных слоев композита.

Энергетические меры деформаций могут быть выражены через правый тензор искажений \mathbf{U}

$$\mathbf{G}^{(n)} = \frac{1}{n-III} \mathbf{U}^{n-III}, \quad n \neq III. \quad (1.40)$$

В свою очередь правый тензор искажений зависит от градиента деформации

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (1.41)$$

Таким образом, для тензора энергетической меры деформаций $\mathbf{G}^{(n)}$ может быть записана следующая формула:

$$\mathbf{G}^{(n)} = \frac{1}{n-III} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{\frac{n-III}{2}}, \quad n \neq III. \quad (1.42)$$

В этих моделях полагают, что

$$l_1 + 2l_2 = 0, \quad l_2 = -\left(\frac{\mu}{2}\right)(1-\beta)(n-III)^2, \quad m = \mu(1+\beta)(n-III), \quad (1.43)$$

где μ, β – новые независимые константы.

Отсюда получаем определяющее соотношение для $T^{(n)}$ [33]

$$\mathbf{T}^{(n)} = -\frac{P}{n-III} \mathbf{G}^{(n)-1} + \mu(n-III)^2 \left(\left(\frac{1+\beta}{n-III} + (1-\beta)I_1(\mathbf{G}^{(n)}) \right) \mathbf{E} - (1-\beta)\mathbf{G}^{(n)} \right). \quad (1.44)$$

Эти соотношения при $n=IV$ называют моделью Черных К.Ф., а при $n=V$ моделью Муни, которая в частном случае при $\beta=1$ приводит к модели Трелоара (неогуковской модели).

Для нахождения тензора Пиолы–Кирхгофа будем использовать соотношение

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} \right) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \quad (1.45)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений Коши.

Указанное соотношение для несжимаемых сред упрощается в связи с тем, что

$$\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} = 1. \quad (1.46)$$

В свою очередь общий вид связи между энергетическим тензором напряжений $T^{(n)}$ и тензором напряжений Коши T следующий:

$$\mathbf{T} = {}^4 \mathbf{E}^{(n)} \cdot \mathbf{T}^{(n)}, \quad (1.47)$$

где ${}^4 \mathbf{E}^{(n)}$ – обратный тензор энергетической эквивалентности.

Таким образом, имеем следующий вид связи между $T^{(n)}$ и тензором Пиолы–Кирхгофа \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^4 \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = {}^4 \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{T}, \quad {}^4 \mathbf{E}^0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^4 \mathbf{E}. \quad (1.48)$$

Формула для вычисления компонент тензора ${}^4 \mathbf{E}^0$ была представлена в системе (1.38).

1.4.2.2 Полулинейные модели классов B_I и B_V

Для пятой энергетической пары соотношение (1.38) упрощается, что позволяет выразить зависимость между тензором Пиолы–Кирхгофа и пятым энергетическим тензором деформаций без использования вычисления тензора энергетической эквивалентности:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \left(\mathbf{F} \cdot \overset{V}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^T \right). \quad (1.49)$$

Энергетические меры деформаций явно выражаются через тензор градиента деформаций

$$\overset{V}{\mathbf{G}} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (1.50)$$

$$\overset{V}{\mathbf{G}}^{-1} = 2 \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T},$$

$$\overset{V}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{2} 2 \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T} + 4\mu \left(\left(\frac{1+\beta}{2} + (1-\beta) I_1 \left(\overset{V}{\mathbf{G}} \right) \right) \mathbf{E} - (1-\beta) \overset{V}{\mathbf{G}} \right). \quad (1.51)$$

Подставляя выражение (1.50) в (1.51), а полученную формулу в (1.49), получим определяющие соотношения

$$\mathbf{P} = -p \mathbf{F}^{-1} + 4\mu \left(\left(\frac{1+\beta}{2} + (1-\beta) I_1 \left(\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \right) \right) \mathbf{F}^T - (1-\beta) \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \right). \quad (1.52)$$

Последнее соотношение используем для расчетов диаграмм деформирования модели B_V .

Приведем также определяющие соотношения для первой энергетической пары

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \left(\mathbf{F}^{-1T} \cdot \overset{I}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right), \quad (1.53)$$

$$\overset{I}{\mathbf{T}} = \frac{p}{2} \mathbf{G}^I + \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_{\gamma} I_{\gamma G} \left(\overset{I}{\mathbf{G}} \right), \quad (1.54)$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-III} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{\frac{(n-III)}{2}} \Rightarrow \overset{I}{\mathbf{G}}^{-1} = -2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (1.55)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1T} \cdot \overset{I}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = -p\mathbf{E} + \mathbf{F}^{-1T} \cdot \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_{\gamma} I_{\gamma G} \left(\overset{I}{\mathbf{G}} \right) \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (1.56)$$

$$\overset{I}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \mathbf{G}^I + 4\mu \left(\left(-\frac{1+\beta}{2} + (1-\beta) I_1 \left(\overset{I}{\mathbf{G}} \right) \right) \mathbf{E} - (1-\beta) \overset{I}{\mathbf{G}} \right), \quad (1.57)$$

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T} \cdot \left(4\mu \left(\left(-\frac{1+\beta}{2} + (1-\beta) I_1 \left(\overset{I}{\mathbf{G}} \right) \right) \mathbf{E} - (1-\beta) \overset{I}{\mathbf{G}} \right) \right) \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (1.58)$$

Таким образом, для I и V энергетических пар определяющие соотношения могут быть выражены явно через тензор градиента деформаций.

1.4.2.3 Полулинейные модели классов B_{II} и B_{IV}

Определяющие соотношения для модели II и IV энергетических пар не могут быть выражены так же просто, как для I и V

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{E}} \cdot \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_{\gamma} I_{\gamma G} \left(\overset{(n)}{\mathbf{G}} \right), \quad (1.59)$$

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-1} + \overset{(n)}{\mathbf{E}} \cdot \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_{\gamma} I_{\gamma G} \left(\overset{(n)}{\mathbf{G}} \right), \quad (1.60)$$

$$\overset{IV}{\mathbf{T}} = -p\overset{IV}{\mathbf{G}}^{-1} + \mu \left(\left((1+\beta) + (1-\beta) I_1 \left(\overset{IV}{\mathbf{G}} \right) \right) \mathbf{E} - (1-\beta) \overset{IV}{\mathbf{G}} \right), \quad (1.61)$$

$$\overset{IV}{\mathbf{G}} = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{1/2},$$

$$\overset{II}{\mathbf{T}} = p\overset{II}{\mathbf{G}}^{-1} + \mu \left(\left(-(1+\beta) + (1-\beta) I_1 \left(\overset{II}{\mathbf{G}} \right) \right) \mathbf{E} - (1-\beta) \overset{II}{\mathbf{G}} \right), \quad (1.62)$$

$$\overset{II}{\mathbf{G}} = -(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1/2}.$$

Компоненты тензора энергетической эквивалентности при этом вычисляются через собственные значения и компоненты векторов собственного базиса.

$$\overset{(n)}{E}{}^{0ijkl}(F^k{}_l) = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \overset{\circ}{E}_{\alpha\beta} Q_\alpha^i Q_\beta^j Q_\beta^k Q_\alpha^l, \quad (1.63)$$

где для вычисления $\overset{\circ}{E}_{\alpha\beta}$ воспользуемся формулами (1.7) (при $\left(\overset{\circ}{\rho}/\rho\right)=1$).

Для вычисления компонент тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{G}}^{-1}$ для II и IV энергетических пар так же необходимо найти собственные значения и компоненты векторов собственного базиса.

1.5 Метод асимптотического осреднения для сжимаемых слоистых композиционных материалов с конечными деформациями

1.5.1 Асимптотическое решение задачи нелинейной теории упругости для сжимаемых сред

Идея асимптотического метода осреднения основывается на комбинировании решения локальных задач, определенных на уровне структурной неоднородности материала, с решением глобальной задачи (макроуровень) для эквивалентной однородной среды.

Рассмотрим случай слоистого композита, который в отсчетной конфигурации представляет собой систему параллельных слоев, ортогональных к направлению OX^3 , и периодически повторяющихся таким образом, что можно ввести ячейку периодичности (ЯП) – набор из конечного числа N слоев суммарной толщиной ℓ .

Использование асимптотического метода предполагает построения асимптотических разложений функций, входящих в задачу, по малому параметру, равному отношению характерного размера ячейки периодичности к характерному размеру всего композиционного материала.

Вводим малый параметр $\kappa = \ell/L \ll 1$, как отношение характерного размера ℓ ЯП к характерному размеру L всего композита (размеры определены для $\overset{\circ}{K}$), а также вводим локальные ξ^i лагранжевы координаты в $\overset{\circ}{K}$, которые связаны с X^i следующими соотношениями:

$$\xi^i = \frac{\bar{X}^i}{\kappa}, \quad \bar{X}^i = \frac{X^i}{L}. \quad (1.64)$$

Полагается, что локальные координаты в ЯП изменяются в диапазоне $-\frac{1}{2} \leq \xi^i \leq \frac{1}{2}$. В силу периодичности структуры композита его плотность ρ и тензор определяющих соотношений $\overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}$ можно рассматривать как периодические функции локальных координат $\overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(F^k_l, \xi^m)$.

Решение задачи (1.1) – (1.5) относительно вектора перемещений ищется в виде квазипериодической функции координат, т.е. периодической функцией локальных лагранжевых координат и зависящей от глобальных лагранжевых координат:

$$u^k = u^k(X^i, \xi), \quad u^k(X^i, \xi) = u^k(X^i, \xi + a^j), \quad (1.65)$$

где a^j – произвольный целочисленный вектор, примем далее, что $a^j = 1$.

Дифференцирование квазипериодических функций $f^k(X^i, Z^j, t)$ осуществляется по формальным правилам дифференцирования сложной функции и тогда с учетом (1.64) имеем:

$$\overset{\circ}{\nabla}_i u^k = u^k_{,i} + \frac{1}{\kappa} u^k_{/3} \delta_{i3}. \quad (1.66)$$

Здесь и далее применяется сокращение для частных производных по глобальным и локальным координатам:

$$u^k_{,i} = \frac{\partial}{\partial X^i} u^k(X^l, \xi), \quad u^k_{/3} = \frac{\partial}{\partial \xi} u^k(X^l, \xi), \quad (1.67)$$

$$u^k(X^i, \xi) = u^{(0)k}(X^i) + \kappa u^{(1)k}(X^i, \xi) + o(\kappa). \quad (1.68)$$

Представление (1.67) означает, что в данной задаче допускаемые перемещения композита с периодической структурой, могут быть конечными только на «глобальных» расстояниях порядка L , а на расстояниях порядка ℓ , т.е. в рамках каждой ЯП, допускаются только малые перемещения порядка $O(\kappa)$, однако деформации в ЯП могут быть уже конечными.

Подставляем асимптотическое разложение (1.67) в кинематическое соотношение (1.3) с учетом (1.66):

$$\begin{aligned} F^k_{/l} &= \delta_l^k + \overset{\circ}{\nabla}_{/l} u^k = \\ &= \delta_l^k + \overset{\circ}{\nabla}_{/l} \left(u^{(0)k}(X^i) + \kappa u^{(1)k}(X^i, \xi) + \kappa^2 u^{(2)k}(X^i, \xi) + o(\kappa^2) \right) = \\ &= \delta_l^k + u^{(0)k}_{,l} + \kappa u^{(1)k}_{,l} + u^{(1)k}_{/3} \delta_{l3} + \kappa u^{(2)k}_{/3} \delta_{l3} + o(\kappa) = \\ &= \left(\delta_l^k + u^{(0)k}_{,l} + u^{(1)k}_{/3} \delta_{l3} \right) + \kappa \left(u^{(1)k}_{,l} + u^{(2)k}_{/3} \delta_{l3} \right) + o(\kappa). \end{aligned} \quad (1.69)$$

находим асимптотическое разложение для градиента деформации:

$$F^k_{/l} = F^{(0)k}_{/l}(X^i, \xi) + \kappa F^{(1)k}_{/l}(X^i, \xi) + o(\kappa), \quad (1.70)$$

$$F^{(0)k}_{/l}(X^i, \xi^l) = \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l} + u^{k(1)}_{/3} \delta_{l3}, \quad (1.71)$$

$$F^{(1)k}_{/l} = u^{k(1)}_{,l} + u^{k(2)}_{/3} \delta_{l3}. \quad (1.72)$$

Аналогичным образом находим асимптотическое разложение определяющих соотношений и тензора Пиолы-Кирхгофа:

$$P^{ij} = P^{(0)ij}(X^k, \xi) + \kappa P^{(1)ij}(X^k, \xi) + o(\kappa). \quad (1.73)$$

Для модели A_n :

$$P^{(0)ij} = \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{(0)k}_{/l}, \xi), \quad (1.74)$$

$$P^{(1)ij} = \frac{\partial}{\partial F^{(0)k}_{/l}} \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{(0)k}_{/l}, \xi) F^{(1)k}_{/l}. \quad (1.75)$$

После подстановки разложения (1.73) в уравнение равновесия, условия идеального контакта и граничные условия, с учетом формул для ковариантной

производной (1.66), получаем асимптотическое разложение уравнений равновесия и граничных условий:

$$\frac{1}{\kappa} P^{(0)ij} \delta_{3i} + (P^{(0)ij} + P^{(1)ij} \delta_{3i} + \overset{\circ}{\rho} f^j) + \kappa (P^{(1)ij} + P^{(2)ij} \delta_{3i}) + o(\kappa) = 0, \quad (1.76)$$

$$[P^{(0)3j}] + \kappa [P^{(1)3j}] + o(\kappa) = 0, \quad [u^{(0)k}] + \kappa [u^{(1)k}] + o(\kappa) = 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.77)$$

$$P^{(0)3j} + \kappa P^{(1)3j} + o(\kappa) = t_e^j, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad (1.78)$$

$$u^{(0)k} + \kappa u^{(1)k} + o(\kappa) = u_e^k, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2. \quad (1.79)$$

Таким образом получены все необходимые асимптотические разложения.

1.5.2 Локальные задачи нелинейной теории упругости для сжимаемых сред

Выведем рекуррентную последовательность локальных задач L_κ нелинейной упругости. Для этого в разложениях (1.76)–(1.77) приравниваем члены при одинаковых степенях κ к нулю.

Задача L_0 для модели A_n примет следующий вид:

$$P^{(0)3j} \delta_{3j} = 0, \quad (1.80)$$

$$P^{(0)ij} = \overset{(n)}{\mathcal{F}}^{0ij}(F^{(0)k}_l, \xi), \quad (1.81)$$

$$F^{(0)k}_l(X^i, \xi^l) = \bar{F}_l^k + u^{(1)k} \delta_{3l}, \quad (1.82)$$

$$\overset{\circ}{n}_i [P^{(0)ij}] = 0, \quad [u^{(1)k}] = 0, \quad \xi^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.83)$$

$$\langle u^{(1)k} \rangle = 0, \quad (1.84)$$

$$\left[[u^{(1)k}] \right]_i = 0. \quad (1.85)$$

Здесь вводится операция осреднения по ЯП $\overset{0}{V}_\xi$:

$$\langle u^{(1)k} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u^{(1)k} d\xi. \quad (1.86)$$

Наличие условия (1.84) в задачах L_0 вызвано требованием единственности задачи на ячейке и делает эту задачу интегро-дифференциальной. Условие (1.85) означает периодичность неизвестных функций на границе ЯП:

$$\left[\left[u^{(1)k} \right] \right]_3 = u^{(1)k} \Big|_{\xi^i=0.5} - u^{(1)k} \Big|_{\xi^i=-0.5} = 0.$$

Задача L_0 рассматривается относительно неизвестных перемещений $u^{(1)k}$. Компоненты осредненного тензора градиента деформаций:

$$\bar{F}_l^k = \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l}, \quad (1.87)$$

рассматриваются как «входные данные» локальной задачи L_0 .

Локальная задача L_1 для модели A_n имеет вид:

$$P^{(0)ij}_{,i} + P^{(1)ij}_{/3} \delta_{i3} + \overset{\circ}{\rho} f^j = 0, \quad (1.88)$$

$$P^{(1)ij} = \frac{\partial}{\partial F_l^{k(0)}} \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{(0)k}_{/l}, \xi) F^{(1)k}_{/l}, \quad (1.89)$$

$$F^{(1)k}_{/l} = u^{(1)k}_{,l} + u^{(2)k}_{/3} \delta_{l3}, \quad (1.90)$$

$$\overset{\circ}{n}_i [P^{(1)ij}] = 0, \quad [u^{(2)k}] = 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.91)$$

$$\langle u^{(2)k} \rangle = 0, \quad (1.92)$$

$$\left[\left[u^{(2)k} \right] \right]_i = 0. \quad (1.93)$$

Эта система уравнений рассматривается относительно перемещений $u^{(2)k}$ и относительно них является линейной.

1.5.3 Осредненная задача нелинейной теории упругости для сжимаемого композиционного материала

В силу периодичности функций на ЯП имеет место следующее соотношение

$$\langle P^{(0)3j} \rangle_{/3} = \int_{-0.5}^{0.5} P^{(0)3j} d\xi = 0. \quad (1.94)$$

Осредняя систему уравнений (1.81), (1.88), а также (1.82), с учетом соотношения (1.94), получаем осредненную задачу нелинейной упругости для сжимаемого композиционного материала композита:

$$\langle P^{(0)ij} \rangle_{,i} + \langle \overset{\circ}{\rho} f^j \rangle = 0, \quad (1.95)$$

$$\langle P^{(0)ij} \rangle = \langle \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{(0)k}_{/l}, \xi) \rangle, \quad (1.96)$$

$$F^{(0)k}_{/l}(X^i, \xi) = \langle F^k_{/l} \rangle + u^{(1)k}_{//}, \quad (1.97)$$

$$\overset{\circ}{n}_i \langle P^{(0)ij} \rangle = \langle t_e^j \rangle, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad u^{(0)k} = \langle u_e^i \rangle, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2. \quad (1.98)$$

В этой задаче учтено, что осредненный градиент деформации $\langle F^{(0)k}_{/l} \rangle$, в силу периодичности функций $u^{(1)k}$, совпадает с $\bar{F}^k_{/l}$:

$$\langle F^k_{/l} \rangle = \bar{F}^k_{/l}. \quad (1.99)$$

Действительно,

$$\langle F^{(0)k}_{/l} \rangle = \langle \bar{F}^k_{/l} + u^{(1)k}_{/3} \delta_{3l} \rangle = \bar{F}^k_{/l} + \langle u^{(1)k}_{/3} \rangle \delta_{3l} = \bar{F}^k_{/l}, \quad (1.100)$$

т.к. $\langle u^{(1)k}_{/3} \rangle = 0$.

В задаче (1.95) – (1.98) предполагается, что перемещение $u^{(1)k}$, являющееся решением задачи L_0 , может быть представлено как функция локальных координат и «входных данных задачи» – осредненного градиента

$$u^{(1)k} = u^{(1)k}(\bar{F}^k_{/l}, \xi). \quad (1.101)$$

Осредненные определяющие соотношения композита, записанные в неявной форме, определяются путем подстановки выражения (1.101) в (1.97) и (1.96):

$$\langle P^{(0)ij} \rangle = \bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(\bar{F}_l^k), \quad (1.102)$$

$$\bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(\bar{F}_l^k) = \langle \mathcal{F}^{(n)0ij}(\bar{F}_l^k + u^{(1)k}(\bar{F}_l^k, \xi)_{,3} \delta_{3l}) \rangle. \quad (1.103)$$

1.6 Метод асимптотического осреднения для несжимаемых слоистых композиционных материалов с конечными деформациями

1.6.1 Асимптотическое решение задачи нелинейной теории упругости для несжимаемых сред

Для слоистого композита с несжимаемыми слоями плотность $\bar{\rho}$ и тензор определяющих соотношений $\bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}$ в системе (1.38) можно рассматривать как периодические функции локальной координаты $\bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(F_l^k, \xi)$.

Решение задач (1.32) – (1.37) относительно вектора перемещений и гидростатического давления ищется в виде асимптотических разложений по малому параметру

$$u^k(X^i, \xi) = u^{(0)k}(X^i) + \kappa u^{(1)k}(X^i, \xi) + o(\kappa), \quad (1.104)$$

$$p = p^{(0)}(X^m, \xi) + \kappa p^{(1)}(X^m, \xi) + o(\kappa). \quad (1.105)$$

Подставляем асимптотическое разложение (1.104) в кинематическое соотношение (1.34) с учетом (1.66), находим асимптотическое разложение для градиента деформации:

$$F_l^k = F^{(0)k}_l(X^i, \xi) + \kappa F^{(1)k}_l(X^i, \xi) + o(\kappa), \quad (1.106)$$

$$F_{\ l}^{k(0)}(X^i, \xi^l) = \delta_l^k + u^{k(0)}_{\ ,l} + u^{k(1)}_{/3} \delta_{l3}, \quad (1.107)$$

$$F_{\ l}^{k(1)} = u^{k(1)}_{\ ,l} + u^{k(2)}_{/3} \delta_{l3}. \quad (1.108)$$

Аналогичным образом находим асимптотическое разложение определяющих соотношений и тензора Пиолы-Кирхгофа в модели B_n :

$$P^{ij} = P^{(0)ij}(X^k, \xi) + \kappa P^{(1)ij}(X^k, \xi) + o(\kappa), \quad (1.109)$$

$$P^{(0)ij} = -p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} + \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{(0)k}_{\ l}, \xi), \quad (1.110)$$

$$P^{(1)ij} = -p^{(0)}(F^{-1})^{(1)ij} - p^{(1)}(F^{-1})^{(0)ij} + \frac{\partial}{\partial F^{(0)k}_{\ l}} \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{(0)k}_{\ l}, \xi) F^{(1)k}_{\ l}. \quad (1.111)$$

После подстановки разложения (1.109) в уравнение равновесия, условия идеального контакта и граничные условия, с учетом формул для ковариантной производной (1.66), получаем асимптотическое разложение уравнений равновесия и граничных условий:

$$\frac{1}{\kappa} P^{(0)ij}_{/3} \delta_{3i} + (P^{(0)ij}_{\ ,i} + P^{(1)ij}_{/3} \delta_{3i} + \overset{\circ}{\rho} f^j) + \kappa (P^{(1)ij}_{\ ,i} + P^{(2)ij}_{/3} \delta_{3i}) + o(\kappa) = 0, \quad (1.112)$$

$$[P^{(0)3j}] + \kappa [P^{(1)3j}] + o(\kappa) = 0, \quad [u^{(0)k}] + \kappa [u^{(1)k}] + o(\kappa) = 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.113)$$

$$P^{(0)3j} + \kappa P^{(1)3j} + o(\kappa) = t_e^j, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad (1.114)$$

$$u^{(0)k} + \kappa u^{(1)k} + o(\kappa) = u_e^k, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2. \quad (1.115)$$

Подставив разложение (1.106) в условие несжимаемости (1.35), получим

$$\det(F^{(0)k}_{\ l}) + \frac{\partial \det(F^{(0)k}_{\ l})}{\partial F^{(0)ij}} \kappa F^{(1)ij} + o(\kappa) = 1. \quad (1.116)$$

Таким образом, получены все необходимые асимптотические разложения.

1.6.2 Локальные задачи нелинейной теории упругости для несжимаемых сред

Выведем рекуррентную последовательность локальных задач L_κ нелинейной упругости для несжимаемых сред. Для этого в разложениях (1.112) – (1.113) приравниваем члены при одинаковых степенях κ к нулю.

Задача L_0 для модели B_n примет следующий вид:

$$P^{(0)3j}{}_{/3} = 0, \quad (1.117)$$

$$P^{ij(0)} = -p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} + \mathcal{F}^{(n)0ij}(F_l^{k(0)}, \xi), \quad (1.118)$$

$$\det(F^{(0)k}{}_l) = 1, \quad (1.119)$$

$$F_l^{k(0)}(X^i, \xi) = \bar{F}_l^k + u^{k(1)}{}_{/3} \delta_{l3}, \quad (1.120)$$

$$[P^{3j(0)}] = 0, [u^{k(1)}] = 0, \xi = \xi_\alpha, \alpha = 1, \dots, n-1, \quad (1.121)$$

$$\langle u^{(1)k} \rangle = 0, \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}, \quad (1.122)$$

$$\left[[u^{k(1)}] \right]_3 = 0. \quad (1.123)$$

Задачу L_0 рассмотрим относительно неизвестных перемещений $u^{k(1)}$, при этом средний тензор-градиент \bar{F}_l^k и \bar{p} – среднее давление являются «входными данными» локальной задачи L_0 .

Локальная задача L_1 для модели B_n имеет вид:

$$P^{(0)ij}{}_{,i} + P^{(1)ij}{}_{/3} \delta_{i3} + \rho f^j = 0, \quad (1.124)$$

$$P^{(1)ij} = -p^{(0)}(F^{-1})^{(1)ij} - p^{(1)}(F^{-1})^{(0)ij} + \frac{\partial}{\partial F^{(0)k}{}_l} \mathcal{F}^{(n)0ij}(F_l^{(0)k}, \xi) F_l^{(1)k}, \quad (1.125)$$

$$F_l^{(1)k} = u^{(1)k}{}_{,l} + u^{(2)k}{}_{/3} \delta_{l3}, \quad (1.126)$$

$$\frac{\partial \det(F_r^{p(0)})}{\partial F_l^{k(0)}} F_l^{(1)k} = 0, \quad (1.127)$$

$$[P^{(1)3j}] = 0, [u^{(2)k}] = 0, \xi = \xi_\alpha, \alpha = 1 \dots n-1, \quad (1.128)$$

$$\langle u^{(2)k} \rangle = 0, \quad \langle p^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle u^{(2)k} \rangle_3 = 0. \quad (1.129)$$

Также как и для системы (1.88) – (1.93), система уравнений (1.124) – (1.129) рассматривается относительно перемещений $u^{(2)k}$, а также относительно гидростатического давления $p^{(1)}$ и относительно них является линейной.

1.6.3 Осредненная задача нелинейной теории упругости для несжимаемого композиционного материала

Осредняя систему уравнений (1.118), (1.124), (1.120) с учетом $\langle P^{3j(0)} \rangle_3 = P^{3j(0)}|_{\xi=0.5} - P^{3j(0)}|_{\xi=-0.5} = 0$, получим:

$$\langle P^{(0)ij} \rangle_{,i} + \langle \overset{\circ}{\rho} f^j \rangle = 0, \quad (1.130)$$

$$\langle P^{(0)ij} \rangle = -\langle p^{(0)} (F^{-1})^{(0)ij} \rangle + \langle \overset{(n)}{\mathcal{F}}^{0ij}(F_l^{k(0)}, \xi) \rangle, \quad (1.131)$$

$$\langle \det(F_l^{(0)k}(X^i, \xi)) \rangle = 1, \quad (1.132)$$

$$\langle F_l^{(0)k} \rangle = \delta_l^k + u_{,l}^{(0)k}, \quad (1.133)$$

$$\overset{\circ}{n}_i \langle P^{(0)ij} \rangle = \langle t_e^j \rangle, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad u^{(0)k} = \langle u_e^i \rangle, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2. \quad (1.134)$$

Осредненный градиент деформации $\langle F_l^k \rangle$, в силу периодичности функций $u^{(1)k}$, совпадает с \bar{F}_l^k , как и для сжимаемых композитов:

$$\langle F_l^k \rangle = \bar{F}_l^k. \quad (1.135)$$

Вычислим детерминант градиента деформации $F_l^{(0)k}$.

$$\det(F_l^{(0)k}) = \det(\bar{F}_l^k + u_{,3}^{(1)k} \delta_{l3}) = \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 & \bar{F}_3^1 + u_{,3}^{1(1)} \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 & \bar{F}_3^2 + u_{,3}^{2(1)} \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 & \bar{F}_3^3 + u_{,3}^{3(1)} \end{pmatrix}. \quad (1.136)$$

Вычисляя детерминант по третьему столбцу получаем линейную дифференциальную форму

$$\begin{aligned} \det(F^{(0)k}_l) = & \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} (\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}) - \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} (\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}) + \\ & + \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} (\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) \end{aligned} \quad (1.137)$$

Осредним теперь соотношение (1.137) по ЯП и примем во внимание, что детерминанты размером два в этом выражении от ξ не зависят, а $\langle u^{j(1)}_{/3} \rangle = u^{j(1)} \Big|_{\xi=0.5} - u^{j(1)} \Big|_{\xi=-0.5} = 0$ в силу периодичности $u^{j(1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \det(F^{(0)k}_l) \rangle = & \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \langle \bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3} \rangle - \\ & - \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \langle \bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3} \rangle + \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} \langle \bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3} \rangle = \\ = & \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \bar{F}_3^1 - \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \bar{F}_3^2 + \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} \bar{F}_3^3 = \det(\bar{F}_l^k) \end{aligned} \quad (1.138)$$

В силу несжимаемости компонент композиционного материала $\det(F^{(0)k}_l) = 1$, поэтому с учетом (1.138) получаем

$$\det(\bar{F}_l^k) = 1, \quad (1.139)$$

то есть композиционный материал в целом является несжимаемым, если все его слои являются несжимаемыми.

Кроме того, из соотношения (1.139) также следует, что в системе из $N+1$ уравнений

$$\det(F^{(0)k}_l(X^i, \xi)) = 1, \quad \xi_\alpha \leq \xi \leq \xi_{\alpha+1}, \quad \alpha = \overline{0, N-1}, \quad (1.140)$$

$$\det(\bar{F}_l^k) = 1,$$

независимыми являются только N уравнений.

1.6.4 Общее представление эффективных определяющих соотношений для композита с помощью метода асимптотического осреднения

В задаче (1.130) – (1.134) предполагается, что перемещение $u^{(1)k}$, давление $p^{(0)}$ и градиент нулевого приближения $F^{(0)k}_l$, являющиеся решением задачи L_0 , могут быть представлены как функции локальных координат и «входных данных задачи» – среднего градиента \bar{F}_l^k и среднего давления \bar{p}

$$u^{(1)k} = u^{(1)k}(\bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi), \quad (1.141)$$

$$p^{(0)} = p^{(0)}(\bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi), \quad (1.142)$$

$$F_l^{k(0)} = F_l^{k(0)}(\bar{F}_s^m, \bar{p}, \xi). \quad (1.143)$$

Осредненные определяющие соотношения композита, записанные в неявной форме, определяются путем подстановки выражения (1.141) в (1.131) и (1.133):

$$\langle P^{ij(0)} \rangle = -\langle p^{(0)} (F^{-1})^{(0)ij} \rangle + \bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(F_l^{k(0)}, \xi), \quad (1.144)$$

$$\bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(\bar{F}_l^k) = \left\langle \mathcal{F}^{(n)0ij}(\bar{F}_l^k + u^{k(1)}(\bar{F}_l^k, \xi)_{/3} \delta_{l3}, \xi) \right\rangle. \quad (1.145)$$

Компоненты обратного тензора $(F^{-1})^{(0)ij}$ могут быть вычислены в явном виде через алгебраические дополнения, а также учитывая то, что $\det(F_l^{k(0)}) = 1$:

$$\begin{aligned}
(F^{-1})^{(0)11} &= \bar{F}_2^2 (\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) - \bar{F}_2^3 (\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}), \\
(F^{-1})^{(0)22} &= \bar{F}_1^1 (\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) - \bar{F}_1^3 (\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}), \\
(F^{-1})^{(0)33} &= \bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2 - \bar{F}_1^2 \bar{F}_2^1, \\
(F^{-1})^{(0)21} &= -\bar{F}_1^2 (\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) + \bar{F}_1^3 (\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}), \\
(F^{-1})^{(0)12} &= -\bar{F}_2^1 (\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) + \bar{F}_2^3 (\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}), \\
(F^{-1})^{(0)31} &= \bar{F}_1^2 \bar{F}_2^3 - \bar{F}_2^2 \bar{F}_1^3, \\
(F^{-1})^{(0)13} &= \bar{F}_2^1 (\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}) - \bar{F}_2^2 (\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}), \\
(F^{-1})^{(0)32} &= -\bar{F}_1^1 \bar{F}_2^3 + \bar{F}_1^3 \bar{F}_2^1, \\
(F^{-1})^{(0)23} &= -\bar{F}_1^1 (\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}) + \bar{F}_1^2 (\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3})
\end{aligned} \tag{1.146}$$

Часть этих компонент $(F^{-1})^{(0)ij}$ не зависят от координаты ξ и совпадают с соответствующими компонентами обратного осредненного тензора $(\bar{F}^{-1})^{ij}$, а остальные компоненты $(F^{-1})^{(0)ij}$ являются линейными функциями от частных производных $u^{(1)k}_{/3}$. Тогда при осреднении компонент из первой группы, умноженных на $p^{(0)}(X^k, \xi)$, получаем

$$\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} \rangle = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}^{-1})^{ij}. \tag{1.147}$$

При осреднении компонент из второй группы, умноженных на $p^{(0)}(X^k, \xi)$ получаем выражения следующей структуры:

$$\begin{aligned}
\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)23} \rangle &= \langle p^{(0)}(\bar{F}_1^2 (\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}) - \bar{F}_1^1 (\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3})) \rangle = \\
&= \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}_1^2 \bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1 \bar{F}_3^2) + \langle p^{(0)} u^{1(1)}_{/3} \rangle \bar{F}_1^2 - \langle p^{(0)} u^{2(1)}_{/3} \rangle \bar{F}_1^1
\end{aligned} \tag{1.148}$$

Очевидно, что $(\bar{F}_1^2 \bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1 \bar{F}_3^2) = (\bar{F}^{-1})^{23}$. Положим далее, что ЯП обладает симметрией относительно плоскости $\xi = 0$, тогда в силу периодичности функции $p^{(0)}$, $u^{(1)k}$ являются четными по координате ξ : $p^{(0)}(X^k, \xi) = p^{(0)}(X^k, -\xi)$,

$u^{k(1)}(X^k, \xi) = u^{k(1)}(X^k, -\xi)$. Производные $u^{(1)k}_{/3}$ от четной функции являются нечетными: $u^{k(1)}_{/3}(X^k, \xi) = -u^{k(1)}_{/3}(X^k, -\xi)$.

Нечетными будут и произведения функций $p^{(0)}(X^k, \xi)u^{(1)k}_{/3}(X^k, \xi) = -p^{(0)}(X^k, -\xi)u^{(1)k}_{/3}(X^k, -\xi)$. Тогда интегралы по всей ЯП от нечетных функций обращаются в ноль

$$\langle p^{(0)}u^{(1)k}_{/3} \rangle = \int_{-0.5}^0 p^{(0)}u^{(1)k}_{/3} d\xi + \int_0^{0.5} p^{(0)}u^{(1)k}_{/3} d\xi = 0. \quad (1.149)$$

Следовательно, в выражениях вида (1.148) все слагаемые, содержащие множители $\langle p^{(0)}u^{(1)k}_{/3} \rangle$, равны нулю и получаем

$$\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)23} \rangle = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}_1^2 \bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1 \bar{F}_3^2) = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}^{-1})^{23}. \quad (1.150)$$

Аналогично преобразуются все остальные компоненты тензора $\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} \rangle$ второй группы компонент:

$$\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} \rangle = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}^{-1})^{ij}. \quad (1.151)$$

Объединяя формулы (1.147) и (1.151), получаем, что для всех компонент обратного тензора $(F^{-1})^{(0)ij}$ имеет место соотношение (1.151).

Тогда осредненные определяющие соотношения (1.145) для композиционного материала можно записать в следующем виде

$$\langle P^{ij(0)} \rangle = -\bar{p}(\bar{F}^{-1})^{ij} + \bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(F^k_{/i}{}^{(0)}, \xi), \quad \bar{p} = \langle p^{(0)} \rangle \quad (1.152)$$

то есть осредненные соотношения имеют стандартный вид для несжимаемых упругих сред, ввиду наличия слагаемого с гидростатическим осредненным давлением, хотя, в отличие от исходных компонент композита, соответствуют нелинейно-упругой анизотропной гомогенизированной среде.

Формула (1.118) позволяет записать представление определяющих соотношений для эффективного тензора истинных напряжений Коши $\bar{T}^{ij} = \bar{F}^{im} \langle P^{mj(0)} \rangle$ в следующем виде:

$$\bar{T}^{ij} = -\bar{p}\delta^{ij} + \bar{\mathcal{F}}^{(n)ij}(\bar{F}_l^k), \quad \bar{\mathcal{F}}^{(n)ij}(\bar{F}_l^k) = \bar{F}^{im} \bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(\bar{F}_l^k). \quad (1.153)$$

Выражение (1.153) – представление определяющих соотношений композита в виде связи тензора напряжений Коши \bar{T}^{ij} , осредненного градиента деформации \bar{F}_l^k и среднего давления \bar{p} .

2 Разработка эффективных определяющих соотношений для сжимаемых трансверсально-изотропных композитов

2.1 Решение локальной задачи нулевого приближения для сжимаемых материалов

Рассмотрим локальную задачу (1.80) – (1.85) для сжимаемого композита:

$$P^{(0)3j} /_3 = 0 \quad (2.1)$$

$$P^{(0)ij} = \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{(0)k} /_l, \xi) \quad (2.2)$$

$$F^{(0)k} /_l(X^i, \xi) = \bar{F}_l^k + u^{(1)k} /_3 \delta_{l3} \quad (2.3)$$

$$[P^{(0)3j}] = 0, \quad [u^{(1)k}] = 0, \quad \xi = \xi_\alpha, \quad \alpha = 1 \dots n-1 \quad (2.4)$$

$$\langle u^{(1)k} \rangle = 0 \quad (2.5)$$

$$\left[\left[u^{(1)k} \right] \right]_3 = 0 \quad (2.6)$$

Поставленная задача является нелинейной, но одномерной – в ней все функции зависят только от ξ . Тогда можно найти формальное решение этой задачи.

Интегрируя уравнения равновесия (2.1), можно сделать вывод о том, что напряжения $P^{3j(0)}$ постоянны в ЯП:

$$P^{3j(0)} = C^j = const \quad (2.7)$$

где C^j – постоянные интегрирования.

Из уравнения (2.3) следует, что из девяти компонент градиента деформаций $F_l^{k(0)}$ от координаты ξ зависят только три компоненты:

$$F_3^{k(0)} = \bar{F}_3^k + u^{k(1)} /_3 \quad (2.8)$$

а остальные шесть совпадают с компонентами осредненного градиента:

$$F_L^{k(0)} = \bar{F}_L^k, \quad L = 1, 2$$

Тогда, подставляя (2.7) в (2.2), будет получена система трех нелинейных алгебраических уравнений, которую можно рассматривать относительно трех компонент $F_3^{k(0)}$:

$$C^j = \mathcal{F}^{03j(n)}(F_3^{k(0)}, \bar{F}_L^k, \xi) \quad (2.9)$$

Далее записывается формальное решение этой системы в виде

$$F_3^{k(0)} = \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi) \quad (2.10)$$

Используя выражение (2.8), получается система трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно перемещений $u^{k(1)}$

$$\bar{F}_3^k + u^{k(1)}_{/3} = \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi) \quad (2.11)$$

которая легко интегрируется

$$u^{k(1)} = \int_{-0.5}^{\xi} \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) d\xi - \bar{F}_3^k \xi + B^k \quad (2.12)$$

где B^k – константы интегрирования.

Условия (2.4) идеального контакта для функций (2.7) и (2.8) автоматически выполняются.

Подставляя выражение (2.12) в условие нормировки, будут найдены константы B^k :

$$B^k = \left\langle \int_{-0.5}^{\xi} \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) d\xi \right\rangle \quad (2.13)$$

После подстановки выражения (2.12) в условие периодичности (2.6), будет получено следующее уравнение

$$\left\langle \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) \right\rangle = \bar{F}_3^k \quad (2.14)$$

которое можно рассматривать как нелинейное алгебраическое уравнение относительно констант C^j .

Записывается формальное решение этого уравнения следующим образом:

$$C^j = \mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k) \quad (2.15)$$

Тогда из (2.3), (2.12) и (2.15) находится соотношение между градиентом $F_l^{k(0)}$ и осредненным градиентом \bar{F}_j^k :

$$F_l^{k(0)} = \bar{F}_l^k + (\mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_l^k), \bar{F}_l^k, \xi) - \bar{F}_3^k) \delta_{l3} \quad (2.16)$$

Подставляя выражение (2.16) в (2.2), и интегрируя его по ЯП, получены искомые эффективные определяющие соотношения для слоистого композита

$$\bar{P}^{ij} = \bar{\mathcal{F}}^{0ij}(\bar{F}_m^k) \quad (2.17)$$

где обозначены средние напряжения и осредненная функция определяющих соотношений

$$\bar{P}^{ij} = \langle P^{ij(0)} \rangle \quad (2.18)$$

$$\bar{\mathcal{F}}^{0ij}(\bar{F}_m^k) = \langle \mathcal{F}^{0ij}(\bar{F}_l^k + (\mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_l^k), \bar{F}_l^k, \xi) - \bar{F}_3^k) \delta_{l3}, \xi) \rangle \quad (2.19)$$

2.2 Метод численного расчета эффективных определяющих соотношений для сжимаемого композита

2.2.1 Общий алгоритм метода

Функции $\mathcal{F}^{03j}(F_3^{k(0)}, \bar{F}_L^k, \xi)$ для слоистого композита являются кусочно-постоянными по аргументу ξ

$$\mathcal{F}^{03j}(F_3^{k(0)}, \bar{F}_L^k, \xi) = \mathcal{F}^{03j}_\alpha(F_{3\alpha}^{k(0)}, \bar{F}_L^k), \quad \xi \in V_\alpha \quad (2.20)$$

где $V_\alpha = \{\xi : h_{\alpha-1} < \xi < h_\alpha\}$ – α – слой, h_α – толщина α – слоя, тогда и значения градиента $F_{3\alpha}^{k(0)} = const$ являются постоянными для каждого слоя.

Тогда может быть предложен следующий алгоритм численного нахождения эффективных определяющих соотношений.

1. Выбираем значения девять компонент осредненного градиента $\bar{F}_m^k = \{\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k\}$ из куба значений $0 < \bar{F}_m^k < \bar{F}_{\max}^k$;

2. Выбираем значения констант C^j , имеющих смысл "напряжений" P^{3j} , из некоторой области (куба) значений $C_{\min}^j < C^j < C_{\max}^j$;

3. При фиксированных значениях C^j и \bar{F}_m^k ищем решение уравнений

$$C^j = \mathcal{F}^{03j}_{\alpha}^{(n)}(F_{3\alpha}^k{}^{(0)}, \bar{F}_L^k) \quad (2.21)$$

для каждого α – слоя относительно функций $F_{3\alpha}^k{}^{(0)} = const$.

Решение этого уравнения ищем методом минимизации функционала невязки:

- сначала выбираем начальные значения $F_{3\alpha}^k{}^{(0)} = const$, по ним вычисляем значения функций $\mathcal{F}^{03j}_{\alpha}^{(n)}(F_{3\alpha}^k{}^{(0)}, \bar{F}_L^k)$;

- далее вычисляем невязку $\left| C^j - \mathcal{F}^{03j}_{\alpha}^{(n)}(F_{3\alpha}^k{}^{(0)}, \bar{F}_L^k) \right|$, сравниваем невязку

с полученной на предыдущей итерации.

Выбираем минимальное значение и осуществляем переход к следующему шагу итерации, согласно тому или иному численному методу решения задачи минимизации невязки

$$\left| C^j - \mathcal{F}^{03j}_{\alpha}^{(n)}(F_{3\alpha}^k{}^{(0)}, \bar{F}_L^k) \right| \rightarrow \min \quad (2.22)$$

- в итоге находим значения $F_{3\alpha}^k{}^{(0)}$ для каждого слоя.

4. Найденные значения $F_{3\alpha}^k{}^{(0)}$ представляют собой значения обратной функции $F_{3\alpha}^k{}^{(0)} = \mathcal{G}^k_{\alpha}{}^{(n)}(C^j, \bar{F}_L^k)$ для каждого слоя, поэтому осредняя это выражение, получим некоторое значение \hat{F}_3^k ,

$$\langle \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{G}^k_{\alpha}{}^{(n)}(C^j, \bar{F}_L^k) h_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N F_{3\alpha}^k{}^{(0)} h_{\alpha} \equiv \hat{F}_3^k \quad (2.23)$$

которое может отличаться от истинного значения градиента \bar{F}_3^k ;

5. Образум относительное отклонение этих векторов – еще одну невязку $\left| \hat{F}_3^k - \bar{F}_3^k \right|$ и организуем цикл итерации, в котором будем менять значения C^j , таким образом, чтобы доставить минимум вектору ошибки

$$\left| \hat{F}_3^k - \bar{F}_3^k \right|_{C^j} \rightarrow \min \quad (2.24)$$

В результате получим вторую задачу минимизации в трехмерном пространстве C^j , для которой этапы 2...4. являются внутренними и повторяются.

Реализовав численный алгоритм решения этой задачи находим значения C^j . Этим значениям \hat{C}^j соответствуют значения компонент $\hat{F}_{3\alpha}^{k(0)}$, вычисленные по п.1.–3. Подставляя эти значения в определяющие соотношения

$$P^{ij(0)} = \mathcal{F}^{(n)0ij}(\hat{F}_3^{k(0)}, \bar{F}_I^k, \xi) \quad (2.25)$$

получаем распределения напряжений в композите.

6. Осредняя это уравнение, получаем осредненные определяющие соотношения

$$\bar{P}^{ij(0)} = \langle \mathcal{F}^{(n)0ij}(\hat{F}_3^{k(0)}, \bar{F}_I^k, \xi) \rangle \quad (2.26)$$

Поскольку $\hat{F}_3^{k(0)}$ зависит от \hat{C}^j , а эти значения, в свою очередь являются функциями \bar{F}_3^k и \bar{F}_I^k , то эти осредненные определяющие соотношения формально можно записать так

$$\bar{P}^{ij} = \langle \mathcal{F}^{(n)0ij}(\hat{F}_3^{k(0)}, \bar{F}_I^k, \xi) \rangle \equiv \bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(\bar{F}_3^k, \bar{F}_I^k) \quad (2.27)$$

2.2.2 Алгоритм вычисления собственных значений и собственных векторов тензора искажений

Алгоритм вычисления значений тензорной функции $\mathcal{F}^{(n)03j}(F_3^k, \bar{F}_L^k, \xi)$ при заданных значениях аргументов, как было отмечено в главе 1, включает в себя, в общем случае, для всех моделей A_n , нахождение собственных значений λ_α и матриц собственных векторов $\overset{\circ}{Q}_\alpha^i(F^k_l)$ и $Q_\beta^j(F^k_l)$.

Для вычисления этих величин был применен следующий алгоритм.

Градиент деформации F можно рассматривать как тензор линейного преобразования базиса $\overset{\circ}{r}_i$ в базис r_i . В силу линейной независимости векторов $\overset{\circ}{r}_i$ и r_i , тензор F будет невырожденным. Тогда для него справедлива теорема о полярном разложении [36], то есть F можно представить в виде скалярного произведения двух тензоров второго ранга:

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O} \quad (2.28)$$

где \mathbf{U}, \mathbf{V} – симметричные, положительно определенные тензоры; \mathbf{O} – ортогональный тензор, причем каждое из этих представлений единственное.

При этом всякий симметричный тензор можно представить разложением по собственному базису, иначе можно записать, что

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{V}^2 \quad (2.29)$$

Образовав тензор $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ (или $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$), находим его компоненты в декартовом базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$:

$$\mathbf{U}^2 = (\bar{U}^2)_j^i \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \overset{\circ}{Q}_\alpha^i \overset{\circ}{Q}_\alpha^j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \quad (2.30)$$

$$\mathbf{V}^2 = (\bar{V}^2)_j^i \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 Q_\alpha^i Q_\alpha^j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \quad (2.31)$$

Воспользуемся методом вращений для нахождения собственных значений и собственных векторов.

Метод основан на преобразовании подобия исходной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с помощью ортогональной матрицы H . В качестве H берется ортогональная матрица, такая, что $HH^T = H^T H = E$, то есть $H^T = H^{-1}$. В силу свойства ортогонального преобразования евклидова норма исходной матрицы A не меняется. Для преобразованной матрицы сохраняется ее след и собственные значения λ_i

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = \text{tr}A^{(i)} \quad (2.32)$$

При реализации метода вращений преобразование подобия применяется к исходной матрице A многократно:

$$A^{(k+1)} = \left(H^{(k)}\right)^{-1} \cdot A^{(k)} \cdot H^{(k)} = \left(H^{(k)}\right)^T \cdot A^{(k)} \cdot H^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Формула определяет итерационный процесс, где начальное приближение $A^{(0)} = A$. На k -ой итерации для некоторого выбираемого при решении задачи недиагонального элемента $a_{ij}^{(k)}$, $i \neq j$, определяется ортогональная матрица $H^{(k)}$, приводящая этот элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ (а также и $a_{ji}^{(k+1)}$) к нулю. При этом на каждой итерации в качестве $a_{ij}^{(k+1)}$ выбирается наибольший по модулю.

Матрица $H^{(k)}$, называемая матрицей вращения Якоби, зависит от угла $\varphi^{(k)}$ и имеет вид:

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cos \varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & -\sin \varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \sin \varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & \cos \varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-я строка} \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad (2.34)$$

$$\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
i\text{-й столбец} & j\text{-й столбец}
\end{array}$$

В данной ортогональной матрице элементы на главной диагонали единичные, кроме $h_{ii}^{(k)} = \cos \varphi^{(k)}$ и $h_{jj}^{(k)} = \cos \varphi^{(k)}$, а остальные элементы нулевые, за исключением $h_{ij}^{(k)} = -\sin \varphi^{(k)}$, $h_{ji}^{(k)} = \sin \varphi^{(k)}$ (h_{ij} – элементы матрицы H).

Угол поворота $\varphi^{(k)}$ определяется по формуле $\operatorname{tg} 2\varphi^{(k)} = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} = \bar{P}_k$; $\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \bar{P}_k$, где $|2\varphi^{(k)}| \leq \frac{\pi}{2}$, i (a_{ij} выбирается в верхней треугольной наддиагональной части матрицы A).

В процессе итераций сумма квадратов всех недиагональных элементов ($A^{(k)}$) при возрастании k уменьшается, так что $(A^{(k+1)}) < \sigma(A^{(k)})$. Однако элементы $a_{ij}^{(k)}$ приведенные к нулю на k -ой итерации, на последующей итерации немного возрастают. При $k \rightarrow \infty$ получается монотонно убывающая ограниченная снизу нулем последовательность $\sigma(A^{(1)}) > \sigma(A^{(2)}) > \dots > \sigma(A^{(k)}) > \dots$. Поэтому $\sigma(A^{(k)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это и означает сходимость метода. При этом $A^{(k)} \rightarrow \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ а $H^{(k)} H^{(k-1)} \dots H^{(1)} \rightarrow Q$.

2.3 Задача об одноосном растяжении слоистой сжимаемой композитной пластины

2.3.1 Одноосное деформирование слоистой пластины

Рассмотрим задачу об одноосном деформировании пластины из слоистого композиционного материала вдоль одного из трех координатных направлений. Для любой из этих трех задач средний тензор деформаций композиционного материала имеет три ненулевые компоненты, которые не зависят от координат X^i

$$\bar{F}_1^1 = 1 + u_{,1}^{(0)}, \quad \bar{F}_2^2 = 1 + u_{,2}^{(0)}, \quad \bar{F}_3^3 = 1 + u_{,3}^{(0)} \quad (2.35)$$

остальные $\bar{F}_l^k = 0$. Под одноосным деформированием понимается, что в каждом конкретном случае задана только одна компонента вектора средних перемещений $u^{1(0)}$, $u^{2(0)}$ или $u^{3(0)}$, а две оставшиеся вычисляются из решения осредненной задачи.

Из (2.35) находим закон движения пластины из осредненного композита при одноосном растяжении

$$x^\gamma = \bar{F}_\gamma^\gamma X^\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3 \quad (2.36)$$

Рассмотрим случай сжимаемой среды. Будем искать решение локальной задачи нулевого приближения (1.80) – (1.85) для случая одноосного растяжения в виде:

$$F_{33}^{k(0)} = F_{33}^{(0)} \delta_3^k, \quad F_{l}^{(0)k} = \sum_{\gamma=1}^3 F^{(0)\gamma} \delta_\gamma^k \delta_\gamma^l, \quad C^j = C^3 \delta_3^j \quad (2.37)$$

Т.е. градиент деформации $F_{l}^{(0)k}$ слоев композита ищем в виде диагонального тензора. Решение (2.37) справедливо для одноосного деформирования по любому координатному направлению.

Компоненты $F_{1}^{(0)1}$ и $F_{2}^{(0)2}$ градиентов деформации для всех слоев совпадают с соответствующими компонентами среднего градиента

$$F^{(0)\gamma} = \bar{F}_\gamma^\gamma, \quad \gamma = 1, 2 \quad (2.38)$$

компонента $F^{(0)3} = \bar{F}_3^3 + u^{3(1)}/_3$ различается для разных слоев композита, но является постоянной в каждом слое (не зависит от ξ).

Тогда система (2.9) примет вид

$$C^3 = \mathcal{F}^{(n)033}(F^{(0)3}, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2, \xi) \quad (2.39)$$

Используя алгоритм (2.10) – (2.15), находим из (2.39) константу

$$C^3 = \mathcal{S}^{(n)3}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2) \quad (2.40)$$

где $\mathcal{S}^{(n)3}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2)$ формальное решение уравнения $\mathcal{G}^3(C^j, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2, \xi^m)$,

а $\mathcal{G}^3(C^j, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2, \xi^m)$ – это формальное решение уравнения (2.39).

Подставляя (2.40) в (2.18), получаем осредненные определяющие соотношения для композиционного материала в виде

$$\bar{P}^{ij} = \langle \mathcal{F}^{(n)0ij}(\mathcal{G}^3(\mathcal{S}^{(n)3}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2), \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2, \xi), \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2, \xi) \rangle \equiv \mathcal{F}^{(n)0ij}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2) \quad (2.41)$$

Тензор напряжений \bar{P}^{ij} будет диагональным.

Вычислим компоненты осредненного тензора напряжений Коши

$$\bar{T}^{\gamma\gamma} = \frac{1}{J} \bar{F}_\gamma^\gamma \mathcal{F}^{(n)0\gamma\gamma}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2), \quad \gamma = 1, 2, 3 \quad (2.42)$$

где $J = \bar{F}_3^3 \bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2$ – детерминант осредненного тензора.

2.3.2 Одноосное деформирование вдоль направления в плоскости слоев композита

Рассмотрим случай одноосного деформирования вдоль координатного направления Ox^1 . Используем граничные условия на боковых поверхностях композиционного материала:

$$\bar{T}^{22} = \bar{T}^{33} = 0 \quad (2.43)$$

при одноосном растяжении вдоль координатного направления Ox^1 . В силу того, что напряжения $\bar{T}^{\gamma\gamma}$ в пластине однородны, получаем из этих граничных условий, (2.42) и (2.37) систему трех нелинейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных: \bar{T}^{11} , \bar{F}_2^2 , \bar{F}_3^3 , которые являются функциями от \bar{F}_1^1

$$\begin{aligned} \bar{T}^{11} &= \frac{1}{J} \bar{F}_1^1 \mathcal{F}^{(n)011}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2), \\ 0 &= \bar{F}_2^2 \mathcal{F}^{(n)022}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2), \\ 0 &= \bar{F}_3^3 \mathcal{F}^{(n)033}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Решая эту систему, находим диаграммы деформирования сжимаемого композиционного материала при одноосном растяжении

$$\bar{T}^{11} = \bar{T}^{11}(\bar{F}_1^1), \quad \bar{P}^{11} = \bar{P}^{11}(\bar{F}_1^1) \quad (2.45)$$

2.3.3 Одноосное деформирование вдоль направления, перпендикулярного к плоскости слоев композита

Рассмотрим случай одноосного деформирования вдоль координатного направления Ox^3 . Используем граничные условия на боковых поверхностях композиционного материала:

$$\bar{T}^{22} = \bar{T}^{11} = 0 \quad (2.46)$$

при одноосном растяжении вдоль координатного направления Ox^3 . Тогда аналогично рассмотренному выше случаю получаем из этих граничных условий, и (2.42) и (2.37) систему трех нелинейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных: \bar{T}^{33} , \bar{F}_2^2 , \bar{F}_1^1 , которые являются функциями от \bar{F}_3^3

$$\begin{aligned}\bar{T}^{33} &= \frac{1}{J} \bar{F}_3^3 \mathcal{F}^{(n)033}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2), \\ 0 &= \bar{F}_2^2 \mathcal{F}^{(n)022}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2), \\ 0 &= \bar{F}_1^1 \mathcal{F}^{(n)033}(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2)\end{aligned}\tag{2.47}$$

Решая эту систему, находим диаграммы деформирования сжимаемого композиционного материала при одноосном деформировании вдоль координатного направления Ox^3

$$\bar{T}^{33} = \bar{T}^{33}(\bar{F}_3^3), \quad \bar{P}^{33} = \bar{P}^{33}(\bar{F}_3^3)\tag{2.48}$$

2.4 Результаты численного моделирования при одноосном деформировании композита

Представленный во втором разделе алгоритм численного расчета эффективных упругих характеристик слоистого композиционного материала с конечными деформациями был реализован в виде программного кода, написанного на языке программирования C++. Данная программа производит решение цепочки систем нелинейных алгебраических уравнений методом многомерной оптимизации (п.п. 2.1).

На рисунках представлены графики зависимостей $\bar{P}^{11} = \bar{P}^{11}(\bar{F}_1^1)$ компоненты тензора напряжения Пиолы–Кирхгофа от компоненты осредненного градиента деформации при различных входных данных. Построенные с помощью описанного выше алгоритма функции, представляют собой численный эксперимент для отдельных слоев композита с двумя различными наборами упругих констант:

первый и третий слой:

$$l_1 = 100 \text{ МПа}, l_2 = 50 \text{ МПа}$$

второй слой:

$$l_1 = 20 \text{ МПа}, l_2 = 10 \text{ МПа}$$

Зададим следующие соотношения между слоями:

$$h_1 = h_3 \text{ и } h_2 = 1 - 2h_1$$

Случаи $h_1 = 0.5$ и $h_1 = 0.0$ отвечают гомогенным материалам с характеристиками первого или второго слоя, соответственно.

Для моделей A_7 и A_9 на графиках представлены расчеты по аналитическим формулам и с помощью системы уравнений упругости в материальном описании (2.17).

На рисунке 2.1 представлены графики функций (2.17) для компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа \bar{P}_{11} в зависимости

от компоненты \bar{F}_{11} среднего градиента деформаций, которая изменялась в диапазоне от 1.0 до 1.22. Начальные значения для остальных компонент осредненного градиента: $\bar{F}_{33} = \bar{F}_{22} = 1$, $\bar{F}_{ij} = 0$, $i \neq j$. Эти значения соответствуют условиям одноосного деформирования слоистого композита в направлении, ортогональном к плоскости слоев, причем по боковым поверхностям композит скользит без изменений линейных размеров, т.е. $x_1 = x_2 = const$. До значения $\bar{F}_{33} = 1.14$ наблюдается не резкий рост напряжения, а затем проявляется выпуклость и напряжение в композите начинает расти значительно быстрее.

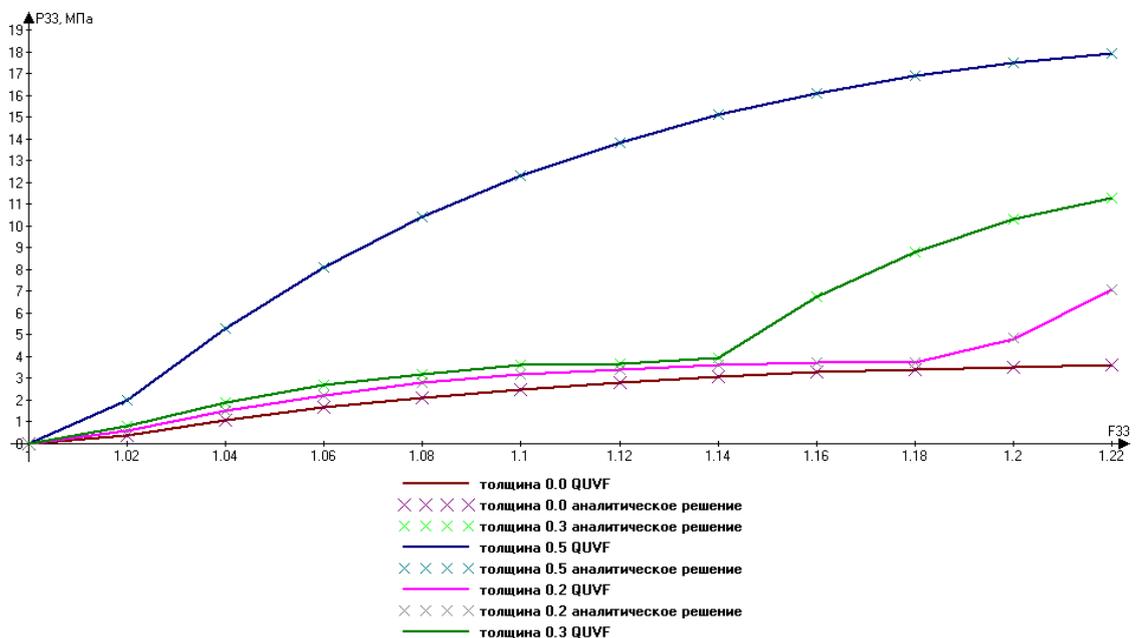


Рисунок 2.1 – Модель A_7 . Средние напряжения в композите при одноосном деформировании вдоль направления Ox^3 .

На рисунке 2.2 для этой же модели и при тех же исходных данных показано распределение напряжений в слоях до осреднения при одноосном растяжении на 22%: с более высокой жесткостью для первого и третьего слоев и с меньшей – для второго слоя. Красной пунктирной линией показано осредненное значение напряжения в композиционном материале. Относительная толщина первого слоя 0.3.

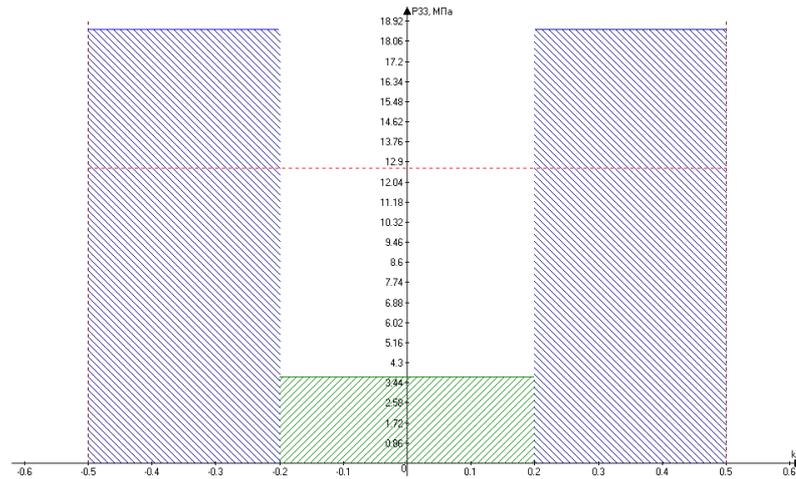


Рисунок 2.2 – Модель A_7 . Распределение напряжений в слоях до осреднения.

На рисунке 2.3 представлены зависимости компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа \bar{P}_{11} в зависимости от компоненты \bar{F}_{33} среднего градиента деформаций.

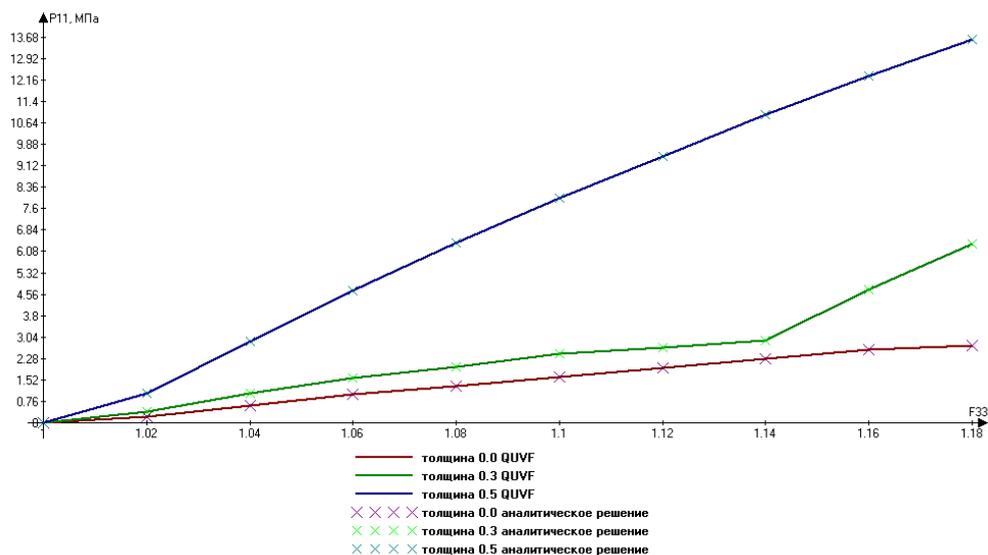


Рисунок 2.3 – Модель A_7 . Средние напряжения в композите при одноосном деформировании вдоль направления Ox^3 .

На рисунке 2.4 представлена диаграмма деформирования зависимости осредненной компоненты тензора Пиолы–Кирхгофа \bar{P}_{33} от осредненной компоненты градиента деформации \bar{F}_{33} , изменяющаяся в диапазоне от 1.0 до 1.4 и распределение напряжений в слоях до осреднения при одноосном

деформировании до 40%. Аналогично модели A_I , при значении $\bar{F}_{33} = 1.22$ проявляется выпуклость. Очевидно, что у моделей A_I и A_{II} наблюдается некоторая корреляция, однако выпуклость возникает на различных деформациях.

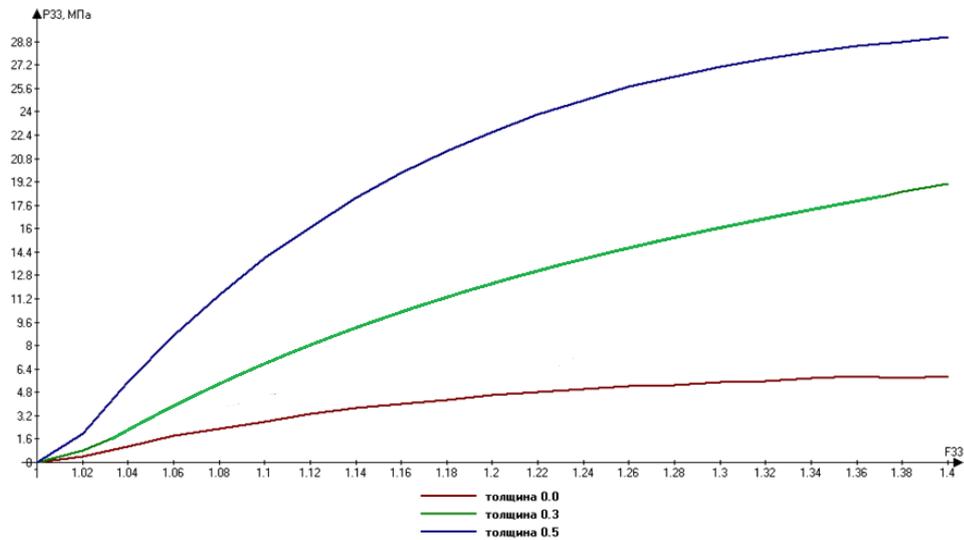


Рисунок 2.4 – Модель A_{II} . Средние напряжения в композите при одноосном деформировании вдоль направления Ox^3 .

На рисунке 2.5 диаграмма одноосного деформирования зависимости для осредненной компоненты тензора Пиолы–Кирхгофа \bar{P}_{11} от осредненной компоненты градиента деформации \bar{F}_{33} .

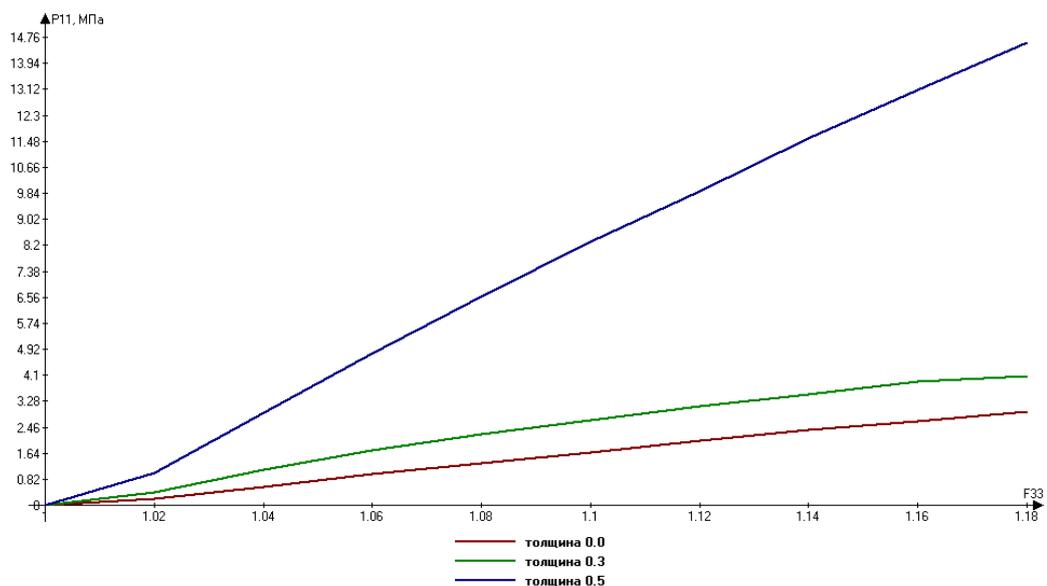


Рисунок 2.5 – Модель A_{II} . Одноосное деформирование.

На рисунке 2.6 представлена диаграмма деформирования для модели A_{IV} .

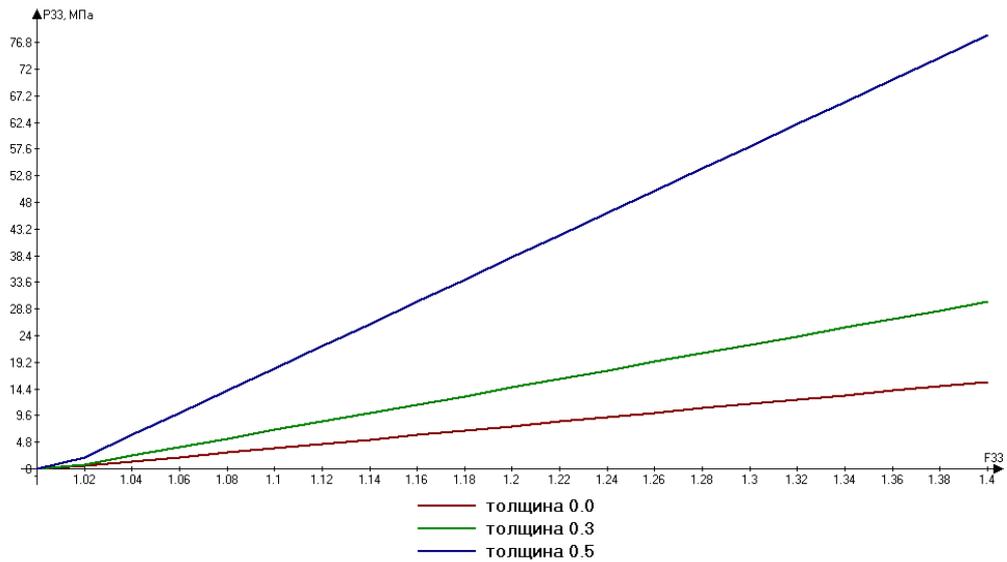


Рисунок 2.6 – Модель A_{IV} . Одноосное деформирование.

На рисунке 2.7 показаны напряжения в слоях при одноосном деформировании при $F_{33} = 1,4$, при относительной толщине первого слоя 0.3.

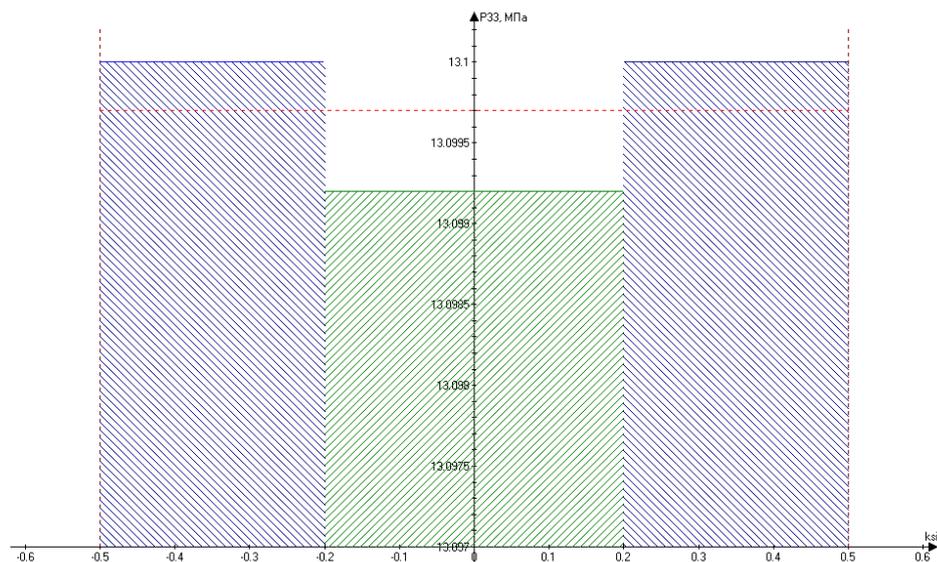


Рисунок 2.7 – Модель A_{IV} . Распределение напряжений в слоях при одноосном деформировании вдоль направления Ox^3

На рисунке 2.8 показаны графики функций (2.17) для компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа \bar{P}_{33} в зависимости от компоненты \bar{F}_{33} среднего градиента деформаций, которая изменялась

в диапазоне от 1.0 до 2. Начальные значения для остальных компонент осредненного градиента: $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{22} = 1$, $\bar{F}_{ij} = 0$, $i \neq j$. Эти значения соответствуют условиям одноосного деформирования слоистого композита в направлении, ортогональном к плоскости слоев, причем по боковым поверхностям композит скользит без изменений линейных размеров, т.е. $x_1 = x_2 = const$.

Эта модель хорошо работает при высоких деформациях – выше 150%.

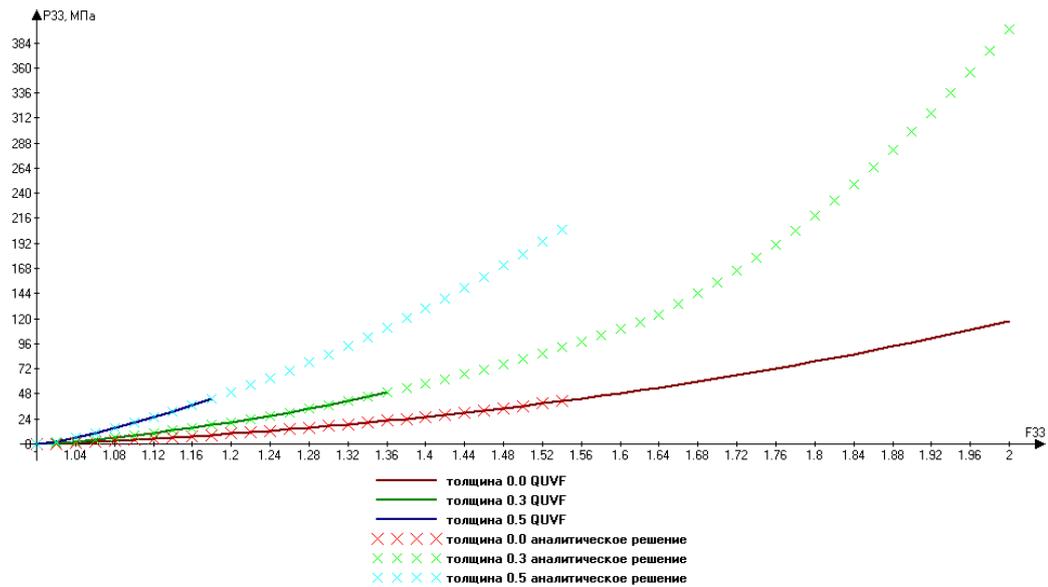


Рисунок 2.8 – Модель A_v . Одноосное деформирование.

На рисунке 2.9 показано распределение напряжений в слоях при одноосном деформировании при 200% до процедуры осреднения. Красным пунктиром на диаграмме показано среднее значение напряжения после осреднения. Относительная толщина первого слоя 0.3.

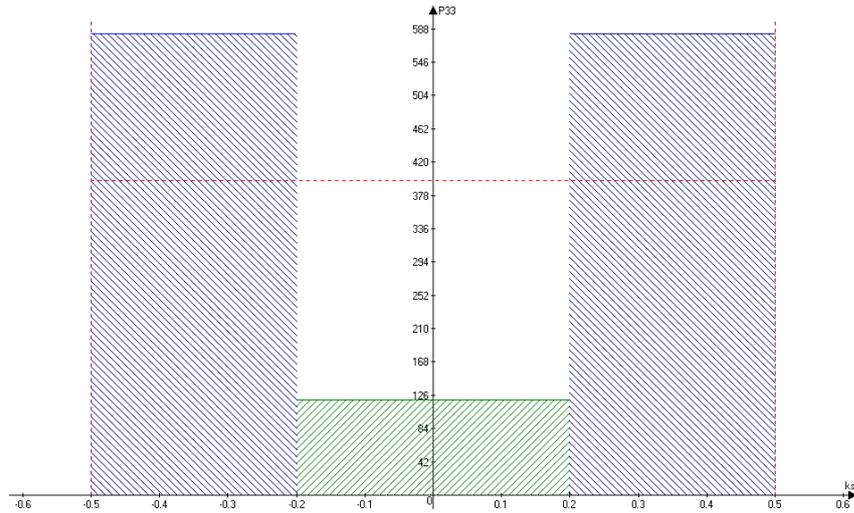


Рисунок 2.9 – Модель A_v . Распределение напряжений в слоях при одноосном деформировании вдоль направления Ox^3

На рисунке 2.10 моделирование одноосного деформирования модели A_v для компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа \bar{P}_{11} в зависимости от компоненты \bar{F}_{33} среднего градиента деформаций.

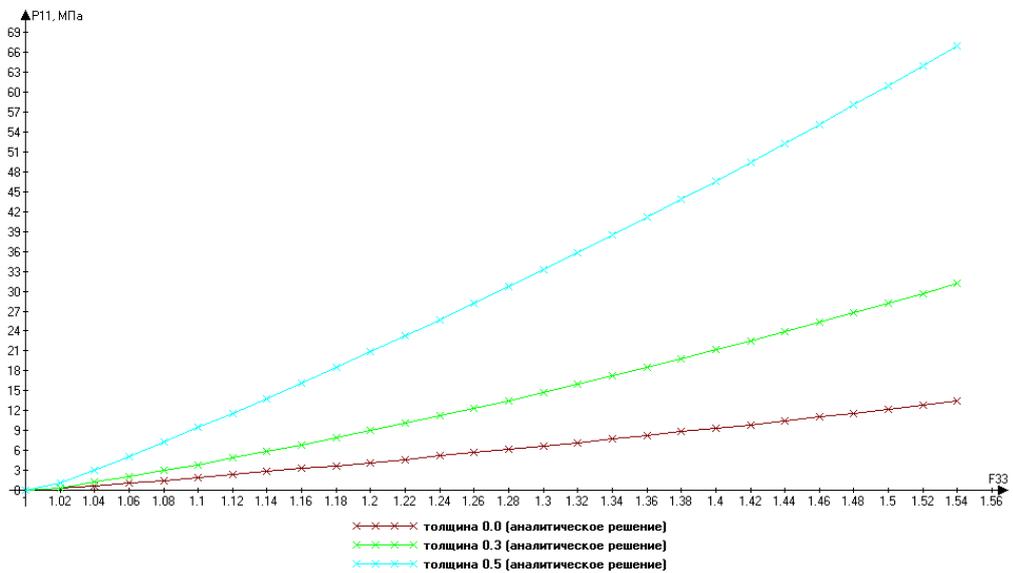


Рисунок 2.10 – Модель A_v . Одноосное деформирование

2.5 Сравнительный анализ различных моделей A_n при одноосном деформировании

2.5.1 Экспериментальные данные по дуотану и бутадиен-нитрильному каучуку

В работах [57] и [123] рассматривалось деформирование эластомеров с использованием моделей гиперупругих материалов Сен-Венана, Муни-Ривлина, Генки, Неогуковская модель, а также Бартенева-Хазановича. В [57] рассматривается материал дуотан–полиуретановый эластомер, обладающий высокой прочностью на растяжение, повышенным сопротивлением износу. На рисунке 2.11 представлена диаграмма одноосного деформирования образца из материала дуотан (Duothan QA965): зависимость компонент тензора Пиолы-Кирхгофа от компонент градиента деформации.

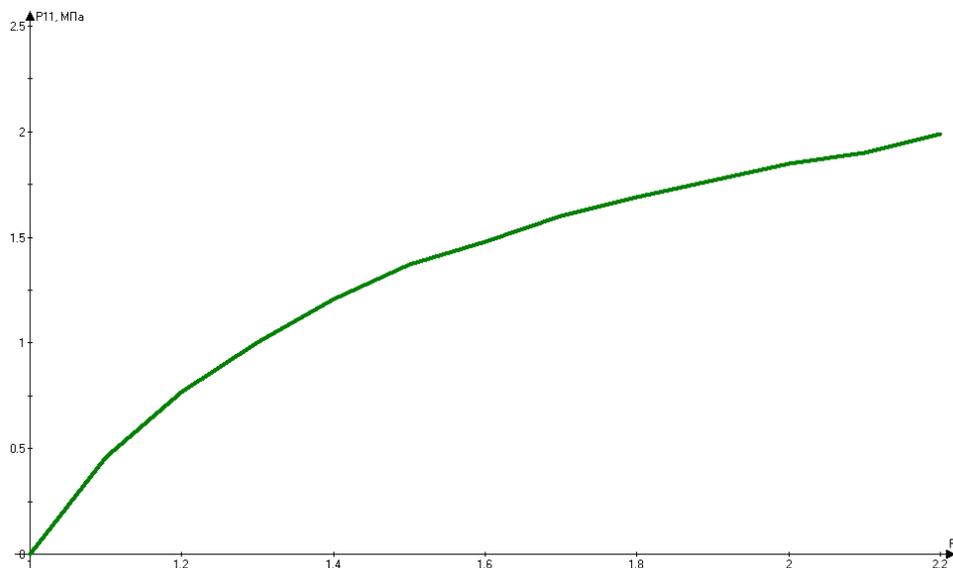


Рисунок 2.11 – Экспериментальная диаграмма одноосного деформирования материала дуотан [57].

В [123] для исследования нелинейного поведения пористого эластомерного материала, была экспериментально определена нелинейная зависимость между основным напряжением P_{11} и относительным удлинением матричного бутадиен-

нитрильного каучука матрицы СКН-40. Такие каучуки стойки к действию технических масел, бензина, алифатические углеводородов, а также к тепловому старению и имеют низкую стойкость к действию озона. На рисунке 2.12 представлена диаграмма деформирования материала СКН-40, полученная в [123].

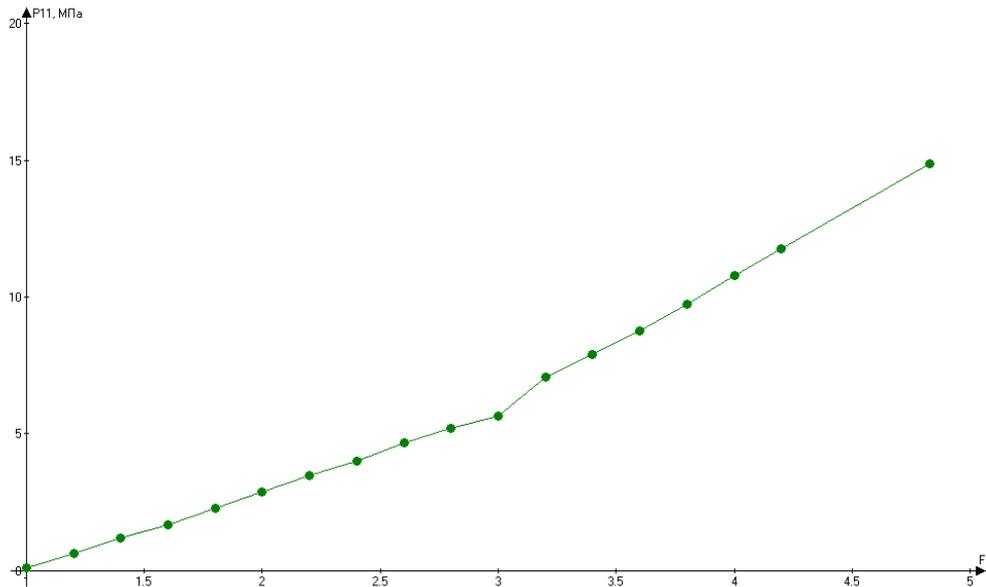


Рисунок 2.12 – Экспериментальная диаграмма одноосного деформирования материала резина СКН-40 [123].

2.5.2 Определение материальных констант моделей A_n

При решении вопроса о том, какую модель следует применить для конкретной упругой среды, требуется сравнить экспериментальные данные и результаты расчета по разным моделям. Таким образом, требуется определить материальные константы из условия лучшей аппроксимации диаграммы деформирования для рассматриваемых материалов.

Значения материальных констант l_1 , l_2 определим путем минимизации среднеквадратического отклонения расчетных значений от экспериментальных:

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| 1 - \frac{P_i}{P_i^0} \right|^2 \rightarrow \min \quad (2.49)$$

Для минимизации функции (2.49) воспользуемся методом дифференциальной эволюции. Это один из методов эволюционного моделирования (т.е. переход от одной популяции к другой происходит посредством искусственной эволюции), предназначенный для решения задачи многомерной оптимизации. По классификации оптимизационных методов он относится к классу стохастических методов, так как использует в процессе поиска решения генератор случайных чисел и является методом нулевого порядка, поскольку при поиске решения используется информация только о величине целевой функции.

Из анализа диаграмм, полученных в разделе 2.4 можно предположить, что диаграмму деформирования дуотана наиболее точно можно аппроксимировать моделями A_I и A_{II} .

В таблице 2.1 приведены значения аппроксимации и погрешности для дуотана.

Таблица 2.1 – Значения упругих констант для дуотана в различных моделях A_n

n	l_1 , МПа	l_2 , МПа	Δ , %
I	7.084	0.162	6.99
II	3.608	1.386	3.48
IV	3.12	1.872	7,82
V	3	2	47.8

На рисунке 2.13 представлена расчетная диаграмма с использованием найденных материальных констант. Из анализа полученных диаграмм следует, что наилучшую аппроксимацию экспериментальной диаграммы удастся достичь с помощью модели A_{II} . Модель A_I хорошо аппроксимирует диаграмму деформирования до 12%.

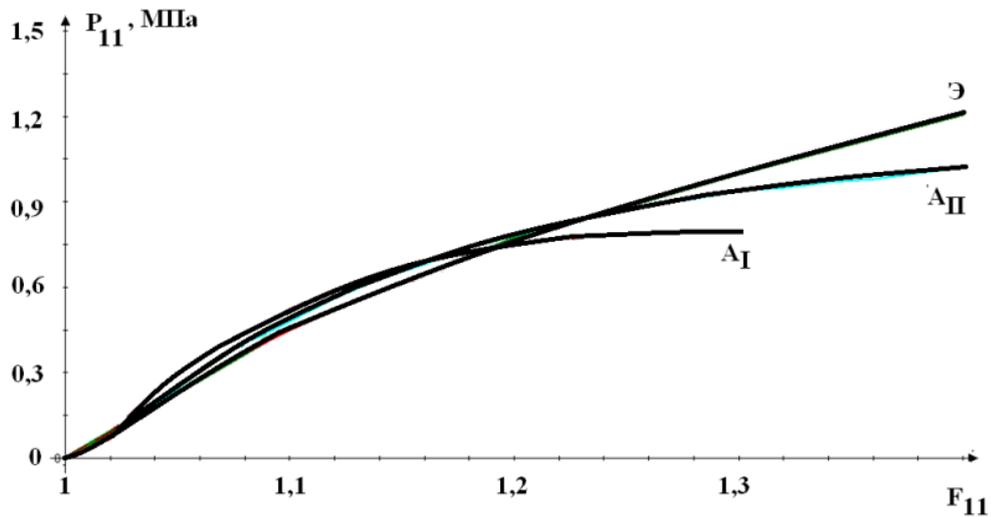


Рисунок 2.13 – Аппроксимация экспериментальных диаграмм (Э) деформирования дуотана с помощью различных моделей A_n .

Диаграмма деформирования резины монотонна и не имеет выпуклостей, в связи с этим можно заключить, что для ее аппроксимации вероятнее всего подойдут модели A_{IV} и A_V .

В таблице 2.2 приведены значения аппроксимации и погрешности для резины СКН-40. Учитывая ранее построенные диаграммы деформирования, модели A_I и A_{II} с их очевидной выпуклостью вверх можно не рассматривать, поскольку они дадут заведомо неверный результат.

Таблица 2.2 – Значения упругих констант для резины СКН-40 в различных моделях A_n

n	l_1 , МПа	l_2 , МПа	Δ , %
IV	0.959351	0.96847	1
V	1.1	0.26057	50

На рисунке 2.14 представлена расчетная диаграмма с использованием найденных материальных констант. Из анализа полученных диаграмм следует, что наилучшую аппроксимацию экспериментальной диаграммы удастся достичь с помощью модели A_{IV} . Модель A_V достаточно хорошо аппроксимирует диаграмму деформирования до 50%.

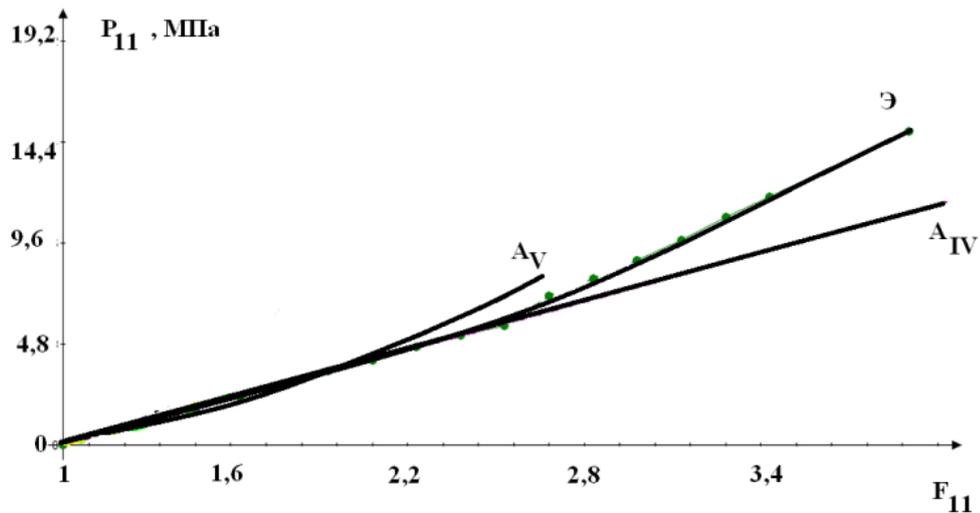


Рисунок 2.14 – Аппроксимация экспериментальных диаграмм (Э) деформирования резины СКН-40 с помощью различных моделей A_n .

Полученные диаграммы демонстрируют, что целесообразно пользоваться всем комплексом нелинейно-упругих моделей, так как, выполняя однотипные вычисления с использованием всех моделей, появляется возможность выбора какой-либо одной, приводящей к наилучшим результатам для конкретного материала.

2.5.3 Численное моделирование деформирования слоистого композита дуотан-каучук при одноосном растяжении

С помощью полученных материальных констант проведем численный эксперимент слоистой композиционной пластины, состоящей из материалов дуотан и резины СКН-40.

Так как в ходе аппроксимации было получено, что дуотан обладает более высокой жесткостью, то упругие характеристики первого и третьего слоя примут значения его материальных констант:

$$l_1 = 3.60806 \text{ МПа}, \quad l_2 = 1.38669 \text{ МПа}$$

соответственно для второго слоя возьмем значения упругих характеристик резины:

$$l_1 = 0.959 \text{ МПа}, l_2 = 0.968 \text{ МПа}$$

Соотношения между слоями были прежние: ($h_1 = h_3$ и $h_2 = 1 - 2h_1$). В случаях при $h_1 = 0.0$ и $h_1 = 0.5$ получаем гомогенные резину СКН-40 и дуотан, соответственно.

На рисунках 2.15 – 2.18 представлены расчетные диаграммы деформирования для двухслойных композитов: резина СКН-40-дуотан, полученные с использованием моделей A_I , A_{II} , A_{IV} и A_V , соответственно.

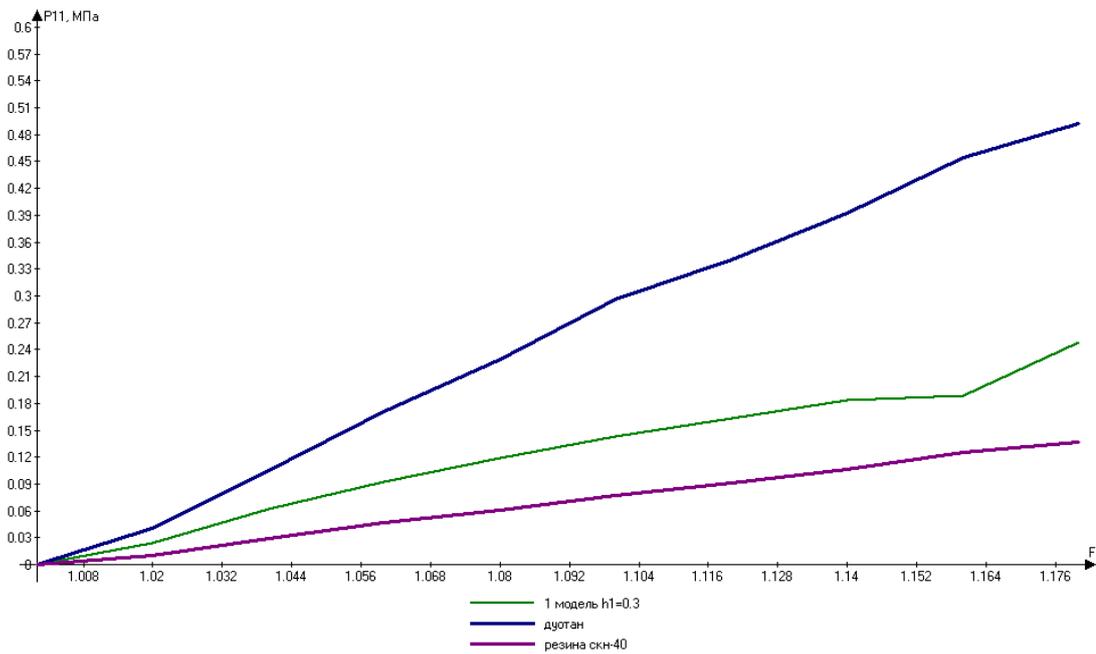


Рисунок 2.15 – Расчетная диаграмма одноосного деформирования для материала дуотан-резина СКН-40-дуотан, полученная с использованием модели A_I .

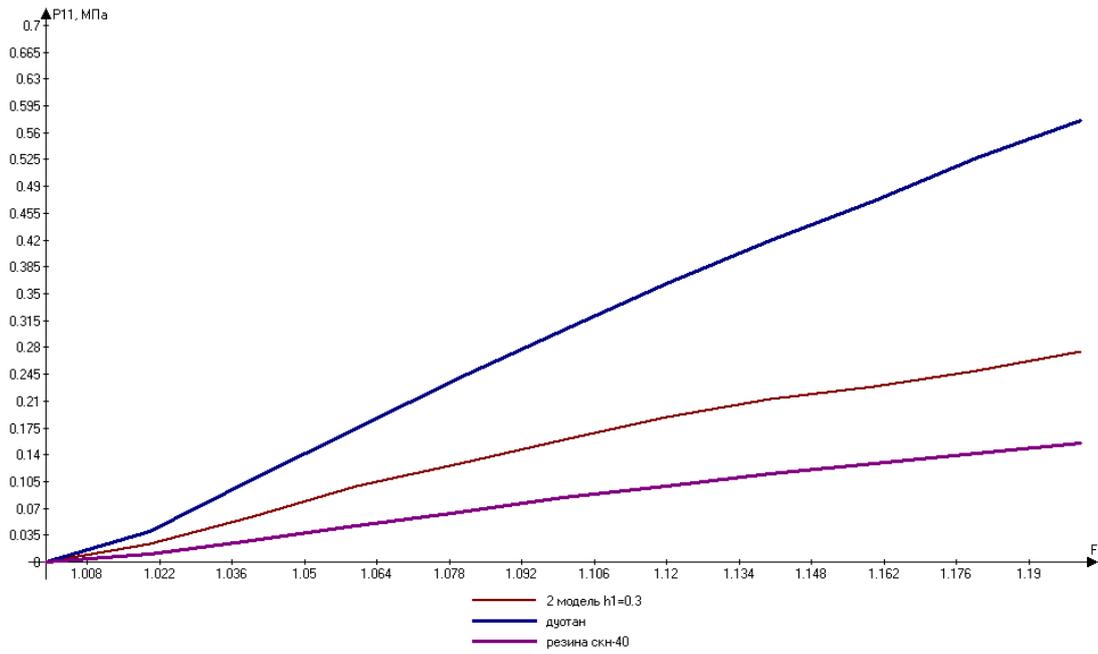


Рисунок 2.16 – Расчетная диаграмма одноосного деформирования для материала дуотан-резина СКН-40-дуотан, полученная с использованием модели A_{II}

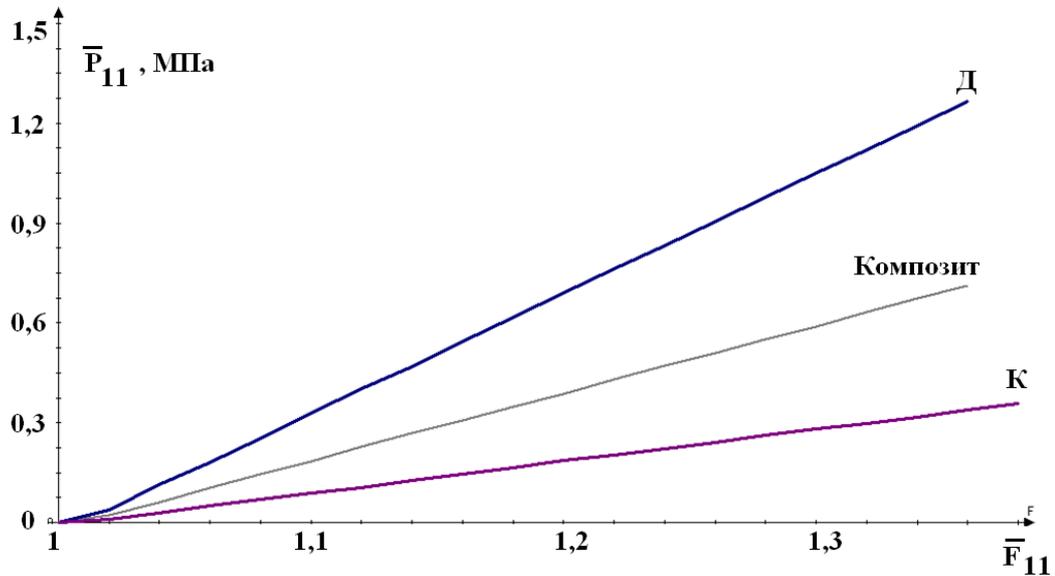


Рисунок 2.17 – Расчетная диаграмма одноосного деформирования для материала дуотан-резина СКН-40-дуотан, полученная с использованием модели A_{IV}

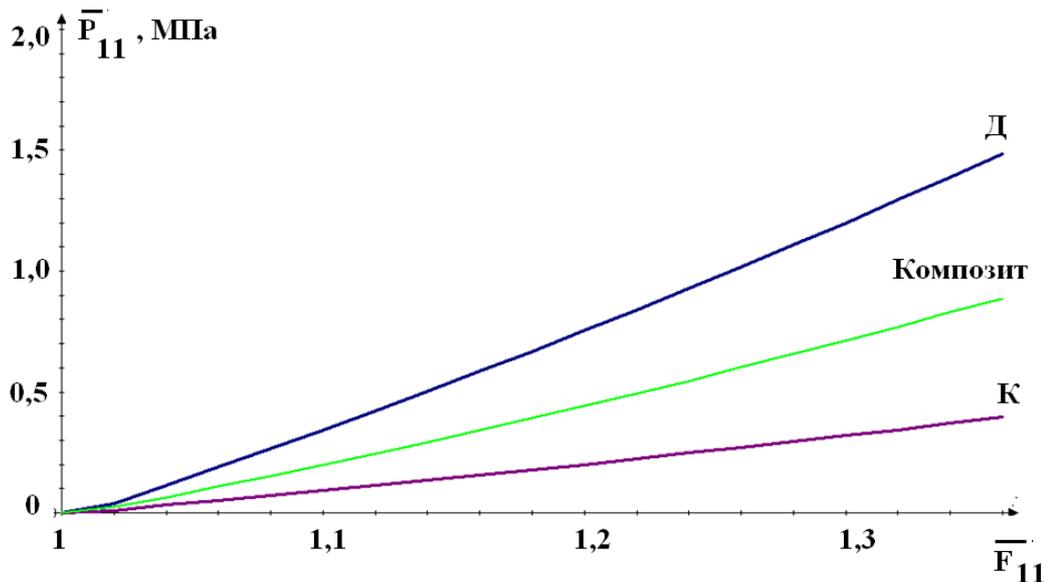


Рисунок 2.18 – Расчетная диаграмма одноосного деформирования для материала дуотан-резина СКН-40-дуотан, полученная с использованием модели A_v

2.6 Задача о сдвиге сжимаемого слоистого композита

Задача о простом сдвиге приближенно реализуется в эксперименте по продольному сдвигу тонкой полосы из рассматриваемого материала (например, резины), расположенной между двумя жесткими (например, стальными) листами, смещаемыми друг относительно друга.

В матричном виде компоненты тензора градиента деформаций в декартовой системе координат для этой задачи имели вид

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & F^{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F^{13} = a$$

Рассмотрим модели A_n . Построим диаграмму изменения компонент напряжений осредненного тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа \bar{P}_{13} , \bar{P}_{33} и \bar{P}_{11} от компоненты \bar{F}_{13} при простом сдвиге слоистого композита (рисунок 2.19).

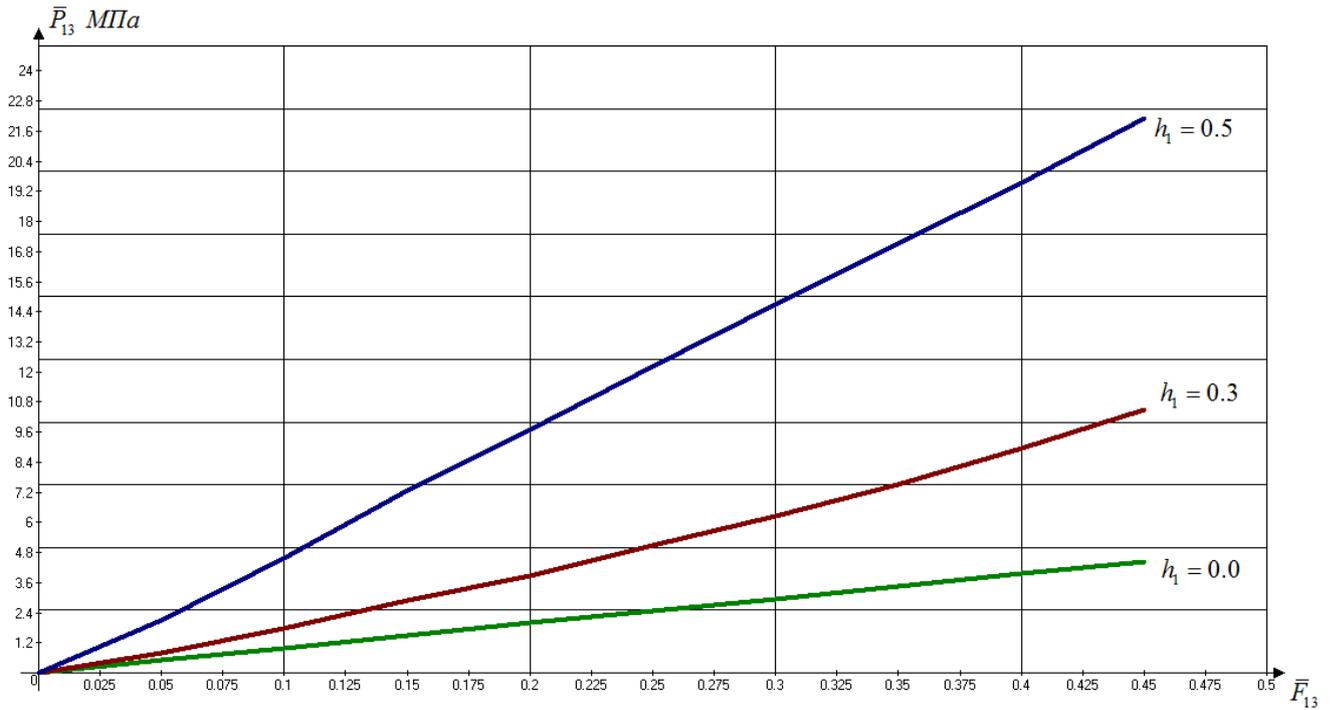


Рисунок 2.19 – Модель A_{IV} Диаграммы деформирования $\bar{P}_{13}(\bar{F}_{13})$ для слоистого композита с ЯП из трех слоев и различным толщинами слоев, построенные с помощью разработанного алгоритма

Проанализируем диаграмму изменения компонент напряжений осредненного тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа \bar{P}_{13} , \bar{P}_{31} , \bar{P}_{33} и \bar{P}_{11} от компоненты \bar{F}_{13} при простом сдвиге слоистого композита (рисунок 2.20). До значения $\bar{F}_{13} \approx 0.18$ напряжение \bar{P}_{33} выше, чем напряжение \bar{P}_{11} , а при $\bar{F}_{13} > 0.18$ соотношение между ними изменяется. При возрастании сдвиговой компоненты \bar{F}_{13} возрастает различие несимметрии компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа \bar{P}_{11} и \bar{P}_{31} .

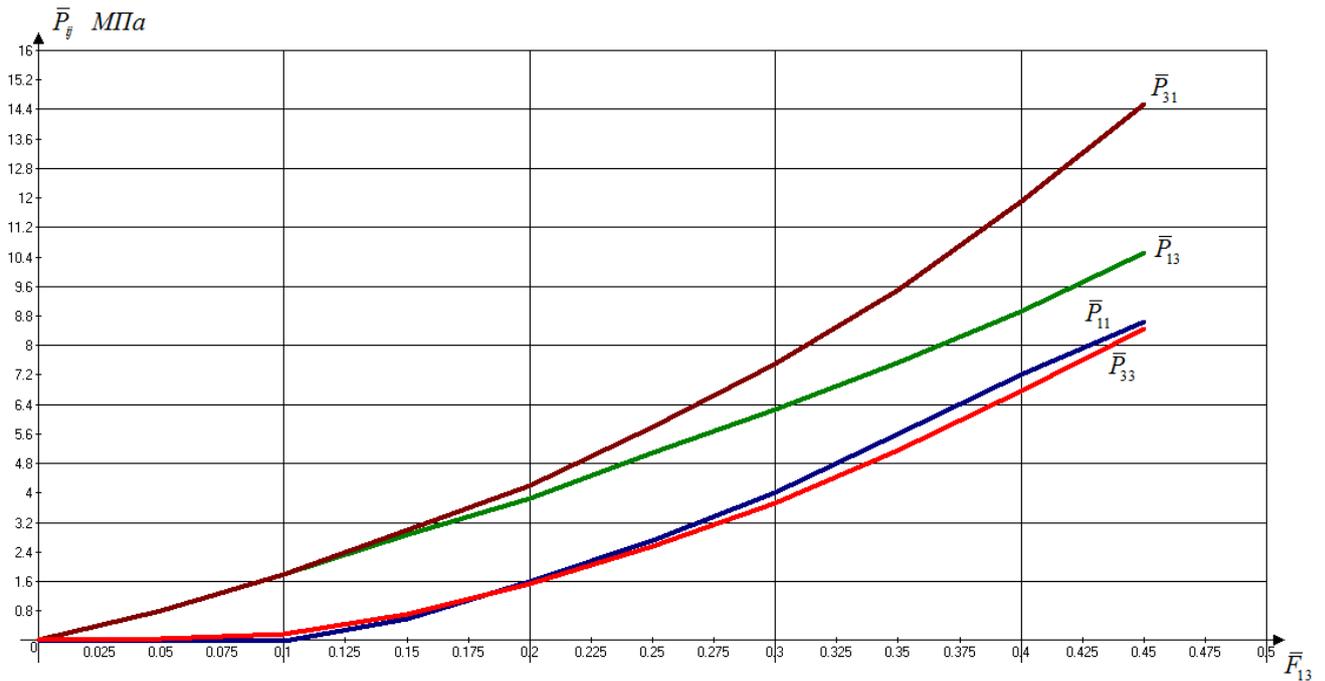


Рисунок 2.20 – Модель A_{IV} . Изменение компонент напряжений осредненного тензора напряжений Пиола-Кирхгофа при чистом сдвиге слоистого композита с ЯП из трех слоев.

Из сравнения представленных выше графиков следует, что для всех моделей A_n значения напряжений положительны, что соответствует реально наблюдаемым напряжениям на практике.

2.7 Модель эффективной трансверсально-изотропной сжимаемой среды

Решение локальных задач – это сложный и трудоемкий процесс. Если использовать этот метод непосредственно при решении макроскопических задач, например, методом конечного элемента, то в каждой точке (каждом узле) необходимо решать локальную задачу на ячейке периодичности, что приводит к очень большим объемам вычислений. Иначе говоря, проблема связанности локальных задач на ЯП и макроскопической задачи является серьезной проблемой, создающей значительные трудности при численном решении.

Разделения этих задач – также неочевидная проблема, ввиду сильной нелинейности обоих классов задач. В этой связи весьма актуальным является разработка приближенного метода, который позволил бы решать указанные задачи по отдельности.

Такой приближенный метод предлагается в данном разделе. Суть его в следующем – вместо решения локальных задач в каждой точке можно заменить композиционный материал эффективной моделью, с эффективными определяющими соотношениями. Поскольку свойства слоистого композиционного материала не изменяются при поворотах в плоскости, параллельной слоям СКМ, то его можно считать трансверсально изотропной средой в отсчетной конфигурации. Далее, записывается аналитическая модель для такой эффективной трансверсально-изотропной среды (ЭТИС), при этом используются универсальные модели сжимаемых сред. Для нахождения констант этих аналитических моделей применяется процедура аппроксимации верификационного базиса «экспериментальных» диаграмм деформирования композита, полученных с помощью численного расчета по разработанному выше методу асимптотического осреднения. Аппроксимация осуществляется путем решения задач минимизации среднеквадратического отклонения диаграмм деформирования, полученных по аналитическим моделям ЭТИС и с помощью непосредственного решения локальных задач на ЯП.

В наиболее общей форме универсальных моделей класса A_n определяющие соотношения для упругих (гиперупругих) анизотропных сжимаемых сред может быть представлена в тензорных базисах следующим образом:

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}^{(n)} \quad (2.50)$$

где ψ – свободная энергия Гельмгольца, являющаяся функцией инвариантов $I_\gamma^{(n)}(\mathbf{C})$ энергетического тензора деформаций \mathbf{C} относительно группы симметрий трансверсально-изотропной среды.

Для группы симметрий трансверсально-изотропной среды существует базис из пяти функционально-независимых инвариантов [37], поэтому для сжимаемой трансверсально-изотропной среды верно следующее представление:

$$\mathbf{T} = \sum_{\gamma=1}^5 \varphi_{\gamma} I_{\gamma C} \quad (2.51)$$

$$\varphi_{\gamma} = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_{\gamma}} \right), \quad I_{\gamma C} = \frac{\partial I_{\gamma}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.52)$$

Выберем в качестве функционального базиса инвариантов трансверсально-изотропной среды следующие инварианты

$$I_1 = (\mathbf{E} - \mathbf{c}_3^2) \cdot \mathbf{C} \quad (2.53)$$

$$I_2 = \mathbf{c}_3^2 \cdot \mathbf{C} \quad (2.54)$$

$$I_3 = \left((\mathbf{E} - \mathbf{c}_3^2) \cdot \mathbf{C} \right) \cdot \left(\mathbf{c}_3^2 \cdot \mathbf{C} \right) \quad (2.55)$$

$$I_4 = \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{E} - I_2^2 + 2I_3 \quad (2.56)$$

$$I_5 = \det \left(\mathbf{C} \right) \quad (2.57)$$

Где $\mathbf{c}_3^2 = \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_3$ – направляющий тензор второго ранга, а $\vec{\mathbf{c}}_3$ – вектор, ориентированный по оси трансверсальной изотропии.

Представление свободной энергии Гельмгольца, которое зависит от четырех инвариантов $I_{\gamma}(\mathbf{C})$, выберем в следующем виде:

$$\overset{\circ}{\rho} \psi = \overset{\circ}{\rho} \psi_0 + \frac{1}{2} \left(l_{11} I_1^{2n_1} + 2l_{12} I_1^{n_1} I_2^{n_2} + l_{22} I_2^{2n_2} \right) + l_{33} I_3^{n_3} + l_{44} I_4^{2n_4} \quad (2.58)$$

Зависимостью от пятого инварианта будем пренебрегать.

При рассмотрении в ДСК $\mathbf{c}_3^2 = \mathbf{e}_3^2$ и вышеуказанные формулы упрощаются:

$$I_1 = C_{11}^{(n)} + C_{22}^{(n)} \quad (2.59)$$

$$I_2 = C_{33}^{(n)} \quad (2.60)$$

$$I_3 = C_{13}^{(n)2} + C_{23}^{(n)2} \quad (2.61)$$

$$I_4 = C_{11}^{(n)2} + 2C_{12}^{(n)2} + C_{22}^{(n)2} \quad (2.62)$$

Вычислим производные $I_{\gamma C} = \frac{\partial I_{\gamma}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}^{(n)}$

$$I_{1C} = \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}}^{(n)} = \mathbf{c}_1^2 + \mathbf{c}_2^2 \quad (2.63)$$

$$I_2 = \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}}^{(n)} = \mathbf{c}_3^2 \quad (2.64)$$

$$I_3 = \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}}^{(n)} = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot \mathbf{C}^{(n)} \quad (2.65)$$

$$I_4 = \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}}^{(n)} = (2\Delta - (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - 2\mathbf{c}_3^2 \otimes \mathbf{c}_3^2) \cdot \mathbf{C}^{(n)} \quad (2.66)$$

В ДСК формулы упрощаются и матрицы компонент тензоров производных $I_{\gamma C}$ будут иметь следующий вид:

$$I_{1C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$I_{2C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

$$I_{3C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{13}^{(n)} \\ 0 & 0 & C_{23}^{(n)} \\ C_{31}^{(n)} & C_{32}^{(n)} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$I_{4C} = \begin{pmatrix} \binom{(n)}{C_{11}} & \binom{(n)}{C_{12}} & 0 \\ \binom{(n)}{C_{21}} & \binom{(n)}{C_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Вычислим производные $\varphi_\gamma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma}$:

$$\varphi_1 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_1} = J(n_1 l_{11} I_1^{2n_1-1} + n_1 l_{12} I_1^{n_1-1} I_2^{n_2}) \quad (2.71)$$

$$\varphi_2 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_2} = J(n_2 l_{22} I_2^{2n_2-1} + n_2 l_{12} I_1^{n_1} I_2^{n_2-1}) \quad (2.72)$$

$$\varphi_3 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_3} = J n_3 l_{33} I_3^{n_3-1} \quad (2.73)$$

$$\varphi_4 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_4} = J n_4 l_{44} I_4^{n_4-1} \quad (2.74)$$

$$J = \frac{\rho}{\rho} \quad (2.75)$$

Таким образом, мы привели определяющие соотношения к виду (2.51).

В компонентной записи в ДСК определяющие соотношения (2.51) примут вид:

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(n)} &= \varphi_1 (\delta_{ij} - \delta_{i3} \delta_{j3}) + \varphi_2 \delta_{i3} \delta_{j3} + \\ &+ (\varphi_3 - 2\varphi_4) \left(C_{13}^{(n)} (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) + C_{23}^{(n)} (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) \right) + 2\varphi_4 \left(C_{ij}^{(n)} - C_{33}^{(n)} \delta_{i3} \delta_{j3} \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

В матричной записи соотношения (2.76) примут вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_{ij}^{(n)} \end{pmatrix} &= \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \varphi_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{13}^{(n)} \\ 0 & 0 & C_{23}^{(n)} \\ C_{31}^{(n)} & C_{32}^{(n)} & 0 \end{pmatrix} + \varphi_4 \begin{pmatrix} C_{11}^{(n)} & C_{12}^{(n)} & 0 \\ C_{21}^{(n)} & C_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

После нахождения энергетического тензора напряжений находятся тензоры напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа.

2.8 Методика нахождения параметров модели трансверсально-изотропного сжимаемого композита

Рассмотрим СКМ как гомогенную трансверсально-изотропную среду с моделью (2.51) и осью $\mathbf{c}_3 = \mathbf{e}_3$. Предположим, что из численного эксперимента нам известны диаграммы деформирования этой среды. Тогда можно поставить задачу нахождения параметров модели этой эффективной среды, соответствующих наилучшему приближению к полученным экспериментально диаграммам.

Рассмотрим уравнения движения пластины, грани которой в отсчетной конфигурации ориентированы по координатным направлениям, в виде:

$$x^\alpha = k_\alpha X^\alpha, \quad \overset{\circ}{x}^\alpha = X^\alpha \quad (2.78)$$

Градиент деформации примет вид

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha \mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{U} \quad (2.79)$$

Его компоненты в матричной записи:

$$F = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Энергетические тензоры деформаций можно выразить явно:

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-III} (\mathbf{U}^{n-III} - \mathbf{E}) = \frac{1}{n-III} \sum_{\alpha=1}^3 (k_\alpha^{n-III} - 1) \mathbf{e}_\alpha^2 \quad (2.81)$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-III} \begin{pmatrix} k_1^{n-III} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{n-III} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{n-III} - 1 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Эти тензоры являются диагональными.

Из формулы (1.8) получим простые выражения для инвариантов:

$$I_1 = C_{11}^{(n)} + C_{22}^{(n)} = \frac{1}{n-III} (k_1^{n-III} + k_2^{n-III} - 2) \quad (2.83)$$

$$I_2 = C_{33}^{(n)} = \frac{1}{n-III} (k_3^{n-III} - 1) \quad (2.84)$$

$$I_3 = 0 \quad (2.85)$$

$$I_4 = C_{11}^{(n)2} + C_{22}^{(n)2} = \frac{1}{n-III} ((k_1^{n-III} - 1)^2 + (k_2^{n-III} - 1)^2) \quad (2.86)$$

Энергетический тензор напряжений также будет иметь диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} T_{ij}^{(n)} \end{pmatrix} = \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\varphi_4}{n-III} \begin{pmatrix} k_1^{n-III} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{n-III} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

То есть

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha}^{(n)} \mathbf{e}_\alpha^2, \quad T_{ij} = T_{\alpha\alpha}^{(n)} \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} \quad (2.88)$$

$$T_{\alpha\alpha}^{(n)} = \varphi_1 (\delta_{1\alpha} + \delta_{2\alpha}) + \varphi_2 \delta_{3\alpha} + \frac{\varphi_4}{n-III} ((k_1^{n-III} - 1) \delta_{1\alpha} + (k_2^{n-III} - 1) \delta_{2\alpha}) \quad (2.89)$$

Тензор напряжений Коши также будет диагонален

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} \mathbf{e}_\alpha^2, \quad T_{ij} = T_{\alpha\alpha} \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha}, \quad (2.90)$$

$$T_{\alpha\alpha} = k_\alpha^{n-III} T_{\alpha\alpha}^{(n)}, \quad (2.91)$$

$$T_{\alpha\alpha} = k_\alpha^{n-III} \left(\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 (k_1^{n-III} - 1)}{n-III} \right) \delta_{1\alpha} + \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 (k_2^{n-III} - 1)}{n-III} \right) \delta_{2\alpha} + \varphi_2 \delta_{3\alpha} \right) \quad (2.92)$$

2.9 Одноосное растяжение пластины в плоскости трансверсальной изотропии

Рассмотрим случай растяжения пластины в направлении оси Oe_1 . При таком нагружении будем искать решение в виде

$$T_{11} \neq 0, T_{22} = 0, T_{33} = 0. \quad (2.93)$$

Указанные условия позволяют получить систему

$$\begin{cases} T_{11} = k_1^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} (k_1^{n-III} - 1) \right) \\ 0 = k_2^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} (k_2^{n-III} - 1) \right) \\ 0 = k_3^{n-III} \varphi_2 \end{cases} \quad (2.94)$$

С учетом выражения для φ_γ отсюда получаем

$$l_{22} I_2^{n_2} + l_{12} I_1^{n_1} = 0 \quad (2.95)$$

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} (k_2^{n-III} - 1) = 0 \quad (2.96)$$

$$T_{11} = \frac{\varphi_4 k_1^{n-III}}{n-III} (k_1^{n-III} - k_2^{n-III}) \quad (2.97)$$

Из первого уравнения (2.95) этой системы находим

$$I_2 = -(\text{sign} I_1) \left(\frac{l_{12}}{l_{22}} \right)^{\frac{1}{n_2}} |I_1|^{\frac{n_1}{n_2}}, \quad n_1 \geq 1, \quad n_2 \geq 1 \quad (2.98)$$

Подставляя выражение для инвариантов в (2.96), получаем

$$(n_1 l_{11} I_1^{2n_1-1} + n_1 l_{12} I_1^{n_1-1} I_2^{n_2}) + \frac{1}{n-III} (k_2^{n-III} - 1) n_4 l_{44} I_4^{n_4-1} = 0 \quad (2.99)$$

С учетом первого уравнения (2.99) преобразуем второе к виду

$$\left(l_{11} - \frac{l_{12}^2}{l_{22}} \right) I_1^{2n_1-1} = -\frac{l_{44}}{n-III} \frac{n_4}{n_1} (k_2^{n-III} - 1) I_4^{n_4-1} \quad (2.100)$$

После подстановки выражений (2.83) для инвариантов преобразуем уравнение (2.100) к виду

$$\left(l_{11} - \frac{l_{12}^2}{l_{22}} \right) \left(\frac{x+y}{n-III} \right)^{2n_1-1} = -\frac{l_{44}}{n-III} \frac{n_4}{n_1} y \left(\frac{x^2+y^2}{n-III} \right)^{n_4-1} \quad (2.101)$$

где обозначены $x = k_1^{n-III} - 1$, $y = k_2^{n-III} - 1$.

Решая это уравнение, находим функцию $y = f(x)$, а затем находим зависимость $k_2 = k_2(k_1)$

$$k_2 = \left(1 + f(k_1^{n-III} - 1)\right)^{\frac{1}{n-III}} \quad (2.102)$$

После подстановки выражений (2.83) для инвариантов и (2.102), из уравнения (2.98) находим $k_3 = k_3(k_1)$ в виде функции от k_1

$$k_3 = (n - III)^{\frac{1}{n-III}} \left(1 - (\text{sign} I_1) \left(\frac{l_{12}}{l_{22}} \right)^{\frac{1}{n_2}} |I_1|^{\frac{n_1}{n_2}} \right)^{\frac{1}{n-III}} \quad (2.103)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{n - III} \left(k_1^{n-III} + f(k_1^{n-III} - 1) - 1 \right)$$

Подставляя (2.102) в (2.97) получаем зависимость от k_1 , т.е. диаграмму деформирования при одноосном растяжении (сжатии)

$$T_{11} = J n_4 l_{44} \frac{k_1^{n-III}}{n - III} \left(k_1^{n-III} - f(k_1^{n-III} - 1) - 1 \right) I_4^{n_4-1} \quad (2.104)$$

где

$$I_4 = \frac{1}{n - III} \left((k_1^{n-III} - 1)^2 + (f(k_1^{n-III} - 1))^2 \right)$$

Отношение плотностей J выражаем через функции k_1, k_2 и k_3

$$J = k_1 k_2 k_3 \quad (2.105)$$

Три функции (2.104), (2.102) и (2.103) позволяют аппроксимировать «экспериментальные» диаграммы деформирования пластины при одноосном растяжении $T_{11}^{(s)}(k_1)$, бокового сжатия $k_2^{(s)}(k_1)$ при продольном растяжении, а также поперечного сжатия $k_3^{(s)}(k_1)$.

В функциях (2.104), (2.102) и (2.103) присутствуют семь неизвестных констант: $l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4$. Поскольку число их больше, чем число «экспериментальных» диаграмм деформирования, то для определения этих констант необходимо использовать также и другие случаи деформирования.

«Экспериментальные» диаграммы деформирования находим в результате решения локальных задач МАО, возникающих при одноосном растяжении СКМ, соответствующем рассматриваемому.

2.10 Одноосное растяжение вдоль оси трансверсальной изотропии

Рассмотрим случай растяжения вдоль оси $e_3 = e_3$. При таком нагружении

$$T_{11} = 0, T_{22} = 0, T_{33} \neq 0 \quad (2.106)$$

Указанные условия позволяют получить систему

$$\begin{cases} 0 = k_1^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} (k_1^{n-III} - 1) \right) \\ 0 = k_2^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} (k_2^{n-III} - 1) \right) \\ T_{33} = k_3^{n-III} \varphi_2 \end{cases} \quad (2.107)$$

Следствием первых двух уравнений этой системы являются условия равенства нулю функций

$$\varphi_1 = 0, \varphi_4 = 0$$

Подставляя в них выражения (2.71) и (2.74), получаем уравнения для инвариантов

$$l_{11} I_1^{n_1} + l_{12} I_2^{n_2} = 0, \quad (2.108)$$

$$I_4 = 0$$

Из второго уравнения получаем

$$(k_1^{n-III} - 1)^2 + (k_2^{n-III} - 1)^2 = 0$$

Откуда находим, что при поперечном деформировании слоистой пластины деформации в обоих продольных направлениях совпадают

$$k_1 = k_2$$

Тогда уравнение (2.108) приводится к виду

$$I_1 = -(\text{sign} I_2) \left(\frac{l_{12}}{l_{11}} \right)^{\frac{1}{n_1}} |I_2|^{\frac{n_2}{n_1}}$$

Откуда находим зависимость $k_1 = k_1(k_3)$

$$k_1 = \left(\frac{n-III}{2} \right)^{\frac{1}{n-III}} \left(-(\text{sign} I_2) \left(\frac{l_{12}}{l_{11}} \right)^{\frac{1}{n_1}} |I_2|^{\frac{n_2}{n_1}} \right)^{\frac{1}{n-III}}$$

где

$$I_2 = \frac{1}{n-III} (k_3^{n-III} - 1)$$

Последнее соотношение в (2.107) позволяет нам выразить $k_1 = k_1(k_3)$ и $k_2 = k_2(k_3)$, что влечет возможность построить диаграмму деформирования $T_{33}(k_3)$

$$T_{33} = k_3^{n-III} J n_2 (l_{22} I_2^{2n_2-1} + l_{12} I_1^{n_1} I_2^{n_2-1}),$$

где

$$I_1 = \frac{2}{n-III} ((k_1(k_3))^{n-III} - 1), \quad I_2 = \frac{1}{n-III} (k_3^{n-III} - 1),$$

$$T_{33}(k_3) = -k_1^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) + k_3^{n-III} \varphi_2 \quad (2.109)$$

Эту функцию присоединяем к системе уравнений (2.104), (2.102) и (2.103) присутствуют семь неизвестных констант: $l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4$.

2.11 Формулировка задачи поиска параметров модели

Из решения локальных задач МАО мы имеем четыре серии кривых, соответствующий одноосному и двухосному растяжению

$$T_{11} = T_{11}^{(\ominus)}(k_1) \quad (2.110)$$

$$T_{33} = T_{33}^{(\ominus)}(k_3) \quad (2.111)$$

$$k_2 = k^{(\ominus)}_2(k_1) \quad (2.112)$$

$$k_3 = k^{(\ominus)}_3(k_1) \quad (2.113)$$

Для каждого конкретного набора: $l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4$. могут быть построены соответствующие кривые для трансверсально-изотропного материала, которые назовём теоретическими.

Задача нахождения параметров: $l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4$. формулируется как задача минимизации некоторой метрики, характеризующей несоответствие теоретической диаграммы для конкретного набора параметров соответствующей экспериментальной.

$$R(T, T^{(\ominus)}) \rightarrow \min_{l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4} \quad (2.114)$$

В качестве примера такой метрики приведем

$$R_2(T, T^{(\ominus)}) = \sum_{\alpha=1}^N (z_{1\alpha}(k_{1\alpha}) + z_{2\alpha}(k_{3\alpha}) + z_{3\alpha}(k_{1\alpha}) + z_{4\alpha}(k_{1\alpha})) \quad (2.115)$$

$$z_{1\alpha}(k_{1\alpha}) = \left(1 - \frac{T_{11}(k_{1\alpha})}{T_{11}^{(\ominus)}(k_{1\alpha})} \right)^2,$$

$$z_{2\alpha}(k_{3\alpha}) = \left(1 - \frac{T_{33}(k_{3\alpha})}{T_{33}^{(\ominus)}(k_{3\alpha})} \right)^2,$$

$$z_{3\alpha}(k_{1\alpha}) = \left(1 - \frac{k_2(k_{1\alpha})}{k_2^{(\ominus)}(k_{1\alpha})} \right)^2,$$

$$z_{4\alpha}(k_{1\alpha}) = \left(1 - \frac{k_3(k_{1\alpha})}{k_3^{(\ominus)}(k_{1\alpha})} \right)^2.$$

Используя приведенную метрику, можно получить классический МНК и минимизировать среднеквадратичное отклонение теоретических значений компонент тензора напряжений Коши от экспериментальных в конечном числе контрольных точек.

Для решения задачи минимизации (2.114) использовался алгоритм оптимизации Нелдера–Мида, который относится к методам безусловной оптимизации, не требующим для своей работы вычисления производных.

2.12 Расчет параметров модели эффективного слоистого композиционного материала как трансверсально-изотропной среды

Были проведены расчеты по разработанной методике для слоистого композита, ЯП которого состояла из двух материалов: дуотан и каучук СКН. На рисунках 2.21 – 2.26 представлены графики диаграмм деформирования $P_{11} = P_{11}^{(э)}(k_1)$, $P_{33} = P_{33}^{(э)}(k_3)$ и $k_2 = k_2^{(э)}(k_1)$, полученные с помощью численного «эксперимента» (на основе прямого решения локальных задач на ЯП) для моделей A_7 и A_7 с помощью аппроксимации на основе модели ЭТИС.

Погрешность аппроксимации рассмотренных «экспериментальных» данных составила – 10-12%.

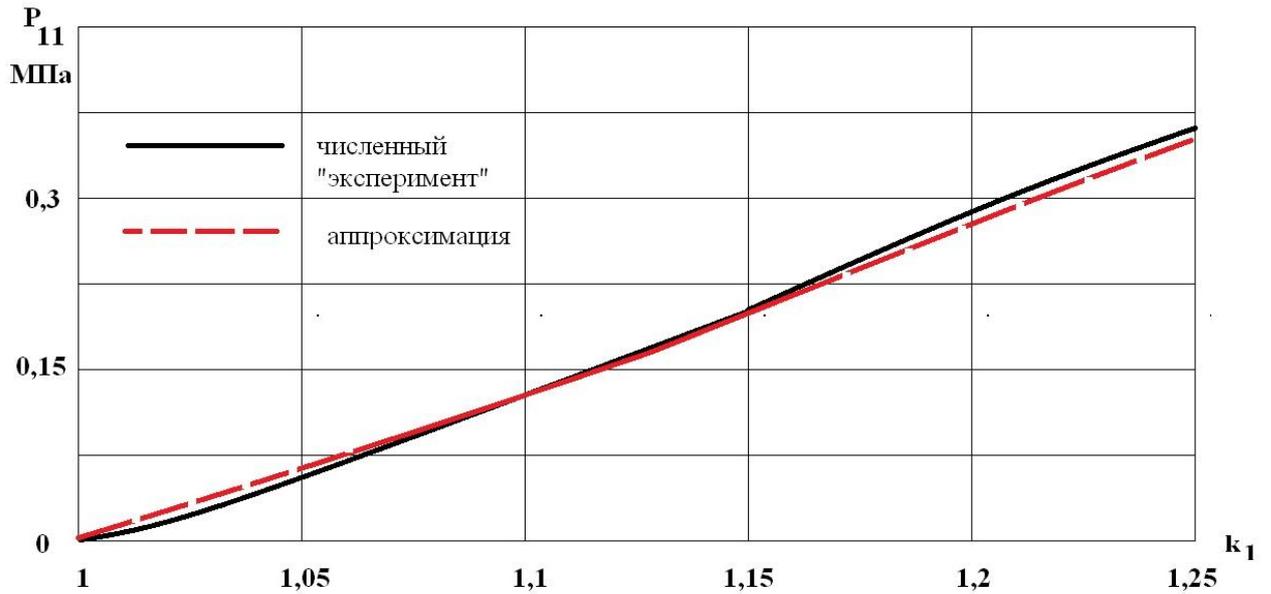


Рисунок 2.21 – Аппроксимация численного «эксперимента» – диаграммы деформирования $P_{11} = P_{11}^{(э)}(k_1)$ при одноосном деформирования пластины с помощью модели A_7 ЭТИС для двухслойного композита дуотан-каучук СКН

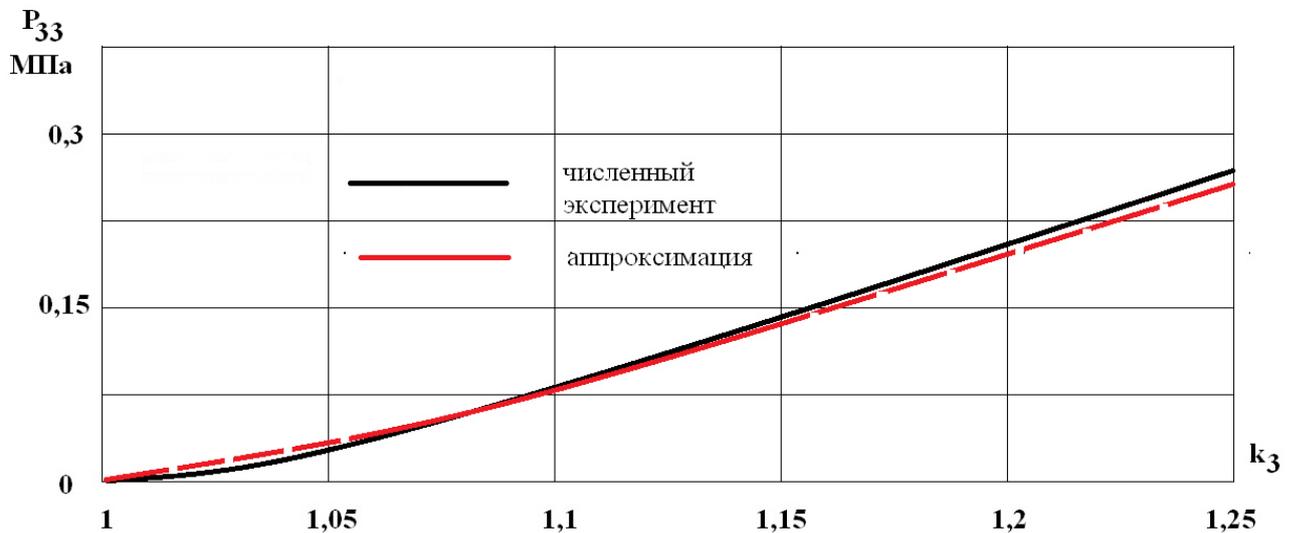


Рисунок 2.22 – Аппроксимация численного «эксперимента» – диаграммы деформирования $P_{33} = P_{33}^{(э)}(k_3)$ при одноосном растяжении пластины с помощью модели A_7 ЭТИС для двухслойного композита дуотан-каучук СКН

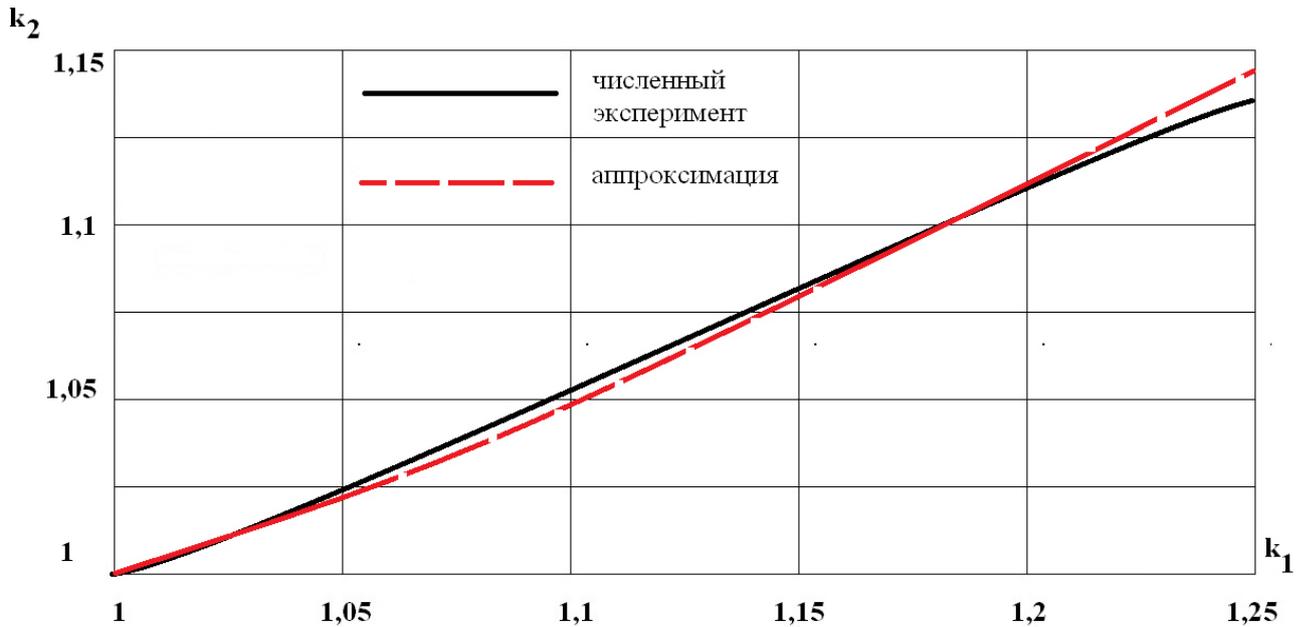


Рисунок 2.23 – Аппроксимация численного «эксперимента» – диаграммы деформирования $k_2 = k_2^{(3)}(k_1)$ при одноосном растяжении пластины с помощью модели A_7 ЭТИС для двухслойного композита дуотан-каучук СКН

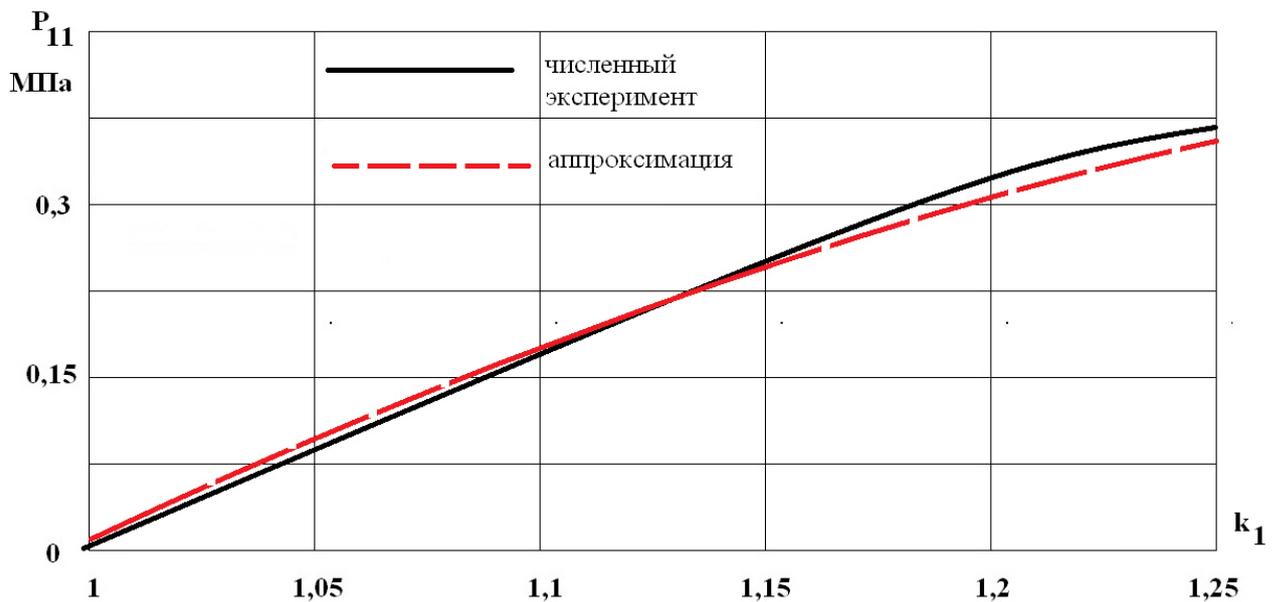


Рисунок 2.24 – Аппроксимация численного «эксперимента» – диаграммы деформирования $P_{11} = P_{11}^{(3)}(k_1)$ при одноосном деформировании пластины с помощью модели A_7 ЭТИС для двухслойного композита дуотан-каучук СКН

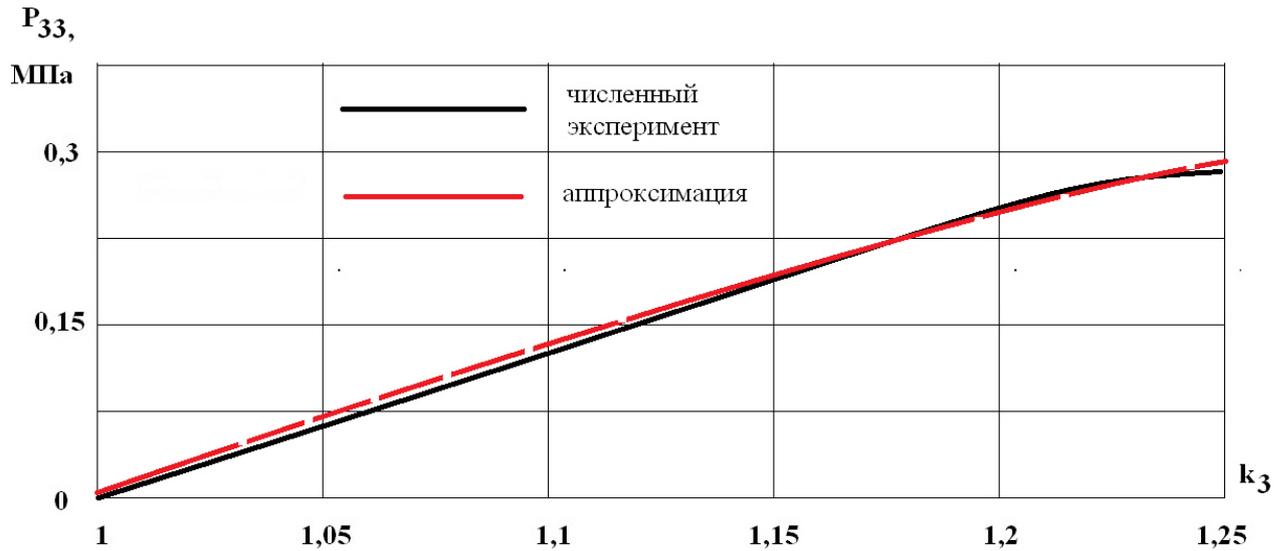


Рисунок 2.25 – Аппроксимация численного «эксперимента» – диаграммы деформирования $P_{33} = P_{33}^{(э)}(k_3)$ при одноосном растяжении пластины с помощью модели A_v ЭТИС для двухслойного композита дуотан-каучук СКН

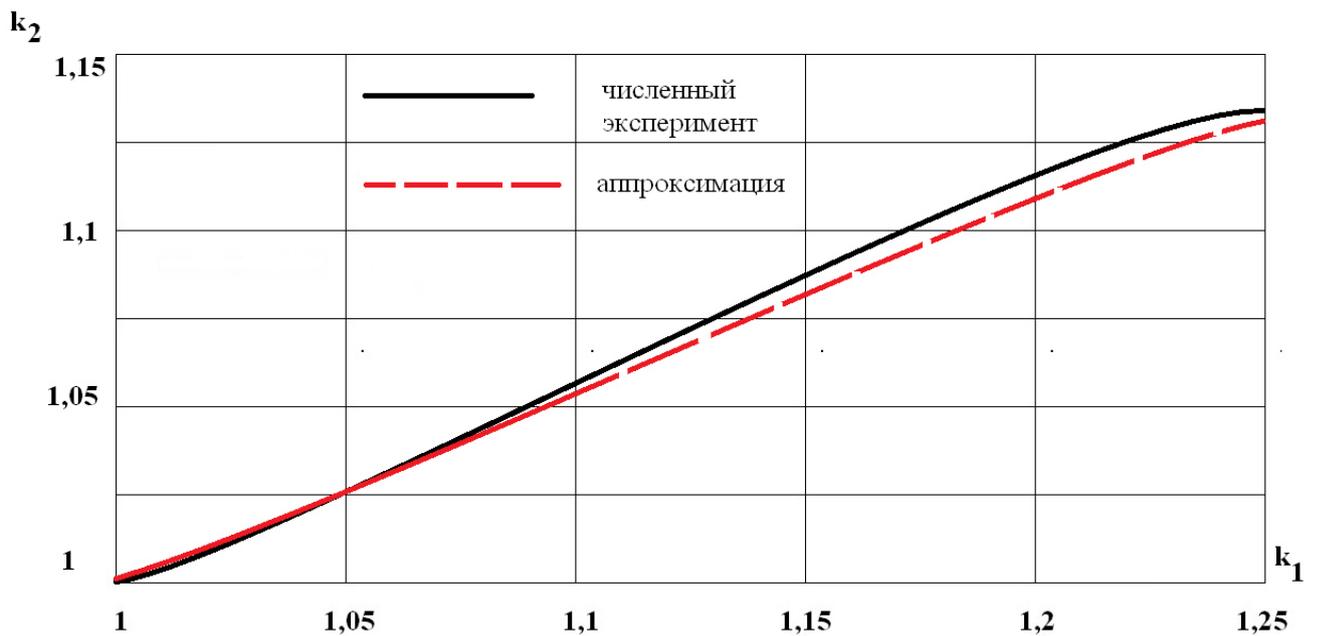


Рисунок 2.26 – Аппроксимация численного «эксперимента» – диаграммы деформирования $k_2 = k_2^{(э)}(k_1)$ при одноосном растяжении пластины с помощью модели A_v ЭТИС для двухслойного композита дуотан-каучук СКН

3 Разработка эффективных определяющих соотношений для несжимаемых трансверсально-изотропных композитов

3.1 Решение локальной задачи нулевого приближения для несжимаемых материалов

Найдем формальное решение локальной задачи (1.117) – (1.123) для несжимаемой упругой среды.

Аналогично сжимаемой среде задача является нелинейной, но одномерной – в ней все функции зависят только от ξ . Интегрируя уравнения равновесия (1.117) и учитывая условия идеального контакта (1.83), делаем вывод, что напряжения в ЯП постоянны:

$$P^{3j(0)} = C^j = const$$

Из девяти компонент градиента деформации $F^{(0)k}_l$ от координаты ξ зависят только три компоненты, а остальные шесть совпадают с компонентами осредненного градиента. Тогда, подставляя (2.8) в (1.117) для каждого слоя будет получена система нелинейных алгебраических уравнений, которую можно рассматривать относительно трех компонент $F^{k(0)}_3$ и $p^{(0)}$.

$$\begin{cases} C^j = -p^{(0)}(F^{-1})^{(0)3j} + \mathcal{F}^{(n)03j}(F^{(0)k}_3, \bar{F}^k_L, \xi) \\ \det(F^{(0)k}_l) = 1 \\ \langle p^{(0)} \rangle = p \end{cases} \quad (3.1)$$

Средний градиент \bar{F}^k_l в этой системе считается известным и удовлетворяющим условию несжимаемости (1.35). Поэтому система из двух первых уравнений системы (3.1) будет независимой только для $N-1$ слоя, а для всех N слоев эта система будет зависимой. В связи с этим условие несжимаемости для одного из слоев заменено условием нормировки $\langle p^{(0)} \rangle = p$.

Далее записывается формальное решение в виде

$$F_3^{k(0)} = \mathcal{G}^{(n)k}(C^j, \bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi), \quad (3.2)$$

$$p^{(0)} = \mathcal{P}^{(n)}(C^j, \bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi)$$

Используя выражение (2.8), получаем систему трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно перемещений $u^{k(1)}$

$$\bar{F}_3^k + u^{k(1)} = \mathcal{G}^{(n)k}(C^j, \bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi) \quad (3.3)$$

которая легко интегрируется

$$u^{k(1)} = \int_{-0.5}^{\xi} \mathcal{G}^{(n)k}(C^j, \bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi) d\xi - \bar{F}_3^k \xi + B^k \quad (3.4)$$

(B^k – константы интегрирования, условия идеального контакта автоматически выполняются)

Подставляя выражение (3.4) в условие нормировки (1.122), находим константы B^k :

$$B^k = - \left\langle \int_{-0.5}^{\xi} \mathcal{G}^{(n)k}(C^j, \bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi) d\xi \right\rangle \quad (3.5)$$

После подстановки выражения (3.4) в условие периодичности (1.123), будет получено следующее уравнение

$$\left\langle \mathcal{G}^{(n)k}(C^j, \bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi) \right\rangle = \bar{F}_3^k \quad (3.6)$$

которое можно рассматривать как нелинейное алгебраическое уравнение относительно констант C^j .

Записывается формальное решение этого уравнения следующим образом:

$$C^j = \mathcal{S}^{(n)j}(\bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi) \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.2) и (3.3), получим

$$F_3^{k(0)} = \mathcal{G}^{(n)k} \left(\mathcal{S}^{(n)j}(\bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi), \bar{F}_L^k, \xi \right) \quad (3.8)$$

$$p^{(0)} = \mathcal{P}^{(n)} \left(\mathcal{S}^{(n)j}(\bar{F}_L^k, \bar{p}, \xi), \bar{F}_L^k, \xi \right)$$

$$u^{k(1)}_{/3} = \mathcal{G}^k \left(\mathcal{S}^j(\bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi), \bar{F}_L^k, \xi \right) - \bar{F}_3^k$$

После подстановки третьего выражения в (1.120), находим соотношение между градиентом $F_l^k{}^{(0)}$ и осредненным градиентом \bar{F}_j^k :

$$F_l^k{}^{(0)} = \bar{F}_l^k + \left(\mathcal{G}^k \left(\mathcal{S}^j(\bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi), \bar{F}_L^k, \xi \right) - \bar{F}_3^k \right) \delta_{l3} \quad (3.9)$$

Подставляя выражение (3.8) и (3.9) в (1.118), находим компоненты тензора Пиолы-Кирхгофа в нулевом приближении

$$\begin{aligned} P^{ij(0)} = & -\mathcal{P} \left(\mathcal{S}^j(\bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi), \bar{F}_L^k, \xi \right) (F^{-1})^{(0)ij} + \\ & + \mathcal{F}^{0ij} \left(\bar{F}_l^k + \left(\mathcal{G}^k \left(\mathcal{S}^j(\bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi), \bar{F}_L^k, \xi \right) - \bar{F}_3^k \right) \delta_{l3}, \xi \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для определения осредненных напряжений \bar{P}^{ij} осредняем соотношения (3.10)

$$\bar{P}^{ij} = -\bar{p} \bar{F}^{-1ij} + \left\langle \mathcal{F}^{0ij} \left(\bar{F}_l^k + \left(\mathcal{G}^k \left(\mathcal{S}^j(\bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi), \bar{F}_L^k, \xi \right) - \bar{F}_3^k \right) \delta_{l3}, \xi \right) \right\rangle \quad (3.11)$$

Осреднив второе уравнение системы (3.8), получаем

$$\bar{p} = \left\langle \mathcal{P} \left(\mathcal{S}^j(\bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi), \bar{F}_L^k, \xi \right) \right\rangle \quad (3.12)$$

Здесь учтено свойство (1.151). Формула (3.11) получена из условия несжимаемости компонентов композиционного материала. Вместо нее может быть использовано условие несжимаемости (1.139) композиционного материала в целом, которое является следствием несжимаемости отдельных компонентов.

Решая совместно (3.11) и (3.12) можно найти зависимость $\bar{P}^{ij}(\bar{F}_l^k, \xi)$, $\bar{p} = (\bar{F}_l^k, \xi)$.

3.2 Численный алгоритм построения определяющих соотношений несжимаемого композита

Предложен следующий численный алгоритм вычисления значений средних напряжений $\bar{P}^{ij}(\bar{F}_l^k, \xi)$, и гидростатического давления $\bar{p} = (\bar{F}_l^k, \xi)$ по заданным значениям \bar{F}_{ij} .

1. Задаются компоненты \bar{F}_{ij} и начальное приближение \bar{p} , удовлетворяющие условию несжимаемости;

2. Выбираются начальные значения $F_{ij}^{[\alpha]}$, $p^{[\alpha]}$ для каждой α -ой компоненты композита так, чтобы $\bar{F}_{ij} = \langle F_{ij} \rangle$, $\bar{p} = \langle p \rangle$;

3. Для каждой компоненты композита решаются локальные задачи, в результате чего получаем тензор напряжений в каждой компоненте СКМ $P_{ij}^{[\alpha]}$.

4. Составляется значение целевой функции, представляющей собой невязку

$$R = \sum_{j,\alpha,\beta} \left(P_{3j}^{[\alpha]} - P_{3j}^{[\beta]} \right)^2$$

5. Если невязка велика $R > \varepsilon$, то выбирается следующее приближение $F_{ij}^{[\alpha]}$ $p^{[\alpha]}$ так, чтобы $\bar{F}_{ij} = \langle F_{ij} \rangle$, $\bar{p} = \langle p \rangle$ и шаги 3.–5. повторяются.

6. Проверяются граничные условия. Если они не удовлетворены, то выбирается следующее приближение \bar{p} и шаги 2.–5. проводятся заново.

3.3 Задача об одноосном растяжении слоистой несжимаемой композитной пластины

Рассмотрим задачу об одноосном растяжении пластины из слоистого несжимаемого композиционного материала. Для этой задачи средний тензор

деформаций композиционного материала имеет три ненулевые компоненты, которые не зависят от координат X^i

$$\bar{F}_1^1 = 1 + u^{1(0)}_{,1}, \quad \bar{F}_2^2 = 1 + u^{2(0)}_{,2}, \quad \bar{F}_3^3 = 1 + u^{3(0)}_{,3} \quad (3.13)$$

остальные $\bar{F}_i^k = 0$.

Отсюда находим закон движения пластины из осредненного композита при одноосном растяжении

$$x^\gamma = \bar{F}_\gamma^\gamma X^\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

Из условия несжимаемости (1.35) следует, что независимыми являются только две компоненты \bar{F}_γ^γ

$$\bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2 \bar{F}_3^3 = 1 \quad (3.15)$$

Будем искать решение локальной задачи нулевого приближения (1.117) – (1.123) для случая одноосного растяжения в виде

$$F^{(0)k}_3 = F^{(0)3}_3 \delta_3^k, \quad F^{(0)k}_l = \sum_{\gamma=1}^3 F^{(0)\gamma}_\gamma \delta_\gamma^k \delta_\gamma^l, \quad C^j = C^3 \delta_3^j \quad (3.16)$$

Тогда из условия несжимаемости следует, что все градиенты деформаций слоев совпадают со средним градиентом деформаций

$$F^{(0)k}_l = \bar{F}_l^k \quad (3.17)$$

В этом случае система (3.1) примет вид:

$$C^3 = -p^{(0)} / \bar{F}_3^3 + \mathcal{F}^{(n)033}(\bar{F}_\gamma^\gamma, \xi) \quad (3.18)$$

$$\langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}$$

и допускает решение в явном виде относительно C^3 и $p^{(0)}$

$$C^3 = -\bar{p} / \bar{F}_3^3 + \left\langle \mathcal{F}^{(n)033}(\bar{F}_\gamma^\gamma, \xi) \right\rangle \quad (3.19)$$

$$p^{(0)} = \bar{p} + \bar{F}_3^3 \left(\mathcal{F}^{(n)033}(\bar{F}_\gamma^\gamma, \xi) - \left\langle \mathcal{F}^{(n)033}(\bar{F}_\gamma^\gamma, \xi) \right\rangle \right) \quad (3.20)$$

Следует отметить, что уравнение (3.6) выполняется тождественно. Формулы (3.19) – (3.20) вместе с $u^{3(1)}_{/3} = 0$ представляют собой явный вид решения (3.8) для

одноосного растяжения. Компоненты тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа в нулевом приближении для данной задачи выразятся по формуле

$$P^{ij(0)} = -\left(p^{(0)} / \bar{F}^\gamma\right) \delta_\gamma^i \delta_\gamma^j + \mathcal{F}^{0ij(n)}(\bar{F}^\gamma, \xi) \quad (3.21)$$

Осредняя это выражение получим осредненное определяющее соотношение

$$\bar{P}^{ij} = -\left(\bar{p} / \bar{F}^\gamma\right) \delta_\gamma^i \delta_\gamma^j + \left\langle \mathcal{F}^{0ij(n)}(\bar{F}^\gamma, \xi) \right\rangle \quad (3.22)$$

Это выражение для компонент осредненного тензора напряжений Коши принимают вид

$$\bar{T}^{\gamma\gamma} = -\bar{p} + F^{\gamma\gamma} \left\langle \mathcal{F}^{0\gamma\gamma(n)}(\bar{F}^\beta, \xi) \right\rangle, \quad \gamma = 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

Для замыкания системы (3.23) воспользуемся граничными условиями на боковых поверхностях композиционного материала: $\bar{T}^{22} = \bar{T}^{33} = 0$ при одноосном растяжении. В силу того, что напряжения $\bar{T}^{\gamma\gamma}$ в пластине однородны, получаем из этих граничных условий

$$\begin{aligned} \bar{T}^{11} &= -\bar{p} + F^{11} \left\langle \mathcal{F}^{011(n)}(\bar{F}^\gamma, \xi) \right\rangle \\ 0 &= -\bar{p} + F^{22} \left\langle \mathcal{F}^{022(n)}(\bar{F}^\gamma, \xi) \right\rangle \\ 0 &= -\bar{p} + F^{33} \left\langle \mathcal{F}^{033(n)}(\bar{F}^\gamma, \xi) \right\rangle \\ \bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2 \bar{F}_3^3 &= 1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Перейдя к тензору Пиолы–Кирхгофа, получаем систему

$$\begin{aligned} \bar{P}^{11} &= -\bar{p} / F^{11} + \left\langle \mathcal{F}^{011(n)}(\bar{F}^\gamma, \xi) \right\rangle \\ 0 &= -\bar{p} / F^{22} + \left\langle \mathcal{F}^{022(n)}(\bar{F}^\gamma, \xi) \right\rangle \\ 0 &= -\bar{p} / F^{33} + \left\langle \mathcal{F}^{033(n)}(\bar{F}^\gamma, \xi) \right\rangle \\ \bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2 \bar{F}_3^3 &= 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Это система четырех уравнений относительно четырех неизвестных: \bar{P}^{11} , \bar{p} , \bar{F}_2^2 , \bar{F}_3^3 . Решая эту систему, находим диаграмму деформирования несжимаемого композиционного материала при одноосном растяжении

$$\bar{P}^{11} = \bar{P}^{11}(\bar{F}_1^1) \quad (3.26)$$

Для решения этой системы воспользуемся алгоритмом, предложенным в п.3.2. Для случая одноосного нагружения он несколько упрощается.

1. Задаем значение компоненты \bar{F}_1^1 , и $\varepsilon > 0$;
2. Выбираем начальные значения неизвестных $\bar{F}_2^2, \bar{P}^{11}, \bar{p}$;
3. Находим $\bar{F}_3^3 = \frac{1}{\bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2}$ из условия несжимаемости;
4. Для каждого слоя находим определяющие соотношения, которые будут являться кусочно-постоянными функциями

$$\mathcal{F}^{(n)0ij}(\bar{F}_\gamma^\gamma, \xi) = \mathcal{F}^{(n)0ij}_\alpha(\bar{F}_\gamma^\gamma), \quad \xi_{\alpha-1} < \xi < \xi_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, N} \quad (3.27)$$

5. Находим осредненные определяющие соотношения

$$\bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(\bar{F}_\gamma^\gamma) = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{F}^{(n)0ij}_\alpha(\bar{F}_\gamma^\gamma) h_\alpha \quad (3.28)$$

6. Составляем невязку R

$$R^2 = \left(\bar{P}^{11} + \bar{p} / \bar{F}_1^1 - \bar{\mathcal{F}}^{(n)011}(\bar{F}_\gamma^\gamma) \right)^2 + \left(\bar{p} / \bar{F}_2^2 - \bar{\mathcal{F}}^{(n)022}(\bar{F}_\gamma^\gamma) \right)^2 + \left(\bar{p} / \bar{F}_2^2 - \bar{\mathcal{F}}^{(n)022}(\bar{F}_\gamma^\gamma) \right)^2$$

7. В соответствии с тем или иным методом минимизации выбираем следующее приближение значений неизвестных $\bar{F}_2^2, \bar{P}^{11}, \bar{p}$, уменьшающее величину невязки R ;

8. Если заданная точность ε достигнута, переходим к следующему шагу, иначе повторяем шаги 3 – 7;

9. Рассчитываем величины гидростатического давления в слоях

$$P^{(0)}_{\alpha} = \bar{p} + \bar{F}_3^3 \left(\mathcal{F}^{033}_{\alpha}(\bar{F}_{\gamma}) - \mathcal{F}^{033}_{\alpha}(\bar{F}_{\gamma}) \right) \quad (3.29)$$

10. Рассчитываем значения компонент тензора Пиолы–Кирхгофа в каждом слое

$$P^{(0)ij}_{\alpha} = -p^{(0)}_{\alpha} / \bar{F}_{\gamma} \delta_{\gamma}^i \delta_{\gamma}^j + \mathcal{F}^{0ij}_{\alpha}(\bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2, \bar{F}_3^3) \quad (3.30)$$

В соответствии с этим алгоритмом можно строится зависимость компонент осредненного тензора Пиолы–Кирхгофа в зависимости от \bar{F}_1^1 , величины среднего гидростатического давления \bar{p} , а также значения $p^{(0)}$, $P^{(0)ij}$ в каждом из слоев.

3.4 Результаты численных расчетов диаграмм одноосного деформирования для несжимаемых композитов

Для модели материала B_V были проведены численные расчеты согласно разработанному методу (п. 3.2).

На рисунках 3.1 – 3.6 показаны графики функции $P^{11}(F^{11})$, построенные с помощью описанного выше алгоритма для отдельных слоев композита с тремя различными наборами упругих констант:

слой 1 – $\mu = 0.8 \text{ МПа}$, $\beta = 1$.

слой 2 – $\mu = 1.4 \text{ МПа}$, $\beta = 1$.

слой 3 – $\mu = 0.7 \text{ МПа}$, $\beta = 0.9$.

Относительные толщины слоев $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.6$, $h_3 = 1 - h_1 - h_2 = 0.2$.

На рисунке 3.1 показаны графики функций $P^{11}(F^{11})$ для компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа P^{11} в зависимости от компоненты F^{11} осредненного градиента деформаций, которая изменялась в диапазоне от 1 до 2. Для остальных компонент осредненного градиента

принимались значения: $\bar{F}_{22} = \bar{F}_{33} = \frac{1}{\sqrt{\bar{F}_{11}}}$, $\bar{F}_{ij} = 0$, $i \neq j$. Последние равенства

соответствуют выполнению условий несжимаемости: $\det F = 1$. Такие значения соответствуют условиям одноосного деформирования слоистого композита в направлении, параллельном плоскости слоев.

Расчеты проводились для четырех значений соотношения слоев:

1. $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.6$, $h_3 = 1 - h_1 - h_2 = 0.2$;
2. $h_1 = 1$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$;
3. $h_1 = 0$, $h_2 = 1$, $h_3 = 0$;
4. $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 1$.

Случаи 2–4 соответствуют гомогенным материалам с характеристиками первого, второго и третьего слоев, соответственно. Функция $\bar{P}^{11}(\bar{F}^{11})$, представляющая собой диаграмму деформирования, для композита располагается между соответствующими функциями для отдельных его слоев, представлена на рисунке 3.1.

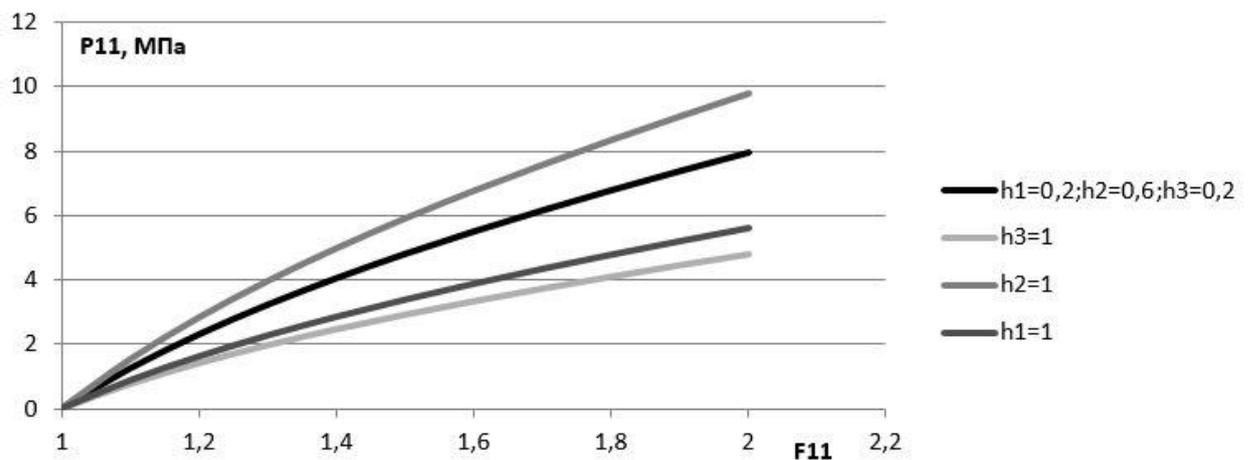


Рисунок 3.1 – Диаграммы деформирования $\bar{P}^{11}(\bar{F}^{11})$ для слоистого композита, состоящего из трех слоев и различными толщинами слоев

Для значения $\bar{F}^{11} = 2$ была рассчитана зависимость компоненты $P^{11}(\xi)$ от локальной координаты ЯП композита $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$. График распределения напряжения в слоях композита представлен на рисунке 3.2.

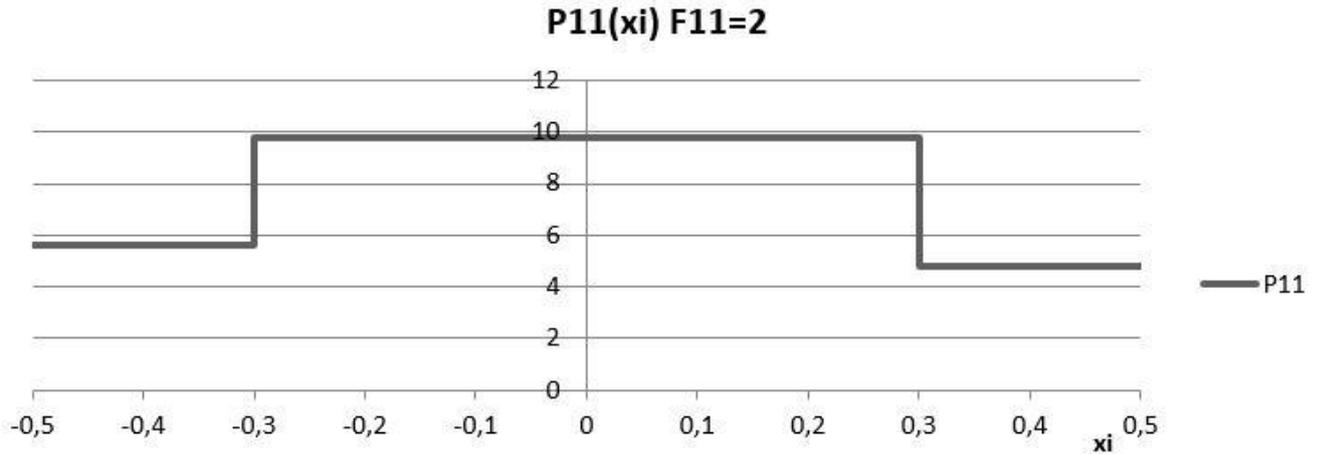


Рисунок 3.2 – Распределение компоненты напряжений $\bar{P}^{11}(\bar{F}^{11})$ в ЯП композита.

Кроме модели B_V для расчетов диаграмм деформирования при одноосном растяжении были также использованы модели B_I (рисунок 3.3), B_{II} (рисунок 3.4), B_{IV} (рисунок 3.5). Значения констант μ, β и толщины слоев были выбраны те же, что и при расчете по модели B_V .

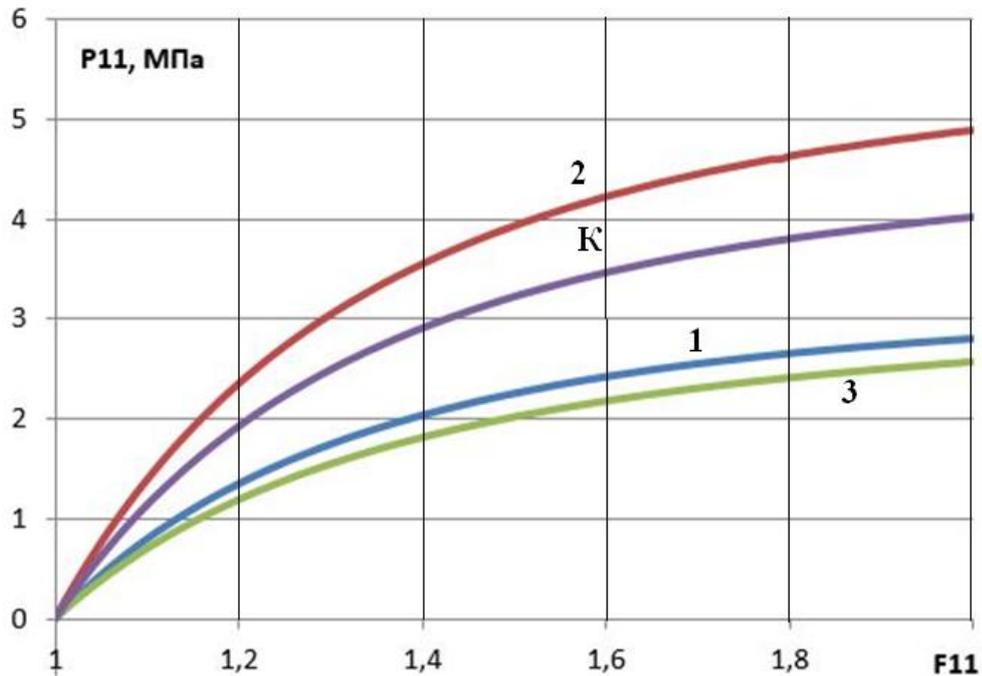


Рисунок 3.3 – Диаграмма одноосного деформирования композита с использованием модели B_I , цифры – диаграммы деформирования слоев, как однородных материалов

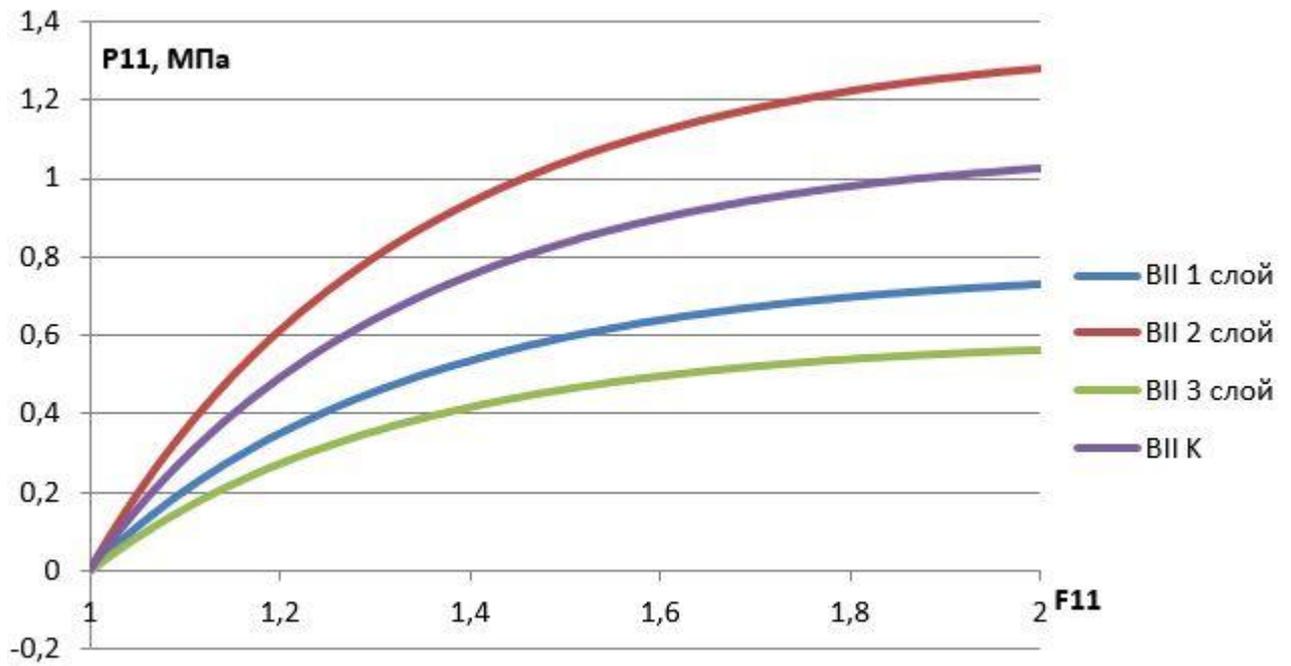


Рисунок 3.4 – Диаграмма деформирования композита модели B_{II}

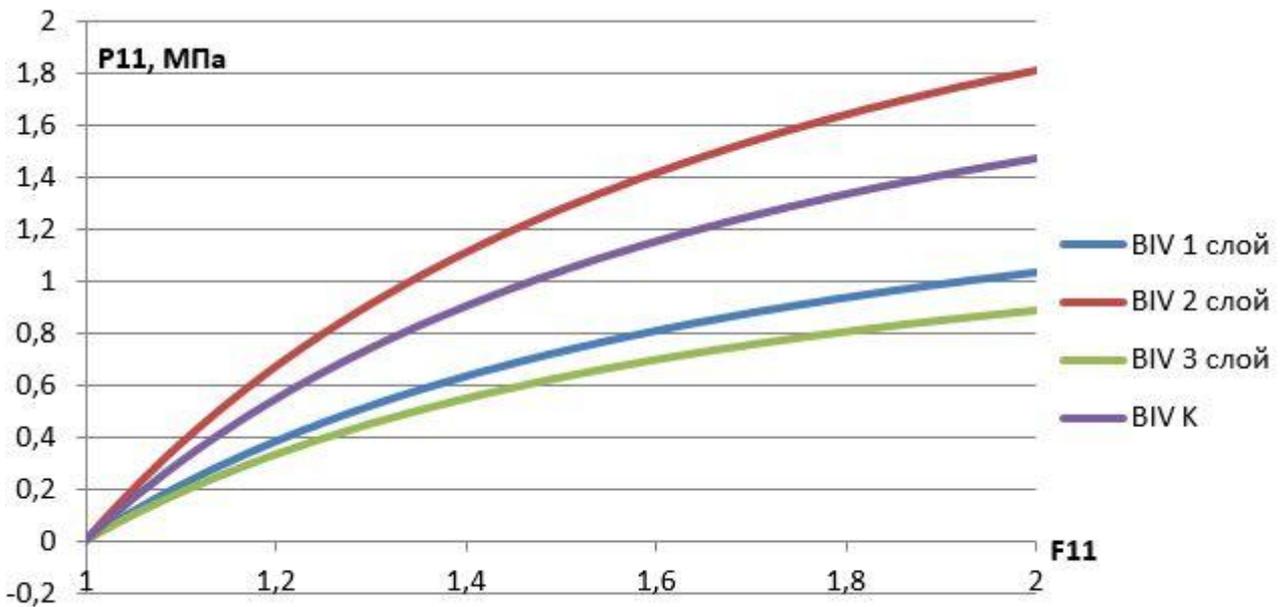


Рисунок 3.5 – Диаграмма деформирования композита модели B_{IV}

На рисунке 3.6 представлено сравнения эффективных диаграмм деформирования композитов рассмотренных моделей с одинаковыми значениями констант μ, β и соотношением слоев. Из рисунка видно, что значения констант по-разному влияют на характеристики материала в различных моделях.

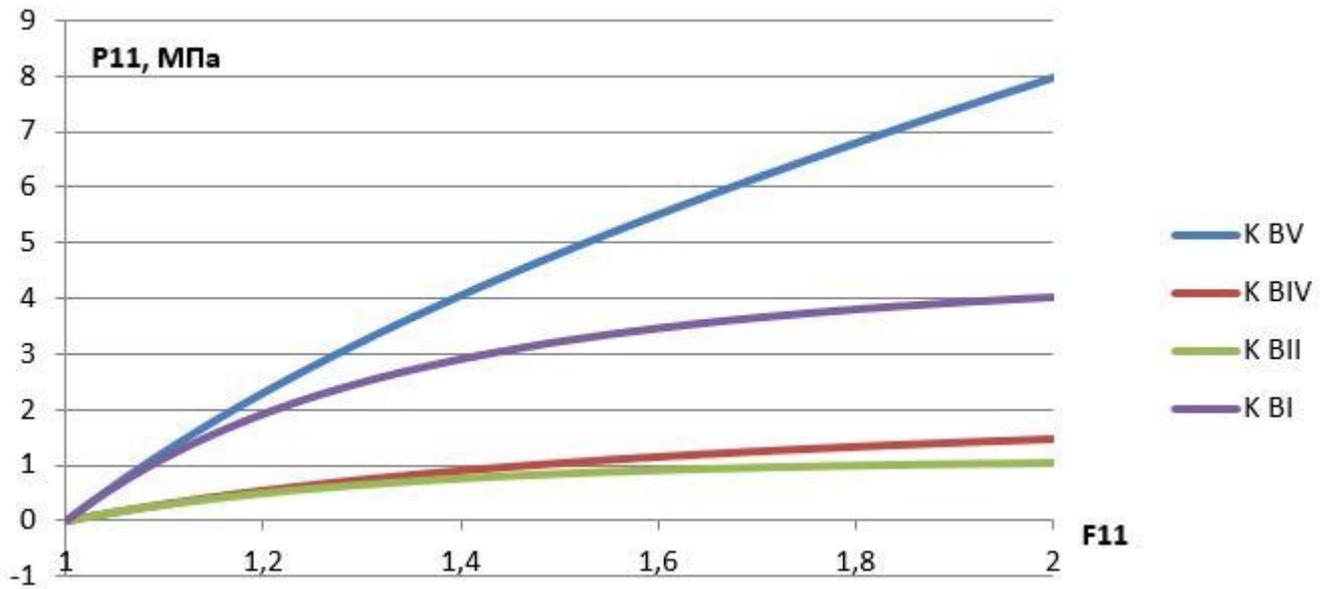


Рисунок 3.6 – Сравнение диаграмм деформирования $\bar{P}^{11}(\bar{F}_1^1)$ в различных моделях

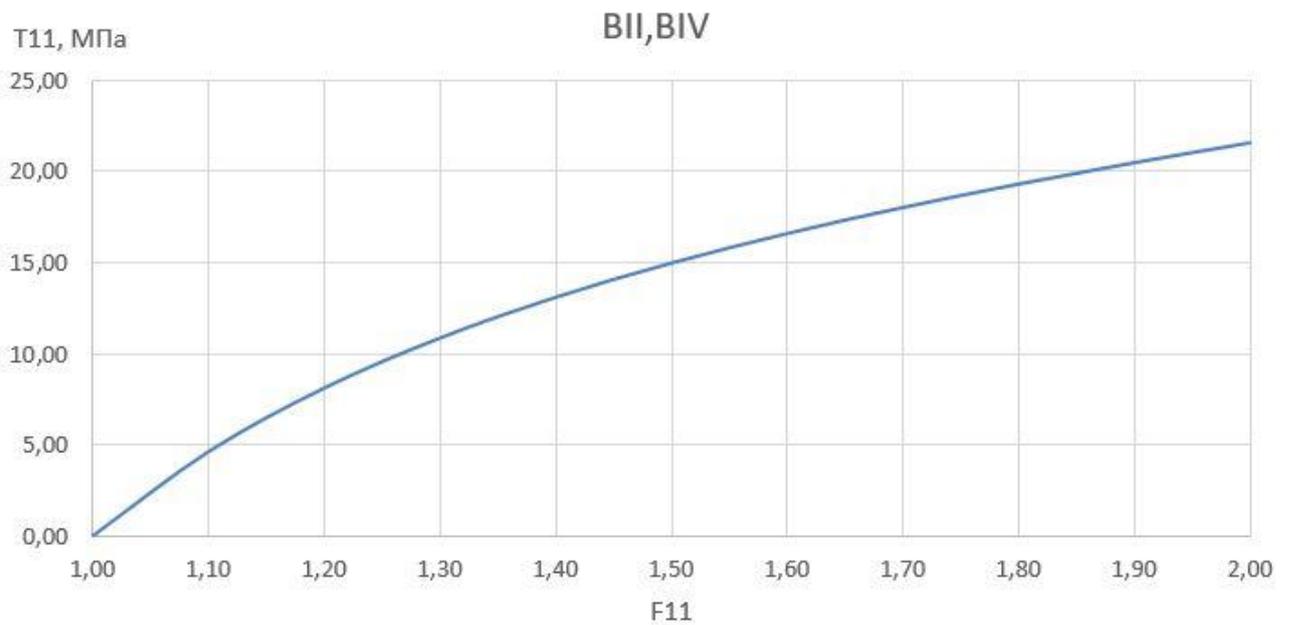


Рисунок 3.7 – Диаграмма деформирования композита 1:4:1 модели B_{II} , B_{IV} при одноосном растяжении

3.5 Задача о сдвиге несжимаемого слоистого композита

Рассмотрим модели B_n . На рисунках 3.8 – 3.9 приведены диаграммы деформирования при сдвиговой деформации бруса – графики зависимости значений компонент P^{11} , P^{12} тензора Пиолы—Кирхгофа в зависимости от значения $0 \leq F^{12} \leq 1$.

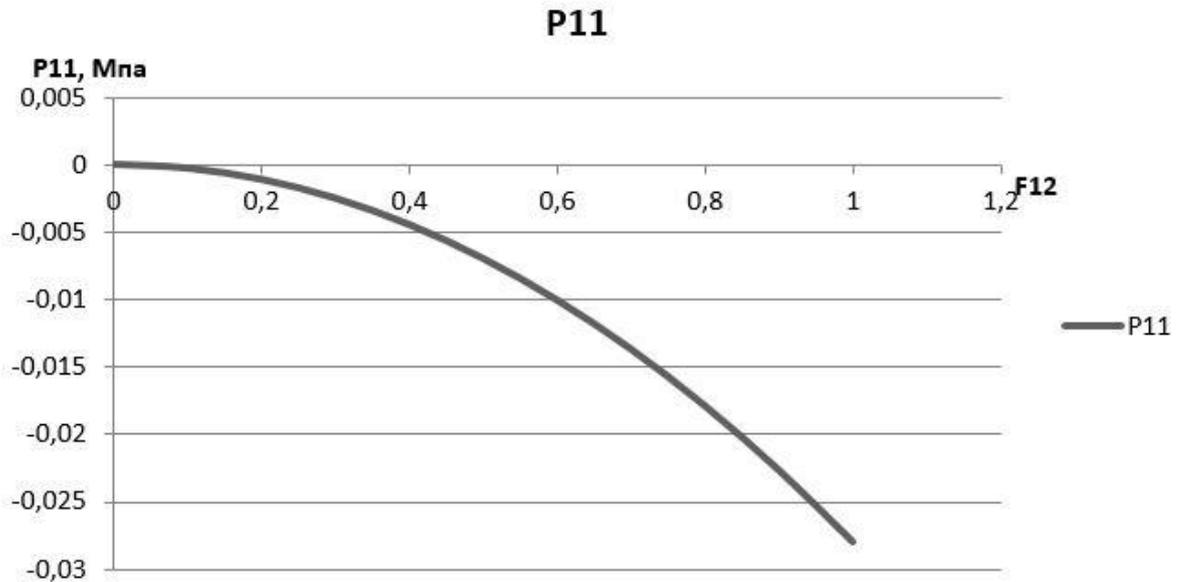


Рисунок 3.8 – Диаграмма деформирования $\bar{P}^{11}(\bar{F}^{12})$

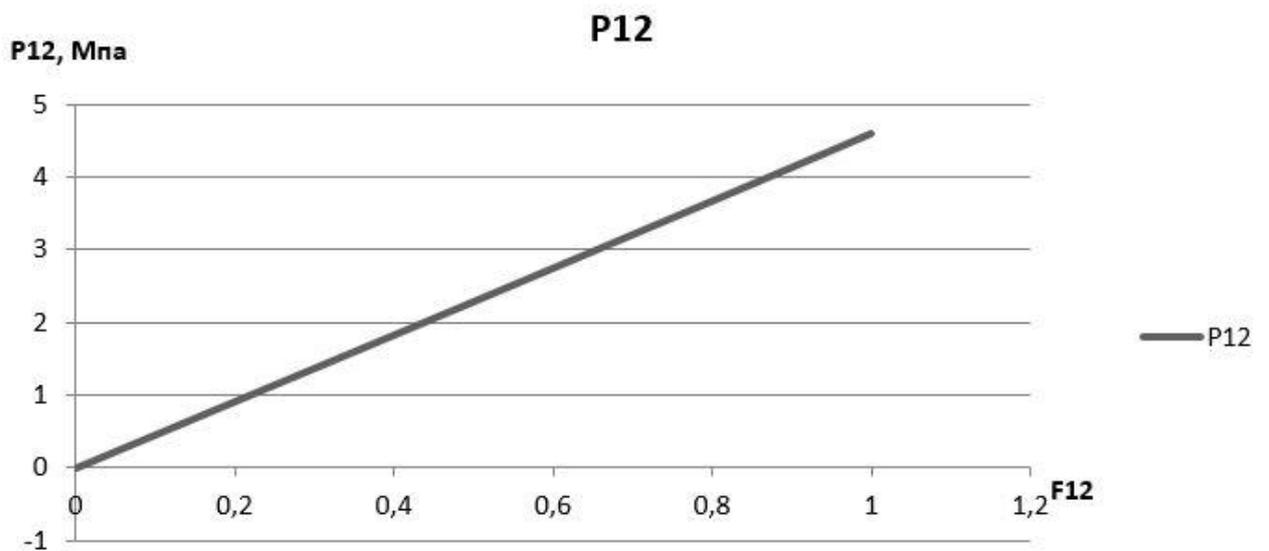


Рисунок 3.9 – Диаграмма деформирования $\bar{P}^{12}(\bar{F}^{12})$

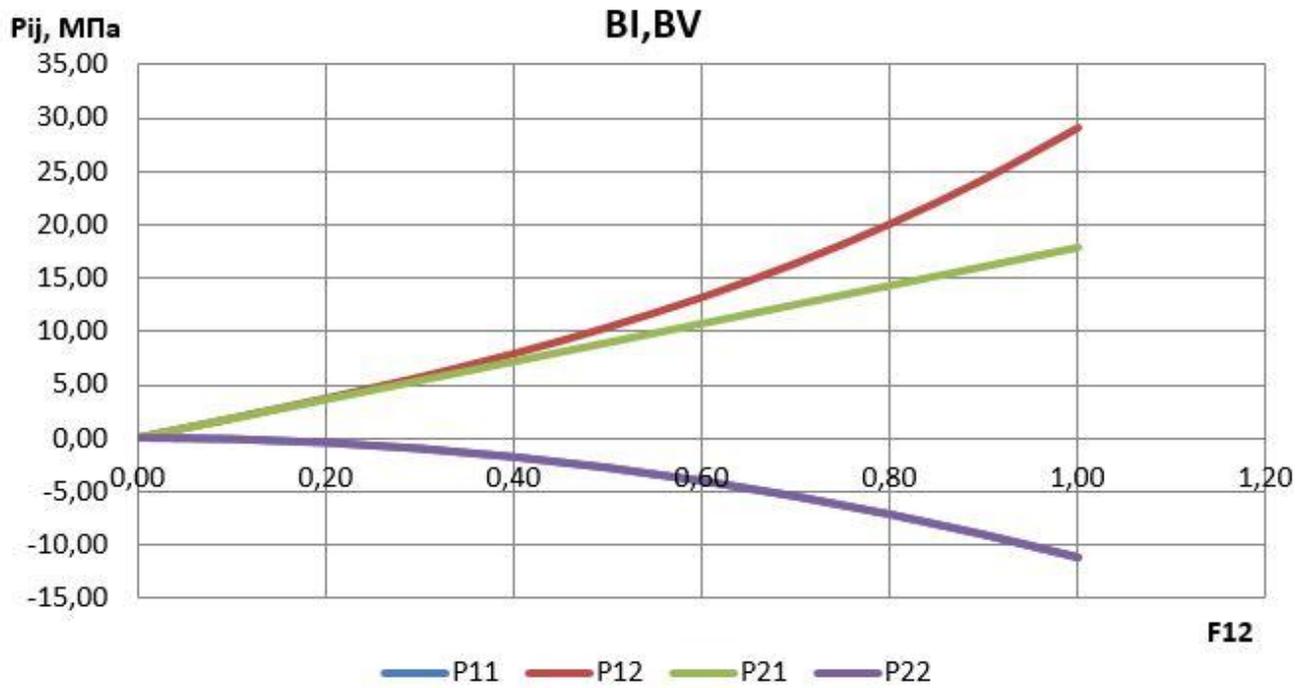


Рисунок 3.10 – Диаграмма деформирования композита 1:4:1 модели B_I , B_V при сдвиге в плоскости OX^1X^2

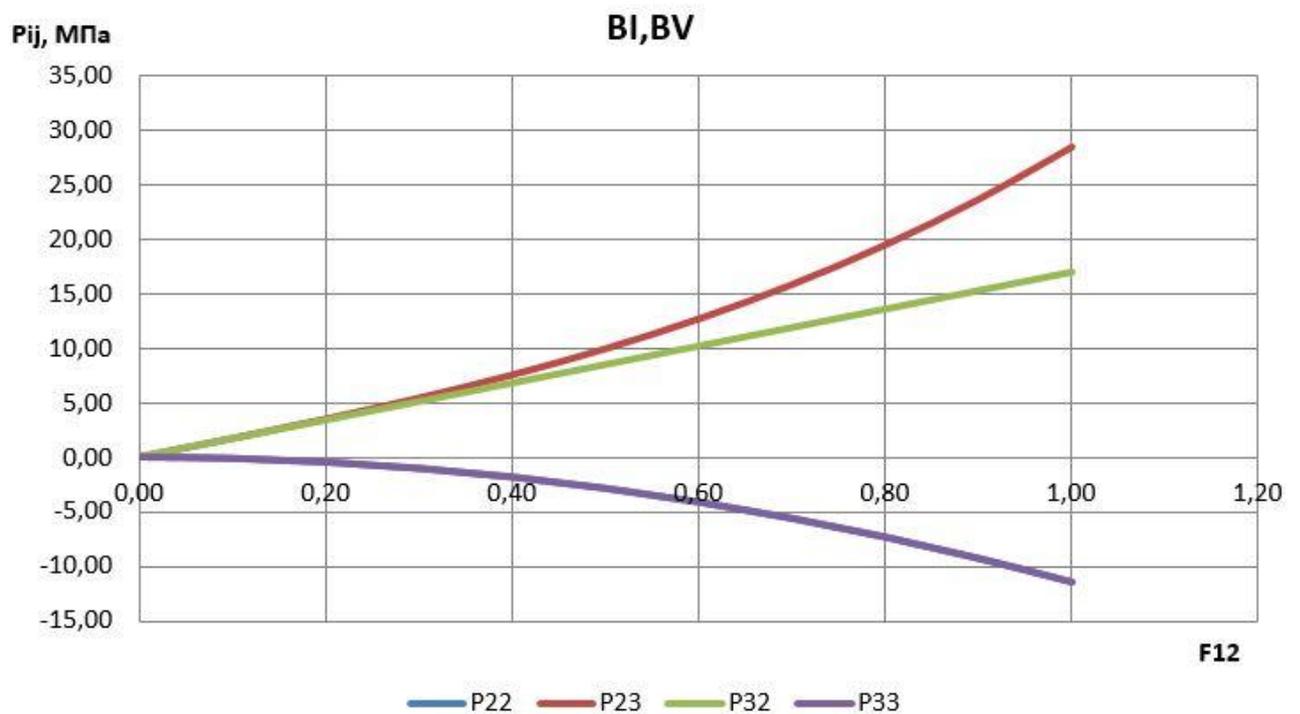


Рисунок 3.11 – Диаграмма деформирования композита 1:4:1 модели B_I , B_V при сдвиге в плоскости OX^2X^3



Рисунок 3.12 – Диаграмма деформирования композита 1:4:1 модели B_{II} , B_{IV} при сдвиге в плоскости OX^1X^2

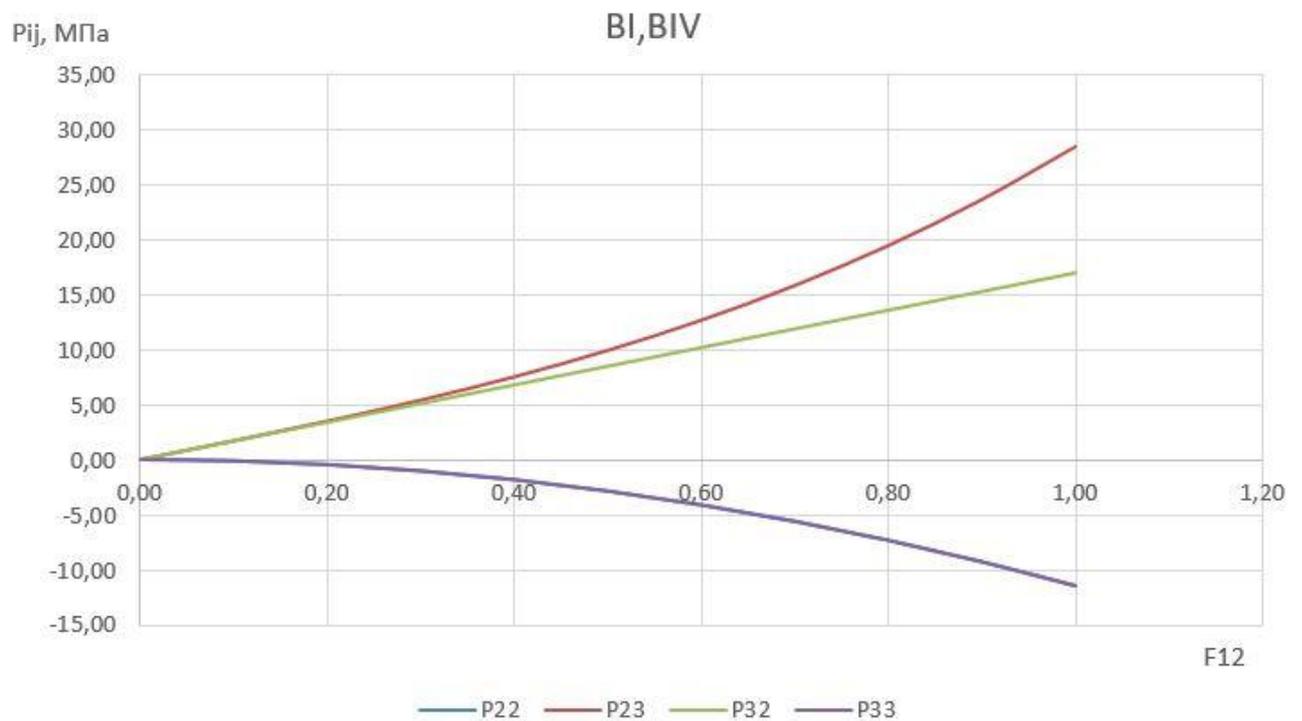


Рисунок 3.13 – Диаграмма деформирования композита 1:4:1 модели B_{II} , B_{IV} при сдвиге в плоскости OX^2X^3

3.6 Модель трансверсально-изотропных несжимаемых сред

Поскольку свойства слоистого композиционного материала не изменяются при поворотах в плоскости, параллельной слоям СКМ, то его можно считать трансверсально изотропной средой. Кроме того, поскольку, как было доказано, СКМ, состоящий из несжимаемых фаз, сам является несжимаемой средой, то рассматриваемый нами материал можно описывать при помощи универсальных моделей несжимаемых трансверсально-изотропных сред.

Наиболее общей формой таких моделей является представление в тензорных базисах.

$$\mathbf{T} = -\frac{P}{n - III} \mathbf{G}^{(n)-1} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}^{(n)}} \quad (3.31)$$

где ψ – свободная энергия Гельмгольца, являющаяся функцией инвариантов тензора меры деформаций относительно группы симметрий трансверсально-изотропной среды.

Для группы симметрий трансверсально-изотропной среды есть пять инвариантов, однако в силу условия несжимаемости один из этих инвариантов является зависимым от других четырех. Поэтому для несжимаемой трансверсально-изотропной среды верно следующее представление:

$$\mathbf{T} = -\frac{P}{n - III} \mathbf{G}^{(n)-1} + \sum_{\gamma=1}^4 \varphi_{\gamma} I_{\gamma G} \quad (3.32)$$

Выберем представление свободной энергии Гельмгольца, которое, кроме номера модели, зависит от девяти параметров, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \circ \rho \psi = \circ \rho \psi_0 + \frac{1}{2} & \left(l_{11} (I_1 - k_1)^{2n_1} + 2l_{12} (I_1 - k_1)^{n_1} (I_2 - k_2)^{n_2} + l_{22} (I_2 - k_2)^{2n_2} \right) + \\ & + l_{33} (I_3 - k_3)^{n_3} + l_{44} (I_4 - k_4)^{2n_4} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Здесь обозначены инварианты

$$I_1 = (\mathbf{E} - \mathbf{c}_3^2) \cdot \mathbf{G}^{(n)} \quad (3.34)$$

$$I_2 = \mathbf{c}_3^2 \cdot \mathbf{G}^{(n)} \quad (3.35)$$

$$I_3 = \left((\mathbf{E} - \mathbf{c}_3^2) \cdot \mathbf{G}^{(n)} \right) \cdot \left(\mathbf{c}_3^2 \cdot \mathbf{G}^{(n)} \right) \quad (3.36)$$

$$I_4 = \mathbf{G}^{(n)2} \cdot \mathbf{E} - I_2^2 + 2I_3 \quad (3.37)$$

При рассмотрении в ДСК и $\mathbf{c}_3^2 = \mathbf{e}_3^2$ вышеуказанные формулы упрощаются:

$$I_1 = G_{11}^{(n)} + G_{22}^{(n)} \quad (3.38)$$

$$I_2 = G_{33}^{(n)} \quad (3.39)$$

$$I_3 = G_{13}^{(n)2} + G_{23}^{(n)2} \quad (3.40)$$

$$I_4 = G_{11}^{(n)2} + 2G_{12}^{(n)2} + G_{22}^{(n)2} \quad (3.41)$$

Введем для этой модели начальные условия:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{n - III} \mathbf{E} \quad (3.42)$$

$$p = 0, \quad T = 0 \quad (3.43)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0 \quad (3.44)$$

Отсюда получаем значения для $I_\alpha = k_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ в начальный момент времени:

$$I_1|_{t=0} = \frac{2}{n - III}, \quad I_2|_{t=0} = \frac{1}{n - III}, \quad I_3|_{t=0} = 0, \quad I_4|_{t=0} = \frac{2}{(n - III)^2}, \quad (3.45)$$

$$k_1 = \frac{2}{n - III}, \quad k_2 = \frac{1}{n - III}, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = \frac{2}{(n - III)^2} \quad (3.46)$$

Вычислим $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}^{(n)}}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}^{(n)}} = \sum_{\gamma=1}^4 \frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma} \frac{\partial I_\gamma}{\partial \mathbf{G}^{(n)}} \quad (3.47)$$

$$I_{1G} = \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{G}} = \mathbf{E} - \mathbf{c}_3^2 = \mathbf{c}_1^2 + \mathbf{c}_2^2 \quad (3.48)$$

$$I_{2G} = \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{G}} = \mathbf{c}_3^2 \quad (3.49)$$

$$I_{3G} = \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{G}} = \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot \mathbf{G}^{(n)} \quad (3.50)$$

$$I_{4G} = \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{G}} = (2\Lambda - (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - 2\mathbf{c}_3^2 \otimes \mathbf{c}_3^2) \cdot \mathbf{G}^{(n)} \quad (3.51)$$

В ДСК формулы упрощаются и матрицы компонент $I_{\gamma G}$ будут иметь следующий вид:

$$I_{1G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$I_{2G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

$$I_{3G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{G}_{13}^{(n)} \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{23}^{(n)} \\ \mathbf{G}_{31}^{(n)} & \mathbf{G}_{32}^{(n)} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$I_{4G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11}^{(n)} & \mathbf{G}_{12}^{(n)} & 0 \\ \mathbf{G}_{21}^{(n)} & \mathbf{G}_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Вычислим производные $\varphi_\gamma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma}$:

$$\varphi_1 = \rho \partial \psi / \partial I_1 = n_1 l_{11} (I_1 - k_1)^{2n_1 - 1} + n_1 l_{12} (I_1 - k_1)^{n_1 - 1} (I_2 - k_2)^{n_2} \quad (3.56)$$

$$\varphi_2 = \rho \partial \psi / \partial I_2 = n_2 l_{22} (I_2 - k_2)^{2n_2 - 1} + n_2 l_{12} (I_1 - k_1)^{n_1} (I_2 - k_2)^{n_2 - 1} \quad (3.57)$$

$$\varphi_3 = \rho \partial \psi / \partial I_3 = n_3 l_{33} (I_3 - k_3)^{n_3 - 1} \quad (3.58)$$

$$\varphi_4 = \rho \partial \psi / \partial I_4 = n_4 l_{44} (I_4 - k_4)^{n_4 - 1} \quad (3.59)$$

Таким образом, мы привели определяющие соотношения к виду

$$\mathbf{T} = -\frac{P}{n - III} \mathbf{G}^{-1} + \sum_{\gamma=1}^4 \varphi_\gamma I_{\gamma G} \quad (3.60)$$

В компонентной записи в ДСК соотношение (3.60) примет вид:

$$\begin{aligned} T^{ij} = & -\frac{P}{n - III} (G^{-1})^{ij} + \varphi_1 (\delta_{ij} - \delta_{i3} \delta_{j3}) + \varphi_2 \delta_{i3} \delta_{j3} + \\ & + (\varphi_3 - 2\varphi_4) \left(G_{13} (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) + G_{23} (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) \right) + \\ & + 2\varphi_4 \left(G_{ij} - G_{33} \delta_{i3} \delta_{j3} \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

В матричной записи соотношение (3.60) примет вид:

$$\begin{aligned} \left(T_{ij}^{(n)} \right) = & -\frac{P}{n - III} \left((G^{-1})^{ij} \right) + \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ & + \varphi_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & G_{13}^{(n)} \\ 0 & 0 & G_{23}^{(n)} \\ G_{31}^{(n)} & G_{32}^{(n)} & 0 \end{pmatrix} + \varphi_4 \begin{pmatrix} G_{11}^{(n)} & G_{12}^{(n)} & 0 \\ G_{21}^{(n)} & G_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

После нахождения энергетического тензора напряжений тензоры напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа находятся по формулам (1.47) – (1.48).

3.7 Методика нахождения параметров модели трансверсально-изотропной несжимаемой среды

Рассмотрим СКМ как гомогенную трансверсально-изотропную среду с моделью (3.32) и осью $\mathbf{c}_3 = \mathbf{e}_3$. Предположим, что из эксперимента нам известны диаграммы деформирования этой среды. Тогда можно поставить задачу

нахождения параметров модели этой среды, соответствующих наилучшему приближению к полученным экспериментально диаграммам.

Рассмотрим уравнения движения пластины в виде:

$$x^\alpha = k_\alpha X^\alpha, \quad \dot{x}^\alpha = \dot{X}^\alpha \quad (3.63)$$

Градиент деформации примет вид

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha \mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{U} \quad (3.64)$$

Его компоненты в матричной записи:

$$F = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Условие несжимаемости примет вид

$$k_1 k_2 k_3 = 1 \quad (3.66)$$

Энергетические меры деформаций (и обратные к ним) можно выразить явно:

$$\mathbf{G}^{(n)} = \frac{1}{n-III} \mathbf{U}^{n-III} = \frac{1}{n-III} \sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha^{n-III} \mathbf{e}_\alpha^2 \quad (3.67)$$

$$(\mathbf{G}_{ij})^{(n)} = \frac{1}{n-III} \begin{pmatrix} k_1^{n-III} & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{n-III} & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{n-III} \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{G}^{-1(n)} = (n-III) \mathbf{U}^{-(n-III)} = (n-III) \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{k_\alpha^{n-III}} \mathbf{e}_\alpha^2 \quad (3.69)$$

$$\mathbf{G}^{-1(n)} = (n-III) \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1^{n-III}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^{n-III}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3^{n-III}} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Заметим, что ненулевыми будут только диагональные компоненты меры деформаций. Из формулы (3.68) получим простые выражения для инвариантов:

$$I_1 = G_{11}^{(n)} + G_{22}^{(n)} = \frac{1}{n - III} (k_1^{n-III} + k_2^{n-III}) \quad (3.71)$$

$$I_2 = G_{33}^{(n)} = \frac{1}{n - III} k_3^{n-III} \quad (3.72)$$

$$I_3 = 0 \quad (3.73)$$

$$I_4 = G_{11}^{(n)2} + G_{22}^{(n)2} = \frac{1}{n - III} (k_1^{2(n-III)} + k_2^{2(n-III)}) \quad (3.74)$$

Энергетический тензор напряжений также будет иметь диагональный вид:

$$\begin{aligned} \left(T_{ij}^{(n)} \right) = & -p \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1^{n-III}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^{n-III}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3^{n-III}} \end{pmatrix} + \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{\varphi_4}{n - III} \begin{pmatrix} k_1^{n-III} & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{n-III} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

ТО ЕСТЬ

$$T^{ij} = T_{\alpha\alpha}^{(n)} \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha}, \quad \mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha}^{(n)} \mathbf{e}_\alpha^2 \quad (3.76)$$

$$T_{\alpha\alpha}^{(n)} = -p k_\alpha^{-(n-III)} + \varphi_1 (\delta_{1\alpha} + \delta_{2\alpha}) + \varphi_2 \delta_{3\alpha} + \frac{\varphi_4}{n - III} (k_1^{n-III} \delta_{1\alpha} + k_2^{n-III} \delta_{2\alpha}) \quad (3.77)$$

Тензор напряжений Коши также будет диагонален

$$T^{ij} = T_{\alpha\alpha} \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha}, \quad \mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} \mathbf{e}_\alpha^2 \quad (3.78)$$

$$T_{\alpha\alpha} = k_\alpha^{n-III} T_{\alpha\alpha}^{(n)} \quad (3.79)$$

$$T_{\alpha\alpha} = -p + k_\alpha^{n-III} \left(\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 k_1^{n-III}}{n - III} \right) \delta_{1\alpha} + \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 k_2^{n-III}}{n - III} \right) \delta_{2\alpha} + \varphi_2 \delta_{3\alpha} \right) \quad (3.80)$$

3.8 Одноосное растяжение в плоскости трансверсальной изотропии

Рассмотрим случай растяжения перпендикулярно оси $c_3 = e_3$. Для определенности положим растяжение вдоль оси e_1 . При таком нагружении

$$T_{11} \neq 0, T_{22} = 0, T_{33} = 0 \quad (3.81)$$

Указанные условия позволяют получить систему

$$\begin{cases} T_{11} = -p + k_1^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) \\ 0 = -p + k_2^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_2^{n-III} \right) \\ 0 = -p + k_3^{(n-III)} \varphi_2 \\ k_1 k_2 k_3 = 1 \end{cases} \quad (3.82)$$

Исключая из этой системы p и выражая k_3 из условий несжимаемости, получим

$$p = k_3^{n-III} \varphi_2 \quad (3.83)$$

$$k_3^{n-III} \varphi_2 = k_2^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 k_2^{n-III}}{n-III} \right) \quad (3.84)$$

$$\left(\frac{1}{k_1 k_2} \right)^{n-III} \varphi_2 = k_2^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 k_2^{n-III}}{n-III} \right) \quad (3.85)$$

Последнее соотношение позволяет нам выразить $k_2 = k_2(k_1)$ и $k_3 = k_3(k_1)$, что влечет возможность построить зависимость

$$T_{11}(k_1) = -k_3(k_1)^{n-III} \varphi_2 + k_1^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) \quad (3.86)$$

В этой зависимости присутствуют семь неизвестных констант: l_{11} , l_{12} , l_{22} , l_{44} , n_1 , n_2 , n_4 . Их поиск нужно осуществить на основании экспериментальной диаграммы $T_{11}^{(3)}(k_1)$, полученной в результате решения локальных задач МАО, возникающих при одноосном растяжении СКМ, соответствующем рассматриваемому.

3.9 Расчет диаграмм деформирования для двухслойного композиционного материала, состоящего из реальных материалов

Для дальнейших расчетов были взяты реальные значения констант μ, β для резины (таблица 3.1) и полиуретана (таблица 3.2).

Таблица 3.1 – Упругие характеристики резины в моделях B_n

n	μ , МПа	β
I	5,145	0,13
II	19,11	1
IV	19,11	-1
V	5,145	-0,13
V*	4,41	1

Таблица 3.2 – Упругие характеристики полиуретана в моделях B_n

n	μ , МПа	β
I	3,15	0,616
II	11,56	-0,45
IV	11,45	0,45
V	3,15	-0,616

Для расчетов был выбран двухслойный композит из резины и полиуретана с толщинами слоев $h_p = 2/3$, $h_n = 1/3$. В результате расчетов с указанными в таблицах значениями упругих констант были получены диаграммы деформирования композитов, которые совпали для пары моделей (B_I, B_V) , представленных на рисунке 3.14, а также для пары (B_{II}, B_{IV}) , представленных на рисунке 3.15.

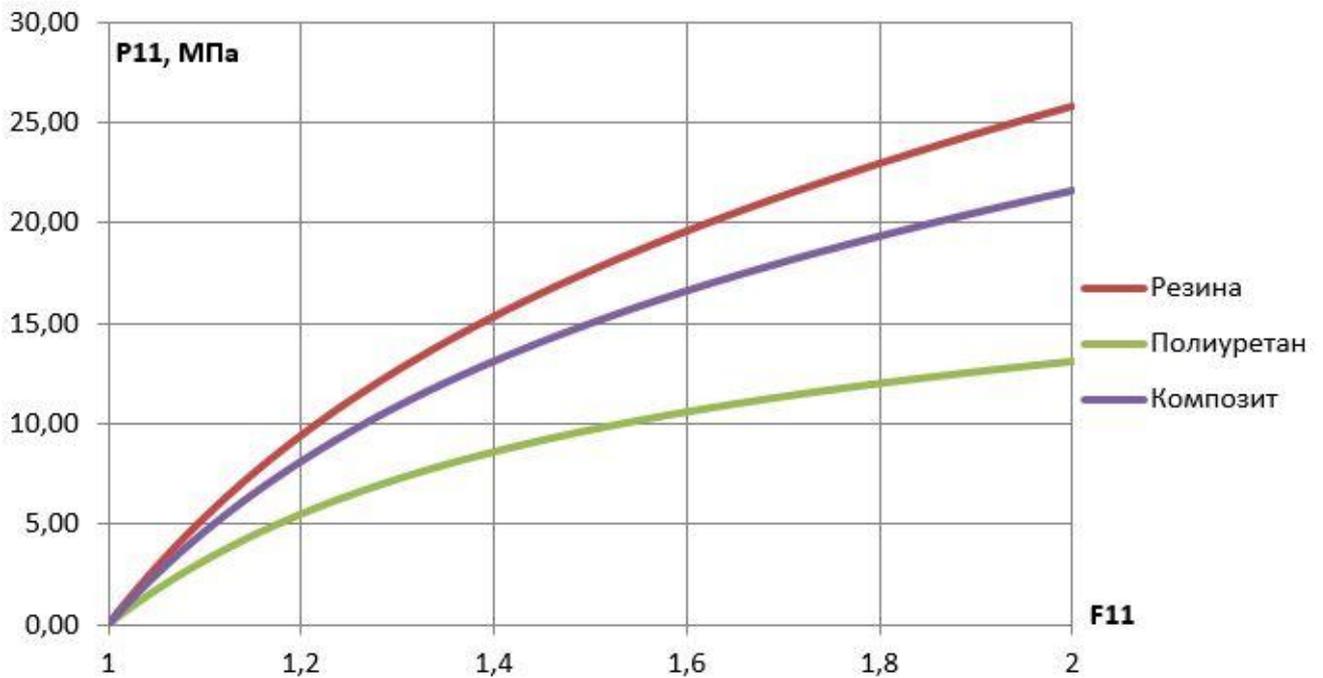


Рисунок 3.14 – Диаграмма деформирования композита из резины и полиуретана в моделях B_I , B_V

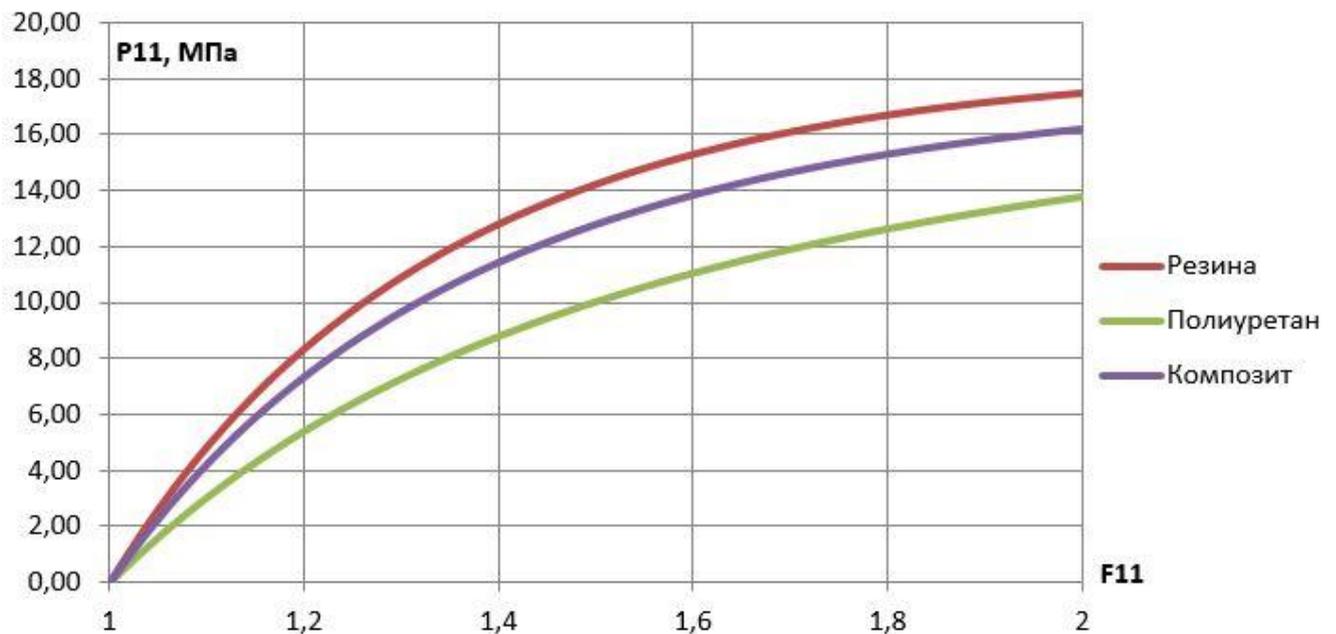


Рисунок 3.15 – Диаграмма деформирования композита из резины и полиуретана в моделях B_{II} , B_{IV}

Сравнение полученных эффективных диаграмм деформирования в разных моделях представлено на рисунке 3.16.

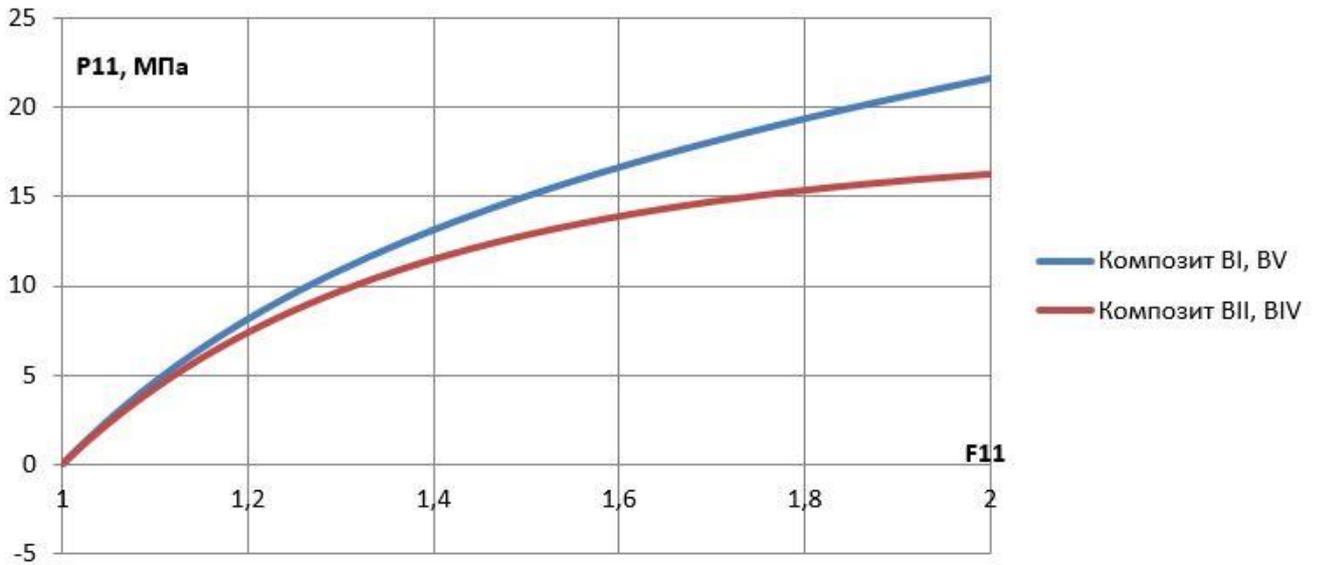


Рисунок 3.16 – Сравнение эффективных диаграмм деформирования композита различных моделей

Также был произведен расчет для модели B_I , B_V при другом соотношении слоев: $h_p = 1/3$, $h_n = 2/3$. Результат представлен на рисунке 3.17.

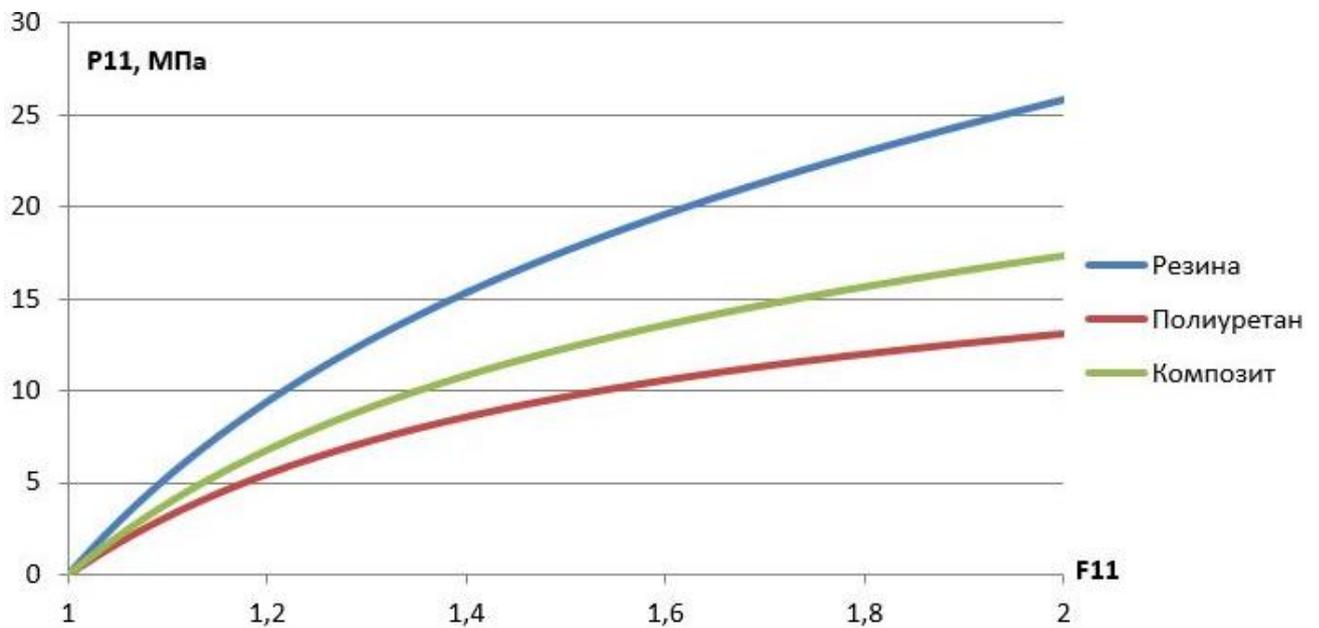


Рисунок 3.17 – Диаграмма деформирования композита модели B_V из резины и полиуретана при отношении толщин слоев 1:2

Расчет для СКМ с тремя слоями полиуретан–резина–полиуретан в соотношении 1:4:1 для моделей B_I , B_{II} , B_{IV} , B_V представлен на рисунке 3.18.

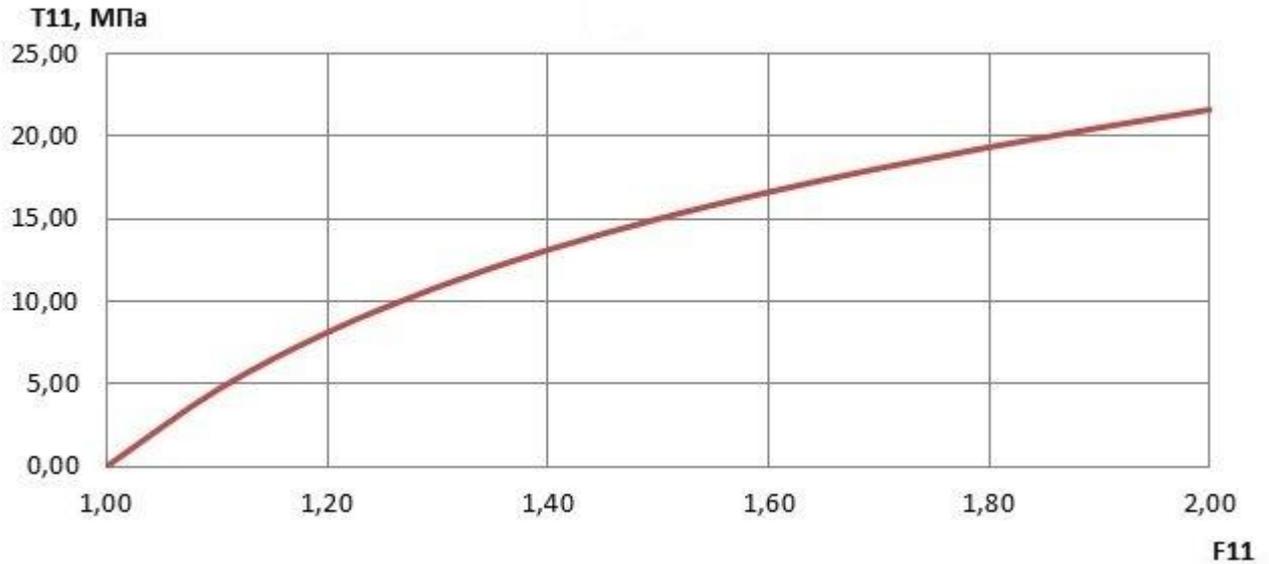


Рисунок 3.18 – Диаграмма деформирования композита 1:4:1 модели B_I , B_V при одноосном растяжении

3.10 Одноосное растяжение вдоль оси трансверсальной изотропии

Рассмотрим случай растяжения вдоль оси $c_3 = e_3$. При таком нагружении

$$T_{11} = 0, T_{22} = 0, T_{33} \neq 0 \quad (3.87)$$

Указанные условия позволяют получить систему

$$\begin{cases} 0 = -p + k_1^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) \\ 0 = -p + k_2^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_2^{n-III} \right) \\ T_{33} = -p + k_3^{(n-III)} \varphi_2 \\ k_1 k_2 k_3 = 1 \end{cases} \quad (3.88)$$

Исключая из этой системы p и выражая k_2 из условий несжимаемости, получим

$$p = k_1^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) \quad (3.89)$$

$$k_1^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) = k_2^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 k_2^{n-III}}{n-III} \right) \quad (3.90)$$

$$k_1^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) = (1/k_1 k_3)^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 (1/k_1 k_3)^{n-III}}{n-III} \right) \quad (3.91)$$

Последнее соотношение позволяет нам выразить $k_1 = k_1(k_3)$ и $k_2 = k_2(k_3)$, что влечет возможность построить зависимость

$$T_{33}(k_3) = -k_1^{n-III} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) + k_3^{n-III} \varphi_2 \quad (3.92)$$

В этой зависимости присутствуют семь неизвестных констант: l_{11} , l_{12} , l_{22} , l_{44} , n_1 , n_2 , n_4 . Их поиск нужно осуществить на основании экспериментальной диаграммы $T_{33}^{(3)}(k_1)$, полученной в результате решения локальных задач МАО, возникающих при одноосном растяжении СКМ, соответствующем рассматриваемому.

3.11 Двухосное растяжение вдоль направлений, перпендикулярных оси трансверсальной изотропии

Задача формулируется аналогично одноосному растяжению. Отличие заключается в том, что условие свободного края будет выполняться только на одной грани СКМ

$$T_{11} \neq 0, T_{22} \neq 0, T_{33} = 0 \quad (3.93)$$

$$\begin{cases} T_{11} = -p + k_1^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) \\ T_{22} = -p + k_2^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_2^{n-III} \right) \\ 0 = -p + k_3^{(n-III)} \varphi_2 \\ k_1 k_2 k_3 = 1 \end{cases} \quad (3.94)$$

Из условия несжимаемости

$$k_3 = \frac{1}{k_1 k_2} \quad (3.95)$$

Исключив p из системы получим зависимость

$$\begin{cases} T_{11} = -k_3^{(n-III)} \varphi_2 + k_1^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_1^{n-III} \right) \\ T_{22} = -k_3^{(n-III)} \varphi_2 + k_2^{(n-III)} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-III} k_2^{n-III} \right) \end{cases} \quad (3.96)$$

Поскольку k_3 зависит от k_1 и k_2 , то T_{11} , T_{22} тоже будут функциями k_1 и k_2 .

Организовав различные программы нагружения $k_1(t)$, $k_2(t)$ можно получить несколько экспериментальных диаграмм деформирования. Сравнивая с ними диаграммы, получающиеся из формулы (3.96) можно найти неизвестные коэффициенты модели.

Для двухосного растяжения вдоль направлений, одно из которых совпадает с осью трансверсальной изотропии возникающие соотношения аналогичны.

Были проведены численные расчеты для НСКМ с тремя слоями полиуретан–резина–полиуретан в соотношении 1:4:1 для моделей B_I , B_{II} , B_{IV} , B_V . Полученные диаграммы деформирования показаны на рисунках 3.19 – 3.21.

Программа двухосного растяжения имела следующий вид

$$F(k) = \begin{pmatrix} k^{1/8} & 0 & 0 \\ 0 & k^{3/8} & 0 \\ 0 & 0 & k^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq 2$$

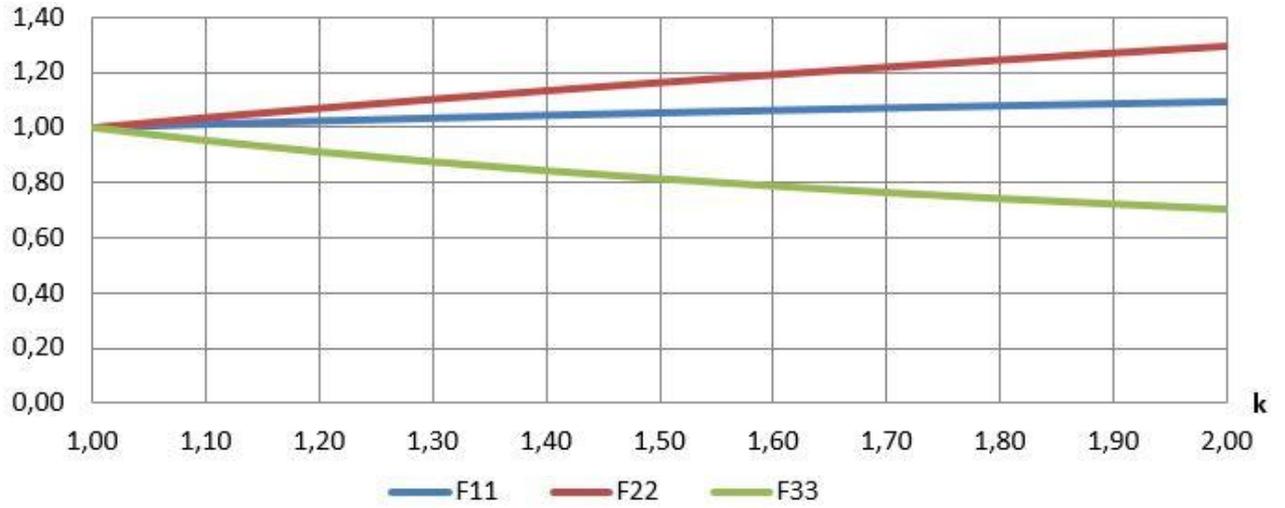
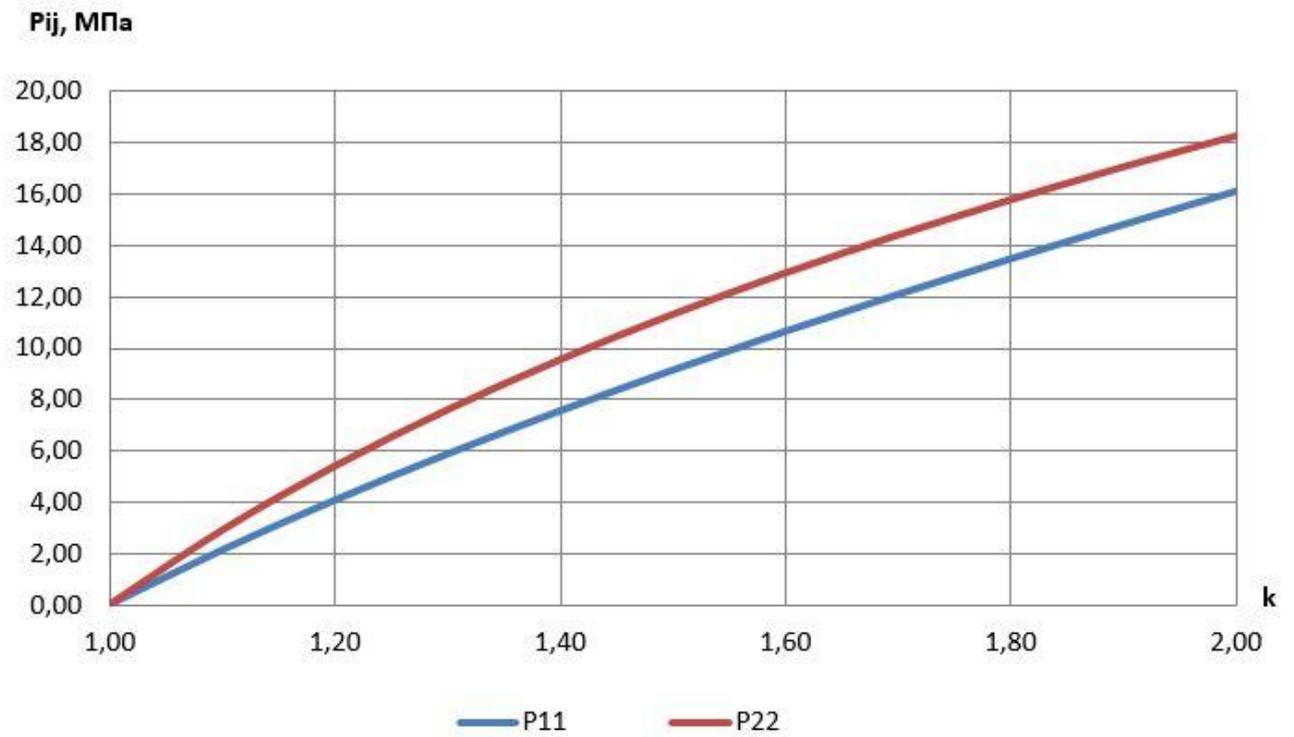


Рисунок 3.19 – Программа двухосного деформирования СКМ

Рисунок 3.20 – Диаграмма двухосного деформирования СКМ в модели B_I , B_V

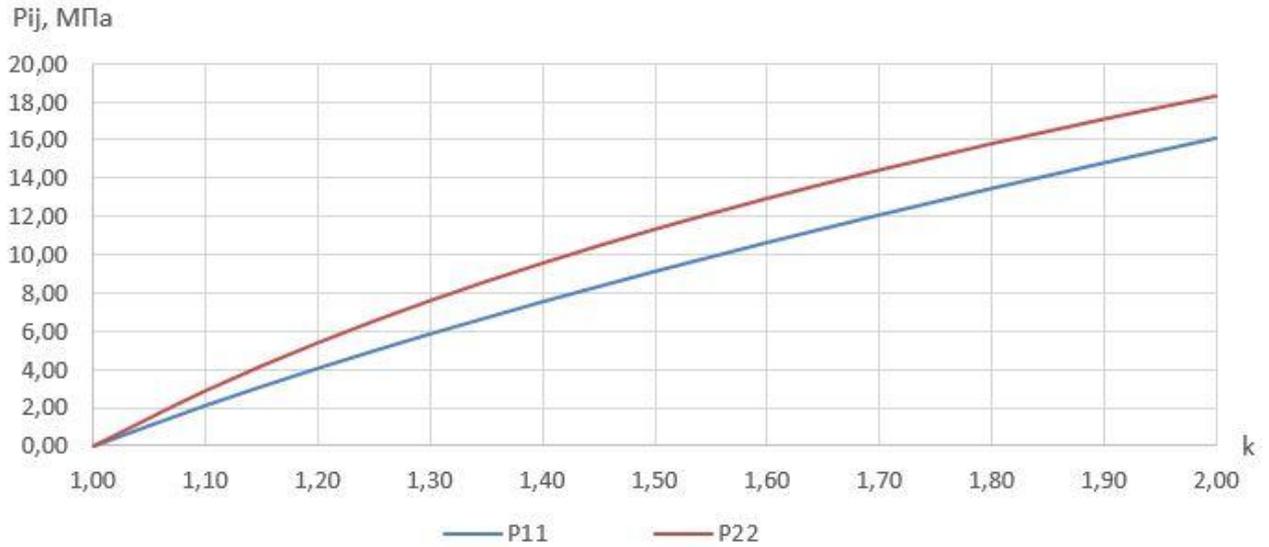


Рисунок 3.21 – Диаграмма двухосного деформирования СКМ в модели B_{II} , B_{IV}

3.12 Формулировка задачи поиска параметров модели несжимаемого трансверсально-изотропного композита

Из решения локальных задач МАО мы имеем четыре серии кривых, соответствующий одноосному и двухосному растяжению

$$T_{11} = T_{11}^{(3)}(k_1) \quad (3.97)$$

$$T_{33} = T_{33}^{(3)}(k_3) \quad (3.98)$$

$$\begin{cases} T_{11} = T_{11}^{(3)}(k_1, k_2) \\ T_{22} = T_{22}^{(3)}(k_1, k_2) \end{cases} \quad (3.99)$$

$$\begin{cases} T_{11} = T_{11}^{(3)}(k_1, k_3) \\ T_{33} = T_{33}^{(3)}(k_1, k_3) \end{cases} \quad (3.100)$$

Для каждого конкретного набора: l_{11} , l_{12} , l_{22} , l_{44} , n_1 , n_2 , n_4 могут быть построены соответствующие кривые для трансверсально-изотропного материала, которые назовём теоретическими.

Задача нахождения параметров : $l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4$ формулируется как задача минимизации некоторой метрики, характеризующей несоответствие теоретической диаграммы для конкретного набора параметров соответствующей экспериментальной.

$$\min_{l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4} R(T, T^{(\text{э})}) \quad (3.101)$$

В качестве примера такой метрики приведем

$$R_2(T, T^{(\text{э})}) = \sum_{\omega=1}^N \sum_{\alpha, \beta} (T_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}^{(\text{э})})^2 \quad (3.102)$$

здесь ω – номера точек на диаграмме деформирования.

Используя приведенную метрику, можно получить классический МНК и минимизировать среднеквадратичное отклонение теоретических значений компонент тензора напряжений Коши от экспериментальных в конечном числе контрольных точек. Ее достоинствами являются простота вычислений и наличие большого количества методов решения МНК. Недостаток этой схемы – относительная погрешность для малых напряжений больше, чем для больших.

Еще одной часто используемой метрикой является

$$R_2(T, T^{(\text{э})}) = \sum_{\omega=1}^N \sum_{\alpha, \beta} \left(1 - \frac{T_{\alpha\beta}}{T_{\alpha\beta}^{(\text{э})}} \right)^2 \quad (3.103)$$

Использование этой метрики позволяет минимизировать относительную погрешность. Однако слагаемые с $T_{\alpha\beta}^{(\text{э})} = 0$ необходимо исключать. На практике необходимо исключать слагаемые $|T_{\alpha\beta}^{(\text{э})}| < \varepsilon$, при некотором заданном малом числе $\varepsilon > 0$. Это обстоятельство не позволяет контролировать соответствующие величины $T_{\alpha\beta}$.

3.13 Результаты численного решения моделирования трансверсально-изотропного несжимаемого композита

Связывая эксперименты на реальных материалах с теорией, изложенной в предыдущих разделах, преследуются две основные цели:

- исследование упругих свойств;
- экспериментальная проверка теоретических предсказаний.

Первое из этих приложений связано с проблемой отыскания точного математического описания упругих свойств какого-либо данного материала. Второе приложение становится возможным в том случае, если уже было получено точное описание упругих свойств. Если из-за нелинейности уравнений полное решение задачи найти нельзя, то соответствующие эксперименты могут служить полезным средством для проверки точности и выяснения области применимости, как применяемого теоретического анализа, так и предложений, сделанных при нахождении приближенного решения.

Ввиду широкого применения резины и удобства ее обработки многие эксперименты в области больших упругих деформаций были выполнены на ней.

3.14 Расчет эффективных параметров модели слоистого композиционного материала как трансверсально-изотропной среды

На основании полученных диаграмм и руководствуясь методами, изложенными в теоретической части, был осуществлен поиск эффективных параметров модели СКМ из трех слоев, описанной в предыдущей части, как трансверсально-изотропной среды.

По найденным параметрам модели были построены диаграммы деформирования. Сравнительные диаграммы приведены на рисунках 3.22 – 3.23.

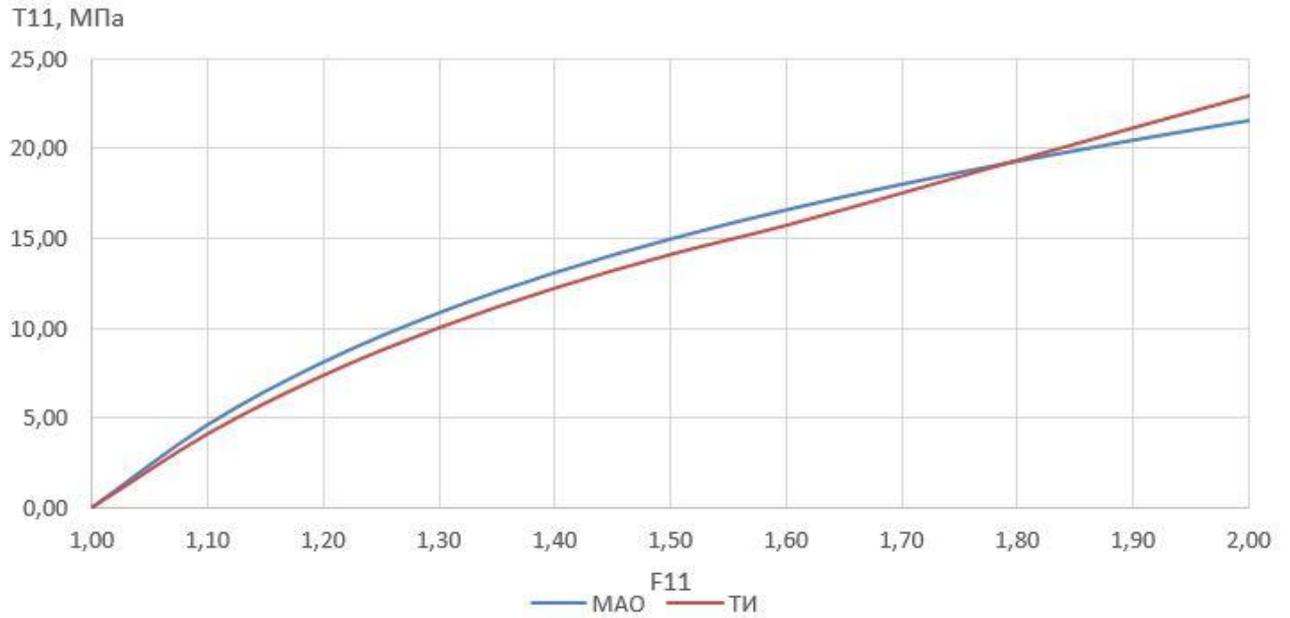


Рисунок 3.22 – Сравнительная диаграмма одноосного деформирования, полученных MAO и из модели трансверсально-изотропной среды

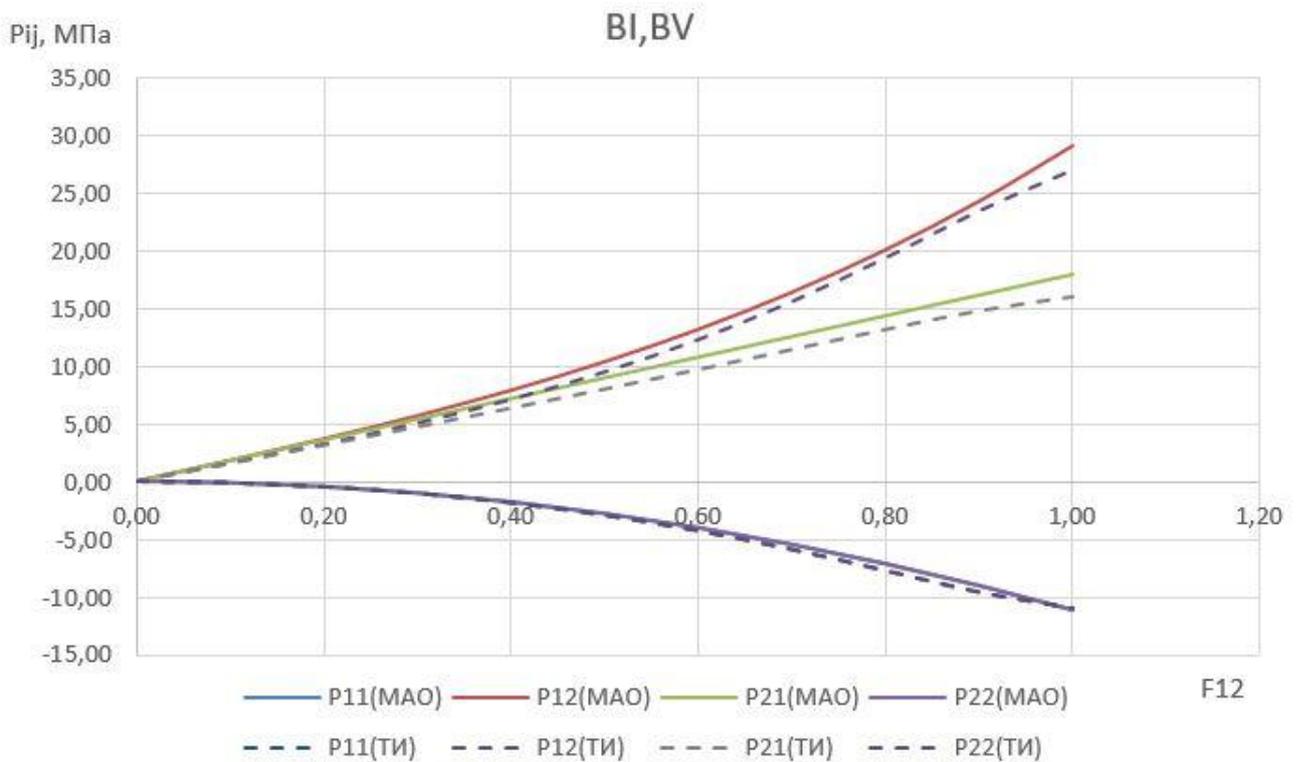


Рисунок 3.23 – Сравнительная диаграмма сдвигового деформирования, полученных MAO и из модели трансверсально-изотропной среды

Максимальные относительные погрешности в полученных диаграммах составляют 11% и 13% соответственно.

4 Задача о цилиндрическом изгибе слоистой композиционной пластины

4.1 Постановка осредненной задачи цилиндрического изгиба трансверсально-изотропной пластины

В данном разделе, в качестве демонстрации разработанного алгоритма решения задач расчета напряжений в слоистых композитах при конечных деформациях рассмотрена задача о цилиндрическом изгибе слоистой композитной пластины. Аналогичная задача, но для однородных изотропных сред с большими деформациями ранее была рассмотрена в работах К.Ф. Черных [85].

Рассмотрим в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$ пластину из слоистого композита (рисунок 4.1). Область $\overset{\circ}{V}$, соответствующая пластине в $\overset{\circ}{K}$ в декартовых координатах x^i , $i=1,2,3$, описывается следующим соотношением:

$$\overset{\circ}{K} : \overset{\circ}{V} = \left\{ x^i \left| x_0^3 - \frac{h_3}{2} < x_0^3 < x_0^3 + \frac{h_3}{2}, \quad -\frac{h_2}{2} < x_2 < \frac{h_2}{2}, \quad -\frac{h_1}{2} < x_1 < \frac{h_1}{2} \right. \right\} \quad (4.1)$$

где h_i – длины ребер пластины в $\overset{\circ}{K}$.

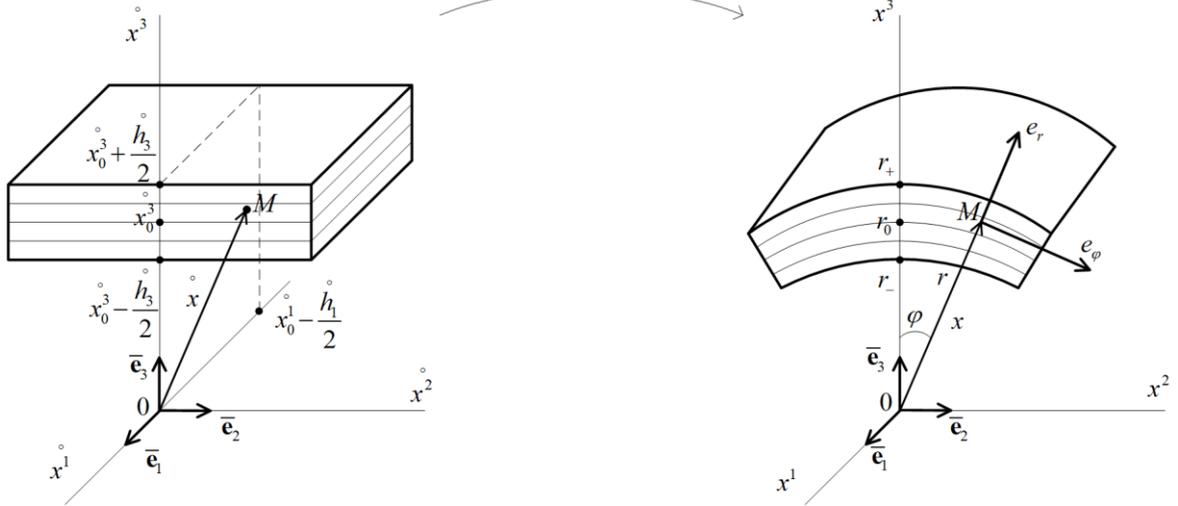


Рисунок 4.1 – Цилиндрический изгиб слоистой пластины

Радиус-вектор материальных точек $M \in \overset{\circ}{V}$ в $\overset{\circ}{K}$ обозначим

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = x^i \bar{\mathbf{e}}_i \quad (4.2)$$

где $\bar{\mathbf{e}}_i$ – декартов базис единой декартовой системы координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$ для $\overset{\circ}{K}$ и K .

В актуальной конфигурации K та же материальная точка $M \in V$ имеет следующий радиус-вектор

$$\mathbf{x} = x^i \bar{\mathbf{e}}_i \quad (4.3)$$

где имеется соотношение между x^i и $\overset{\circ}{x}^i$ для $\forall t \geq 0$

$$x^i = \overset{\circ}{x}^i \left(\overset{\circ}{x}^j, t \right) \quad (4.4)$$

Введем кроме декартовых координат x^i цилиндрические координаты r, φ, z материальной точки M в физическом базисе цилиндрической системы координат $O\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z$.

Тогда радиус-вектор \mathbf{x} (4.3) можно записать в виде

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (4.5)$$

где r – радиус цилиндрической системы координат, угол φ и z в K связаны с x^i аналогично соотношениям (4.4)

$$\begin{aligned} r &= r\left(x^i, t\right), \\ \varphi &= \varphi\left(x^i, t\right), \\ z &= z\left(x^i, t\right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Базис $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ связан с \bar{e}_i Якобиевой матрицей.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где угол $\varphi\left(x^i, t\right)$ определяется формулами (4.6).

Лагранжевы координаты X^i выберем совпадающими с декартовыми

$$X^i = x^i. \quad (4.8)$$

4.2 Решение осредненной задачи о цилиндрическом изгибе трансверсально-изотропной пластины

Рассмотрим закон движения (4.6), соответствующий цилиндрическому изгибу пластины в цилиндрическую панель [62, 85].

$$\begin{cases} z = x^1 \\ \varphi = B x^2 \\ r = \sqrt{2A x^3} \end{cases}, \quad (4.9)$$

где A, B – константы.

При этом преобразовании (4.9), боковые поверхности пластины, имеющие в $\overset{\circ}{K}$ координаты $x^3 = x_0^3 \pm \frac{h_3}{2}$, при переходе в K , описываются уравнениями постоянного радиуса r , т.е.

$$r = r_{\pm}, \quad (4.10)$$

$$r_{\pm} = \sqrt{2A \left(x_0^3 \pm \frac{h_3}{2} \right)}. \quad (4.11)$$

Поскольку координата x^3 в $\overset{\circ}{K}$ и радиус r в K отсчитываются от одной и той же неподвижной точки O (согласно (4.3) и (4.5)), то значения x^1 и $r=0$ должны быть согласованы. Это условие выполняется в (4.9).

Боковые поверхности пластины $x^2 = \pm \frac{h_2}{2}$ преобразуются в K в плоские грани с координатами

$$\varphi = \varphi_{\pm}, \quad (4.12)$$

где

$$\varphi_{\pm} = \pm B \frac{h_2}{2}. \quad (4.13)$$

Площади внешней и внутренней поверхности $r = r_{\pm}$ цилиндрической пластины в K равны

$$S_{\pm} = 2r_{\pm} \varphi_{\pm} h_1 = Br_{\pm} h_2 h_1. \quad (4.14)$$

Обозначим r_* такой радиус цилиндрической панели в K , при котором площадь соответствующей поверхности $r = r_*$ не изменяется при переходе из $\overset{\circ}{K}$ в K , т.е.

$$S = \overset{\circ}{S}, \quad \overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{h}_2 \overset{\circ}{h}_1, \quad S = Br_* \overset{\circ}{h}_2 \overset{\circ}{h}_1, \quad (4.15)$$

очевидно, что

$$r_* = \frac{1}{B}. \quad (4.16)$$

Такая поверхность $r = r_*$ называется «нейтральной».

Согласно (4.9) длина пластины по x^1 при переходе из $\overset{\circ}{K}$ в K не изменяется.

Вычислим локальные векторы базиса r_i в K , используя (4.5) и (4.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\overset{\circ}{x}^3} = \frac{\partial r}{\overset{\circ}{x}^3} \mathbf{e}_r = \frac{\sqrt{2A}}{2\sqrt{\overset{\circ}{x}^3}} \mathbf{e}_r = \frac{A}{r} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\overset{\circ}{x}^2} = r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\overset{\circ}{x}^2} = r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \overset{\circ}{x}^2} = rB \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{e}_z = \bar{\mathbf{e}}_1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Вычислим метрическую матрицу в K $g_{ij} = r_i \cdot r_j$

$$\begin{aligned} g_{33} &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{A^2}{r^2}, \\ g_{22} &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = r^2 B^2, \\ g_{11} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = 1, \\ g_{13} &= g_{12} = g_{23} = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

тогда

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 B^2 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Обратная метрическая матрица имеет вид

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{A^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 B^2} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Детерминант метрической матрицы

$$g = \det(g_{ij}) = A^2 B^2. \quad (4.21)$$

Поскольку среда (композит) является несжимаемой, то

$$g = 1. \quad (4.22)$$

Из (4.21) и (4.22) находим

$$B = \frac{1}{A}, \quad (4.23)$$

если $A > 0$ и $B > 0$.

Вычислим векторы взаимного базиса $r^i = g^{ij} r_j$ в K

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^3 &= g^{33} \mathbf{r}_3 = \frac{r}{A} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{r}^2 &= g^{22} \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{rB}, \\ \mathbf{r}^1 &= \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Принимая во внимание, что в $\overset{\circ}{K}$

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{r}^i = \bar{\mathbf{e}}^i, \quad (4.25)$$

вычислим градиент деформаций

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{r}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i = \frac{A}{r} \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 + rB \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1, \quad (4.26)$$

обратный градиент

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathring{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}^i = \frac{r}{A} \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{rB} \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \mathbf{e}_\varphi + \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1, \quad (4.27)$$

Вычислим тензоры \mathbf{U}^2 и \mathbf{U}^{-2}

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \frac{A^2}{r^2} \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 + r^2 B^2 \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1. \quad (4.28)$$

Поскольку тензор \mathbf{U}^2 диагональный, легко находим собственные значения

$$\lambda_3 = \frac{A}{r}, \quad \lambda_2 = rB = \frac{r}{A}, \quad \lambda_1 = 1, \quad (4.29)$$

и собственные векторы тензора \mathbf{U}

$$\mathring{\mathbf{p}}_i = \bar{\mathbf{e}}_i. \quad (4.30)$$

С их помощью вычисляем энергетические меры деформации

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{A}{r} \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \frac{r}{A} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_1^2, \\ \mathring{\mathbf{G}}^{(n)} &= \frac{1}{n-III} \mathbf{U}^{n-III} = \frac{1}{n-III} \left(\left(\frac{A}{r} \right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \left(\frac{r}{A} \right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_1^2 \right), \quad n = I, II, IV, V, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где $\bar{\mathbf{e}}_i^2 = \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i$.

Вычислим инварианты этих тензоров $\mathring{\mathbf{G}}^{(n)}$ относительно группы трансверсальной изотропии. В декартовой системе координат эти инварианты имеют вид (ось Ox^1 является осью трансверсальной изотропии):

$$\begin{aligned} I_1 \left(\mathring{\mathbf{G}}^{(n)} \right) &= G_{11}^{(n)} + G_{22}^{(n)} = \frac{1}{n-III} \left(1 + \left(\frac{r}{A} \right)^{n-III} \right), \\ I_2 \left(\mathring{\mathbf{G}}^{(n)} \right) &= G_{33}^{(n)} = \frac{1}{n-III} \left(\frac{A}{r} \right)^{n-III}, \\ I_3 \left(\mathring{\mathbf{G}}^{(n)} \right) &= G_{13}^{(n)2} + G_{23}^{(n)2} = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$I_4 \left(\mathbf{G} \right) = G_{11}^2 + 2G_{12}^2 + G_{22}^2 = \frac{1}{(n-III)^2} \left(1 + \left(\frac{r}{A} \right)^{2(n-III)} \right).$$

Обратный энергетический тензор имеет вид

$$\mathbf{G}^{-1} = (n-III) \left(\left(\frac{r}{A} \right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \left(\frac{A}{r} \right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_1^2 \right). \quad (4.33)$$

Используя матричную запись определяющих соотношений (3.62) в декартовой системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$ для трансверсально-изотропного несжимаемого композита находим энергетические тензоры напряжений

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad (4.34)$$

где

$$\begin{aligned} T_{11}^{(n)} &= -p + \varphi_1 + \frac{2\varphi_4}{n-III}, \\ T_{22}^{(n)} &= -p \left(\frac{A}{r} \right)^{n-III} + \varphi_1 + \frac{2\varphi_4}{n-III} \left(\frac{r}{A} \right)^{n-III}, \\ T_{33}^{(n)} &= -p \left(\frac{r}{A} \right)^{n-III} + \varphi_2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= n_1 l_{11} \left(I_1 \left(\mathbf{G} \right) - k_1 \right)^{2n_1-1} + n_1 l_{12} \left(I_1 \left(\mathbf{G} \right) - k_1 \right)^{n_1-1} \left(I_2 \left(\mathbf{G} \right) - k_2 \right)^{n_2}, \\ \varphi_2 &= n_2 l_{22} \left(I_2 \left(\mathbf{G} \right) - k_2 \right)^{2n_2-1} + n_2 l_{12} \left(I_1 \left(\mathbf{G} \right) - k_1 \right)^{n_1} \left(I_2 \left(\mathbf{G} \right) - k_2 \right)^{n_2-1}, \\ \varphi_4 &= n_4 l_{44} \left(I_4 \left(\mathbf{G} \right) - k_4 \right)^{n_4-1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Найдем тензор истинных напряжений Коши, используя соотношения между \mathbf{T} и $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$. Будем искать тензор напряжений Коши \mathbf{T} в диагональном виде в базисе $\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r$:

$$\mathbf{T} = T_{11} \mathbf{e}_z^2 + T_{22} \mathbf{e}_\varphi^2 + T_{33} \mathbf{e}_r^2. \quad (4.37)$$

Предварительно вычислим также тензор поворота \mathbf{O} , сопровождающий деформацию

$$\mathbf{O} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_3. \quad (4.38)$$

Используем определение энергетических тензоров напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ получим выражения для $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ через компоненты $T_{\alpha\alpha}$ тензора \mathbf{T} . С учетом (4.26), (4.27), (4.37) и (4.38) имеем

$$\begin{aligned} \overset{I}{\mathbf{T}} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} = T_{11} \bar{\mathbf{e}}_1^2 + \frac{r^2}{A^2} T_{22} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \frac{A^2}{r^2} T_{33} \bar{\mathbf{e}}_3^2, \\ \overset{II}{\mathbf{T}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}) = T_{11} \bar{\mathbf{e}}_1^2 + \frac{r}{A} T_{22} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \frac{A}{r} T_{33} \bar{\mathbf{e}}_3^2, \\ \overset{IV}{\mathbf{T}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T}) = T_{11} \bar{\mathbf{e}}_1^2 + \frac{A}{r} T_{22} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \frac{r}{A} T_{33} \bar{\mathbf{e}}_3^2, \\ \overset{V}{\mathbf{T}} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T} = T_{11} \bar{\mathbf{e}}_1^2 + \frac{A^2}{r^2} T_{22} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \frac{r^2}{A^2} T_{33} \bar{\mathbf{e}}_3^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Сравнивая представления (4.34), (4.35) и (4.39) для энергетических тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, получаем следующие соотношения между $\overset{(n)}{T_{\alpha\alpha}}$ и $T_{\alpha\alpha}$:

$$\begin{aligned} \overset{(I)}{T_{11}} &= T_{11}, \quad \overset{(I)}{T_{22}} = \frac{r^2}{A^2} T_{22}, \quad \overset{(I)}{T_{33}} = \frac{A^2}{r^2} T_{33}, \\ \overset{(II)}{T_{11}} &= T_{11}, \quad \overset{(II)}{T_{22}} = \frac{r}{A} T_{22}, \quad \overset{(II)}{T_{33}} = \frac{A}{r} T_{33}, \\ \overset{(IV)}{T_{11}} &= T_{11}, \quad \overset{(IV)}{T_{22}} = \frac{A}{r} T_{22}, \quad \overset{(IV)}{T_{33}} = \frac{r}{A} T_{33}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$T_{11}^{(V)} = T_{11}, \quad T_{22}^{(V)} = \frac{A^2}{r^2} T_{22}, \quad T_{33}^{(V)} = \frac{r^2}{A^2} T_{33}.$$

Эти соотношения можно записать в общем виде для любого $n = I, II, IV, V$

$$T_{11}^{(n)} = T_{11}, \quad T_{22}^{(n)} = \left(\frac{r}{A}\right)^{III-n} T_{22}, \quad T_{33}^{(n)} = \left(\frac{A}{r}\right)^{III-n} T_{33}. \quad (4.41)$$

Подставим выражение (4.35) в (4.41), получаем формулы для компонент тензора напряжений Коши при заданных n

$$T_{\alpha\alpha} = -p + \Phi_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (4.42)$$

где обозначены

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \varphi_1 + \frac{2\varphi_4}{n - III}, \\ \Phi_2 &\equiv \varphi_1 \left(\frac{A}{r}\right)^{III-n} + \frac{2\varphi_4}{n - III} \left(\frac{A}{r}\right)^{2(III-n)}, \\ \Phi_3 &\equiv \varphi_2 \left(\frac{r}{A}\right)^{III-n}, \quad n = I, II, IV, V. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Рассмотрим определение уравнения равновесия композитной пластины в K

$$\nabla \cdot T = 0. \quad (4.44)$$

В цилиндрических координатах эти уравнения, с учетом диагонального вида тензора напряжений (4.37) сводится к одному тождественно ненулевому уравнению

$$\frac{d}{dr}(rT_{33}) - T_{22} = 0. \quad (4.45)$$

Подставляя выражение (4.42) для T_{33} и T_{22} , получаем дифференциальное уравнение относительно $p(r)$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{d\Phi}{dr} + \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{r}. \quad (4.46)$$

Интегрируя это уравнение по r , получаем

$$p = p_0 + \Phi_3 + \int_{r_-}^r \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{\tilde{r}} d\tilde{r} - \Phi_3(r_-). \quad (4.47)$$

Граничные условия на поверхностях $r = r_{\pm}$ задаем в следующем виде

$$r = r_{\pm} : T_{33}(r_{\pm}) = 0. \quad (4.48)$$

Подставляем выражение (4.42) для T_{33} в (4.48), с учетом (4.47), получаем два алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} p_0 &= \Phi_3(r_-), \\ p_0 &= \Phi_3(r_-) - \int_{r_-}^{r_+} \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{\tilde{r}} d\tilde{r}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Эта система уравнений эквивалентна следующей

$$p_0 = \Phi_3(r_-), \quad (4.50)$$

$$\int_{r_-}^{r_+} \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{\tilde{r}} d\tilde{r} = 0. \quad (4.51)$$

Поскольку функции Φ_2 , Φ_3 зависят от констант A , x_0^3 , то формула (4.50) связывает p_0 с A , x_0^3 , а формула (4.51) позволяет выразить x_0^3 через A .

Подставляя (4.50) в (4.47) и (4.42), находим

$$\begin{aligned} p &= \Phi_3 + \int_{r_-}^r \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{r} dr, \\ T_{11} &= \Phi_1 - \Phi_3 + \int_{r_-}^r \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{r} dr, \\ T_{22} &= \Phi_2 - \Phi_3 + \int_{r_-}^r \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{r} dr, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$T_{33} = \int_{r_-}^r \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{r} dr.$$

Вычислим тангенциальное усилие в цилиндрической панели

$$N_2 = \int_{r_-}^{r_+} T_{22} dr = \int_{r_-}^{r_+} \frac{d}{dr} (rT_{33}) dr = r_+ T_{33}(r_+) - r_- T_{33}(r_-) = 0, \quad (4.53)$$

а также изгибающий момент, который определим следующим образом

$$M_2 = \int_{r_-}^{r_+} r T_{22} dr. \quad (4.54)$$

Подставляя третью формулу (4.52) в (4.54), находим

$$M_2 = \int_{r_-}^{r_+} r (\Phi_2 - \Phi_3) dr + \int_{r_-}^{r_+} r \int_{r_-}^r \frac{(\Phi_2 - \Phi_3)}{r} dr. \quad (4.55)$$

С использованием правила интегрирования по частям эту формулу можно записать следующим образом:

$$M_2 = \frac{1}{2} \int_{r_-}^{r_+} r (\Phi_2 - \Phi_3) dr + \frac{r_+^2}{2} \int_{r_-}^{r_+} \frac{(\Phi_2 - \Phi_3)}{r} dr. \quad (4.56)$$

Поскольку функции Φ_2 , Φ_3 зависят от A и x_0^3 , а x_0^3 можно выразить через A с помощью соотношения (4.51), то формула (4.56) представляет собой соотношение между M_2 и A .

По заданному значению момента M_2 соотношение (4.55) позволяет найти A , т.е. фактически – радиус r изгиба пластины (согласно (4.9)).

4.3 Результаты численного решения осредненной задачи

Для численного решения уравнения (4.51) введем радиус r_0 цилиндрического изгиба пластины в K , соответствующий срединной поверхности $\overset{\circ}{x}^3 = \overset{\circ}{x}_0^3$ в $\overset{\circ}{K}$. Согласно формуле (4.51) имеем

$$r_0 = \sqrt{2A \overset{\circ}{x}_0^3}. \quad (4.57)$$

Тогда можно выразить $\overset{\circ}{x}_0^3$ через r_0 и A

$$\overset{\circ}{x}_0^3 = \frac{r_0^2}{2A}, \quad (4.58)$$

а радиусы r_{\pm} , определенные по (4.11), выразить также через r_0 и A

$$r_{\pm} = \sqrt{r_0^2 \pm Ah_3}. \quad (4.59)$$

Тогда уравнение (4.51) можно рассматривать как неявно выраженное соотношение между параметрами r_0 и A . Функции Φ_2, Φ_3 , входящие в это уравнение, также можно рассматривать зависящими от r_0 и A .

На рисунках 4.2 – 4.8 цифры у кривых – номер n модели B_n .

Результаты численного решения этого уравнения (4.51) в виде зависимости A от r_0

$$A = A_n(r_0), \quad (4.60)$$

для различных моделей B_n представлены на рисунке 4.2.

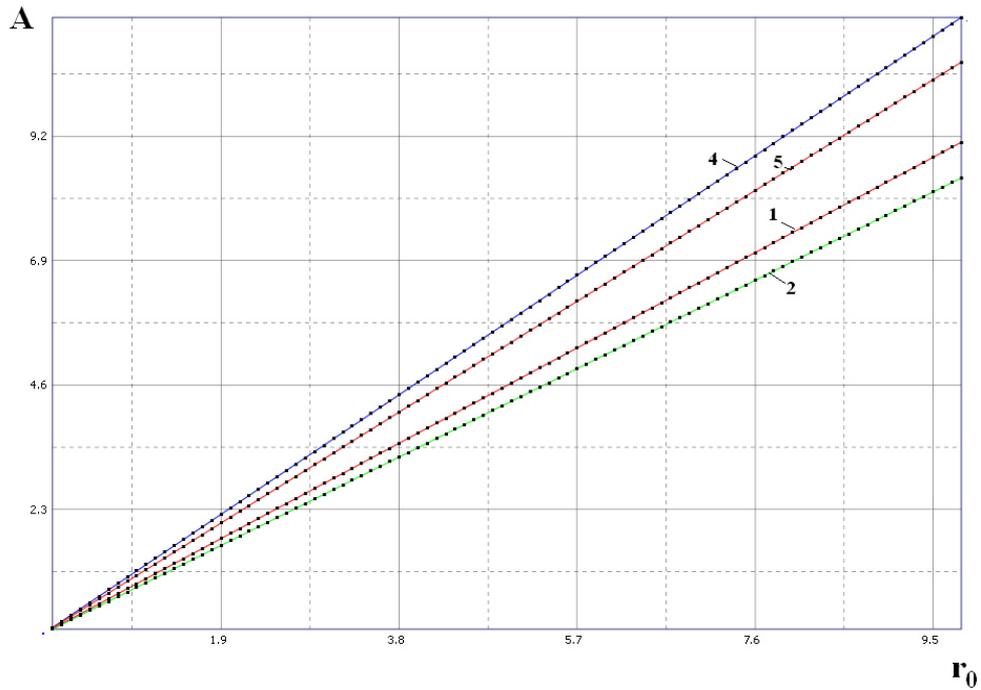


Рисунок 4.2 – Решение уравнения (4.51) в виде зависимости константы A от радиуса r_0 цилиндрического изгиба панели

При расчетах были приняты следующие значения констант

$$L = 1\text{ м}, \quad \overset{\circ}{h}_3 = 0,01\text{ м}, \quad l_{11} = 200\text{ МПа}, \quad l_{22} = 100\text{ МПа}, \quad l_{12} = 10\text{ МПа}, \quad l_{44} = 20\text{ МПа}, \\ s_1 = s_2 = s_4 = 1.$$

На рисунках 4.3 и 4.4 показаны зависимости момента M_2 , вычисленного по формуле (4.56), от кривизны $k_0 = 1/r_0$ цилиндрического изгиба панели (цифры у кривых – номер n модели B_n), для двух различных толщин панели $\overset{\circ}{h}_3 = 0,01\text{ м}$ и $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05\text{ м}$. С увеличением толщины панели в пять раз, значение момента возрастает в три раза для всех моделей B_n (например, для B_4 – с 0.32 до 40 МПа \times м). Таким образом, зависимость момента M_2 от начальной толщина пластины является кубической, как и для изотропных материалов [85].

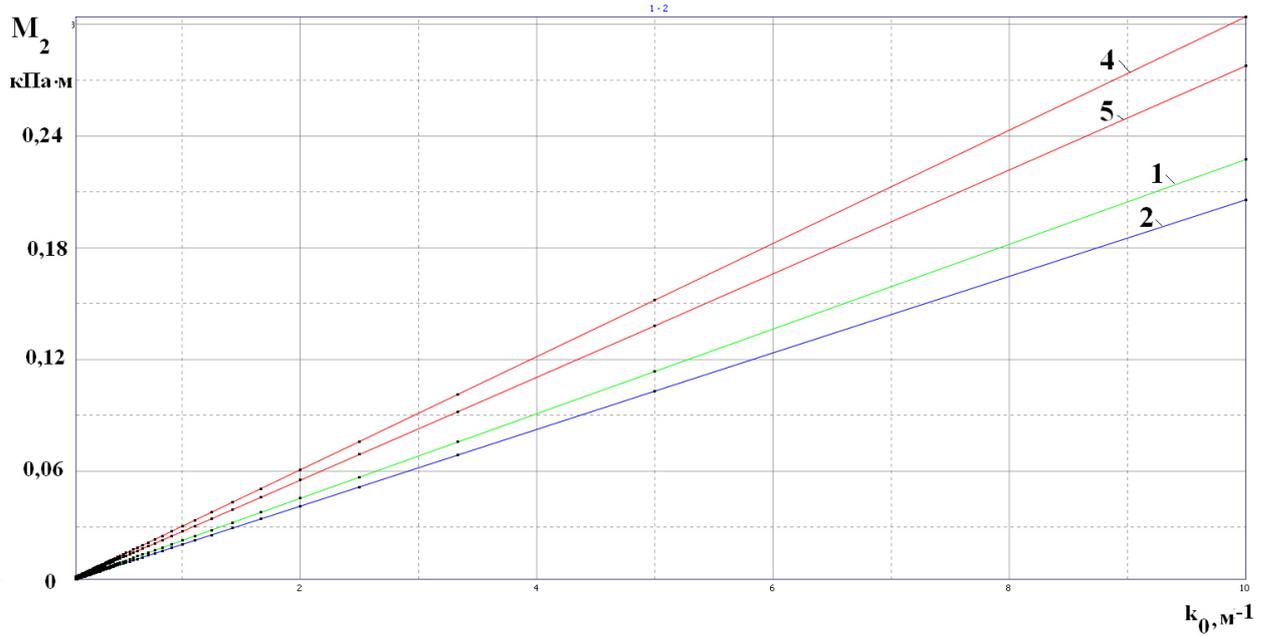


Рисунок 4.3 – Зависимость момента M_2 , вычисленного по формуле (4.56) от кривизны k_0 цилиндрического изгиба панели, толщина панели $h_3 = 0,01$ м

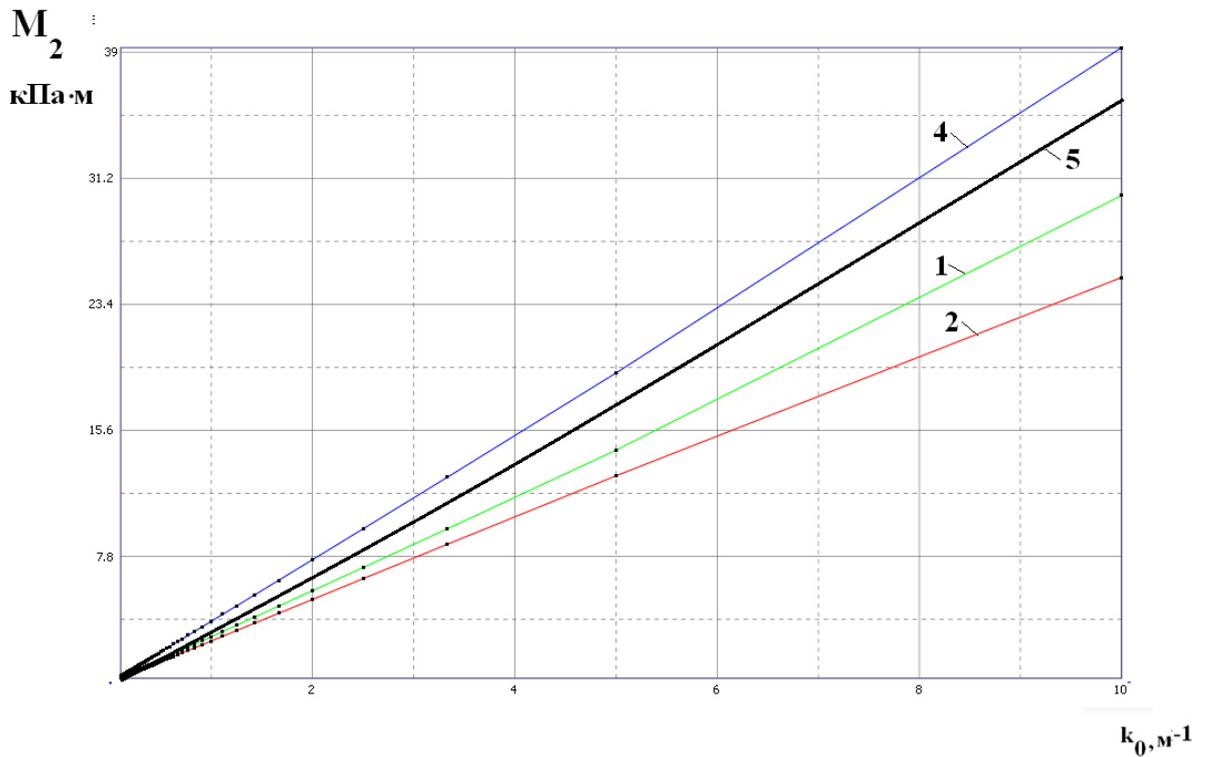


Рисунок 4.4 – Зависимость момента M_2 , вычисленного по формуле (1.56) от кривизны k_0 цилиндрического изгиба панели, толщина панели $h_3 = 0,05$ м

На рисунках 4.5 – 4.8 показаны осредненные напряжения в трансверсально-изотропной пластине при изгибе. Показаны распределения компонентов тензора напряжений Коши $T_{22}(r)$ и $T_{33}(r)$ по радиальной координате в K . расчеты проведены для двух значений толщины пластины: $\overset{\circ}{h}_3 = 0,01\text{м}$ и $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05\text{м}$. Для относительно тонкой пластины распределение компоненты $T_{22}(r)$ близко к линейному для всех моделей B_n , что соответствует линейной теории. Для толстой пластины распределение компоненты напряжений $T_{22}(r)$ является нелинейным. Для толстых пластин различие напряжений $T_{33}(r)$ для разных моделей B_n – достаточно существенное.

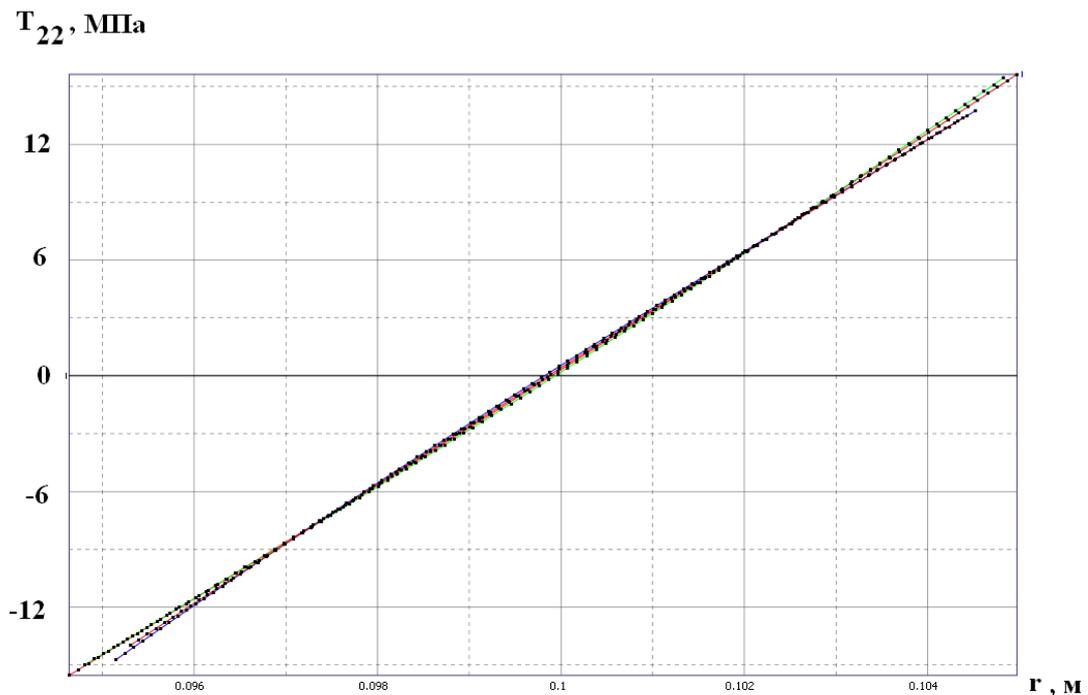


Рисунок 4.5 – Распределение компоненты T_{22} тензора напряжений Коши, вычисленной по формуле (4.52), по радиусу r панели при цилиндрическом изгибе

для $\overset{\circ}{h}_3 = 0,01\text{м}$, $r_0 = 0,1\text{м}$ ($k_0 = 10\text{м}^{-1}$).

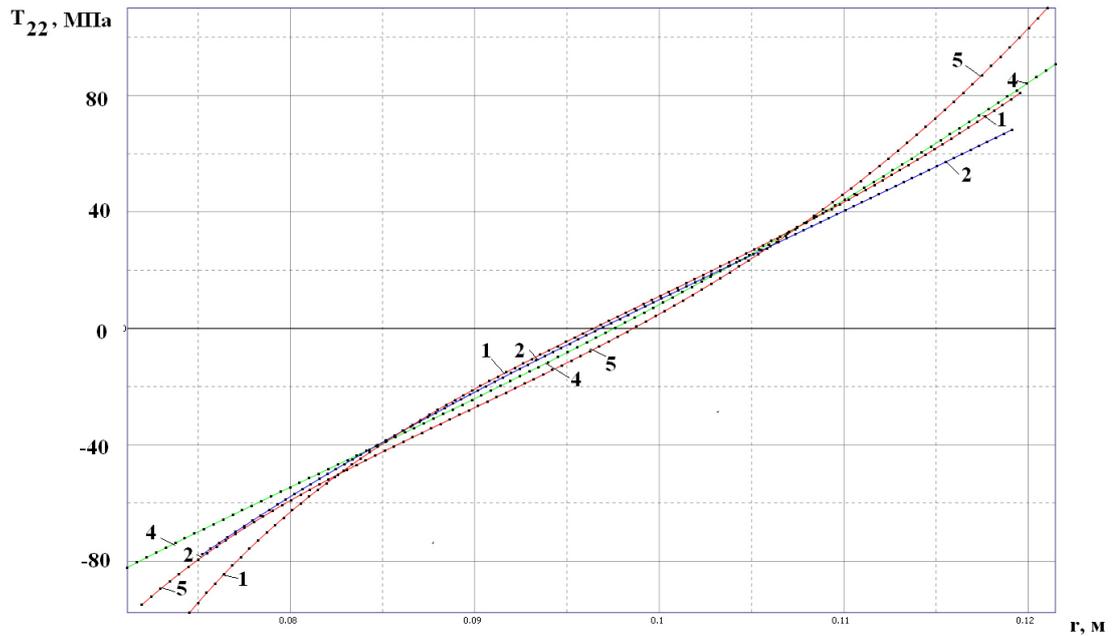


Рисунок 4.6 – Распределение компоненты T_{22} тензора напряжений Коши, вычисленной по формуле (4.52), по радиусу r панели при цилиндрическом изгибе

для $h_3 = 0,05\text{ м}$, $r_0 = 0,1\text{ м}$ ($k_0 = 10\text{ м}^{-1}$).

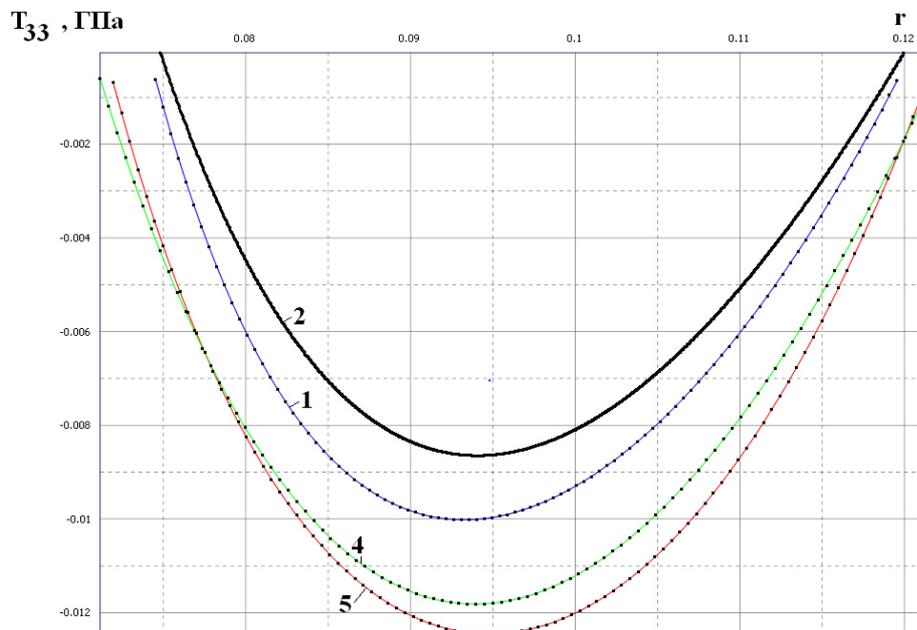


Рисунок 4.7 – Распределение компоненты T_{33} тензора напряжений Коши, вычисленной по формуле (4.52), по радиусу r панели при цилиндрическом изгибе

для $h_3 = 0,05\text{ м}$, $r_0 = 0,1\text{ м}$ ($k_0 = 10\text{ м}^{-1}$).

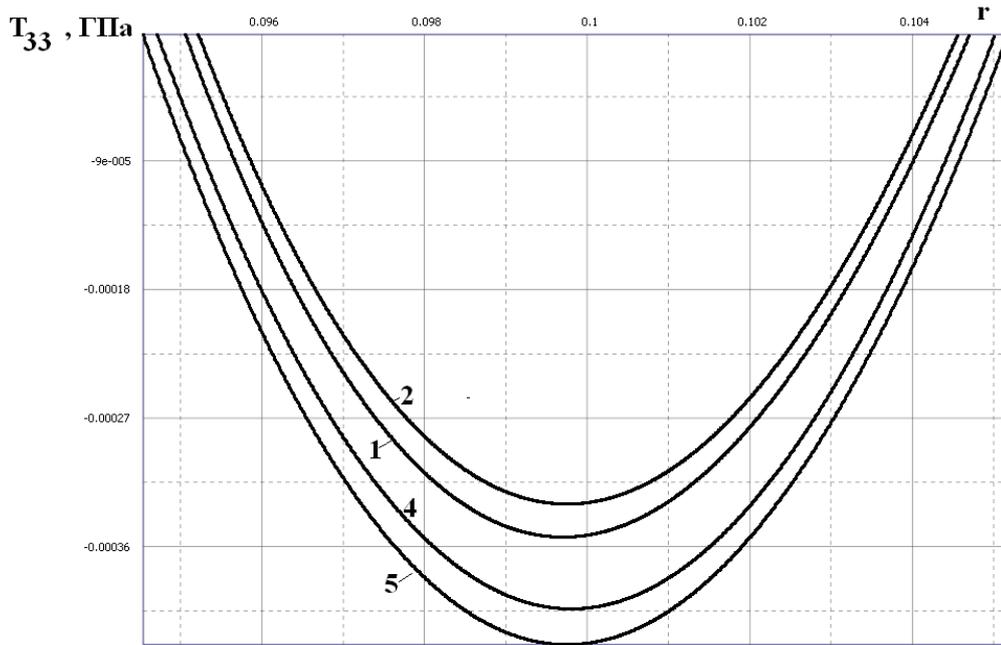


Рисунок 4.8 – Распределение компоненты T_{33} тензора напряжений Коши, вычисленной по формуле (4.52), по радиусу r панели при цилиндрическом изгибе

для $h_3 = 0,01\text{м}$, $r_0 = 0,1\text{м}$ ($k_0 = 10\text{м}^{-1}$).

4.4 Напряжения в слоях композитной слоистой пластины при цилиндрическом изгибе

После решения осредненной задачи о цилиндрическом изгибе пластины, определены три ненулевые компоненты осредненного градиента деформации (формулы (4.26) и (4.27)):

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}^i = \frac{A}{r} \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 + \frac{r}{A} \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 \quad (4.61)$$

как функции от радиуса r .

Для вычисления компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа $P^{ij(0)}$ и Коши $T^{ij(0)}$ в слоях пластины необходимо решить локальную задачу L_0 (1.117) – (1.123). Общий метод решения этой задачи изложен в п.3.2. Однако, в этом методе используются компоненты осредненного градиента деформации $\bar{\mathbf{F}}$ в декартовом

базисе \bar{e}_i . С учетом формулы (4.61) более удобно искать решение локальной задачи L_0 (1.117) – (1.123), перейдя в актуальную конфигурацию K , и используя эйлеровы локальные цилиндрические координаты $\xi_z, \xi_\varphi, \xi_r$, (рисунок 4.9), связанные с лагранжевыми локальными декартовыми координатами ξ^i с помощью локального закона движения материальных точек

$$\xi_z = \Xi_z(\xi^i, t), \quad \xi_\varphi = \Xi_\varphi(\xi^i, t), \quad \xi_r = \Xi_r(\xi^i, t) \quad (4.62)$$

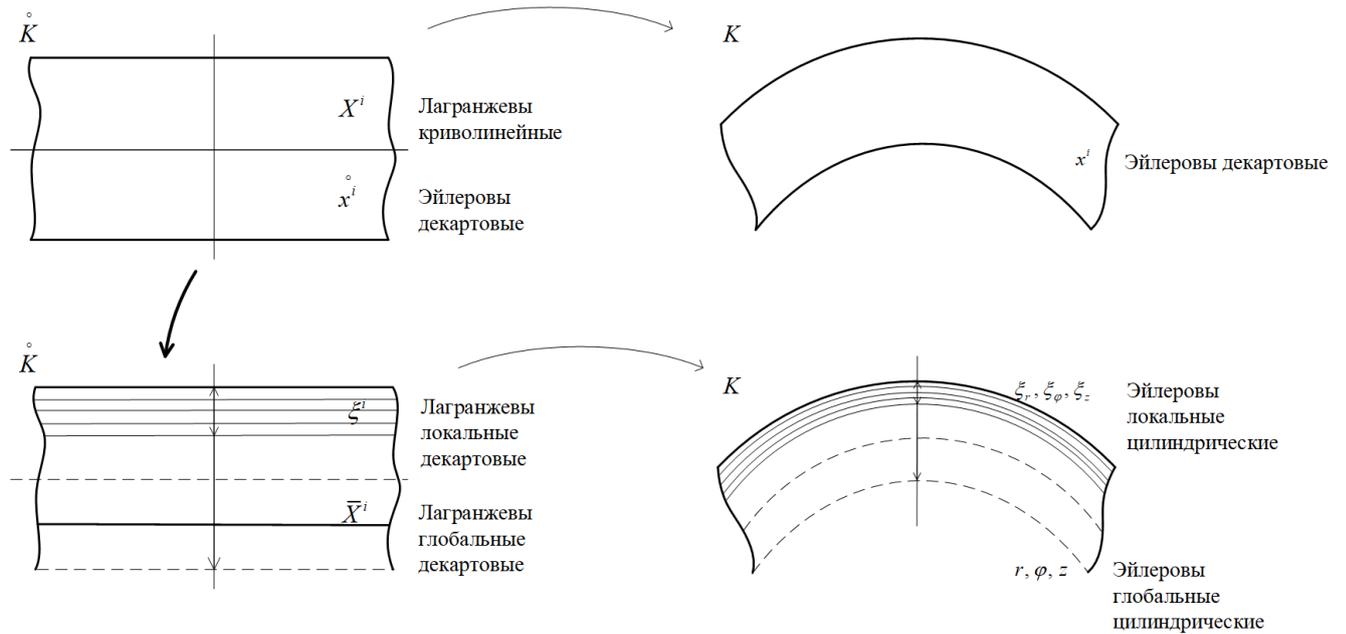


Рисунок 4.9 – Различные типы координат, используемые в задаче о цилиндрическом изгибе слоистой пластины

В силу особенностей рассматриваемой задачи о цилиндрическом изгибе, в соответствии с осредненным законом движения (4.9), решение локальной задачи L_0 в актуальной конфигурации ищем зависящим только от локальной радиальной координаты ξ_r , тогда, подобно решению задачи об одноосном растяжении слоистой пластины из несжимаемого композита (раздел 3.3), градиент деформации в слоях пластины ищем совпадающим с осредненным градиентом (4.61)

$$\mathbf{F}^{(0)} = \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}^i = \frac{A}{r} \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 + \frac{r}{A} \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1. \quad (4.63)$$

Энергетические меры деформации тогда также совпадают с осредненными мерами деформации

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(0)} &= \frac{A}{r} \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \frac{r}{A} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_1^2, \quad \mathbf{U}^{(0)2} = \mathbf{F}^{(0)T} \cdot \mathbf{F}^{(0)}, \\ \mathbf{G}^{(n)} &= \frac{1}{n-III} \mathbf{U}^{(0)n-III} = \frac{1}{n-III} \left(\left(\frac{A}{r} \right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \left(\frac{r}{A} \right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_1^2 \right), \\ \mathbf{G}^{(0)-1} &= (n-III) \left(\left(\frac{r}{A} \right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \left(\frac{A}{r} \right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_1^2 \right), \\ n &= I, II, IV, V. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Определяющие соотношения для изотропных слоев пластины, согласно модели B_n , имеют вид (1.44), тогда для компонентов энергетического тензора напряжений в нулевом приближении получаем

$$\mathbf{T}^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha}^{(0)} \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad (4.65)$$

где

$$T_{\alpha\alpha}^{(0)} = -\frac{p^{(0)}}{n-III} G_{\alpha\alpha}^{(0)-1} + \mu(n-III)^2 \left(\left(\frac{1+\beta}{n-III} + (1-\beta)I_1(\mathbf{G}) \right) - (1-\beta)G_{\alpha\alpha}^{(0)} \right). \quad (4.66)$$

Тензор напряжений Коши нулевого приближения $\mathbf{T}^{(0)}$, имеет также диагональный вид, аналогичный (4.37)

$$\mathbf{T}^{(0)} = T_{11}^{(0)} \mathbf{e}_z^2 + T_{22}^{(0)} \mathbf{e}_\varphi^2 + T_{33}^{(0)} \mathbf{e}_r^2 \quad (4.67)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha}^{(0)} &= -p^{(0)} + \Phi_\alpha^{(0)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ \Phi_1^{(0)} &= a - \frac{b}{n-III}, \\ \Phi_2^{(0)} &= \left(a - \frac{b}{n-III} \left(\frac{r}{A} \right)^{n-III} \right) \left(\frac{r}{A} \right)^{n-III}, \\ \Phi_3^{(0)} &= \left(a - \frac{b}{n-III} \left(\frac{A}{r} \right)^{n-III} \right) \left(\frac{A}{r} \right)^{n-III}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$a = \mu(n - III)^2 \left(\frac{1 + \beta}{n - III} + (1 - \beta) I_1^{(n)}(\mathbf{G}) \right), \quad b = \mu(n - III)^2 (1 - \beta),$$

$$I_1^{(n)}(\mathbf{G}) = \frac{1}{n - III} \left(\left(\frac{A}{r} \right)^{n-III} + \left(\frac{r}{A} \right)^{n-III} + 1 \right).$$

Функции $\Phi_\alpha^{(0)}$ нулевого приближения в цилиндрической системе координат зависят только от глобальной радиальной координаты r , а функция $p^{(0)}$ – от локальной радиальной координаты ξ_r и от r , как от параметра. Тогда единственное тождественно ненулевое уравнение равновесия в локальной задаче L_0 в K принимает вид, аналогичный уравнению (4.45)

$$\frac{d}{d\xi_r} (\xi_r T_{33}^{(0)}) - T_{22}^{(0)} = 0. \quad (4.69)$$

Подставляя выражение (4.68) в (4.69), получаем дифференциальное уравнение относительно $p^{(0)}$

$$\frac{dp^{(0)}}{d\xi_r} = \frac{\Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(0)}}{\xi_r}. \quad (4.70)$$

Интегрируя это уравнение по ξ_r на промежутке $[[r_-, \xi_r]]$, где $r_\pm = r \pm h/2$, а h – толщина ЯП в K , которая вычисляется с помощью (4.9), получаем

$$p^{(0)} = p_0 + (\Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(0)}) \ln \frac{\xi_r}{r_-}. \quad (4.71)$$

Константу p_0 находим из условия нормировки по ЯП

$$\frac{2}{r_+^2 - r_-^2} \int_{r_-}^{r_+} p^{(0)} \xi_r d\xi_r = \bar{p}. \quad (4.72)$$

Подставляя (4.71) в (4.72), находим

$$p_0 = \bar{p} - \frac{2(\Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(0)})}{r_+^2 - r_-^2} \int_{r_-}^{r_+} \ln \frac{\xi_r}{r_-} \xi_r d\xi_r. \quad (4.73)$$

В итоге получаем выражения (4.67), (4.68), (4.71), (4.73) для вычисления компонент тензора напряжений Коши нулевого приближения, как функции от радиуса пластины в актуальной конфигурации r .

Результаты расчетов напряжений для пластины, ЯП которой состоит из двух слоев – полиуретана и резины с константами моделей B_n , полученными в разделе 3.9, приведены на рисунках 4.10 – 4.15.

При численных расчетах число ЯП полагалось равным пяти.

Напряжения $T_{22}^{(0)}$ в слоистой пластине имеют разрыв на границе раздела слоев (рисунок 4.10), в одном из слоев (в полиуретане) значения $T_{22}^{(0)}$ ниже значений осредненного напряжения T_{22} , а в другом (резине) – они выше. С увеличением толщины $\overset{\circ}{h}_3$ пластины при одном и том же радиусе изгиба $r_0 = 0,1\text{м}$ напряжения $T_{22}^{(0)}$ в слоях пластины возрастают (рисунок 4.10 и рисунок 4.11). Модели B_I и B_{II} приводят качественно к одинаковым результатам, но численное различие между этими моделями по значениям напряжений $T_{22}^{(0)}$ составляет около 15%.



Рисунок 4.10 – Распределение по радиусу r компоненты T_{22} среднего тензора напряжений Коши (кривая – 1), вычисленной по формуле (4.52), и компоненты $T_{22}^{(0)}$ тензора напряжений в слоях композитной панели при цилиндрическом

изгибе (модель B_I) для $\overset{\circ}{h}_3 = 0,01\text{м}$, $r_0 = 0,1\text{м}$ ($k_0 = 10\text{м}^{-1}$).

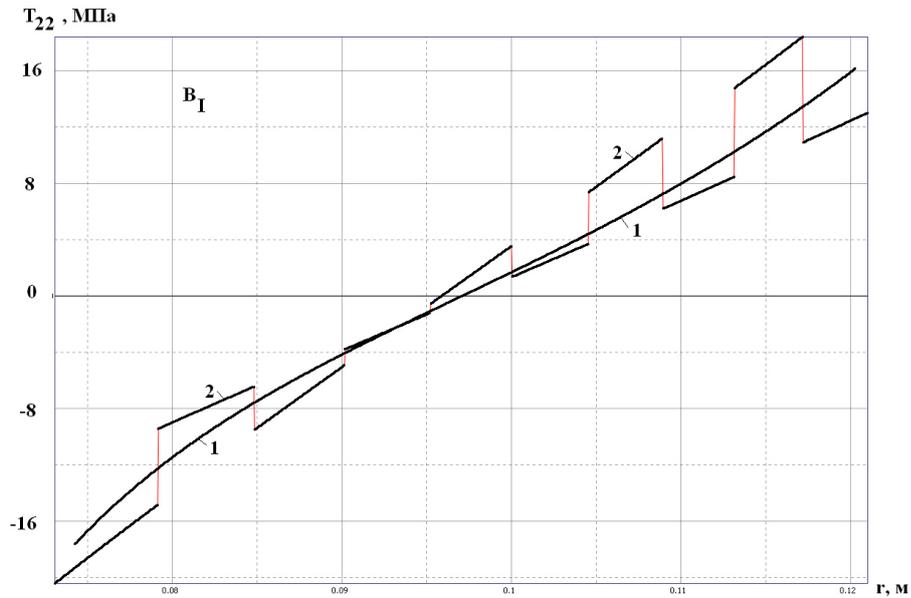


Рисунок 4.11 – Распределение по радиусу r компоненты T_{22} среднего тензора напряжений Коши (кривая – 1), вычисленной по формуле (4.52), и компоненты $T_{22}^{(0)}$ тензора напряжений в слоях композитной панели при цилиндрическом изгибе

(модель B_I) для $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05\text{ м}$, $r_0 = 0,1\text{ м}$ ($k_0 = 10\text{ м}^{-1}$).

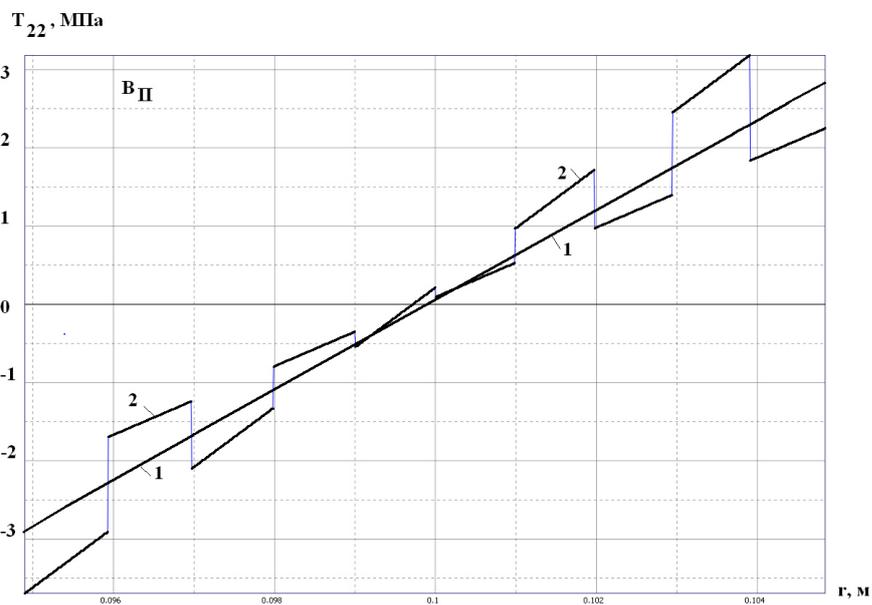


Рисунок 4.12 – Распределение по радиусу r компоненты T_{22} среднего тензора напряжений Коши (кривая – 1), вычисленной по формуле (4.52), и компоненты $T_{22}^{(0)}$ тензора напряжений в слоях композитной панели при цилиндрическом

изгибе (модель B_{II}) для $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05\text{ м}$, $r_0 = 0,1\text{ м}$ ($k_0 = 10\text{ м}^{-1}$).

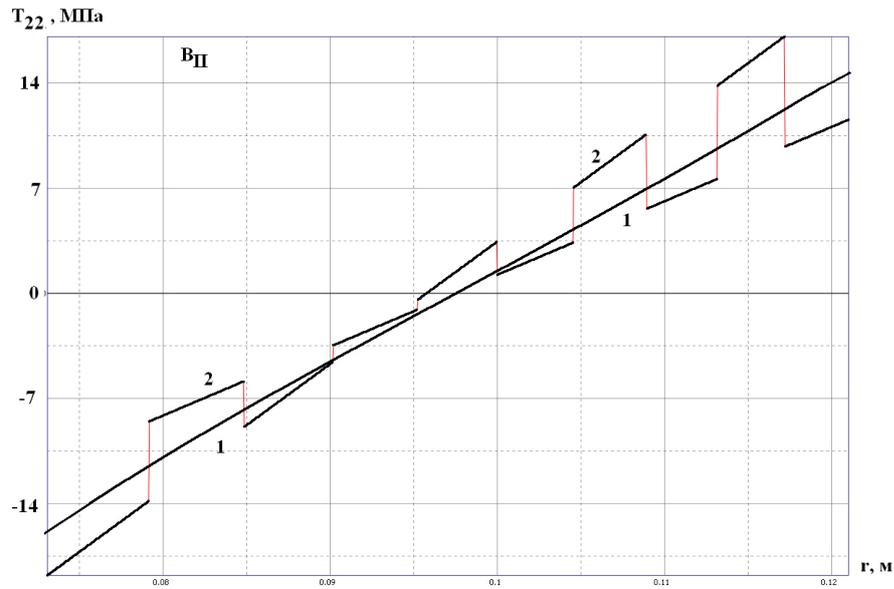


Рисунок 4.13 – Распределение по радиусу r компоненты T_{22} среднего тензора напряжений Коши (кривая – 1), вычисленной по формуле (4.52), и компоненты $T_{22}^{(0)}$ тензора напряжений в слоях композитной панели при цилиндрическом изгибе

(модель B_{II}) для $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05\text{ м}$, $r_0 = 0,1\text{ м}$ ($k_0 = 10\text{ м}^{-1}$).

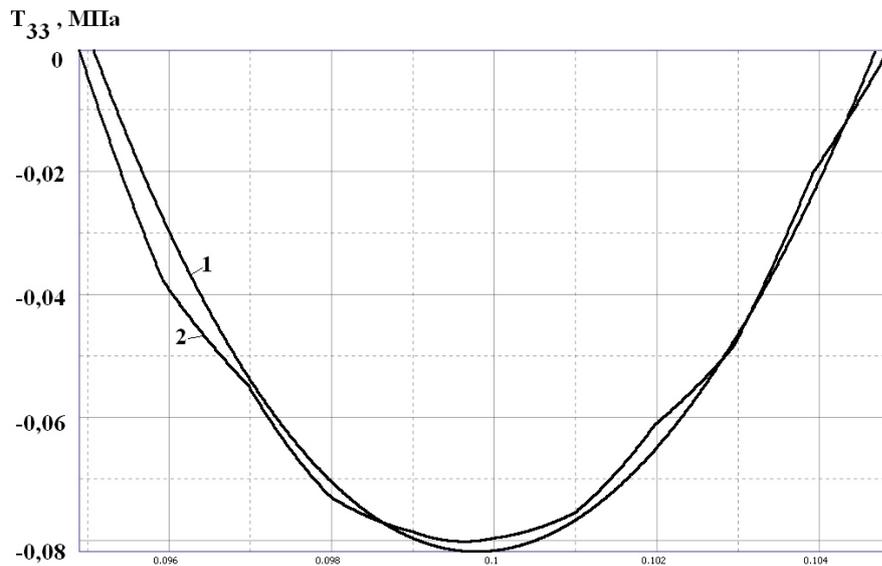


Рисунок 4.14 – Распределение по радиусу r компоненты T_{33} среднего тензора напряжений Коши (кривая – 1), вычисленной по формуле (4.52), и компоненты $T_{33}^{(0)}$ тензора напряжений в слоях композитной панели при цилиндрическом

изгибе (модель B_I) для $\overset{\circ}{h}_3 = 0,01\text{ м}$, $r_0 = 0,1\text{ м}$ ($k_0 = 10\text{ м}^{-1}$).

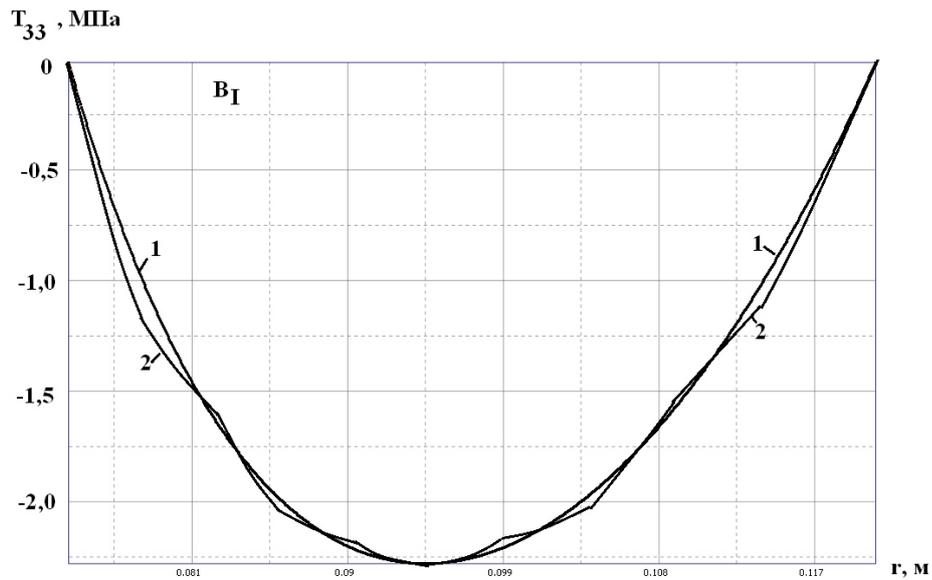


Рисунок 4.15 – Распределение по радиусу r компоненты T_{33} среднего тензора напряжений Коши (кривая – 1), вычисленной по формуле (4.52), и компоненты $T_{33}^{(0)}$ тензора напряжений в слоях композитной панели при цилиндрическом изгибе (модель B_I) для $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05\text{ м}$, $r_0 = 0,1\text{ м}$ ($k_0 = 10\text{ м}^{-1}$).

Выводы

1) Разработан вариант метода асимптотического осреднения слоистых композиционных материалов при конечных деформациях с использованием универсального представления определяющих соотношений для комплекса различных моделей сжимаемых и несжимаемых сред;

2) Разработан алгоритм численного решения задач на ячейке периодичности для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями и с использованием комплекса различных универсальных моделей, для сжимаемых и несжимаемых сред;

3) Предложена методика построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с конечными деформациями на основе аналитической аппроксимации серий численного решения локальных задач;

4) Предложены упругие потенциалы для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с конечными деформациями с использованием универсальных моделей определяющих соотношений;

5) Проведены серии численного моделирования эффективных диаграмм деформирования слоистых сжимаемых и несжимаемых композиционных материалов с конечными деформациями, демонстрирующие реализуемость предложенных методик построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных композитов;

6) Решена задача о цилиндрическом изгибе слоистой композитной пластины, на которой продемонстрирована реализуемость предложенной методики расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из слоистых композиционных материалов путем разделения осредненной задачи нелинейной теории упругости анизотропных сред и локальных задач на ячейке периодичности.

Список литературы

1. Адамов А.А. Описание вязкоупругого поведения несжимаемых и слабо-сжимаемых материалов при конечных деформациях. // Автореф. дис. канд. физ. мат. наук. - М.: 1979. - 21 с.
2. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Эдиториал УРСС, 2003.
3. Бахвалов Н.С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Доклады АН СССР. — 1975. — Т. 221, №3. — С. 516-519.
4. Бахвалов Н.С. Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1975. 225, № 2. 249–252.
5. Бахвалов Н.С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. 218, № 5. 1046–1048.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах: математические задачи механики композиционных материалов. — Москва : Наука, 1984. — 352 с.
7. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П., Штарас А.Л. Метод осреднения для уравнений с частными производными и его применения // Дифференциальные уравнения с частными производными - 5. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1988. -Т. 34. - С. 215-241.
8. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // Доклады Академии Наук СССР, т. 268, № 4, pp. 836-840, 1983.

9. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Эффективные модули композитов, армированных системой пластин и стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 38, № 5, 1998, 813 с.
10. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — Москва : Наука, 1983. — 448 с.
11. Бердичевский В.Л. Пространственное осреднение периодических структур // Доклады АН СССР. — 1975. - Т. 222, №3. - С. 565-567.
12. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. — Москва : Машиностроение, 1980. - 376 с.
13. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. — Днепропетровск : Пороги, 2008. — 197 с.
14. Браутман Л., Крок Р. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов / под ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – 568 с.
15. Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.Наука. 2017, 432 с
16. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. — Москва: Наука. Физматлит., 1997. — 288 с.
17. Гольденблатт И. И. Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1965.- 336 с.
18. Горбачев В. И. Об одном подходе к построению теории неоднородных оболочек // Научная конференция Ломоносовские чтения, секция механики. Тезисы докладов. — 2006.
19. Горбачёв В. И., Метод осреднения Бахвалова–Победри в механике композитов, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2016, номер 6, 41–46
20. Горбачев В.И., Победря Б.Е. Об упругом равновесии неоднородных полос // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1979. № 5. 111–118.,

21. Горбачев В.И., Фирсов Л.Л. Изгиб многослойной пластины // Научная конференция "Ломоносовские чтения. Апрель 2009 года. — Секция механики. — Издательство Московского университета Москва, 2009. — С. 57–57.
22. Горбачев В.И., Фирсов Л.Л. Новая постановка задачи теории упругости для слоя // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 114-121.
23. Григорян С.С. Об осреднении физических величин // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 254, №4. — С. 1081-1085.
24. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. - 455 с.
25. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. - 270 с.
26. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994, 206 с.
27. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Кольжанова Д. Ю., Каримов С. Б., Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения, *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, выпуск 13, 32–54
28. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю. Моделирование слоистых композитов с конечными деформациями методом асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5(29). URL: (<http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1405.html>) DOI: 10.18698/2308-6033-2015-5-1405
29. Yu I Dimitrienko, S B Karimov, D Yu Kolzhanova Modeling of the effective universal constitutive relations for elastic laminated composites with finite strains *IOP Journal of Physics: Material Science and Engeneering*, 2019. volume 683 № 012006 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012006 pp.1-6.
30. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, S B Karimov and D Yu Kolzhanova Universal models of the constitutive relations for transversely isotropic compressible

- composites with finite strains IOP Conference Series: Material Science and Engeneering, 2020. volume 934 (2020) 012012 doi:10.1088/1757-899X/934/1/012012 pp.1-6.
31. Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, С.Б. Каримов, Д.Ю. Кольжанова Моделирование эффективных характеристик трансверсально изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 4, выпуск 20, 16–34
 32. Димитриенко Ю.И., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование эффективных упругих характеристик для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями. *Ключевые тренды в композитах: наука и технологии. Сборник материалов Международной научно-практической конференции*. 2019. С. 183-192.
 33. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. -М.: Физматлит. -2009. -610с. ISBN 978-5-9221-1110-2.
 34. Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. — 2012. — №3. — С. 86-99.
 35. Димитриенко Ю.И. Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечного элемента// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки.- №2.-2002.- С.95-108.
 36. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды, т.1. Тензорный анализ. – М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. – 367 с.
 37. Димитриенко Ю.И. Основы механики твердого тела/ Механика сплошной среды.Т.4. – Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. – 2013. – 580 с.
 38. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно - элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–48.
 39. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на

- основе метода асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. — 2007. — №1. — С. 26-46.
40. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. Наука и образование. Электронное научно-техническое издание, 2014, № 10. doi: 10.7463/1014.0730105
41. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин// Механика композиционных материалов и конструкций. Т.20. № 2. – 2014. 260-282 с.
42. Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным наполнителем//Композиты и наноструктуры, 2014, № 1, т. 6, с. 32–48. ,
43. Дунаев И. М. Об одном варианте нелинейной теории термовязкоупругости эластомеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1985. - Т. 1.-С. 110-117.
44. Дунаев И.М. Механика эластомеров с учетом элементов структуры. В кн.: Труды международной конференции по каучуку и резине: Современные проблемы физики и химии каучука и резины. - Киев, Секц. А I, 1978.,
45. Дунаев И.М. Об одном варианте нелинейной теории термовязкоупругости эластомеров. В кн.: Пятый всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Тез докл. - Алма-Ата, Изд-во науки Казахской ССР, 1981, с. 142-143.
46. Дунаев И.М. Обобщенный упругий потенциал для расчета конструкций из эластичных полимеров. Изв. Высш. учеб. заведений, Строительство и архитектура, 1975, № 10, с. 30-37.

47. Дунаев И.М. Определяющие соотношения вязкоупругости эластомеров с учетом элементов структуры. Изв. АН СССР, Мех. твердого тела, 1978, №3, с. 184-185.
48. Дунаев И.М. Определяющие соотношения нелинейной теории термовязкоупругости эластомеров и термоэластопластов. В кн.: VII Всесоюзная конференция по прочности и пластичности. Тез. докл. - Горький, 1978, с. 50-51.
49. Дунаев И.М. Разрушение эластомеров I. В кн. Механика эластомеров. Межвузовский сб. Краснодар, Краснодар, политехи, ин-т, 1981, с. 2433.,
50. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. - 190 с.
51. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Нгоан Ха Тьен Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов, УМН, 34:5(209) (1979), 65–133; Russian Math. Surveys, 34:5 (1979), 69–147.
52. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
53. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. 2-е изд., перераб. и доп. -М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. - 287 с.
54. Каламкаргов А.Л., Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. - 1987. - Т. 19. - С. 78-147.
55. Карнаузов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наукова думка. 1982, 262 с.
56. Колтунов М.А. Постановка задачи геометрической нелинейности теории вязкоупругости // Механика полимеров. 1975. №2. С. 234-240.
57. Коробейников С.Н., Кургузов В.Д., Ларичкин А.Ю., Олейников А.А. Компьютерное моделирование деформирования эластомеров. Известия алтайского государственного университета, 2014, вып. 1-1 (81). DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-37
58. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. - 340 с.

59. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976.-232 с.
60. Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях, Компьютерное и физическое моделирование, М. Физматлит. 2007, 392 с.
61. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды.— ЖЭТФ, 1947, 17, в.9.
62. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. - 640 с.
63. Мальков В.М. Механика многослойных эластомерных конструкций. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета. 1998. 320 с.
64. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. — Киев : Вища школа, 1991. — 131 с.
65. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. — Киев : Вища школа, 1982. — 153 с.
66. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
67. Муравлева Л.В. О некоторых критериях разрушения композитов на основе метода осреднения // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2007. — №3. — С. 166-176.
68. Муравлева Л.В. Эффективные свойства ортотропных композитов при упругопластических деформациях // Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. — Москва : Едиториал УРСС, 2006. — С. 371-378.
69. Муравлева Л.В., Шешенин С.В. Эффективные свойства железобетонных плит при упругопластических деформациях // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2004. — №3. — С. 62-65.
70. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976
71. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. - 370 с.

72. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. — Москва: Машиностроение, 1991. — 429 с.
73. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
74. Павленко А.В. Применение асимптотического метода к пространственной задаче теории упругости для композитных материалов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — Т. 3. - С. 50-61.
75. Панасенко Т.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Доклады Академии Наук СССР. — 1987. — Т. 294, №5. — С. 1061-1065.
76. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. — Москва : Издательство Московского университета, 1984. — 336 с.
77. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.-384 с.
78. Резцов М.В. Композиционные пластины, армированные высокомодульными волокнами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, №9. — С. 1394-1404.
79. Резцов М.В. Осреднение системы уравнений теории упругости в неоднородном тонком слое толщины h с периодом неоднородностей s // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1989. — Т. 29, №9. — С. 1433-1434.
80. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 472 с.
81. Строцци А. Об объемной сжимаемости резиноподобных материалов// В кн. Международ. конф. по каучуку и резине. М.: 1984. - с.25.
82. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.- М.: Мир, 1975.- 592 с.
83. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. М. Мир, 1967. - 544 с.

84. Хилл Р. Упругие свойства составных сред, некоторые теоретические принципы.— Механика. Сб. переводов, 1964, № 5.
85. Черных К.Ф. Теория больших упругих деформаций / К.Ф. Черных, З.Н. Литвиненкова. Л: Изд. ЛГУ, 1988. 190 с.
86. Шешенин С.В., Демидович П.Н. Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина // Применение метода осреднения для построения слоистого конечного элемента. — Москва : Едиториал УРСС, 2006. — С. 432-437.
87. Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины // Вычислительная механика сплошных сред. — 2011. — Т. 4, №2. — С. 128-139.
88. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Barantsev R.G. Asymptotic approaches in mechanics: new parameters and procedures //Applied Mechanics Reviews. — 2003. — Vol. 56, №1. — P. 87-109.
89. Andrianov I.V., Bolshakov V.I., Danishevs'kiy V.V., Weichert D. Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials // Proceedings of the Royal Society A. — 2008. — Vol. 464, №2093. - P. 1181-1201.
90. Andrianov I.V., Danishevs'kiy V.V., Kalamkarov A.L. Asymptotic justification of the three-phase composite model// Composite Structures. — 2007. — Vol. 77, №3. — P. 395^04.
91. Andrianov I.V., Danishevs'kiy V.V., Kalamkarov A.L. Micromechanical analysis of fiber-reinforced composites on account of influence of fiber coatings I I Composites Part B: Engineering. — 2008. — Vol. 39, №5. — P. 874881.
92. Andrianov I.V., Danishevs'kiy V.V., Weichert D. Asymptotic determination of effective elastic properties of composite materials with fibrous square-shaped inclusions // European Journal of Mechanics-A/Solids. — 2002. — Vol. 21, №6. — P. 1019-1036.

93. Andrianov I.V., Danishevs'kiy V.V., Weichert D. Asymptotic Study of Imperfect Interfacial Bonding in Periodic Composite Materials // *Mechanics of the 21st Century. Proceedings of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics.* — Warsaw, Poland, 2004. — P. 15-21.
94. Arruda E. M., Boyce M. C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials/E. M. Arruda, M. C. Boyce//*J. Mech. Phys. Solids.* -1993. -41(2). -pp. 389-412.
95. Bakhvalov N. S. Исследование дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами.— *Proceedings of the fourth symposium on basic problems of numerical Math., MFFUK v Praze, 1980, p. 5—14.*
96. Barenblatt G.I., *Collected Papers of R.S. Rivlin: Volume I.* New York: Springer, 1997. 1424 p
97. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. *Boundary Layers and Homogenization of Transport Processes.*—*Publ. RIMS Kyoto Univ., 1979, № 15, p. 53-157.*
98. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures.* — Amsterdam : North-Holland, 1978.
99. Bourgat J. F. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients.— *Rapport de Recherche, 1978, № 277, I. R. I. A. Rocquencourt, France.*
100. Boutin C. Study of permeability by periodic and self-consistent homogenisation I I *European Journal of Mechanics-A/Solids.* - 2000. - Vol. 19, №4. - P. 603-632.
101. Boutin C., Hans S. Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures // *Computers and Geotechnics.* — 2003. — Vol. 30, №4. — P. 303-320.
102. Cheng-Hui Li, Chao Wang, Christoph Keplinger, Jing-Lin Zuo, Lihua Jin, Yang Sun, Peng Zheng, Yi Cao, Franziska Lissel, Christian Linder, Xiao-Zeng You & Zhenan Bao A highly stretchable autonomous self-healing elastomer. *Nature Chemistry* 8, 618–624 (2016)

103. Dimitrienko Yu.I. A Structural thermomechanics model of textile composite materials at high temperatures. *Composites Science and Technology*. 1999. T. 59. № 7. C. 1041-1053.
104. Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Rodríguez-Ramos R., Sabina F.J. Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I. Elastic and square symmetry I/ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. — 2001. — Vol. 49, №7. — P. 1445-1462.
105. Hill R. Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials // *J. Mech. and Phys. Solids*. - 1964. - Vol. 12, № 3. - P. 199-212.
106. J. Moraleda, J. Segurado, J. Llorca Finite deformation of porous elastomers: a computational micromechanics approach. *Philosophical Magazine*, Vol. 87, No. 35, 11 December 2007, 5607–5627
107. John F. On finite deformation of elastic isotropic material // *Inst. Math. Sci. New-York Univ. Report IMM-NYU*. 1958. № 250.
108. Kalamkarov A.L. Composite and reinforced elements of construction. — Chichester: John Wiley & Sons, 1992. - 286 p.
109. Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. A new asymptotic model for a composite piezoelectric plate // *International Journal of Solids and Structures*. — 2001. — Vol. 38, №34. — P. 6027-6044.
110. Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. Analysis, design and optimization of composite structures. — New York : J.Wiley & Sons, 1997.
111. Lewiński T., Telega J.J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. — Singapore : World Scientific Publishing, 2000. — 739 p.
112. Lewiński T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure // *International Journal of Solids and Structures*. — 1992. — Vol. 29, №3. — P. 309-326.
113. Lockett F. J. Nonlinear viscoelastic solids. London - New-York: Acad. Press, 1972. - 196 p.
114. Manevitch L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. Mechanics of periodically heterogeneous structures. — Berlin : Springer, 2002. — 255 p.

115. Marcellini P. Periodic solutions and homogenization of non linear variational problems.— *Annali di Matematica*, 1978, № 117.
116. Marcellini P., Sbordone C. Sur quelques de G-Convergence et d'homogenisation non-lineaires.— *C R. Acad. sci. Paris*, 1977, 284.
117. Meguid S.A., Kalamkarov A.L. Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure // *International Journal of Solids and Structures*. — 1994. — Vol. 31, №3. — P. 303-316.
118. Miehe C., Schröder J., Bayreuther C. On the homogenization analysis of composite materials based on discretized fluctuations on the micro-structure // *Acta Mechanica*. — 2002. — Vol. 155, №1-2. — P. 1-16.
119. Ogden R. W. Large Deformation Isotropic Elasticity -On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids, *Proceedings of the Royal Society of London/R. W. Ogden//Series A, Mathematical and Physical Sciences*. - Vol. 326. -No. 1567 (1 February 1972). -pp. 565-584.
120. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Z. angew. Math, und Mech.* 9, № 1, 49—58 (1929).
121. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*, Berlin: Teubner, 1928, p. 962.
122. Zohdi T.I. Homogenization methods and multiscale modeling // *Encyclopedia of Computational Mechanics*. — John Wiley & Sons, 2004.
123. Zeleniakienė D., Griškevičius P. The Influence of Pores Distribution Mode on the Stress of Porous Elastomeric Materials in the Case of Large Deformations. *Materials science (medžiagotyra)*. Vol. 11, No. 3. 2005