

Тепловые процессы в технике. 2026. Т. 18. № 2. С. 51–58
Thermal processes in engineering, 2026, vol. 18, no. 2, pp. 51–58

Научная статья
УДК 539.3
URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=187719>
EDN: <https://www.elibrary.ru/RTFSTM>

Нелинейная осесимметричная нестационарная задача теплопроводности для круглой пластины

Д.А. Шляхин¹, С.А. Гурьянов^{2✉}, И.С. Носиков³

^{1,2,3}ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», Самара, Российская Федерация
²guryanovsa@mail.ru✉

Аннотация. Построено новое замкнутое решение нелинейной осесимметричной нестационарной задачи теплопроводности для круглой толстой пластины при удовлетворении на ее поверхностях граничных условий теплопроводности 3-го рода. Нелинейная составляющая в расчете определяется логарифмической зависимостью при определении объемной плотности энтропии, которая раскладывается в бесконечный ряд Тейлора. Используется пошаговый метод решения, когда на первом этапе рассматривается линейная задача (учитывается только первый член ряда), а на последующих исследуется аналогичная задача, в которой вклад нелинейных составляющих учитывается с помощью вспомогательной функции, полученной на основании результатов предыдущего расчета.

Расчетные соотношения построенного замкнутого решения получены в результате использования метода неполного разделения переменных, в виде конечных интегральных преобразований по радиальной и аксиальной координатам. Анализ численных результатов позволяет уточнить температурное поле пластины в процессе ее прогрева.

Ключевые слова: круглая пластина, нелинейное уравнение теплопроводности, конечные интегральные преобразования, численный анализ, осесимметричная задача, температурное поле, ряд Тейлора

Для цитирования. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 26–21–20077, <https://rscf.ru/project/26-21-20077/>

Для цитирования. Шляхин Д.А., Гурьянов С.А., Носиков И.С. Нелинейная осесимметричная нестационарная задача теплопроводности для круглой пластины // Тепловые процессы в технике. 2026. Т. 18. № 2. С. 51–58. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=187719>

Original article

A nonlinear axisymmetric transient heat conduction problem for a circular plate

D.A. Shlyakhin¹, S.A. Guryanov^{2✉}, I.S. Nosikov³

^{1,2,3}Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
²guryanovsa@mail.ru✉

Abstract. A new closed-form solution has been developed for the nonlinear axisymmetric transient heat conduction problem in a circular thick plate, subject to third-kind boundary conditions on its sur-

faces. Accurate modeling of temperature distributions in such thick plates is of considerable importance in various engineering applications, including thermal protection systems, industrial heating processes, and advanced material design. The nonlinear behavior of the system is introduced through a logarithmic dependence in the definition of volumetric entropy density, which is subsequently expanded into an infinite Taylor series. This representation allows the systematic consideration of temperature-dependent thermophysical properties and other nonlinear thermodynamic effects.

To address the inherent nonlinearity, a stepwise solution approach is employed. In the initial stage, the problem is linearized by considering only the first term of the Taylor series. In subsequent stages, the solution is refined iteratively by solving an analogous problem in which the contributions of the nonlinear terms are incorporated through an auxiliary function derived from the results of the previous calculation. This iterative procedure provides a practical and efficient framework to account for nonlinear effects while maintaining an analytical formulation, thus bridging the gap between purely analytical and purely numerical approaches.

The governing relations of the solution are obtained using the method of incomplete separation of variables. The temperature field is expressed through finite integral transforms with respect to the radial and axial coordinates, providing an explicit analytical representation of the transient temperature distribution throughout the plate. This formulation not only facilitates parametric analysis but also allows straightforward computation of temperature gradients and thermal fluxes at both the surfaces and interior of the plate.

Analysis of the numerical results demonstrates the influence of nonlinear effects on the evolution of the temperature field during heating. The stepwise solution effectively captures the interaction between heat conduction and nonlinear thermodynamic behavior, providing a more accurate and detailed description of the transient thermal response. Overall, the proposed methodology offers a robust and versatile analytical tool for the study of nonlinear axisymmetric heat conduction in thick plates, combining theoretical insight with practical applicability. This work contributes to the advancement of thermal engineering analysis by providing a closed-form framework capable of addressing complex nonlinear heat transfer problems in engineering practice.

Keywords: circular plate, nonlinear heat conduction equation, finite integral transforms, numerical analysis, axisymmetric problem, temperature distribution, Taylor series

Funding. The study was funded by a grant from the Russian Science Foundation. № 26–21–20077, <https://rscf.ru/project/26-21-20077/>

For citation. Shlyakhin D.A., Guryanov S.A., Nosikov I.S. A nonlinear axisymmetric transient heat conduction problem for a circular plate. *Thermal processes in engineering*. 2026, vol. 18, no. 2, pp. 51–58. (In Russ.). URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=187719>

1. Введение

Высокоинтенсивный неравномерный нагрев конструкций приводит к необходимости при исследовании задач теплопроводности использовать зависимости с внутренней и внешней нелинейностью. В первом случае учитывается зависимость физических свойств материала от температуры, а во втором – принимается во внимание нелинейность граничных условий.

Главная особенность при исследовании нелинейных краевых задач заключается в том, что при их решении не выполняется принцип супер-

позиции, и многие методы решения задач математической физики в виде разложения по собственным функциям, в общем случае, становятся неприменимыми [1, 2]. Многочисленные работы, посвященные исследованию данного типа задач, показывают, что при их решении не удастся применить какой-либо универсальный метод. Здесь значительного успеха можно достичь, сочетая приближенные аналитические и численные методы расчета или использование значительных допущений в математической модели. Обзор полученных результатов можно найти в [3, 4]. Их анализ показывает, что решения нелинейных

краевых задач теплопроводности получены только в случае, когда функция объемной плотности энтропии определяется приближенной линейной зависимостью [5].

В настоящей работе рассматривается краевая задача, когда логарифмическая функция относительно приращения температуры, определяющая плотность энтропии, раскладывается в ряд Тейлора, что приводит к формулировке нелинейного уравнения теплопроводности. При исследовании поставленной задачи был использован наиболее удобный подход, объединяющий алгоритмы расчета, используемые, в частности, в работах [6, 7], который позволяет получить наиболее эффективное решение для выполнения инженерных расчетов. В публикации [6] рассматривалась задача с нелинейным радиационным граничным условием. Математическая модель расчета представлена в виде рекуррентной последовательности линейных начально–краевых задач, решаемых методом разложения по собственным функциям, при учете на каждом приближении результатов, полученных на предыдущей итерации. В монографии [7] рассматривались физически нелинейные задачи механики для тонкостенных систем. В первом приближении решается линейная задача, а в последующих – нелинейная составляющая определяется, как дополнение к механической нагрузке, определенное на предыдущей итерации.

В результате обобщения подходов, полученных в работах [6, 7], на первом этапе решается линейная задача теплопроводности для круглой толстой пластины. На следующем этапе рассматривается аналогичная задача, в которой нелинейная составляющая ряда Тейлора учитывается с помощью весовой функции, определенной на предыдущем шаге решения.

2. Постановка задачи

Пусть круглая пластина, выполненная из изотропного материала, занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область Ω :

$\{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -h/2 \leq z_* \leq h/2\}$. На поверхностях упругой системы выполняется конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой $\vartheta^*(t_*)$ изменяется по времени t_* . Кроме того, нижняя лицевая поверх-

ность подвергается действию теплового потока плотностью $Q(r_*, t_*)$.

Дифференциальное уравнение теплового баланса в цилиндрической системе координат, при условии несущественного различия температуры среды в первоначальном и актуальном состоянии $(T(r_*, z_*, t_*) = T_0)$, имеет вид:

$$T_0 \frac{\partial s(r_*, z_*, t_*)}{\partial t_*} = \Lambda \left(\nabla \frac{\partial \Theta(r_*, z_*, t_*)}{\partial r_*} + \frac{\partial^2 \Theta(r_*, z_*, t_*)}{\partial z_*^2} \right), \quad (1)$$

а объемная плотность энтропии $s(r_*, z_*, t_*)$ без учета эффекта связанности тепловых и упругих полей определяется зависимостью [5]:

$$s(r_*, z_*, t_*) = k \ln \left(\frac{T(r_*, z_*, t_*)}{T_0} \right). \quad (2)$$

Здесь $T(r_*, z_*, t_*)$, $\Theta(r_*, z_*, t_*)$ – температура и приращение температуры тела ($\Theta = T - T_0$); T_0 – температура первоначального состояния тела; Λ, k – коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости материала; $\nabla = \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*}$.

При выполнении условия $\left| \frac{\Theta}{T_0} \right| < 1$ логарифмическую функцию (2) можно разложить в ряд Тейлора:

$$\ln \left(\frac{T}{T_0} \right) = \frac{\Theta}{T_0} - \frac{\left(\frac{\Theta}{T_0} \right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\Theta}{T_0} \right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{\Theta}{T_0} \right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{\Theta}{T_0} \right)^5}{5} - \dots,$$

что позволяет в результате подстановки (2) в (1) получить следующее нелинейное уравнение теплопроводности:

$$\Lambda \left(\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r_*} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z_*^2} \right) - T_0 k \frac{\partial}{\partial t_*} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{\Theta}{T_0} \right)^m = 0. \quad (3)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$r_* = 0, b \quad \Theta|_{r=0} < \infty, \left(\Lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r_*} + \alpha \Theta \right)_{|r=b} = \alpha \vartheta, \quad (4)$$

$$z_* = \mp h/2 \quad \left(-\Lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z_*} + \alpha \Theta \right)_{|z_*=-h/2} = \alpha \vartheta, \quad (5)$$

$$\left(\Lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z_*} + \alpha \Theta \right)_{|z_*=h/2} = \alpha \vartheta + Q, \quad (6)$$

$$t_* = 0 \quad \Theta = 0,$$

где $\vartheta = \vartheta^* - T_0$, α – коэффициент теплоотдачи.

Начально–краевая задача (3)–(6) относительно безразмерных переменных записывается следующим образом:

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial t} = F, \quad (7)$$

$$r = 0, p \quad \Theta|_{r=0} < \infty, \left(a_1 \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \Theta \right)_{|r=p} = \vartheta, \quad (8)$$

$$z = \mp 1/2 \quad \left(-a_1 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \Theta \right)_{|z=-1/2} = \vartheta, \quad (9)$$

$$\left(a_1 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \Theta \right)_{|z=1/2} = \alpha^{-1} Q + \vartheta, \quad (10)$$

$$t = 0 \quad \Theta = 0,$$

где $\{r, z, p\} = \frac{\{r_*, z_*, b\}}{h}$, $t = \frac{\Lambda}{kh^2} t_*$, $F = \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} \left(\frac{-1}{T_0} \right)^{m-1} \frac{\partial \Theta^m}{\partial t}$, $a_1 = \frac{\Lambda}{\alpha h}$.

В первом приближении при $n = 1$ исследуется линейная ($F = 0$) краевая задача (7)–(10) относительно функции $\Theta_1(r, z, t)$. Полученное решение позволяет оценить вклад нелинейной составляющей F при определении скорости изменения объемной плотности энтропии с помощью следующей интегральной зависимости:

$$\beta_1(t) \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^p \Theta_1 r dr dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^p \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} \left(\frac{-1}{T_0} \right)^{m-1} \Theta_1^m r dr dz, \quad (11)$$

где $\beta_1(t)$ – весовая функция.

На следующих этапах расчета при $n = 2 \dots N$ решается краевая задача, аналогичная (7)–(10), где линейное уравнение теплопроводности рассматривается с учетом нелинейной составляющей $\beta_{n-1}(t)$:

$$\nabla \frac{\partial \Theta_n(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta_n(r, z, t)}{\partial z^2} - [1 - \beta_{n-1}(t)] \frac{\partial \Theta_n(r, z, t)}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Данный итерационный процесс при $n = N$ заканчивается, когда весовые коэффициенты в последней и предпоследней итерациях совпадут с заданной точностью.

3. Решение задачи теплопроводности в первом приближении

На первом этапе исследования граничные условия (8) приводятся к однородным с помощью следующего разложения:

$$\Theta_1(r, z, t) = \vartheta(t) + Y(r, z, t). \quad (13)$$

В результате подстановки (13) в (7)–(10) при $F = 0$ получаем:

$$\nabla \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{\partial Y}{\partial t} = F, \quad (14)$$

$$r = 0, p \quad Y|_{r=0} < \infty, \left(a_1 \frac{\partial Y}{\partial r} + Y \right)_{|r=p} = 0, \quad (15)$$

$$z = \mp 1/2 \quad \left(-a_1 \frac{\partial Y}{\partial z} + Y \right)_{|z=-1/2} = 0, \quad (16)$$

$$\left(a_1 \frac{\partial Y}{\partial z} + Y \right)_{|z=1/2} = \alpha^{-1} Q,$$

$$t = 0 \quad Y = -\mathfrak{G}, \quad (17)$$

где $F = d\mathfrak{G}/dt$.

К краевой задаче (14)–(17) применяется преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной r [8]:

$$R(\lambda_i, z, t) = \int_0^p Y(r, z, t) J_0(\lambda_i r) r dr, \quad (18)$$

$$Y(r, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} R(\lambda_i, z, t) J_0(\lambda_i r) \|K_i\|^{-2}, \quad (19)$$

$$\|K_i\|^2 = \int_0^p J_0(\lambda_i r)^2 r dr,$$

что позволяет получить в пространстве изображений Ханкеля следующую начально–краевую задачу:

$$-\lambda_i^2 R + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - \frac{\partial R}{\partial t} = F_H, \quad (20)$$

$$z = \mp \frac{1}{2} \left(-a_1 \frac{\partial R}{\partial z} + R \right) \Big|_{z=\mp \frac{1}{2}} = 0, \quad (21)$$

$$\left(a_1 \frac{\partial R}{\partial z} + R \right) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \alpha^{-1} Q_H,$$

$$t = 0 \quad Y = B_H, \quad (22)$$

где $Q_H = \int_0^p Q r J_0(\lambda_i r) dr$, $\{F_H, B\} = \{F, -\mathfrak{G}\} \frac{p}{\lambda_i} \times J_1(\lambda_i p)$, $J_\nu(\dots)$ – обыкновенные функции Бесселя 1–рода порядка ν [9].

Собственные значения λ_i ($i = 1 \dots \infty$) определяются при решении следующего трансцендентного уравнения:

$$a_1 \lambda_i J_1(\lambda_i p) - J_0(\lambda_i p) = 0. \quad (23)$$

На следующем этапе решения граничные условия (21) приводятся к однородным с помощью следующего разложения:

$$R(\lambda_i, z, t) = f_1(z) Q_H(\lambda_i, t) + R_H(\lambda_i, z, t), \quad (24)$$

при выполнении условий:

$$\left(-a_1 \frac{df_1(z)}{dz} + f_1(z) \right) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = 0, \quad (25)$$

$$\left(a_1 \frac{df_1(z)}{dz} + f_1(z) \right) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \alpha^{-1} Q_H.$$

В результате подстановки (24) в (21)–(22) получаем:

$$-\lambda_i^2 R_H + \frac{\partial^2 R_H}{\partial z^2} - \frac{\partial R_H}{\partial t} = F_H^*, \quad (26)$$

$$z = \mp \frac{1}{2} \left(-a_2 \frac{\partial R_H}{\partial z} + R_H \right) \Big|_{z=\mp \frac{1}{2}} = 0, \quad (27)$$

$$t = 0 \quad Y = B_H^*, \quad (28)$$

где $F_H^* = F_H + \left[\lambda_i^2 f_1(z) - \frac{\partial^2 f_1(z)}{\partial z^2} \right] Q_H + f_1(z) \frac{\partial Q_H}{\partial t}$,

$$B_H^* = B_H - f_1(z) Q_H.$$

Функция $f_1(z)$ определяется из условия упрощения правой части дифференциального уравнения (26):

$$\frac{\partial^2 f_1(z)}{\partial z^2} - \lambda_i^2 f_1(z) = 0, \quad (29)$$

Решение уравнения (29) с учетом условий (25) имеет вид:

$$f_1(z) = \alpha^{-1} \frac{\chi_i ch[\eta_i(z)] + sh[\eta_i(z)]}{(\chi_i^2 + 1) sh(\lambda_i) + 2\chi_i ch(\lambda_i)},$$

где $\eta_i(z) = \lambda_i(0,5 + z)$, $\chi_i = a_1 \lambda_i$.

К краевой задаче (26)–(28) применяется преобразование Фурье с конечными пределами по переменной z [8]:

$$G(\lambda_i, s, t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} R_H(\lambda_i, z, t) \cos(j_s z) dz, \quad (30)$$

$$R_H(\lambda_i, z, t) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{2j_s}{j_s + \sin(j_s)} \right] G(\lambda_i, s, t) \cos(j_s z). \quad (31)$$

В результате формируется следующая задача относительно трансформанты $G(\lambda_i, s, t)$:

$$\frac{\partial G(\lambda_i, s, t)}{\partial t} + A_{is} G(\lambda_i, s, t) = R_H(\lambda_i, s, t), \quad (32)$$

$$t = 0 \quad G(\lambda_i, s, 0) = G_0, \quad (33)$$

решение которой имеет вид:

$$G(\lambda_i, s, t) = G_0 \exp(-A_{is} t) + \int_0^t R_H(\tau) \exp[A_{is}(\tau - t)] d\tau, \quad (34)$$

где $\{R_H, G_0\} = \int_{-1/2}^{1/2} \{F_H^*, B_H^*\} \cos(j_s z) dz$, $A_{is} = \lambda_i^2 + j_s^2$.

Собственные значения j_s определяются при решении следующего трансцендентного уравнения:

$$a_2 j_s \operatorname{tg}(0,5 j_s) = 1.$$

Окончательные выражения для функции приращения температуры $\Theta_1(r, z, t)$ имеют вид:

$$\Theta_1(r, z, t) = \vartheta(t) + \sum_{i=0}^{\infty} [f_1(z) Q_H(\lambda_i, t) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{2j_s}{j_s + \sin(j_s)} \right] G(\lambda_i, s, t) \cos(j_s z) \left] \frac{J_0(\lambda_i r)}{\|K_i\|^2}. \quad (35)$$

4. Решение задачи теплопроводности во втором приближении

На основании решения задачи в первом приближении с помощью равенства (11) определяется весовая функции $\beta_1(t)$. На следующем этапе исследования при $n = 2$ рассматривается краевая задача относительно функции $\Theta_2(r, z, t)$. Ее математическая формулировка включает дифференциальное уравнение (12) и краевые условия (7)–(10).

В общем случае при использовании, представленного в п. 3 алгоритма решения, во втором и последующих приближениях ($n = 2 \dots N$) формируется следующее уравнение относительно трансформанты $G(\lambda_i, s, t)$:

$$\frac{\partial G(\lambda_i, s, t)}{\partial t} + \frac{A_{is}}{[1 - \beta_{n-1}(t)]} G(\lambda_i, s, t) = R_H(\lambda_i, s, t),$$

решение которого имеет вид:

$$G(\lambda_i, s, t) = G_0 \exp[-f(t)] + \int_0^t R_H(\tau) \exp[f_2(\tau) - f_2(t)] d\tau,$$

где $f_2(t) = A_{is} \int [1 - \beta_{n-1}(t)]^{-1} dt$.

5. Численные результаты расчета

В качестве примера рассматривается круглая керамическая пластина ($h = 0,1$ м, $b = 0,6$ м, $\alpha = 5,6$ Вт/(м² К)), имеющая следующие физические характеристики материала: $\Lambda = 10,75$ Вт/(м К), $k = 2,3 \times 10^6$ Дж/(м³ К) [10, 11]. Температура внешней среды $\vartheta^*(t_*)$ равна температуре первоначального состояния тела T_0 ($\vartheta(t_*) = 0$).

Моделируется случай действия на лицевой поверхности упругой системы ($z_* = h/2$) теплового потока плотностью $Q(r_*, t_*)$:

$$Q(r_*, t_*) = Q_{\max} q(r_*) \times \left[\sin \left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_* \right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]. \quad (36)$$

где $H(\dots)$ – единичная функция Хевисайда, $q(r_*) = \left(1 - \frac{r_*^2}{b^2} \right)$ – зависимость изменения $Q(r_*, t_*)$

по радиальной координате, Q_{\max}, t_{\max}^* – максимальное значение плотности теплового потока и время его достижения ($Q_{\max} = 1000$ Вт/м², $T_0 = 293$ К, (20 °С), $t_{\max}^* = 1$ с).

На рисунке 1 представлены графики изменения $\Theta(r, z, t)$ по радиальной координате на лицевых поверхностях пластины при установленном температурном режиме $t = 6 \times 10^3 t_{\max}$

($t_{\max} = \frac{\Lambda}{kh^2} t_{\max}^*$). Сплошной и пунктирной ли-

ниями обозначены при $z = 1/2$ и $z = -1/2$ соответственно. На рисунке 2 показано изменение $\Theta(0, z, t)$ по времени t ($t > t_{\max}$) также на лицевых поверхностях пластины.

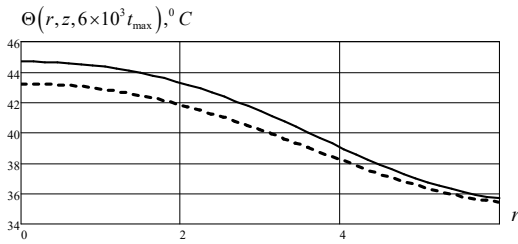


Рис. 1. Изменение $\Theta(r, z, 6 \times 10^3 t_{\max})$ по r : сплошная линия $z = 1/2$, пунктирная $z = -1/2$

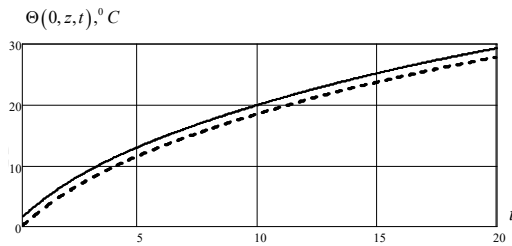


Рис. 2. Изменение $\Theta(0, z, t)$ по t : сплошная линия $z = 1/2$, пунктирная $z = -1/2$

Здесь необходимо отметить, что при конвективном теплообмене пластины с окружающей средой при изменении теплового потока плотностью $Q(r, t)$ по зависимости (36), наблюдается достаточно медленный прогрев конструкции. При этом при достижении $Q(r_*, t_*)$ максимальных значений Q_{\max} ($t_{\max} \leq t \leq 6 \times 10^3 t_{\max}$) разница температуры $\Theta(r, z, t)$ между лицевыми поверхностями пластины будет постоянной и ее величина при $r = 0$ определяется следующей зависимостью:

$$\frac{h}{\alpha(2a_1 + 1)} Q_{\max} = 1,6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

В результате в общем случае можно сформулировать равенство, связывающее функции $\Theta(r, z, t)$ и приращения температуры срединной поверхности пластины $\Theta_c(r, t)$:

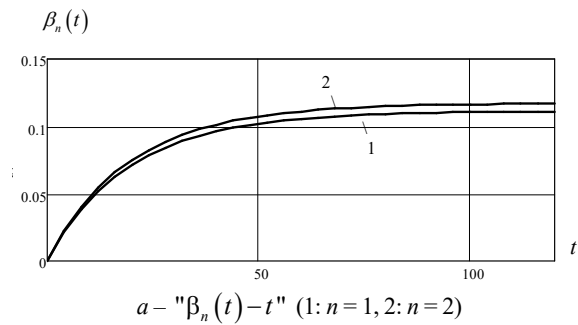
$$\Theta(r, z, t) = \Theta_c(r, t) + \frac{z}{\alpha(2a_1 + 1)} h q(r) Q_{\max}. \quad (37)$$

Данная зависимость позволяет в дальнейшем при использовании прикладных теорий для тонкостенных элементов, в которых исходные урав-

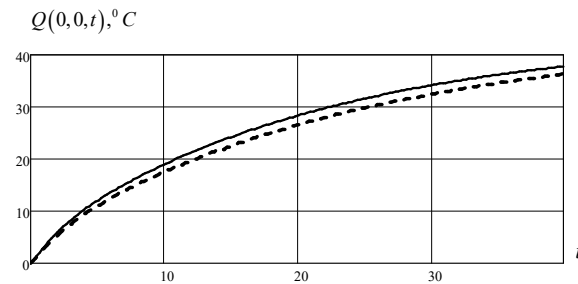
нения движения (равновесия) сформулированы, как правило, относительно срединной поверхности, сформулировать при учете (37) новую математическую модель теории термоупругости.

На рисунке 3 показаны зависимости " $\beta_n(t) - t$ ", " $\Theta(0, 0, t) - t$ ", " $\varepsilon(t) - t$ ". Цифрами 1, 2 на рис. 3 а представлены результаты при $n = 1$ и $n = 2$. Сплошной и пунктирной линиями на рис. 3 б обозначены зависимости, полученные соответственно с учетом и без учета нелинейной весовой функции $\beta_n(t)$. График " $\varepsilon(t) - t$ " позволяет оценить вклад нелинейной составляющей $\beta_n(t)$ при решении рассматриваемой задачи:

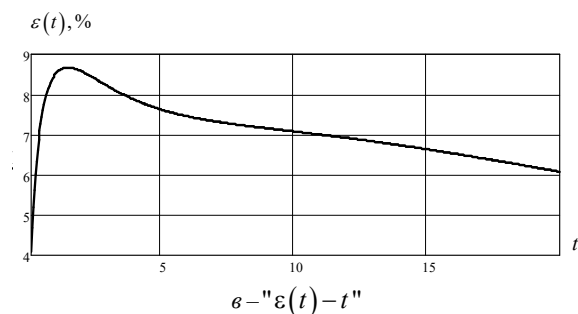
$$\varepsilon(t) = \frac{\Theta_{n/n=2}(0, 0, t) - \Theta_1(0, 0, t)}{\Theta_1(0, 0, t)} \times 100 \text{ } \%$$



а - " $\beta_n(t) - t$ " (1: $n = 1$, 2: $n = 2$)



б - " $\Theta(0, 0, t) - t$ ", сплошная линия – с учетом нелинейности, пунктирная – линейный расчет ($n = 1$)



в - " $\varepsilon(t) - t$ "

Рис. 3. Графики изменение функций по времени:

Анализ численных результатов позволяет сделать следующие выводы:

– весовая функция при решении краевой задачи принимает окончательные значения после второй итерации. Ее учет приводит к росту температуры в процессе прогрева конструкции и разница в численных значениях, полученных с учетом и без учета $\beta_n(t)$ в рассматриваемом примере достигает 8,7 %;

– в процессе прогрева конструкции скорость изменения температурного поля снижается, что приводит к уменьшению $\beta_n(t)$. В результате при установившемся температурном режиме $\beta_n(t) = 0$.

5. Выводы

Построенное в работе решение нелинейной задачи теплопроводности позволяет уточнить величину температурного поля в теле пластины. Данная особенность, а именно скорость изменения температуры, оказывает влияние на величину напряженно-деформированного состояния конструкции при исследовании задач термоупругости. Кроме того, полученную в работе зависимость (37) можно использовать при решении краевых задач в случае выполнения граничных условий теплопроводности 3-го рода с помощью прикладных теорий для тонкостенных конструкций.

Список источников

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
3. Волосевич П.П., Леванов Е.М. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: МФТИ, 1997. 328 с.
4. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
5. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
6. Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part I.

Thermal fields, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30. № 10. С. 1975–1990.

7. Петров В.В. Нелинейная инкрементная строительная механика. М.: Инфра-Инженерия, 2014. 479 с.
8. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
10. Пашкевич А.В., Близнюк Л.А., Федотов А.К. и др. Тепловые и термоэлектрические свойства керамики на основе оксида цинка, легированной железом // Журнал Белорусского государственного университета. Физика. 2022. № 3. С. 56–67.
11. Lynam A., Rincon Romero F., Xu F. et al. Thermal Spraying of Ultra-High Temperature Ceramics: A Review on Processing Routes and Performance. New York, USA: Springer, 2022. Vol. 31. № 3–4. pp. 745–779.

References

1. Arsenin VYa. *Methods of Mathematical Physics and Special Functions*. Moscow: Nauka; 1984. 384 p.
2. Tikhonov AN, Samarskii AA. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka; 1972. 736 p.
3. Volosevich PP, Levanov EM. *Self-Similar Solutions of Problems in Gas Dynamics and Heat Transfer*. Moscow: MFTI; 1997. 328 p.
4. Samarskii AA, Galaktionov VA, Kurdyumov SP et al. *Blow-up Regimes in Problems for Quasilinear Parabolic Equations*. Moscow: Nauka; 1987. 480 p.
5. Kovalenko AD. *Introduction to Thermoelasticity*. Kiev: Naukova Dumka; 1965. 204 p.
6. Lychev SA, Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part I. *Thermal fields, Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023;30(10):1975–1990.
7. Petrov VV. *Nonlinear Incremental Structural Mechanics*. Moscow: Infra-Inzheneriya; 2014. 479 p.
8. Sneddon IN. *Fourier Transforms*. Moscow: Izd-vo inostrannoi literatury; 1955. 668 p.
9. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Special Functions*. Moscow: Nauka; 1977. 342 p.
10. Pashkevich AV, Bliznyuk LA, Fedotov AK et al. Thermal and Thermoelectric Properties of Zinc Oxide-Based Ceramics Doped with Iron. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika*, 2022;(3):56–67.
11. Lynam A, Rincon Romero F, Xu F et al. Thermal Spraying of Ultra-High Temperature Ceramics: A Review on Processing Routes and Performance. *J. Therm. Spray Tech*. 2022;31(3–4):745–779.