

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

---

На правах рукописи

Баркин Михаил Юрьевич

ИЗУЧЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ  
НЕБЕСНОГО ТЕЛА С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ТЕОРИИ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор  
Ю.Г. Марков

Москва – 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	5
<b>ГЛАВА I. Уравнения возмущенного вращательного движения небесного тела с изменяемой геометрией масс в переменных Андуайе</b> .....	18
§1.1 История проблемы.....	18
§1.2 Постановка задачи. Уравнения Лиувилля в переменных Эйлера.....	21
§1.3 Канонические уравнения вращательного движения в переменных Эйлера.....	26
§1.4 Канонические уравнения вращательного движения небесного тела с изменяемой геометрией масс в переменных Андуайе.....	30
§1.5 Упрощенные формы уравнений движения в переменных Андуайе.....	33
§1.6 Динамика небесного тела, деформируемого собственным вращением. Невозмущенное чандлеровское (эйлеровское) движение осесимметричной планеты.....	39
§1.7 Чандлеровское невозмущенное движение и его свойства.....	44
<b>ГЛАВА II. Динамические эффекты во вращении Земли, вызванные годовыми и полугодовыми циклическими и медленными вековыми перераспределениями масс планеты</b> .....	49
§2.1 Исследование динамических эффектов в движении полюса Земли и в вариациях длительности суток, обусловленных годовыми и полугодовыми вариациями перераспределения масс Земли.....	49
§2.1.1 Годовые и полугодовые вариации коэффициентов геопотенциала по современным спутниковым данным.....	54
§2.1.2 Возмущения во вращательном движении вследствие временных циклических вариаций основных коэффициентов геопотенциала $J_2$ и $C_{22}$ .....	57
§2.1.3 Возмущения во вращательном движении планеты вследствие вариаций	

ее произведений инерции .....	61
§2.1.4 Возмущения во вращательном движении вследствие вариаций компонент вектора кинетического момента относительного движения частиц планеты.....	65
§2.2 Периодические возмущения компонент угловой скорости .....	68
§2.2.1 Вариации проекций угловой скорости вследствие вариаций основных коэффициентов второй гармоники геопотенциала.....	70
§2.2.2 Вариации проекций угловой скорости вследствие вариаций центробежных моментов инерции .....	71
§2.2.3 Вариации проекций угловой скорости вследствие вариаций компонент углового относительного момента.....	74
§2.2.4 Определение вариаций компонент угловой скорости четвертой группы: $\delta p^{(4)}$ , $\delta q^{(4)}$ и $\delta r^{(4)}$ .....	75
§2.3 Основные динамические эффекты во вращении Земли, вызванные годовыми и полугодовыми вариациями коэффициентов ее геопотенциала.....	76
§2.4 Вековые эффекты во вращении Земли, вызванные вековой перестройкой геометрии масс планеты.....	79
§2.4.1 Вековой тренд полюса вектора угловой скорости.....	82
§2.4.2 Неприливное ускорение вращения Земли.....	85
<b>ГЛАВА III. Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо.....</b>	<b>86</b>
3.1. Постановка задачи. Переменные Садова.....	86
3.2. Уравнения движения задачи Лиувилля в переменных действие- угол.....	89
3.2.1. Формулы для направляющих косинусов и компонент угловой скорости в эллиптических функциях.....	91
3.2.2. Ряды Фурье для направляющих косинусов по кратным переменных угол.....	94

3.2.3. Ряды Фурье для произведений и квадратов направляющих косинусов $b_{ij}b_{nk}$ .....	97
--	----

3.3. Возмущения во вращении планеты, вызванные временными вариациями основных коэффициентов второй гармоники геопотенциала.....	98
---	----

<b>ГЛАВА IV. Приливные деформации вращающейся Земли и прогнозирование глобальной составляющей кинетического момента атмосферы.....</b>	<b>102</b>
--	------------

§4.1 Моделирование приливной неравномерности вращения Земли.....	104
--	-----

§4.2 Динамические уравнения движения деформируемой Земли относительно центра масс с учетом кинетического момента атмосферы.....	111
---	-----

§4.3 Моделирование глобальной составляющей кинетического момента атмосферы.....	114
---	-----

<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>118</b>
-------------------------	------------

<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>121</b>
------------------------	------------

## ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена разработке теории возмущенного вращательного движения небесного тела с изменяемой геометрией масс с приложениями к изучению движения полюса и суточного вращения Земли. Основная задача диссертации состоит в изучении влияния годовых, полугодовых и вековых вариаций геометрии масс Земли (компонент ее тензора инерции), а так же компонент ее относительного кинетического момента, на движение полюса Земли и на ее осевое вращение. Тело рассматривается как свободное (изолированное), а формулировка задачи соответствует классической задаче Лиувилля о вращении изменяемого тела.

Проблемами изучения вращения Земли занимались многие ученые небесные механики, особенно на протяжении последних примерно 150 лет. Среди них известные имена С. Ньюкома, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, П. Мельхиора, У.Манка и Г.Макдональда, Ф.А.Слудского, М.С.Молоденского и многих других. Но эти проблемы не только сохраняют свою актуальность до настоящего времени, но их актуальность постоянно возрастает. И связано это в первую очередь с постоянно возрастающей точностью определения параметров вращения Земли.

Ось вращения Земли с течением времени изменяет свою ориентацию, как по отношению к связанной, так и инерциальной системам координат. Высокоточные данные экспериментальных наблюдений за траекториями движения полюсов Земли свидетельствуют о весьма сложных динамических процессах, происходящих в системе Земля-Луна-Солнце. В основе многих астрометрических исследований лежит динамическая теория вращения Земли относительно ее центра масс. Дальнейшее развитие и разработка этой теории, адекватной данным Международной службы вращения Земли (МСВЗ) и позволяющей описывать реальные траектории оси вращения (мгновенного положения вектора угловой скорости) в некоторой удобной системе координат, связанной с Землей, является актуальной и содержательной проблемой теоретической и небесной механики. В связи с модернизацией и развитием

отечественной навигационной системы ГЛОНАСС актуальным оказывается достижение высоких точностей координатно-временного обеспечения наземных, а также движущихся в околоземном пространстве объектов. Эта прикладная задача непосредственно связана с фундаментальной проблемой определения параметров вращения Земли, т.е. с колебаниями полюса и прогнозом его движения, как на длительном, так и на относительно коротком (30-100 суток) интервалах времени. Указанная высокоточная теория вращения Земли, позволяющая определять параметры ориентации Земли с точностью в 5 - 20 микросекунд дуги также имеет важные технические приложения в навигации, геодезии и геофизике.

Точность определения параметров вращения Земли, благодаря использованию методов космической геодезии и метода радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ) (VLBI), в последние 20 лет возросла примерно на три порядка и составила около  $10^{-10} \div 10^{-11}$  (т.е. в угловой мере составляет около 10 - 20 микросекунд дуги). Как отмечают специалисты теории вращения Земли с такой точностью еще не создано. Но накоплен огромный массив данных наблюдений, который еще требует детального анализа, своих приложений и интерпретации динамических особенностей вращения Земли и ее планетарных геофизических процессов, влияющих на ее вращение. Проблема построения адекватной теории вращения Земли сохраняет свою актуальность, а ее практическое значение постоянно возрастает. Диссертация как раз направлена на новые динамические исследования вращения Земли на более высоком уровне точности, чем это делалось в предыдущих исследованиях, с использованием нового подхода к проблеме, опирающегося на использование новых форм уравнений движения (в переменных Андуайе и в переменных действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо) и на использование аналитических методов теории возмущений (метода малого параметра).

Новизна результатов диссертации заключается в определении новых динамических эффектов во вращении Земли, которые ранее не обсуждались. Например, эффекты, вызванные коническим невозмущенным вращательным

движением вектора угловой скорости относительно средней полярной оси инерции с определенным углом полураствора  $\theta = \theta_0 = 0''25$ . Фактически в небесной механике разработан новый подход к исследованию возмущенного вращательного движения изменяемых небесных тел на основе нелинейных уравнений движения в переменных Андуайе и действие-угол. Этот подход применим ко многим небесным телам в солнечной и экзопланетных системах. В диссертации получены новые формы уравнений этой задачи в переменных Андуайе и действие-угол, которые составляют основу выполненного исследования и позволили эффективно применить метод малого параметра. В диссертации из-за ограниченности объема не приводятся результаты, относящиеся к изучению возмущений во вращательном движении планеты под действием гравитационного притяжения Луны и Солнца. Хотя ряд результатов был получен и в этой общей задаче. А именно, методом малого параметра было получено приближенное решение этой задачи, обобщающее теорию вращения Земли Киношита [1] на случай не нулевого невозмущенного значения угла  $\theta = \theta_0$  между вектором кинетического момента и средней полярной осью инерции. Из-за большого объема эти результаты не были включены в окончательный текст диссертации. Эти исследования будут продолжены в будущем, а здесь в диссертации ограничимся рассмотрением вращательного движения планеты, изолированной от других небесных тел, но обладающей изменяемой геометрией масс.

В невозмущенном вращательном движении учитываются слагаемые гамильтониана, обусловленные деформациями Земли из-за ее собственного вращения. Подобный подход применялся в небесной механике, начиная с тех времен когда астрометристы обнаружили, что период свободного колебания полюса Земли составляет около 430 суток, в то время, как теория Эйлера предсказывала период подобных колебаний существенно меньший (около 305 суток). Так возникла необходимость в учете упругих свойств мантии и модернизации уравнений вращательного движения (уравнения Эйлера были заменены на уравнения Лиувилля, хотя стиль их исследования сохранился).

Подобное обобщение уравнений вращательного движения было предпринято и частично осуществлено на основе модели деформируемой Земли в исследованиях С.Ньюкома, А.Пуанкаре, Г.Джеффриса, А.Лява, П.Мельхиора, У.Манка и Г.Макдональда, Kubo [2] – [5] и др.

Подобный прием удалось реализовать также при разработке гамильтонового формализма в задаче о вращении Земли [6] - [8]. Это позволило в качестве невозмущенного движения принять в диссертации чандлеровское - эйлеровское движение тела с присоединенными моментами инерции. При этом уже в нулевом приближении учитывается основная черта движения полюса оси вращения Земли - его Чандлеровское колебание. Поэтому соответствующее невозмущенное вращательное движение было названо чандлеровское - эйлеровское движение.

Основные этапы работы над диссертацией состоят в следующем:

1. В диссертации осуществляется разработка нового подхода к изучению возмущенного вращательного движения планеты вследствие изменения ее геометрии масс и кинетического момента относительного движения ее частиц. В качестве невозмущенного движения принимается эйлеровское коническое движение осесимметричного тела с произвольным постоянным углом полураствора  $\theta = \theta_0$ . В классической теории вращения Земли этот угол обычно принимается равным нулю. В нашей теории (применительно к Земле) этот угол принимался равным  $\theta_0 = 0''25$ . Исследование возмущенного вращательного движения выполняется на основе канонических уравнений движения в переменных Андуайе.
2. В другой постановке рассматриваемой задачи в качестве невозмущенного движения принимается свободное эйлеровское движение трехосного тела, описываемое, как известно, в эллиптических функциях. Для изучения возмущенного вращательного движения небесного тела (вследствие временных вариаций его тензора инерции и компонент кинетического момента относительных смещений частиц планеты) используются уравнения движения в переменных действие-угол, введенных на основе задачи Эйлера-Пуансо. В

обоих случаях получены уравнения движения в форме удобной для приложений и анализа. В результате применения метода малого параметра получены аналитические формулы для возмущений первого порядка, вызванных слабыми вариациями геометрии масс и составляющих кинетического момента относительного движения частиц планеты. В случае Земли эти вариации характеризуются малым параметром  $\mu = 10^{-10}$ . Для простоты здесь мы изучаем вращение твердой Земли. Однако полученные результаты легко распространяются на более общий случай невозмущенного движения в котором учитываются упругие свойства планеты и ее деформации, вызванные ее вращением.

3. Исследование годовых и полугодовых эффектов и вековых вариаций в движении полюса Земли и в ее осевом вращении на основе разработанной теории и данных наблюдений.

4. Разработка математических моделей колебательного движения полюса Земли, адекватных данным наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли. Выполнено построение и дана графическая интерпретация некоторых надежных высокоточных прогнозов, как на длительные, так и на относительно короткие интервалы времени.

В диссертации разрабатывается теория возмущенного вращательного движения полюсов Земли и ее осевого вращения. Основу составляет новое невозмущенное вращательное движение слабodeформируемого тела с произвольным значением угла между вектором кинетического момента вращения Земли и полярной осью инерции  $\theta$ . Для Земли этот угол мал, составляет около  $0^{\circ}24$ , но тем не менее появляются малые коррекции в параметрах вращения Земли, по величине сравнимые с современной точностью определения параметров вращения Земли (ПВЗ). Наряду с классическими возмущениями выявлены новые, хотя и малые, эффекты, которые ранее не рассматривались.

В теории вращения изменяемой Земли (в первую очередь при изучении движения полюсов) широкое применение имеют уравнения Лиувилля (Манк

Макдональд [2]; Lambek [9]; Мориц, Мюллер [3]; Куликов [10]). Причем на практике обычно используется их упрощенная линейная форма записи. Однако, в связи с возрастанием точности наблюдений все актуальнее становятся вопросы об учете новых дополнительных слагаемых к линейным членам и о более точном аналитическом описании соответствующих эффектов во вращении Земли [8], [11] - [14]. Такая необходимость возникает, например, при объяснении наблюдаемых невязок в значениях амплитуд ряда нутаций оси Земли. По-видимому, вскоре может возникнуть необходимость в более полном учете свойств невозмущенного чандлеровского-эйлеровского движения Земли при построении теории ее возмущенного движения (теории прецессии и нутации) [13]. Конечно, все сказанное относится и к другим телам Солнечной системы. Особенно актуальны эти вопросы для изучения указанных эффектов и для разработки теорий вращательного движения Венеры, Марса, астероидов и др.

Для решения указанных проблем, безусловно, важно иметь в распоряжении удобные для исследований формы уравнений движения в переменных, имеющих ясный геометрический и динамический смысл. Такими переменными являются переменные Андуайе (рис. 1). Подробное описание этих переменных дается ниже. Здесь укажем, что эти переменные получили широкое применение при изучении вращательных движений естественных и искусственных небесных тел, моделируемых как абсолютно твердые небесные тела. Важные приложения получили канонические уравнения в переменных Андуайе: в теории вращения Земли [1], в теории вращения Луны [15] - [21], Меркурия и Венеры [16] и др. Уравнения в переменных действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо получили эффективное применение в теории вращения Земли [1], [12], [22], [23], а также в других работах, посвященных изучению вращательных движений других небесных тел (астероидов, Венеры, Марса).

Диссертация посвящена изучению вращательных движений небесного тела геометрия масс которого испытывает малые циклические изменения и медленные вековые изменения. В основном исследуются динамические эффекты

во вращении Земли, обусловленные ее годовыми и полугодовыми изменениями или вековой перестройкой масс. Исследование проводится в рамках классической задачи Лиувилля, но с использованием нового подхода к проблеме, опирающегося на специальные формы уравнений движения (в том числе и канонические) в переменных Андуайе и действие-угол. Даны приложения к изучению годового и полугодового колебаний полюса Земли и годовой и полугодовой вариации длительности суток. Было показано, что именно вариации геометрии масс приводят к указанным эффектам во вращении Земли, а вариации кинетического относительного момента Земли вносят лишь определенные коррективы. Похожая ситуация имеет место и с вековыми эффектами во вращении Земли. В главе 2 дано объяснение и теоретическое описание вековому дрейфу полюса Земли и неприливному ускорению ее осевого вращения. Указанные теоретические результаты получены в хорошем согласии с данными наблюдений.

В общем случае уравнения вращательного движения планеты выводятся для случая движения под действием гравитационных моментов внешних небесных тел (Глава 1). Но в диссертации основное внимание уделяется изучению эффектов во вращении свободной планеты (Земли), вызванных малыми вариациями геометрии масс и относительного кинетического момента подвижных частиц Земли (ее атмосферных, океанических масс и др.). Исследование опирается на канонические уравнения движения в переменных Андуайе и действие-угол (Главы 2 и 3).

В первой главе разрабатывается подход для изучения возмущенного вращательного движения изменяемого тела на основе невозмущенного Чандлеровского - Эйлеровского движения осесимметричного тела. При этом в невозмущенном движении уже учитываются эффекты вращательной деформации планеты (посредством постоянных поправок к осевым моментам инерции) [11] - [13], [52]. С планетой (Землей) связывается система координат, по отношению к которой методами космической геодезии были определены годовые и полугодовые вариации коэффициентов геопотенциала [24]. Это

общепринятая земная система координат IERF2000. По отношению к этой системе координат тензор инерции меняется во времени с определенными частотами. Наибольший интерес представляют годовые и полугодовые вариации моментов инерции (осевых и центробежных). Для удобства вместо вариаций моментов инерции (осевых и центробежных) в диссертации вводятся вариации коэффициентов второй гармоники геопотенциала  $J_2, C_{22}$  и  $C_{21}, S_{21}, S_{22}$ , которые связаны с моментами инерции известными соотношениями:

$$J_2 = -C_{20} = \frac{2C - A - B}{2mr_0^2}, \quad C_{22} = \frac{B - A}{4mr_0^2},$$

$$S_{22} = \frac{F}{2mr_0^2}, \quad C_{21} = \frac{E}{mr_0^2}, \quad S_{21} = \frac{D}{mr_0^2},$$

где  $m_0$  и  $r_0$  - масса и средний радиус планеты. Аналогичные соотношения имеют место и для вариаций компонент тензора инерции и вариаций коэффициентов геопотенциала.

Наибольший вклад во временные вариации моментов инерции и коэффициентов геопотенциала дают изменения и перераспределения масс в приповерхностных слоях Земли (атмосферных, океанических и других флюидных масс для Земли). В указанных случаях на практике используется дополнительное соотношение между вариациями моментов инерции,

$$\delta A + \delta B + \delta C = 0.$$

Такой подход к задаче Лиувилля позволил записать канонические уравнения движения в переменных Андуайе и в переменных действие-угол (для задачи Эйлера-Пуансо) и выразить гамильтониан задачи непосредственно через вариации коэффициентов геопотенциала  $\delta J_2, \delta C_{22}$  и  $\delta C_{21}, \delta S_{21}, \delta S_{22}$ . Годовые и полугодовые вариации этих коэффициентов довольно надежно определяются из наблюдений за геодезическими спутниками методами космической геодезии. Таким образом, изменения геометрии масс Земли характеризуется указанными вариациями коэффициентов геопотенциала (и только второй гармоники, поскольку лишь эти коэффициенты зависят от осевых и центробежных моментов инерции). В результате были получены уравнения движения в

подходящей для исследования форме, в частности для эффективного применения метода малого параметра. Малый параметр  $\mu$  характеризует амплитуды вариаций  $\delta J_2, \delta C_{22}$  и  $\delta C_{21}, \delta S_{21}, \delta S_{22}$ . Эти характеристики являются безразмерными и имеет порядок малости  $\mu = 10^{-10}$ .

В первой главе выводятся основные формы уравнений вращательного движения слабдеформируемых небесных тел в переменных Андуайе. Моменты инерции тела и компоненты кинетического момента относительного движения его частиц являются заданными функциями времени. На основе которых, вначале разрабатывается промежуточное движение изолированного слабдеформируемого тела, которое называется невозмущенным чандлеровско-эйлеровским вращательным движением слабдеформируемого тела. Затем рассматривается более общий случай слабдеформируемого небесного тела, деформируемого собственным вращением, и компоненты тензора инерции которого являются условно-периодическими функциями времени. В качестве невозмущенного движения принимается чандлеровско - эйлеровское движение осесимметричного тела.

Во второй главе разрабатывается теория возмущенного вращательного движения на основе невозмущенного чандлеровского движения осесимметричного тела (планеты) с изменяемой геометрией масс (Глава 1). Небесное тело (Земля) рассматривается как изолированное, т.е. гравитационные моменты, обусловленные гравитационным притяжением внешних небесных тел (Луны и Солнца) не учитываются. Т.е. все внимание здесь концентрируется на изучении динамических эффектов во вращательном движении Земли, вызванных изменением ее геометрии масс. Причем данные о подобной изменяемости будем черпать из данных космической геодезии о вариациях гравитационного поля Земли (о вариациях коэффициентов второй гармоники геопотенциала). Также здесь изучается роль вариаций компонент относительного углового момента частиц планеты в земной системе координат.

Здесь получены формулы для возмущений для произвольных значений параметров невозмущенного движения (в том числе для произвольного

невозмущенного значения угла  $\theta$  между вектором кинетического момента и полярной осью тела). Что указывает на их важное значение для изучения вращательных движений тел солнечной системы, например, таких как Венера, для которой указанный угол составляет несколько градусов [25].

Полученное решение задачи о возмущенном вращательном движении изолированного небесного тела также представляет важный интерес для разработки теории вращения Земли как в плане уточнения известных результатов (например, за счет членов пропорциональных углу  $\theta$ ), так и для объяснения основных механических явлений в движении полюса Земли (чандлеровское движение полюса, его возбуждение, затухание и эволюция) и тонких эффектов, вызванных различными геофизическими процессами. Последовательно построены возмущения первого порядка для переменных Андуйе и проекций угловой скорости планеты, обусловленные вековыми и циклическими вариациями основных коэффициентов геопотенциала  $\delta J_2$ ,  $\delta C_{22}$ , вариациями произведений инерции или трех других коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}$ ,  $\delta S_{21}$ ,  $\delta S_{22}$ , а также вариациями компонент вектора кинетического момента относительных движений частиц планеты  $\delta P$ ,  $\delta Q$  и  $\delta R$ . Полученные аналитические формулы были использованы для численных оценок амплитуд годовых и полугодовых колебаний полюса оси вращения Земли, а также для оценок вариаций длительности суток. Наряду с классическими составляющими этих вариаций были оценены составляющие вариаций, обусловленные конкретным значением угла  $\theta_0 = 0''24$  конического невозмущенного движения вектора угловой скорости. Амлитуды выявленных добавок вариаций являются малыми и составляют порядка микросекунд дуги.

На основе полученного решения были получены параметры следующих фундаментальных эффектов во вращении Земли:

1. векового дрейфа полюса оси вращения Земли в современную эпоху;
2. неприливного ускорения вращения Земли;
3. годового и полугодового колебаний полюса оси вращения Земли;
4. годовой и полугодовой вариаций осевого вращения Земли.

Полученные теоретические значения параметров находятся в хорошем согласии с современными данными наблюдений за вращением Земли и за вековыми и циклическими вариациями коэффициентов геопотенциала.

В третьей главе приближенное решение задачи Лиувилля строится методом малого параметра на основе уравнений вращательного движения небесного тела в переменных действие-угол, введенных на основе решения задачи Эйлера-Пуансо. Переменные действие-угол вводятся в известных работах [22], [26] - [29] и мы используем эти результаты, включая вопросы построения рядов Фурье для направляющих косинусов [26], их произведений и квадратов [12], [30]). В результате было построено тригонометрическое разложение Гамильтониана задачи Лиувилля в переменных действие-угол. А дифференциальные уравнения задачи Лиувилля были записаны в указанных переменных. Последние результаты являются важными для построения и исследования аналитического решения задачи Лиувилля методами теории возмущений. В качестве невозмущенного движения примем движение твердого тела по Эйлеру - Пуансо. На данном этапе исследования пренебрежем деформациями, вызванными собственным вращением тела. Подчеркнем, что изменяемое тело имеет произвольные динамические сжатия (произвольные значения моментов инерции) и полученное здесь решение обобщает исследования, выполненные в главе 3, в которой предполагалось, что динамическое строение тела близко к осесимметричному (т.е. в невозмущенном движении принималось, что два осевых момента инерции тела равны). Это позволило упростить исследование и аналитические построения и дало возможность для полного и детального описания кинематических и динамических эффектов в возмущенном вращательных движениях. Также этот подход позволяет использовать широкий набор формул невозмущенного вращательного движения Эйлера.

В четвертой главе изучаются приливные деформации вращающейся Земли и разрабатывается методика прогнозирования глобальной составляющей момента импульса атмосферы. Полученные здесь результаты относятся к

другому направлению исследований вращения Земли на основе классических уравнений задачи Лиувилля интенсивно развиваемому на кафедре теоретической механики МАИ под руководством проф. Ю.Г. Маркова (В.В. Перепёлкин, И.В. Скоробогатых, [12], [31] – [35], М.Ю. Баркин [35] – [38]) и с участием известных специалистов по теории вращения Земли из Института астрономии РАН (Л.В. Рыхлова [39], [32]), Института проблем механики РАН (Л.Д. Акуленко, С.К. Кумакшев [31] – [34], [38] - [40]) и др. На основе небесно-механической модели неравномерности вращения Земли построена модель глобальной составляющей момента импульса атмосферы. В рамках квазистатической постановки задачи показано, что динамика приземного слоя атмосферы обусловлена градиентом приливообразующего геопотенциала, поддерживающего вынужденные совместные колебания двухслойной структуры (мантия + тонкий слой атмосферы), как единого целого.

Выполнено сравнение и сопоставление процесса моделирования приливной неравномерности вращения Земли и колебаний глобальной составляющей момента импульса атмосферы на основе метеоданных NCEP/NCAR. Показано, что данные о флуктуациях скорости осевого вращения Земли могут быть эффективно использованы для построения прогноза глобальной составляющей момента импульса атмосферы.

Исследованы динамические уравнения возмущенных вращательных движений деформируемой Земли относительно центра масс в форме Эйлера - Лиувилля с учетом глобальной составляющей момента импульса атмосферы. Показано, что рационально построенная модель вариаций скорости осевого вращения Земли дает право с полной определенностью утверждать, что динамика тонкого приземного слоя атмосферы полностью обусловлена градиентом приливообразующего геопотенциала, в котором зональная компонента является доминирующей.

Проведено численное моделирование колебаний глобальной составляющей кинетического момента атмосферы на основе данных измерений МСВЗ и метеоданных NCEP / NCAR. Разработанная модель приливной

неравномерности вращения Земли может быть эффективно использована для построения прогноза и интерполяции глобальной составляющей момента импульса атмосферы. Полученные результаты могут представлять как естественнонаучный интерес, так и найти применение в прикладных задачах геофизики.

## **Глава 1. Уравнения возмущенного вращательного движения небесного тела с изменяемой геометрией масс в переменных Андуайе.**

**1.1. История проблемы.** В теории вращения Земли (в первую очередь при изучении движения полюсов) широкое применение имеют уравнения Лиувилля [2], [9], [3]. Причем обычно используется их упрощенная линейная форма записи. Однако, в связи с возрастанием точности наблюдений все актуальнее становятся вопросы об учете новых дополнительных слагаемых к линейным членам и о более точном аналитическом описании соответствующих эффектов во вращении Земли [12], [13]. Такая необходимость возникает, например, при объяснении наблюдаемых невязок в значениях амплитуд ряда нутаций оси Земли. По-видимому, вскоре может возникнуть необходимость в более полном учете свойств невозмущенного чандлеровского-эйлеровского движения Земли при построении теории ее возмущенного движения. Конечно, все сказанное относится не только к Земле, а ко всем телам Солнечной системы.

Для решения указанных проблем, безусловно, важно иметь в распоряжении удобные для исследований формы уравнений движения в переменных, имеющих ясный геометрический и динамический смысл. Такими переменными являются переменные Андуайе (рис. 1). Подробное описание этих переменных дается ниже. Здесь укажем, что эти переменные получили широкое применение при изучении вращательных движений естественных и искусственных небесных тел, моделируемых как абсолютно твердые небесные тела.

Важные приложения канонические уравнения в переменных Андуайе получили в небесной механике: в теории вращения Земли [1], [22], [23], в теории вращения Луны [16], [20], Меркурия и Венеры [16] и другие приложения. Краткий обзор приложений переменных Андуайе и действие - угол в небесной механике и в динамике твердого тела дается в статье авторов [41].

В данной работе аналогичные уравнения (т.е. в переменных Андуайе и действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо) выводятся для другой модели небесного тела - для модели изменяемого тела Лиувилля (с изменяемой

геометрией масс). Предполагается, что мантия Земли является упругой оболочкой, испытывающей деформации из-за собственного вращения. Мантия покрыта деформируемой или изменяемой во времени оболочкой, для которой относительные смещения частиц в некоторой связанной с телом системе координат являются заданными функциями времени. В случае Земли эта изменяемая оболочка объединяет океанические и атмосферные массы, грунтовые воды и иные флюидные массы. Указанная модель позволяет проводить широкие исследования влияния различных геофизических и тектонических процессов на вращение Земли, а также исследования вращательных движений других небесных тел.

В первой главе диссертации выводятся основные формы уравнений вращательного движения слабodeформируемых небесных тел в переменных Андуйе. На основе этих уравнений, вначале разрабатывается промежуточное движение изолированного слабodeформируемого осесимметричного тела, которое называется невозмущенным чандлеровско-эйлеровским вращательным движением тела. Затем рассматривается более общий случай слабodeформируемого небесного тела, деформируемого собственным вращением, и компоненты тензора инерции которого являются условно-периодическими функциями времени. В качестве невозмущенного движения принимается чандлеровско - эйлеровское движение осесимметричного тела. Формулы для возмущений получены для произвольных значений параметров невозмущенного движения (в том числе для произвольного невозмущенного значения угла  $\theta$  между вектором кинетического момента и полярной осью тела). Что указывает на их важное значение для изучения вращательных движений тел солнечной системы, например, таких как Венера, для которой указанный угол составляет несколько градусов [25].

Полученное решение задачи о возмущенном вращательном движении изолированного небесного тела также представляет важный интерес для разработки теории вращения Земли как в плане уточнения известных результатов (например, за счет членов пропорциональных углу  $\theta$ ), так и для

объяснения основных механических явлений в движении полюса Земли (чандлеровское движение полюса, его возбуждение, затухание и эволюция) и тонких эффектов, вызванных различными геофизическими процессами.

## 1.2. Постановка задачи. Уравнения Лиувилля в переменных Эйлера.

Рассмотрим слабodeформируемое тело, предполагая, что его частицы в процессе движения тела либо слабо отклоняются от своих первоначальных положений, либо смещаются заданным образом во времени с малой скоростью. Предполагаем, что тело имеет внутреннюю твердую оболочку, с которой свяжем некоторую декартовую систему координат  $C\xi\eta\zeta$ , и внешнюю деформируемую оболочку. За эту оболочку можно принять мантию планеты в ее первоначальном (или недеформированном) состоянии.

Ориентацию осей  $C\xi\eta\zeta$  по отношению к основной системе координат  $Cxyz$  с тем же началом и с осями, сохраняющими постоянную ориентацию в пространстве, зададим углами Эйлера  $\Psi, \Theta$  и  $\Phi$  (угол прецессии, угол нутации и собственного вращения) [42]. Пусть  $\omega$  - вектор угловой скорости вращения осей тела  $C\xi\eta\zeta$  по отношению к системе координат  $Cxyz$ . Его проекции на оси координат  $C\xi, C\eta$  и  $C\zeta$  определяются кинематическими уравнениями Эйлера:

$$p = \sin \Theta \sin \Phi \dot{\Psi} + \cos \Phi \dot{\Theta}, \quad (1.1)$$

$$q = \sin \Theta \cos \Phi \dot{\Psi} - \sin \Phi \dot{\Theta},$$

$$r = \cos \Theta \dot{\Psi} + \dot{\Phi},$$

где  $\dot{\Psi}$ ,  $\dot{\Theta}$  и  $\dot{\Phi}$  - соответствующие обобщенные скорости.

Отметим, что вектор смещения частиц тела  $\mathbf{u}$  в связанной системе координат является заданной функцией времени. С механической точки зрения это означает, что рассматриваемые процессы перераспределения и движения масс тела являются заданными и рассматриваются как независимые от вращения Земли. В качестве примера можно указать на перемещения блоков Земли, например литосферных плит, движение которых задается известными кинематическими теориями.

В данной главе получены основные формы уравнений вращательного движения тела в переменных Эйлера и Андуайе под действием произвольного момента сил  $\mathbf{M}$  и в случаях, когда эти силы допускают силовую функцию [43]. Выводятся как канонические, так и не канонические уравнения движения для задачи Лиувилля. В общем случае оси связанной системы координат тела  $C\xi\eta\zeta$  не являются главными и центральными осями инерции всей планеты.

Вектор кинетического момента вращательного движения тела  $\mathbf{G}$  в системе координат  $Cxyz$  определяется формулой

$$\mathbf{G} = G_\xi \mathbf{i}_b + G_\eta \mathbf{j}_b + G_\zeta \mathbf{k}_b, \quad (1.2)$$

а его проекции вектора на координатные оси тела равны:

$$\begin{aligned} G_\xi &= Ap - Fq - Er + P, \\ G_\eta &= -Fp + Bq - Dr + Q, \\ G_\zeta &= -Ep - Dq + Cr + R. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $A, B, C$  и  $D, E, F$  - осевые и центробежные моменты инерции тела (по предположению они являются известными функциями времени).  $P, Q$  и  $R$  - проекции кинетического момента относительного движения частиц тела на координатные оси  $C\xi, C\eta$  и  $C\zeta$ . По условию задачи (в постановке Лиувилля), указанные 9 динамических характеристик являются заданными функциями времени и в общем случае они могут быть представлены в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \delta A(t), \quad B = B_0 + \delta B(t), \quad C = C_0 + \delta C, \\ D &= D_0 + \delta D(t), \quad E = E_0 + \delta E(t), \quad F = F_0 + \delta F(t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0$  - некоторые постоянные (начальные или невозмущенные, или средние) значения компонент тензора инерции тела, например, соответствующие недеформированному состоянию тела, а

$$\delta A(t), \delta B(t), \delta C(t), \delta D(t), \delta E(t), \delta F(t) \quad (1.5)$$

- возмущающие добавки к ним за счет смещений частиц тела и соответствующих вариаций плотности. Считаем, что слагаемые (1.4) и

компоненты кинетического момента относительных движений частиц тела  $P = \delta P$ ,  $Q = \delta Q$  и  $R = \delta R$  являются заданными функциями времени. Вариации (1.5) тогда могут быть получены на основе спутниковых наблюдений за вариациями гравитационного поля Земли, а также других небесных тел. Для приложений к изучению вращения Земли и Луны, рассматриваемых как изменяемые слабдеформируемые тела, представляют интерес два случая указанных временных зависимостей: вековых и условно-периодических.

Вместо моментов инерции иногда удобно использовать коэффициенты второй гармоники гравитационного потенциала (для Земли – геопотенциала). Их стандартные (не нормированные) значения связаны с моментами инерции (1.4), (1.5) простыми соотношениями [44]:

$$J_2 = -C_{20} = \frac{2C - A - B}{2mr_0^2}, \quad C_{22} = \frac{B - A}{4mr_0^2}, \quad (1.6)$$

$$S_{22} = \frac{F}{2mr_0^2}, \quad C_{21} = \frac{E}{mr_0^2}, \quad S_{21} = \frac{D}{mr_0^2},$$

где  $m_0$  и  $r_0$  - масса и средний радиус планеты. Соответственно, разности осевых моментов инерции планеты и произведения инерции тела выражаются через коэффициенты геопотенциала простыми формулами:

$$A - B = -4C_{22}mr_0^2, \quad A - C = (C_{20} - 2C_{22})mr_0^2, \quad B - C = (C_{20} + 2C_{22})mr_0^2, \quad (1.7)$$

$$F = 2S_{22}mr_0^2, \quad E = C_{21}mr_0^2, \quad D = S_{21}mr_0^2.$$

Если ввести полярный безразмерный момент инерции планеты  $I$  по формуле  $C = I \cdot mr_0^2$ , то из формул (1.7) получаем выражения для осевых моментов инерции:

$$A = (I + C_{20} - 2C_{22})mr_0^2, \quad B = (I + C_{20} + 2C_{22})mr_0^2, \quad C = I \cdot mr_0^2. \quad (1.8)$$

Предположим, что оси инерции, связанные с телом, являются главными при отсутствии временных вариаций моментов инерции (в недеформированном состоянии). При этом постоянные параметры задачи связаны следующими соотношениями:

$$J_2^{(0)} = -C_{20}^{(0)} = \frac{2C_0 - A_0 - B_0}{2mr_0^2}, \quad C_{22}^{(0)} = \frac{B_0 - A_0}{4mr_0^2}, \quad (1.9)$$

$$S_{22}^{(0)} = \frac{F_0}{2mr_0^2} = 0, \quad C_{21}^{(0)} = \frac{E_0}{mr_0^2} = 0, \quad S_{21}^{(0)} = \frac{D_0}{mr_0^2} = 0.$$

Вследствие деформаций планеты и, вообще, вследствие каких-либо изменений ее геометрии масс параметры геопотенциала (1.6) испытывают временные вариации, для которых имеют место аналогичные соотношения:

$$\begin{aligned} \delta J_2 = -\delta C_{20} &= \frac{2\delta C - \delta A - \delta B}{2mr_0^2}, & \delta C_{22} &= \frac{\delta B - \delta A}{4mr_0^2}, \\ \delta S_{22} &= \frac{\delta F}{2mr_0^2}, & \delta C_{21} &= \frac{\delta E}{mr_0^2}, & \delta S_{21} &= \frac{\delta D}{mr_0^2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Наибольший вклад во временные вариации моментов инерции и коэффициентов геопотенциала дают приповерхностные перераспределения масс (например, флюидных масс для Земли). Хотя причина поверхностных перераспределений масс может иметь глубинное происхождение, например, вызываться трансляционными смещениями ядра Земли относительно мантии [45]. В указанных случаях на практике используется дополнительное соотношение между вариациями моментов инерции,

$$\delta A + \delta B + \delta C = 0. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.10) вытекает фактически из определения шарового момента инерции относительно центра планеты, который не меняется при произвольных поверхностных перераспределениях масс в тонком шаровом слое. Из формул (1.10) и (1.11) нетрудно получить выражения для вариаций моментов инерции – компонент тензора инерции:

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{C} &= -\frac{2}{I}\delta C_{22} - \frac{1}{3I}\delta J_2, & \frac{\delta B}{C} &= \frac{2}{I}\delta C_{22} - \frac{1}{3I}\delta J_2, & \frac{\delta C}{C} &= \frac{2}{3I}\delta J_2, \\ \frac{\delta E}{C} &= \frac{1}{I}\delta C_{21}, & \frac{\delta D}{C} &= \frac{1}{I}\delta S_{21}, & \frac{\delta F}{C} &= \frac{2}{I}\delta S_{22}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для Земли уже более 40 лет вариации коэффициентов геопотенциала (1.6), (1.9) и (1.11) изучаются спутниковыми методами [44], [46] - [49]. Ниже (Глава 2) приводятся амплитуды и фазы годовых и полугодовых вариаций коэффициентов второй гармоники геопотенциала, которые фигурируют в уравнениях вращательного движения изменяемой Земли.

Кинетическая энергия слабдеформируемого тела в его вращательном движении по отношению к системе координат  $Cxyz$  определяется формулой [13]:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Fpq - 2Epr - 2Drq) + pP + qQ + rR, \quad (1.12)$$

где  $p$ ,  $q$  и  $r$  - компоненты вектора угловой скорости (1.1), а компоненты тензора инерции тела и компоненты кинетического момента относительного движения частиц тела определяются формулами (1.4), (1.5).

Формула (1.18) представляет кинетическую энергию тела в виде функции проекций угловой скорости и времени, или с учетом (1.1) в виде функций времени и обобщенных координат и скоростей:

$$\Psi, \Theta, \Phi, \dot{\Psi}, \dot{\Theta}, \dot{\Phi}. \quad (1.13)$$

Предположим, что на тело действуют силы, главный момент которых относительно центра масс тела  $C$  равен  $L$ . Тогда на основе теоремы об изменении кинетического момента механической системы получим следующее векторное уравнение вращательного движения тела:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{L} \quad (1.14)$$

или в проекциях на оси системы координат  $C\xi\eta\zeta$ :

$$\frac{dG_\xi}{dt} + qG_\zeta - rG_\eta = L_\xi, \quad (1.15)$$

$$\frac{dG_\eta}{dt} + rG_\xi - pG_\zeta = L_\eta,$$

$$\frac{dG_\zeta}{dt} + pG_\eta - qG_\xi = L_\zeta.$$

Производная вектора  $\mathbf{G}$  в (1.14) берется по отношению к подвижной системе координат  $C\xi\eta\zeta$ .  $L_\xi, L_\eta$  и  $L_\zeta$  в (1.15) - проекции главного момента внешних сил, действующих на тело на оси тела.

Подставим значения проекций вектора кинетического момента слабдеформируемого тела (1.2) в (1.15). В результате получим уравнения Лиувилля [9], [13]:

$$\frac{d}{dt}(Ap - Fq - Er + P) + D(r^2 - q^2) + (C - B)qr + (Fr - Eq)p + qR - rQ = L_\xi, \quad (1.16)$$

$$\frac{d}{dt}(-Fp + Bq - Dr + Q) + E(p^2 - r^2) + (A - C)rp + (Dp - Fr)q + rP - pR = L_\eta,$$

$$\frac{d}{dt}(-Ep - Dq + Cr + R) + F(q^2 - p^2) + (B - A)pq + (Eq - Dp)r + pQ - qP = L_\zeta.$$

К уравнениям (1.16) следует добавить кинематические уравнения Эйлера (1.1), а также указать законы изменения компонент тензора инерции и компонент кинетического момента относительного движения частиц тела, т.е. величин:

$$A(t), B(t), C(t); D(t), E(t), F(t); P(t), Q(t), R(t). \quad (1.17)$$

Проекции главного момента сил в уравнениях (1.16), действующих на тело, предполагаются известными функциями обобщенных координат и скоростей (1.1), (1.13) и времени.

При отсутствии момента сил ( $\mathbf{L} = 0$ ) интегрируемые случаи уравнений (1.16) и их интегрируемость (наряду с другими родственными задачам) были изучены в работах [50], [30], [51].

**1.3. Канонические уравнения вращательного движения в переменных Эйлера.** Примем в качестве обобщенных координат углы Эйлера и определим сопряженные им канонические импульсы по формулам [8], [52], [53]:

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}}, \quad p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}}, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}}. \quad (1.18)$$

Подставляя выражение кинетической энергии  $T$  (1.1), (1.12) в (1.18), получим:

$$\begin{aligned} p_s &= Ap \frac{\partial p}{\partial \dot{S}} + Bq \frac{\partial q}{\partial \dot{S}} + Cr \frac{\partial r}{\partial \dot{S}} - D \left( q \frac{\partial p}{\partial \dot{S}} + p \frac{\partial q}{\partial \dot{S}} \right) - E \left( r \frac{\partial p}{\partial \dot{S}} + p \frac{\partial r}{\partial \dot{S}} \right) - \\ &\quad - F \left( q \frac{\partial r}{\partial \dot{S}} + r \frac{\partial q}{\partial \dot{S}} \right) + P \frac{\partial P}{\partial \dot{S}} + Q \frac{\partial Q}{\partial \dot{S}} + R \frac{\partial R}{\partial \dot{S}} = \\ &= (Ap - Dq - Er + P) \frac{\partial p}{\partial \dot{S}} + (-Dp + Bq - Fr + Q) \frac{\partial q}{\partial \dot{S}} + (-Ep - Fq + Cr + R) \frac{\partial r}{\partial \dot{S}}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $S=(\Psi, \Theta, \Phi)$  and  $\dot{S}=(\dot{\Psi}, \dot{\Theta}, \dot{\Phi})$  - обобщенные координаты (углы Эйлера) и обобщенные скорости (их производные по времени).

С учетом формул (1.1) и (1.1) из (1.19) получаем выражения:

$$p_S = G_\xi \frac{\partial p}{\partial \dot{S}} + G_\eta \frac{\partial q}{\partial \dot{S}} + G_\zeta \frac{\partial r}{\partial \dot{S}},$$

где

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{\Psi}} = \sin \Theta \sin \Phi, \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{\Psi}} = \sin \Theta \cos \Phi, \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\Psi}} = \cos \Theta,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{\Phi}} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{\Phi}} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\Phi}} = 1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{\Theta}} = \cos \Phi, \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{\Theta}} = -\sin \Phi, \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\Theta}} = 0.$$

Таким образом,

$$p_\Psi = G_\xi \sin \Theta \sin \Phi + G_\eta \sin \Theta \cos \Phi + G_\zeta \cos \Theta,$$

$$p_\Phi = G_\zeta, \tag{1.20}$$

$$p_\Theta = G_\xi \cos \Phi - G_\eta \sin \Phi.$$

Разрешая (1.20), для проекций кинетического момента получаем следующие выражения:

$$G_\xi = p_\Theta \cos \Phi + \frac{(p_\Psi - p_\Phi \cos \Theta)}{\sin \Theta} \sin \Phi, \tag{1.21}$$

$$G_\eta = -p_\Theta \sin \Phi + \frac{(p_\Psi - p_\Phi \cos \Theta)}{\sin \Theta} \cos \Phi,$$

$$G_\zeta = p_\Phi,$$

а для модуля вектора  $\mathbf{G}$

$$G = \sqrt{G_\xi^2 + G_\eta^2 + G_\zeta^2} = \sqrt{p_\Theta^2 + p_\Phi^2 + \frac{(p_\Psi - p_\Phi \cos \Theta)^2}{\sin^2 \Theta}}. \tag{1.22}$$

Предположим, что движение тела происходит под действием потенциальных сил, а задача допускает определенную силовую функцию  $U(\Psi, \Theta, \Phi, t)$ . Лагранжиан задачи при этом равен  $L=T+U$ , а гамильтониан (обобщенная энергия) определяется по правилу [13],

$$K = p_\Psi \dot{\Psi} + p_\Phi \dot{\Phi} + p_\Theta \dot{\Theta} - T - U. \tag{1.23}$$

Эта функция с помощью формул (1.20), (1.12), (1.1) должна быть представлена явной функцией канонических переменных задачи:

$$\Psi, \Theta, \Phi, p_\Psi, p_\Theta, p_\Phi. \quad (1.24)$$

Из общей теории гамильтоновых систем для гамильтониана (1.23) следует формула:

$$K = T^{(2)} - U, \quad (1.25)$$

где  $T^{(2)}$  - квадратичная часть кинетической энергии относительно обобщенных скоростей. Это означает, что в  $T$  достаточно выразить через переменные (1.24) лишь члены квадратичные относительно  $p$ ,  $q$  и  $r$ .

Разрешим уравнения (1.21) относительно проекций вектора угловой скорости  $p$ ,  $q$  и  $r$ . Будем иметь:

$$p = a(G_\xi - P) - f(G_\eta - Q) - e(G_\zeta - R), \quad (1.26)$$

$$q = -f(G_\xi - P) + b(G_\eta - Q) - d(G_\zeta - R),$$

$$r = -e(G_\xi - P) - d(G_\eta - Q) + c(G_\zeta - R),$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{BC - D^2}{\Delta}, & b &= \frac{AC - E^2}{\Delta}, & c &= \frac{AB - F^2}{\Delta}, \\ f &= -\frac{ED + FC}{\Delta}, & e &= -\frac{DF + BE}{\Delta}, & d &= -\frac{FE + AD}{\Delta}, \\ \Delta &= ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 - 2DEF. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Полученные формулы (1.26), (1.27) являются точными и при указанных выше допущениях могут быть заменены достаточно простыми приближенными формулами.

Подставим теперь формулы (1.26) в выражение квадратичной части кинетической энергии в (1.12), (1.25). Отбрасывая члены, зависящие лишь от времени, получим следующее выражение для гамильтониана задачи:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \left( aG_\xi^2 + bG_\eta^2 + cG_\zeta^2 - 2fG_\xi G_\eta - 2eG_\zeta G_\xi - 2dG_\zeta G_\eta \right) - \\ &\quad - \Omega_\xi G_\xi - \Omega_\eta G_\eta - \Omega_\zeta G_\zeta - U(\Psi, \Theta, \Phi, t), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где величины

$$\Omega_\xi = aP - fQ - eR, \quad \Omega_\eta = -fP + bQ - dR, \quad \Omega_\zeta = -eP - dQ + cR \quad (1.29)$$

являются известными функциями времени, а компоненты углового момента определяются формулами (1.26).

Таким образом, канонические уравнения вращательного движения деформируемого тела в переменных (1.24) имеют вид:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_S}, \quad \frac{dp_S}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial S} \quad (S = \Psi, \Theta, \Phi) \quad (1.30)$$

где

$$K = \frac{1}{2} \left( H_{11} p_\Psi^2 + H_{22} p_\Theta^2 + H_{33} p_\Phi^2 + 2H_{12} p_\Psi p_\Theta + 2H_{13} p_\Psi p_\Phi + 2H_{23} p_\Theta p_\Phi \right) + h_1 p_\Psi + h_2 p_\Theta + h_3 p_\Phi - U(\Psi, \Theta, \Phi, t). \quad (1.31)$$

Коэффициенты  $H_{ij}$ ,  $h_i$  в (1.31) определяются формулами:

$$H_{11} = \operatorname{cosec}^2 \Theta (a \sin^2 \Phi + b \cos^2 \Phi - f \sin 2\Phi), \quad (1.32)$$

$$H_{22} = a \cos^2 \Phi + b \sin^2 \Phi + f \sin 2\Phi,$$

$$H_{33} = \operatorname{ctg}^2 \Theta (a \sin^2 \Phi + b \cos^2 \Phi - f \sin 2\Phi) + c + 2\operatorname{ctg} \Theta (e \sin \Phi + d \cos \Phi),$$

$$H_{12} = \operatorname{cosec} \Theta [\sin 2\Phi (a - b) - 2f \cos 2\Phi],$$

$$H_{13} = -\cos \Theta \operatorname{cosec}^2 \Theta (a \sin^2 \Phi + b \cos^2 \Phi - f \sin 2\Phi) - \operatorname{cosec} \Theta (e \sin \Phi + d \cos \Phi),$$

$$H_{23} = -\frac{1}{2} \cos \Theta \operatorname{cosec} \Theta [\sin 2\Phi (a - b) - 2f \cos 2\Phi] - e \cos \Phi - d \sin \Phi,$$

$$h_1 = \operatorname{cosec} \Theta (\Omega_\xi \sin \Phi + \Omega_\eta \cos \Phi), \quad (1.33)$$

$$h_3 = -\operatorname{ctg} \Theta (\Omega_\xi \sin \Phi + \Omega_\eta \cos \Phi) + \Omega_\zeta.$$

Силовая функция  $U$  в (1.30) (1.33) является функцией направляющих косинусов  $a_{ij}$  осей тела  $C\xi\eta\zeta$  по отношению к основной не вращающейся системе координат  $Cxyz$  и может быть представлена функцией углов Эйлера с помощью известных выражений для  $a_{ij}$  [52].

**1.4. Канонические уравнения вращательного движения небесного тела с изменяемой геометрией масс в переменных Андуайе.** Введем в рассмотрение переменные Андуайе, которые связаны с вектором кинетического момента  $\mathbf{G}$  (1.2), (1.3) [54]:

$$G, \theta, \rho, l, g, h \quad (1.34)$$

Пусть  $CG_1G_2G_3$  - промежуточная система координат, связанная с вектором  $\mathbf{G}$ . Ось  $CG_3$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{G}$ , а ось  $CG_1$  расположена в плоскости  $Cxy$  основной системы координат и направлена вдоль линии пересечения плоскостей  $CG_1G_2$  и  $Cxy$  в сторону восходящего узла плоскости  $CG_1G_2$  (рис. .1). Пусть  $G=|\mathbf{G}|$  - есть модуль вектора кинетического момента.  $\rho$  и  $h$  - углы, однозначно определяющие ориентацию осей системы координат  $CG_1G_2G_3$  по отношению к системе координат  $Cxyz$ :  $\rho$  - угол между осью  $Cz$  и вектором кинетического момента  $\mathbf{G}$ ,  $h$  - угол между положительными направлениями осей координат  $Cx$  и  $CG_1$  ( $h$  - долгота восходящего узла промежуточной плоскости  $CG_1G_2$ ).

Ориентацию осей тела  $C\xi\eta\zeta$  по отношению к промежуточной системе координат  $CG_1G_2G_3$  определим углами Эйлера  $l, g, \theta$  (рис. 1). Угол нутации  $\theta$  - угол между положительными направлениями осей  $CG_3$  и  $C\xi$ . Угол прецессии  $g$  - угол между осью  $CG_1$  и линией пересечения координатных плоскостей  $CG_1G_2$  и  $C\xi\eta$  (или угол между положительным направлением оси  $CG_1$  и направлением на восходящий узел плоскости тела  $C\xi\eta$  на промежуточной плоскости  $CG_1G_2$ ). Угол собственного вращения  $l$  - угол между указанным направлением на восходящий узел плоскости  $C\xi\eta$  и осью  $C\xi$ .

Таким образом, если углы Эйлера  $\Psi = h$ ,  $\Theta = \rho$ ,  $\Phi = 0$  задают ориентацию промежуточной системы координат  $CG_1G_2G_3$  по отношению к основной системе координат, то углы Эйлера  $\Psi = g$ ,  $\Theta = \theta$ ,  $\Phi = l$  задают ориентацию координатных осей тела  $C\xi\eta\zeta$  по отношению к промежуточной системе координат  $CG_1G_2G_3$ .

Единичные орты систем координат  $Cxyz$ ,  $CG_1G_2G_3$  и  $C\xi\eta\zeta$  обозначим, соответственно:

$$\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s; \quad \mathbf{i}_G, \mathbf{j}_G, \mathbf{k}_G; \quad \mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b. \quad (1.35)$$

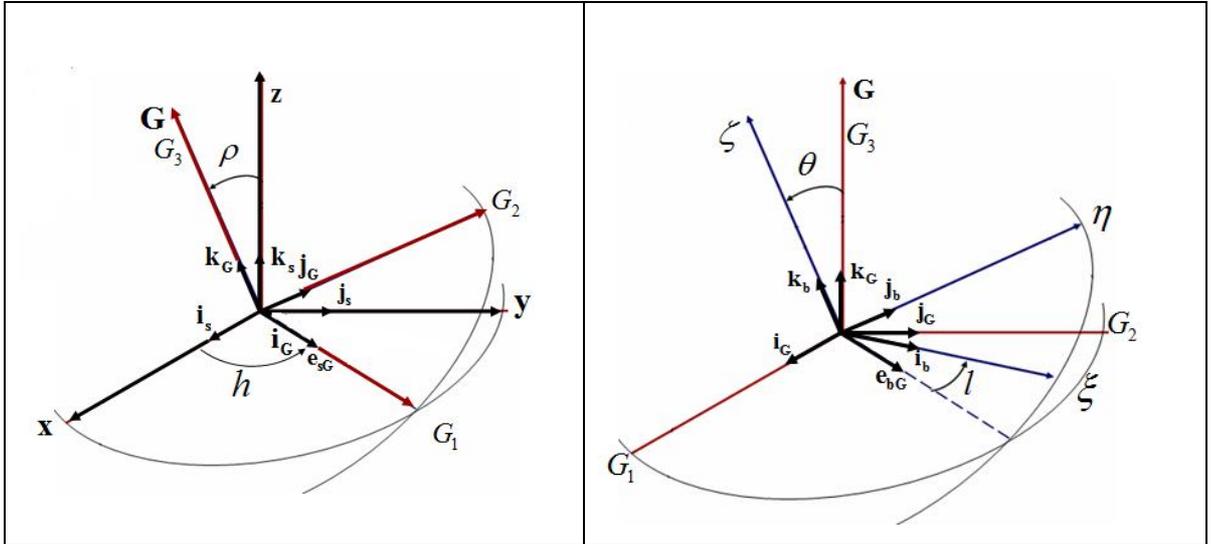


Рис. 1.1. Основные системы координат и переменные Андуайе.

Также введем в рассмотрение единичные векторы  $\mathbf{e}_{bs}$ ,  $\mathbf{e}_{Gs}$  и  $\mathbf{e}_{bG}$ , направленные вдоль линий пересечения координатных плоскостей  $Cxy$ ,  $C\xi\eta$ ;  $Cxy$ ,  $CG_1G_2$  и  $CG_1G_2$ ,  $C\xi\eta$  (рис. 1.1). На рис. 1.1 также указаны углы Эйлера  $\Psi$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$ , которые также будут использоваться ниже в тексте.

Определим еще три переменных Андуайе:  $L$ ,  $G$ ,  $H$ .  $L$  - проекция вектора  $\mathbf{G}$  на полярную ось тела  $C\xi$ ,  $H$  - проекция вектора  $\mathbf{G}$  на ось  $Cz$  и  $G$  - величина вектора  $\mathbf{G}$ . Очевидно,

$$L = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}_b, \quad G = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}_G, \quad H = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}_s \quad (1.36)$$

или

$$L = G \cos \theta, \quad G = |\mathbf{G}|, \quad H = G \cos \rho. \quad (1.37)$$

Докажем теперь, что преобразование переменных Эйлера (1.30) к переменным Андуайе

$$L, G, H, l, g, h \quad (1.38)$$

является каноническим.

Каноничность указанного преобразования вытекает из того факта, что дифференциальные формы, устанавливающие каноничность преобразования и

записанные в канонических переменных Эйлера (1.30) и в переменных Андуайе (1.38), равны скалярному произведению вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$  на элементарный вектор-угол поворота  $d\boldsymbol{\Omega}$  осей тела  $C\xi\eta\zeta$ , т.е.

$$p_\Psi d\Psi + p_\Theta d\Theta + p_\Phi d\Phi = Ldl + Gdg + Hdh = \mathbf{G}d\boldsymbol{\Omega}. \quad (1.39)$$

Чтобы доказать это тождество следует дважды вычислить скалярное произведение  $\mathbf{G}d\boldsymbol{\Omega}$ , один раз используя переменные Эйлера, а другой - переменные Андуайе,

$$(\mathbf{G}d\boldsymbol{\Omega}) = (\mathbf{G}d\boldsymbol{\Omega})_E = (\mathbf{G}d\boldsymbol{\Omega})_A. \quad (1.40)$$

Доказательство тождества (1.39), (1.40) дается в статье [13] и здесь оно для краткости не приводится.

Для того чтобы записать гамильтониан задачи в новых переменных (1.34), (1.37), (1.38) достаточно в выражение (1.28), (1.29) подставить следующие значения проекций вектора кинетического момента на координатные оси тела:

$$\begin{aligned} G_\xi &= \mathbf{G}\mathbf{k}_b = G\mathbf{k}_G\mathbf{i}_b = G \sin \theta \sin l = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \\ G_\eta &= \mathbf{G}\mathbf{j}_b = G\mathbf{k}_G\mathbf{j}_b = G \sin \theta \cos l = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \\ G_\zeta &= \mathbf{G}\mathbf{k}_b = G\mathbf{k}_G\mathbf{k}_b = G \cos \theta = L. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Теперь получаем канонические уравнения вращательного движения слабodeформируемого тела:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial L}, & \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial l}, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial g}, \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial H}, & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial h}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}G^2 \left\{ (a \sin^2 l + b \cos^2 l - f \sin 2l) \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta - \sin 2\theta (e \sin l + d \cos l) \right\} - \\ &- G \left[ (\Omega_\xi \sin l + \Omega_\eta \cos l) \sin \theta + \Omega_\zeta \cos \theta \right] - U(L, G, H, l, g, h, t). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Силовая функция  $U$  в (1.43) должна быть представлена как функция канонических переменных (1.38) и времени. Последняя задача обычно решается с помощью известных представлений направляющих косинусов  $a_{ij}$

координатных осей тела  $C\xi\eta\zeta$  в основной системе координат  $Cxyz$ :  $a_{ij}(\theta, \rho, l, g, h)$ . Эти формулы приведены в ряде учебников и публикаций [21], [28], [29] и др. Приведем также известные формулы для двух наклонностей вектора кинетического момента относительно нормали к плоскости орбиты (или другой базовой плоскости) - угол  $\rho$  и относительно полярной оси инерции тела  $O\zeta$  - угол  $\theta$ :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{G^2 - L^2}}{G}, \quad \cos \theta = \frac{L}{G}, \quad \sin \rho = \frac{\sqrt{G^2 - H^2}}{G}, \quad \cos \rho = \frac{H}{G}. \quad (1.44)$$

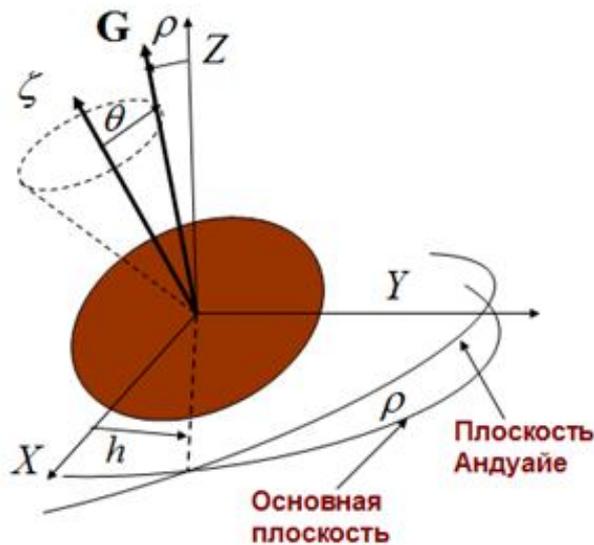


Рис. 1.2. Коническое движение оси инерции в невозмущенном чандлеровском движении (с периодом 432 сут). Переменные Андуайе и положение вектора кинетического момента вращательного движения.

### 1.5. Упрощенные формы уравнений движения в переменных Андуайе.

Наряду с каноническими уравнениями движения (1.42), (1.43) будем использовать уравнения в переменных  $\theta, G, \rho, l, g, h$  (см. п. 1.4).  $L = G \cos \theta$ ,  $G = |\mathbf{G}|$ ,  $H = G \cos \rho$ .

Преобразование переменных (1.43), (1.44) хорошо известно и поэтому сразу на основе канонических уравнений получим следующую форму уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial g}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{2}G \sin \theta [(a-b) \sin 2l - 2f \cos 2l] + G \cos \theta (-e \cos l + d \sin l) + \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial U}{\partial l}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \rho \frac{\partial U}{\partial h}, \\ \frac{dl}{dt} &= -G \cos \theta (a \sin^2 l + b \cos^2 l - f \sin 2l - c) - G \operatorname{cosec} \theta \cos 2\theta (e \sin l + d \cos l) + \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{dg}{dt} &= G(a \sin^2 l + b \cos^2 l - f \sin 2l) - G \operatorname{ctg} \theta (e \sin l + d \cos l) - \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{G} \cot \rho \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где силовая функция задачи

$$U = U(\theta, \rho, l, g, h, t). \quad (1.46)$$

Таким образом, при заданной силовой функции задача о вращательном движении слабдеформируемого тела сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (1.45), (1.46) шестого порядка при определенных начальных условиях:

$$t = 0: \quad l = l_0, \quad g = g_0, \quad h = h_0, \quad G = G_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \rho = \rho_0. \quad (1.47)$$

Если в качестве осей тела  $C\xi\eta\zeta$  выбираются его главные оси инерции, тогда  $a = 1/A$ ,  $b = 1/B$ ,  $c = 1/C$ ,  $d = e = f = 0$ , и уравнения (1.45), (1.46) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial g}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{2}G \sin \theta \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin 2l + \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial U}{\partial l}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \rho \frac{\partial U}{\partial h}, \\ \frac{dl}{dt} &= -G \cos \theta \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{dg}{dt} &= G \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) - \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} G \sin \theta \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin 2l,$$

$$\frac{dl}{dt} = -G \left[ \frac{1}{C} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \right] \cos \theta - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \cos \theta \cos 2l,$$

$$U = U(\theta, \rho, l, g, h, t).$$

Для широкого класса слабдеформируемых небесных тел, совершающих движения близкие к невозмущенному движению твердого тела по Эйлеру-Пуансо, можно использовать уравнения движения в переменных действие-угол [12], [13] (см. Главу 3).

Для приложений представляет интерес случай, когда для рассматриваемого тела осевые и центробежные моменты инерции тела и проекции кинетического момента относительного движения частиц тела на связанные координатные оси допускают представления (1.4):

$$A = A_0 + \delta A, \quad B = B_0 + \delta B, \quad C = C_0 + \delta C, \quad (1.49)$$

$$D = \delta D, \quad E = \delta E, \quad F = \delta F,$$

$$P = \delta P, \quad Q = \delta Q, \quad R = \delta R.$$

Здесь символ  $\delta z$  означает малую по амплитуде вариацию параметра  $z$ , для описания которых также можно использовать малый параметр  $\mu$ .  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  - постоянные невозмущенные значения осевых моментов инерции (или их средние значения). Все вариации в (1.49) учитывают эффекты изменчивости динамического строения тела и являются определенными функциями времени. В дальнейшем условимся сохранять в гамильтониане и в силовой функции задачи только линейные члены относительно указанных вариаций. Подставим во введенные выше функции времени (1.27) значения вариаций (1.49) и после несложных преобразований получим формулы:

$$a = a_0 + \delta a, \quad b = b_0 + \delta b, \quad c = c_0 + \delta c, \quad (1.50)$$

$$d = \delta d, \quad e = \delta e, \quad f = \delta f,$$

$$\Omega_\xi = \delta \Omega_\xi, \quad \Omega_\eta = \delta \Omega_\eta, \quad \Omega_\zeta = \delta \Omega_\zeta,$$

где

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{A_0}, & b_0 &= \frac{1}{B_0}, & c_0 &= \frac{1}{C_0}, & (1.51) \\
 \delta a &= -\frac{\delta A}{A_0^2}, & \delta b &= -\frac{\delta B}{B_0^2}, & \delta c &= -\frac{\delta C}{C_0^2}, \\
 \delta d &= -\frac{\delta D}{A_0 B_0}, & \delta e &= -\frac{\delta E}{C_0 A_0}, & \delta f &= -\frac{\delta F}{B_0 C_0}, \\
 \delta \Omega_\xi &= \frac{\delta P}{A_0}, & \delta \Omega_\eta &= \frac{\delta Q}{B_0}, & \delta \Omega_\zeta &= \frac{\delta R}{C_0}.
 \end{aligned}$$

Для Земли, Луны и многих других небесных тел эллипсоиды инерции близки к сферам. Это означает, что разности их осевых моментов инерции по сравнению с самими моментами инерции являются малыми. Это позволяет сделать еще одно упрощение в правых частях равенств (1.51), а, именно, положить в вариациях (1.51)  $A_0 = B_0 = C_0$ .

При этом гамильтониан задачи о вращении тела с малыми изменениями геометрии масс можно представить в стандартном виде:

$$K = K_0 + K_1, \quad (1.52)$$

где

$$K_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A_0} + \frac{\cos^2 l}{B_0} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C_0} \quad (1.53)$$

- гамильтониан невозмущенного эйлеровского вращения неизменяемого тела с постоянными главными центральными моментами инерции  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$ , и  $K_1$  - возмущающая функция, включающая в себя малые члены квадратичной части кинетической энергии вращательного движения тела и силовую функцию задачи (если учитываются гравитационные моменты внешних небесных тел), которая также мала по сравнению с основным слагаемым гамильтониана  $K_0$ :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{2} G^2 \left[ \sin^2 \theta (\delta a \sin^2 l + \delta b \cos^2 l - \delta f \sin 2l) + \delta c \cos^2 \theta - \sin 2\theta (\delta e \sin l + \delta d \cos l) \right] - \\
 &\quad - G \left[ (\delta \Omega_\xi \sin l + \delta \Omega_\eta \cos l) \sin \theta + \delta \Omega_\zeta \cos \theta \right] \Big\} - U(\theta, \rho, l, g, h, t). \quad (1.54)
 \end{aligned}$$

Для изолированного небесного тела силовая функция гравитационного притяжения внешних небесных тел  $U(\theta, \rho, l, g, h, t) = 0$ .

Для изучения вынужденных вариаций вращения конкретных небесных тел (Земли, Луны и др.) вместо вариаций моментов инерции и параметров задачи введем вариации коэффициентов второй гармоники гравитационного потенциала (1.10), (1.11). В частности для вариаций коэффициентов в (1.54) получим простые соотношения:

$$\begin{aligned} \delta a &= -\frac{\delta A}{A_0^2} = \frac{C_0}{3JA_0^2}(\delta J_2 + 6\delta C_{22}), & \delta f &= -\frac{\delta F}{A_0B_0} = -\frac{2C_0}{JA_0B_0}\delta S_{22}, \\ \delta b &= -\frac{\delta B}{B_0^2} = \frac{C_0}{3JB_0^2}(\delta J_2 - 6\delta C_{22}), & \delta e &= -\frac{\delta E}{C_0A_0} = -\frac{1}{JA_0}\delta C_{21}, \\ \delta c &= -\frac{\delta C}{C_0^2} = -\frac{2}{3JC_0}\delta J_2, & \delta d &= -\frac{\delta D}{B_0C_0} = -\frac{1}{JB_0}\delta S_{21}, \\ \delta\Omega_\xi &= \frac{\delta P}{A_0}, & \delta\Omega_\eta &= \frac{\delta Q}{B_0}, & \delta\Omega_\zeta &= \frac{\delta R}{C_0}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Предположим теперь, что эллипсоид инерции планеты близок к сфере. Тогда, пренебрегая членами второго порядка малости по отношению к разностям главных моментов инерции  $C_0 - A_0$ ,  $C_0 - B_0$  и вариациям параметров задачи, получим упрощенные выражения:

$$\begin{aligned} \delta a &= \frac{1}{3IC_0}(\delta J_2 + 6\delta C_{22}), & \delta b &= \frac{1}{3IC_0}(\delta J_2 - 6\delta C_{22}), & \delta c &= -\frac{2}{3IC_0}\delta J_2, \\ \delta f &= -\frac{2}{3IC_0}\delta S_{22}, & \delta e &= -\frac{1}{IC_0}\delta C_{21}, & \delta d &= -\frac{1}{IC_0}\delta S_{21}, \\ \delta\Omega_\xi &= \frac{1}{C_0}\delta P, & \delta\Omega_\eta &= \frac{1}{C_0}\delta Q, & \delta\Omega_\zeta &= \frac{1}{C_0}\delta R. \end{aligned} \quad (1.56)$$

В результате всех выполненных преобразований и упрощений возмущающую часть гамильтониана задачи Лиувилля представим в следующей окончательной форме

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2IC_0}G^2 \left[ \frac{1}{3}(1 - 3\cos^2\theta)\delta J_2 - 2\delta C_{22}\sin^2\theta\cos 2l + 2\delta S_{22}\sin^2\theta\sin 2l \right. \\ &\quad \left. + \delta C_{21}\sin 2\theta\sin l + \delta S_{21}\sin 2\theta\cos l \right] - \frac{G}{C_0} \left[ (\delta P\sin l + \delta Q\cos l)\sin\theta + \delta R\cos\theta \right]. \end{aligned} \quad (1.57)$$

С целью более детального исследования решения уравнений Лиувилля в канонических переменных Андуайе (1.42), (1.43) и для удобства возмущающий Гамильтониан  $K_1$  (1.57) представим в виде суммы трех слагаемых

$$K_1 = K_1^{(1)} + K_1^{(2)} + K_1^{(3)}, \quad (1.58)$$

где

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{2IC_0} G^2 \left[ \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right) \delta J_2 - 2\delta C_{22} \sin^2 \theta \cos 2l \right], \quad (1.59)$$

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{2IC_0} G^2 \left( 2\delta S_{22} \sin^2 \theta \sin 2l + \delta C_{21} \sin 2\theta \sin l + \delta S_{21} \sin 2\theta \cos l \right), \quad (1.60)$$

$$K_1^{(3)} = -\frac{G}{C_0} \left[ (\delta P \sin l + \delta Q \cos l) \sin \theta + \delta R \cos \theta \right]. \quad (1.61)$$

Или в канонических переменных (1.38), (1.37):

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{2IC_0} \left[ \left( \frac{1}{3} G^2 - L^2 \right) \delta J_2 - 2\delta C_{22} (G^2 - L^2) \cos 2l \right], \quad (1.62)$$

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{2IC_0} \left[ 2\delta S_{22} (G^2 - L^2) \sin 2l + 2\delta C_{21} \sqrt{G^2 - L^2} L \sin l + 2\delta S_{21} \sqrt{G^2 - L^2} L \cos l \right], \quad (1.63)$$

$$K_1^{(3)} = -\frac{1}{C_0} \left[ (\delta P \sin l + \delta Q \cos l) \sqrt{G^2 - L^2} + L \delta R \right]. \quad (1.64)$$

Первая часть гамильтониана (1.59), (1.62) позволяет изучить динамические эффекты во вращении планеты, вызванные циклическими вариациями или вековыми изменениями основных коэффициентов геопотенциала  $\delta J_2$  и  $\delta C_{22}$ . Вторая часть гамильтониана (1.60), (1.63) позволяет изучить динамические эффекты во вращении планеты, вызванные циклическими вариациями или вековыми изменениями произведений инерции планеты или соответствующих им коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}$ ,  $\delta S_{21}$  и  $\delta S_{22}$ . Наконец, третье слагаемое возмущающего гамильтониана (1.58), (1.64) позволяет описать динамические эффекты, вызванные временными вариациями проекций вектора кинетического момента на главные оси инерции планеты  $\delta P$ ,  $\delta Q$  и  $\delta R$ .

Воспользуемся формулами (1.56) - (1.60) и выделим основные члены в правых частях уравнений (1.48) (с учетом силовой функции задачи):

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial U}{\partial g}, \quad (1.65)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \rho \frac{\partial U}{\partial h},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = & \frac{1}{2} G \sin \theta \left( \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) \sin 2l + 2 \frac{G}{IC_0} \sin \theta (\delta C_{22} \sin 2l + \delta S_{22} \cos 2l) + \\ & + \frac{G}{IC_0} \cos \theta (\delta C_{21} \cos l - \delta S_{21} \sin l) + \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial U}{\partial l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} = & G \cos \theta \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{A_0} \sin^2 l - \frac{1}{B_0} \cos^2 l \right) - \frac{G}{IC_0} \cos \theta (\delta J_2 - 4\delta C_{22} \cos 2l + 2\delta S_{22} \sin 2l) - \\ & - \frac{G}{IC_0} \operatorname{cosec} \theta \cos 2\theta (\delta C_{21} \sin l + \delta S_{21} \cos l) + \frac{1}{G} \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} = & G \left( \frac{1}{A_0} \sin^2 l + \frac{1}{B_0} \cos^2 l \right) + \frac{G}{IC_0} (\delta J_2 - 4\delta C_{22} \cos 2l + 2\delta S_{22} \sin 2l) \\ & + \frac{G}{IC_0} \operatorname{ctg} \theta (\delta C_{21} \sin l + \delta S_{21} \cos l) - \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{G} \cot \rho \frac{\partial U}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

где  $U = U(\theta, \rho, l, g, h, t)$  - силовая функция задачи.

Выписанные члены в правых частях уравнений (1.65) играют главенствующую роль для анализа эффектов во вращательном движении небесного тела вызванных вариациями геометрии масс и вариациями относительного кинетического момента. В следующей главе будет построено приближенное решение задачи Лиувилля (возмущения первого порядка) для всех указанных здесь факторов и будут даны им приложения для описания возмущений во вращательном движении Земли, вызванных изменениями ее геометрии масс и вариациями относительного кинетического момента. Мы рассмотрим возмущения, обусловленные годовыми и полугодовыми, а также вековыми, вариациями коэффициентов геопотенциала, которые были выявлены в результате многолетних спутниковых наблюдений.

## 1.6. Динамика небесного тела, деформируемого собственным вращением.

**Невозмущенное чандлеровское (и эйлеровское) движение осесимметричной планеты.** Мантия Земли является упругой оболочкой, которая оказывает на ее вращение существенное влияние. Как уже отмечалось выше упругость Земли приводит к значительному удлинению периода свободного колебания полюса. По теории Эйлера ожидаемое значение этого периода было близким к 305 суток. Однако, подобное колебание не наблюдается в реальности. Но в 1989 г. Чандлером было обнаружено из наблюдений другое колебание полюса с амплитудой около 0"24 дуги [10], [55]. Позднее оно было отождествлено со свободным колебанием, период которого превосходит эйлеровский период примерно на 125 суток.

В этом разделе сконцентрируем внимание на изучении динамических эффектов во вращении упругого небесного тела, деформируемого собственным вращением. В качестве приложений при этом детально изучим соответствующие эффекты во вращательном движении Земли.

Предположим, что тело является изолированным и на него не действуют внешние силы. При этом момент  $\mathbf{L} = 0$  и исходные уравнения его вращательного движения (1.48) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \left[ \frac{1}{2}(a-b) \sin 2l - d \cos 2l \right] + & (1.66) \\ &+ G \cos \theta (-e \cos l + f \sin l) + \beta \sin l - \alpha \cos l, \\ \frac{dl}{dt} &= G \cos \theta (c - a \sin^2 l - b \cos^2 l + d \sin 2l) + \\ &+ G \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} (e \sin l + f \cos l) - \gamma + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\alpha \sin l + \beta \cos l), \\ \frac{dg}{dt} &= G (a \sin^2 l + b \cos^2 l - d \sin 2l) + \\ &+ G \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (e \sin l + f \cos l) - \frac{1}{\sin \theta} (\alpha \sin l + \beta \cos l) \end{aligned}$$

(здесь и ниже для краткости используются обозначения:  $\alpha = \Omega_\zeta$ ,  $\beta = \Omega_\eta$ ,  $\gamma = \Omega_\zeta$ ).

В дальнейшем иногда будем прибегать к различного рода упрощениям точных уравнений (1.66), основываясь на дополнительных предположениях о малости тех или иных параметров. Чтобы сконцентрировать внимание на указанных выше эффектах в данном разделе будем полагать, что кинетический момент относительного движения частиц тела равен нулю ( $P = Q = R = 0$ ).

Предполагая теперь, что тело является слабдеформируемым, и, используя представление основных характеристик тела (1.58) - (1.60), вместо уравнений (1.66), будем рассматривать их упрощенный вариант (см. (1.55) - (1.56)):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} + \frac{B_1}{B_0^2} - \frac{A_1}{A_0^2} \right) \sin 2l + \frac{D_1}{A_0 B_0} \cos 2l \right] \\ &+ \frac{G}{C_0} \cos \theta \left( \frac{E_1}{A_0} \cos l - \frac{F_1}{B_0} \sin l \right), \\ \frac{dl}{dt} &= G \cos \theta \left[ \frac{1}{C_0} - \frac{C_1}{C_0} - \left( \frac{1}{A_0} - \frac{A_1}{A_0^2} \right) \sin^2 l - \left( \frac{1}{B_0} - \frac{B_1}{B_0^2} \right) \cos^2 l - \frac{D_1}{A_0 B_0} \sin 2l \right] \\ &- \frac{G \cos 2\theta}{C_0 \sin \theta} \left( \frac{E_1}{A_0} \sin l + \frac{F_1}{B_0} \cos l \right), \\ \frac{dg}{dt} &= G \left[ \left( \frac{1}{A_0} - \frac{A_1}{A_0^2} \right) \sin^2 l + \left( \frac{1}{B_0} - \frac{B_1}{B_0^2} \right) \cos^2 l - \frac{D_1}{A_0 B_0} \sin 2l \right] \\ &+ \frac{G \cos \theta}{C_0 \sin \theta} \left( \frac{E_1}{A_0} \sin l + \frac{F_1}{B_0} \cos l \right). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Рассматриваемая задача (задача Лиувилля) допускает три первых интеграла:

$$G = G_0, \quad \rho = \rho_0, \quad h = h_0, \quad (1.68)$$

означающих постоянство вектора полного кинетического момента вращательного движения деформируемого небесного тела (с учетом относительного кинетического момента).  $G_0, \rho_0$  и  $h_0$  - начальные значения соответствующих переменных Андуайе. Т.е. рассматриваемая задача Лиувилля сводится системе трех дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнения (1.67) используем для анализа важнейших эффектов упругости тела и вариаций его геометрии масс во вращательном движении Земли в случае отсутствия внешнего силового воздействия. Если тело в недеформированном состоянии является осесимметричным, т.е.  $A_0 = B_0$ , то уравнения (1.67) упрощаются:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{GD_1}{A_0B_0} \sin \theta \cos 2l + \frac{G}{C_0A_0} \cos \theta (E_1 \cos l - F_1 \sin l), \quad (1.69)$$

$$\frac{dl}{dt} = G \cos \theta \left( \frac{1}{C_0} - \frac{C_1}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{A_1}{A_0^2} - \frac{D_1}{A_0^2} \sin 2l \right) - \frac{G}{C_0A_0} \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} (E_1 \sin l + F_1 \cos l),$$

$$\frac{dg}{dt} = G \left( \frac{1}{A_0} - \frac{A_1}{A_0^2} - \frac{D_1}{A_0^2} \sin 2l \right) + \frac{G}{C_0A_0} \operatorname{ctg} \theta (E_1 \sin l + F_1 \cos l).$$

Возможны и другие модификации уравнений (1.66) - (1.69).

Согласно хорошо известным классическим представлениям об упругости Земли, вследствие ее вращения и деформации возникают дополнительные составляющие компонент тензора инерции, зависящие от ориентации вектора угловой скорости и его проекций  $p, q, r$ . Наиболее просто эти составляющие определяются в системе координат  $C\omega_1\omega_2\omega_3$ , связанной с вектором угловой скорости вращения планеты  $\omega$ . Ось  $C\omega_3$  направлена вдоль  $\omega$ , ось  $C\omega_1$  - вдоль линии пересечения плоскости ортогональной вектору  $\omega$  и основной координатной плоскости  $Cxy$ , ось  $C\omega_2$  - дополняет систему координат до правой.

В системе координат  $C\omega_1\omega_2\omega_3$  компоненты тензора инерции экваториальных утолщений Земли, вызванных ее вращательной деформацией, определяются формулами [2]:

$$A_\omega = B_\omega = -\frac{ka_e^5\omega_0^2}{9f}, \quad C_\omega = \frac{2ka_e^5\omega_0^2}{9f}, \quad F_\omega = 0, \quad E_\omega = 0, \quad D_\omega = 0, \quad (1.70)$$

где  $a_e$  - экваториальный радиус Земли,  $\omega_0$  - величина угловой скорости вращения Луны,  $k$  - число Лява,  $f$  - гравитационная постоянная.

Для планеты Земля используем следующие значения указанных параметров, следуя циклу работ Хетино и Феррандиша [7], [56], [57]:

$$ma_e^2 = C/0.3307, \quad \omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ 1/c}, \quad (1.71)$$

$$fm = 3.986 \cdot 10^{-14} \text{ м}^3/\text{с}^2, \quad a_e = 6.378 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad k_2 = 0.29.$$

В результате получаем следующие приращения для осевых моментов инерции Земли:

$$\Delta C = \nu C = 0.3364 \cdot 10^{-3} C, \quad \Delta A_\omega = \Delta B_\omega = -\Delta C, \quad \Delta C_\omega = 2\Delta C, \quad (1.72)$$

где  $\nu = 0.00116k_2 = 0.3364 \cdot 10^{-3}$  - некоторый коэффициент упругости. Покажем теперь, что обсуждаемые эффекты деформаций Земли вследствие ее собственного вращения можно учесть в невозмущенном движении, т.е. в нулевом приближении искомого решения.

Вариации моментов инерции упругого небесного тела, обусловленные его вращательными деформациями, изучались многими авторами, в том числе были определены в вышеуказанных работах по отношению к системе координат, связанной с вектором угловой скорости его вращения. Поэтому решение этой задачи теории упругости мы опустим (она подробно рассматривается, например, в работе [58]). И запишем выражения соответствующих компонент тензора инерции (осевые и центробежные моменты инерции) в системе координат главных осей инерции тела  $C\xi\eta\zeta$ . Они выражаются через моменты (1.70) по формулам:

$$A_r = \omega_{11}^2 A_\omega + \omega_{21}^2 B_\omega + \omega_{31}^2 C_\omega - 2\omega_{11}\omega_{21}F_\omega - 2\omega_{11}\omega_{31}E_\omega - 2\omega_{21}\omega_{31}D_\omega, \quad (1.73)$$

$$B_r = \omega_{12}^2 A_\omega + \omega_{22}^2 B_\omega + \omega_{32}^2 C_\omega - 2\omega_{12}\omega_{22}F_\omega - 2\omega_{12}\omega_{32}E_\omega - 2\omega_{22}\omega_{32}D_\omega,$$

$$C_r = \omega_{13}^2 A_\omega + \omega_{23}^2 B_\omega + \omega_{33}^2 C_\omega - 2\omega_{13}\omega_{23}F_\omega - 2\omega_{13}\omega_{33}E_\omega - 2\omega_{23}\omega_{33}D_\omega,$$

$$F_r = \omega_{11}\omega_{12}(C_\omega - A_\omega) + \omega_{21}\omega_{22}(C_\omega - B_\omega) + (\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{21}\omega_{12})F_\omega + \\ + (\omega_{11}\omega_{32} + \omega_{31}\omega_{12})E_\omega + (\omega_{31}\omega_{22} + \omega_{21}\omega_{32})D_\omega,$$

$$E_r = \omega_{11}\omega_{13}(C_\omega - A_\omega) + \omega_{21}\omega_{23}(C_\omega - B_\omega) + (\omega_{11}\omega_{23} + \omega_{21}\omega_{13})F_\omega + \\ + (\omega_{11}\omega_{33} + \omega_{31}\omega_{13})E_\omega + (\omega_{31}\omega_{23} + \omega_{21}\omega_{33})D_\omega,$$

$$D_r = \omega_{12}\omega_{13}(C_\omega - A_\omega) + \omega_{22}\omega_{23}(C_\omega - B_\omega) + (\omega_{12}\omega_{23} + \omega_{22}\omega_{13})F_\omega + \\ + (\omega_{12}\omega_{33} + \omega_{32}\omega_{13})E_\omega + (\omega_{32}\omega_{23} + \omega_{22}\omega_{33})D_\omega,$$

где  $\omega_{ij}$  - направляющие косинусы осей системы координат  $C\omega_1\omega_2\omega_3$  по отношению к системе координат  $C\xi\eta\zeta$ .

Обозначим через  $g_\omega, l_\omega$  и  $\theta_\omega$  - углы Эйлера (прецессии, собственного вращения и нутации), определяющие ориентацию осей системы координат  $C\omega_1\omega_2\omega_3$  в системе координат  $C\xi\eta\zeta$ , тогда:

$$\begin{aligned}\omega_{11} &= \cos g_\omega \cos l_\omega - \sin g_\omega \cos \theta_\omega \sin l_\omega, \\ \omega_{21} &= \sin g_\omega \cos l_\omega + \cos g_\omega \cos \theta_\omega \sin l_\omega, \\ \omega_{31} &= \sin \theta_\omega \sin l_\omega, \\ \omega_{12} &= -\cos g_\omega \sin l_\omega - \sin g_\omega \cos \theta_\omega \cos l_\omega, \\ \omega_{22} &= -\sin g_\omega \sin l_\omega + \cos g_\omega \cos \theta_\omega \cos l_\omega, \\ \omega_{32} &= \sin \theta_\omega \cos l_\omega, \\ \omega_{13} &= \sin \theta_\omega \sin g_\omega, \\ \omega_{23} &= -\sin \theta_\omega \cos g_\omega, \\ \omega_{33} &= \cos \theta_\omega.\end{aligned}\tag{1.74}$$

С учетом значений (1.70) формулы (1.73) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}A_r &= \nu C(-1 + 3\omega_{31}^2), & B_r &= \nu C(-1 + 3\omega_{32}^2), & C_r &= \nu C(-1 + 3\omega_{33}^2), \\ F_r &= -3\nu C\omega_{31}\omega_{32}, & E_r &= -3\nu C\omega_{31}\omega_{33}, & D_r &= -3\nu C\omega_{32}\omega_{33}.\end{aligned}\tag{1.75}$$

Опуская простые формулы преобразования, приведем окончательные (приближенные выражения) для приращений осевых моментов инерции в связанной с телом системе координат (его осей инерции при недеформированном состоянии). В случае малых значений угла  $\theta$  и малых значений моментов  $D, E, F$  и компонент кинетического момента  $P, Q$  и  $R$  на основе получим упрощенные выражения для приращений значений моментов инерции. В этом варианте, представляющем важный интерес для теории вращения Земли, имеем приближенные соотношения:

$$\theta_\omega \cong \theta, \quad l_\omega \cong l,\tag{1.76}$$

для которых искомые формулы (1.73) можно записать в следующем упрощенном виде [13], [56]:

$$\begin{aligned}
A_r &= \Delta C(-1 + 3 \sin^2 \theta \sin^2 l), & D_r &= -3 \Delta C \sin^2 \theta \sin l \cos l, \\
B_r &= \Delta C(-1 + 3 \sin^2 \theta \cos^2 l), & E_r &= -3 \Delta C \sin \theta \cos \theta \sin l, \\
C_r &= \Delta C(-1 + 3 \cos^2 \theta), & F_r &= -3 \Delta C \sin \theta \cos \theta \cos l.
\end{aligned} \tag{1.77}$$

В данной работе будем рассматривать упрощенный вариант задачи. А именно, в выражениях (1.77) пренебрежем малыми слагаемыми порядка  $\nu \sin^2 \theta$ . Угол  $\theta$  характеризуется малым значением. В этом упрощенном варианте будем иметь:

$$\begin{aligned}
A_r &= -\Delta C, & B_r &= -\Delta C, & C_r &= 2\Delta C, \\
D_r &= 0, & E_r &= -3\Delta C \sin \theta \cos \theta \sin l, & F_r &= -3\Delta C \sin \theta \cos \theta \cos l.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

где приращение полярного момента инерции  $\Delta C$  характеризуется значением (1.72).

**1.7. Чандлеровское невозмущенное движение и его свойства.** Воспользуемся теперь формулами (1.78). Подставим их в уравнения (1.69) и, используя формулы для компонент тензора инерции, обусловленных вращательной деформацией, выделим главные по величине слагаемые в правых частях. Для этого условимся сохранять все члены первого порядка по  $\nu$ , но пренебрежем членами третьего порядка малости относительно малых величин

$$\nu, \quad (A_0 - B_0)/A_0, \quad \theta$$

(в действительности эти члены можно отнести к возмущающим слагаемым более высокого порядка в правых частях уравнений (1.69)).

В результате несложных преобразований уравнения вращательного движения изолированного небесного тела в рассматриваемой постановке задачи можно представить в следующем компактном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin l \cos l \left( \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) (1 - 2\nu), \\
\frac{dl}{dt} &= G \cos \theta \left( \frac{1}{C_0} - \frac{\sin^2 l}{A_0} - \frac{\cos^2 l}{B_0} \right) (1 - 2\nu), \\
\frac{dg}{dt} &= G \left( \frac{\sin^2 l}{A_0} + \frac{\cos^2 l}{B_0} \right) (1 - 2\nu).
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Подчеркнем, что здесь  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  - главные центральные моменты инерции тела в его недеформированном состоянии. Уравнения (1.117) по своему виду полностью совпадают с уравнениями задачи Эйлера-Пуансо, записанными в переменных Андуайе (см., например, [13], [16]) для абсолютно твердого тела с главными центральными моментами инерции

$$A = A_0(1+2\nu), \quad B = B_0(1+2\nu), \quad C = C_0(1+2\nu). \quad (1.80)$$

Заметим, что в деформированном состоянии, т.е. в реальном усредненном вращательном движении, главные центральные моменты инерции

$$A = A_0(1-\nu), \quad B = B_0(1-\nu), \quad C = C_0(1+2\nu). \quad (1.81)$$

А это означает, что приведенные моменты инерции (1.80) отличаются от реальных (1.81) и связаны с ними простыми соотношениями:

$$A = A(1+3\nu), \quad B = B(1+3\nu), \quad C = C. \quad (1.82)$$

В результате приходим к следующему выводу.

Вращательное движение свободного эластичного тела, деформируемого его собственным вращением, с главными моментами инерции  $A, B$  и  $C$  происходит по законам Эйлера-Пуансо для эквивалентного твердого тела, но с измененными главными центральными моментами инерции:  $A = A(1+3\nu)$ ,  $B = B(1+3\nu)$ ,  $C = C$ . Здесь  $\nu = 0.00116k_2 = 0.3364 \cdot 10^{-3}$  - коэффициент упругости, а  $A, B$  и  $C$  - средние значения главных центральных моментов инерции вращающегося тела. Удобно ввести новое обозначение  $\Delta J$ , для которого

$$A = A + \Delta J, \quad B = B + \Delta J, \quad C = C, \quad \text{где } \Delta J = \frac{3}{2} \Delta C_E = \frac{1}{3} k_2 \frac{a_e^5 \omega_0^2}{f}.$$

Таким образом, упругое тело вращается как абсолютно твердое тело, но экваториальные моменты инерции которого увеличены на  $3\nu C_0$ . При этом полярный момент инерции реального и модельного тел совпадают. Для Земли параметр упругости имеет значение  $\nu = 0.00116k_2 = 0.3364 \cdot 10^{-3}$ .

Указанная теорема впервые была доказана в работе [8] на основе гамильтонового формализма при изучении невозмущенного чадлеровско-эйлеровского движения (именно это движение описывается уравнениями (1.79)).

Уравнения вращательного движения деформируемого тела в переменных Андуайе, выведенные авторами [7] (в их терминологии - «в эластичных переменных Андуайе») получили широкое применение в работах авторов при построении теории вращательного движения Земли в большом цикле работ [7], [56], [57], а также [51], [59].

Уравнения (1.79) позволяют дать еще одну интерпретацию вращению слабдеформируемого тела. Это движение представляет собой движение по законам Эйлера-Пуансо тела «замороженного» в его недеформированном состоянии и с «замедленным» временем  $\tau = (1 - 2\nu)t$ .

На основе этого вывода для частот рассматриваемого Чандлеровско-Эйлеровского движения сразу можно записать соотношения:

$$\omega_{CH} = \omega_E (1 - 2\nu), \quad \Omega_{CH} = \Omega_E (1 - 2\nu), \quad (1.83)$$

где  $\omega_E$ ,  $\Omega_E$  - частоты движения по Эйлера-Пуансо твердого тела с главными центральными моментами инерции  $A$ ,  $B$  и  $C$  [26], [22]:

$$\omega = \frac{G}{C} \left( 1 - \frac{A-C}{A} \frac{\Pi(\pi/2, k^2, \lambda)}{\mathbf{K}(\lambda)} \right), \quad \Omega = \frac{G(A-C)}{2AC} \frac{\pi \mathbf{K}(\lambda)}{\sqrt{(1+k^2)(k^2+\lambda^2)} \mathbf{K}(\lambda)}, \quad (1.84)$$

где  $\mathbf{K}(\lambda)$  и  $\Pi(\pi/2, k^2, \lambda)$  - полные эллиптические интегралы первого и третьего сортов. Модуль  $\lambda$  этих интегралов и параметр  $k$  определяются начальными условиями задачи:

$$\lambda^2 = k^2 \frac{A^2 p_0^2}{C^2 r_0^2}, \quad k^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad (1.85)$$

где  $p_0$ ,  $r_0$  ( $q_0 = 0$ ) - начальные значения компонент угловой скорости  $p$ ,  $r$  и ( $q$ ), соответственно. Для принятых в данной работе значений параметров:

$$A = 8.086206 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2, \quad B = 8.086380 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2, \quad C = 8.104309 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$$

$$k = 0.981975 \cdot 10^{-1}, \quad \lambda = 0.120103 \cdot 10^{-6}, \quad (1.86)$$

а значения частот (1.83), (1.84):  $\omega_{CH} = 0.997774 \cdot \omega_0$ ,  $\Omega_{CH} = -2.2263 \cdot 10^{-3} \omega_0$ ,

где  $\omega_0$  - средняя суточная скорость вращения Земли.

Если тело в недеформированном состоянии является осесимметричным, то  $A_0 = B_0$  и уравнения (1.79) упрощаются:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = \Omega = G \cos \theta \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{A_0} \right) (1 - 2\nu), \quad \frac{dg}{dt} = \omega = \frac{G}{A_0} (1 - 2\nu). \quad (1.87)$$

Если угол  $\theta$  - пренебрежимо мал, то скорость вращения тела

$$\omega_0 = \Omega + \omega = \frac{G}{C_0} (1 - 2\nu) = \frac{G}{C}. \quad (1.88)$$

Таким образом, в указанном случае упругие свойства тела не влияют на величину его угловой скорости, но изменяют частоты чандлеровского - эйлеровского движения. Модули обоих частот уменьшаются, но их сумма (1.88) остается неизменной. Отметим некоторые из основных свойств чандлеровско - эйлеровского движения Земли.

1. Проекция траектории конца вектора угловой скорости  $\omega$  на экваториальную плоскость тела  $S_{xy}$  представляет собой эллипс с эксцентриситетом  $e = 0.09584$  и с меньшей полуосью направленной вдоль главной центральной оси инерции Земли, соответствующей меньшему моменту инерции  $A$  (эта ось отстоит к западу от гринвичского меридиана на  $14^\circ 5'$ ).

2. Средняя частота (Чандлеровская частота) движения по указанному эллипсу  $\Omega = -2.308643 \cdot 10^{-3} \omega_0$  ( $\omega_0$  - средняя угловая скорость вращения Земли) определяет прямое движение полюса (т.е. против часовой стрелки, если смотреть с конца полярной оси Земли ( $Cz$ ) с периодом 433.155 сут).

3. Движение полюса по эллипсу происходит с переменной скоростью. Наибольшая скорость достигается в момент прохождения наименьшей из экваториальных осей эллипсоида инерции Земли (соответствующий чандлеровский период составляет 433.079 сут.), а наименьшая скорость достигается в момент прохождения наибольшей из экваториальных осей инерции (соответствующий период Чандлера составляет 433.112 сут.), т.е. вариация периода Чандлера составляет 4.033 сут).

Указанные численные значения характеристик вращения Земли получены для модельных значений основных параметров:  $\kappa^2 = 0.931200 \cdot 10^{-2}$ ,  $\lambda^2 = 1.386506 \cdot 10^{-14}$ .

## Глава 2. Динамические эффекты во вращении Земли, вызванные годовыми и полугодовыми циклическими и медленными вековыми перераспределениями масс планеты.

### 2.1. Исследование динамических эффектов в движении полюса Земли и в вариациях длительности суток, обусловленных годовыми и полугодовыми вариациями перераспределения масс Земли.

В этой главе будем исследовать возмущенное вращательное движение на основе рассмотренного выше невозмущенного чандлеровского движения осесимметричного тела (планеты) с изменяемой геометрией масс. Небесное тело (Земля) рассматривается как изолированное, т.е. гравитационные моменты, обусловленные гравитационным притяжением внешних небесных тел (Луны и Солнца) не учитываются. Т.е. все внимание здесь концентрируется на изучении динамических эффектов во вращательном движении Земли, вызванных изменением ее геометрии масс. Причем данные о подобной изменяемости будем черпать из данных космической геодезии о вариациях гравитационного поля Земли. Также здесь изучается роль вариаций компонент относительного углового момента частиц планеты в земной системе координат. Исследование опирается на уравнения движения в переменных Андуайе (1.38), полученных в предыдущей главе. Они имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial L}, & \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial l}, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial g}, \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial H}, & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial h},\end{aligned}\tag{2.1}$$

где гамильтониан представляет собой сумму невозмущенного гамильтониана  $K_0$  и возмущающего гамильтониана  $K_1$ .

Невозмущенный гамильтониан соответствует свободному вращению осесимметричного тела с двумя равными моментами инерции ( $A_0 = B_0$ ) и посредством упругого коэффициента  $\nu$  учитывает поправки к моментам

инерции из за деформаций тела вызванных собственным вращением. Подробный вывод уравнений движения дан в первой главе. Здесь приведем выражения для указанных составляющих гамильтониана:

$$K_0 = \frac{1}{2}L^2 \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{A_0} \right) (1-2\nu) + \frac{1}{2}G^2 \frac{1}{A_0} (1-2\nu). \quad (2.2)$$

Возмущающий гамильтониан  $K_1$  описывает основные эффекты изменения геометрии масс планеты и вариаций относительного кинетического момента. Эта составляющая гамильтониана (в случае Земли) содержит сомножителем малый параметр  $\mu = 10^{-10}$ . Эффекты второго порядка малости связанные с указанными вариациями и трехосностью эллипсоида инерции Земли отнесены к составляющим гамильтониана второго порядка и здесь не рассматриваются.

С целью более детального исследования решения уравнений Лиувилля в канонических переменных Андуайе (1.42), (1.43) возмущающий Гамильтониан  $K_1$  представим в виде суммы трех слагаемых

$$K_1 = K_1^{(1)} + K_1^{(2)} + K_1^{(3)}, \quad (2.3)$$

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{2IC_0} \left[ \left( \frac{1}{3}G^2 - L^2 \right) \delta J_2 - 2\delta C_{22} (G^2 - L^2) \cos 2l \right], \quad (2.4)$$

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{2IC_0} \left[ 2\delta S_{22} (G^2 - L^2) \sin 2l + 2\delta C_{21} \sqrt{G^2 - L^2} L \sin l + 2\delta S_{21} \sqrt{G^2 - L^2} L \cos l \right], \quad (2.5)$$

$$K_1^{(3)} = -\frac{1}{C_0} \left[ (\delta P \sin l + \delta Q \cos l) \sqrt{G^2 - L^2} + L\delta R \right]. \quad (2.6)$$

Составляющая возмущающего гамильтониана  $K_1^{(1)}$  описывает влияние на невозмущенное (чандлеровское) движение временных вариаций основных коэффициентов геопотенциала  $\delta J_2$  и  $\delta C_{22}$ . Вторая составляющая  $K_1^{(2)}$  играет важную роль для изучения колебаний полюса Земли и описывает влияние вариаций произведений инерции Земли (или вариаций соответствующих коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}$ ,  $\delta S_{21}$  и  $\delta S_{22}$ ). Третья составляющая описывает влияние на вращение планеты временных вариаций проекций относительного кинетического момента планеты  $\delta P$ ,  $\delta Q$  и  $\delta R$ .

Дифференциальные уравнения имеют стандартный вид уравнений, содержащих малый параметр  $\mu$ , для которых применимы аналитические и конструктивные методы аналитических исследований [60] - [62].

Наша задача построить приближенное решение уравнений движения (2.1) – (2.6). Для этого воспользуемся методом малого параметра. В рассматриваемой задаче параметр  $\mu \approx 10^{-10}$  является исключительно малым, поэтому здесь ограничимся построением лишь первого приближения. Для простоты записи формул не будем отдельно выделять малый параметр, а ограничимся рассмотрением формул первого приближения.

При  $\mu = 0$  возмущающий гамильтониан  $K_1$  обращается в нуль, т.е.

$$K = K_0 = \frac{1}{2}L^2 \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{A_0} \right) (1-2\nu) + \frac{1}{2}G^2 \frac{1}{A_0} (1-2\nu) \quad (2.2)$$

и уравнения невозмущенного движения принимают простой вид:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial K_0}{\partial L}, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial K_0}{\partial G}, \quad \frac{dh}{dt} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad \frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{dH}{dt} = 0,$$

Интегрируя уравнения (2.7), (2.2), получаем

$$l = n_l t + l_0, \quad g = n_g t + g_0, \quad L = L_0, \quad (2.8)$$

$$h = h_0, \quad G = G_0, \quad H = H_0. \quad (2.9)$$

Формулы (2.8), (2.9) представляют собой общее решение задачи о невозмущенном движении. Первые интегралы (2.9) характеризуют постоянство вектора  $\mathbf{G}$  полного кинетического момента системы Земля.  $G = G_0$  модуль этого вектора,  $H = H_0$  - постоянная проекция на заданную ось с фиксированным направлением в пространстве,  $h = h_0$  - долгота вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$ .

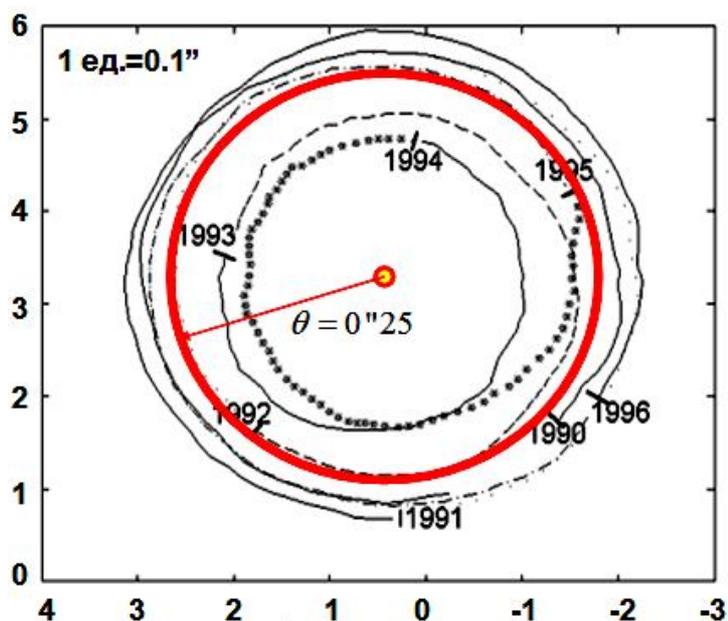


Рис. 2.1. Траектория северного полюса Земли в период 1990 – 1996 в условной международной системе координат. 1 ед.=1" дуги (около 3 м на поверхности Земли) [63]. Схематическое изображение круговой траектории полюса в его невозмущенном движении, принятом в данной работе с заданным углом  $\theta$ .

В разрабатываемой в диссертации теории возмущенного вращения Земли невозмущенное значение угла  $\theta = \theta_0$  имеет произвольное значение. В то время как классическому подходу к изучению возмущенного вращения Земли (в астрометрии и небесной механике) соответствует значение  $\theta_0 = 0$ . В (2.8), (2.9) индекс  $(0)$  означает начальное значение соответствующей переменной Андуйе,  $n_l$  - частота чандлеровского движения полюса.  $n_g$  - частота осевого вращения планеты:

$$n_l = L_0 \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{A_0} \right) (1 - 2\nu), \quad n_g = G \frac{1}{A_0} (1 - 2\nu). \quad (2.10)$$

Решение (2.8) - (2.10) описывает выбранное невозмущенное вращение свободной планеты как осесимметричного тела, но с учетом вращательной деформации (см. п. 1.6, п. 1.7). В случае Земли невозмущенные частоты принимают значения:

$$n_l = -\frac{2\pi}{T_{Ch}} = -5.2982 \text{ 1/год} < 0, \quad \omega_0 = n_l + n_g = 0.230117 \cdot 10^4 \text{ 1/год}. \quad (2.11)$$

Соответственно,  $n_g = \omega_0 - n_l = 2306.47 \text{ 1/год}$ .

Теперь задача сводится к вычислению возмущений первого порядка относительно малого параметра  $\mu$  для трех переменных Андуайе:  $\delta l$ ,  $\delta g$  и  $\delta L$ . В результате подобных вычислений приближенное решение рассматриваемой задачи Лиувилля может быть представлено в виде:

$$l = n_l t + l_0 + \delta l, \quad g = n_g t + g_0 + \delta g, \quad L = L_0 + \delta L. \quad (2.12)$$

Возмущения первого порядка согласно методу малого параметра (они отмечены индексом  $(1)$ ) определяются следующими интегралами:

$$\delta L = -\int \frac{\partial K_1}{\partial l} dt, \quad \delta l = \frac{\partial^2 K_0}{\partial L^2} \delta L + \int \frac{\partial K_1}{\partial L} dt, \quad \delta g = \int \frac{\partial K_1}{\partial G} dt. \quad (2.13)$$

Частные производные гамильтониана (или его составляющих) в подынтегральных выражениях (2.13) вычисляются при невозмущенных значениях переменных. И процедура построения возмущений переменных Андуайе сводится к вычислению интегралов от тригонометрических функций времени. Постоянные интегрирования, которые появятся при вычислении указанных интегралов, определяются по начальным условиям задачи. Ниже подробно рассматривается процедура вычисления интегралов (2.13) для каждой из трех составляющих возмущающего гамильтониана (2.3) – (2.6). С последующим анализом и вычислением амплитуд возмущений во вращении Земли. Теперь нужно предложить модель перераспределения масс Земли, адекватной данным наблюдений космической геодезии и службы вращения Земли.

Одно из преимуществ разрабатываемого подхода состоит в том, что для построения подобных моделей и самих уравнений вращательного движения можно привлечь данные о вариациях коэффициентов второй гармоники геопотенциала, полученные спутниковыми методами, методами космической геодезии. Т.е. минуя трудоемкие процессы построения возбуждающих функций для всех процессов перераспределения масс Земли (атмосферных,

океанических, грунтовых вод, ледников, плит и др.). Спутниковые методы позволяют учесть изменения геометрии масс сразу для всей системы Земля, т.е. суммарные (интегральные) эффекты от перераспределения атмосферных, океанических масс, от перераспределений грунтовых флюидных масс, а также лунно-солнечные приливные деформации мантии и др.).

### 2.1.1. Годовые и полугодовые вариации коэффициентов геопотенциала по современным спутниковым данным.

Были проанализированы современные данные о вариациях гравитационного поля Земли, полученные методом лазерной локации спутников Земли (SLR). Они представляют собой наиболее точные данные спутникового позиционирования на орбите. Так в работе Ченга и др. [48] были исследованы годовые и полугодовые вариации нормированных коэффициентов геопотенциала  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  до шестой гармоники включительно. При этом использовались данные лазерных наблюдений 6 спутников (Lageos-1 and 2, Starlette, Ajisai, Stella, and BEC) за период с января 2000 года по декабрь 2001 года. Были определены амплитуды и начальные фазы для годовой и полугодовой вариаций указанных коэффициентов до шестого порядка. Для нашей работы наибольший интерес представляют вариации коэффициентов геопотенциала лишь второй гармоники, т.к. лишь они фигурируют в уравнения задачи Лиувилля. Для годовых и полугодовых вариаций ненормированных коэффициентов геопотенциала [44]) согласно указанной работе имеем следующие представления:

$$\delta J_2 = \sum_N J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}), \quad (2.14)$$

$$\delta C_{21} = \sum_N C_{21}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}), \quad \delta S_{22} = \sum_N S_{22}^{(N)} \cos(\omega_N t + \beta_{22}^{(N)}),$$

$$\delta C_{22} = \sum_N C_{22}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}), \quad \delta S_{22} = \sum_N S_{22}^{(N)} \cos(\omega_N t + \beta_{22}^{(N)}).$$

Для зонального коэффициента второй гармоники используются обозначения  $J_2 = -C_{20}$ . В (2.14)  $\alpha_2^{(N)}$ ,  $\alpha_{22}^{(N)}$  и  $\beta_{22}^{(N)}$  - начальные фазы указанных годовых и полугодовых вариаций коэффициентов геопотенциала. Начальные фазы

определены для начального момента времени, за который принято 1 января 2000 г.  $\omega_N$  - частоты колебаний, например, соответствующие годовым и полугодовым колебаниям. В частности  $N=1$  соответствует годовому колебанию,  $N=2$  - полугодовому колебанию. Также могут быть рассмотрены и изучены вариации с другими периодами.

В уравнениях движения (2.1) – (2.6) используются вариации ненормированных коэффициентов геопотенциала (2.14). В аналитической форме годовые и полугодовые вариации ненормированных коэффициентов второй гармоники запишутся в виде [48]:

$$\begin{aligned}\delta C_{20} &= 2.77 \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 328.8^{\circ}) + 0.56 \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 54.1^{\circ}), & (2.15) \\ \delta C_{21} &= 0.57 \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 47.0^{\circ}) + 0.41 \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 28.5^{\circ}), \\ \delta S_{21} &= 0.66 \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 32.7^{\circ}) + 0.32 \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 65.3^{\circ}), \\ \delta C_{22} &= 0.25 \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 227.9^{\circ}) + 0.10 \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 326.6^{\circ}), \\ \delta S_{22} &= 0.51 \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 55.3^{\circ}) + 0.14 \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 107.5^{\circ}).\end{aligned}$$

$\lambda_{\oplus} = n_{\oplus} t$  (время отсчитывается в долях года от начала года).

Приведенные данные рассматриваются в качестве основной модели Земли с изменяемой геометрией масс. Здесь значения амплитуд вариаций даются в условных единицах  $10^{-10}$ , фазы в градусах. В аналитическом представлении вариаций (2.14) их амплитуды и фазы имеют значения:

$$\begin{aligned}J_2^{(1)} &= -2.77 \cdot 10^{-10}, \quad J_2^{(2)} = -0.56 \cdot 10^{-10}; & \alpha_2^{(1)} &= 328.8^{\circ}, \quad \alpha_2^{(2)} = 54.1^{\circ}; & (2.16) \\ C_{21}^{(1)} &= 0.57 \cdot 10^{-10}, \quad C_{21}^{(2)} = 0.41 \cdot 10^{-10}; & \alpha_{21}^{(1)} &= 47.0^{\circ}, \quad \alpha_{21}^{(2)} = 28.5^{\circ}; \\ S_{21}^{(1)} &= 0.66 \cdot 10^{-10}, \quad S_{21}^{(2)} = 0.32 \cdot 10^{-10}, & \beta_{21}^{(1)} &= 32.7^{\circ}, \quad \beta_{21}^{(2)} = 65.3^{\circ}; \\ C_{22}^{(1)} &= 0.25 \cdot 10^{-10}, \quad C_{22}^{(2)} = 0.10 \cdot 10^{-10}, & \alpha_{22}^{(1)} &= 227.9^{\circ}, \quad \alpha_{22}^{(2)} = 326.6^{\circ}; \\ S_{22}^{(1)} &= 0.51 \cdot 10^{-10}, \quad S_{22}^{(2)} = 0.14 \cdot 10^{-10}, & \beta_{21}^{(1)} &= 55.3^{\circ}, \quad \beta_{21}^{(2)} = 107.5^{\circ}.\end{aligned}$$

Приведем также результаты работы Мура и др. по изучению вариаций гравитационного поля Земли [24]. Для этой модели изменяемой Земли амплитуды и фазы годовых и полугодовых вариаций коэффициентов второй гармоники геоптенциала (и их среднестатистические погрешности), были

определены на основе данных высокоточных лазерных наблюдений и современных данных космического проекта CHAMP [24]:

$$\begin{aligned}
 \delta C_{20} &= (1.61 \pm 0.05) \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 289.9^{\circ} \pm 1.4^{\circ}) \\
 &\quad + (0.83 \pm 0.05) \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 42.2^{\circ} \pm 2.7^{\circ}), \\
 \delta C_{21} &= (0.39 \pm 0.08) \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 48.3^{\circ} \pm 11.3^{\circ}) \\
 &\quad + (0.43 \pm 0.08) \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 52.7^{\circ} \pm 10.8^{\circ}), \\
 \delta S_{21} &= (0.81 \pm 0.07) \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 29.4^{\circ} \pm 4.4^{\circ}) \\
 &\quad + (0.18 \pm 0.07) \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 76.0^{\circ} \pm 21.4^{\circ}), \\
 \delta C_{22} &= (0.11 \pm 0.04) \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 158.8^{\circ} \pm 18.3^{\circ}) \\
 &\quad + (0.13 \pm 0.05) \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 211.4^{\circ} \pm 20.1^{\circ}), \\
 \delta S_{22} &= (0.34 \pm 0.03) \cdot 10^{-10} \cos(\lambda_{\oplus} + 51.8^{\circ} \pm 6.0^{\circ}) \\
 &\quad + (0.08 \pm 0.05) \cdot 10^{-10} \cos(2\lambda_{\oplus} + 36.7^{\circ} \pm 31.9^{\circ}).
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Приведенные здесь данные означают, что в нашем распоряжении для изучения динамических эффектов во вращении Земли имеются высокоточные данные о вариациях коэффициентов геопотенциала. На стыке космической геодезии и современной геодинамики появляется новый метод (или подход) к изучению движения полюса Земли и ее суточного вращения, вызванных изменениями геометрии масс планеты. Графики указанных вариаций коэффициентов геопотенциала (2.15), (2.16) приведены на рис. 2.2.

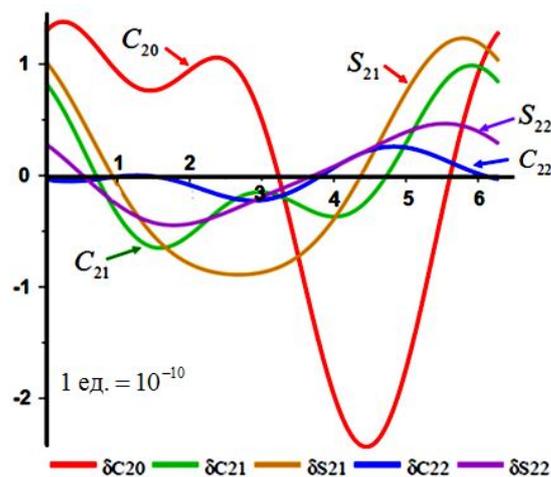


Рис. 2.2. Графики годовой и полугодовой вариаций коэффициентов второй гармоники гравитационного потенциала Земли.

Безразмерные амплитуды изменений коэффициентов даны в единицах  $10^{-10}$ . По оси откладываются радианы (для годового периода 6.28 рад.).

Для компонент углового момента относительного движения частиц планеты также могут быть построены модельные циклические вариации вида:

$$\delta P = \sum_N P_N \cos(\omega_N t + \alpha_N), \quad (2.18)$$

$$\delta Q = \sum_N Q_N \cos(\omega_N t + \beta_N),$$

$$\delta R = \sum_N R_N \cos(\omega_N t + \gamma_N).$$

Коэффициенты приведенных вариаций (2.18)

$$J_2^{(N)}, C_{22}^{(N)}, S_{22}^{(N)}, C_{21}^{(N)}, S_{21}^{(N)}, P_N, Q_N, R_N \quad (2.19)$$

получаются на основе данных наблюдений, например за приливными вариациями коэффициентов. А также могут быть построены на основе определенных динамических моделей перераспределения масс планеты, например, для ее приливных деформаций. В нашей постановке задачи величины (2.18) представляются известными функциями времени. Приведенные аналитические выражения используются ниже при изучении эффектов во вращательном движении планеты, обусловленные изменениями ее геометрии масс. В диссертации анализируются годовые и полугодовые вариации геопотенциала и вращения Земли. Хотя разрабатываемая здесь аналитическая теория применима для анализа влияния на вращение Земли других вариаций ее геометрии масс, усматриваемых в спутниковых наблюдениях.

**2.1.2. Возмущения во вращательном движении вследствие циклических вариаций основных коэффициентов геопотенциала  $J_2$  и  $C_{22}$ .** Рассмотрим теперь первые слагаемые гамильтониана (2.11), (2.14) пропорциональные вариациям основных коэффициентов геопотенциала и преобразуем их к удобному виду:

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{2IC_0} G^2 \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{L^2}{G^2} \right) \delta J_2 - 2\delta C_{22} \left( 1 - \frac{L^2}{G^2} \right) \cos 2l \right], \quad (2.20)$$

где вариации  $\delta J_2$  и  $\delta C_{22}$  определяются формулами (2.14) – (2.17),  $\omega_N$  - частоты годовых и полугодовых циклических вариаций геометрии масс. В первую очередь рассматриваем годовые и полугодовые вариации, для которых  $\omega_1 = 6.2832$  рад/год и  $\omega_2 = 12.5664$  рад/год. Формулы (2.23), (2.25) позволяют представить гамильтониан - первую часть возмущающего гамильтониана  $K_1$  в следующем стандартном виде:

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{2IC_0} \sum_N \left\{ J_2^{(N)} \left( \frac{1}{3} G^2 - L^2 \right) \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) - C_{22}^{(N)} (G^2 - L^2) \left[ \cos(2l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + \cos(2l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right] \right\}. \quad (2.21)$$

Наша задача определить возмущения первого порядка переменных Андуайе  $l, g$  и  $L$ , а также угла  $\theta$  между вектором кинетического момента изменяемой планеты и ее полярной осью  $O\zeta$ , на основе дифференциальных уравнений в канонических переменных Андуайе с Гамильтонианом (2.21). Переменные характеризуются определенными начальными условиями:  $l = l_0$ ,  $g = g_0$  и  $L = L_0$ . Возмущения первого порядка для каждой составляющей гамильтониана (2.4) – (2.6) могут быть вычислены по отдельности.

Для этого вычислим частные производные гамильтониана  $K_1$  при невозмущенных значениях переменных Андуайе (2.12):

$$\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial l} = \frac{G^2}{IC_0} \sin^2 \theta \sum_N C_{22}^{(N)} \left[ \sin(2l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + \sin(2l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right], \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial L} = \frac{G}{IC_0} \cos \theta \sum_N \left\{ -J_N^{(2)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + C_{22}^{(N)} \left[ \cos(2l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + \cos(2l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right] \right\}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial G} = \frac{G}{IC_0} \sum_N \left\{ \frac{1}{3} J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) - C_{22}^{(N)} \left[ \cos(2l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + \cos(2l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right] \right\}. \quad (2.24)$$

Для записи выражений частных производных используется угол  $\theta$  согласно формулам (1.44). Эти частные производные являются известными функциями времени с тригонометрической структурой относительно невозмущенного значения аргумента  $l$  и  $\omega_N t$ .

Получившиеся в результате функции времени (2.22) – (2.24) подставим в выражения квадратур для возмущений первого порядка, аналогичные общим формулам (2.13):

$$\delta L^{(1)} = -\int \frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial l} dt, \quad \delta l = \frac{\partial^2 K_0}{\partial L^2} \int \delta L dt + \int \frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial L} dt, \quad \delta g = \int \frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial G} dt, \quad (2.25)$$

Вторая частная производная невозмущенного гамильтониана в (2.25) имеет значение  $\frac{\partial^2 K_0}{\partial L^2} = \frac{\partial n_l}{\partial L}$ . Наряду с вариацией переменной  $L$  будем рассматривать

также вариацию угла  $\theta$ . Они взаимосвязаны соотношением  $\delta\theta = -\frac{1}{G \sin\theta} \delta L$ ,

поскольку  $\delta L = -G \sin\theta \delta\theta$ . Для аналитического представления возмущений первого порядка будем использовать специальные обозначения для амплитуд.

Так возмущения первого порядка во вращении планеты, обусловленные вариациями основных коэффициентов геопотенциала  $J_2$  и  $C_{22}$  запишутся в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} \delta l^{(1)} &= \sum_N \left[ l_{0,N}^{(1)} \sin(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + l_{2,N}^{(1)} \sin(2l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + l_{2,-N}^{(1)} \sin(2l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right], \\ \delta L^{(1)} &= G \sum_N \left[ L_{2,N}^{(1)} \cos(2l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + L_{2,-N}^{(1)} \cos(2l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right], \\ \delta g^{(1)} &= \sum_N \left[ g_{0,N}^{(1)} \sin(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + g_{2,N}^{(1)} \sin(2l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + g_{2,-N}^{(1)} \sin(2l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Амплитуды приведенных возмущений определяются компактными формулами:

$$\begin{aligned} l_{0,N}^{(1)} &= -\frac{1}{I} \cdot \frac{\omega J_2^{(N)}}{\omega_N} \cos\theta, \quad l_{2,\pm N}^{(1)} = \frac{1}{I} \cdot \frac{\omega C_{22}^{(N)}}{2n_l \pm \omega_N} \cos\theta, \\ L_{2,\pm N}^{(1)} &= \frac{1}{I} \cdot \frac{\omega C_{22}^{(N)}}{2n_l \pm \omega_N} \sin^2\theta, \\ g_{0,N}^{(1)} &= \frac{1}{3I} \cdot \frac{\omega J_2^{(N)}}{\omega_N}, \quad g_{2,\pm N}^{(1)} = -\frac{1}{I} \cdot \frac{\omega C_{22}^{(N)}}{2n_l \pm \omega_N}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Таким образом, возмущения (2.26) содержат тригонометрические члены с характерными периодами

$$T_{0,N} = \frac{2\pi}{\omega_N}, \quad T_{2,\pm N} = \frac{2\pi}{2n_l \pm \omega_N}. \quad (2.28)$$

Полученные формулы содержат невозмущенное значение угла  $\theta = \theta_0$ , определяющее коническое невозмущенное движение вектора кинетического момента в теле планеты. Амплитуды возмущений легко вычисляются по заданным значениям амплитуд вариаций коэффициентов геопотенциала (2.15), (2.17). В формулах для возмущений переменных Андуайе (2.26), (2.27)  $n_l < 0$  - частота невозмущенного движения полюса, связанная с периодом чандлеровского движения  $T_l$  формулой  $n_l = -2\pi / T_l$ . Для угла  $\theta$  примем постоянное значение, рекомендованное и использованное в работе [12]):  $\theta = 0''2523 = 0^{\circ}70083 \cdot 10^{-4}$ . Это означает, что в теле Земли в невозмущенном движении вектор кинетического момента ее вращательного движения (и вектор угловой скорости ее вращения) описывает круговой конус с углом полураствора  $\theta = 0''2523$ . Период одного оборота составляет период Чандлера  $T_{Ch} = 433.165$  сут = 1.1859 год. Угловая скорость суточного вращения Земли составляет  $\omega_0 = 7.292115 \cdot 10^{-5}$  1/с =  $0.230117 \cdot 10^4$  1/год.

Амплитуды возмущений легко вычисляются по заданным значениям амплитуд вариаций коэффициентов геопотенциала (см. п. 2.1.1). В формулах (2.27)  $I = 0.3306784$  - безразмерный полярный момент инерции Земли. При расчетах амплитуд также использовались следующие значения основных параметров задачи.  $\omega_0 = 0.230117 \cdot 10^4$  1/год - угловая скорость суточного вращения Земли (начальное значение). Период осевого вращения Земли (1 звездные сутки)  $T_0 = 1 / 365.26 = 0.00273778$  г.  $n_l = -2\pi / T_{Ch} = -5.2982$  1/год  $< 0$  - угловая скорость чандлеровского невозмущенного движения по конусу. Соответствующие частоты годовых и полугодовых вариаций геометрии масс Земли равны, соответственно:

$$\omega_1 = 2\pi \text{ 1/год} = 2\pi \text{ 1/год} = 6.283185 \text{ 1/год}, \quad \omega_2 = 4\pi \text{ 1/год} = 12.566371 \text{ 1/год}.$$

На основе принятых параметров задачи о вращении Земли были получены амплитуды (и периоды) возмущений переменных Андуйе. Эти значения приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Амплитуды вариаций переменных Андуйе, обусловленные вариациями основных коэффициентов геопотенциала  $J_2$  и  $C_{22}$ .

$n$		Амплитуды $N = 1$	Периоды $N = 1$ (г)	Амплитуды $N = 2$	Периоды $N = 2$ (г)
1	$l_{0,N}^{(1)}$	0''06328	1.0000	0''03164	0.5000
2	$l_{2,N}^{(1)}$	-0''00832	-1.4567	0''00729	3.1896
3	$l_{2,-N}^{(1)}$	-0''00213	-0.3722	-0''00062	-0.2713
4	$g_{0,N}^{(1)}$	-0''02109	1.0000	-0''00109	0.5000
5	$g_{2,N}^{(1)}$	0''00832	-1.4567	-0''00729	3.1896
6	$g_{2,-N}^{(1)}$	0''00213	-0.3722	0''00062	-0.2713

Амплитуды  $l_{2,\pm N}^{(1)}$  вариаций переменной  $L$  имеют малые значения порядка  $1'' \cdot 10^{-10}$  и в таблице 2.1 не приводятся. Переменные  $l, g$  вследствие малости угла  $\theta$  имеют существенно большие амплитуды.

**2.1.3. Возмущения во вращательном движении вследствие вариаций произведений инерции планеты.** Рассмотрим теперь слагаемые возмущающего гамильтониана (2.4) пропорциональные вариациям основных коэффициентов геопотенциала (вариациям произведений инерции), которые по предположению допускают следующие тригонометрические представления:

$$\delta C_{21} = \sum_N C_{21}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}), \quad \delta S_{21} = \sum_N S_{21}^{(N)} \cos(\omega_N t + \beta_{21}^{(N)}), \quad (2.29)$$

$$\delta S_{22} = \sum_N S_{22}^{(N)} \cos(\omega_N t + \beta_{22}^{(N)}),$$

где амплитуды  $S_{22}^{(N)}$ ,  $C_{21}^{(N)}$  и  $S_{21}^{(N)}$  имеют определенные численные значения, а аргументы вариаций (2.329) характеризуются определенными начальными

фазами (см. п. 2.1.1). Таким образом, вторая часть возмущающего гамильтониана

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{JC_0} \left[ \delta S_{22} (G^2 - L^2) \sin 2l + \delta C_{21} L \sqrt{G^2 - L^2} \sin l + \delta S_{21} L \sqrt{G^2 - L^2} \cos l \right] \quad (2.30)$$

может быть представлена в следующем стандартном виде

$$\begin{aligned} K_1^{(2)} = & \frac{1}{2JC_0} \sum_N (G^2 - L^2) S_{22}^{(N)} \left[ \sin(2l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + \sin(2l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \right] + \quad (2.31) \\ & + L \sqrt{G^2 - L^2} C_{21}^{(N)} \left[ \sin(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + \sin(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \right] + \\ & + L \sqrt{G^2 - L^2} S_{21}^{(N)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \right]. \end{aligned}$$

Вычислим теперь частные производные функции (2.31) при невозмущенных значениях переменных (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1^{(2)}}{\partial l} = & \frac{1}{2JC_0} \sum_N \left\{ 2(G^2 - L^2) S_{22}^{(N)} \left[ \cos(2l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + \cos(2l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \right] + \quad (2.32) \right. \\ & + L \sqrt{G^2 - L^2} C_{21}^{(N)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \right] + \\ & \left. - L \sqrt{G^2 - L^2} S_{21}^{(N)} \left[ \sin(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + \sin(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1^{(2)}}{\partial L} = & -\frac{G}{2JC_0} \sum_N \left\{ 2 \cos \theta S_{22}^{(N)} \left[ \sin(2l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + \sin(2l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \right] + \right. \\ & + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} C_{21}^{(N)} \left[ \sin(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + \sin(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \right] + \\ & \left. + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} S_{21}^{(N)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1^{(2)}}{\partial G} = & \frac{G}{2IC_0} \sum_N \left\{ 2 S_{22}^{(N)} \left[ \sin(2l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + \sin(2l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \right] + \right. \\ & + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} C_{21}^{(N)} \left[ \sin(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + \sin(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \right] + \\ & \left. + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} S_{21}^{(N)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

При вычислении частных производных (2.32) использовались значения производных:

$$\begin{aligned} \left( L\sqrt{G^2 - L^2} \right)'_G &= L \frac{2G}{2\sqrt{G^2 - L^2}} = G \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \left( L\sqrt{G^2 - L^2} \right)'_L &= \sqrt{G^2 - L^2} - \frac{2L^2}{2\sqrt{G^2 - L^2}} = -G \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Получившиеся в результате функции времени (2.32) подставим в выражения квадратур для возмущений первого порядка, аналогичные общим формулам (2.13):

$$\delta L^{(2)} = -\int \frac{\partial K_1^{(2)}}{\partial l} dt, \quad \delta l^{(2)} = \frac{\partial^2 K_0}{\partial L^2} \delta L + \int \frac{\partial K_1^{(2)}}{\partial L} dt, \quad \delta g^{(2)} = \int \frac{\partial K_1^{(2)}}{\partial G} dt \quad (2.33)$$

В результате вычисления интегралов в (2.33) для возмущений первого порядка, обусловленных вариациями коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}$ ,  $\delta S_{21}$ ,  $\delta S_{22}$ , и несложных преобразований получаем окончательные следующие формулы для возмущений первого порядка. Для переменной  $L$ :

$$\begin{aligned} \delta L^{(2)} / G &= \sum_N \left\{ L_{1,N}^{(2)} \sin(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + L_{1,-N}^{(2)} \sin(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \right. \\ &\quad + L_{1,N}^{*(2)} \cos(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + L_{1,-N}^{*(2)} \cos(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \\ &\quad \left. + L_{2,N}^{*(2)} \sin(2l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + L_{2,-N}^{*(2)} \sin(2l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{L_{1,\pm N}^{(2)}}{G} &= -\frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega C_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \sin 2\theta, \quad \frac{L_{1,\pm N}^{*(2)}}{G} = -\frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega S_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \sin 2\theta, \\ \frac{L_{2,\pm N}^{*(2)}}{G} &= -\frac{1}{I} \cdot \frac{\omega S_{22}^{(N)}}{2n_l \pm \omega_N} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Для переменной  $l$ :

$$\begin{aligned} \delta l^{(2)} &= \sum_N \left\{ l_{1,N}^{*(2)} \sin(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + l_{1,-N}^{*(2)} \sin(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \right. \\ &\quad \left. + l_{1,N}^{(2)} \cos(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + l_{1,-N}^{(2)} \cos(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$+l_{2,N}^{*(2)} \cos(2l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + l_{2,-N}^{*(2)} \cos(2l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \},$$

где

$$l_{1,\pm N}^{(2)} = \frac{1}{2I} \cdot \frac{\omega C_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \cdot \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}, \quad l_{1,\pm N}^{*(2)} = -\frac{1}{2I} \cdot \frac{\omega S_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \cdot \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}, \quad (2.37)$$

$$l_{2,\pm N}^{*(2)} = \frac{1}{I} \cdot \frac{\omega S_{22}^{(N)}}{2n_l \pm \omega_N} \cos \theta.$$

Для вариаций третьей переменной Андуйе  $g$  получаем аналогичные выражения:

$$\begin{aligned} \delta g^{(2)} = \sum_N \{ & g_{1,N}^{(2)} \cos(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + g_{1,-N}^{(2)} \cos(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \\ & + g_{1,N}^{*(2)} \sin(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + g_{1,-N}^{*(2)} \sin(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \\ & + g_{2,N}^{*(2)} \cos(2l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + g_{2,-N}^{*(2)} \cos(2l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где коэффициенты

$$g_{1,\pm N}^{(2)} = -\frac{1}{2I} \cdot \frac{\omega C_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

$$g_{1,\pm N}^{*(2)} = \frac{1}{2I} \cdot \frac{\omega S_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (2.39)$$

$$g_{2,\pm N}^{*(2)} = -\frac{1}{I} \cdot \frac{\omega S_{22}^{(N)}}{2n_l \pm \omega_N}.$$

Табл. 2.2. Амплитуды вариаций переменных Андуйе, вызванных годовыми и полугодовыми вариациями коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}$ ,  $\delta S_{21}$  и  $\delta S_{22}$ .

$n$		Амплитуды $N = 1$	Периоды $N = 1$	Амплитуды $N = 2$	Периоды $N = 2$
1	$l_{2,N}$	-0''0170	-1.4567	-0''0170	3.1896
2	$l_{2,-N}$	-0''0043	-0.3722	-0''00087	-0.2713
3	$l_{1,N}$	592''6116	6.3792	57''7676	0.8645
4	$l_{1,-N}$	-50''4011	-0.5425	-23''5026	-0.3517
5	$l_{1,N}^*$	-686''1823	6.3792	-45''0869	0.8645
6	$l_{1,-N}^*$	-45''0869	-0.5425	18''3435	-0.3517
7	$L_{1,N}^*$	-29''107·10 <sup>-7</sup>	6.3792	-2''837·10 <sup>-7</sup>	0.8645
8	$L_{1,-N}^*$	2''4755·10 <sup>-7</sup>	-0.5425	1''154·10 <sup>-7</sup>	-0.3517

9	$L_{1,N}$	$-33''027 \cdot 10^{-7}$	6.3792	$-2''215 \cdot 10^{-7}$	0.8645
10	$L_{1,-N}$	$2''866 \cdot 10^{-7}$	-0.5425	$0''910 \cdot 10^{-7}$	-0.3517
11	$g_{2,N}$	0''0170	-1.4567	-0''0102	3.1896
12	$g_{2,-N}$	0''0043	-0.3722	0''00087	-0.2713
13	$g_{1,N}$	-592''6120	6.3792	-57''7676	0.8645
14	$g_{1,-N}$	50''4011	-0.5425	23''5026	-0.3517
15	$g_{1,N}^*$	686''1823	6.3792	45''08688	0.8645
16	$g_{1,-N}^*$	-58''3591	-0.5425	-18''34352	-0.3517

Амплитуды вариаций переменных  $L_{2,N}^*$ ,  $L_{2,-N}^*$  здесь малые и составляют около  $1'' \cdot 10^{-10}$ .

Формулы (2.34) - (2.39) определяют вариации переменных Андуйе, вызванные циклическими изменениями произведений инерции планеты или соответствующих им вариациями коэффициентов геопотенциала (2.29). При малых значениях  $\theta$  решение (2.36) - (2.39) имеет особенность (сингулярность при  $\theta = 0$ ). Однако она может быть устранена при переходе к другим переменным, например, к проекциям вектора угловой скорости тела на его главные оси инерции.

#### 2.1.4. Возмущения во вращательном движении вследствие вариаций кинетического момента относительного движения частиц планеты.

Рассмотрим теперь третью часть возмущающего гамильтониана (2.6), обусловленную циклическими вариациями компонент кинетического момента относительных движений частиц планеты, например, ее атмосферы, океана, других флюидных масс. Для годовых и полугодовых вариаций составляющих относительного кинетического момента (2.18) используем обозначения:

$$\delta P(t) = \sum_N P_N \cos U_N, \quad \delta Q(t) = \sum_N Q_N \cos V_N, \quad \delta R(t) = \sum_N R_N \cos W_N, \quad (2.40)$$

полагая аргументы тригонометрических функций равными:

$$U_N = \omega_N t + \alpha_N, \quad V_N = \omega_N t + \beta_N, \quad W_N = \omega_N t + \gamma_N, \quad (2.40)'$$

где  $\omega_1$  - частота годовой вариации и  $\omega_2$  - полугодовой вариаций компонент полного относительного кинетического момента или его составляющих;  $\alpha_N, \beta_N$  и  $\gamma_N$  - начальные фазы, время  $t$  отсчитывается в долях года от начала года.

Теперь для гамильтониана  $K_1^{(3)}$  получаем новое представление в подходящем для приложений виде

$$K_1^{(3)} = -\frac{1}{2}\omega \left\{ \sin\theta \sum_{\varepsilon} \sum_N [P_N \sin(l + \varepsilon U_N) + Q_N \cos(l + \varepsilon V_N)] + 2 \cos\theta \sum_N R_N \cos W_N \right\} \quad (2.41)$$

или в канонических переменных

$$K_1^{(3)} = -\frac{1}{2C_0} \left\{ \sqrt{G^2 - L^2} \sum_{\varepsilon} \sum_N [P_N \sin(l + \varepsilon U_N) + Q_N \cos(l + \varepsilon V_N)] + 2L \sum_N R_N \cos W_N \right\}. \quad (2.42)$$

Вычислим теперь, как и в предыдущих двух случаях, частные производные гамильтониана  $K_1^{(3)}$  по переменным Андуайе при их невозмущенных значениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1^{(3)}}{\partial G} &= -\frac{1}{2C_0} \cdot \frac{1}{\sin\theta} \sum_N \left\{ P_N [\sin(l + U_N) + \sin(l - U_N)] + Q_N [\cos(l + V_N) + \cos(l - V_N)] \right\}, \\ \frac{\partial K_1^{(3)}}{\partial l} &= -\frac{G}{2C_0} \sin\theta \sum_N \left\{ P_N [\cos(l + U_N) + \cos(l - U_N)] - Q_N [\sin(l + V_N) + \sin(l - V_N)] \right\}, \quad (2.43) \\ \frac{\partial K_1^{(3)}}{\partial L} &= \frac{1}{2C_0} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \left\{ \sum_N P_N [\sin(l + U_N) + \sin(l - U_N)] + Q_N [\cos(l + V_N) + \cos(l - V_N)] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{C_0} \sum_N R_N \cos W_N. \end{aligned}$$

Частные производные (2.43) являются известными функциями времени.

Возмущения переменных  $l, g$  и  $L$  вычисляются по формулам:

$$\delta L^{(3)} = -\int \frac{\partial K_1^{(3)}}{\partial l} dt, \quad \delta l^{(3)} = \frac{\partial^2 K_0}{\partial L^2} \delta L + \int \frac{\partial K_1^{(3)}}{\partial L} dt, \quad \delta g^{(3)} = \int \frac{\partial K_1^{(3)}}{\partial G} dt. \quad (2.44)$$

В результате вычисления квадратур в (2.44) получаем следующие формулы для возмущений переменных Андуайе, вызванных годовыми и полугодовыми вариациями компонент относительного кинетического момента частиц планеты:

$$\delta L^{(3)} / G = \sum_N \left[ L_{1,N}^{(3)} \sin(l + U_N) + L_{1,-N}^{(3)} \sin(l - U_N) + L_{1,N}^{*(3)} \cos(l + V_N) + L_{1,-N}^{*(3)} \cos(l - V_N) \right],$$

$$L_{1,\pm N}^{(3)} = \frac{\omega}{2(n_l \pm \omega_N)} \cdot \frac{P_N}{G} \sin \theta, \quad L_{1,\pm N}^{*(3)} = \frac{\omega}{2(n_l \pm \omega_N)} \cdot \frac{Q_N}{G} \sin \theta, \quad (2.45)$$

$$\delta l^{(3)} = \sum_N \left[ l_{1,N}^{(3)} \cos(l+U_N) + l_{1,-N}^{(3)} \cos(l-U_N) + l_{1,N}^{*(3)} \sin(l+V_N) + l_{1,-N}^{*(3)} \sin(l-V_N) + l_{0,N}^{*(3)} \sin W_N \right],$$

$$l_{1,\pm N}^{(3)} = -\frac{\omega}{2(n_l \pm \omega_N)} \cdot \frac{P_N}{G} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad l_{1,\pm N}^{*(3)} = \frac{\omega}{2(n_l \pm \omega_N)} \cdot \frac{Q_N}{G} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad l_{0,N}^{*(3)} = -\frac{\omega}{\omega_N} \cdot \frac{R_N}{G}. \quad (2.46)$$

$$\delta g^{(3)} = \sum_N \left[ g_{1,N}^{(3)} \cos(l+U_N) + g_{1,-N}^{(3)} \cos(l-U_N) + g_{1,N}^{*(3)} \sin(l+V_N) + g_{1,-N}^{*(3)} \sin(l-V_N) \right],$$

$$g_{1,N}^{(3)} = \frac{\omega}{2(n_l + \omega_N) \sin \theta} \cdot \frac{P_N}{G}, \quad g_{1,-N}^{(3)} = \frac{\omega}{2(n_l - \omega_N) \sin \theta} \cdot \frac{P_N}{G}, \quad (2.47)$$

$$g_{1,N}^{*(3)} = -\frac{\omega}{2(n_l + \omega_N) \sin \theta} \cdot \frac{Q_N}{G}, \quad g_{1,-N}^{*(3)} = -\frac{\omega}{2(n_l - \omega_N) \sin \theta} \cdot \frac{Q_N}{G}.$$

Все коэффициенты возмущений в формулах (2.45) – (2.47) представлены в безразмерном виде и вычисляются в секундах дуги.

При вычислении возмущений переменной  $l$  выше пренебрегаются малые слагаемые  $\frac{\partial^2 K_0}{\partial L^2} \int \delta L dt$ , т.к.  $\frac{\partial^2 K_0}{\partial L^2} = \frac{\omega}{G} N$ ,  $N = \frac{C_0 - A_0}{A_0} (1 - 2\nu)$  и для Земли  $N \approx 10^{-3}$ . Для примера вычислим дополнительные слагаемые вариации  $\delta l^{(3)}$  переменной  $l$ , обусловленной вариациями относительного кинетического момента. Будем иметь следующие дополнительные слагаемые:

$$\delta \tilde{l}^{(3)} = \frac{\partial^2 K_0}{\partial L^2} \int \delta L^{(3)} dt. \quad (2.48)$$

Для возмущений (2.48) нетрудно получить следующие формулы:

$$\delta \tilde{l}^{(3)} = \sum_N \left[ \tilde{l}_{1,N} \cos(l+U_N) + \tilde{l}_{1,-N} \cos(l-U_N) + \tilde{l}_{1,N}^* \sin(l+V_N) + \tilde{l}_{1,-N}^* \sin(l-V_N) \right], \quad (2.49)$$

где

$$\tilde{l}_{1,N} = -\varepsilon \frac{\omega^2}{2(n_l + \omega_N)^2} \cdot \frac{P_N}{G} \sin \theta, \quad \tilde{l}_{1,-N} = -\varepsilon \frac{\omega^2}{2(n_l - \omega_N)^2} \cdot \frac{P_N}{G} \sin \theta, \quad (2.50)$$

$$\tilde{l}_{1,N}^* = \varepsilon \frac{\omega^2}{2(n_l + \omega_N)^2} \cdot \frac{Q_N}{G} \sin \theta, \quad \tilde{l}_{1,-N}^* = \varepsilon \frac{\omega^2}{2(n_l - \omega_N)^2} \cdot \frac{Q_N}{G} \sin \theta.$$

Таким образом, полные формулы для возмущений  $\delta l^{(3)}$  имеют идентичный вид и могут быть представлены в виде:

$$\delta l^{(3)} = \sum_N \left[ \left( l_{1,N}^{(3)} + \tilde{l}_{1,N}^{(3)} \right) \cos(l + U_N) + \left( l_{1,-N}^{(3)} + \tilde{l}_{1,-N}^{(3)} \right) \cos(l - U_N) \right. \\ \left. + \left( l_{1,N}^{*(3)} + \tilde{l}_{1,N}^{*(3)} \right) \sin(l + V_N) + \left( l_{1,-N}^{*(3)} + \tilde{l}_{1,-N}^{*(3)} \right) \sin(l - V_N) + l_{0,N}^{*(3)} \sin W_N \right], \quad (2.51)$$

где

$$l_{1,N}^{(3)} = -\frac{\omega P_N}{2G(n_l + \omega_N)} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad l_{1,-N}^{(3)} = -\frac{\omega P_N}{2G(n_l - \omega_N)} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (2.52)$$

$$l_{1,N}^{*(3)} = \frac{\omega Q_N}{2G(n_l + \omega_N)} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad l_{1,-N}^{*(3)} = \frac{\omega Q_N}{2G(n_l - \omega_N)} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad l_{0,N}^{*(3)} = -\frac{\omega R_N}{\omega_N G}.$$

Коэффициенты (2.50) содержат сомножителями малое динамическое сжатие Земли  $N$  и на первом этапе вычисления этими слагаемыми можно пренебречь.

**2.2. Периодические возмущения компонент угловой скорости.** Теперь решение рассматриваемой задачи нетрудно представить в переменных  $p, q, r$ . Для этого воспользуемся формулами (1.26), (1.27), на основе которых получим выражения вариаций компонент угловой скорости через возмущения переменных Андуайе, вариации моментов инерции планеты и вариациями компонент относительного кинетического момента. Указанные соотношения являются линейными и их можно записать в следующем виде:

$$\delta p = \frac{G}{A} \left( \cos \theta \sin l \delta \theta + \sin \theta \cos l \delta l - \frac{\delta A}{A} \sin \theta \sin l + \frac{\delta D}{B} \sin \theta \cos l + \frac{\delta E}{C} \cos \theta - \frac{\delta P}{G} \right), \quad (2.53)$$

$$\delta q = \frac{G}{B} \left( \cos \theta \cos l \delta \theta - \sin \theta \sin l \delta l - \frac{\delta B}{B} \sin \theta \cos l + \frac{\delta D}{A} \sin \theta \sin l + \frac{\delta F}{C} \cos \theta - \frac{\delta Q}{G} \right),$$

$$\delta r = \frac{G}{C} \left( -\sin \theta \delta \theta - \frac{\delta C}{C} \cos \theta + \frac{\delta E}{A} \sin \theta \sin l + \frac{\delta F}{B} \sin \theta \cos l - \frac{\delta R}{G} \right).$$

Пренебрегая членами второго порядка малости относительно динамических сжатий планеты и вариаций компонент тензора инерции и компонент относительного кинетического момента, получим упрощенную запись соотношений (2.53):

$$\delta p = \omega \left( \cos \theta \sin l \delta \theta + \sin \theta \cos l \delta l - \frac{\delta A}{C_0} \sin \theta \sin l + \frac{\delta D}{C_0} \sin \theta \cos l + \frac{\delta E}{C_0} \cos \theta - \frac{\delta P}{\omega C_0} \right), \quad (2.54)$$

$$\delta q = \omega \left( \cos \theta \cos l \delta \theta - \sin \theta \sin l \delta l - \frac{\delta B}{C_0} \sin \theta \cos l + \frac{\delta D}{C_0} \sin \theta \sin l + \frac{\delta F}{C_0} \cos \theta - \frac{\delta Q}{\omega C_0} \right), \quad (2.55)$$

$$\delta r = \omega \left( -\sin \theta \delta \theta - \frac{\delta C}{C_0} \cos \theta + \frac{\delta E}{C_0} \sin \theta \sin l + \frac{\delta F}{C_0} \sin \theta \cos l - \frac{\delta R}{\omega C_0} \right). \quad (2.56)$$

Вариации моментов инерции для поверхностных процессов перераспределения масс выражаются через вариации коэффициентов геопотенциала формулами (1.55), (1.56), которые позволяют записать вариации компонент угловой скорости (2.54) – (2.56) в виде:

$$\begin{aligned} \delta p &= \omega (\cos \theta \sin l \delta \theta + \sin \theta \cos l \delta l) + & (2.57) \\ &+ \frac{\omega}{I} \left[ \frac{1}{3} (6\delta C_{22} + \delta J_2) \sin \theta \sin l + 2\delta S_{22} \sin \theta \cos l + \delta C_{21} \cos \theta \right] - \frac{\delta P}{C}, \\ \delta q &= \omega (\cos \theta \cos l \delta \theta - \sin \theta \sin l \delta l) + \\ &+ \frac{\omega}{I} \left[ \frac{1}{3} (-6\delta C_{22} + \delta J_2) \sin \theta \cos l + 2\delta S_{22} \sin \theta \sin l + \delta S_{21} \cos \theta \right] - \frac{\delta Q}{C}, \\ \delta r &= \omega (-\sin \theta \delta \theta) \\ &+ \frac{\omega}{I} \left( -\frac{2}{3} \delta J_2 \cos \theta + \delta C_{21} \sin \theta \sin l + \delta S_{21} \sin \theta \cos l \right) - \frac{\delta R}{C}. \end{aligned}$$

Для рассматриваемой задачи Лиувилля возмущения переменных Андуайе определяются выше полученными формулами. Основные возмущения первого порядка для компонент угловой скорости согласно (2.57) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \delta p &= \omega (\cos \theta \sin l \delta \theta + \sin \theta \cos l \delta l), \\ \delta q &= \omega (\cos \theta \cos l \delta \theta - \sin \theta \sin l \delta l), \\ \delta r &= \omega (-\sin \theta \delta \theta). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Подставим поочередно в выражения (2.58) аналитические выражения возмущений первого порядка для переменных  $\theta$  и  $l$ , соответствующие трем группам рассмотренных выше возмущений и определим возмущения проекций угловой скорости для каждого фактора по отдельности:

$$\delta p^{(i)} = \omega (\cos \theta \sin l \delta \theta^{(i)} + \sin \theta \cos l \delta l^{(i)}), \quad (2.59)$$

$$\delta q^{(i)} = \omega (\cos \theta \cos l \delta \theta^{(i)} - \sin \theta \sin l \delta l^{(i)}),$$

$$\delta r^{(i)} = -\omega \sin \theta \delta \theta^{(i)}, \quad \delta \theta^{(i)} = -\delta L^{(i)} / (G \sin \theta), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Кроме этих динамических компонент угловой скорости следует также учесть компоненты в формулах (2.57), которые определяются формулами:

$$\delta p^{(4)} = \frac{\omega}{I} \left[ \frac{1}{3} (6\delta C_{22} + \delta J_2) \sin \theta \sin l + 2\delta S_{22} \sin \theta \cos l + \delta C_{21} \cos \theta \right] - \frac{\delta P}{C}, \quad (2.60)$$

$$\delta q^{(4)} = \frac{\omega}{I} \left[ \frac{1}{3} (-6\delta C_{22} + \delta J_2) \sin \theta \cos l + 2\delta S_{22} \sin \theta \sin l + \delta S_{21} \cos \theta \right] - \frac{\delta Q}{C},$$

$$\delta r^{(4)} = \frac{\omega}{I} \left( -\frac{2}{3} \delta J_2 \cos \theta + \delta C_{21} \sin \theta \sin l + \delta S_{21} \sin \theta \cos l \right) - \frac{\delta R}{C}.$$

Таким образом, полные вариации проекций угловой скорости вращения планеты определяются в виде сумм их вариаций обусловленных всеми рассматриваемым факторами:

$$\delta p = \delta p^{(1)} + \delta p^{(2)} + \delta p^{(3)} + \delta p^{(4)}, \quad (2.61)$$

$$\delta q = \delta q^{(1)} + \delta q^{(2)} + \delta q^{(3)} + \delta q^{(4)},$$

$$\delta r = \delta r^{(1)} + \delta r^{(2)} + \delta r^{(3)} + \delta r^{(4)}.$$

**2.2.1 Колебания полюса, вызванные годовыми и полугодовыми вариациями основных коэффициентов гравитационного потенциала  $\delta J_2$ ,  $\delta C_{22}$ .** В результате несложных преобразований также поочередно получим выражения для соответствующих возмущений компонент угловой скорости. Для возмущений экваториальных компонент угловой скорости, обусловленных вариациями основных коэффициентов геопотенциала, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta p^{(1)}}{\omega} = \sum_N \left[ p_{1,N}^{(1)} \sin(l + \omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + p_{1,-N}^{(1)} \sin(l - \omega_N t - \alpha_2^{(N)}) \right. \\ \left. + P_{1,N}^{(1)} \sin(l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + P_{1,-N}^{(1)} \sin(l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\frac{q^{(1)}}{\omega} = \sum_N \left[ p_{1,N}^{(1)} \sin(l + \omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + p_{1,-N}^{(1)} \sin(l - \omega_N t - \alpha_2^{(N)}) \right]$$

$$-P_{1,N}^{(1)} \sin(l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) - P_{1,-N}^{(1)} \sin(l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)})],$$

где коэффициенты определяются формулами:

$$p_{1,\pm N}^{(1)} = \mp \frac{1}{2I} \cdot \frac{\omega J_N^{(2)}}{\omega_N} \sin \theta \cos \theta, \quad P_{1,\pm N}^{(1)} = \frac{1}{I} \cdot \frac{\omega C_{22}^{(N)}}{2n_l \pm \omega_N} \sin \theta \cos \theta. \quad (2.63)$$

Вариации суточного вращения планеты, вызванные вариациями коэффициента геопотенциала  $C_{22}$ , в зависимости от невозмущенного значения угла  $\theta = \theta_0 = 0''24$  определяются формулой:

$$\frac{\delta r^{(1)}}{\omega} = r_{2,N} \cos(2l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + r_{2,-N} \cos(2l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}), \quad (2.64)$$

$$r_{2,N} = \frac{1}{I} \cdot \frac{\omega C_{22}^{(N)}}{2n_l + \omega_N} \sin^2 \theta, \quad r_{2,-N} = \frac{1}{I} \cdot \frac{\omega C_{22}^{(N)}}{2n_l - \omega_N} \sin^2 \theta. \quad (2.65)$$

Вариации компонент угловой скорости (2.62), (2.63) составляют микросекунды дуги, а амплитуды вариаций угловой скорости (2.65) являются весьма малыми.

Для принятой модели годовых и полугодовых вариаций компонент угловой скорости (2.4) получаем что вариации коэффициентов геопотенциала  $\delta J_2$ ,  $\delta C_{22}$  слабо влияет на ее суточное вращение (амплитуды составляют  $10^{-10}$  секунды дуги).

### 2.2.2 Вариации проекций угловой скорости вследствие вариаций коэффициентов второй гармоники геопотенциала $\delta C_{21}$ , $\delta S_{21}$ и $\delta S_{22}$ .

Аналогичным образом, для возмущений, обусловленных вариациями произведений инерции планеты или ее соответствующих коэффициентов геопотенциала (2.29), получаем формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\delta p^{(2)}}{\omega} = \sum_N & \left[ P_{0,N}^{(2)} \cos(\omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + p_{0,N}^{(2)} \sin(\omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) \right. \\ & + p_{1,N}^{(2)} \cos(l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + p_{1,-N}^{(2)} \cos(l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \\ & + P_{2,N}^{(2)} \cos(2l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + P_{2,-N}^{(2)} \cos(2l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \\ & \left. + p_{2,N}^{(2)} \sin(2l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + p_{2,-N}^{(2)} \sin(2l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \right], \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta q^{(2)}}{\omega} = \sum_N & \left[ Q_{0,N}^{(2)} \sin(\omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + q_{0,N}^{(2)} \cos(\omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) \right. \\ & + q_{1,N}^{(2)} \sin(l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + q_{1,-N}^{(2)} \sin(l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \\ & + Q_{2,N}^{(2)} \sin(2l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + Q_{2,-N}^{(2)} \cos(2l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \\ & \left. + q_{2,N}^{(2)} \cos(2l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + q_{2,-N}^{(2)} \cos(2l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \right], \end{aligned}$$

где коэффициенты определяются формулами:

$$P_{0,N}^{(2)} = Q_{0,N}^{(2)} = -\frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega C_{21}^{(N)}}{n_l + \omega_N} (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad p_{0,N}^{(2)} = q_{0,N}^{(2)} = \frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega S_{21}^{(N)}}{n_l + \omega_N} (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad (2.67)$$

$$p_{1,\pm N}^{(2)} = q_{1,\pm N}^{(2)} = \frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega S_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \sin \theta \cos \theta, \quad P_{2,\pm N}^{(2)} = Q_{2,\pm N}^{(2)} = \frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega C_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \sin^2 \theta,$$

$$p_{2,\pm N}^{(2)} = q_{2,\pm N}^{(2)} = \frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega S_{21}^{(N)}}{n_l \pm \omega_N} \sin^2 \theta.$$

В таблице приведены расчетные значения амплитуд некоторых колебаний полюса Земли, вызванных вариациями трех коэффициентов геопотенциала и определяемых формулами (2.67).

Таблица 2.3. Амплитуды вариаций компонент угловой скорости  $p$  и  $q$ , вызванных годовыми и полугодовыми вариациями коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}$ ,  $\delta S_{21}$  и  $\delta S_{22}$ .

Коэффициенты	Амплитуды $N = 1$	Периоды (г) $N = 1$	Амплитуды $N = 2$	Периоды (г) $N = 2$
$p_{0,N}^{(2)}$	0''04153	1.0000	0''004049	0.5000
$P_{0,N}^{(2)}$	-0''04809	1.0000	-0''003160	0.5000
$p_{1,N}^{(2)} = q_{1,N}^{(2)}$	$1''6851 \cdot 10^{-6}$	6.3792	$0''11073 \cdot 10^{-6}$	0.8645
$p_{1,-N}^{(2)} = q_{1,-N}^{(2)}$	$-0''1433 \cdot 10^{-6}$	-0.5425	$-0''04505 \cdot 10^{-6}$	-0.3517

Приведем также формулы для возмущений осевого вращения планеты:

$$\frac{\delta r^{(2)}}{\omega} = -\sum_N r_{1;N}^{(2)} \cos(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + r_{1;-N}^{(2)} \cos(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
& +R_{1;N}^{(2)} \sin(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + R_{1;-N}^{(2)} \sin(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \\
& +r_{2;-N} \sin(2l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + r_{2;N} \sin(2l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \Big],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{1;N}^{(2)} &= \frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega C_{21}^{(N)}}{n_l + \omega_N} \sin 2\theta, & R_{1;-N}^{(2)} &= \frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega C_{21}^{(N)}}{n_l - \omega_N} \sin 2\theta, \\
r_{1;N}^{(2)} &= \frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega S_{21}^{(N)}}{n_l + \omega_N} \sin 2\theta, & r_{1;-N}^{(2)} &= \frac{1}{4I} \cdot \frac{\omega S_{21}^{(N)}}{n_l - \omega_N} \sin 2\theta, \\
r_{2;N}^{(2)} &= \frac{1}{I} \cdot \frac{\omega S_{22}^{(N)}}{2n_l + \omega_N} \sin^2 \theta, & r_{2;-N}^{(2)} &= \frac{1}{I} \cdot \frac{\omega S_{22}^{(N)}}{2n_l - \omega_N} \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Если пренебречь малым углом  $\theta$ , то для вариаций компонент угловой скорости, обусловленных годовыми и полугодовыми вариациями коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}$ ,  $\delta S_{21}$  и  $\delta S_{22}$  получаем следующие упрощенные формулы:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta p^{(2)}}{\omega} &= \sum_N \left[ P_{0,N}^{(2)} \cos(\omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + p_{0,N}^{(2)} \sin(\omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) \right], \\
\frac{\delta q^{(2)}}{\omega} &= \sum_N \left[ Q_{0,N}^{(2)} \sin(\omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + q_{0,N}^{(2)} \cos(\omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) \right], \\
\frac{\delta r^{(2)}}{\omega} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

### 2.2.3 Вариации проекций угловой скорости планеты вследствие вариаций компонент углового относительного момента $\delta P$ , $\delta Q$ и $\delta R$ .

Эти возмущения обусловлены вариациями компонент кинетического момента частиц тела (2.40) и определяются формулами (2.59) (при  $i=3$ ), в которые следует подставить формулы для вариаций соответствующих переменных Андуйе (2.45) – (2.47).

Опустим несложные аналитические преобразований и приведем окончательные формулы для возмущений компонент угловой скорости:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta p^{(3)}}{\omega} &= P_{0;N}^{(3)} \cos U_N + p_{0;N}^{(3)} \sin V_N + P_{1;N}^{(3)} \sin(l + W_N) - P_{1;-N}^{(3)} \sin(l - W_N) \\
& + P_{2;N}^{(3)} \cos(2l + U_N) + P_{2;-N}^{(3)} \cos(2l - U_N) + p_{2;N}^{(3)} \sin(2l + V_N) + p_{2;-N}^{(3)} \sin(2l - V_N),
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta q^{(3)}}{\omega} = & Q_{0;N}^{(3)} \cos V_N + q_{0;N}^{(3)} \sin U_N + Q_{1;N}^{(3)} \cos(l + W_N) + Q_{1;-N}^{(3)} \cos(l - W_N) \\ & + Q_{2;N}^{(3)} \sin(2l + U_N) + Q_{2;-N}^{(3)} \sin(2l - U_N) + q_{2;N}^{(3)} \cos(2l + V_N) + q_{2;-N}^{(3)} \cos(2l - V_N), \end{aligned} \quad (2.72)$$

где коэффициенты определяются формулами:

$$\begin{aligned} P_{0;N}^{(3)} = & -\frac{\omega n_l}{n_l^2 - \omega_N^2} P_N (1 + \sin \theta) \cos \theta, & p_{0;N}^{(3)} = & -\frac{\omega \omega_N Q_N}{(n_l^2 - \omega_N^2)} (1 + \sin \theta) \cos \theta, \\ P_{2;\pm N}^{(3)} = & \frac{\omega P_N}{2(n_l \pm \omega_N)} (\sin \theta - 1) \cos \theta, & p_{2;\pm N}^{(3)} = & \frac{\omega Q_N}{2(n_l \pm \omega_N)} (1 - \sin \theta) \cos \theta, \\ P_{1;N}^{(3)} = & -\frac{\omega}{\omega_N} R_N \sin \theta, & P_{1;-N}^{(3)} = & \frac{\omega}{\omega_N} R_N \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Коэффициенты  $Q_{n;\pm N}^{(3)}$ ,  $q_{n;\pm N}^{(3)}$  выражаются через коэффициенты (2.73) и определяются формулами идентичными (2.73).

**2.2.4. Определение вариаций компонент угловой скорости четвертой группы:**  $\delta p^{(4)}$ ,  $\delta q^{(4)}$  и  $\delta r^{(4)}$ . Подставим годовые и полугодовые вариации коэффициентов второй гармоники геопотенциала (2.14) и вариации проекций относительного кинетического момента (2.18) в формулы (2.60). После несложных преобразований получаем выражения для возмущений 4 группы (из общего представления (2.61)):

$$\begin{aligned} \frac{\delta p^{(4)}}{\omega} = & \sum_N \left\{ p_{0;N}^{(4)} \cos(\omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + P_{0;N}^{(4)} \cos U_N \right. \\ & + p_{1;N}^{(4)} \left[ \sin(l + \omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + \sin(l - \omega_N t - \alpha_2^{(N)}) \right] \\ & + P_{1;N}^{(4)} \left[ \sin(l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + \sin(l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right] \\ & \left. + Q_{1;N}^{(4)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta q^{(4)}}{\omega} = & \sum_N \left\{ q_{0;N}^{(4)} \cos(\omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + Q_{0;N}^{(4)} \cos V_N \right. \\ & + p_{1;N}^{(4)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \alpha_2^{(N)}) \right] \\ & \left. - P_{1;N}^{(4)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \alpha_{22}^{(N)}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Q_{1,N}^{(4)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \beta_{22}^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \beta_{22}^{(N)}) \right] \Big\}, \\
\delta r^{(4)} = & \sum_N \left\{ r_{0,N}^{(4)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + R_{0,N}^{(4)} \cos(\omega_N t + w_N) \right. \\
& + R_{1,N}^{(4)} \left[ \sin(l + \omega_N t + \alpha_{21}^{(N)}) + \sin(l - \omega_N t - \alpha_{21}^{(N)}) \right] \\
& \left. + r_{1,N}^{(4)} \left[ \cos(l + \omega_N t + \beta_{21}^{(N)}) + \cos(l - \omega_N t - \beta_{21}^{(N)}) \right] \right\},
\end{aligned}$$

где коэффициенты определяются формулами

$$\begin{aligned}
p_{1,N}^{(4)} &= \frac{1}{6I} \sin \theta J_2^{(N)}, & r_{1,N}^{(4)} &= \frac{1}{2I} \sin \theta S_{21}^{(N)}, & (2.75) \\
P_{1,N}^{(4)} &= \frac{1}{I} \sin \theta C_{22}^{(N)}, & Q_{1,N}^{(4)} &= \frac{1}{I} \sin \theta S_{2,2}^{(N)}, & R_{1,N}^{(4)} &= \frac{1}{2I} \sin \theta C_{21}^{(N)}, \\
p_{0,N}^{(4)} &= \frac{1}{I} \cos \theta C_{21}^{(N)}, & q_{0,N}^{(4)} &= \frac{1}{I} \cos \theta C_{21}^{(N)}, & r_{0,N}^{(4)} &= -\frac{2}{3I} \cos \theta J_2^{(N)}, \\
P_{0,N}^{(4)} &= -\frac{P_N}{G}, & Q_{0,N}^{(4)} &= -\frac{Q_N}{G}, & R_{0,N}^{(4)} &= -\frac{R_N}{G}.
\end{aligned}$$

Формулы (2.74), (2.75) описывают кинематические составляющие проекций угловой скорости вызванные вариациями коэффициентов второй гармоники геопотенциала и вариациями составляющих относительного кинетического момента.

Таким образом, задача о возмущенном вращательном движении с изменяемой геометрией масс и переменным относительным кинетическим моментом в первом приближении решена в переменных Андуайе и в проекциях угловой скорости вращения планеты. Аналитическое решение позволяет выполнить приложения для изучения динамических эффектов от указанных факторов для различных тел солнечной системы, включая Землю.

### **2.3. Основные динамические эффекты во вращении Земли, вызванные годовыми и полугодовыми вариациями коэффициентов ее геопотенциала.**

Построенное аналитическое решение задачи о вращении изменяемой Земли (с годовым и полугодовым периодами) и имеющиеся эмпирические

данные о годовых вариациях коэффициентов геопотенциала позволили оценить основные и тонкие эффекты в движении полюса Земли и в ее осевом вращении. Явление годового колебания полюса оси вращения Земли вызвано годовыми вариациями компонент тензора инерции Земли.

**2.3.1. Годовые и полугодовые колебания полюса Земли, вызванные вариациями коэффициентов геопотенциала.** В нашем распоряжении имеется ряд определений годовых вариаций коэффициентов геопотенциала  $C_{21}$  и  $S_{21}$  (их ненормированных значений) (см. Табл. 2.4). Они были получены на основе различных методов исследования вращения Земли, спутниковых исследований и др.

Таблица 2.4. Годовые и полугодовые вариации ненормированных коэффициентов геопотенциала  $C_{21}$  и  $S_{21}$  по работе Мура и др. [24]). Амплитуды вариаций даются в условных единицах  $1 \text{ ед.} = 10^{-10}$ .

Метод, авторы	Годовая вариация	Полугодовая вариация
$\delta C_{21}$ (EOP,Chen)	$0.81 \cos(\omega t + 30^\circ)$	$0.16 \cos(2\omega t + 36^\circ)$
$\delta C_{21}$ (GRACE)	$0.70 \cos(\omega t - 39^\circ)$	$0.16 \cos(2\omega t + 15^\circ)$
$\delta C_{21}$ (SLR)	$0.59 \cos(\omega t + 32^\circ)$	$0.41 \cos(2\omega t + 35^\circ)$
$\delta S_{21}$ (EOP,Chen)	$0.92 \cos(\omega t + 24^\circ)$	$0.27 \cos(2\omega t + 162^\circ)$
$\delta S_{21}$ (GRACE)	$0.66 \cos(\omega t + 14^\circ)$	$0.58 \cos(2\omega t + 126^\circ)$
$\delta S_{21}$ (SLR)	$1.06 \cos(\omega t + 28^\circ)$	$0.17 \cos(2\omega t + 58^\circ)$

Дополнительно к таблице 2.4 приведем еще модельные значения годовых вариаций коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}(PM)$ ,  $\delta S_{21}(PM)$ , построенные в работе [64] на основе точечной модели направленного перераспределения масс Земли:

$$\delta J_2 = -2.90 \cdot 10^{-10} \cos V, \quad \delta C_{21} = -0.28 \cdot 10^{-10} \cos V, \quad \delta S_{21} = 1.09 \cdot 10^{-10} \cos V. \quad (23.78)$$

В указанной работе модель направленного годового перераспределения масс Земли в виде материальной точки на ее поверхности с гармонически изменяющейся массой использовалась для динамической интерпретации и объяснения наблюдаемого годового колебания полюса Земли и вариации коэффициента второй зональной гармоники  $J_2$ . Точка моделирует процесс годового перераспределения атмосферных, океанических и иных флюидных масс и располагается при полюсе Р геоцентрической оси ОР с координатами  $70.0^\circ$  с.ш.,  $104.3^\circ$  в.д. [64]. Масса точки изменяется гармонически по закону  $2.10 \cos V \cdot 10^{15}$  кг, где аргумент  $V = \omega \cdot t + b$  измеряется в градусах, время  $t$  отсчитывается в годах (от начала года). Фаза  $b = 10^0$ . При выборе модели были учтены особенности траектории полюса вектора момента нагрузки, для которой наблюдается своеобразное явление стояния вблизи полюсов оси ОР. Эта модель, как и аналогичная модель векового перераспределения масс Земли из южного полушария в северное [65], получила подтверждения в последующих исследованиях.

Задача определения годовой траектории полюса оси вращения из наблюдений считалась одной из основных задач астрометрии в течении всего двадцатого века и не утратила своей актуальности сегодня. Результаты большинства работ по этой проблеме суммированы в работах известных ученых (Манк Макдональд, [2]; Яцкив и др., [66]; Lambeck, [9]). В таблице 2.5 приведены значения амплитуд (в секундах дуги) и фаз (в градусах) для годовых вариаций компонент угловой скорости Земли, полученные различными авторами путем гармонического анализа наиболее длинных рядов координат полюса (строки с номерами 1 - 8). Эти значения взяты из монографии Н.С. Сидоренкова [63], в которой также отмечены важные особенности используемых рядов наблюдений и выбора системы координат для определения положения полюса Земли. В таблице 2.5 приведены данные об амплитудах годовых возмущений в угловых координатах полюса по данным астрометрических наблюдений (строки 1 - 8), о перераспределении воздушных

масс (строки 9, 10) и по геодинамической модели направленного годового циклического перераспределения масс Земли (строка 11) [64].

Таблица 2.5. Годовые вариации угловых координат полюса вектора угловой скорости вращения Земли в Гринвичской системе координат, определенные астрометрическими методами и полученные на основе одноточечной модели годового перераспределения масс Земли.

N	Авторы	Методы	$\delta p / \omega$	$\delta q / \omega$
1	Уокер и Янг	Наблюдения 1899-1954	$0''0955 \cos(\Theta - 228^\circ)$	$0''0837 \cos(\Theta - 326^\circ)$
2	Джеффрис	Наблюдения 1899-1967	$0''0906 \cos(\Theta - 238^\circ)$	$0''0751 \cos(\Theta - 338^\circ)$
3	Рыхлова (ряд 1)	Наблюдения 1891-1960	$0''0881 \cos(\Theta - 250^\circ)$	$0''0668 \cos(\Theta - 338^\circ)$
4	Рыхлова (ряд 2)	Наблюдения 1846-1915	$0''0778 \cos(\Theta - 213^\circ)$	$0''0693 \cos(\Theta - 332^\circ)$
5	Гапошкин	Наблюдения 1891-1970	$0''0901 \cos(\Theta - 242^\circ)$	$0''0668 \cos(\Theta - 330^\circ)$
6	Корсунь (ряд 1)	Наблюдения 1846-1889	$0''1036 \cos(\Theta - 197^\circ)$	$0''0664 \cos(\Theta - 310^\circ)$
7	Майор	Наблюдения 1890-1956	$0''0910 \cos(\Theta - 240^\circ)$	$0''0670 \cos(\Theta - 330^\circ)$
8	Яцкив (ряд 3)	Наблюдения 1957-1971	$0''0939 \cos(\Theta - 250^\circ)$	$0''0848 \cos(\Theta - 333^\circ)$
9	Манк и Макдональд	Атмосфера	$0''0889 \cos(\Theta - 281^\circ)$	$0''0730 \cos(\Theta - 13^\circ)$
10	Сидоренков	Атмосфера	$0''1040 \cos(\Theta - 280^\circ)$	$0''0879 \cos(\Theta - 14^\circ)$
11	Данная работа	Модель	$0''0910 \cos(\Theta - 255^\circ)$	$0''0912 \cos(\Theta - 346^\circ)$

Полученные различными методами годовые вариации координат полюса оси вращения Земли хорошо согласуются друг с другом (табл. 2.5). Данные об эмпирических вариациях компонент угловой скорости Земли взяты из книги Н.С. Сидоренкова [63]. Эти результаты известных авторов были получены в

основном астрометрическими методами в ходе длительной истории исследования движения полюса Земли. Они хорошо согласуются между собой. Наше решение, полученное на основе нового подхода к исследованию задачи Лиувилля и данных космической геодезии о годовых вариациях коэффициентов геопотенциала  $\delta C_{21}$  и  $\delta S_{21}$ , также хорошо вписывается в общий ряд.

### 2.3.2. Годовые и полугодовые вариации длительности суток: наблюдения и теория.

Вариация длительности суток  $\delta D$  есть отклонение длительности суточного вращения Земли от ее номинального (стандартного) значения  $D_0 = 2\pi / \omega_0 = 86400$  с. Эта вариация связана с вариацией угловой скорости осевого вращения планеты простой формулой

$$\delta D = -D_0 \frac{\delta r}{\omega_0}. \quad (2.79)$$

$D_0$  - длительность стандартных суток относимости.

Годовая и полугодовая относительные вариации угловой скорости вращения Земли, обусловленные вариациями геометрии масс планеты и ее относительного кинетического момента, определяются формулами:

$$\frac{\delta r}{\omega_0} = -\frac{2}{3I} \cos \theta \sum_N J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) = -2.0161 \sum_N J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}), \quad (2.80)$$

и согласно спутниковой модели (2.15), (2.16) для рассматриваемых вариаций имеем представление

$$\frac{\delta r}{\omega_0} = -5.59 \cdot 10^{-10} \sin(2\pi t - 121.2^\circ) - 1.13 \cdot 10^{-10} \sin(4\pi t - 35.9^\circ). \quad (2.81)$$

Соответствующие вариации длительности суток в микросекундах времени вычисляются по формулам (2.79), (2.81) и равны

$$\delta D = 48.25 \sin(\omega_{an} t - 121.2^\circ) + 9.76 \sin(\omega_{an/2} t - 35.9^\circ) \text{ мкс.} \quad (2.82)$$

Полученная годовая вариация длительности суток (2.82) вызванная годовой вариацией геометрии масс Земли хорошо согласуется с ее современными определениями [67]:

$$\delta D_{obs} = (64.7 \pm 1.7) \sin(\omega_{an} t - 102.0^0 \pm 1.4^0). \quad (2.83)$$

По данным астрометрических наблюдений в среднем за период 1962 - 2000 гг сезонные колебания всей неравномерности вращения Земли можно представить формулами [63]:

$$\frac{\delta r}{\omega_0} = (42.2 \pm 2.2) \cdot 10^{-10} \sin(2\pi t - 151^0 \pm 2^0) + (39.4 \pm 2.2) \cdot 10^{-10} \sin(4\pi t - 9^0 \pm 4^0), \quad (2.84)$$

$$\delta D = -(364.6 \pm 19.0) \cdot 10^{-10} \sin(2\pi t - 151^0 \pm 2^0) - (340.4 \pm 19.0) \sin(4\pi t - 9^0 \pm 4^0) \text{ мкс.}$$

Амплитуды даны в микросекундах времени. Время отсчитывается в долях года от начала года. Таким образом, около 13.2% наблюдаемых вариаций угловой скорости приходится на вариации геометрии масс, а основная часть приходится на вариации относительного кинетического момента.

Эти вариации вносят существенный вклад в вариации длительности суток, полученные на основе наблюдений [67]:

$$\delta D_{obs} = (64.7 \pm 1.7) \sin(\omega_{an} t - 102.0^0 \pm 1.4^0) + (27.8 \pm 1.7) \sin(\omega_{an/2} t - 104.3^0 \pm 3.3^0) \text{ мкс.}$$

Для полной интерпретации данных наблюдений следует изучить роль вариаций осевой составляющей относительного кинетического момента. Общепринято считать, что основной вклад в годовые и полугодовые вариации осевого вращения Земли вносят вариации углового момента атмосферы [41].

#### **2.4. Вековые эффекты во вращении Земли, вызванные вековой перестройкой геометрии масс планеты.**

Мы рассматривали циклические вариации коэффициентов второй гармоники геопотенциала

$$\delta J_2 = \sum_N J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}), \quad (2.76)$$

$$\delta C_{21} = \sum_N C_{2,1}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{2,1}^{(N)}), \quad \delta S_{21} = \sum_N S_{2,1}^{(N)} \cos(\omega_N t + \beta_{2,1}^{(N)}),$$

$$\delta C_{22} = \sum_N C_{2,2}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{2,2}^{(N)}), \quad \delta S_{22} = \sum_N S_{2,2}^{(N)} \cos(\omega_N t + \beta_{2,2}^{(N)}),$$

а именно, годовые вариации и полугодовые полученные из наблюдений.

Хорошо известны из данных наблюдений также важные вековые изменения во вращательном движении Земли, которые изучаются астрометрическими методами уже около 100 лет. Это явление векового дрейфа среднего полюса оси вращения Земли вдоль меридиана  $75^\circ$  з.д. со скоростью около  $0''003$  в год. Иллюстрация этого явления дается на рис. 23.3.

Для изучения указанных эффектов во вращении Земли здесь мы рассматриваем медленные вековые изменения геометрии масс планеты, которые в определенном приближении описываются вековыми вариациями коэффициентов геопотенциала:

$$\delta J_2 = \dot{J}_2 \cdot t, \quad (2.77)$$

$$\delta C_{21} = \dot{C}_{21} \cdot t, \quad \delta S_{22} = \dot{S}_{21} \cdot t,$$

$$\delta C_{22} = \dot{C}_{22} \cdot t, \quad \delta S_{22} = \dot{S}_{22} \cdot t.$$

Здесь  $t$  - время,  $\dot{J}_2$ ,  $\dot{C}_{21}$ ,  $\dot{S}_{21}$ ,  $\dot{C}_{22}$  и  $\dot{S}_{22}$  - постоянные скорости вековых вариаций коэффициентов. Эти скорости получены методами космической геодезии на основе данных спутниковых наблюдений за последние примерно 30 лет [46]).

Предположим также, что компоненты относительного кинетического момента частиц планеты также меняются вековым образом:

$$\delta P = \dot{P} \cdot t, \quad \delta Q = \dot{Q} \cdot t, \quad \delta R = \dot{R} \cdot t \quad (23.78)$$

с постоянными скоростями  $\dot{P}$ ,  $\dot{Q}$  и  $\dot{R}$ . Данные об этих параметрах могут быть получены в результате планетарного анализа процессов перераспределения воздушных масс, океанических масс и грунтовых вод и др.

В этом случае задача сводится к интегрированию канонических уравнений задачи Лиувилля (2.1) – (2.6), возмущающий гамильтониан которых вновь может быть представлен суммой трех возмущающих функций:

$$K_1 = K_1^{(1)} + K_1^{(2)} + K_1^{(3)}, \quad (2.79)$$

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{2IC_0} \left[ \left( \frac{1}{3} G^2 - L^2 \right) \dot{J}_2 - 2\dot{C}_{22} (G^2 - L^2) \cos 2l \right] \cdot t, \quad (2.80)$$

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{2IC_0} \left[ 2\dot{S}_{22} (G^2 - L^2) \sin 2l + 2\dot{C}_{21} \sqrt{G^2 - L^2} L \sin l + 2\dot{S}_{21} \sqrt{G^2 - L^2} L \cos l \right] \cdot t, \quad (2.81)$$

$$K_1^{(3)} = -\frac{1}{C_0} \left[ (\dot{P} \sin l + \dot{Q} \cos l) \sqrt{G^2 - L^2} + L\dot{R} \right] \cdot t. \quad (2.82)$$

Здесь составляющая возмущающего гамильтониана  $K_1^{(1)}$  описывает влияние на невозмущенное (чандлеровское) движение вековых вариаций основных коэффициентов геопотенциала  $J_2$  и  $C_{22}$ . Вторая составляющая  $K_1^{(2)}$  описывает влияние вековых вариаций соответствующих коэффициентов геопотенциала  $C_{21}$ ,  $S_{21}$  и  $S_{22}$ . Третья составляющая описывает влияние на вращение планеты вековых вариаций проекций относительного кинетического момента планеты  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Все составляющие возмущающего гамильтониана содержат время. Поэтому задача сводится к вычислению вековых возмущений и возмущений смешанного типа  $(t \sin t, t \cos t)$  для переменных Андуайе  $L, l$  и  $g$  и для проекций ее угловой скорости. При этом все аналитические построения осуществляются по той же схеме, которая была использована выше при анализе годовых и полугодовых вариаций вращения планеты. Вычисление указанных возмущений (в переменных Андуайе) сводится к вычислению интегралов в формулах (2.25), (2.33) и (2.44), но уже для других составляющих возмущающего гамильтониана, а именно, (2.80), (2.81) и (2.82). Затем вычисляются вековые возмущения проекций угловой скорости вращения планеты в проекциях на ее главные оси инерции для каждого из трех указанных возмущающих факторов. Затем вычисляются четвертые составляющие вековых возмущений, по формулам, вытекающим из общих соотношений (2.60):

$$\frac{\delta p^{(4)}}{\omega} = \frac{1}{I} \left[ \frac{1}{3} (6\dot{C}_{22} + \dot{J}_2) \sin \theta \sin l + 2\dot{S}_{22} \sin \theta \cos l + \dot{C}_{21} \cos \theta \right] t - \frac{\dot{P}}{G} t, \quad (2.83)$$

$$\frac{\delta q^{(4)}}{\omega} = \frac{\omega}{I} \left[ \frac{1}{3} (-6\dot{C}_{22} + \dot{J}_2) \sin \theta \cos l + 2\dot{S}_{22} \sin \theta \sin l + \dot{S}_{21} \cos \theta \right] t - \frac{\dot{Q}}{G} t,$$

$$\frac{\delta r^{(4)}}{\omega} = \frac{\omega}{I} \left( -\frac{2}{3} \dot{J}_2 \cos \theta + \dot{C}_{21} \sin \theta \sin l + \dot{S}_{21} \sin \theta \cos l \right) t - \frac{\dot{R}}{G}.$$

В данном разделе наша основная задача: получить формулы для вековых вариаций проекций угловой скорости вращения планеты, обусловленных вековыми вариациями коэффициентов геопотенциала и применить их для

оценок параметров векового дрейфа полюса Земли и векового непривливающего ускорения вращения Земли.

**2.4.1 Интерпретация векового тренда полюса вектора угловой скорости Земли.** Здесь мы опускаем подробный вывод формул для вековых и смешанных возмущений вращения планеты, а приведем лишь окончательные формулы для скоростей вековых изменений компонент угловой скорости:

$$\frac{\dot{p}}{\omega} = \frac{1}{2} \left( 2 \cos^2 \theta \frac{\dot{C}_{21}}{I} - \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\dot{P}}{G} \right) + \cos \theta \frac{\dot{C}_{21}}{I} - \frac{\dot{P}}{G}, \quad (23.84)$$

$$\frac{\dot{q}}{\omega} = \frac{1}{2} \left( 2 \cos^2 \theta \frac{\dot{S}_{21}}{I} - \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\dot{Q}}{G} \right) + \cos \theta \frac{\dot{S}_{21}}{I} - \frac{\dot{Q}}{C}, \quad (23.85)$$

$$\frac{\dot{r}}{\omega} = -\frac{\dot{R}}{G} - \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{I} \cos \theta. \quad (23.86)$$

Здесь  $C = C_0$  - полярный осевой момент инерции планеты в ее недеформированном состоянии.  $G = C\omega_0$ . Предполагается, что эллипсоид инерции близок к сфере. Вековые изменения компонент угловой скорости полюса планеты обусловлены медленным (вековым) перераспределением масс планеты и вековым изменением компонент ее относительного кинетического момента. Полученные формулы обобщают классические формулы, которым соответствует нулевое значение угла  $\theta_0 = 0$ . В формулах (2.84) – (2.86) этот угол конуса невозмущенного движения вектора кинетического момента  $\theta_0$  является произвольным (для различных небесных тел). В формулах (2.84) – (2.86) учтены эффекты от всех возмущающих факторов. Основной вклад дают составляющая часть возмущающего гамильтониана  $K_1^{(2)}$  и слагаемые в формулах (2.83).

Если пренебречь малым углом  $\theta = \theta_0 = 0''24$ , то формулы (2.84) – (2.86) можно записать в упрощенном виде:

$$\frac{\dot{p}}{\omega} = \left( 1 + \frac{\omega}{n_l} \right) \left( \frac{\dot{C}_{21}}{I} - \frac{\dot{P}}{\omega C_0} \right), \quad \frac{\dot{q}}{\omega} = \left( 1 + \frac{\omega}{n_l} \right) \left( \frac{\dot{S}_{21}}{I} - \frac{\dot{Q}}{\omega C_0} \right), \quad (2.87)$$

где  $I = C_0 / mr_{\oplus}^2$  - безразмерный момент инерции Земли.  $G = \omega C_0$  - невозмущенное значение модуля кинетического момента планеты.  $n_l < 0$  - частота Чандлера. Формулы (23.87) совпадают с ранее полученными формулами (22.94). Пренебрегая относительным кинетическим моментом частиц планеты, из (23.87) получаем:

$$\frac{\dot{p}}{\omega} = \left(1 + \frac{\omega}{n_l}\right) \frac{\dot{C}_{21}}{I}, \quad \frac{\dot{q}}{\omega} = \left(1 + \frac{\omega}{n_l}\right) \frac{\dot{S}_{21}}{I}, \quad (2.88)$$

Полученные здесь формулы можно использовать при изучении и объяснении наблюдаемых вековых эффектов во вращении Земли, Марса других небесных тел. Здесь мы получим оценки скоростей векового дрейфа полюса Земли на основе известных спутниковых данных о вековых вариациях коэффициентов геопотенциала  $\dot{C}_{21}$  и  $\dot{S}_{21}$ .

С учетом знака частоты Чандлера ( $n_l < 0$ ), принимая период Чандлера  $T_{CH} > 0$ , формулы (2.84) запишем так:

$$\frac{\dot{p}}{\omega} = \left(1 - \frac{T_{CH}}{T}\right) \frac{\dot{C}_{21}}{I}, \quad \frac{\dot{q}}{\omega} = \left(1 - \frac{T_{CH}}{T}\right) \frac{\dot{S}_{21}}{I}, \quad (2.89)$$

где  $T$  - период суточного вращения планеты. Напомним, что здесь

$$\dot{C}_{21} = \dot{E} / m_{\oplus} r_{\oplus}^2, \quad \dot{S}_{21} = \dot{D} / m_{\oplus} r_{\oplus}^2.$$

Примем модельные значения вековых вариаций коэффициентов геопотенциала из недавней работы Вен Шеня и др. [68]:

**1 модель.**  $\dot{C}_{21} = (-0.83 \pm 0.06) \cdot 10^{-11}$  1/год,  $\dot{S}_{21} = (1.57 \pm 0.07) \cdot 10^{-11}$  1/год [68].

Составляющие скорости дрейфа в гринвичской системе координат будут равны:

$$\frac{\dot{p}}{\omega} = \left(1 - \frac{T_{CH}}{T}\right) \frac{\dot{C}_{21}}{I} = (1.0843 \pm 0.0783) \cdot 10^{-6} \text{ 1/век} = 0.224'' \pm 0.016'',$$

$$\frac{\dot{q}}{\omega} = \left(1 - \frac{T_{CH}}{T}\right) \frac{\dot{S}_{21}}{I} = (-2.0511 \pm 0.0915) \cdot 10^{-6} \text{ 1/век} = -0.423'' \pm 0.019'',$$

Дрейф полюса происходит вдоль меридиана  $\lambda_{\omega} = 62.14^{\circ}$  з.д. с угловой скоростью

$$V_{\omega} = 2.3201 \cdot 10^{-6} \text{ 1/век} = 0.4786''.$$

**2 модель.**  $\dot{C}_{21} = -0.671 \cdot 10^{-11}$  1/год,  $\dot{S}_{21} = 1.084 \cdot 10^{-11}$  1/год [69]. Составляющие скорости дрейфа в гринвичской системе координат:

$$\frac{\dot{p}}{\omega} = \left(1 - \frac{T_{CH}}{T}\right) \frac{\dot{C}_{21}}{I} = 0.877 \cdot 10^{-6} \text{ 1/век} = 0.181'' \text{ 1/век},$$

$$\frac{\dot{q}}{\omega} = \left(1 - \frac{T_{CH}}{T}\right) \frac{\dot{S}_{21}}{I} = -1.416 \cdot 10^{-6} \text{ 1/век} = -0.292'' \text{ 1/век}.$$

Дрейф полюса происходит вдоль меридиана  $\lambda_{\omega} = 58.2^{\circ}$  з.д. со скоростью  $V_{\omega} = 1.67 \cdot 10^{-6}$  1/век = 0.345''/век. Найденные параметры векового дрейфа полюса хорошо согласуются с их значениями, полученными из наблюдений [70]: меридиан дрейфа  $75.70^{\circ}$  з.д. и скорость 0.329 ''/век.

$$\dot{p} / \omega = 0.3945 \cdot 10^{-6} \text{ 1/век} = 0.081'' \text{ 1/век}, \quad \dot{q} / \omega = -1.5475 \cdot 10^{-6} \text{ 1/век} = -0.319'' \text{ 1/век},$$

$$\frac{V_p}{\omega} = 1.597 \cdot 10^{-6} \text{ (1/век)}, \quad V_{\omega} = 1.60 \cdot 10^{-6} \text{ 1/век} = 0.329'' \text{ 1/век}$$



Рис. 2.3. Вековой дрейф полюса оси вращения Земли в условной международной системе отсчета за период 1900 – 2010 гг. По данным работы Скалера – точечная кривая [71].

На рис. 2.3 представлена усредненная траектория движения полюса оси вращения Земли (пунктирная кривая). Изображены направления векового тренда полюса по данным астрометрических и иных наблюдений (прямая 1) (из

работы [70]) и наше расчетное направление векового тренда (прямая 2), полученное для модели Земли с изменяемой геометрией масс.

**2.4.2 Неприливное ускорение вращение Земли.** По данным спутниковых наблюдений в течении последних десятилетий неоднократно определялись и анализировались значения коэффициента второй зональной гармоники геопотенциала  $J_2$  и определялся вековой тренд его изменений. Скорость векового изменения этого коэффициента по данным работы Вен Бин Шеня [68] составляет

$$\dot{J}_2 = (-2.59 \pm 0.29) \cdot 10^{-11} \text{ 1/год}, \quad I = 0.3306784$$

Таким образом, вековая перестройка масс Земли приводит к вековому нарастанию скорости осевого вращения Земли,

$$\frac{\dot{r}}{\omega} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\dot{J}_2}{I} \cos \theta = (5.22 \pm 0.59) \cdot 10^{-9} \text{ 1/век} = (1.077'' \pm 0.122'') \cdot 10^{-3} \text{ 1/век}.$$

Найденное ускорение вращения Земли обусловлено вековой перестройкой масс Земли, включая атмосферные, океанические и другие массы. Для этой перестройки масс полярный момент инерции уменьшается вековым образом и как геодинамический отклик скорость вращения Земли нарастает.

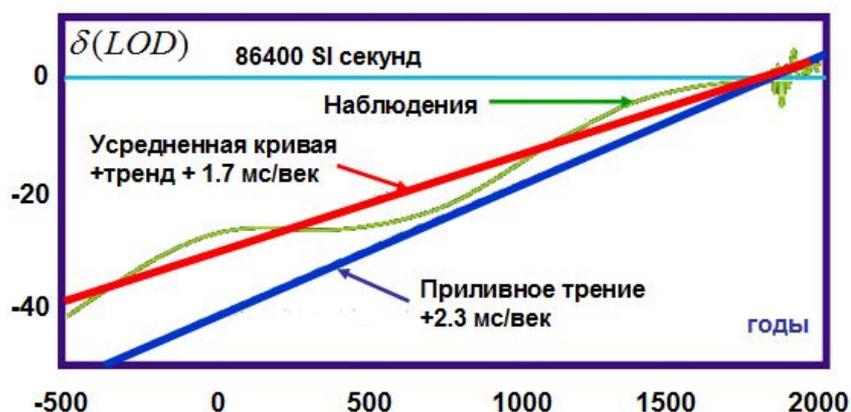


Рис. 2.4. Вариации длительности суток в последние 2700 лет (700 BC – AD 1978) по данным солнечных затмений [72].

Согласно данным астрономических наблюдений (в результате анализа античных затмений за период около 2500) было выявлено неприливное

ускорение вращения Земли в работе [72]. Наблюдаемое значение неприливного ускорения вращения Земли составляет 1.7 мс/век, а его неприливно-частичная часть оценивается в 0.6 мс/век (рис. 2.4). Последнему ускорению соответствует относительное ускорение

$$\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)_{ob} = (6.9 \pm 1.2) \cdot 10^{-9} \text{ 1/век} .$$

Следовательно, на долю влияния относительного кинетического момента планеты на ее ускорение суточного вращения приходится составляющая:

$$\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)_L = (1.7 \pm 1.8) \cdot 10^{-9} \text{ 1/век} .$$

Т.е. в пределах погрешностей наблюдаемое ускорение вращения Земли (неприливное) объясняется влиянием изменения геометрии масс планеты.

Таблица 2.6. Вековые вариации коэффициентов второй гармоники геопотенциала и неприливное угловое ускорение осевого вращения. Все значения даны в единицах 1 ед. =  $10^{-9}$  1/век .

	Barkin (2001, [65])	Cox et al. (2004, [49])	Shen et al. (2011, [68])	Данная работа
$J_2$	-2.60	-3.58	$-2.59 \pm 0.29$	$-3.51 \pm 0.52$
$\dot{\omega} / \omega$	5.24	7.22	$5.22 \pm 0.59$	$7.08 \pm 1.05$

### Глава 3. Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо.

#### 3.1. Постановка задачи. Уравнения движения в переменных Садова.

В данной главе дается приближенное решение задачи Лиувилля на основе уравнений вращательного движения небесного тела в переменных действие-угол, введенных на основе решения задачи Эйлера - Пуансо. Введение переменных действие-угол дается в известных статьях Садова [26], Киношита [22], Козлова [27]. В данной главе мы воспользуемся результатами указанных авторов и известными рядами Фурье в переменных действие-угол для направляющих косинусов осей тела [26], а также их произведений и квадратов [30], [12]. Последние результаты являются важными для построения аналитического решения задачи Лиувилля методами теории возмущений.

Для описания вращательного движения тела введем следующие системы координат.  $OXYZ$  - декартова система координат с началом в центре масс тела и с осями, сохраняющими фиксированные направления в пространстве. В случае вращения Земли в качестве подобной системы координат обычно выбирается геоцентрическая эклиптическая система координат данной эпохи (например, 2000.0).  $O\xi\eta\zeta$  - главные центральные оси инерции изменяемой планеты, а  $O\xi_0\eta_0\zeta_0$  - главные центральные оси инерции планеты, если пренебрегаем какими-либо вариациями ее динамического строения. В общем случае система координат  $O\xi\eta\zeta$  совершает определенные движения по отношению к базовой системе координат планеты  $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ . Введем обозначения.  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  - главные центральные моменты инерции планеты, если пренебречь какими-либо ее изменениями (назовем ее модельной планетой). Эти моменты инерции в общем случае учитывают постоянные составляющие, обусловленные вращательной деформацией планеты. Для определенности полагаем  $C_0 > B_0 > A_0$  ( $C_0$  - полярный момент инерции, соответствующий оси инерции  $C\xi_0$ ;  $B_0$  и  $A_0$  - моменты инерции, соответствующие экваториальным осям инерции недеформированного

тела  $O\xi_0$  и  $O\eta_0$ ). Для простоты будем считать, что центр масс изменяемой планеты (с переменными моментами инерции) совпадает с центром масс модельной планеты (с постоянными главными моментами инерции).

Будем изучать вращательное движение слабдеформируемого тела с произвольными осевыми моментами инерции  $A, B$  и  $C$  (1.49):

$$A = A_0 + \delta A, \quad B = B_0 + \delta B, \quad C = C_0 + \delta C,$$

и с малыми произведениями инерции,  $D = \delta D, \quad E = \delta E, \quad F = \delta F$ .

$\delta A, \delta B, \dots, \delta F$  являются малыми величинами по сравнению с моментами инерции  $A_0, B_0$  и  $C_0$  (для Земли они имеют порядок  $10^{-10}$ ) и они предполагаются известными функциями времени. В нашей работе эти вариации представляются либо тригонометрическими функциями времени (например, с годовыми и полугодовыми периодами) либо линейными функциями времени (2.77), описывающими медленные вековые изменения планеты (ее тензора инерции и относительного кинетического момента).

В качестве невозмущенного движения примем движение твердого тела по Эйлеру - Пуансо. Подчеркнем, что изменяемое тело имеет произвольные динамические сжатия (произвольные значения моментов инерции) и полученное здесь решение обобщает исследования, выполненные во второй главе, в которой предполагалось, что динамическое строение тела близко к осесимметричному (т.е. в невозмущенном движении принималось, что два осевых момента инерции тела равны). В данной главе все три осевых момента инерции являются произвольными. Это дало возможность для полного и детального описания кинематических и динамических эффектов в возмущенных вращательных движениях. В данной главе используется широкий набор формул невозмущенного вращательного движения Эйлера, в частности известные результаты [26] и другие важные исследований этой проблемы [12], [22] и др.

Переменные действие-угол в задаче Эйлера - Пуансо обозначим как  $I_i, \varphi_i$  ( $i=1,2,3$ ) и введем их в рассмотрение с помощью формул канонического преобразования, полученных в работах [12], [22]:

$$L = G \frac{\pi k}{\mathbf{K} \sqrt{k^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos 2m\varphi_1}{\operatorname{ch} 2md} (1 + \delta_{m0})^{-1}, \quad G = I_2, \quad H = I_3, \quad (3.1)$$

$$l = \varphi_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m\sigma}{m \operatorname{ch} 2md} \sin 2m\varphi_1, \quad g = \varphi_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\sigma}{m \operatorname{sh} 2md} \sin 2m\varphi_1, \quad h = \varphi_3,$$

где  $\delta_{00} = 1$ ,  $\delta_{m0} = 0$  ( $m \geq 1$ ),

$$d = \frac{\pi \mathbf{K}(\lambda')}{2\mathbf{K}(\lambda)}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2\mathbf{K}(\lambda)} F\left(\operatorname{arctg} \frac{k}{\lambda}, \lambda'\right), \quad \lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}. \quad (3.2)$$

Здесь  $\mathbf{K}(\lambda)$  и  $F$  - полный и неполный эллиптические интегралы первого сорта [68]. Модуль этих интегралов  $\lambda$  и параметр  $k$  определяются формулами:

$$\lambda^2 = k^2 \frac{A_0^2 p_0^2}{C_0^2 r_0^2}, \quad k^2 = \frac{C_0(A_0 - B_0)}{A_0(B_0 - C_0)}, \quad (3.3)$$

где  $p_0, r_0$  ( $q_0 = 0$ ) - начальные значения компонент угловой скорости для принятого момента времени.

Наряду с формулами невозмущенного движения в виде рядов (3.1) – (3.3) приведем аналогичные выражения в эллиптических функциях [26]

$$L = I_2 \kappa \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \varphi_1\right)}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}, \quad G = I_2, \quad H = I_3, \quad h = \varphi_3, \quad (3.4)$$

$$g = \varphi_2 + \frac{\sqrt{(1 + \kappa^2)(\kappa^2 + \lambda^2)}}{\kappa} \left[ \frac{2\varphi_1}{\pi} \mathbf{\Pi}\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right) - \mathbf{\Pi}\left(\operatorname{am}\left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \varphi_1\right), \kappa^2, \lambda\right) \right],$$

где  $u$  - аргумент эллиптических функций,

$$u = \frac{2\mathbf{K}(\lambda)}{\pi} \varphi_1. \quad (3.5)$$

$\mathbf{\Pi}(\pi/2, \kappa^2, \lambda)$  и  $\mathbf{\Pi}(z, \kappa^2, \lambda)$  ( $z = \operatorname{am} u$ ) - полный и неполный эллиптический интеграл третьего рода [68].

Угловые переменные  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в невозмущенном движении являются линейными функциями времени:

$$\varphi_1 = n_1 t + \varphi_1^{(0)}, \quad \varphi_2 = n_2 t + \varphi_2^{(0)}, \quad (3.6)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  - частоты невозмущенного эйлеровского движения

$$n_1 = \frac{I_2(A - C)}{2AC} \frac{\pi \kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2)(\kappa^2 + \lambda^2)} \mathbf{K}(\lambda)}, \quad (3.7)$$

$$n_2 = \frac{I_2}{C} \left[ 1 - \frac{A-C}{A} \frac{\Pi(\pi/2, \kappa^2, \lambda)}{\mathbf{K}(\lambda)} \right]. \quad (3.8)$$

Индекс <sup>(0)</sup> в (3.6) означает начальные значения соответствующих переменных;  $n_1$  и  $n_2$  - частоты задачи Эйлера-Пуансо. Формулы (3.7), (3.8) определяют частоты задачи Эйлера-Пуансо для движений в областях I, II [28], как функции частоты  $I_2/C$ , параметров задачи  $\lambda, \kappa$  и динамического сжатия  $(A-C)/A$ :

$$(A-C)/A: n_i = n_i \left( \frac{I_2}{C}, \frac{A-C}{A}, \lambda, \kappa \right) \quad (i=1,2). \quad p_0, q_0 = 0,$$

$r_0$  - начальные значения компонент угловой скорости  $p, q$  и  $r$ , соответственно.

### 3.2. Уравнения движения в переменных действие-угол.

В переменных действие-угол  $I_i, \varphi_i$  ( $i=1,2,3$ ) уравнения вращательного движения слабodeформируемого тела можно записать в виде [28]):

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} \quad (i=1,2,3) \quad (3.9)$$

$$H = H_0(I_1, I_2) + H_1(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t). \quad (3.10)$$

Здесь  $H_0$  гамильтониан невозмущенного движения [26])

$$H_0 = \frac{I_2^2}{2A} \left( 1 + \frac{A-C}{C} \cdot \frac{k^2}{\lambda^2 + k^2} \right), \quad (3.11)$$

а  $H_1$  - возмущающая функция, обусловленная временными вариациями геометрии масс планеты (2.3) – (2.6),

$$H_1 = K_1^{(1)} + K_1^{(2)} + K_1^{(3)}, \quad (3.12)$$

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{2IC_0} \left[ \left( \frac{1}{3} G^2 - L^2 \right) \delta J_2 - 2\delta C_{22} (G^2 - L^2) \cos 2l \right], \quad (3.13)$$

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{2IC_0} \left[ 2\delta S_{22} (G^2 - L^2) \sin 2l + 2\delta C_{21} \sqrt{G^2 - L^2} L \sin l + 2\delta S_{21} \sqrt{G^2 - L^2} L \cos l \right], \quad (3.14)$$

$$K_1^{(3)} = -\frac{1}{C_0} \left[ (\delta P \sin l + \delta Q \cos l) \sqrt{G^2 - L^2} + L \delta R \right]. \quad (3.15)$$

Все составляющие гамильтониана (3.12), (3.13) – (3.15) здесь записаны в переменных Андуайе  $L, G$  и  $l$ . Однако, эти составляющие гамильтониана

должны быть представлены функциями переменных действие-угол. Это может быть сделано с помощью формул (3.1) и широкого ряда формул невозмущенного эйлеровского движения, полученных в работе [12]. В частности важное прикладное значение здесь имеют ряды Фурье для направляющих косинусов  $a_{ij}$ , для их взаимных произведений и квадратов и др. Именно эти комбинации направляющих косинусов фигурируют в выражениях (3.11) – (3.14). Последние формулы приведены в работе [12] и мы будем ими пользоваться. Они приводятся ниже.

В первую часть возмущающего Гамильтониана (3.13) входят сомножителями следующие функции переменных Андуайе:  $\cos^2 \theta$ ,  $\sin^2 \theta \cos 2l$ . Во вторую часть возмущающего Гамильтониана сомножителями входят следующие функции переменных Андуайе:

$$\sin^2 \theta \sin 2l, \quad \sin \theta \cos \theta \sin l, \quad \sin \theta \cos \theta \cos l.$$

Наконец в третью часть Гамильтониана (3.15) сомножителями входят:  $\sin \theta \sin l$ ,  $\sin \theta \cos l$ ,  $\cos \theta$  или направляющие косинусы  $b_{31}, b_{32}$  и  $b_{33}$ . Выразим другие указанные выше сомножители через квадраты и произведения направляющих косинусов. В результате три слагаемых возмущающего Гамильтониана запишем следующим образом:

$$K_1^{(1)} = \frac{G^2}{2IC_0} \left[ \left( \frac{1}{3} - b_{33}^2 \right) \delta J_2 - 2\delta C_{22} (b_{32}^2 - b_{31}^2) \right], \quad (3.16)$$

$$K_1^{(2)} = \frac{G^2}{IC_0} (2\delta S_{22} b_{31} b_{32} + \delta C_{21} b_{31} b_{33} + \delta S_{21} b_{32} b_{33}), \quad (3.17)$$

$$K_1^{(3)} = -\frac{G}{C_0} (\delta P b_{31} + \delta Q b_{32} + \delta R b_{33}). \quad (3.18)$$

Таким образом, для построения уравнений движения (3.9) – (3.15) необходимо иметь ряды Фурье в переменных действие - угол для следующих направляющих косинусов, их произведений и квадратов:

$$b_{31}, b_{32}, b_{33}; \quad b_{31} b_{32}, b_{31} b_{33}, b_{32} b_{33}; \quad b_{31}^2, b_{32}^2, b_{33}^2. \quad (3.19)$$

Для упрощения процедуры построения аналогичных рядов Фурье для составляющих возмущающей функции можно воспользоваться простыми геометрическими соотношениями для комбинаций направляющих косинусов:

$$b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 1, \quad b_{31}b_{32} + b_{31}b_{33} + b_{32}b_{33} = 0. \quad (3.20)$$

### 3.2.1. Формулы для направляющих косинусов и компонент угловой скорости в эллиптических функциях.

Пусть  $O\xi_0\eta_0\zeta_0$  декартовская система координат с осями направленными вдоль главных центральных осей инерции небесного тела в его недеформированном состоянии. Будем пренебрегать малыми эффектами, вызванными смещениями точки  $O$  относительно центра масс. Пусть  $\omega$  - вектор угловой скорости вращения системы координат  $O\xi_0\eta_0\zeta_0$  (с компонентами  $p$ ,  $q$  и  $r$  в этих осях) по отношению к основной системе координат  $OXYZ$ , оси которой имеют фиксированные направления в пространстве. Пусть  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  - главные моменты инерции тела (в его недеформированном состоянии) относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Таким образом, базовыми переменными у нас являются канонические переменные Андуайе (см. п. 2.3):

$$L, G, H, l, g, h. \quad (3.21)$$

Эти переменные связаны с вектором кинетического момента вращательного движения тела  $\mathbf{G}$ . Здесь  $L$  и  $H$  - проекции вектора  $\mathbf{G}$  на оси  $Oz$  и  $OZ$ , введенных систем координат. Пусть переменные  $\rho$  и  $\theta$  - углы, которые образует вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  с указанными координатными осями  $Oz$  и  $OZ$ . При этом:  $L = G \cos \theta$  и  $H = G \cos \rho$ . Геометрический смысл других переменных Андуайе из (3.16) детально описан в первой главе.

Заметим, что формулы преобразования от переменных Андуайе к переменным “действие-угол” позволяют выразить компоненты угловой скорости тела  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и направляющие косинусы его осей  $b_{ij}$  в переменных “действие - угол”:  $I_i, \varphi_i$  ( $i=1,2,3$ ). Уже отмечалось, что переменные действие-

угол (для задачи Эйлера - Пуансо) вводились различными авторами. Среди этих работ выделяются статьи [22] и [26]).

Здесь наряду с указанными результатами Садова и Киношита используются результаты по рассматриваемой проблеме из статьи [12]. В этом курсе был получен широкий набор результатов по исследованию невозмущенного эйлеровского движения. Эти результаты включают ряды Фурье в переменных действие-угол для канонических переменных Андуайе, для произведений и квадратов направляющих косинусов тела  $b_{ij}$  (определяющих ориентацию осей тела по отношению к промежуточной системе координат, связанной с вектором кинетического момента вращательного движения), для компонент угловой скорости  $p, q, r$  (а также их высших степеней); геометрическая и динамическая интерпретация свойств невозмущенного движения и т.д. Эти результаты составляют основу исследований данной главы.

В невозмущенном движении переменные  $I_i$  ( $i=1,2,3$ ), углы  $\varphi_1^{(0)}$ ,  $\varphi_2^{(0)}$  и  $\varphi_3$  являются постоянными. Индекс  $^{(0)}$  означает начальные значения соответствующих переменных;  $n_1$  и  $n_2$  - частоты задачи Эйлера-Пуансо. Постоянные значения переменных:  $G = I_2$ ,  $H = I_3$ ,  $h = \varphi_3$  в невозмущенном движении характеризуют постоянство вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$  деформируемого тела. Угол  $\rho$  между осью  $Oz$  с фиксированным направлением в пространстве и вектором  $\mathbf{G}$  имеет постоянное значение  $\rho = \rho_0$ :

$$\cos \rho_0 = \frac{I_3}{I_2}, \quad \sin \rho_0 = \frac{\sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2}. \quad (3.22)$$

Модуль эллиптических функций и интегралов  $\lambda$  (3.3) определяется как функция переменных  $I_1, I_2$  в результате обращения, построенной в работах [22], [26] зависимости

$$\frac{I_1}{I_2} = \Lambda(\lambda), \quad (3.23)$$

где

$$\Lambda(\lambda) = \frac{2\kappa\sqrt{1+\kappa^2}}{\pi\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \left[ \frac{\kappa^2+\lambda^2}{\kappa^2} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right) - \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \mathbf{K}(\lambda) \right]. \quad (3.24)$$

По общей теории невозмущенного эйлеровского движения направляющие косинусы главных осей инерции планеты в базовой системе координат определяются следующими формулами [26]:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos g \cos l - \sin g \sin l \cos \theta = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u}} \left( \sqrt{1+\kappa^2} \operatorname{sn} u \cos g + \operatorname{sign} L_0 \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \operatorname{dn} u \operatorname{cn} u \sin g \right), \\ b_{21} &= \sin g \cos l + \cos g \sin l \cos \theta = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u}} \left( \sqrt{1+\kappa^2} \operatorname{sn} u \sin g - \operatorname{sign} L_0 \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \operatorname{dn} u \operatorname{cn} u \cos g \right), \\ b_{31} &= \sin \theta \sin l = \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \operatorname{cn} u, \\ b_{12} &= -\cos g \sin l - \sin g \cos l \cos \theta = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u}} \left( \operatorname{cn} u \cos g - \operatorname{sign} L_0 \frac{\kappa\sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \sin g \right), \\ b_{22} &= -\sin g \sin l + \cos g \cos l \cos \theta = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u}} \left( \operatorname{cn} u \sin g + \operatorname{sign} L_0 \frac{\kappa\sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \cos g \right), \\ b_{32} &= \sin \theta \cos l = -\frac{\lambda\sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \operatorname{sn} u, \\ b_{13} &= \sin g \sin \theta = \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \sqrt{1+\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u} \sin g, \\ b_{23} &= -\cos g \sin \theta = \frac{-\lambda}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \sqrt{1+\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u} \cos g, \\ b_{33} &= \cos \theta = \frac{\operatorname{sign} L_0 \kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \operatorname{dn} u. \end{aligned} \quad (3.25)$$

В (3.25) переменная  $g$  и аргумент  $u$  определяются формулами (3.4), (3.5).

Формулы (3.25) представляют направляющие косинусы осей тела  $b_{ij}$  как функции переменных  $\varphi_1, \varphi_2$  и параметров  $\lambda, \kappa$ . С учетом зависимостей (3.1) - (3.8) можно говорить, что эти формулы выражают зависимость направляющих

косинусов  $b_{ij}$  от переменных действие-угол:  $I_i, \varphi_i$  ( $i=1,2$ ). Аналогичные представления в эллиптических функциях Якоби были получены для проекций угловой скорости [26], [28]:

$$\begin{aligned} p &= \frac{G}{A} \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \operatorname{cnu} u, \\ q &= -\frac{G}{B} \frac{\lambda \sqrt{1 + \kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \operatorname{sn} u, \\ r &= \frac{G}{C} \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \operatorname{dn} u. \end{aligned} \quad (3.26)$$

**3.2.2. Ряды Фурье для направляющих косинусов  $b_{ij}$  по кратным переменных угол.** Воспользуемся результатами известных и указанных выше работ [26] и др. и приведем следующие представления рядов Фурье для направляющих косинусов тела и для проекций угловой скорости его вращательного движения на главные оси инерции. Для направляющих косинусов имеем следующие разложения для направляющих косинусов (в вещественной форме):

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{\pi}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin[(2m+1)\varphi_1 + \varphi_2]}{\operatorname{sh}[(2m+1)d - \sigma]} + \frac{\sin[(2m+1)\varphi_1 - \varphi_2]}{\operatorname{sh}[(2m+1)d + \sigma]} \right\}, \\ b_{21} &= \frac{\pi}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos[(2m+1)\varphi_1 + \varphi_2]}{\operatorname{sh}[(2m+1)d - \sigma]} + \frac{\cos[(2m+1)\varphi_1 - \varphi_2]}{\operatorname{sh}[(2m+1)d + \sigma]} \right\}, \\ b_{31} &= \frac{\pi}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\varphi_1}{\operatorname{ch}(2m+1)d}, \\ b_{22} &= -\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1 + \kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin[(2m+1)\varphi_1 + \varphi_2]}{\operatorname{ch}[(2m+1)d - \sigma]} - \frac{\sin[(2m+1)\varphi_1 - \varphi_2]}{\operatorname{ch}[(2m+1)d + \sigma]} \right\}, \\ b_{32} &= -\frac{\pi}{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1 + \kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\varphi_1}{\operatorname{sh}(2m+1)d}, \\ b_{13} &= \frac{\pi\kappa}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin(2m\varphi_1 + \varphi_2)}{\operatorname{sh}(2md - \sigma)} + \frac{\sin(2m\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{sh}(2md + \sigma)} \right] (1 + \delta_{m0})^{-1}, \\ b_{23} &= -\frac{\pi\kappa}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\cos(2m\varphi_1 + \varphi_2)}{\operatorname{sh}(2md - \sigma)} - \frac{\cos(2m\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{sh}(2md + \sigma)} \right] (1 + \delta_{m0})^{-1}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$b_{33} = \frac{\pi\kappa}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos 2m\varphi_1}{\operatorname{sh} 2md} (1 + \delta_{m0})^{-1},$$

$$b_{31} = \frac{\pi}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\varphi_1}{\operatorname{ch}(2m+1)d},$$

$$b_{32} = -\frac{\pi}{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\varphi_1}{\operatorname{sh}(2m+1)d},$$

где  $\delta_{00} = 1$ ,  $\delta_{m0} = 0$  при  $m \geq 1$ , а параметры  $d = d(\lambda)$ ,  $\sigma = \sigma(\lambda, \kappa)$  и  $q = q(\lambda)$  определяются формулами (3.2) в терминах полных и неполных эллиптических интегралов первого рода. В невозмущенном эйлеровском движении  $q, \sigma, \lambda$  - постоянные;  $\varphi_1, \varphi_2$  - линейные функции времени (3.6) – (3.8).

Здесь будем использовать ряды Фурье для произведений и квадратов направляющих косинусов  $b_{ij}$  для построения тригонометрических разложений соответствующих составляющих возмущающего гамильтониана (3.16) – (3.18). Они также должны использоваться при построении аналогичных разложений силовой функции ньютоновского притяжения между Землей и Луной (а также Землей и Солнцем).

### 3.2.3. Ряды Фурье для произведений и квадратов направляющих косинусов

$b_{ij}b_{nk}$ .

Ряды Фурье для произведений и квадратов направляющих косинусов  $b_{ij}$  были выведены в работах [12]. Они обладают следующей структурой:

$$b_{ij}b_{nk} = \sum b_{m_1, m_2}^{(i, j; n, k)} \left\{ \begin{array}{l} \cos(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2) \\ \sin(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2) \end{array} \right\}. \quad (3.28)$$

Причем все разложения содержат, либо только синусы, или только косинусы указанных в (3.28) аргументов. Коэффициенты рядов (3.28) выражаются через параметры  $\lambda$  и  $\kappa$  в терминах полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего сортов, а также через гиперболические функции двух аргументов  $d$  и  $\sigma$ , которые в свою очередь выражаются через полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго сортов (3.1) - (3.3).

Приведем явные выражения для вековых (постоянных) компонент указанных рядов [12]:

$$\begin{aligned}
 b_{0,0}^{(1,1;1,1)} &= \frac{\mathbf{K}(1+\kappa^2) - \mathbf{E}}{2\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}, & b_{0,0}^{(1,2;1,2)} &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{(1+\kappa^2)(\mathbf{E} - \mathbf{K})}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)} \right], \\
 b_{0,0}^{(1,3;1,3)} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\kappa^2 \mathbf{E}}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)} \right], & b_{0,0}^{(2,1;1,2)} &= -\frac{\pi \kappa}{4\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}, \\
 b_{0,0}^{(2,1;2,1)} &= \frac{\mathbf{K}(1+\kappa^2) - \mathbf{E}}{2\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}, & b_{0,0}^{(2,2;1,1)} &= \frac{\pi \kappa}{4\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}, \\
 b_{0,0}^{(2,2;2,2)} &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{(1+\kappa^2)(\mathbf{E} - \mathbf{K})}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)} \right], & b_{0,0}^{(2,3;2,3)} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\kappa^2 \mathbf{E}}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)} \right], \\
 b_{0,0}^{(3,1;3,1)} &= \frac{\mathbf{E} - \lambda'^2 \mathbf{K}}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}, & b_{0,0}^{(3,2;3,2)} &= -\frac{(1+\kappa^2)(\mathbf{E} - \mathbf{K})}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}, & b_{0,0}^{(3,3;3,3)} &= \frac{\kappa^2 \mathbf{E}}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Выражения (3.24) и полные ряды (3.23) удовлетворяют известным геометрическим соотношениям между произведениями и квадратами направляющих косинусов. Аналогичные ряды были получены непосредственно для канонических переменных Андуайе (см. (3.1),(3.2)).

Чтобы записать уравнения движения в переменных действие-угол воспользуемся известными рядами Фурье для следующих направляющих косинусов  $b_{ij}$ , их квадратов и произведений, соответствующих рассматриваемому случаю вращения Земли [12]:

$$\begin{aligned}
 b_{31} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1,0}^{(31)} \cos(2m+1)\varphi_1, & b_{2m+1,0}^{(31)} &= \frac{\pi}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(2m+1)d}, \\
 b_{32} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1,0}^{(32)} \sin(2m+1)\varphi_1, & b_{2m+1,0}^{(32)} &= -\frac{\pi}{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}(2m+1)d}, \\
 b_{33} &= b_{0,0}^{(33)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(33)} \cos 2m\varphi_1, & b_{2m,0}^{(33)} &= \frac{\pi \kappa}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} md}, \\
 b_{0,0}^{(33)} &= \frac{\pi \kappa}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Для квадратов направляющих косинусов имеем аналогичные ряды Фурье:

$$b_{31}^2 = b_{0,0}^{(31,31)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(31,31)} \cos 2m\varphi_1, \quad (3.31)$$

$$b_{0,0}^{(31,31)} = \frac{\mathbf{E} - \lambda'^2 \mathbf{K}}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}, \quad b_{2m,0}^{(31,31)} = \frac{\pi^2}{\mathbf{K}^2(\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md},$$

$$b_{32}^2 = b_{0,0}^{(32,32)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(32,32)} \cos 2m\varphi_1,$$

$$b_{0,0}^{(32,32)} = -\frac{(1 + \kappa^2)(\mathbf{E} - \mathbf{K})}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}, \quad b_{2m,0}^{(32,32)} = -\frac{\pi^2(1 + \kappa^2)}{\mathbf{K}^2(\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md},$$

$$b_{33}^2 = b_{0,0}^{(33,33)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(33,33)} \cos 2m\varphi_1,$$

$$b_{0,0}^{(33,33)} = \frac{\kappa^2 \mathbf{E}}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}, \quad b_{2m,0}^{(33,33)} = \frac{\pi^2 \kappa^2}{\mathbf{K}^2(\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md}.$$

Эти ряды удовлетворяют соответствующему соотношению из (3.20).

Приведем также аналогичные разложения для трех произведений направляющих косинусов:  $b_{31}b_{32}$ ,  $b_{31}b_{33}$ ,  $b_{32}b_{33}$

$$b_{31}b_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(32,31)} \sin 2m\varphi_1, \quad b_{2m,0}^{(32,31)} = -\frac{\pi^2 \sqrt{1 + \kappa^2}}{\mathbf{K}^2(\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{m}{\operatorname{ch} 2md}, \quad (3.32)$$

$$b_{31}b_{33} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1,0}^{(33,31)} \cos(2m+1)\varphi_1, \quad b_{2m+1,0}^{(33,31)} = \frac{\pi^2 \kappa}{2\mathbf{K}^2(\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{2m+1}{\operatorname{sh}(2m+1)d},$$

$$b_{32}b_{33} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1,0}^{(32,33)} \sin(2m+1)\varphi_1, \quad b_{2m+1,0}^{(32,33)} = -\frac{\pi^2 \kappa \sqrt{1 + \kappa^2}}{2\mathbf{K}^2(\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{2m+1}{\operatorname{ch}(2m+1)d},$$

### 3.2.4. Ряд Фурье для гамильтониана задачи Лиувилля в переменных действие – угол.

Рассмотрим первую часть возмущенного гамильтониана (3.16). Воспользуемся простыми соотношениями, которые следуют из приведенных выше рядов Фурье (3.30), (3.32):

$$b_{33}^2 - \frac{1}{3} = J_0 + \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m} \cos 2m\varphi_1,$$

$$J_0 = \frac{\kappa^2 \mathbf{E}}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)} - \frac{1}{3}, \quad J_{2m} = \frac{\pi^2 \kappa^2}{\mathbf{K}^2(\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md},$$

$$b_{32}^2 - b_{31}^2 = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} \cos 2m\varphi_1,$$

$$C_0 = -\frac{(2 + \kappa^2)\mathbf{E} - (1 + \kappa^2 + \lambda'^2)\mathbf{K}}{\mathbf{K}(\kappa^2 + \lambda^2)}, \quad C_{2m} = -\frac{\pi^2(2 + \kappa^2)}{\mathbf{K}^2(\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md}.$$

Для рассматриваемой части возмущающей функции получаем выражение

$$K_1^{(1)} = -\frac{1}{2IC_0} G^2 (J_0 \delta J_2 + 2C_0 \delta C_{22}) - \frac{1}{2IC_0} G^2 \left( \delta J_2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m} \cos 2m\varphi_1 + 2\delta C_{22} \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} \cos 2m\varphi_1 \right).$$

Подставим теперь временные вариации коэффициентов геопотенциала (2.14)

$$\delta J_2 = \sum_N J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}), \quad \delta C_{22} = \sum_N C_{22}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}),$$

окончательно получаем

$$K_1^{(1)} = -\frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_N \left[ J_0 J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + 2C_0 C_{22}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) \right] - \frac{1}{2JC_0} G^2 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N J_2^{(N)} J_{2m} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) \cos 2m\varphi_1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N C_{22}^{(N)} C_{2m} \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) \cos 2m\varphi_1 \right)$$

или

$$K_1^{(1)} = -\frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_N \left[ J_2^{(N)} J_0(\lambda) \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + 2C_{22}^{(N)} C_0(\lambda) \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) \right] \quad (3.33) - \frac{1}{4JC_0} G^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N \left\{ J_2^{(N)} J_{2m}(\lambda) \left[ \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} + 2m\varphi_1) + \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} - 2m\varphi_1) \right] + 2C_{22}^{(N)} C_{2m}(\lambda) \left[ \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} + 2m\varphi_1) + \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} - 2m\varphi_1) \right] \right\}.$$

### 3.3. Возмущения во вращении планеты, вызванные временными вариациями основных коэффициентов второй гармоники геопотенциала.

Теперь вычисляем частные производные функции (3.33) по переменным действие-угол:

$$\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial I_2} = -\frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_N \left[ \left( \frac{\partial J_0}{\partial I_2} + 2 \frac{J_0}{G} \right) J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + 2 \left( \frac{\partial C_{22}}{\partial I_2} + 2 \frac{C_{22}}{G} \right) C_{22}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4JC_0} G^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N \left\{ J_2^{(N)} \left( \frac{\partial J_{2m}}{\partial I_2} + 2 \frac{J_{2m}}{G} \right) \left[ \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} + 2m\varphi_1) + \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} - 2m\varphi_1) \right] \right. \\
& \left. + 2C_{22}^{(N)} \left( \frac{\partial C_{2m}}{\partial I_2} + 2 \frac{C_{2m}}{G} \right) \left[ \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} + 2m\varphi_1) + \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} - 2m\varphi_1) \right] \right\}, \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial \varphi_1} &= \frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N \left\{ m J_2^{(N)} J_{2m} \left[ \sin(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} + 2m\varphi_1) - \sin(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} - 2m\varphi_1) \right] \right. \\
& \left. + 2m C_{22}^{(N)} C_{2m} \left[ \sin(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} + 2m\varphi_1) - \sin(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} - 2m\varphi_1) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial I_1} &= -\frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_N \left[ \frac{\partial J_0}{\partial I_1} J_2^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}) + 2 \frac{\partial C_0}{\partial I_1} C_{22}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}) \right] \\
& -\frac{1}{4JC_0} G^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N \left\{ J_2^{(N)} \frac{\partial J_{2m}}{\partial I_1} \left[ \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} + 2m\varphi_1) + \cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} - 2m\varphi_1) \right] \right. \\
& \left. + 2C_{22}^{(N)} \frac{\partial C_{2m}}{\partial I_1} \left[ \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} + 2m\varphi_1) + \cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} - 2m\varphi_1) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Эти частные производные вычисляются при невозмущенных значениях переменных действие-угол. Возмущения первого порядка для переменных действие-угол вычисляются квадратурами аналогичными тем, что использовались во второй главе. Здесь они имеют следующий вид:

$$\delta I_1 = -\int \frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial \varphi_1} dt, \quad \delta \varphi_1 = \frac{\partial^2 K_0}{\partial I_1^2} \delta I_1 + \int \frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial I_1} dt, \quad \delta \varphi_2 = \int \frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial I_2} dt. \quad (3.35)$$

И кроме того имеем:  $\delta I_2 = 0$ ,  $\delta I_3 = 0$ ,  $\delta \varphi_3 = 0$ .

Вычисляя интегралы в формулах (3.35), получим следующие выражения для возмущений первого порядка переменных действие-угол:

$$\delta I_1 = -\int \frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial \varphi_1} dt, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
\delta I_1 &= \frac{G^2}{2JC_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N m \left\{ J_2^{(N)} J_{2m} \left[ \frac{\cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} + 2m\varphi_1)}{\omega_N + 2mn_1} - \frac{\cos(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} - 2m\varphi_1)}{\omega_N - 2mn_1} \right] \right. \\
& \left. + 2C_{22}^{(N)} C_{2m} \left[ \frac{\cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} + 2m\varphi_1)}{\omega_N + 2mn_1} - \frac{\cos(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} - 2m\varphi_1)}{\omega_N - 2mn_1} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Для возмущений других переменных действие-угол можно записать аналогичные формулы, которые здесь опустим для краткости изложения.

Аналогичные вычисления для возмущений переменных действие-угол можно реализовать для двух других составляющих возмущающего гамильтониана. Например, построим тригонометрическое представление для составляющей

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{JC_0} G^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2\delta S_{22} b_{31} b_{32} + \delta C_{21} b_{31} b_{33} + \delta S_{21} b_{32} b_{33}). \quad (3.37)$$

Далее следует воспользоваться тремя рядами Фурье

$$\begin{aligned} b_{31} b_{32} &= \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} \sin 2m\varphi_1, & D_{2m} &= -\frac{\pi^2 \sqrt{1+\kappa^2}}{\mathbf{K}^2 (\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{m}{\operatorname{ch} 2md}, \\ b_{31} b_{33} &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{2m+1} \cos(2m+1)\varphi_1, & E_{2m+1} &= \frac{\pi^2 \kappa}{2\mathbf{K}^2 (\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{2m+1}{\operatorname{sh}(2m+1)d}, \\ b_{32} b_{33} &= \sum_{m=0}^{\infty} F_{2m+1} \sin(2m+1)\varphi_1, & F_{2m+1} &= -\frac{\pi^2 \kappa \sqrt{1+\kappa^2}}{2\mathbf{K}^2 (\kappa^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{2m+1}{\operatorname{ch}(2m+1)d}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

А также принятыми тригонометрическими представлениями вариаций коэффициентов геопотенциала:

$$\begin{aligned} \delta S_{22} &= \sum_N S_{2.2}^{(N)} \cos(\omega_N t + \beta_N^{(2.2)}), \\ \delta C_{21} &= \sum_N C_{2.1}^{(N)} \cos(\omega_N t + \alpha_N^{(2.1)}), \quad \delta S_{21} = \sum_N S_{2.1}^{(N)} \cos(\omega_N t + \beta_N^{(2.1)}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

В результате эту часть гамильтониана

$$\begin{aligned} K_1^{(2)} &= \frac{2}{JC_0} G^2 \sum_{m=0}^{\infty} D_{2m} \delta S_{22} \sin 2m\varphi_1 \\ &+ \frac{1}{JC_0} G^2 \sum_{m=0}^{\infty} [E_{2m+1} \delta C_{21} \cos(2m+1)\varphi_1 + F_{2m+1} \delta S_{21} \sin(2m+1)\varphi_1] \end{aligned} \quad (3.40)$$

удается представить тригонометрическим разложением, на основе которого нетрудно вычислить возмущения переменных действие-угол первого порядка.

Аналогичным образом строится тригонометрическое разложение третьей части возмущающего гамильтониана:

$$\begin{aligned} K_1^{(3)} &= -\frac{G}{C_0} \times \\ &\times \left( \delta P \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1} \cos(2m+1)\varphi_1 + \delta Q \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m+1} \sin(2m+1)\varphi_1 + \delta R R_0 + \delta R \sum_{m=1}^{\infty} R_{2m} \cos 2m\varphi_1 \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где используются вспомогательные разложения и обозначения:

$$\begin{aligned}
 b_{31} &= \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1} \cos(2m+1)\varphi_1, & P_{2m+1} &= \frac{\pi}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(2m+1)d}, \\
 b_{32} &= \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m+1} \sin(2m+1)\varphi_1, & Q_{2m+1} &= -\frac{\pi}{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}(2m+1)d}, \\
 b_{33} &= R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{2m} \cos 2m\varphi_1, & R_{2m} &= \frac{\pi\kappa}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} md}, \\
 R_0 &= \frac{\pi\kappa}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Если воспользоваться формулами для вариаций компонент относительного кинетического момента:

$$\begin{aligned}
 \delta P &= \sum_N P_N \cos(\omega_N t + \alpha_N), & \delta Q &= \sum_N Q_N \cos(\omega_N t + \beta_N), \\
 \delta R &= \sum_N R_N \cos(\omega_N t + \gamma_N),
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

то получим тригонометрическое представление возмущающего гамильтониана. Повторяя вновь рассмотренную выше процедуру вычисления интегралов в (3.35), можно получить аналитические формулы для возмущений первого порядка переменных действие-угол, обусловленных годовыми и полугодовыми вариациями геометрии масс планеты.

В отличие от теоретических построений во второй главе здесь теория возмущений строится на основе более общего невозмущенного движения произвольного твердого тела по Эйлеру-Пуансо. Формулы для возмущений первого порядка содержат вариации с новыми периодами (по сравнению с возмущениями, построенными во второй главе). Эти результаты представляют интерес для исследования влияния перераспределения масс Земли и Марса на движение полюсов и на осевое суточное вращение.

#### **Глава 4. Приливные деформации вращающейся Земли и прогнозирование глобальной составляющей кинетического момента атмосферы.**

На основе небесно-механической модели неравномерности вращения Земли построена модель глобальной составляющей кинетического момента атмосферы. В рамках квазистатической постановки задачи показано, что динамика приземного слоя атмосферы полностью обусловлена градиентом приливообразующего геопотенциала, поддерживающего вынужденные совместные колебания двухслойной структуры (мантия + тонкий слой атмосферы) как единого целого. Приводится сравнение и сопоставление процесса моделирования приливной неравномерности вращения Земли и колебаний глобальной составляющей кинетического момента атмосферы на основе метеоданных NCEP/NCAR [73]. Показано, что данные о флуктуациях скорости осевого вращения Земли могут быть эффективно использованы для построения прогноза глобальной составляющей кинетического момента атмосферы.

Научный и практический интерес представляет исследование и прогноз внутригодовой неравномерности вращения Земли [73], [31-34]. В большинстве зарубежных научных работ, посвященных данной проблеме исходят из того, что зная изменение во времени глобальной составляющей кинетического момента атмосферы, строится прогноз внутригодовых вариаций скорости вращения Земли. Известно, что определять колебания глобальной составляющей характеристик атмосферы на практике значительно сложнее (это сбор данных о распределении градиента давления с высотой с аэрологических станций мира, объективный анализ - интерполяция и экстраполяция и т.п.), нежели вычисления вариаций скорости осевого вращения Земли. На основе рядов метео наблюдений NCEP/NCAR было замечено, что большая часть типов синоптических процессов в атмосфере (особенно это касается приземного слоя, который полностью вовлекается во вращение Земли) меняется синхронно с приливными изменениями угловой скорости собственного вращения Земли. Сложный

механизм, связывающий вращательные угловые моменты деформируемой мантии Земли и приземного слоя атмосферы, с помощью которого под действием лунно-солнечных возмущений осуществляется взаимовлияние кинетических моментов, обусловлен зональным приливообразующим геопотенциалом. Убедительным доказательством функциональной зависимости колебаний кинетического момента атмосферы от внутригодовой неравномерности вращения Земли является совпадение временных вариаций амплитуд годовых и полугодовых гармоник этих процессов.

Ранее в [31], [32] методами небесной механики получена динамическая модель возмущенных вращательных движений деформируемой Земли, адекватная астрометрическим измерениям Международной службы вращения Земли (МСВЗ). Установлена тонкая резонансная структура взаимодействия долгопериодических зональных приливов (годовой, полугодовой, месячной, двухнедельной) с суточными и полусуточными приливами. Проведено численное моделирование приливной неравномерности осевого вращения Земли с периодами 1 год и менее (внутригодовые колебания).

Небесно-механическое представление теоретической модели, показывает, что внутригодовые вариации вращения Земли вызывают в основном зональные составляющие потенциала  $U_{n0}$ . Компонента, описываемая поверхностной гармоникой второй степени  $U_{20}$ , является доминирующей среди них. Зональный потенциал порождает приливы (океанические и твердотельные), которые называются зональными приливами (первого типа по Лапласу).

В данной главе дается развитие теоретической модели [33], которая отражает взаимовлияние зонального приливообразующего геопотенциала и зональных приливных атмосферных движений глобальной составляющей кинетического момента атмосферы (приземный слой атмосферы). На основе сравнительного анализа показано, что метеорологические данные измерений NCEP/NCAR [73] позволяют посредством математической модели внутригодовой приливной неравномерности вращения Земли строить интерполяцию и давать удовлетворительный прогноз на 2–3 месяца

колебательного процесса глобальной составляющей кинетического момента атмосферы, качественно соответствующий прогнозу внутригодовых вариаций скорости вращения Земли.

#### **4.1 Моделирование приливной неравномерности вращения Земли**

В ряде важных задач астрометрии, навигации и геофизики существенное значение имеет высокоточный прогноз вращения Земли на сравнительно коротких интервалах времени. Для приложений могут представить интерес предельно точный прогноз на интервалах длительностью от 1–2 до 10–30 суток. Анализ теоретической модели свидетельствует, что может быть достигнута точность порядка  $10^4$ – $10^5$  сек. Требуется построить расширенную динамическую модель осевого вращения Земли на основе учета небесномеханических факторов и представляющую собой естественное уточнение разработанной ранее [33] математической модели внутригодовой неравномерности вращения Земли и осуществить построение адекватной системы опорных функций, выбор оптимальной длительности интервала интерполяции и настройку алгоритма фильтрации по методу “взвешенных” наименьших квадратов. Погрешность данных Международной службы вращения Земли (МСВЗ [73]) определяется величинами порядка микросекунды. Достигнутая весьма высокая точность измерений достаточна для построения адекватной модели вращения Земли [73, 31-34].

Известно [73, 31-33], что в приливных изменениях вращения Земли выделяются как основные составляющие (годовые, полугодовые, месячные, двухнедельные) приливов, так и множество различных комбинационных гармоник короткопериодических приливов. Анализ уравнений движения [31-33] и данных наблюдений [73] свидетельствует о необходимости учета возмущающих моментов сил различной физической природы и существенной деформируемости фигуры Земли. Основное влияние оказывают гравитационно-приливные моменты сил от Солнца и Луны.

Для изучения вариаций скорости осевого вращения Земли вводится изменение (вариация) длительности суток –  $Lod(t)$  (length of the day changes)

$$D(t) = D_0 r_0 / r(t), \quad Lod(t) = D(t) - D_0.$$

Здесь  $r(t)$  – скорость осевого вращения Земли;  $D_0$  – длительность стандартных суток (в научной литературе принята за единицу времени величина стандартных суток, состоящих из 86400 секунд по шкале атомного времени TAI (СИ));  $r_0$  – постоянная (“средняя”) угловая скорость собственного вращения  $r_0 = 7.292115 \cdot 10^5$  рад/с, которая соответствует длительности стандартных суток  $D_0$ ;  $D(t)$  – длительностью суток, означающая длительность в секундах TAI, соответствующая повороту Земли на  $360^\circ$ , т.е. возрастанию времени на 24 часа в UT1 [5 - 31].

Величина  $r(t)$  может быть выведена из публикуемых значений  $Lod(t)$  и имеет вид:

$$r(t) \cong \left( 1 + \frac{Lod(t)}{D_0} \right) r_0$$

Воспользуемся классическими динамическими уравнениями Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции [31 - 33], которые представляются в известной форме

$$\frac{dJ\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}; \quad \boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T; \quad J = J^* + \delta J; \quad J^* = const; \quad (4.1)$$

$$J^* = diag(A^*, B^*, C^*); \quad \delta J = \delta J(t); \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\|;$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_K + \mathbf{M}^S + \mathbf{M}^L.$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости в связанной с Землей системе координат (референцсистеме), оси которой приближенно совпадают с главными центральными осями инерции  $J^*$  “замороженной” фигуры Земли с учетом “экваториальнового выступа” [31-33]. Выбранная система координат  $x^\alpha = (x^1 x^2 x^3)$  вращается вместе с Землей, причем ось  $x^3$  указывает направление, близкое к

направлению мгновенной оси собственного вращения Земли, а ось  $x^1$  определяет положение географической долготы таким образом, чтобы долгота Гринвичского меридиана была примерно равна нулю. Эта система координат выводится из не вращающейся геоцентрической системы путем пространственного вращения, которая учитывает движение осей Земли как в пространстве, так и при собственном вращении (система координат качественно и количественно согласуется с ITRF). Считается, что малые вариации тензора инерции  $\delta J$  могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные регулярным возмущающим влиянием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны, и, возможно, другие (годовые, полугодовые, месячные, двухнедельные и т.п.). Дополнительные возмущающие члены получаются при дифференцировании вектора кинетического момента деформируемой Земли. Они отнесены к вектору  $\mathbf{M}_K$  весьма сложной структуры, который аддитивно входит в  $\mathbf{M}$ ;  $\mathbf{M}^{S,L}$  – гравитационно-приливные возмущающие моменты от Солнца и Луны соответственно [31]. Например, выражение компоненты  $M_r^S$  имеет следующую структуру:

$$M_r^S = 3 \cdot \omega_0^2 [(B^* + \delta B - (A^* + \delta A)) \gamma_p \gamma_q + \delta J_{pq} (\gamma_p^2 - \gamma_q^2) + \delta J_{qr} \gamma_p \gamma_r - \delta J_{pr} \gamma_q \gamma_r], \quad (4.2)$$

где  $\omega_0$  – частота орбитального движения;  $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r$  – направляющие косинусы радиус вектора Солнца в связанной системе;  $A^*, B^*, C^*$  – эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформированности “замороженной” Земли. Они могут быть вычислены с достаточной точностью. Коэффициенты  $\delta A, \delta B, \delta J_{pq}, \delta J_{qr}, \delta J_{pr}$  обусловлены приливными суточными и полусуточными гравитационными воздействиями Луны и Солнца. Они не поддаются прямым измерениям. Для них могут быть получены косвенные оценки на основе измерений характеристик процесса.

С целью повышения точности интерполяции и прогноза неравномерности вращения Земли на коротких интервалах времени представляется

целесообразным учесть в разложении лунно-солнечного гравитационно-приливного момента третью гармонику в выражении  $\cos\theta \sin\theta$  :

$$\sin\theta \cos\theta = b(\theta^0, \psi^0) \cos\nu + d \cos 3\nu + \dots,$$

$$0.4 \leq b \leq \frac{4}{3\pi}, \quad |d| \ll 1.$$

Здесь  $\theta$  – угол нутации,  $\psi$  – угол прецессии,  $\nu$  – истинная аномалия.

Как следует из анализа данных наблюдений и измерений МСВЗ амплитуды указанных слагаемых более высокой степени малости и составляющих, обусловленных возмущениями зональных приливов, являются величинами одного порядка. Таким образом, для уточнения основной модели неравномерности вращения Земли также необходим учет поправок на возмущения зональных приливов с малыми амплитудами. Для этого вводится резидиум  $\Delta d(t)$  – флуктуации изменения длительности суток  $Lod(t)$ , вызванных приливными возмущениями тензора инерции деформируемой Земли. Усреднение по быстрой переменной  $\varphi$  ( $\varphi$  – угол собственного вращения Земли) третьего уравнения системы (4.1) для осевого вращения Земли  $r(t)$  дает выражение

$$\frac{d}{dt} \left[ (1 + \chi_{3r} (1 + k_a)) r + C^{*-1} h_3 \right] = M_r^S + M_r^L, \quad \chi_{3r} = \left\langle \frac{\delta C}{C^*} \right\rangle_{\varphi} \quad (4.3)$$

Компоненты лунно-солнечных гравитационно-приливных моментов  $M_r^{S,L}$  содержат коэффициенты  $\chi_{1r}^{S,L}, \chi_{2r}^{S,L}$ , которые получаются в результате усреднения выражения (2) и имеют вид

$$\chi_{1r}^S = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta B - \delta A}{C^*} \sin 2\varphi \right\rangle_{\varphi} - \left\langle \frac{\delta J_{pq}}{C^*} \cos 2\varphi \right\rangle_{\varphi} \quad (4.4)$$

$$\chi_{2r}^S = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta J_{qr}}{C^*} \sin \varphi \right\rangle_{\varphi} - \left\langle \frac{\delta J_{pr}}{C^*} \cos 2\varphi \right\rangle_{\varphi}.$$

Приливные коэффициенты  $\chi_{1r}^{S,L}, \chi_{2r}^{S,L}, \chi_{3r}$  являются периодическими функциями с основными частотами  $\mathcal{G}_j$  лунно-солнечных приливных воздействий и других факторов, определяющих колебания вариаций тензора инерции

(подразумевается, что набор частот  $\mathcal{G}_j$  может быть имперически скорректирован в ходе численного моделирования). К примеру,

$$\chi_{1r}^{S,L} = b_{10}^{S,L} + \sum_{j=1}^N b_{1j}^{S,L} \cos(2\pi\mathcal{G}_j\tau + \beta_{1j}^{S,L}). \quad (4.5)$$

Указанные коэффициенты содержат постоянные составляющие (с коэффициентами  $b_{i0}^{S,L}$ ), соответствующие основной модели, а также переменные величины, обусловленные другими приливными факторами. Коэффициенты  $b_{ij}^{S,L}, \beta_{ij}^{S,L}$  в выражениях для  $\chi_{1r}^{S,L}, \chi_{2r}^{S,L}, \chi_{3r}$  типа (4.5) подлежат определению на основе данных наблюдений. В приведенном выражении аргумент  $\tau$  означает время, измеряемое годами.

Интегрируя уравнение (4.3) для компоненты осевого вращения Земли  $r(t)$ , получим с учетом меняющихся приливных коэффициентов (4.3)–(4.5) структуру вариаций длительности суток:

$$\begin{aligned} Lod(\tau) &= d_1(\tau) + d_2(\tau) + \Delta d(\tau), \quad (4.6) \\ d_1(\tau) &= a_0 + \sum_{i=1}^4 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i\tau + \alpha_i), \\ d_2(\tau) &= \sum_{i=5}^6 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i\tau + \alpha_i), \\ \Delta d(\tau) &= -\chi_{3r} \left[ a_0 + \sum_{i=1}^4 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i\tau + \alpha_i) \right] + \frac{1}{(1 + \chi_{3r})} \times \\ &\quad \times \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^N \int a_{ij} \cos(2\pi\mathcal{G}_j\tau + \beta_{ij}) \cos(2\pi\nu_i\tau + \alpha_i) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 2$ ,  $\nu_3 = 13.28$ ,  $\nu_4 = 26.68$ ,  $\nu_5 = 3$ ,  $\nu_6 = 40$  – частоты, обусловленные лунно-солнечным возмущением;  $\alpha_i$  – фазы соответствующих колебаний; неизвестные  $a_{ij}$  – величины, подлежащие вычислению с помощью метода наименьших квадратов по измерениям МСВЗ. Эти коэффициенты однозначно связаны с неизвестными, содержащимися в выражении гравитационно-приливного момента (4.2) с учетом представлений типа (4.5).

Первое слагаемое  $d_1(\tau)$  в выражении  $Lod(\tau)$  представляет собой основную 9-параметрическую модель, изученную в [31-33], второе –  $d_2(\tau)$  содержит дополнительные члены более высокого порядка, получаемые из разложения лунно-солнечного гравитационно-приливного момента, а третье слагаемое – резидиум  $\Delta d(\tau)$ , обусловленный приливными возмущениями тензора инерции Земли и представленный в виде поправки между 13-параметрической моделью и данными измерений.

#### 4.2 Динамические уравнения движения деформируемой Земли относительно центра масс с учетом кинетического момента атмосферы.

Для получения динамических уравнений Эйлера–Лиувилля выпишем выражение кинетического момента системы относительно центра масс. При этом модель Земли будем представлять состоящей из твердого ядра, мантии и тонкого слоя – атмосферной оболочки. Считается, что реологическая модель мантии описывается линейной теорией вязкоупругости, а процесс деформирования происходит квазистатически. Тогда

$$\mathbf{G}_C = \mathbf{G}_C[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}] = \int_{\Omega} \rho \mathbf{r}^* \times \mathbf{v}^* dx; \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.7)$$

Здесь  $\rho = \rho(\mathbf{r}^*)$  - плотность Земли,  $\Omega$  - область, занимаемая трехслойной планетой,  $\mathbf{r}^*$  - радиус-вектор точек планеты относительно центра масс  $C$ ,  $\mathbf{v}^*$  - скорость точек. Справедливы соотношения:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{u}_c + \mathbf{u}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s \equiv 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_s; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{r} \in \Omega_e; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_e|_{G_e^+} + \mathbf{u}_a, \quad \mathbf{r} \in \Omega_a;$$

$$\mathbf{v}^* = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{u}_c + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}},$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_s \equiv 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_s; \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_e, \quad \mathbf{r} \in \Omega_e; \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_e|_{G_e^+} + \dot{\mathbf{u}}_a, \quad \mathbf{r} \in \Omega_a;$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  - вектор угловой скорости в связанной с Землей геоцентрической системе координат,  $\mathbf{u}$  - вектор приливных деформаций точек среды мантии,  $\mathbf{u}_C$

- смещение центра масс системы относительно первоначального положения  $\mathbf{u}_C$ ,  
 $\mathbf{r}$  - радиус-вектор точек относительно положения центра масс деформированной  
 фигуры Земли под действием центробежных сил (для точек твердого ядра  
 $\mathbf{u} = 0$ ),  $\mathbf{u}$  - скорости точек среды: если  $\mathbf{r}^* \in \Omega_e$ , то  $\mathbf{u}$  - скорости точек мантии,  
 если  $\mathbf{r}^* \in \Omega_a$ ,  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_e|_{G_e^+} = \mathbf{u}_a = \mathbf{v}$  - относительная скорость точек атмосферы ( $G_e^+$  -  
 внешняя граница мантии).

Тогда (4.7) запишем в виде интеграла – по твердой  $\Omega_s$ , упругой  
 $\Omega_e$  областям и атмосферной оболочке  $\Omega_a$ , которая окружает тонким слоем  
 деформируемую поверхность Земли:

$$\mathbf{G}_C = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r} - \mathbf{u}_C + \mathbf{u}) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{u}_C + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}] dx, \quad (4.9)$$

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_e \cup \Omega_a.$$

Заметим, что для точек твердой части имеет место равенство  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ ; а для  
 твердой и упругой частей равенство  $\mathbf{v} = 0$ . Кроме того, можно считать, что центр  
 масс каждой из частей планеты по отдельности совпадает с положением центра  
 масс всей системы как целого. Это влечет выполнение следующих равенств

$$\mathbf{u}_C = m^{-1} \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{u} dx, \quad \dot{\mathbf{u}}_C = m^{-1} \int_{\Omega_e} \rho \dot{\mathbf{u}} dx. \quad (4.10)$$

Через  $m$  здесь обозначена масса всей системы.

Полагая  $\varepsilon = |\mathbf{u}|/R_3$  - малый параметр ( $R_3$  - радиус Земли), после несложных  
 вычислений, опуская малые члены порядка  $\varepsilon^2$  и выше, приходим к следующему  
 выражению для кинетического момента системы

$$\mathbf{G}_C = J^* \boldsymbol{\omega} + \int_{\Omega_e + \Omega_a} \rho \{ \mathbf{u} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] + \mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] \} dx + \int_{\Omega_a} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dx. \quad (4.11)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{h} = \int_{\Omega_a} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dx, \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^T,$$

которое определяет кинетический момент атмосферы, где  $h_3$  - аксиальная  
 компонента кинетического момента зональной циркуляции атмосферы. Следует

заметить, что в атмосфере преобладают зональные движения, поэтому  $h_3$  существенно превышает величины экваториальных моментов  $h_1$  и  $h_2$  и является доминирующей. В силу квазистатической постановки задачи считается, что динамика тонкого приземного слоя атмосферы полностью обусловлена градиентом приливообразующего геопотенциала, поддерживающего вынужденные совместные колебания структуры (мантия + атмосферная оболочка) как единого целого.

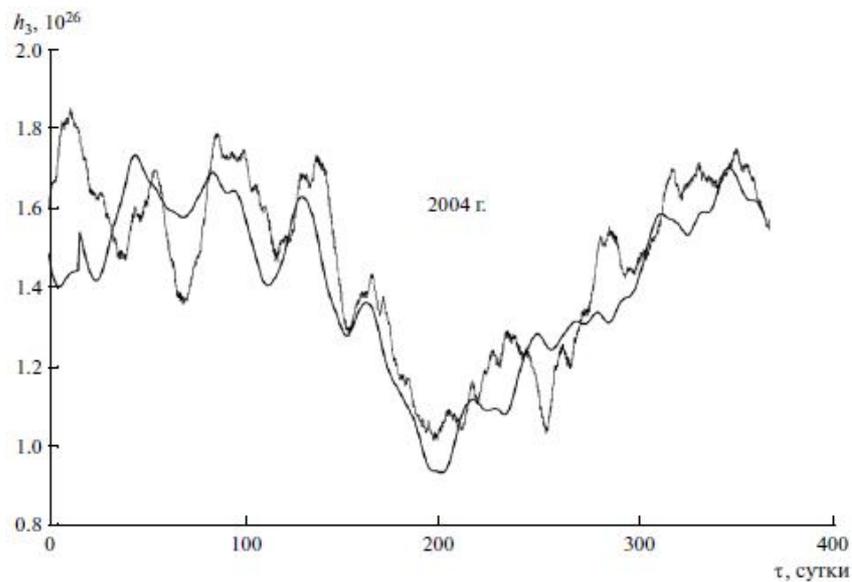


Рис. 4.1. Прогноз  $h_3$  на 2004 г. в сравнении с данными наблюдений NCEP/NCAR.

Таким образом, кинетический момент всей системы может быть представлен в виде

$$\mathbf{G}_C = J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h} \quad (4.12)$$

Используя представление (4.12), на основании теоремы об изменении кинетического момента, получаем классические динамические уравнения Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции:

$$\frac{dJ\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}; \quad \boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T; \quad J = J^* + \delta J; \quad J^* = const; \quad (4.13)$$

$$J^* = \text{diag}(A^*, B^*, C^*); \quad \delta J = \delta J(t); \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\|;$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_K + \mathbf{M}^S + \mathbf{M}^L.$$

Здесь  $\mathbf{M}$  учитывает гравитационно-приливные возмущающие моменты от Солнца и Луны;  $J^*$  - тензор инерции "замороженной" фигуры Земли с учетом "экваториального выступа" [31-33];  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  - эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций "замороженной" Земли. Считается, что малые вариации тензора инерции  $\delta J$  могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные регулярными лунно-солнечными приливными возмущениями.

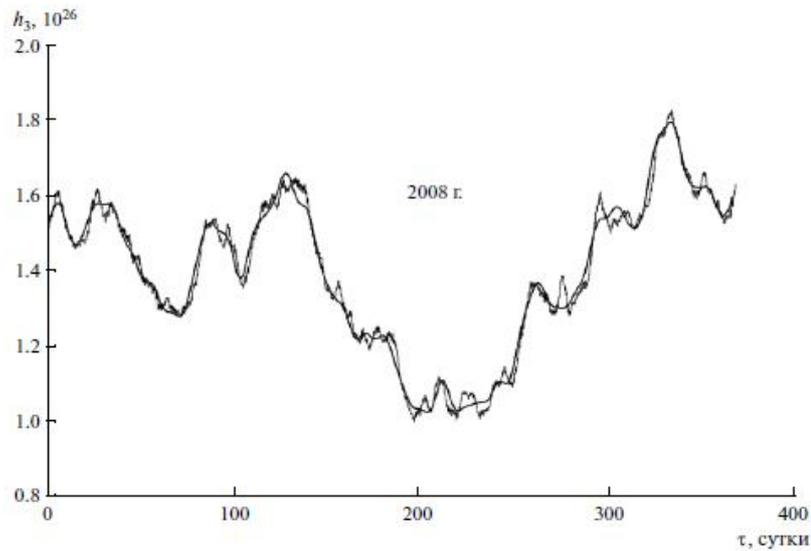


Рис. 4.2. Интерполяция  $h_3$  на 2008 г. в сравнении с данными наблюдений NCEP/NCAR

### 4.3 Моделирование глобальной составляющей кинетического момента атмосферы.

С учетом аксиальной составляющей  $h_3$  кинетического момента зональной циркуляции атмосферы уравнение осевого вращения Земли на основании системы (4.6) и анализа данных наблюдений MCB3, NCEP/NCAR [73] примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left[ (1 + \chi_{3r} (1 + k_a)) r + C^{*-1} h_3 \right] = M_r^S + M_r^L. \quad (4.14)$$

Здесь  $k_a$  - коэффициент, характеризующий относительное изменение осевого момента инерции атмосферной оболочки (по отношению к изменению осевого момента инерции упругой части) вследствие приливных деформаций планеты.

Учитывая выражения  $l.o.d.(\tau)$  (4.6), получим решение уравнения (4.14) для  $h_3$ :

$$h_3 = c_0 - k_a C^* \chi_{3r} \left( a_0 + \sum_{i=1}^4 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i \tau + \alpha_i) \right) \quad (4.15)$$

$$+ \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^N \frac{k_a C^*}{1 + \chi_{3r}} \int a_{ij} \cos(2\pi\vartheta_j \tau + \beta_{ij}) \cos(2\pi\nu_i \tau + \alpha_i) d\tau =$$

$$= c_0 + k_a C^* \Delta d(\tau) = c_0 + \Delta_1 h_3 + \Delta_2 h_3.$$

Здесь неизвестные коэффициенты  $k_a$ ,  $a_0$ ,  $a_{i0}$ ,  $a_{ij}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_{ij}$  определяются из данных наблюдений и измерений. Выражения (4.6), (4.15) построенных моделей иллюстрируют связь вращательного углового момента Земли за счет ее деформаций и кинетического момента приземного слоя атмосферы, обусловленных зональным приливообразующим геопотенциалом. Как следует из (4.6), (4.15), рост приливных коэффициентов для усредненного по собственному вращению тензора инерции приводит, с одной стороны, к росту глобальной составляющей кинетического момента атмосферы  $h_3$  и к уменьшению угловой скорости вращения Земли (т.е. увеличению  $\Delta d(\tau)$ ) с другой.

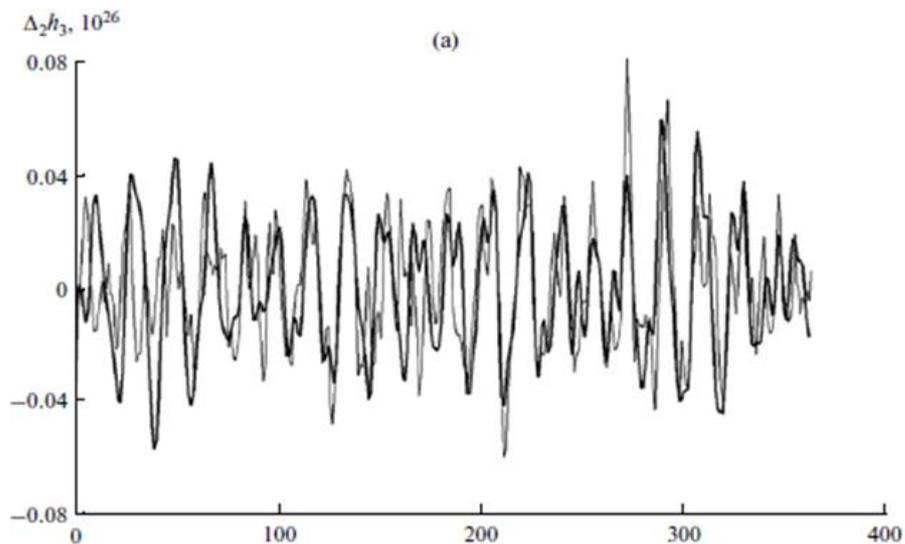


Рис. 4.3. Интерполяция слагаемого  $\Delta_2 h_3$  на 2008 год в сравнении с поправкой между данными наблюдений и измерений NCEP/NCAR и интерполяцией составляющей  $\Delta_1 h_3$ ;

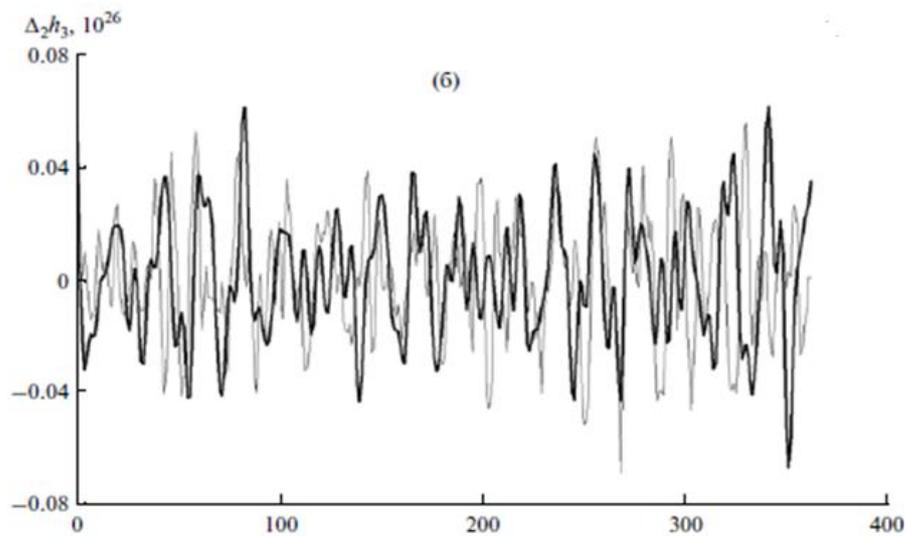


Рис. 4.4. Прогноз слагаемого  $\Delta_2 h_3$  на 2009 год в сравнении с поправкой между данными наблюдений и измерений NCEP/NCAR и интерполяцией составляющей  $\Delta_1 h_3$ .

Численное моделирование (интерполяция/прогноз) колебаний глобальной составляющей кинетического момента атмосферы проводится согласно рассмотренной выше процедуре для резидуума  $\Delta d(\tau)$ .

На рис. 4.1 приводится прогноз  $h_3$  на 2004 г., построенный с помощью модели (4.15) в сравнении с данными измерений NCEP/NCAR; он качественно отвечает данным наблюдений и измерений. На рис. 4.2, 4.3 в сравнении с данными наблюдений представлены интерполяция  $h_3$  (рис. 4.2) и прогноз (рис. 4.3) на 2008, 2009 гг., соответственно. Из анализа данных наблюдений следует, что амплитуда слагаемого  $\Delta_1 h_3$  из (4.15) в несколько раз превышает амплитуду  $\Delta_2 h_3$ . Последним при прогнозировании на достаточно длительные интервалы времени (полгода – год) можно пренебречь. Однако, высокочастотное выражение  $\Delta_2 h_3$  может оказаться существенным при прогнозировании кинетического момента атмосферы на короткие интервалы времени и анализе некоторых геофизических процессов планетарного масштаба. На рис. 4.4 приводятся интерполяция составляющей  $\Delta_2 h_3$  на 2008 год и прогноз на 2009 год соответственно (полужирная линия) в сравнении с поправкой между данными

наблюдений NCEP/NCAR и проведенной интерполяцией составляющей  $\Delta_1 h_3$  (тонкая линия).

Получены динамические уравнения возмущенных вращательных движений деформируемой Земли относительно центра масс в форме Эйлера - Лиувилля с учетом глобальной составляющей кинетического момента атмосферы.

Показано, что рационально построенная модель вариаций скорости осевого вращения Земли дает право с полной определенностью утверждать, что динамика тонкого приземного слоя атмосферы полностью обусловлена градиентом приливообразующего геопотенциала, в котором зональная компонента является доминирующей.

Проведено численное моделирование колебаний глобальной составляющей кинетического момента атмосферы на основе данных измерений МСВЗ и метеоданных NCEP / NCAR. Показано, что разработанная модель приливной неравномерности вращения Земли может быть эффективно использована для построения прогноза и интерполяции глобальной составляющей кинетического момента атмосферы.

## Заключение

В диссертации выполнено исследование влияния годовых, полугодовых и вековых вариаций геометрии масс планеты (Земли), а так же компонент ее относительного кинетического момента, на движение полюса оси вращения и на ее осевое вращение. Исследование вращательного движения изменяемого тела, рассматриваемого как свободное (изолированное) тело, выполнено на основе нового подхода к проблеме, опирающегося на применение уравнений движения в переменных Андуайе и в переменных действие-угол. Уравнения движения в указанных переменных Андуайе и действие-угол составляют основу выполненного исследования. Они позволили эффективно применить метод малого параметра. В невозмущенном вращательном движении учитываются слагаемые гамильтониана, обусловленные деформациями Земли из-за ее собственного вращения.

В диссертации изучаются вращательные движения небесного тела, геометрия масс которого испытывает малые циклические изменения и медленные вековые изменения. В основном исследуются динамические эффекты во вращении Земли, обусловленные ее годовыми и полугодовыми изменениями или вековой перестройкой масс. Исследование проводится в основном в рамках классической задачи Лиувилля, но с использованием нового подхода к проблеме, опирающегося на специальные формы уравнений движения (в том числе и канонические) в переменных Андуайе и действие-угол.

Даны приложения к изучению годового и полугодового колебаний полюса Земли и годовой и полугодовой вариации длительности суток. А также дано объяснение и теоретическое описание вековому дрейфу полюса Земли и неприливному ускорению ее осевого вращения. Теоретические результаты получены в хорошем согласии с данными наблюдений.

1. Получены новые формы уравнений движения задачи Лиувилля в переменных Андуайе и действие угол (для задачи Эйлера-Пуансо) для планеты со слабо изменяемой геометрией масс и малым относительным кинетическим моментом.

2. С помощью метода малого параметра и на основе невозмущенного чандлеровского движения (осесимметричной планеты) построены выражения возмущений первого порядка для переменных Андуайе и для компонент угловой скорости вращения, обусловленные годовыми и полугодовыми вариациями коэффициентов второй гармоники геопотенциала и составляющих вектора относительного кинетического момента.

3. На основе построенной теории вычислены годовые и полугодовые вариации координат полюса Земли и ее осевого вращения в хорошем согласии с данными многолетних строметрических наблюдений. Выявлены новые возмущения в движении полюса с малыми амплитудами на уровне микросекунд дуги.

4. На основе построенной теории вычислены вековые вариации координат полюса Земли и ее осевого вращения, вызванные вековыми изменениями геометрии масс Земли и ее относительного кинетического момента в хорошем согласии с данными многолетних астрометрических наблюдений.

5. С помощью метода малого параметра и на основе невозмущенного чандлеровского свободного движения (трехосной планеты) построены выражения возмущений первого порядка в переменных действие-угол задачи Эйлера-Пуансо, обусловленные годовыми и полугодовыми вариациями коэффициентов второй гармоники геопотенциала и составляющих вектора относительного кинетического момента.

6. На основе классических уравнений Эйлера-Лиувилля получили дальнейшее развитие методы прогноза определения параметров вращения Земли и их экстраполирования.

## Литература

1. Kinoshita H. (1977) Theory of Rotation of the Rigid Earth. *Celest. Mech.*, 1977, v.15, pp.277-326.
2. Манк У., Макдональд Г. (1964) Вращение Земли / Пер. с англ. В.В. Нестерова, под ред. Я.Я. Успенского. — М.: Мир. — 384 с.
3. Мориц Г., Мюллер А. (1992) Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев. Наукова думка. 1992.
4. Подобед В.В., Нестеров В.В. (1975) Общая астрометрия. - М.: Наука, 552с.
5. Kubo Y. (1991) Solution to the Rotation of the Elastic Earth by Method of Rigid Dynamics. *Celestial Mechanics*. v.50, pp.165-187.
6. Getino J., Ferrandiz J.M. (1990) A Hamiltonian Theory for an Elastic Earth: Canonical Variables and Kinetic Energy. *Celest. Mech.*, v.49, pp.303-326.
7. Getino J. and Ferrandiz J.M. (1991) A Hamiltonian theory for an elastic Earth: first order analytical integration. *Celestial Mechanics*, v. 51, p. 35-65.
8. Barkin Yu.V., Ferrandiz J.M, Getino J. (1995) About Application Angle-Action Variables in Rotation Dynamics of the Deformable Celestial Bodies. *Abstracts Book. IAU Symposium N172. Dynamics, Ephemerides and Astrometry in the Solar System (Paris , France , July 3-8,1995).* p.44.
9. Lambeck K. (1980) *The Earth's variable rotation: geophysical causes and consequences.* Cambridge University Press.
10. Куликов К.А. (1962) *Изменяемость широт и долгот.* М.: Физматгиз. 400с.
11. Barkin Yu.V. (1996) Unperturbed and Perturbed Chandler Motions: to the New Theory of the Earth Rotation // *Proceed. of the International Conference "Earth Rotation Reference Systems in Geodynamics and Solar System"* (Warsaw, Poland, September 18-20, 1995). *Journees 1995. SRC, PAS, Warsaw, Poland.* 1996. P. 83-86.
12. Barkin Yu.V. (1998) Unperturbed Chandler motion and perturbation theory of the rotation motion of deformable celestial bodies.// *Astronomical and Astrophysical Transactions.* V.17. Issue 3, P.179-219.
13. Barkin Yu.V. (2000a) Perturbated rotational motion of weakly deformable celestial bodies // *Astronomical and Astrophysical Transactions.* Vol.19. Issue 1, P. 19-65. doi: 10.1080/10556790008241350.

14. Barkin Yu.V. (2000b) A mechanism of variations of the Earth rotation at different timescales// In: Polar Motion: Historical and Scientific Problems (Eds. Steven Dick, Dennis McCarthy, and Brian Luzum)/ Proceedings of IAU Colloquium 178 (Cagliari, Sardinia, Italy, 27-30 September 1999). Astronomical Society of the Pacific conference series. Sheridan Books, Chelsea, Michigan. V. 208. P. 373-379.
15. Белецкий В.В. (1965) Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. - 416с.
16. Белецкий В.В. (1975) Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975.-308с.
17. Черноусько Ф.Л. (1963) Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс. Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1963. Т.3, №3, с.528-538.
18. Баркин Ю.В. (1978) О законах Кассини. Астрон. ж., 1978, т.55, №1, с.113- 122.
19. Баркин Ю.В. (1988) Вращательное движение тел солнечной системы. В книге: Пионеры освоения космического пространства (А89-42451 18-99). Москва, Издательство “Наука”, 1988, С. 161-171.
20. Barkin Yu.V. (1987a) An Analytical Theory of the Lunar Rotational Motion // In: Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets, Ed. P. Holota/ Proceedings of the Int. Symp. (Prague, Czechoslovakia, September 15-20, 1986)/ Monograph Series of UGTK, Prague. 1987. P. 657-677.
21. Демин В.Г., Баркин Ю.В (1982) Поступательно-вращательное движение небесных тел. Итоги науки и техники. Серия “Астрономия”, т.20. Изд-во ВИНТИ. АН СССР, М. 1982. С. 87-207.
22. Kinoshita H. (1972) First-order Perturbations of the Two Finite Body Problem. Publ. Astron. Soc. Japan., V.24, N4, p.p. 423-457.
23. Kinoshita H., Souchay J. (1991) The theory of the Nutation for the Rigid Earth Model at the Second Order. Celestial Mechanics. 1991.
24. Moore P., Zhang Q., and A. Alothman (2005) Annual and semiannual variations of the Earth’s gravitational field from satellite laser ranging and CHAMP, J. Geophys. Res., 110, B06401, doi:10.1029/2004JB003448.
25. Williams B.G., Mottinger N.A., Panagiotacopoulos N.D. (1983) Venus Gravity Field: Pioneer Venus Orbiter Navigation Results. Icarus, v.56, p.p. 578-589.
26. Садов Ю.А. Переменные действие-угол в задаче Эйлера-Пуансо. ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 962-964.

27. Козлов В.В. (1980) Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М. Изд-во МГУ, 1980, 232 р.
28. Архангельский Ю.А. (1977) Аналитическая динамика твердого тела. М., "Наука". 328с.
29. Демин В.Г., Конкина Л.И. (1989) Новые методы в динамике твердого тела. Фрунзе: Илим, 1989. 182 с.
30. Баркин Ю.В., Борисов А.В. (1989) Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа и родственных задач динамики твердого тела // Депонировано в ВИНТИ АН СССР. №5037-В-89. МВТУ им. Баумана. М. 103 с.
31. Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В. Неравномерности вращения Земли ДАН. // 2007.Т. 417. № 4. С. 483–488.
32. Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Рыхлова Л.В. Внутригодовые неравномерности вращения Земли // Астрон. журн. 2008. Т. 85. № 7. С. 657–664.
33. Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В. Небесномеханическая модель неравномерности вращения Земли// Космич. исслед. 2009. Т. 47. № 5. С. 452–459. (Cosmic Research. P. 417).
34. Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Скоробогатых И.В. Неравномерность вращения Земли и прогноз глобальной составляющей момента импульса атмосферы // ДАН. 2010. Т. 432.
35. Баркин М.Ю., Перепёлкин В.В., Скоробогатых И.В. (2011) Исследование приливных деформаций вращающейся Земли и прогнозирование глобальной составляющей момента импульса атмосферы. Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ. Том. 65, N 4. с. 165-173.
36. Баркин М. Ю., Перепёлкин В. В., Скоробогатых И. В. (2012) Небесномеханическая модель вращательного движения Земли и прогноз глобальной составляющей момента импульса атмосферы. Космические исследования. Том. 50, N 3. С. 271-282. DOI: 10.1134/S0023420612030089, PII: S0023420612030089.
37. Баркин М.Ю. (2011) Прогнозирование приливной неравномерности вращения Земли. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Избранные тезисы докладов. (Нижний Новгород, 24 – 30 августа 2011 г.). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2011. 246 с. 15-16. [http://www.ruscongrmech2011.ru/doc/izbran\\_tez.pdf](http://www.ruscongrmech2011.ru/doc/izbran_tez.pdf).
38. Akulenko L.D., Barkin M.Yu. , Markov Yu.G. and Perepelkin V.V (2011) Improved refined model of subannual nonuniform axial rotation of the Earth. Proceedings of the International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering

- Benidorm, Spain June 26-30 2011 Editor: J.Vigo-Aguiar. Vol. 4, pp. 1217-1226.  
<http://gsii.usal.es/~CMMSE/images/stories/congreso/program.pdf>
39. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. (2002) Прогноз движения полюса деформируемой Земли // Изв. РАН. Астрономический журнал. № 10. С. 952-960.
  40. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. (2001) Моделирование движения полюса деформируемой Земли // Доклады академии наук. Т. 379, № 2. С. 191-195.
  41. Баркин Ю.В., Демин В.Г., Панкратов А.А., Марков Ю.Г. (1982) Переменные Пуассона, Андуайе и Шарлье в небесной механике и динамике твердого тела // Сборник научно-методических статей по теоретической механике.-М.-Высшая школа.
  42. Суслов Г.К. (1946) Теоретическая механика. ОГИЗ, М., Л., 656 с.
  43. Баркин Ю.В. (2000) О вращательном движении твердого тела в обобщенно-потенциальном поле сил // Известия РАН. Механика твердого тела. N1, С.20-26.
  44. Аксенов Е П (1977) Теория движения искусственных спутников Земли. Наука. Москва. 360с.
  45. Баркин Ю.В. (2002) Механизмы эндогенной активности планет и спутников, ее ритмичности и цикличности, Тезисы докладов научной конференции «ритмичность и цикличность в геологии как отражение общих законов развития (7-8 февраля 2002, Москва), ИПКОН РАН, 43-46.
  46. Cheng M.K., Shum C.K. and Tapley B.D. (1997) Determination of long-term changes in the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations. J. Geophys. Res., 102, No B10, p.22.377-22.390.
  47. Cheng M., Tapley B. (1999) Seasonal variations in low degree zonal harmonics of the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations. Journal of Geophysical Research, V. 104, Issue B2, p. 2667-2682.
  48. Cheng M.K., Gunter B., Ries J.C., Chambers D.P. and Tapley B.D. (2003) Temporal Variation in the Earth's Gravity Field From SLR and CHAMP GPS Data Center for Space Research, The University of Texas at Austin, Austin, Texas 78759, USA.  
<http://www.pdfio.com/k-766194.html>.
  49. Cox C.M., Au A., Boy J.-P. , Chao B.F. (2004) Time-variable gravity: using satellite-laser-ranging as a tool for observing long term changes in the Earth system, in Proceedings from the 13th International Workshop on Laser Ranging, eds Noomen R., Klosko S., Noll C. & Pearlman M., NASA/CP-2003-212248. с. 1-9.

50. Баркин Ю.В. (1998) Об интегрируемых случаях задачи Лиувилля // Вестник МГУ. Физ., астрон., N2, С. 55-59.
51. Ferrandiz J.M., Barkin Yu.V. (2001b) On integrable cases of the Poincare problem. *Astronomical and Astrophysical Transactions*. Vol. 19, P. 769-780.
52. Дубошин Г.Н. (1975) Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука. 1975, 800 стр.
53. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Учебник для университетов. – Москва: ЧеРо.
54. Andoyer, H. (1923) *Cours de Mecanique Celeste*, vol.1, Gauthier-Villars, Paris.
55. Вулард Э. (1963) Теория вращения Земли около центра масс. М.: Физматгиз. 167 с.
56. Ferrandiz J.M., Getino J. (1993) On the Tidal Variations of the Geopotential. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1993, v.57, pp.279-292.
57. Getino J., Ferrandiz J.M. (1991) A Hamiltonian Theory for an Elastic Earth: Secular Rotational Acceleration. *Celest. Mech.*, v.52, pp.381-396.
58. Barkin Yu.V., J.M. Ferrandiz, M. Garcia Ferrandez and J.F. Navarro (2007) The elastic energy of rotational and luni-solar tides and their role in the Earth's seismic activity // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. 2007. V. 26, No. 4-5, August-October 2007, P. 163-198. doi: 10.1080/10556790601017224
59. Ferrandiz J.M. and Barkin Yu.V. (2001a) Dynamics of the rotational motion of the planet with the elastic mantle, liquid core and with the changeable external shell // *Proceedings of International Conference «AstroKazan-2001»*. Astronomy and geodesy in new millennium (24-29 September 2001), Kazan State University: Publisher «DAS». P. 123-129.
60. Пуанкаре А. (1971) Новые методы небесной механики/Пуанкаре А. Избранные труды. М.: Наука, 1971, т.1. с. 7-326.
61. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. (1963) Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е издание, исправ. и дополнен. – М.: Физматгиз. 503 с.
62. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971.
63. Сидоренков Н.С. (2002) Физика неустойчивостей вращения Земли. – М.: Наука. Физматлит. 384 с.
64. Barkin Yu.V. (2007) To model explanation of annual variation of oblateness and annual pole oscillations of the Earth // *Proceedings of IUGG XXIV General Assembly, Perugia, Italy 2007*:

- Earth: Our Changing Planet (Perugia, Italy, July 2-13, 2007), (G) – IAG, GS003. 2007. P. 3801. 2p.
65. Barkin Yu.V. (2001) Explanation and prediction of the secular variations of the Earth rotation, geopotential, force of gravity and geocenter drift // Proceedings of International Conference «AstroKazan-2001». Astronomy and geodesy in new millennium (24-29 September 2001), Kazan State University: Publisher «DAS». P. 73-79.
  66. Яцкив Я.С., Миронов Н.Т., Корсунь А.А., Тарадий В.К. (1976) Движение полюсов и неравномерность вращения Земли. “Астрономия” (“Итоги науки и техники”). – Т.12 (части 1 и 2). М.: ВИНТИ.
  67. Jin Shuanggen, Zhang L.J., Tapley B.D. (2011) The understanding of length-of-day variations from satellite gravity and laser ranging measurements. *Geophys. J. Int.* (2011) 184, 651–660.
  68. Shen Wen-Bin, Sun Rong, Chen Wei, Zhang Zhenguo, Jin Li, Jiancheng Han, Hao Ding (2011) The expanding Earth at present: evidence from temporal gravity field and space-geodetic data. *Annals of Geophysics*, 2011, N4, doi: 10.4401/ag-4951.
  69. Cheng M., Tapley B. (2009) Secular variations in the low degree gravity field from SLR. Center for Space researches, The University of Texas at Austin. DynaQlim/GGOS Workshop, Espoo, Finland. Ppt.
  70. Gross R.S., Vondrak J. (1999) Astrometric and space-geodetic observations of polar wander. *Geophysical res. Ltrs/ 1999GL900422*, Vol. 26, No. 14, p. 2085.
  71. Scalera G. (2011) South American Volcanoes and Great Earthquakes –Volcano-Seismic Correlation vs. Secular PM. Ettore Majorana Foundation and Centre for Scientific Culture 37th Interdisciplinary Workshop of the International School of Geophysics Erice, Sicily, 4-9 October 2011 Extended Abstracts Book, p.125-129.
  72. Stephenson F.R. and Morrison L.V. (1995) Long term fluctuations in the Earth’s rotation: 700 BC to AD 1990, *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, 351, p. 165-202.
  73. IERS Annual Reports, 2000/2002/ Frankfurt am Mein:BKG. 2001/2003.; NCEP/NCAR(<ftp://ftp.aer.com/>).