

Научная статья
УДК 539.31
DOI: [10.34759/trd-2023-128-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-03)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПОР ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Сергей Алексеевич Боршевецкий

ПАО «Корпорация «Иркут»,

Москва, Россия

wrdeww@bk.ru

Аннотация. Аналитический подход в задачах с крупногабаритными пластинами или оболочках с большим количеством дополнительных опор имеет множество трудностей. В статье предлагается методика определения расположения таких дополнительных опор для двух моделей движения пластины: Кирхгофа и Тимошенко с использованием функции влияния и метода компенсирующих нагрузок при воздействии гармонической нагрузки. Используя формулу Эйлера, задача из нестационарной сводится к стационарной. Достоинством предложенной методики является сохранение аналитического вида решения задачи, что позволяет подставлять различные физические и геометрические характеристики материала конструкции, виды и произвольные места приложения гармонической нагрузки. В конце статьи приведен численный пример и сравнение с аналитическими результатами.

Ключевые слова: пластина Кирхгофа, пластина Тимошенко, жесткость конструкции, гармоническая нагрузка, шарнирно опертая пластина, функция влияния

Для цитирования: Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины при гармоническом воздействии // Труды МАИ. 2023. №128. DOI: [10.34759/trd-2023-128-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-03)

Original article

DETERMINING THE LOCATION OF ADDITIONAL SUPPORTS OF A PIVOTALLY SUPPORTED PLATE UNDER HARMONIC LOADING

Sergey A.Borshevetskiy

Irkut Corporation, Moscow, Russia

wrdeww@bk.ru

Abstract: The article proposes a method for determining the location of such additional supports for two models of plate movement: Kirchhoff and Timoshenko. A rectangular thin pivotally supported plate of known dimensions of constant thickness, which has additional supports in area, is considered. Additional supports installed with the same pitch along the coordinate axes, forming equal segments. The harmonic concentrated force acts on a random place of the plate. It is necessary to determine the location of additional supports based on the stiffness condition: the maximum deflection does not exceed the set value. To determine the location of a set of supports, the segment size satisfying the stiffness condition is first determined. The solution sought using the influence function, as a reaction of the system

to a single impact. Since the harmonic load is representable by Euler, the problem reducing to a stationary one. Additional supports replaced by compensating loads. The influence function decomposing into double Fourier series satisfying the hinge support at the edges. Unknown reactions in the supports are determined from a system of linear algebraic equations according to Kramer's rule. Then everything substituting into the condition of structural rigidity and this equation solving. At the end of the article, a numerical example and verification calculation giving, which show the fulfillment of the structural rigidity condition. The main advantage of the proposed methodology is the analytical form of the solution. This allows you to substitute any characteristics of the material, the geometry of the plate, as well as the magnitude of the desired load. In general, the technique is also applicable for shells using a local coordinate system that allows the shell to expand into a plate.

Keywords: Kirchhoff plate, Timoshenko plate, structural rigidity, harmonic load, pivotally supported plate, influence function

For citation: Borshevetskiy S.A. Determining the location of additional supports of a pivotally supported plate under harmonic loading. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. DOI: [10.34759/trd-2023-128-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-03)

1. Введение

Современные конструкции машиностроения, в том числе космические и летательные аппараты, используют тонкие панели, обшивки и другие крупногабаритные пластины и оболочки. Несомненным преимуществом такой

конструкции является ее легкость, а также она выполняет аэродинамическую функцию, улучшая летные характеристики. Однако, за счет своей тонкостенности, подобные конструкции подвержены потерям устойчивости. Для увеличения жесткости конструкции используются дополнительные опоры. Так, например, по всей длине крыла расположены лонжероны и нервюры, увеличивающие жесткость обшивки, а по фюзеляжу расположены шпангоуты. Проблема расположения дополнительных опор для выполнения требуемого условия жесткости конструкции является актуальной при разработке новых конструкций.

Другим решением проблемы жесткости стало использование вафельных оболочек. Данный вид оболочек широко используется в современной ракетно-космической отрасли и авиационной технике. Основной задачей теории вафельных оболочек стали: определение геометрических размеров обшивки и подкреплявших ее ребер во избежании потери устойчивости конструкции. Наиболее подробно такие задачи рассмотрены в пособии В.Т. Лизина и В.А. Пяткина [1].

Расчеты подкрепленных оболочек актуальны в настоящее время. Находятся все новые методики и подходы в расчетах вафельных оболочек, что демонстрирует работа [2]. В других работах, например, [3 - 4] используется уточненная теория оболочек с энергетическим подходом к решению. При этом отмечается, что полученная модель обладает большей точностью, чем традиционные модели Кирхгофа и Тимошенко.

В аналитических расчетах удобнее всего использовать функции влияния (Грина). В работах [5 - 9] демонстрируется грамотное использование данного метода для определения реакции всей исследуемой системы на дельта-функцию Дирака с

последующей сверткой с любой интересующей нагрузкой. Из статей видно, что функция влияния широко применяется для задач об определении напряженного состояния в пластинах и оболочках различных видов и свойств материала.

В статье предлагается методика определения расположения дополнительных опор для прямоугольной пластины при воздействии гармонической нагрузки. В случае произвольного закрепления и замены дополнительных опор их реакциями, для анализа необходимо воспользоваться методом компенсирующих нагрузок [10]. В работах [11 - 13] хорошо демонстрируется применение этого метода.

Достоинством предлагаемой методики является сохранение аналитического вида, что позволяет подставлять различные физические и геометрические характеристики материала конструкции, виды и места приложения нагрузки. Ранее уже были рассмотрены случаи статического и гармонического нагружения [14, 15].

2. Общая постановка задачи

Рассматривается прямоугольная шарнирно опертая тонкая пластина размерами a на b постоянной толщины h , имеющая множество дополнительных опор по площади (Рисунок 1). Материал пластины упругий и изотропный. Начало декартовой системы координат расположено в левом верхнем углу срединной поверхности пластины. Дополнительные опоры расставлены с одинаковым шагом по осям координат, образуя одинаковые сегменты, удовлетворяющие условию жесткости конструкции: прогиб не превышает заранее известного значения. Однако, в силу того, что теории Кирхгофа и Тимошенко применимы лишь для тонких пластин, максимальный прогиб не должен превышать толщины пластины.

$$\begin{aligned} |w_{\max}(x, y, t)| &\leq w_0, \\ w_0 &\leq h. \end{aligned} \quad (1)$$

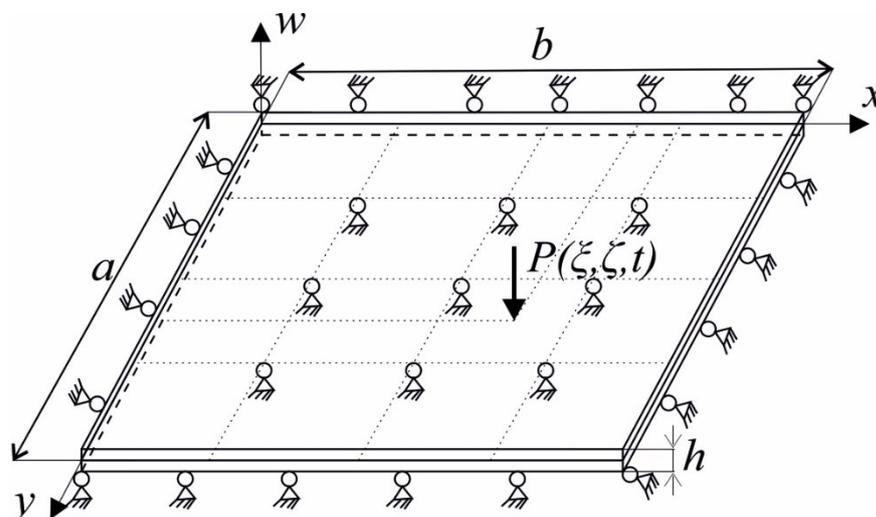


Рисунок 1 — Общая постановка задачи

В начальный момент времени в случайное место пластины прикладывается произвольная сосредоточенная гармоническая нагрузка. Требуется определить необходимое количество и расположение дополнительных опор, удовлетворяющих условию жесткости конструкции (1). Однако, чтобы расставить дополнительные опоры, необходимо сначала определить размер сегмента, удовлетворяющего условию жесткости конструкции. Размер такого сегмента определяется из решения следующей, более простой, задачи.

В качестве объекта исследования берем шарнирно опертую со всех сторон тонкую прямоугольную пластину размерами a на b постоянной толщины h , имеющую лишь четыре дополнительные опоры (Рисунок 2). Материал пластины упругий и изотропный. Начало декартовой системы координат расположено в левом верхнем углу срединной поверхности пластины. В центр пластины с координатами (X, Y) приложена гармоническая сосредоточенная нагрузка $P(X, Y, t)$.

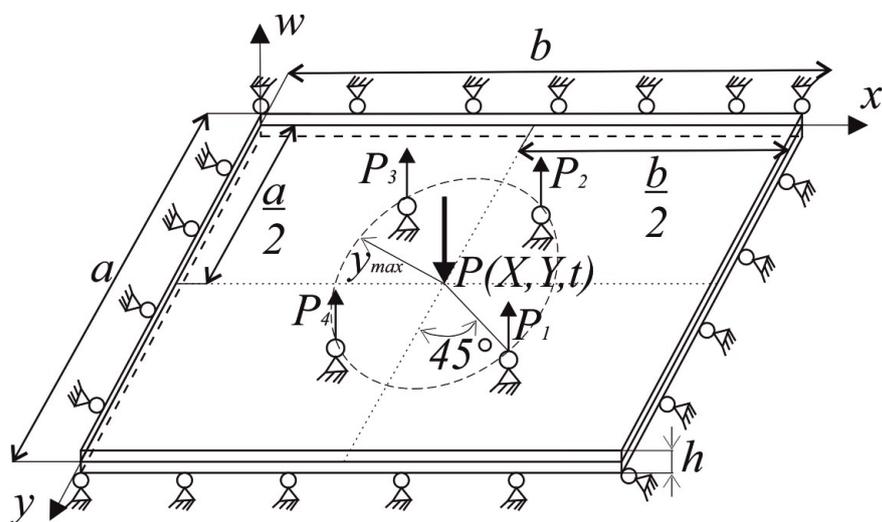


Рисунок 2 — Постановка задачи для определения размера сегмента

Вокруг точки приложения нагрузки на некотором радиусе y_{\max} , подлежащем определению, установлены четыре дополнительные опоры, образующие квадратный сегмент. Требуется определить радиус расположения дополнительных опор, основывая на том факте, что максимальный прогиб не должен превышать предельно допустимой величины w_0 .

3. Общее решение задачи для пластины Кирхгофа

Для начала рассматривается модель пластины Кирхгофа. Уравнение движения пластины по этой модели в перемещениях [16] запишется следующим образом:

$$\rho h \ddot{w}(x, y, t) = -D \Delta \Delta w(x, y, t) + P(t),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где w — нормальный прогиб, ρ — плотность материала пластины,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

— цилиндрическая жесткость.

Запишем начальные условия:

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

и граничные условия:

$$w(x, y, t) \Big|_{x=0, b} = \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0, b} = 0,$$

$$w(x, y, t) \Big|_{y=0, a} = \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \Big|_{y=0, a} = 0.$$

Граничные условия для дополнительных опор имеют вид:

$$w(q_i, z_i, t) = 0, \quad i = 1..4, \quad (2)$$

где

$$q_1 = \frac{b}{2} + y_{\max} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_1 = \frac{a}{2} + y_{\max} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$q_i = q_{i-1} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) y_{\max} \sin\left(\frac{i\alpha\pi}{180}\right), \quad i = 2..4,$$

$$z_i = z_{i-1} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) y_{\max} \cos\left(\frac{i\alpha\pi}{180}\right).$$

Так как воздействующую гармоническую нагрузку можно представить в виде

$$P(t) = P_A e^{i\omega t}, \text{ то прогиб представляется аналогичным образом } w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t}.$$

Тогда уравнение движение пластины можно свести к следующему виду:

$$-\rho h \omega^2 w(x, y) = -D \Delta \Delta w(x, y) + P_A,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

Таким образом избавляемся от переменной по времени t , оставляя в уравнении только круговую частоту гармонических колебаний ω . Она связана с технической частотой [17] следующим коэффициентом:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (3)$$

Решение задачи будем искать при помощи функции влияния (Грина). Представим прогиб как сумму сверток этой функции с действующей нагрузкой и с неизвестными реакциями в дополнительных опорах:

$$w(x, y) = G(x, y; X, Y) * P_A + \sum_{i=1}^4 G(x, y; q_i, z_i) * P_i. \quad (4)$$

Тогда постановка задачи через функцию влияния переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} -\rho h \omega^2 G &= -D \Delta \Delta G + \delta(x - \xi, y - \zeta), \\ G|_{x=0,a} &= G|_{y=0,b} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|_{x=0,a} = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \Big|_{y=0,b} = 0. \end{aligned}$$

Разложим функцию влияния в тригонометрические ряды Фурье, удовлетворяющие граничным условиям закрепления пластины [18, 19].

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y), \\ \delta(x - \xi, y - \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{nm}(\xi, \zeta) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{\pi n}{a}, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{b}, \\ \delta_{nm}(\xi, \zeta) &= \frac{4}{ab} \sin(\lambda_n \xi) \sin(\lambda_m \zeta). \end{aligned}$$

Опустив знаки суммирования и сократив тригонометрические множители, получим уравнение движения в коэффициентах рядов функции влияния:

$$-\rho h \omega^2 G_{nm} = -D(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2 G_{nm} + \delta_{nm}(\xi, \zeta).$$

Решив уравнение относительно коэффициентов функции влияния, получим:

$$G_{nm} = \frac{\delta_{nm}(\xi, \zeta)}{D(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2 - \rho h \omega^2}.$$

Тогда искомая функция влияния имеет вид:

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_{nm}(\xi, \zeta)}{D(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2 - \rho h \omega^2} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y)$$

Из выражения в знаменателе можно определить собственные частоты колебаний.

Следующим шагом станет определение реакций в опорах. Применим на запись функции прогиба граничные условия в дополнительных опорах (1). Получаем систему линейных алгебраических уравнений. Решаем СЛАУ по правилу Крамера. В матричном виде эти уравнения будут иметь вид:

$$M_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = -P_A \begin{pmatrix} G(q_1, z_1; X, Y) \\ G(q_2, z_2; X, Y) \\ G(q_3, z_3; X, Y) \\ G(q_4, z_4; X, Y) \end{pmatrix},$$

$$M_{4 \times 4} = \left(G(q_i, z_i; q_j, z_j) \right)_{i \times j},$$

Тогда реакции в опорах определяются:

$$P_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} G(q_1, z_1; q_1, z_1) \dots - P_A G(q_1, z_1; X, Y) \dots G(q_1, z_1; q_4, z_4) \\ G(q_2, z_2; q_1, z_1) \dots - P_A G(q_2, z_2; X, Y) \dots G(q_2, z_2; q_4, z_4) \\ G(q_3, z_3; q_1, z_1) \dots - P_A G(q_3, z_3; X, Y) \dots G(q_3, z_3; q_4, z_4) \\ G(q_4, z_4; q_1, z_1) \dots - P_A G(q_4, z_4; X, Y) \dots G(q_4, z_4; q_4, z_4) \end{vmatrix},$$

$$\Delta = |M_{4 \times 4}|.$$

Реакции в опорах найдены. Подставляя их в функцию прогиба (4), получаем аналитические зависимости функции прогиба пластины. Дальнейшее решение задачи возможно только численно.

4. Общее решение задачи для пластины Тимошенко

Теперь рассмотрим модель пластины Тимошенко. Уравнения движения пластины по этой модели в перемещениях запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c_2^2 k^2 (\kappa + \Delta w) + \frac{p}{\rho h}, \\ \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial x} + c_2^2 \left(\Delta \chi_1 - \frac{k^2 h}{I} \left(\chi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right), \\ \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial y} + c_2^2 \left(\Delta \chi_2 - \frac{k^2 h}{I} \left(\chi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right), \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \kappa = \frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}, \end{aligned}$$

где w — нормальный прогиб, χ_1, χ_2 — углы поворота волокна срединной поверхности пластины, λ и μ — параметры Ляме, $k^2 = \frac{5}{6}$ — сдвиговой коэффициент,

$I = \frac{h^3}{12}$ — момент инерции.

Запишем начальные условия:

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\chi_1|_{t=0} = \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\chi_2|_{t=0} = \frac{\partial \chi_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

и граничные условия:

$$w|_{x=0,a} = w|_{y=0,b} = \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = \frac{\partial \chi_2}{\partial y} \Big|_{x=0,b} = 0.$$

Граничные условия для дополнительных опор имеют вид:

$$w(q_i, z_i, t) = 0, \quad i = 1..4, \quad (5)$$

где

$$q_1 = \frac{b}{2} + y_{\max} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_1 = \frac{a}{2} + y_{\max} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$q_i = q_{i-1} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) y_{\max} \sin\left(\frac{i\alpha\pi}{180}\right), \quad i = 2..4,$$

$$z_i = z_{i-1} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) y_{\max} \cos\left(\frac{i\alpha\pi}{180}\right).$$

Аналогично пластине Кирхгофа гармоническую нагрузку можно представить в виде $P(t) = P_A e^{i\omega t}$, а значит прогиб и углы поворота волокна представляются схожим образом: $w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t}$, $\chi_1(x, y, t) = \chi_1(x, y) e^{i\omega t}$, $\chi_2(x, y, t) = \chi_2(x, y) e^{i\omega t}$. Тогда уравнения движение пластины можно свести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 w &= c_2^2 k^2 (\kappa + \Delta w) + \frac{p}{\rho h}, \\
-\omega^2 \chi_1 &= \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial x} + c_2^2 \left(\Delta \chi_1 - \frac{k^2 h}{I} \left(\chi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right), \\
-\omega^2 \chi_2 &= \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial y} + c_2^2 \left(\Delta \chi_2 - \frac{k^2 h}{I} \left(\chi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом избавляемся от переменной по времени t , оставляя в уравнении только круговую частоту гармонических колебаний ω . Решение задачи будем искать при помощи функции влияния (Грина). Представим прогиб и углы поворота волокна как сумму сверток этой функции с действующей нагрузкой и с неизвестными реакциями в дополнительных опорах:

$$\begin{aligned}
w(x, y, \omega) &= G(x, y, \omega; X, Y) * P_A + \sum_{i=1}^4 G(x, y, \omega; q_i, z_i) * P_i, \\
\chi_1(x, y, \omega) &= X_1(x, y, \omega; X, Y) * P_A + \sum_{i=1}^4 X_1(x, y, \omega; q_i, z_i) * P_i, \\
\chi_2(x, y, \omega) &= X_2(x, y, \omega; X, Y) * P_A + \sum_{i=1}^4 X_2(x, y, \omega; q_i, z_i) * P_i.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тогда постановка задачи через функцию влияния переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 G &= c_2^2 k^2 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) + \frac{\delta(x-\xi, y-\zeta)}{\rho h}, \\
-\omega^2 X_1 &= \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y} \right) + c_2^2 \left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} - \frac{k^2 h}{I} \left(X_1 + \frac{\partial G}{\partial x} \right) \right), \\
-\omega^2 X_2 &= \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y} \right) + c_2^2 \left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2} - \frac{k^2 h}{I} \left(X_2 + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right), \\
G|_{t=0} = \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, \quad X_1|_{t=0} = \frac{\partial X_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad X_2|_{t=0} = \frac{\partial X_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\
G|_{x=0,a} = G|_{y=0,b} = \frac{\partial X_1}{\partial x} \Big|_{x=0,a} &= \frac{\partial X_2}{\partial y} \Big|_{x=0,b} = 0, \\
G(q_i, z_i, \omega) &= 0 \quad i = 1..4.
\end{aligned}$$

Раскладываем функции влияния для прогиба и углов поворота волокна в тригонометрические ряды Фурье, удовлетворяющие граничным условиям закрепления пластины.

$$\begin{aligned}
G(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}(\omega) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y), \\
X_1(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{1nm}(\omega) \cos(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y), \\
X_2(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{2nm}(\omega) \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_m y), \\
\delta(x-\xi, y-\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{nm}(\xi, \zeta) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{\pi n}{a}, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{b}, \\
\delta_{nm}(\xi, \zeta) &= \frac{4}{ab} \sin(\lambda_n \xi) \sin(\lambda_m \zeta).
\end{aligned}$$

Опустив знаки суммирования и сократив тригонометрические множители, получим уравнения движения в коэффициентах рядов функций влияния:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 G_{nm} &= -c_2^2 k^2 \left(\lambda_n X_{1nm} + \lambda_m X_{2nm} + G_{nm} (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) \right) + \frac{\delta_{nm}}{\rho h}, \\
-\omega^2 X_{1nm} &= -\frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\lambda_n^2 X_{1nm} + \lambda_n \lambda_m X_{2nm} \right) - c_2^2 \left((\lambda_n^2 + \lambda_m^2) X_{1nm} + \frac{k^2 h}{I} (X_{1nm} + \lambda_n G_{nm}) \right), \\
-\omega^2 X_{2nm} &= -\frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\lambda_m^2 X_{2nm} + \lambda_n \lambda_m X_{1nm} \right) - c_2^2 \left((\lambda_n^2 + \lambda_m^2) X_{2nm} + \frac{k^2 h}{I} (X_{2nm} + \lambda_m G_{nm}) \right).
\end{aligned}$$

Решив систему уравнений относительно коэффициентов функций влияния, получим следующий результат для нормальных перемещений:

$$G_{nm} = \frac{\delta_{nm}(\xi, \zeta) \left((\rho c_2^2 (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) - \omega^2 \rho + (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) (\lambda + \mu)) I_z + c_2^2 k^2 \rho h \right)}{\rho h \left((-k^2 c_2^2 (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) + \omega^2) \left((\lambda_n^2 + \lambda_m^2) (-\rho c_2^2 - (\lambda + \mu)) + \omega^2 \rho \right) I_z - \omega^2 c_2^2 k^2 \rho h \right)}.$$

Из выражения в знаменателе можно определить собственные частоты колебаний. Так как нас интересуют только нормальные прогибы, то в дальнейшем работы с функциями влияния углов поворота волокна не происходит.

Следующим шагом станет определение реакций в опорах. Определяются они аналогично методу, описанному по пластине Кирхгофа. Подставляя их в функцию прогиба для нормальных перемещений (6), получаем аналитические зависимости функции прогиба пластины. Дальнейшее решение задачи, как и в случае с Кирхгофом, только численно.

5. Численный пример

В таблице ниже представлены физические и геометрические характеристики материала исследуемой конструкции для обеих моделей.

Геометрические и физические характеристики полосы

Характеристика	Величина
Модуль упругости первого рода (Юнга), E , Па	$71 \cdot 10^9$
Модуль сдвига, G , Па	$27 \cdot 10^9$
Коэффициент Пуассона, ν	0.31
Толщина полосы, h , м	0.004
Ширина пластины, a , м	1
Длина пластины, b , м	2
Плотность материала пластины, ρ , кг/м ³	2640
Число членов ряда, N	160 (120 для Тимошенко)
Амплитуда действующей нагрузки, P_A , Н	-750
Предельно допустимый прогиб, w_0 , м	0.004

Искомая гармоническая нагрузка представлена ниже, а ее график — на рисунке 3.

$$P(t) = P_A \cos(\nu_1 t).$$

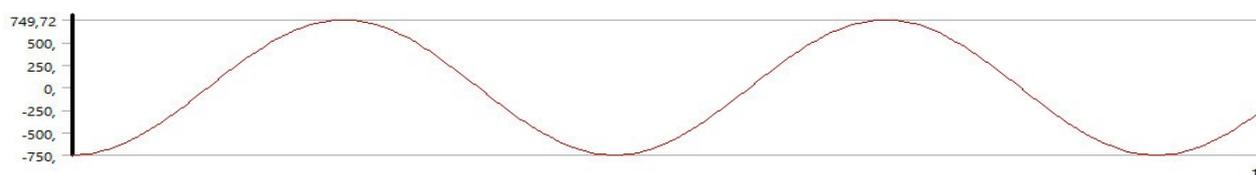


Рисунок 3 — График действующей гармонической нагрузки

Подставляем все в описанные выше формулы и определяем первые круговые собственные частоты колебаний из знаменателей функций влияния. Для пластин Кирхгофа и Тимошенко они составляют:

$$\begin{aligned}\omega_1^K &= 77.70 \text{ Гц}, & \omega_1^T &= 86.89 \text{ Гц}, \\ \omega_2^K &= 124.33 \text{ Гц}, & \omega_2^T &= 139.01 \text{ Гц}.\end{aligned}$$

Или, если пересчитать через техническую частоту по формуле (3):

$$\begin{aligned}\nu_1^K &= 12.36 \text{ Гц}, & \nu_1^T &= 13.83 \text{ Гц}, \\ \nu_2^K &= 19.79 \text{ Гц}, & \nu_2^T &= 22.13 \text{ Гц}.\end{aligned}\tag{7}$$

Так как технические частоты использовать удобнее при анализе, в дальнейшем все упоминания о частотах будут вестись о них, а не о круговых.

Подставляя заданные выше параметры в записи функции прогиба, получаем функцию прогиба от нескольких переменных $w(x, y, \omega; y_{\max})$. Максимальный прогиб будет в точке приложения нагрузки около первой собственной частоты колебаний. Применяя условие жесткости конструкции (1), приходим к уравнению условия жесткости конструкции относительно радиуса y_{\max} , на котором расположены дополнительные опоры.

$$w(X, Y, \nu_1; y_{\max}) + w_0 = 0.$$

Решение уравнений условия жесткости конструкции для обеих моделей пластин приведены на рисунках 4 и 5.

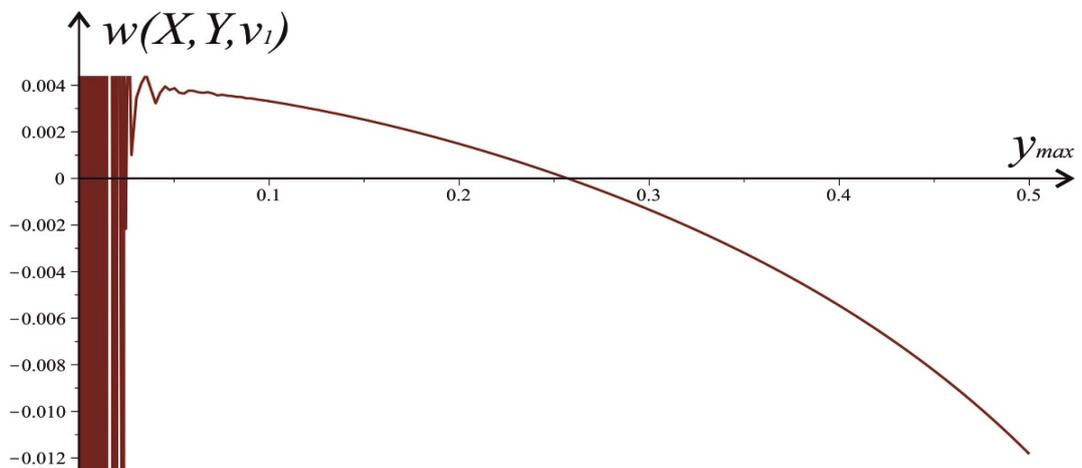


Рисунок 4 — График решений уравнений жесткости, пластина Кирхгофа

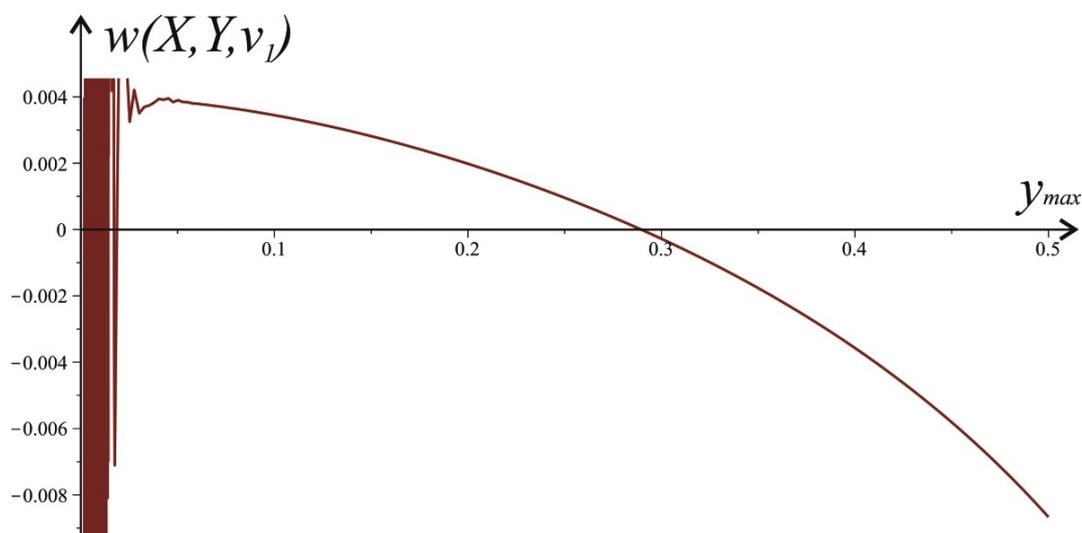


Рисунок 5 — График решений уравнений жесткости, пластина Тимошенко

Численно, решение уравнений следующее:

$$y_{\max}^K = 0.257 \text{ м,}$$

$$y_{\max}^T = 0.289 \text{ м.}$$

Значение, полученное с использованием модели пластины Кирхгофа, отличается от модели Тимошенко на 13%, что является следствием учета углов поворота волокна, заложенные в более точной и подробной модели. По найденному радиусу с помощью зависимостей определяются координаты дополнительных опор, образующие квадратный сегмент.

6. Проверочный расчет

Для верификации полученного значения воспользуемся программой Ansys Workbench, где с помощью метода конечных элементов (МКЭ) построим модель исследуемой пластины, расставив четыре дополнительные опоры на найденных радиусах y_{\max} . На рисунках 6 и 7 показаны объекты исследования. Дополнительные геометрические пересечения необходимы для корректного приложения нагрузки

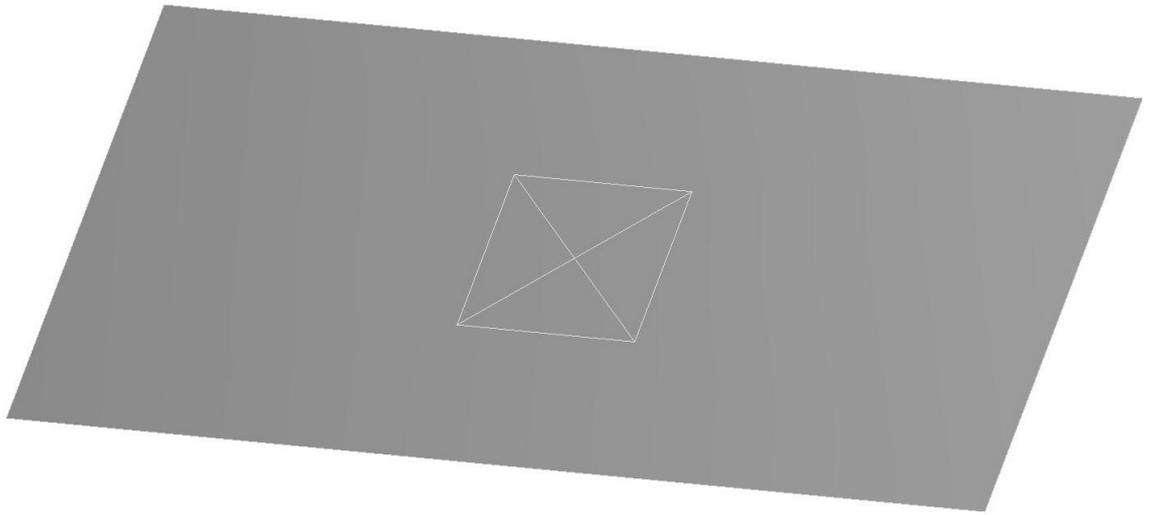


Рисунок 6 — Объект исследования по модели Кирхгофа

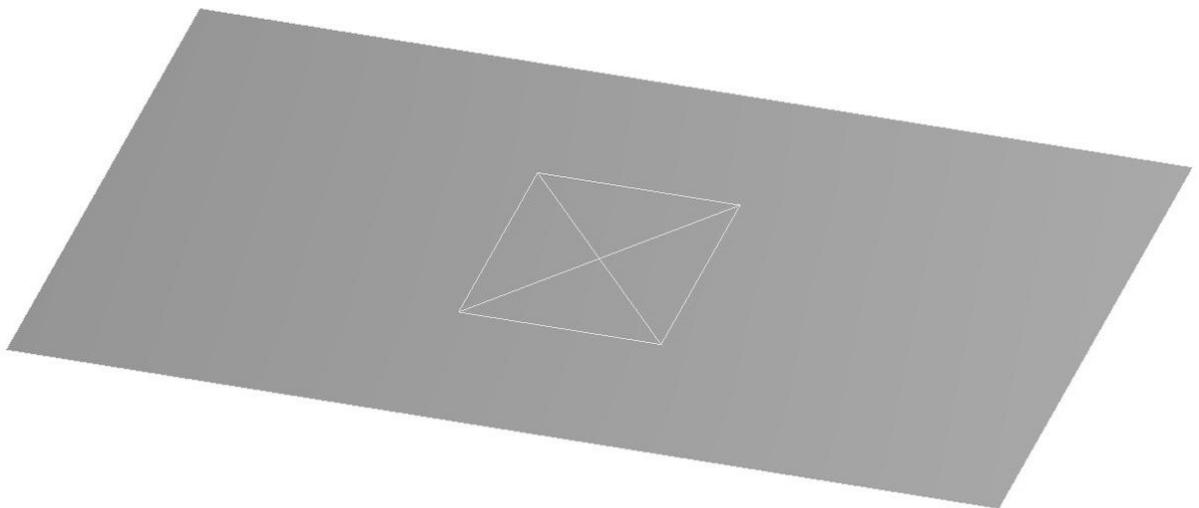


Рисунок 7 — Объект исследования по модели Тимошенко

На рисунках 8 и 9 показаны постановки задач. Пластины шарнирно оперты по кромкам, сосредоточенные дополнительные опоры также шарнирно закреплены. В центр пластин и сегментов прикладывается искомая гармоническая нагрузка $P(t) = -750\cos(\nu t)$.

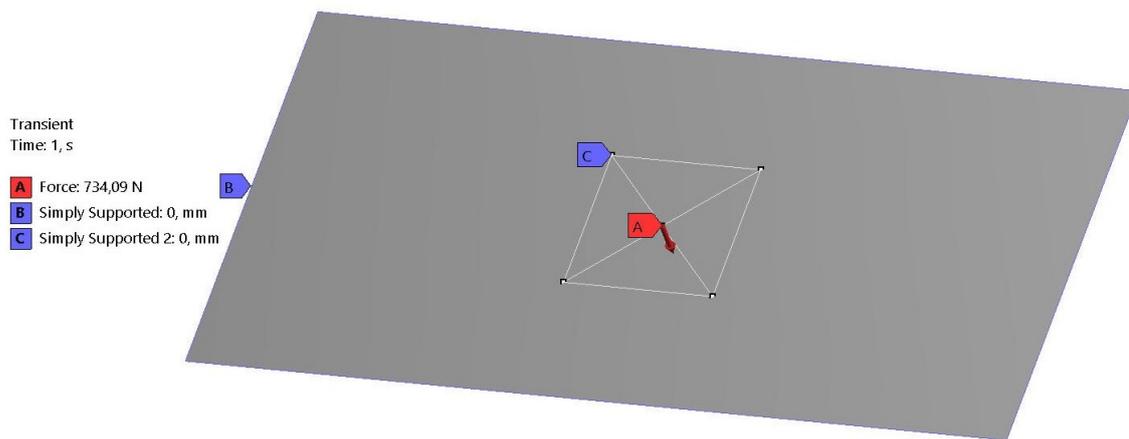


Рисунок 8 — Постановка задачи для модели Кирхгофа

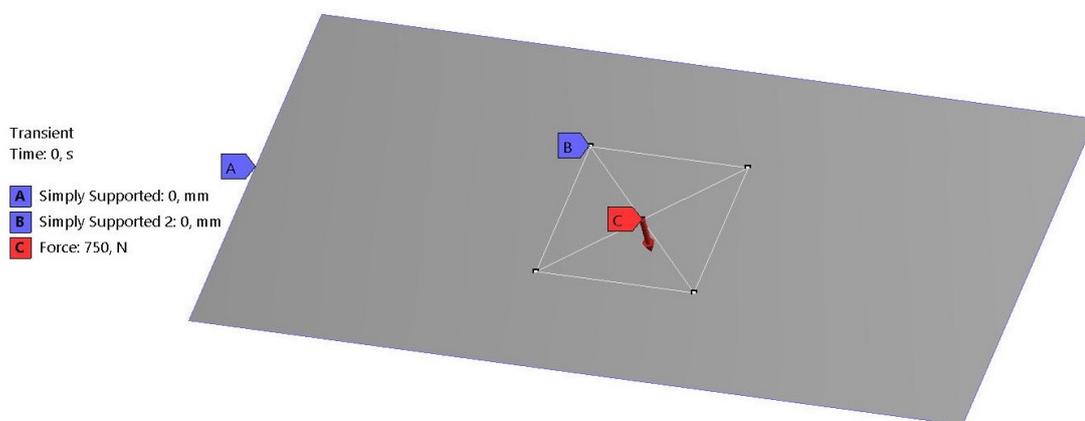


Рисунок 9 — Постановка задачи для модели Тимошенко

В качестве конечных элементов используется оболочечный элемент Shell181 [20].

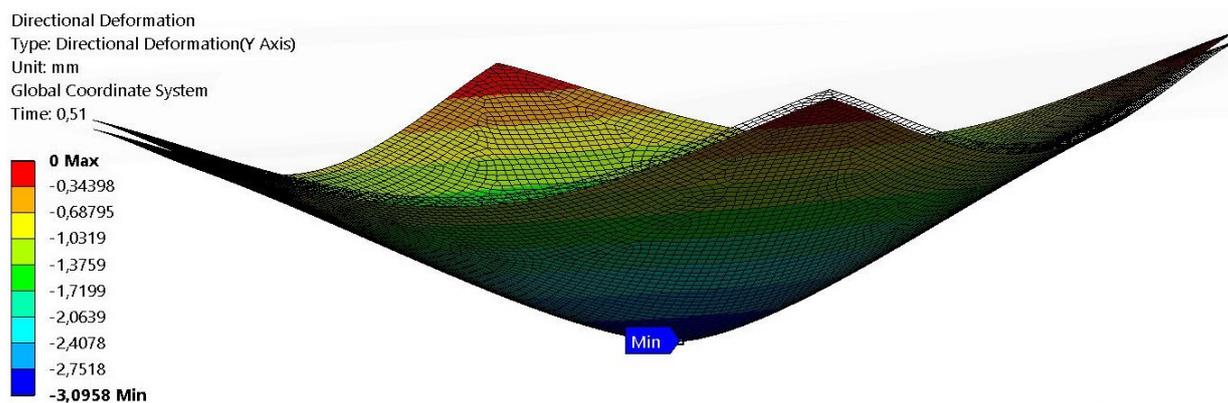


Рисунок 10 — Эпюра прогиба сегмента для модели Кирхгофа, мм

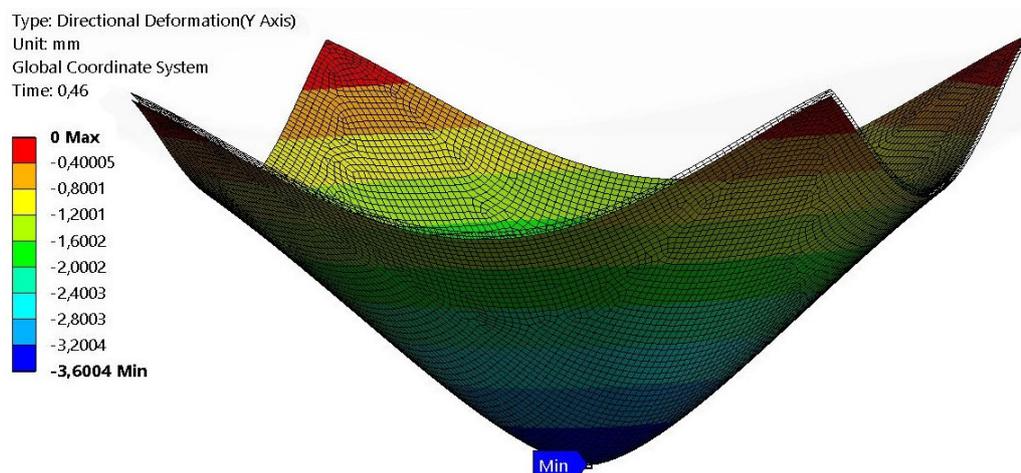


Рисунок 11 — Эпюра прогиба сегмента для модели Тимошенко, мм

Величина прогиба не превосходит установленную предельно допустимую величину $w_0=4$ мм. Также выполняются граничные условия в дополнительных опорах. А запасы жесткости для обеих моделей пластин составляют:

$$\eta^K = 1.29,$$

$$\eta^T = 1.11.$$

Далее, искомая пластина разбивается на найденный размер сегмента, с возможностью уменьшения размера сторон для целочисленного деления, и выполняется проверочный расчет уже для всех дополнительных опор.

7. Заключение

В работе продемонстрирована новая методика определения расположения дополнительных опор на основании условия жесткости конструкции. Она показывает приемлемые результаты: получаемые конструкции удовлетворяют заданному условию жесткости, а также имеют дополнительный запас жесткости больше единицы. Сравнение результатов для моделей пластин Кирхгофа и Тимошенко показало отличие результатов теорий порядка 12-13% друг от друга. Пластина Тимошенко дает результаты более близкие к запасу жесткости равному единице.

Несомненным преимуществом методики является ее аналитический вид, что позволяет применять методику для различных геометрических и физических характеристиках пластин, а также прикладывать произвольную нагрузку в любое место. Методика является универсальной и может быть применима к оболочкам произвольной формы при использовании локальной системы координат, позволяющей развернуть оболочку в прямоугольную пластину. Однако имеются и недостатки.

Во-первых, аналитическая модель движения пластины Кирхгофа отличается от ее конечно-элементной модели с элементом Shell181. Данному элементу гораздо ближе использование более сложной модели Тимошенко, что показывают численные значения и запас близкий к единице.

Во-вторых, частный недостаток метода конечных элементов в виде точечного приложения нагрузки. На практике, такое приложение нагрузки не осуществимо физически. Поэтому корректнее будет рассматривать не сосредоточенное воздействие, а распределенную по площади нагрузку.

Список источников

1. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. - М.: Машиностроение, 1994. - 384 с.
2. Печников В.П., Захаров Р.В., Тарасова А.В. Проектирование вафельных оболочек топливных баков ракеты с учетом пластических деформаций // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. № 11 (71). DOI: 10.18698/2308-6033-2017-11-1703

3. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104174>
4. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=98866>
5. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 111-126. DOI: 10.14498/vsgtu1793
6. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В. Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161423>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)
7. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenko G.V., Hein T.Z. Green's Function for an Unbounded Anisotropic Kirchhoff-Love Plate // Journal of the Balkan Tribological Association, 2021, vol. 27, no. 5, pp. 747-761.
8. Lokteva Natalia A., Serdyuk Dmitry O., Skopintsev Pavel D. Non-Stationary Influence Function for an Unbounded Anisotropic Kirchhoff-Love Shell // Journal of Engineering and Applied Sciences, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 737-744. DOI: [10.5937/jaes0-8205](https://doi.org/10.5937/jaes0-8205)

9. Левицкий Д.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное деформированное состояние пластины Тимошенко // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168157>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
10. Венцель Э.С., Джан-Темиров К.Е., Трофимов А.М., Негольша Е.В. Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек. - Харьков: Б. и., 1992. - 92 с.
11. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д. Метод компенсирующих нагрузок для исследования нестационарных возмущений в анизотропных цилиндрических оболочках с локальными шарнирными опорами // Материалы XII международной научно-практической конференции, посвященной 160-летию Белорусской железной дороге «Проблемы безопасности на транспорте». – Гомель: БелГУТ, 2022. Т. 2. С. 205–207.
12. Koreneva E.V. Метод компенсирующих нагрузок для решения задачи о несимметричном изгибе бесконечной ледяной плиты с круглым отверстием // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 50-55. URL: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-50-55>
13. Koreneva E.V. Метод компенсирующих нагрузок для решения задачи об анизотропных средах // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 71-77. URL: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77>
14. Боршевецкий С.А., Локтева Н.А. Определение нормальных перемещений шарнирно опертой пластины с дополнительными опорами под воздействием сосредоточенной силы // Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г.

Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Вятчи, 17–21 мая 2021). – М.: ООО ТРП, 2021. Т. 2. С. 19-20.

15. Боршевецкий С.А., Локтева Н.А. Определение положения опор для прямоугольной пластины под воздействием гармонической сосредоточенной нагрузки // XI Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 25-26 ноября 2021): сборник трудов. – Гомель: БелГУТ, 2021. Т. 1. С. 256–257.

16. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

17. Рябухин А.К., Лейер Д.В., Любарский Н.Н. Динамика и устойчивость сооружений. – Краснодар: КубГАУ, 2020. – 171 с.

18. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. - М.: Наука, 1968. - 456 с.

19. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974. - 832 с.

20. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. - М.: ДМК Пресс, 2005. - 640 с.

References

1. Lizin V.T., Pyatkin V.A. *Proektirovanie tonkostennykh konstruksii* (Design of thin-walled structures), Moscow, Mashinostroenie, 1994, 384 p.

2. Pechnikov V.P., Zakharov R.V., Tarasova A.V. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2017, no. 11 (71). DOI: [10.18698/2308-6033-2017-11-1703](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2017-11-1703)

3. Firsanov V.V., Fam V.T. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104174>
4. Firsanov V.V., Vo A.Kh. *Trudy MAI*, 2018, 102. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98866>
5. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, 2021, vol. 25, no. 1, pp. 111-126. DOI: [10.14498/vsgtu1793](https://doi.org/10.14498/vsgtu1793)
6. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D., Fedotenkov G.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161423>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)
7. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. Green's Function for an Unbounded Anisotropic Kirchhoff-Love Plate, *Journal of the Balkan Tribological Association*, 2021, vol. 27, no. 5, pp. 747-761.
8. Lokteva Natalia A., Serdyuk Dmitry O., Skopintsev Pavel D. Non-Stationary Influence Function for an Unbounded Anisotropic Kirchhoff-Love Shell, *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 737-744. DOI: [10.5937/jaes0-8205](https://doi.org/10.5937/jaes0-8205)
9. Levitskii D.Yu., Fedotenkov G.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168157>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
10. Ventsel' E.S., Dzhan-Temirov K.E., Trofimov A.M., Negol'sha E.V. *Metod kompensiruyushchikh nagruzok v zadachakh teorii tonkikh plastinok i obolochek* (Method of compensating loads in problems of the theory of thin plates and shells), Khar'kov, B. i., 1992, 92 p.

11. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. *Materialy XII mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, posvyashchennoi 160-letiyu Belorusskoi zheleznoi doroge «Problemy bezopasnosti na transporte»*, Gomel', BelGUT, 2022, vol. 2, pp. 205–207.
12. Koreneva E.B. Metod kompensiruyushchikh nagruzok dlya resheniya zadachi o nesimmetrichnom izgibe beskonechnoi ledyanoi plity s kruglym otverstiem, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 50-55. URL: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-50-55>
13. Koreneva E.B. Metod kompensiruyushchikh nagruzok dlya resheniya zadachi ob anizotropnykh sredakh, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 71-77. URL: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77>
14. Borshevetskii S.A., Lokteva N.A. *Materialy XXVII Mezhdunarodnogo simpoziuma im. A.G. Gorshkova «Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred»*. Moscow, OOO TRP, 2021, vol. 2, pp 19-20.
15. Borshevetskii S.A., Lokteva N.A. *XI Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Problemy bezopasnosti na transporte»*: sbornik trudov. Gomel', BelGUT, 2021, vol. 1, pp. 256–257.
16. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous media), Moscow, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
17. Ryabukhin A.K., Leier D.V., Lyubarskii N.N. *Dinamika i ustoichivost' sooruzhenii* (Dynamics and stability of structures), Krasnodar, KubGAU, 2020, 171 p.
18. Chernina V.S. *Statika tonkostennykh obolochek vrashcheniya* (Statics of thin-walled shells of revolution), Moscow, Nauka, 1968, 456 p.

19. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* (Mathematical handbook for scientists and engineers), Moscow, Nauka, 1974, 832 p.

20. Basov K.A. *ANSYS: spravochnik pol'zovatelya (ANSYS: user guide)*, Moscow, DMK Press, 2005, 640 p.

Статья поступила в редакцию 01.12.2022

Одобрена после рецензирования 09.12.2022

Принята к публикации 27.02.2023

The article was submitted on 01.12.2022; approved after reviewing on 09.12.2022; accepted for publication on 27.02.2023.