

УДК: 533.6.013.42

## **Флаттер упругой полосы в потоке газа с малой сверхзвуковой скоростью**

**Шитов С. В.**

*Научно-производственный центр газотурбостроения «Салют»,*

*проспект Будённого, 16, Москва, 105118, Россия*

*e-mail: [SHLTOV@GMAIL.COM](mailto:SHLTOV@GMAIL.COM)*

### **Аннотация**

Во всех классических исследованиях панельного флаттера принимается, что нестационарное давление потока газа может быть вычислено по поршневой теории. Однако, поршневая теория верна лишь при больших числах Маха и не покрывает область  $1 < M < 2$ . Недавно было доказано, что в этом диапазоне чисел Маха существует область панельного флаттера, названного одномодовым, который отличен от «классического» флаттера связанного типа. В настоящей работе численно изучается одномодовый флаттер пластины в форме полосы, имеющей периодическое подкрепление вдоль бесконечного направления. Построены границы устойчивости и проанализировано влияния: длины пролёта, ширины пролёта (расстояния между подкреплениями) и числа Маха набегающего потока.

**Ключевые слова:** панельный флаттер, флаттер пластины, одномодовый флаттер, флаттер с одной степенью свободы.

## 1. Введение.

Панельный флаттер — явление самовозбуждающихся вибраций панелей обшивки летательных аппаратов, движущихся с большой скоростью. Обычно он не вызывает мгновенное разрушение панелей (как флаттер крыла), но приводит к быстрому накоплению усталостных повреждений и резко снижает срок службы панелей. Хотя панельный флаттер наблюдался на сверхзвуковых ракетах ещё во время войны, первые содержательные теоретические исследования появились спустя десятилетие [1, 2]. В этих работах использовалась модель Кирхгофа-Лява движения пластины и закон плоских сечений нестационарного движения газа, приводящий к формуле поршневой теории для давления газа на пластину [3]. После работ Мовчана задача панельного флаттера была изучена во множестве усложнённых постановок [4–10]. В подавляющем большинстве работ усложнению подвергалась «упругая» часть задачи: многослойные и композитные пластины, неплоские оболочки, нелинейные модели пластины и материала, в т.ч. вязкоупругие материалы, материалы с памятью формы или пьезоэлектрическими свойствами [11–13]. «Аэродинамическая» часть задачи оставалась неизменной: использовалась поршневая теория.

Нестационарное давление невязкого газа, действующее на колеблющуюся пластину, полученное из газовой динамики, имеет вид интегрального оператора от комбинации прогиба и его производной, с ядром из специальных функций (см.

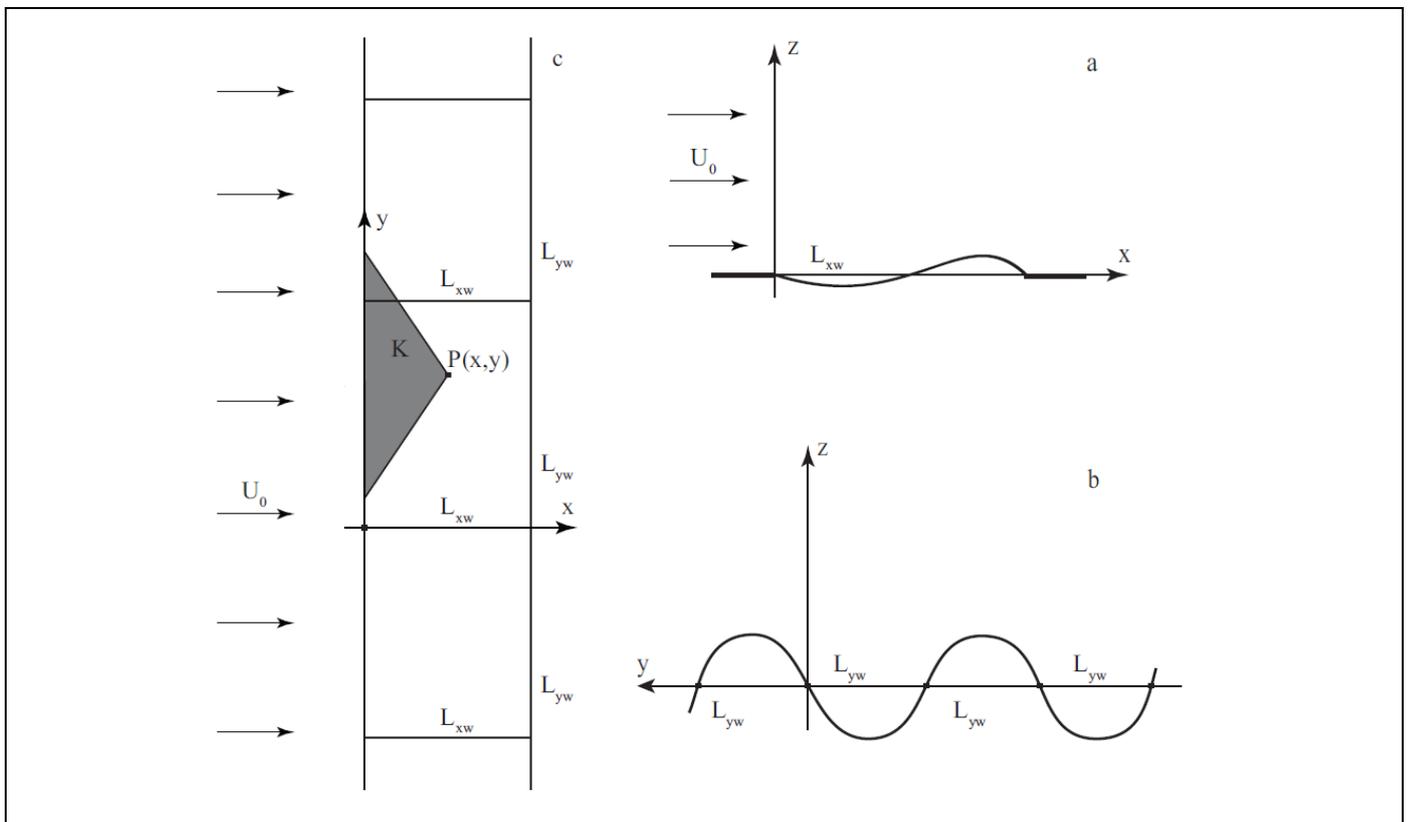
постановку задачи ниже). В пределе при  $M \rightarrow +\infty$  оно даёт формулу поршневой теории, однако при числах Маха, близких к 1, ничего общего с поршневой теорией нет. Подстановка точного выражения в уравнение движения пластины приводит к интегродифференциальному уравнению на собственные значения, которое в данной работе решается численно.

Трёхмерная задача одномодового панельного флаттера прямоугольных пластин больших размеров была исследована в [27, 28] с помощью модифицированного асимптотического метода [29]. Постановка задачи численного исследования прямоугольных пластин произвольных размеров усложняется по сравнению с двумерной, поскольку в интегродифференциальном выражении для нестационарного давления, действующего на пластину, область интегрирования становится двумерной в форме треугольника [30]. Этот двумерный интеграл может быть сведён к одномерному в случае бесконечной серии прямоугольных пластин, шарнирно связанных друг с другом, или, что то же самое, в случае периодически подкреплённой упругой полосы. Такую постановку можно рассматривать как первое приближение к исследованию флаттера изолированной прямоугольной пластины. В настоящей работе эта задача решается численно модифицированным методом [25].

## **2. Постановка задачи.**

В линейном приближении исследуется устойчивость тонкой упругой бесконечной полосы, которая вмонтирована в абсолютно жесткую плоскую поверхность. Полоса обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа, а с другой стороны задано постоянное давление, которое уравнивает полосу в

плоском невозмущённом состоянии равновесия. Полоса имеет периодическое шарнирное подкрепление вдоль бесконечного направления, также на передней и задней кромках полосы задано условие шарнирного опирания. Из данной постановки следует, что либо все пролёты одновременно устойчивы, либо все одновременно неустойчивы, поэтому далее будем рассматривать устойчивость отдельного пролёта, как элемента полосы, непосредственно взаимодействующего с соседними пролётами. Сам же отдельный пролёт будем называть пластиной. Поместим систему координат  $Oxyz$  в плоскость невозмущённой полосы так, чтобы рассматриваемая отдельная пластина занимала область:  $0 \leq x \leq L_{xw}$ ,  $0 \leq y \leq L_{yw}$ ,  $z = 0$ . Ось  $z$  направим перпендикулярно плоскости пластины, чтобы система образовывала правую тройку (фиг. 1).



Фиг. 1. Общий вид колебаний пластины. Давление  $P(x;y)$  на поверхности пластины вычисляется интегрированием по области  $K$ .

Пластина рассматривается без мембранного напряжения, но обладает изгибной жёсткостью  $D_m$ , которая вместе с толщиной  $h$  и плотностью материала  $\rho_m$  считаются постоянными. Колебания пластины малы (то есть прогиб пластины считается малой величиной по сравнению с толщиной) и описываются уравнением движения Кирхгофа-Лява. Массовые силы в задаче не учитываются.

Газ считается невязким (идеальным) и совершенным, с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $a_0$  в невозмущённом состоянии. Газа поступательно течёт в области  $z > 0$  с постоянной сверхзвуковой скоростью  $U_0$ , направленной вдоль оси  $x$ . Течение считается адиабатическим, тепловая задача и задача движения отделены друг от друга, пограничный слой не учитывается. Так как колебания пластины малы, то сильных скачков уплотнения в газе нет.

Невозмущенное течение газа является потенциальным, а действие пластины на газ эквивалентно приложению поверхностных сил, которые в идеальном газе могут вызывать только потенциальное течение. Следовательно, возмущения газа, образованные возмущениями пластины, всегда является потенциальными. Таким образом, для исследования устойчивости достаточно рассматривать потенциальное движение газа.

Далее следует замкнутая безразмерная линеаризованная система уравнений в частных производных ((2.3), (2.4) и выражение (2.5)), описывающая развитие малых возмущений газа и пластины. Сначала, покажем, каким образом безразмерные параметры выражаются через размерные:

$$D = \frac{D_m}{a_0^2 \rho_m h}; \quad L_x = \frac{L_{xm}}{h}; \quad L_y = \frac{L_{ym}}{h}; \quad M = \frac{U_0}{a_0}; \quad \mu = \frac{\rho_0}{\rho_m}.$$

В качестве размерно-независимых величин выбраны величины  $a_0$ ,  $\rho_0$  и  $h$  (толщина пластины). Здесь  $D$ ,  $L_x$ ,  $L_y$  — безразмерная жёсткость, длина и ширина пластины;  $M$  и  $\mu$  — число Маха и безразмерная плотность газа.

В системе уравнений будет отсутствовать переменная, выражающая время. Согласно линейной теории устойчивости, зависимость малых возмущений системы по времени представляется в виде:

$$\begin{aligned} w(x; y; t) &= W(x; y) \exp(-i\omega t) \\ \varphi(x; y; z; t) &= \Phi(x; y; z) \exp(-i\omega t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Колебания пластины в потоке газа осуществляются по определённым формам (собственные формы в потоке). Каждой собственной форме соответствует своя собственная комплексная частота  $\omega n$ . Если имеется хотя бы одна собственная частота с положительной мнимой частью ( $\text{Im } \omega n > 0$ ), то амплитуда собственной формы, соответствующей этой частоте, будет возрастать по времени, что следует из выражения (2.2), и колебания пластины будут неустойчивыми. Таким образом, устойчивость упругой пластины в потоке газа определяется расположением на комплексной плоскости собственных частот.

Теперь перейдём к системе уравнений, описывающей малые возмущения пластины и газа (2.2). Уравнение движения пластины (уравнение Киргофа-Лява) и граничные условия шарнирного опирания записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} D \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right)^2 W(x; y) - \omega^2 \cdot W(x; y) + P(x; y) &= 0 \quad (0 < x < L_x) \\ W = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 W}{\partial^2 x} = 0 \quad (x = 0; x = L_x) \\ W = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 W}{\partial^2 y} = 0 \quad (y = 0; y = L_y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Где  $W(x;y)$  — профиль прогиба пластины, а  $P(x;y)$  — разность давлений, которая действует на пластину со стороны газа.

Волновое уравнение на малые возмущения газа имеет вид:

$$\left(-i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z} = 0 \quad (z > 0) \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \longrightarrow 0 \quad (z \rightarrow +\infty) \quad \boxed{\text{затухание на бесконечности}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left(-i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right) W(x;y) \quad (z = 0) \quad \boxed{\text{непротекание через пластину}}$$

Где  $\Phi(x;y;z)$  есть потенциал малых возмущений скорости газа. Второе условие является условием затухания возмущений газа на бесконечности (стремление  $\text{grad}[\Phi(x;y;z)]$  к нулю вдоль луча Маха, так как малые возмущения в сверхзвуковом потоке распространяются внутри конуса Маха). Третье условие выражает условие непротекания газа через колеблющуюся пластину.

Используя соотношение на адиабате Пуассона, давление  $P(x;y)$ , которое входит в уравнении (2.3), выражается через потенциал  $\Phi(x;y;z)$  следующим образом:

$$P(x;y) = -\mu \left(-i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(x;y) \quad (2.5)$$

Таким образом, уравнения (2.3) и (2.4) со всеми граничными условиями и выражением давления  $P(x;y)$  через потенциал  $\Phi(x;y;z)$  (2.5) представляют собой замкнутую систему.

Уравнение на потенциал  $\Phi(x;y;z)$  (2.4) решается с помощью преобразования Лапласа аналитически, решение соответствует формуле из [30]. Это решение представляет собой двумерный интеграл по области  $K$  функции от прогиба  $W(x;y)$  помноженной на ядро, состоящее из специальных функций:

$$\Phi(x; y) = - \iint_{K_{\Delta}} \frac{1}{\pi} V(\hat{x}; \hat{y}) \cdot K(x - \hat{x}; y - \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \quad (2.6)$$

$$K(x - \hat{x}; y - \hat{y}) = \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2} (x - \hat{x})\right) \cdot \frac{\cos\left(\sqrt{(x - \hat{x})^2 - \beta^2(y - \hat{y})^2}\right)}{\sqrt{(x - \hat{x})^2 - \beta^2(y - \hat{y})^2}}$$

$$V(\hat{x}; \hat{y}) = \left(-i\omega + M \frac{\partial}{\partial \hat{x}}\right) W(\hat{x}; \hat{y})$$

Где  $K$  — треугольник, полученный пересечением конуса Маха, выпущенного из точки  $(x;y)$  по направлению противоположному движению невозмущённого потока, с поверхностью колеблющейся пластины (фиг. 1.с).

Таким образом, уравнение колебания пластины (2.3) после подстановки в него выражения (2.5) с учётом решения волнового уравнения (2.6) и граничных условий шарнирного опирания представляет собой задачу на отыскание комплексных собственных значений  $\omega_n$ . Эта задача решается численно. Система неустойчива в том и только в том случае, когда хотя бы одна из собственных частот  $\omega_n$  лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости:  $\text{Im}(\omega_n) > 0$ . Целью работы является построение областей неустойчивости для первых четырёх частот  $\omega_1^1$ ,  $\omega_3^1$ ,  $\omega_3^1$  и  $\omega_4^1$  в плоскости безразмерных параметров  $L_x$  и  $M$  при различных значениях  $L_y$ . При этом значение следующих параметров фиксировались:

$D = 23.9$  и  $\mu = 0.00012$ , что соответствует стальной пластине, обтекаемой потоком воздуха при нормальных условиях ( $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $a_0 = 300$  м/с,  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_m = 8500$  кг/м<sup>3</sup>).

### 3. Численный метод.

#### 3.1 Частотное уравнение системы.

Замкнутое интегро-дифференциальным уравнением движения пластины будем называть уравнение движения пластины (2.3) с учётом выражений (2.5) и (2.6). Задачу на отыскание собственных частот этого интегро-дифференциального уравнения будем решать численно методом Бубнова-Галёркина. Ниже описывается метод решения задачи.

Прогиб пластины  $W(x; y)$  представляется в виде суммы базисных функций с неизвестными комплексными коэффициентами. В качестве базисных функций полагаются формы колебания пластины в пустоте, удовлетворяющие граничным условиям шарнирного опирания, таковыми являются функции синуса. Таким образом, получаем:

$$W(x; y) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} C_1^k \cdot \sin\left(\frac{\pi k x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi l y}{L_y}\right) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} C_1^k \cdot W_k(x) \cdot W^l(y) \quad (3.1)$$

Базисные функции можно представить в виде таблице  $N_x$  на  $N_y$  (см. таблицу №1). Далее базисные функции необходимо перенумеровать одним индексом. Сумма (3.1) переписывается в виде:

$$W(x; y) = \sum_{m=1}^{N_x} C_m \cdot T_m(x; y) \quad (3.2)$$

Где по номеру  $m$  можно восстановить номера  $k$  и  $l$  (по таблице №1).

**Таблица №1.**

	k=1	k=2	...	...	k= N <sub>x</sub>
l=1	$T_1 = W_1(x) \cdot W^1(y)$	$T_2 = W_2(x) \cdot W^1(y)$	...	...	$T_{N_x} = W_{N_x}(x) \cdot W^1(y)$
l=2	$T_{(N_x+1)} = W_1(x) \cdot W^2(y)$	$T_{(N_x+1)} = W_1(x) \cdot W^2(y)$	...	...	$T_{2N_x} = W_{N_x}(x) \cdot W^2(y)$
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
l=N <sub>y</sub>	$T_r = W_1(x) \cdot W^{N_y}(y)$	...	...	...	$T_{N_x N_y} = W_{N_x}(x) \cdot W^{N_y}(y)$

Далее, подставляя сумму (3.2) в интегро-дифференциальное уравнение колебания пластины (2.3), умножая его последовательно на  $(2/L_y) \cdot T_m(x;y)$  ( $m=1, 2 \dots N$ ) и интегрируя по  $x$  от 0 до  $L_x$  и по  $y$  от 0 до  $L_y$ , получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно комплексных коэффициентов  $C_m$  с матрицей  $A(\omega)$ :

$$A(\omega) = K - \frac{L_x \omega^2}{2} E + P(\omega) \tag{3.3}$$

Матрица  $A(\omega)$  является частотной матрицей интегро-дифференциального уравнения колебания пластины (2.3). Она состоит из трёх частей:  $E$  — единичная матрица,  $K$  — диагональная матрица жёсткости, которая отражает свойства

$$I = \begin{pmatrix} (-1)^4 & (-1)^2 & (-1)^2 & (-1)^4 \end{pmatrix}$$

пластины,  $P(\omega)$  — матрица аэродинамических сил. Диагональные коэффициенты  $k_{nm}$  матрицы  $K$  имеют вид:

Коэффициенты  $p_{nm}(\omega)$  матрицы  $P(\omega)$  вычисляются следующим образом:

$$p_{nm}(\omega) = \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} P(x; y; T_n(x; y); \omega) \cdot T_m(x; y) dx dy \quad (3.5)$$

Таким образом, уравнение для определения собственных частот имеет вид:

$$\det[A(\omega)] = 0 \Leftrightarrow \det \left[ K - \frac{L_x \omega^2}{2} E + P(\omega) \right] \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) называется частотным уравнением данной системы.

Надо отметить, что при  $T_m(x; y) = \sin(\kappa x) \cdot \sin(\lambda y)$  выражение для давления  $P(x; y)$  (2.5), после подстановки в него решения волнового уравнения (2.6), приобретает вид:

$$P(x; y; T_m; \omega) = \frac{\mu M}{\beta} \sin(\lambda y) \cdot (-i\omega \cdot \sin(\kappa x) + M\kappa \cdot \cos(\kappa x)) + \quad (3.7)$$

$$+ \frac{\mu}{\beta^3} \sin(\lambda y) \cdot \int_0^x d\bar{x} (-i\omega \cdot \sin(\kappa \bar{x}) + M\kappa \cdot \cos(\kappa \bar{x})) \cdot \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2} (x - \bar{x})\right) \times$$

$$\times \left(-i\omega \cdot J_0(z_3) - M\sqrt{\omega^2 + (\lambda\beta)^2} \cdot J_1(z_3)\right)$$

$J_0(z_3)$  и  $J_1(z_3)$  - Функции Бесселя нулевого и первого порядков

$$z_3 = \frac{\sqrt{\omega^2 + (\lambda\beta)^2}}{\beta^2} \cdot (x - \bar{x})$$

Таким образом, давление  $P(x;y;W; \omega)$  линейно зависит от прогиба  $W(x;y)$ , что позволяет применить данный численный метод к решению задачи.

### 3.2 Нахождение корней частотного уравнения.

Сначала рассмотрим колебания пластины в пустоте, этому случаю будет соответствовать частотное уравнение (3.6) без матрицы аэродинамических сил  $P(\omega)$ . Это уравнение имеет  $N$  различных решений относительно  $\omega^2$ , которым соответствуют частоты колебаний в пустоте:

$$\omega_m = \sqrt{\left(2/L_y\right) \cdot k_{mm}} \quad (3.8)$$

Отрицательные частоты не рассматриваются, так как соответствующие собственные колебания для отрицательных и положительных частот совпадают.

Получаем, что пластина в пустоте имеет счётный набор частот, каждая из которых соответствует своей собственной форме в пустоте. При добавлении аэродинамических сил собственные формы деформируются, а собственные частоты перестают быть вещественными. Это следует из того, что матрица  $P(\omega)$  является несимметричной и комплексной. Следовательно, задача на собственные значения не является самосопряжённой, а собственные частоты являются комплексными (кроме тех частот, у которых мнимая часть может оказаться равной нулю, такие частоты соответствуют нейтрально устойчивым собственным формам). При этом счётный набор частот сохраняется, каждой собственной частоте на комплексной плоскости соответствует своя собственная форма. Так же не появляется никаких

дополнительных корней. Этот факт, относительно структуры решения частотного уравнения (3.6), строго говоря, надо дополнительно доказывать. Вопросы строго доказательства этого факта авторы данной статьи не касаются, но при численном решении частотного уравнения (3.6) установлено, что количество найденных корней соответствует количеству базисных функций в выражении (3.2).

Для решения частотного уравнения (3.6) используется итерационный метод. Пусть нужно найти  $m$ -ую собственную частоту. В качестве начального приближения полагается  $m$ -ая собственная частота в пустоте  $\omega_m(0)$ , по выражению (3.8). Далее, вычислим  $(p+1)$ -ое приближение  $\omega_m(p+1)$  через  $p$ -ое приближение  $\omega_m(p)$ . Составим матрицу  $A_{p+1}(\omega_m(p); \omega_m(p+1))$  так, чтобы  $\omega_m(p+1)$  входило в неё простейшим образом. Все её коэффициенты возьмём такими же, как у матрицы  $A_p(\omega_m(p))$ , за исключением коэффициента  $a_{mm}$ , который определим, как:

$$a_{mm} = k_{mm} - \frac{L_x}{2} (\omega_m(p+1))^2 + p_{mm}(\omega_m(p)) \quad (3.9)$$

Теперь, для вычисления  $\omega_m(p+1)$  используется следующее частотное уравнение:

$$\det[A_{p+1}(\omega_m(p); \omega_m(p+1))] = 0 \quad (3.10)$$

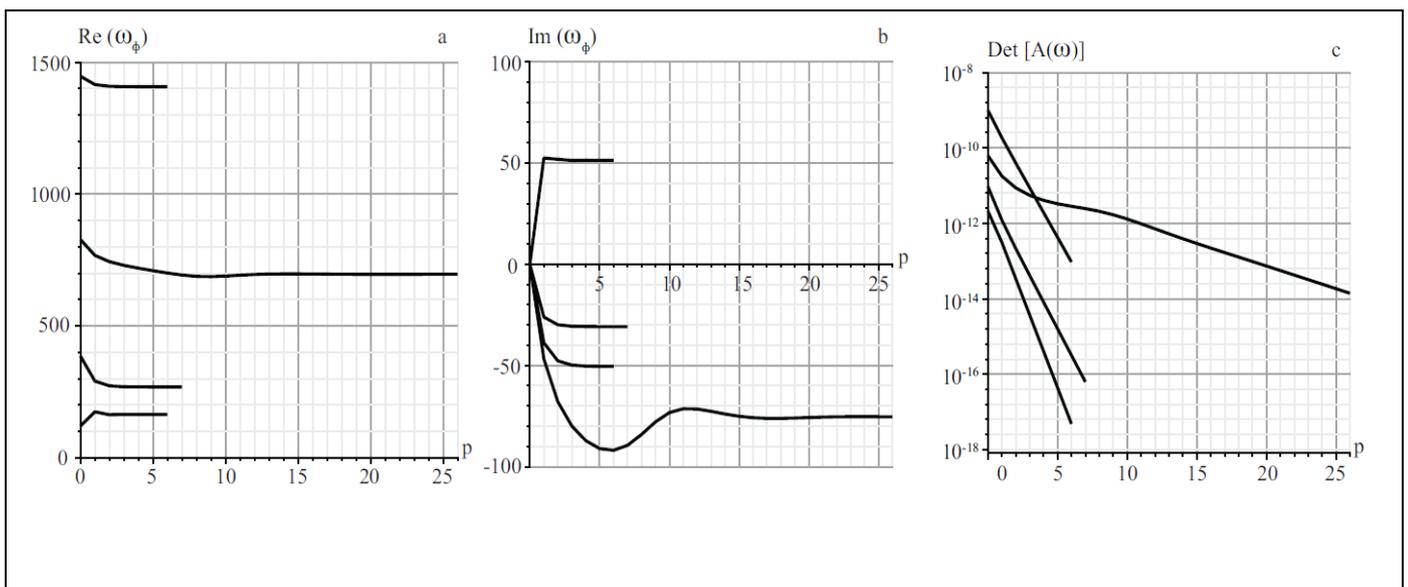
Итерации продолжаются, пока не выполнено условие:

$$\left| \frac{\omega_m(p) - \omega_m(p-1)}{\omega_m(p)} \right| < \varepsilon \quad (3.11)$$

Была исследована сходимость итерационного метода от параметра  $\varepsilon$ , а так же от количества базисных функций  $N_x$  и  $N_y$ . Установлено, что для вычисления

первых четырёх частот достаточно положить  $N_x = 4$  и  $N_y = 1$ , а  $\varepsilon = 10^{-6}$  достаточно для сходимости итераций. Эти параметры и полагались при всех последующих расчётах. Так же доказано, что области неустойчивости для частот  $\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1$  и  $\omega_4^1$  совпадают с областями неустойчивости для частот  $\omega_1^j, \omega_2^j, \omega_3^j$  и  $\omega_4^j$  при параметре  $L_y$  меньшем в  $j$  раз.

Надо также отметить, что основным критерием сходимости итераций является вовсе не условие (3.11), а то, что с ростом итераций вещественные и мнимые составляющие собственных частот  $\omega_m(p)$  стремятся к постоянным значениям (фиг. 2.а и фиг. 2.б), а определитель частотной матрицы  $\det[A_p(\omega_m(p))]$  стремится к нулю (фиг. 2.с). Это изображено на фиг. 2, где расчёты выполнены при  $L_y = 500$ ,  $L_x = 300$  и  $M = 1.1$ . Но этот факт был проверен также и при всех других значениях параметров  $L_y$ ,  $L_x$  и  $M$ .



Фиг. 2. Сходимость по итерациям вещественных и мнимых составляющих первых четырёх частот. Сходимость к нулю определителя частотной матрицы.

Расчёты приводились при  $L_y = 500$ ;  $L_x = 300$ ;  $M = 1.1$ .

## 4. Результаты.

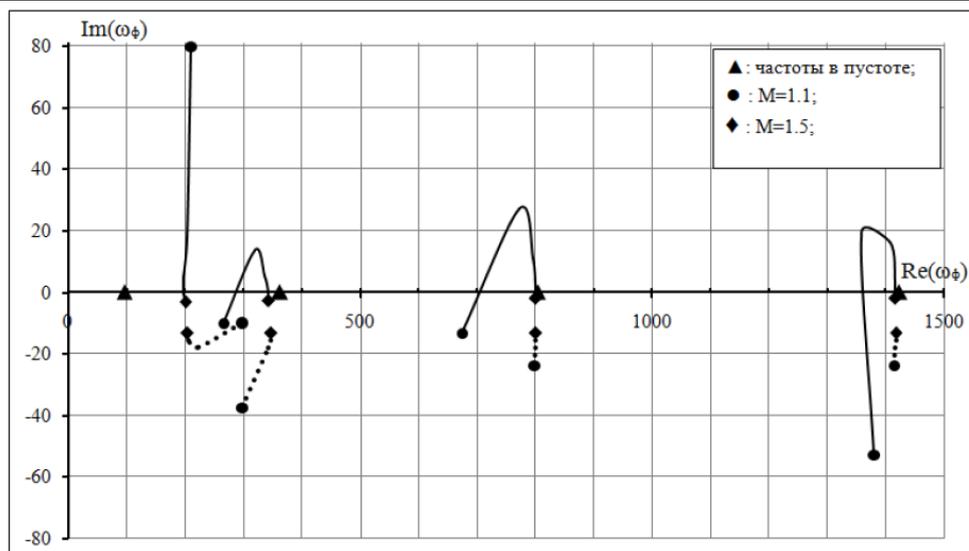
### 4.1 Связанный и одномодовый флаттер.

На фиг. 3 изображено движения первых четырёх собственных частот на комплексной плоскости при увеличении числа Маха  $M$  от 1.1 до 1.5 ( $L_x = 300$ ,  $L_y = 1000$ ). Вещественная часть частоты соответствует её физической частоте колебаний, а мнимая часть является инкрементом усиления (при неустойчивости) или затухания (в случае устойчивости). А на фиг. 4 изображено движение тех же четырёх частот при тех же параметрах  $L_x$ ,  $L_y$ , что и на фиг. 3, но при увеличении  $M$  от 1.5 до 3.0. Треугольниками отмечены точки соответствующие собственным частотам пластины в пустоте. Пунктирными линиями изображены расчёты по поршневой теории, а сплошными линиями расчёты по точной теории.

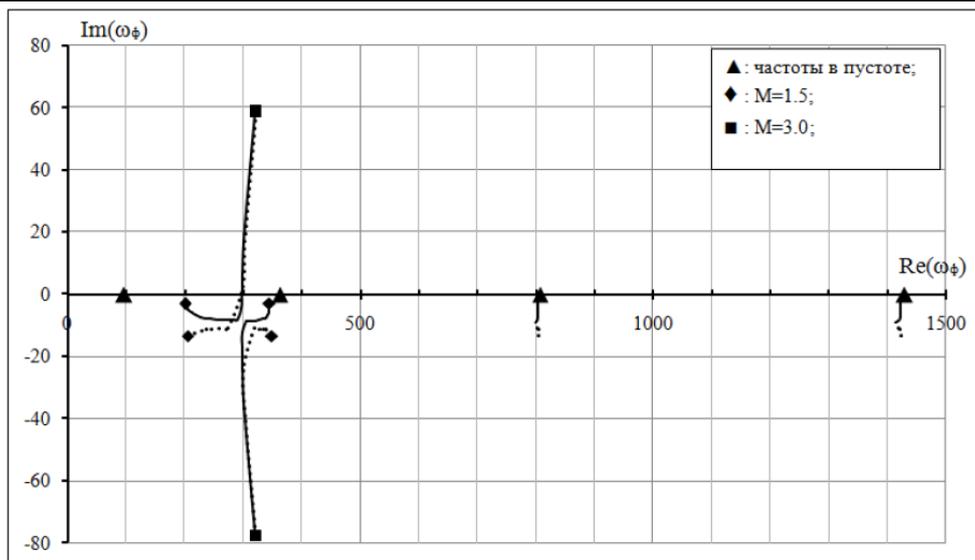
На фиг. 4 проявляется связанный флаттер между частотами  $\omega_1^1$  и  $\omega_2^1$ , а частоты  $\omega_3^1$  и  $\omega_4^1$  остаются устойчивыми, при этом расчёты по точной и по поршневой теории дают качественно одинаковые результаты, что и ожидалось при числах Маха  $M > 2$ . Физическая сущность явления связанного флаттера заключается в том, что две частоты  $\omega_1^1$  и  $\omega_2^1$  сближаются друг к другу в нижней полуплоскости комплексной плоскости, их собственные формы в процессе

сближения остаются устойчивыми. Затем, эти две собственные формы начинают взаимодействовать друг с другом. По мере увеличения числа Маха  $M$  мнимая часть первой частоты  $\text{Im} \omega_1^1$  увеличивается и её собственная форма становится неустойчивой. Мнимая же часть второй частоты  $\text{Im} \omega_2^1$  наоборот уменьшается, её собственная форма остаётся устойчивой. При связанном флаттере потеря устойчивости имеет скачкообразный характер, который можно проследить на фиг. 4.

На фиг. 3 проявляется только одномодовый флаттер, частоты не взаимодействуют друг с другом, как при связанном флаттере на фиг. 4. При этом расчёты по поршневой и точной теории качественно различны: по поршневой теории все четыре частоты остаются в нижней полуплоскости комплексной плоскости, что соответствует устойчивости, а при расчётах по точной теории каждая из четырёх частот при определённых числах Маха, входящих в диапазон  $1.1 < M < 1.5$ , залезает в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, что соответствует неустойчивости.



Фиг. 3. Движение первых четырёх собственных частот на комплексной плоскости при росте числа Маха  $M$  ( $L_y = 1000$ ;  $L_x = 300$ ;  $1.1 \leq M \leq 1.5$ ).



Фиг. 4. Движение первых четырёх собственных частот на комплексной плоскости при росте числа Маха  $M$  ( $L_y = 1000$ ;  $L_x = 300$ ;  $1.5 \leq M \leq 3.0$ ).

#### 4.2 Области неустойчивости.

На фигурах 5, 6, 7 и 8 изображены области неустойчивости для первых четырёх частот  $\omega_1^1$ ,  $\omega_2^1$ ,  $\omega_3^1$  и  $\omega_4^1$  в плоскости  $L_x$  и  $M$  при различных

значениях  $L_y$ . Рассмотрим фиг. 5, чередованием сплошных и штриховых линий изображены границы областей неустойчивости для частоты  $\omega_1^1$  по мере уменьшения значений  $L_y$ , к каждой границы дана своя подпись. Область устойчивости находится слева от границ и соответствует малым значениям  $L_x$ , соответственно области неустойчивости находятся внутри границ справа. Точки лежащие внутри области неустойчивости соответствуют таким параметрам  $L_x$ ,  $M$  и  $L_y$ , при которых колебания пластины по форме, соответствующей данной частоте, будут неустойчивыми. Точки лежащие вне области неустойчивости соответствуют устойчивым колебаниям. Аналогичным образом изображены области неустойчивости для трёх остальных частот на соответствующих фигурах.

Для сравнения с результатами точной теории на фиг. 5 жирными штриховыми линиями изображены границы области неустойчивости частоты  $\omega_1^1$ , рассчитанные по поршневой теории. Области лежат справа от границ. Выражение давления по поршневой теории получается из выражения точной теории (3.7) отбрасыванием интегрального члена. Из результатов следует, что область одномодового флаттера при использовании поршневой теории полностью отсутствует, а границы флаттера, рассчитанные по точной и по поршневой теории, при уменьшении  $L_y$  становятся близкими. Для остальных частот поршневая теория даёт устойчивые колебания.

На фиг. 9 проведено сравнения границ флаттера связанного типа с асимптотическим решением Мовчана по скорректированной формуле (3.8)

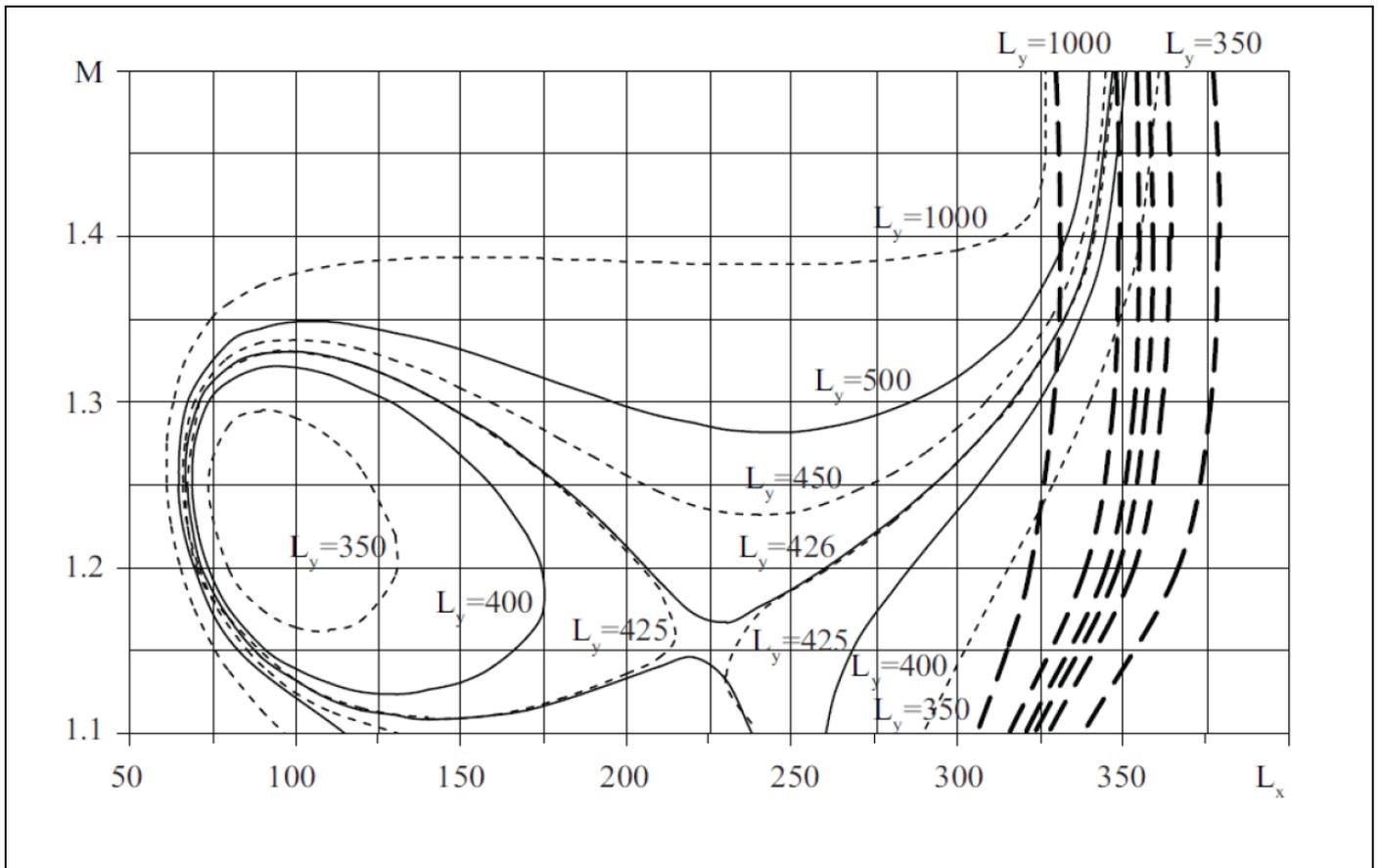
$$M = D \cdot 8\pi^3 \left( \frac{L_x}{L_y} \right)^2 \sqrt{\frac{L_x}{L_y}}$$

из статьи [2]. Формула (3.8) из статьи [2] записывается в безразмерных переменных, используемых в настоящей статье, в виде:

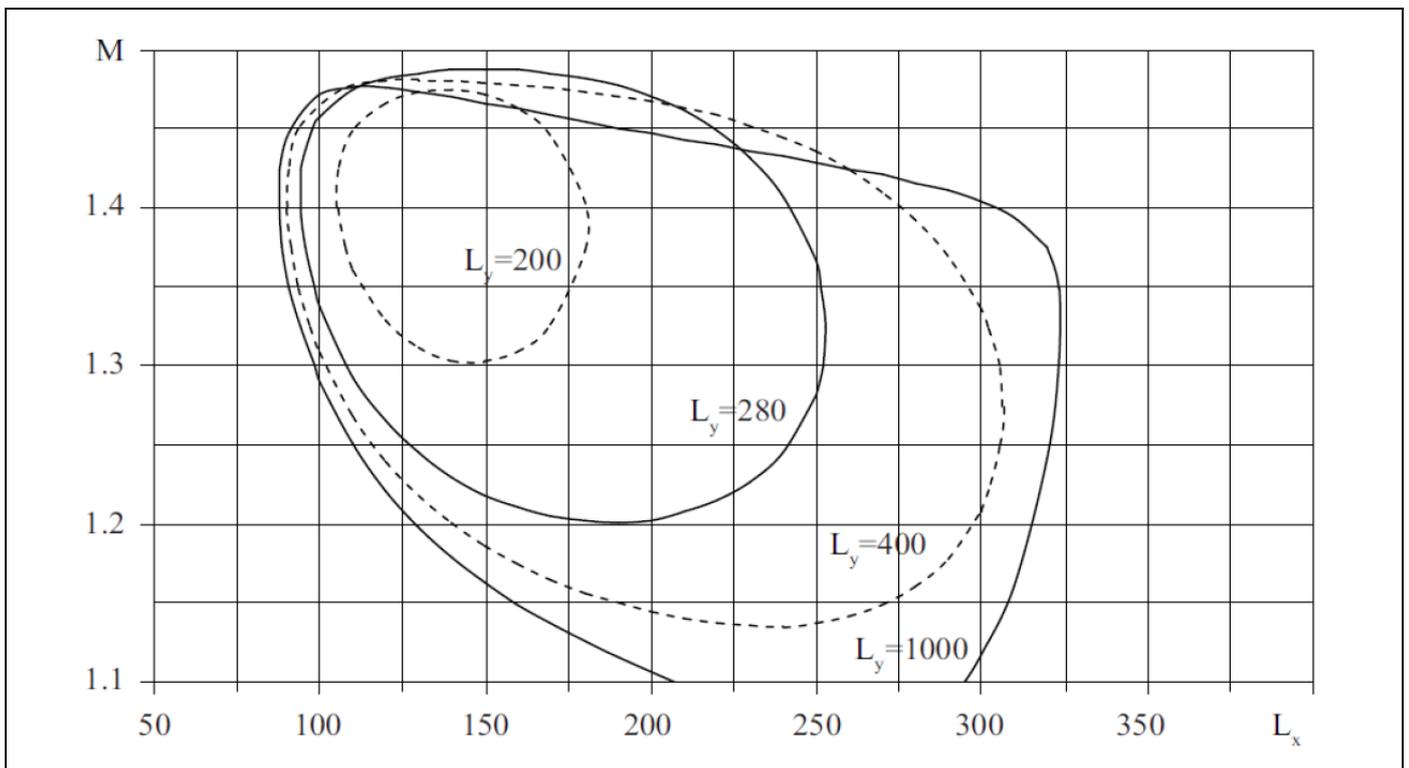
Вариант поршневой теории более пригодный для малых чисел Маха ( $M < 3$ ), имеет, по сравнению с вариантом из статьи [2], множитель  $M/\sqrt{M^2 - 1}$  при  $M$ . Скорректированная асимптотическая формула получается из (4.1) добавлением при  $M$  этого множителя и приобретает следующий вид:

$$\frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} = \frac{D}{\mu L_x^3} \cdot \frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}} \cdot \left( 5 + \left( \frac{L_x}{L_y} \right)^2 \right) \sqrt{2 + \left( \frac{L_x}{L_y} \right)^2} \quad (4.2)$$

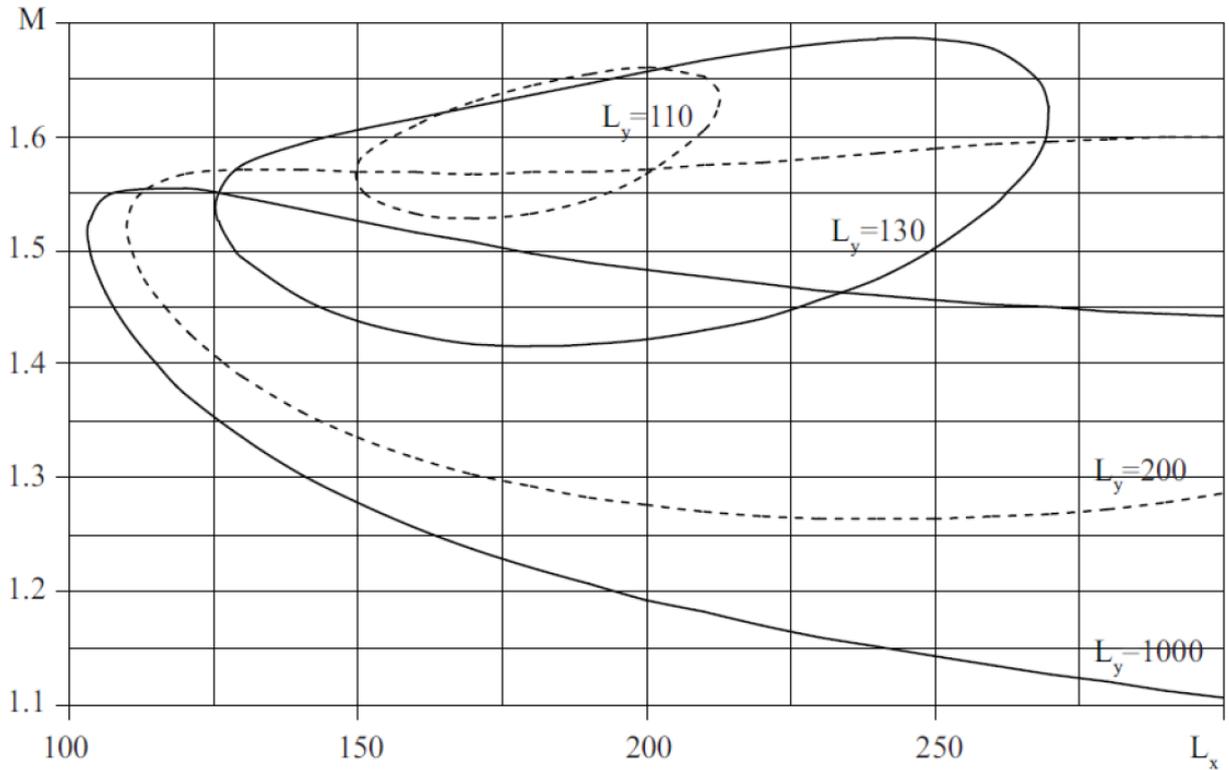
На фиг. 9 сплошными и штриховыми линиями приведены границы, рассчитанные по точной и поршневой теории, а штрих-пунктирной линией построены границы по скорректированной асимптотической формуле (4.2). Изображены границы при  $L_y = 1000$  и  $L_y = 350$ , границы же соответствующие промежуточным значениям  $L_y$  находятся между указанными границами. Можно было бы вместо формулы (4.2) использовать формулу (4.1), но решение имело бы расхождение с используемой поршневой теорией при  $M < 3$ , при этом, чем меньше  $M$ , тем расхождение более существенно.



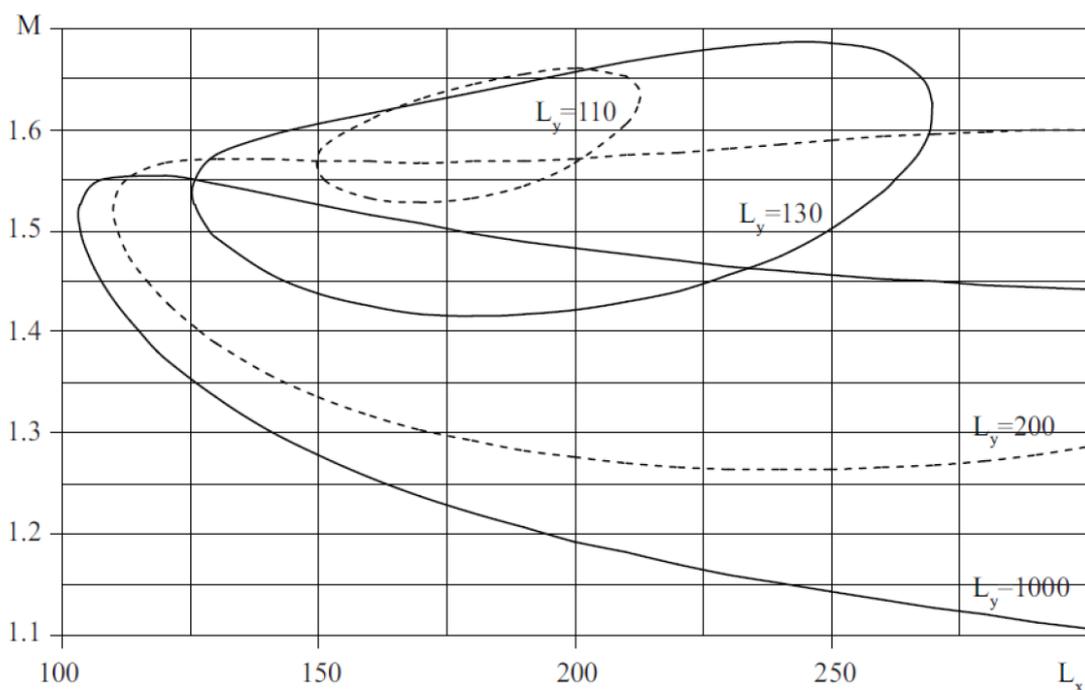
Фиг. 5. Области неустойчивости собственной частоты  $\omega_1^I$  на плоскости  $(L_x; M)$  при различных значениях  $L_y$ .



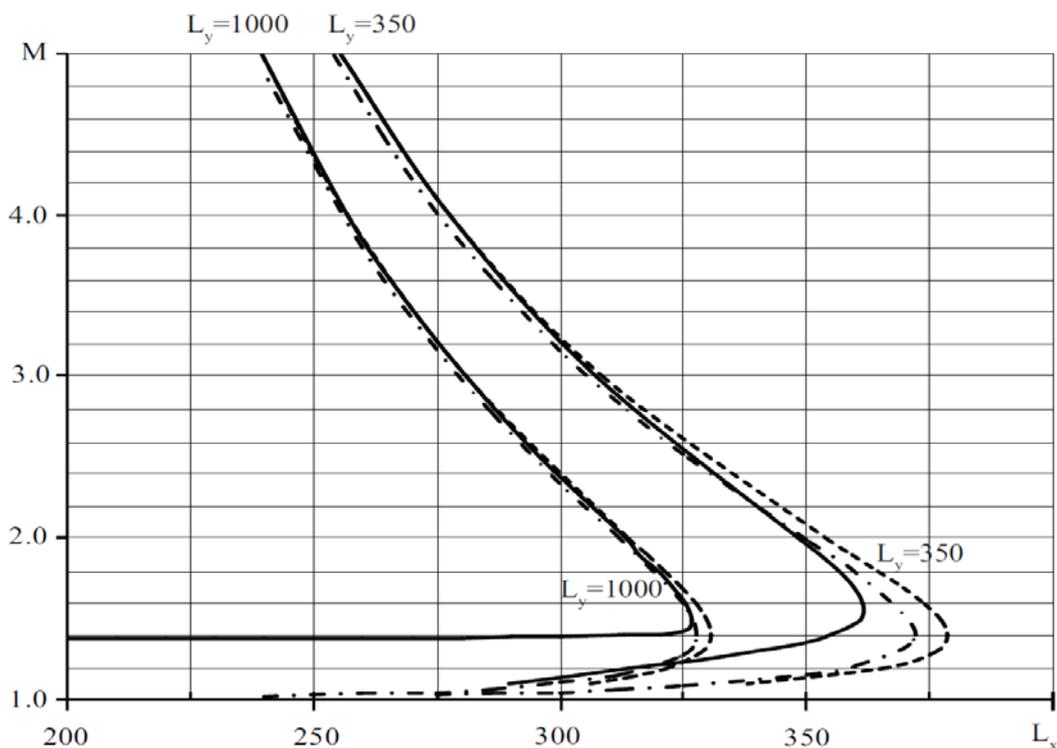
Фиг. 6. Области неустойчивости собственной частоты  $\omega_2^1$  на плоскости  $(L_x; M)$  при различных значениях  $L_y$ .



Фиг. 7. Области неустойчивости собственной частоты  $\omega_2^1$  на плоскости  $(L_x; M)$  при различных значениях  $L_y$ .



Фиг. 7. Области неустойчивости собственной частоты  $\omega_4^1$  на плоскости  $(L_x; M)$  при различных значениях  $L_y$ .



Фиг. 9. Области неустойчивости собственной частоты  $\omega_1^1$  на плоскости  $(L_x; M)$  для  $L_y = 1000$  и  $L_y = 350$ . Сравнение расчётов поршневой и точной теории с асимптотической формулой Мовчана из [2].

## 5. Заключение.

В линейном приближении рассмотрена задача об устойчивости упругой периодически подкреплённой полосы, шарнирно опёртой по передней и задней кромкам и обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа. Для вычисления давления, действующего на прогиб пластины, использовалась точная теория потенциального течения газа. Численно построены области неустойчивости для первых четырёх частот  $\omega_1^1$ ,  $\omega_2^1$ ,  $\omega_3^1$  и  $\omega_4^1$ .

При достаточно больших значениях  $L_y$  (примерно при  $L_y > 1000$ ) области неустойчивости близки к соответствующим областям неустойчивости двумерной задачи, решённой в [25], где отсутствует зависимость по координате  $y$ . При уменьшении параметра  $L_y$  область неустойчивости частоты  $\omega_1^1$  качественно изменяется, при  $L_y = 425$  область разрывается на две части, которые соответствуют одномодовому и связанному флаттеру, при дальнейшем уменьшении  $L_y$  область одномодового флаттера сужается в точку (исчезает) примерно при  $L_y=315$ . Для остальных частот  $\omega_1^1$ ,  $\omega_2^1$  и  $\omega_3^1$  области неустойчивости сужаются и исчезают примерно при  $L_y=177$ ,  $L_y=106$  и  $L_y=81$  соответственно.

Проведено сравнение результатов расчётов по точной и по поршневой теориям и показано, что при использовании поршневой теории одномодовый флаттер не обнаруживается, т.к. при малых числах Маха (примерно при  $M < 1.5$ ) она качественно неверно описывает аэродинамику задачи. В то же время, при больших числах Маха  $M$  результаты расчётов по точной и поршневой теориям практически совпадают.

*Работа частично поддержана грантами РФФИ (14-01-31547 и 14-01-00049)*

*и грантом Президента РФ НШ-3530.2014.1*

### **Библиографический список**

1. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Известия АН СССР. Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 211-222.
2. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Известия АН СССР. Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. № 2. С. 231-243.
3. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Известия АН СССР. Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 6. С. 733-755.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. - М.: Физматгиз, 1961. -339 с.
5. Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика 1963. 1965. С. 34-90.
6. Dugundji J. Theoretical considerations of panel flutter at high supersonic Machnumbers. AIAA Journal. 1966. V. 4. № 7. P. 1257–1266.
7. Dowell E.H. Aeroelasticity of plates and shells. Leyden: Noordhoff InternationalPublishing. 1974.
8. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1978. Т. 11. С. 67-122.
9. Mei C., Abdel-Motagaly K., Chen R.R. Review of nonlinear panel flutter at supersonic and hypersonic speeds. Applied Mechanics Reviews. 1999. V. 10. P. 321–332.
10. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. - М.: Наука, 2006. - 247 с.

11. Кийко И.А., Показеев В.В. Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа // Доклады РАН. 2005. Т. 401. № 3. С. 342-344.
12. Duan B., Abdel-Motagaly K., Guo X., Mei C. Suppression of supersonic panel flutter and thermal deflection using shape memory alloy. AIAA Paper 2003-1513. 2003.
13. Zhou R.C., Lai Z., Xue D.Y., Huang J.-K., Mei C. Suppression of nonlinear panel flutter with piezoelectric actuators using finite element method. AIAA Journal. 1995. V. 33. № 6. P. 1098-1105.
14. Дун Мин-Дэ. Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании // Доклады АН СССР. 1958. Т. 120. № 4. С. 726-729.
15. Nelson H.C., Cunnigham H.J. Theoretical investigation of flutter of twodimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow. NASA Report No. 1280. 1956.
16. Янг Т. Исследование флаттера панелей в сверхзвуковом потенциальном потоке методом конечных элементов // Ракетная техника и космонавтика. 1975. Т. 13 № 11. С. 110-117.
17. Bendiksen O.O., Davis G.A. Nonlinear traveling wave flutter of panels in transonic flow. AIAA Paper 95-1486. 1995. 17 p.
18. Bendiksen O.O., Seber G. Fluid-structure interactions with both structural and fluid nonlinearities. Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 315. № 3. P. 664–684.
19. Dowell E.H. Aerodynamic boundary layer effect on flutter and damping of plates. Journal of aircraft. 1973. V. 10. № 12. P. 734-738.
20. Selvam R.P., Visbal M.R., Morton S.A. Computation of Nonlinear Viscous Panel Flutter Using a Fully-Implicit Aeroelastic Solver. AIAA Paper 98-1844. 1998. 10 p.

21. Gordnier R.E., Visbal M.R. Computation of three-dimensional nonlinear panel flutter. AIAA Paper 2001-0571. 2001. 17 p.
22. Hashimoto A., Aoyama T., Nakamura Y. Effect of turbulent boundary layer on panel flutter. AIAA Journal. 2009. V. 47 № 12. P. 2785-2791.
23. Веденеев В.В. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 5. С. 155-169.
24. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // Известия АН СССР. Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30. № 1. С. 148-153.
25. Vedeneev V.V. Panel flutter at low supersonic speeds// J. Fluids and Structures. 2012. V. 29. P. 79-96.
26. Веденеев В.В., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Колотников М.Е. Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 2. С. 161-175.
27. В. В. Веденеев. Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 173-181.
28. В. В. Веденеев. Исследование одномодового флаттера прямоугольной пластины в случае переменного усиления собственной моды вдоль пластины // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 4. С. 163-174.
29. Куликовский А.Г. О глобальной неустойчивости однородных течений в неоднородных областях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. Т. 70. Вып.2. С. 257-263.

30. Майлс Дж.У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений.  
- М.: Физматгиз, 1963. - 272 с.
31. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967, - 986 с.