

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

УДК 539.3



НГУЕН ВАН ЛАМ

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА СРЕДЫ КОССЕРА СО
СФЕРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

Тарлаковский Дмитрий Валентинович

Москва – 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ	8
1.1. Современное состояние исследований	8
1.2. Пространственные уравнения движения и граничные условия для среды Коссера	18
1.3. Уравнения осесимметричного движения среды Коссера.....	22
1.4. Уравнения анизимметричного движения среды Коссера	25
ГЛАВА 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ	27
2.1. Представление решения в виде рядов.....	27
2.2. Изображения общего решения.....	30
2.3. Изображения решения при кинематических возмущениях	33
2.4. Линейное приближение решения при кинематических возмущениях.....	37
2.5. Оригиналы решения при кинематических возмущениях	43
2.6. Примеры расчетов функций влияния	49
2.7. Примеры расчетов при кинематических возмущениях	53
2.8. Оценка учета моментных характеристик при осесимметричных возмущениях	61
ГЛАВА 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ	65
3.1 Представление решения в виде рядов.....	65
3.2. Изображения общего решения.....	67
3.3. Изображения решения при кинематических возмущениях	71
3.4. Линейное приближение решения при кинематических возмущениях.....	74
3.5. Оригиналы решения при кинематических возмущениях	81
3.6. Примеры расчетов функций влияния	85
3.7. Примеры расчетов при кинематических возмущениях	89
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	95
ПРИЛОЖЕНИЕ	96
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	104

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время развитие современной науки и техники требует точного знания процессов деформирования не только «традиционных» материалов, но и материалов с усложненной структурой, в том числе таких, для которых деформация среды описывается не только вектором перемещения, но также вектором поворота. Общая теория такой несимметричной теории упругости впервые была разработана братьями Коссера (Э. и Ф. Коссера).

Потребности практики требуют исследования нестационарных задач моментной теории упругости. Однако число таких публикаций ограничено.

Целью диссертационной работы являются постановка и построение аналитических решений задач о распространении нестационарных осесимметричных и антисимметричных волн в среде Коссера со сферическими границами.

Актуальность темы исследования. Во многих случаях возникает необходимость учета особенностей строения материалов элементов конструкций на кристаллическом уровне. Этому требованию отвечают модели моментно упругих сред, к которым, в том числе, относится и модель Коссера. Однако проблема нестационарной динамики тел из таких сред мало исследована. В имеющихся публикациях по этому вопросу, как правило, рассматриваются соответствующие упрощенные модели. Поэтому тема диссертации, в которой используется полная система уравнений, является актуальной.

Методы исследования для постановки задач о распространении нестационарных осесимметричных и антисимметричных задач используется модель Коссера. Для решения применяются разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, а также преобразование Лапласа по времени. Поскольку изображения являются сложными функциями, то для аналитического построения оригиналов используется метод малого параметра, которым является коэффициент связи полей перемещений и вращения.

Достоверность и обоснованность результатов научных положений и полученных результатов подтверждается использованием апробированной модели сплошной среды, применением для решения начально-краевых задач строгих математических методов и сравнением с решениями для псевдоконтинуума Коссера и классической упругой среды.

Научная новизна диссертационной работы

1. Впервые даны постановка задач о распространении нестационарных осесимметричных и антисимметричных возмущений от сферической полости в среде Коссера.

2. Получено новое аналитическое решение задач о распространении нестационарных осесимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера.

3. Получено новое аналитическое решение задач о распространении антисимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера.

4. Разработан подход к решению систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными, используемый для осесимметричной и антисимметричной задач.

5. Впервые дана оценка учета моментных характеристик при нестационарных осесимметричных возмущениях.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в разработке методов исследования нестационарной динамики среды Коссера со сферическими границами и элементов конструкций из материалов с микроструктурой, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий, а также в возможности использования полученных решений в качестве тестовых с помощью различных пакетов программного обеспечения (Maple 17, Mathtype 6.9).

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в методиках инженерных расчетов типовых авиационных конструкций и их

соединений, а также при проектировании и оценке прочности машиностроительных и строительных конструкций.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения.

1. Постановка задач о распространении нестационарных осесимметричных и антисимметричных возмущений от сферической полости в среде Коссера.

2. Аналитические решения нестационарных задач о распространении осесимметричных и антисимметричных волн в среде Коссера.

3. Разработка и реализация алгоритмов построения оригиналов преобразования Лапласа характерного для рассматриваемых задач класса изображений.

4. Результаты решения задач о действии на границу сферической полости в среде Коссера нестационарных осесимметричных и антисимметричных кинематических возмущений.

5. Оценка учета моментных свойств среды при осесимметричных возмущениях.

Апробация основных результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

– Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская обл., 2019 – 2021 г.г.);

- Международная научная конференция «Проблемы прочности, динамики и ресурса», посвященная памяти и 95-летию со дня рождения Ф.М. Митенкова (Нижний Новгород, 2019 г.);

- Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященной 120-летию Х.М. Муштари, 110-летию К.З. Галимова, 110-летию Г.Г. Тумашева, 100-летию М.С. Корнишина, 90-летию И.Г. Терегулова (Казань, 2020 г.);

- XX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» к 100-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича (Ростов-на-Дону, 2020 г.)

- XXIX Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках – 2020» (Пермь, 2020 г.);

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого 110-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. (Москва, МГУ, 2021 г.);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2019, 2020 г.г.);

- XXII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2021 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 2-х статьях в журналах, включенных в Перечень ВАК РФ (обе публикации входят в международные системы цитирования Web of Science и Scopus), и в 8-ми тезисах докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложение и списка использованных источников, включающего 111 наименований, содержит 97 рисунков. Общий объем диссертации 118 страниц.

Во введении обоснована цель диссертационной работы, актуальность темы диссертации, изложены методы исследования, приведены основные результаты и положения, выносимые на защиту, дано краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе приведен аналитический обзор публикаций, связанных с рассматриваемой в диссертации проблеме. Из него следует, что, несмотря на большое разнообразие существующих в настоящее время моделей упругих сред, нестационарные задачи для упругих моментных сред исследованы недостаточно. Здесь же приведены основные соотношения для упругой моментной среды, описываемой моделью Коссера. Из них получены уравнения

осесимметричного и антисимметричного движения такой среды в сферической системе координат.

На основе полученных в первой главе уравнений, *во второй главе* представлены алгоритмы решения задач о распространении нестационарных осесимметричных кинематических возмущений от сферической полости с использованием рядов по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, преобразования Лапласа по времени и метода малого параметра в линейном приближении. Приведены подробные результаты расчетом для материала в виде зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице.

Аналогичным образом *в третьей главе* рассмотрены задачи о распространении нестационарных антисимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера.

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1. Постановка задач и представление общего решения

1.1. Современное состояние исследований

Интенсивное развитие механики композиционных материалов началось в 60-е годы XX века. Благодаря своим превосходным свойствам по сравнению с традиционными материалами композитные материалы в настоящее время широко используются в обрабатывающей промышленности авиационной и космической техники [9,15,18,25,32,39,109], судостроении и т. д. В процессе эксплуатации в аварийных режимах такие конструкции подвергаются интенсивным динамическим воздействиям, поэтому для обеспечения их надежности и экономичности возникает необходимость в проведении сложных динамических расчетов. Разрушение конструкций из составных материалов с различными физическими свойствами обладает многими специфическими особенностями, весьма затрудняющими адекватное теоретическое описание основных механизмов их деформирования и разрушения. Поэтому появились специализированные монографии по механике композитов. В частности, это книги Г.П. Черепанова [90], Т. Фудзии, М. Дзако [87], Р. Кристенсена [41], Б.Е. Победри [71], И.Ф. Образцова, В.В. Васильева, В.Н. Бунакова [31]. Область механики композитных материалов изучается на основе теорий материаловедения, физики прочности, строительной механики и т. д., в том числе теории упругости.

Общие понятия, соотношения и основные задачи механики сплошной среды изложены, например, в [35,40,77,83]. В книге [35] представлен обзор основных результатов и научных идей выдающегося ученого 20 века Алексея Антоновича Ильюшина. Материал обзора структурирован (преимущественно хронологически) по ключевым направлениям деятельности А.А. Ильюшина: теория вязкопластического течения, гидродинамическая устойчивость, динамика деформируемых сред, сверхзвуковая аэродинамика и связанные с этим проблемы флаттера, теория упругопластических процессов, теория пластического течения, термовязкоупругость и термодинамика, прочность полимерных тел и конструкций, общая теория определяющих соотношений в

классической механике сплошной среды, а также неклассические модели сплошных сред. В основу книги [77] легли лекции, читаемые автором на механико-математическом факультете. Излагаются теория эффективного модуля упругих, вязкоупругих и упруго-пластических композитов с периодической структурой, деформационная теория пластичности для структурно анизотропных тел. Большое внимание уделено слоистым и волокнистым композитам, для которых получены некоторые точные решения и описываются эффективные методы приближенного решения пространственных задач теории упругости. В книге [83] дано полное и логически строгое изложение механики сплошных сред как математической теории. Оно охватывает как общие понятия, так и специальные вопросы гидродинамики, теории упругости и термодинамики сплошных сред; сюда относятся теория вязких течений жидкости, распространение волн в упругих материалах, термодинамика однородных процес. В работе [40] формулируются основные понятия нелинейной теории деформаций и напряжений, приводятся различные формы записи закона Гука в случае изотропной и анизотропной упругих сред, рассматриваются определяющие соотношения теории вязкоупругости, пластичности и ползучести. Кроме этого, рассматриваются основополагающие идеи механики разрушения, важнейшие вычислительные методы механики деформируемого твердого тела и основные сведения по теории стержневых систем, традиционно включаемые в курс сопротивления материалов. В классическом труде по математической теории упругости [53] отмечено, что уже в начальный период становления и развития основ механики сплошной среды классики науки уделяли существенное внимание изучению и моделированию микроструктуры деформируемых тел и ее влиянию на свойства сопротивления тел деформированию. Особо выделены подходы, предложенные Пуассоном (S. D. Poisson, 1842), Фойгтом (W. Voigt, 1887) и Кельвином (W. Thomson, 1890), обращающие внимание на возможное наличие структурных элементов, являющихся носителями дополнительных к классическим степеней

свободы в виде дополнительных поступательных или вращательных форм движений и соответствующих им внутренних взаимодействий.

Известно [36,94] что идеи, приводящие к моментной теории упругости, высказывались и до Коссера в работах Мак-Куллага [106] в связи с исследованиями по оптике, а также в работах Кельвина и Пуассона в связи с попытками построения механических моделей "квазижесткого" эфира и с исследованием структуры анизотропных упругих тел. На существование моментных напряжений еще в 1839 году было указано Фойхтом при построении его теории, в которой были получены статические уравнения моментной теории упругости.

Общая теория несимметричной теории упругости впервые была разработана братьями Коссера (Э. и Ф. Коссера) [98]. В 1909 г. впервые представили вариант теории упругости, учитывающей влияние микроструктуры на процесс деформирования среды. Это было обусловлено необходимостью внести коррективы в классическую механику континуума, которая в ряде случаев принципиально не в состоянии описать некоторые явления, связанные с дискретным строением вещества. К примеру, классической теорией не объясняется наблюдаемый экспериментально процесс дисперсии продольных, сдвиговых и поверхностных волн в композитах, содержащих макромолекулы, волокна и зерна, в поликристаллических и аморфных материалах.

Позднее теория Коссера получила название теории моментов, а теория среды - континуума Коссера. Одно-, двух- и трехмерные модели континуумов Коссера обладают специальной структурой, в соответствии с которой точки континуума снабжены направлениями, выражаемыми векторами, называемыми директорами (в оригинальной теории Коссера триэдр векторов). Среда такой конструкции называется ориентированной средой, а в силу ее способности воспринимать распределенные (внешние и внутренние, массовые и поверхностные) моментные воздействия (помимо силовых) также название полярной (микрополярной) или моментной среды. Теория континуума Коссера

с упругими свойствами из-за несимметричности тензора напряжений Коши получила также название теории несимметричной упругости. Некоторые типичные исследования в этой области можно найти в работах [79,19,24,25,26,27]. В работе [79] представлен обзор моделей механики обобщенных сред и, в частности, среды Коссера. Дается изложение этой модели для описания пластической деформации металлических материалов, в том числе с субмикроструктурной и наноструктурой. Появление внутренних моментов на мезоуровне в рамках этой модели обеспечивается наличием внутреннего движения на микроуровне, обусловленного эволюцией структуры материала (зарождением и движением деформационных дефектов, коллективными процессами их самоорганизации). В статье [19] приведены примеры, которые иллюстрируют возможности механики Коссера в изучении природных процессов, стоящие вне традиционных университетских курсов, при условии дополнительного введения вязких, пластических или иных реологических свойств. В работе [102] рассматривается задача о распространении поверхностных волн в среде Коссера (случай полупространства). В [80] исследовано распространение нестационарных поверхностных возмущений для полуплоскости, заполненной псевдоконтинуумом Коссера. В статье [107] рассматриваются поверхностные волны в упругом слоистом полупространстве с периодическим изменением жесткости по глубине. А в статье [44] исследуется динамическая задача для микрополярных упругих тел при помощи использования метода собственных значений.

Интерес к теории Коссера и к развитию других неклассических подходов появился в 20-е - 40-е годы, но наибольшее развитие получил в конце 50-х – 70-х годов прошлого столетия в работах В. Новацкого [66], В.Т. Койтера [38], Э.Л. Аэро и Е.В. Кувшинского [5,6], Р.Д. Миндлина и Г.Ф. Тирстена [54-56], Р.А. Тупина [84], И.А. Кунина [43], В.А. Пальмова [68,69], А.И. Лурье [51] и других. Но в 70 – 80-х годах прошлого века, судя по количеству публикаций, наблюдается некоторое «затишье» в изучении обобщенных континуумов: Каюк

Я.Ф., Жуковский А.П [37], Дудников В.А., Назаров С.А [27], Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д [52], Бояндин В.С., Козак А.Л [12], Чкадуа О.О., Хамза Ф [92].

Возможно, быстрое развитие микромеханики в целом, а также успехи в области нанотехнологий, в конце 20-го и начале 21-го веков, стали причиной новой волны интереса к общей теории. Современное состояние механики обобщенных континуумов и перспектив ее развития обсуждается в работах Николаи В.И [65], Угодчикова А.Г., Игумнова Л.А [85], Пальмова В.А [70], Атояна А.А., Саркисяна С.О [4], Зволинского Н.В., Шхинека К.Н [33]. Монография [65] посвящена обоснованию, анализу и развитию моментной модели линейно-деформируемой среды с сильными эффектами. Установлена возможность волнового характера изменения напряжений и деформаций, градиенты которых проявляются на уровне простых напряжений и деформаций в виде новых обобщенных понятий – объемных моментных напряжений и соответствующих им деформаций всестороннего растяжения – сжатия и вращения. Показано, что учет объемных моментов сопровождается сильными эффектами и открывает новые возможности для совершенствования моделей сплошных сред и развития их приложений. Работа [85] посвящена развитию идей моментной модели динамического деформирования упругой среды. В статье [4] рассматривается начально-краевая задача для тонкой пластинки с позиций общей трехмерной несимметричной теории упругости. В статье [33] автор очертил круг активно изучаемых современными исследователями вопросов, связанных с обобщенными континуумами, актуальность таких исследований, а также применение этих континуумов в современной технологии.

В цикле работ М.А. Кулеша [42] рассматриваются задачи о распространении объемных продольных и поперечных волн. В статье [96] изучаются одномерные динамические уравнения микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением и «малой сдвиговой жесткостью». В статье [101] динамическая задача моментной теории

упругости о трещине конечной длины при нормальной нагрузке на берегах методом интегральных преобразований сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно перемещений и поворотов, которая решается численно. В статье [74] на основе одномерных динамических уравнений микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением и малой сдвиговой жесткостью, при которых учтены все вращательно-сдвиговые деформации, изучены свободные колебания балок при шарнирном опирании на концах. В [28] рассмотрена динамическая связанная осесимметричная задача микрополярной теории термоупругости для изотропных слоя, полупространства или пространства. В работах [5,6] исследованы осесимметричные задачи для упругих тел со сферическими границами. В [29,30] исследованы особенности распространения плоских периодических и уединенных волн. В работе [111] рассматривается динамическая связанная осесимметричная задача микрополярной теории упругости для бесконечной в радиальном направлении изотропной среды, бесконечной в радиальном направлении. В работе [100] решения динамической системы уравнений получены для неограниченного тела, изотропного и центрально-симметричного, внутри которого действует сосредоточенная массовая сила, изменяющаяся во времени скачкообразно или периодически. В работе [33] дано исследование динамической связанной осесимметричной задачи микрополярной теории упругости для бесконечной в радиальном направлении изотропной среды.

Нелинейные моментные теории упругости рассматриваются в работах в работах Садовского В.М [73], Бровко Г.Л [13], Баскакова В.А., Бестужева Н.П., Кончакова Н.А [7], Ерофеев В.И [31], Зеленина А.А., Зубов Л.М [34]. В [73] рассматривается частный случай модели редукции (предполагается, что моментные напряжения пренебрежимо малы). А также изучение варианта общей модели физической и геометрической нелинейных моментных сред с искривленным тензором. В статье [13] рассмотрены два случая краевых задач нелинейной локальной теории упругости. В первом варианте функция

Гамильтона (фундаментальный потенциал) определяется по фазовому пространству векторов импульсов поступательной и вращательной форм и сил натяжения локального градиента и градиента локальных вращательных движений. Во втором случае сопряженный Гамильтонов потенциал является функцией, определенной на фазовом пространстве векторов скорости поступательного и вращательного движения и соответствующих тензоров силовых момента моментных напряжений. В [7] исследованы некоторые качественные характеристики уравнений термоупругости для полярных структурных сред первого порядка, которые тесно связаны с понятием разрывных решений и существованием движущихся сингулярностей, а также найти соответствие между двумя разными волновыми движениями.

Исследование распространения слабого разрыва в нелинейной задаче и наличие диспергирующих волн гармонического типа. В [30] дается метод связанных нормальных волн из системы нелинейных уравнений, описывающих динамику окружающей среды, в эволюционные уравнения. Оказывается, эволюционные уравнения представляют собой систему из четырех нелинейных уравнений, состоящую из двух уравнений Бюргерса и двух модифицированных уравнений Кортевега-де Фриза. В статье [34] были найдены семейства конечные деформации упругого континуума Коссера, на которых система уравновешенных уравнений сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Этими семействами можно описать растяжение и кручение полого кругового цилиндра, цилиндрический изгиб прямоугольной плиты, выпрямление круговой арки и т.д.

Задачи для термоупругой среды Коссера рассматриваются в работах [69-76]. В монографии [86] выведены основные уравнения плоской задачи моментной теории термоупругости. В [2] проблема термической упругости для пологих оболочек исследовалась на основе асимметричной теории упругости. Приведены решения некоторых задач моделирования, специфичные для особенностей, связанных с асимметрией. В работе [14] из найденных уравнений моментной механики и моментной термодинамики неоднородных сред автор

предлагает алгоритм определения моментных составляющих определяемого наиболее структурированного состояния. Обращается внимание на то, что на границе тел появляется тонкий слой, состояние которого отличается от остальной области. Показано, что основные законы, такие как закон упругости Гука, закон теплопроводности Фурье, закон диффузии Фика и т.д., нуждаются в уточнении в зависимости от влияния неоднородной структуры материала и эффекта высокого градиента. В монографии [3] рассматривается метод сведения трехмерной асимметричной задачи упругого нагрева к двумерной несвязанной плоской задаче и задаче изгиба. На основании анализа и численного решения задач моделирования сделан вывод, что полный момент в основном зависит от значений новой упругой постоянной асимметричной теории упругости, значения которых не определялись прямым методом эксперименты. В работе [97] исследовано начальное граничное значение линейной динамики термопластической оболочки Коссера с отверстиями. Доказаны теорема взаимности и единственность решений. Изучена непрерывная зависимость решения задачи от внешней объемной силы, температуры и начальных условий. В статье [75] на основе теории упругого момента автором построена общая двумерная теория термоупругости пластин. В работе [103] автор описал распространение волн в термоупругом пространстве с горизонтальным изотропным моментом. В [108] в рамках теории теплового момента для анизотропного тела исследуются как движущиеся поверхности, на которых терпят разрывы ускорения и градиенты температуры. Обсуждаются ограничения определяющих соотношений моментной теории, вытекающие из термодинамических соображений.

Статическая задача в моментной теории упругости изучалась многими авторами. Белоносовым С.М в [8] показано, что в общем случае изотропного упругого тела помимо модуля Юнга и коэффициента Пуассона необходимы и учитывать еще два параметра моментной теории упругости. Построена замкнутая система дифференциальных соотношений и впервые установлены граничные условия основных задач теории упругого момента. Найдено

интегральное представление вектора перемещений, ведущее к теории потенциалов моментного напряженно-деформированного состояния упругой сплошной среды. Основные задачи моментной теории упругости сведены к системе сингулярных граничных интегральных уравнений. Интегральное уравнение построено для задачи о кручении вращающегося упругого тела по теории упругого момента. В статье [88] предлагается метод решения системы однородных дифференциальных уравнений статического континуума Коссера и краевых задач теории упругого момента для шара. Решения рассматриваемых задач получены в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов. В статье [104] получен ряд новых аналитических решений статических и динамических волновых задач линейной упругой среды Коссера. Представлены аналитические решения задачи о статических и динамических волнах в линейной упругой среде Коссера. Наряду с этим на основе метода конечных элементов разработаны численные алгоритмы решения задач статического деформирования асимметричной теории упругости. В работе [10] рассматривается двумерная модель деформации несимметричного упругого тела. С его помощью дается точное решение задачи плоской несимметричной теории упругости об одноосном растяжении пластины, ослабленной треугольным отверстием. В [76], двумерная краевая задача микрополярной теории упругости для анизотропной среды в области тонкого прямоугольника сводится к одномерной задаче. На основе построенных моделей микроанизотропных упругих тонких балок рассматривается конкретная задача определения напряженно-деформированного состояния с граничными условиями в виде шарнирного опирания.

Количество опубликованных работ по нестационарным задачам моментной теории упругости невелико [44,7,8,11]. В работе [44] исследуется динамическая задача микрополярного пространства с сосредоточенной в начале координат силой, а в [7] – аналогичные задачи для слоя, полупространства или пространства. В статьях [8,11] построены решения двумерных нестационарных задач для упругих моментных полупространства и полуплоскости. В статьях

[80] построены аналитические решения двумерных задач о действии нестационарной поверхностной нагрузки на моментную упругую полуплоскость и полупространство. В [46,47,89] рассматривается нестационарная осесимметричная задача о распространении кинематических возмущений от сферической полости в пространстве, заполненном однородной изотропной средой псевдокоссера. Для решения используются разложения в ряды по полиномам Лежандра, преобразование Лапласа по времени и его обращение с помощью степенных рядов в окрестности начального момента времени.

А работы по задачам нестационарной моментной теории упругости со сферической полостью, то большинство ученых сосредоточены на исследованиях теории сферических и конических оболочек представляет собой части общей теории оболочек. Теория сферических и конических оболочек представляет собой части общей теории оболочек. В расчете сферических оболочек была работа Рейсснера Г. [110], который привел удобную форму дифференциальных уравнений, описывающих осевую асимметричную деформацию этих оболочек, а затем применил асимптотический метод для их интегрирования. В работе [91] посвящена расчету оболочек вращения на статическую нагрузку. Все задачи решаются по линейной формуле, основанной на инженерной теории оболочки с предположением идеальной упругости материала и малых деформаций. Решения задачи осевой асимметрии конических и сферических оболочек сводятся к системам разрешающих уравнений Мейснера для различных типов распределенных нагрузок. В работе [88,89] рассматривается пространственная задача о движении тонкой упругой сферической оболочки типа Тимошенко под действием произвольно распределенного нестационарного давления, перемещения оболочки и все характеристики рассматриваются в линейном приближении по нормальной координате. Предлагается подход к разделению системы уравнений пространственного движения оболочки и обобщенная линейная модель динамики тонкой упругой оболочки постоянной толщины.

В работах [48,49,50] рассматривается осесимметричное движение заполненного однородной изотропной средой со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуумом Коссера) пространства со сферической полостью. Аналогичные вопросы для упрощенной модели псевдоконтинуума Коссера рассмотрены в работах [46,47]. В статьях [8,11] построены решения двумерных нестационарных задач для упругих моментных полупространства и полуплоскости. Осесимметричные задачи для упругих тел с несимметричным тензором напряжений со сферическими границами исследованы в работах [5,6].

1.2. Пространственные уравнения движения и граничные условия для среды Коссера

Уравнения движения среды Коссера имеют вид [66]:

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j \sigma^{ji} + F^i, \quad J \frac{\partial^2 \omega^i}{\partial t^2} = \nabla_j \mu^{ji} + \varepsilon^{ijk} \sigma_{jk} + M^i, \quad (1.2.1)$$

Здесь u^i , ω^i , F^i и M^i - координаты векторов перемещения $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$, угла поворота $\boldsymbol{\omega} = \omega^i \mathbf{e}_i$, массовых сил $\mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i$ и массовых моментов $\mathbf{M} = M^i \mathbf{e}_i$ соответственно; σ^{ij} и μ^{ij} - компоненты тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ и моментов напряжений $\boldsymbol{\mu} = \mu^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - ковариантный базис криволинейной системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 ; ε_{ijk}^i - компоненты дискриминантного тензора Леви-Чивиты; ∇_j - ковариантная производная; ρ - плотность среды; J - мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции); t - время.

К ним добавляются геометрические соотношения

$$\gamma_{ij} = \nabla_i u_j - \varepsilon_{kij} \omega^k, \quad \chi_{ij} = \nabla_i \omega_j. \quad (1.2.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ - тензор деформаций; $\boldsymbol{\chi} = \chi_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ - тензор изгиба-кручения; $\mathbf{E} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k$ - псевдотензор Леви-Чивиты.

Замыкают систему уравнений физические соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\gamma_{ji} + \lambda\Gamma g_{ij}, \Gamma = g^{ij}\gamma_{ij}, \\ \mu_{ij} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ji} + \beta X g_{ij}, X = g^{ij}\chi_{ij}.\end{aligned}\quad (1.2.3)$$

Здесь λ, μ – параметры Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – дополнительные физические параметры среды при наличии моментных эффектов; g_{ij} – компоненты метрического тензора.

Отсюда вытекает, что для разности компонентов тензоров напряжений имеют место равенства

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 2\alpha(\gamma_{ij} - \gamma_{ji}), \mu_{ij} - \mu_{ji} = 2\varepsilon(\chi_{ij} - \chi_{ji}). \quad (1.2.4)$$

Далее, выражая тензоры γ_{ji} и χ_{ji} через перемещения u_i и повороты ω_i , получаем систему уравнений движения в перемещениях:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\text{rot rot } \mathbf{u} + 2\alpha\text{rot } \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \\ (\beta + 2\gamma)\text{grad div } \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \boldsymbol{\omega} + 2\alpha\text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\omega} + \mathbf{M} &= J \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (1.2.5)$$

К уравнениям (1.2.1) - (1.2.3) или (1.2.5) следует добавить граничные условия (∂G - поверхность тела G):

– если заданы перемещения \mathbf{u}_0 и повороты $\boldsymbol{\omega}_0$, то

$$\mathbf{u}|_{\partial G} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\omega}|_{\partial G} = \boldsymbol{\omega}_0. \quad (1.2.6)$$

– если заданы нагрузки \mathbf{P} и моменты \mathbf{M} , то

$$\sigma^{ji} \nu_j|_{\partial G} = P^i, \quad \mu^{ji} \nu_j|_{\partial G} = M^i. \quad (1.2.7)$$

Замыкают начально-краевую задачу начальные условия

$$\begin{aligned}u_i(\mathbf{x}, 0) &= l_i(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = k_i(\mathbf{x}), \\ \omega_i(\mathbf{x}, 0) &= q_i(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = t_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G,\end{aligned}\quad (1.2.8)$$

где функции l_i, k_i, q_i, t_i являются заданными.

Таким образом, уравнения (1.2.5), граничные условия (1.2.6) и (1.2.7), и начальные условия (1.2.8) замыкают постановку нестационарных задач в перемещениях и микроповоротах для среды Коссера без учета температуры.

Уравнения движения среды Коссера (1.2.5) без учета массовых сил и моментов:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \\ (\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} &= J \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

При $\alpha = 0$ эти уравнения независимы. Причем первое из них переходит в уравнение Ламе теории упругости. Т.е. для выделения из поля перемещений моментной среды «упругой» составляющей \mathbf{u}_e необходимо положить $\alpha = 0$. При этом разность

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{u}_e = \mathbf{u}|_{\alpha=0} \quad (1.2.10)$$

определяет вклад в перемещения особенностей модели моментной среды.

Для оценки аналогичного вклада в вектор поворота далее будем рассматривать следующие величины:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{ce} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_{cp} - \boldsymbol{\omega}_{pe}, \quad \boldsymbol{\omega}_{cp} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_p, \quad \boldsymbol{\omega}_{pe} = \boldsymbol{\omega}_p - \boldsymbol{\omega}_e, \\ \boldsymbol{\omega}_e = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}_e, \quad \boldsymbol{\omega}_p = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Отметим, что вектор $\boldsymbol{\omega}_p$ соответствует модели псевдоконтинуума Коссера [66,28].

Принципиально можно получить уравнение относительно вектора $\boldsymbol{\omega}_c$. Однако далее ограничимся выделением этой составляющей для конкретных задач.

Векторное поле перемещений \mathbf{u} можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (1.2.12)$$

где φ и $\boldsymbol{\psi}$ – скалярный и векторный потенциалы смещений.

Поставляя представления в (1.2.9), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \left[(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \operatorname{rot} \left[(\mu + \alpha) \Delta \boldsymbol{\psi} + 2\alpha \boldsymbol{\omega} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} \right] = 0, \\ (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + (\gamma + \varepsilon) \Delta \boldsymbol{\omega} - 2\alpha \Delta \boldsymbol{\psi} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} = J \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Система (1.2.16) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi, & \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= (\mu + \alpha) \Delta \Psi + 2\alpha \omega, \\ J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div } \omega + (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega - 2\alpha \Delta \Psi - 4\alpha \omega, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_1^2 \Delta \varphi, & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= c_{2\alpha}^2 \Delta \Psi + 2 \frac{\alpha}{\rho} \omega, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= c_3^2 \Delta \omega + \frac{\beta + \gamma - \varepsilon}{J} \text{grad div } \omega - 2 \frac{\alpha}{J} (\Delta \Psi + 2\omega), \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, \quad c_{2\alpha}^2 = c_2^2 + \frac{\alpha}{\rho}.$$

Вектор ω также можно представить аналогично (1.2.12):

$$\omega = \text{grad} \Phi + \text{rot} \Psi, \quad \text{div} \Psi = 0 \quad (1.2.16)$$

где Φ и Ψ – скалярный и векторный потенциалы поля углов поворота.

Подставляя это разложение во второе уравнение (1.2.9), получаем

$$\begin{aligned} \text{grad} [(\beta + 2\gamma) \Delta \Phi - 4\alpha \Phi] - \text{rot} [(\gamma + \varepsilon) \text{rot rot} \Psi - 2\alpha \mathbf{u} + 4\alpha \Psi] &= \\ = J \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{grad} \Phi + \text{rot} \Psi). \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

откуда следуют уравнения относительно Φ и Ψ :

$$\begin{aligned} J \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= (\beta + 2\gamma) \Delta \Phi - 4\alpha \Phi, \\ J \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \Psi + 2\alpha (\mathbf{u} - 2\Psi). \end{aligned}$$

Объединяя их с первым уравнением в (1.2.9), в котором учитывается разложение (1.2.16), приходим ко второму варианту замкнутой системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= (c_1^2 - c_{2\alpha}^2) \text{grad div } \mathbf{u} + \Delta \left(c_{2\alpha}^2 \mathbf{u} - \frac{2\alpha}{\rho} \Psi \right), \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= c_3^2 \Delta \Psi + \frac{2\alpha}{J} (\mathbf{u} - 2\Psi), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_4^2 \Delta \Phi - \frac{4\alpha}{J} \Phi, \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

где

$$c_4 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}. \quad (1.2.19)$$

Отметим, что здесь последнее уравнение независимо.

Если в первом уравнении в (1.2.16) учесть равенство (1.2.16), а в (1.2.17) подставить (1.2.12), то получим третий вариант замкнутой системы относительно всех четырех потенциалов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_1^2 \Delta \varphi, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c_{2\alpha}^2 \Delta \Psi + \frac{2\alpha}{\rho} \operatorname{rot} \Psi, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= c_3^2 \Delta \Psi + \frac{2\alpha}{J} (\operatorname{rot} \psi - 2\Psi), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_4^2 \Delta \Phi - \frac{4\alpha}{J} \Phi. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Здесь первое и четвертое уравнения независимы.

1.3. Уравнения осесимметричного движения для среды Коссера

Далее используем сферическую систему координат r, ϑ, θ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$) с центром в точке O и ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\vartheta$, а также прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с ортонормированным базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, где

$$x = r \sin \theta \cos \vartheta, \quad y = r \sin \theta \sin \vartheta, \quad z = r \cos \theta. \quad (1.3.1)$$

Полагаем, что движение является симметричным относительно оси Oz (осесимметричным), что соответствует следующим физическим компонентам векторов перемещения и вращения:

$$\mathbf{u} = w(r, \theta, t) \mathbf{e}_r + v(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi(r, \theta, t) \mathbf{e}_\vartheta, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(r, \theta, t) \mathbf{e}_\vartheta, \quad \varphi = \varphi(r, \theta, t). \quad (1.3.2)$$

Для этого типа движения удобнее использовать систему уравнений (1.2.5). При этом связь перемещений с потенциалами имеет вид [21]:

$$\begin{aligned} u_r = w &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\psi \sin \theta) \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \psi \operatorname{ctg} \theta \right), \\ u_\theta = v &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \psi \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u_\vartheta = 0. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Читать: $\Delta \varphi$, $\Delta \Psi$, $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}$

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta$$

+ $\Delta\varphi$: Из А.4.48 [21]

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\text{ctg}\theta\right)$$

+ $\Delta\Psi$: Из А.4.50

$$\Delta\Psi = \left(\Delta\Psi - \frac{\Psi}{r^2\sin^2\theta}\right)\mathbf{e}_\vartheta$$

+ $\text{div}\boldsymbol{\omega} = 0$

Тогда из (1.2.15) получаем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c_1^2\Delta\varphi, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c_{2\alpha}^2 D(\Psi) + 2\frac{\alpha}{\rho}\boldsymbol{\omega}, \quad (1.3.4)$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = c_3^2 D(\boldsymbol{\omega}) - 2\frac{\alpha}{J}\left[D(\Psi) + 2\boldsymbol{\omega}\right], \quad D(\Psi) = \Delta\Psi - \frac{\Psi}{r^2\sin^2\theta}.$$

Выражения деформаций $\gamma_{\xi\zeta}$, $\chi_{\xi\zeta}$ где $\{\xi, \zeta\} = \{r, \vartheta, \theta\}$ через перемещения находим из (1.2.2) [21]:

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r}, \gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w\right), \gamma_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r}(v\text{ctg}\theta + w), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \boldsymbol{\omega}, \gamma_{\theta r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v\right) + \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

$$\gamma_{r\vartheta} = \gamma_{\vartheta r} = \gamma_{\theta\vartheta} = \gamma_{\vartheta\theta} = 0,$$

$$\Gamma = \gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta} + \gamma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w\right) + \frac{1}{r}(v\text{ctg}\theta + w).$$

$$\chi_{r\vartheta} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial r}, \chi_{\vartheta r} = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{r}, \chi_{\theta\vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\theta}, \chi_{\vartheta\theta} = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{r}\text{ctg}\theta, \quad (1.3.6)$$

$$\chi_{rr} = \chi_{\theta\theta} = \chi_{\vartheta\vartheta} = \chi_{r\theta} = \chi_{\theta r} \equiv 0, \quad \mathbf{X} = \chi_{rr} + \chi_{\theta\theta} + \chi_{\vartheta\vartheta} \equiv 0.$$

Связь напряжений $\sigma_{\xi\zeta}$, $\mu_{\xi\zeta}$, где $\{\xi, \zeta\} = \{r, \vartheta, \theta\}$, с кинематическими параметрами вытекает из (1.2.3), (1.3.5) и (1.3.6):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\gamma_{rr} + \lambda(\gamma_{\theta\theta} + \gamma_{\vartheta\vartheta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\gamma_{\theta\theta} + \lambda(\gamma_{rr} + \gamma_{\vartheta\vartheta}), \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= (\lambda + 2\mu)\gamma_{\vartheta\vartheta} + \lambda(\gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta}), \quad \sigma_{r\theta} = (\mu + \alpha)\gamma_{r\theta} + (\mu - \alpha)\gamma_{\theta r}, \\ \sigma_{\theta r} &= (\mu + \alpha)\gamma_{\theta r} + (\mu - \alpha)\gamma_{r\theta}, \quad \sigma_{r\vartheta} = \sigma_{\vartheta r} = \sigma_{\theta\vartheta} = \sigma_{\vartheta\theta} \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{r\vartheta} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{r\vartheta} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{\vartheta r}, \mu_{\theta\vartheta} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{\theta\vartheta} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{\vartheta\theta}, \\
\mu_{\vartheta r} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{\vartheta r} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{r\vartheta}, \mu_{\vartheta\theta} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{\vartheta\theta} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{\theta\vartheta}, \\
\mu_{rr} &= \mu_{\theta\theta} = \mu_{r\theta} = \mu_{\theta r} = \mu_{\vartheta\vartheta} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Далее везде будем использовать безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые в последующем изложении опущены):

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{r}{L}, \tau = \frac{c_1 t}{L}, w' = \frac{w}{L}, v' = \frac{v}{L}, \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \psi' = \frac{\psi}{L^2} \\
\sigma'_{\xi\zeta} &= \frac{\sigma_{\xi\zeta}}{\lambda + 2\mu}, \chi'_{\xi\zeta} = L\chi_{\xi\zeta}, \mu'_{\xi\zeta} = \frac{L\mu_{\xi\zeta}}{\gamma + \varepsilon}, \{\xi, \zeta\} = \{r, \theta, \vartheta\}, \\
\alpha' &= \frac{\alpha}{\rho c_1^2} = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \nu = \frac{\rho L^2}{J}, \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\gamma_1^2}.
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

где L - характерный линейный размер; c_1 и c_2 - скорости распространения волн растяжения-сжатия (P -волн) и формоизменения (S -волн) в классической упругой среде.

При этом уравнения движения относительно потенциалов (1.3.4) записываются в таком виде (точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени τ):

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \Delta\varphi, \ddot{\psi} = (\gamma_1^{-2} + \alpha)D(\psi) + 2\alpha\omega, \\
\ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2}D(\omega) - 2\alpha\nu[D(\psi) + 2\omega].
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Кинематические соотношения сохраняют свой вид, а нетривиальные моментные напряжения и напряжения в безразмерном виде выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \gamma_{rr} + \kappa(\gamma_{\theta\theta} + \gamma_{\vartheta\vartheta}), \\
\sigma_{\theta\theta} &= \gamma_{\theta\theta} + \kappa(\gamma_{rr} + \gamma_{\vartheta\vartheta}), \\
\sigma_{\vartheta\vartheta} &= \gamma_{\vartheta\vartheta} + \kappa(\gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta}), \\
\sigma_{r\theta} &= \gamma_1^{-2}(\gamma_{r\theta} + \gamma_{\theta r}) + \alpha(\gamma_{r\theta} - \gamma_{\theta r}), \\
\sigma_{\theta r} &= \gamma_1^{-2}(\gamma_{\theta r} + \gamma_{r\theta}) + \alpha(\gamma_{\theta r} - \gamma_{r\theta}).
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{r\vartheta} &= \chi_{r\vartheta} + \eta\chi_{\vartheta r}, \mu_{\vartheta r} = \chi_{\vartheta r} + \eta\chi_{r\vartheta}, \\
\mu_{\theta\vartheta} &= \chi_{\theta\vartheta} + \eta\chi_{\vartheta\theta}, \mu_{\vartheta\theta} = \chi_{\vartheta\theta} + \eta\chi_{\theta\vartheta}.
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

1.4. Уравнения антисимметричного движения среды Коссера

Теперь в сферической системе координат (1.3.1) рассмотрим антисимметричное относительно оси Oz движения, для которого используем уравнения (1.2.18), полагая аналогично антиплоской деформации [45], что имеют место равенства:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u(r, \theta, t) \mathbf{e}_\vartheta, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_r(r, \theta, t) \mathbf{e}_r + \omega_\theta(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta, \\ \boldsymbol{\Psi} &= \Psi(r, \theta, t) \mathbf{e}_\vartheta, \quad \Phi = \Phi(r, \theta, t).\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

Для перехода к скалярной форме записи соотношений (1.2.16) и уравнений (1.2.18) учитываем, что входящие в них операторы с учетом (1.4.1) и обозначения в (1.3.4) имеют вид (A.4.48), (A.4.49), (A.4.50) [21]:

$$\begin{aligned}\text{grad}\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \text{rot}\boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\Psi \sin\theta) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta, \\ \text{div}\mathbf{u} &= 0, \quad \Delta\mathbf{u} = D(u) \mathbf{e}_\vartheta.\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

В результате получаем

$$\omega_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\Psi \sin\theta), \quad \omega_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi)}{\partial r};\tag{1.4.3}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_4^2 \Delta\Phi - \frac{4\alpha}{J} \Phi;\tag{1.4.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{2\alpha}^2 D(u) - \frac{2\alpha}{\rho} D(\Psi),\tag{1.4.5}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c_3^2 D(\Psi) + \frac{2\alpha}{J} (u - 2\Psi).$$

При определении деформаций $\gamma_{\xi\zeta}$ и $\chi_{\xi\zeta}$ где $\{\xi, \zeta\} = \{r, \vartheta, \theta\}$ по формулам (1.2.2) дополнительно учитываем равенства для дискриминантного тензора [21,22]:

$$\varepsilon_{kij} = \delta_{kij} \sqrt{g}, \quad g = r^4 \sin^2\theta,\tag{1.4.6}$$

где δ_{kij} - обобщенный символ Кронекера.

В результате получаем

$$\gamma_{r\vartheta} = \frac{\partial u}{\partial r} + \omega_\theta, \gamma_{\vartheta r} = -\frac{u}{r} - \omega_\theta, \gamma_{\theta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \omega_r, \gamma_{\vartheta\theta} = \omega_r - \frac{u}{r} \operatorname{ctg}\theta, \quad (1.4.7)$$

$$\gamma_{rr} = \gamma_{\theta\theta} = \gamma_{\vartheta\vartheta} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r} = 0.$$

$$\chi_{rr} = \frac{\partial \omega_r}{\partial r}, \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} + \omega_r \right), \chi_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} (\omega_r + \omega_\theta \operatorname{ctg}\theta), \quad (1.4.8)$$

$$\chi_{r\theta} = \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r}, \chi_{\theta r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} - \omega_\theta \right), \chi_{r\vartheta} = \chi_{\vartheta r} = \chi_{\theta\vartheta} = \chi_{\vartheta\theta} = 0.$$

Связь напряжений $\sigma_{\xi\zeta}$ и $\mu_{\xi\zeta}$, где $\{\xi, \zeta\} = \{r, \vartheta, \theta\}$, с кинематическими параметрами вытекает из (1.2.3), (1.4.7) и (1.4.8):

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0, \quad (1.4.9)$$

$$\sigma_{r\vartheta} = (\mu + \alpha) \gamma_{r\vartheta} + (\mu - \alpha) \gamma_{\vartheta r}, \sigma_{\vartheta r} = (\mu + \alpha) \gamma_{\vartheta r} + (\mu - \alpha) \gamma_{r\vartheta},$$

$$\sigma_{\theta\vartheta} = (\mu + \alpha) \gamma_{\theta\vartheta} + (\mu - \alpha) \gamma_{\vartheta\theta}, \sigma_{\vartheta\theta} = (\mu + \alpha) \gamma_{\vartheta\theta} + (\mu - \alpha) \gamma_{\theta\vartheta};$$

$$\mu_{rr} = 2\gamma\chi_{rr} + \beta X; \mu_{\theta\theta} = 2\gamma\chi_{\theta\theta} + \beta X; \mu_{\vartheta\vartheta} = 2\gamma\chi_{\vartheta\vartheta} + \beta X; X = \chi_{rr} + \chi_{\theta\theta} + \chi_{\vartheta\vartheta}, \quad (1.4.10)$$

$$\mu_{r\theta} = (\gamma + \varepsilon) \chi_{r\theta} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{\theta r}, \mu_{\theta r} = (\gamma + \varepsilon) \chi_{\theta r} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{r\theta},$$

$$\mu_{r\vartheta} = \mu_{\vartheta r} = \mu_{\theta\vartheta} = \mu_{\vartheta\theta} = 0.$$

Далее дополняем (1.3.9) равенствами

$$\Phi' = \frac{\Phi}{L}, \Psi' = \frac{\Psi}{L}, \gamma_0^2 = \frac{c_1^2}{c_4^2}, \eta_{1\alpha}^\pm = \gamma_1^{-2} \pm \alpha, \quad (1.4.11)$$

$$\eta_1 = \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon}, \eta_2 = \frac{\beta}{\gamma + \varepsilon}, 2\eta_1 + \eta_2 = \frac{c_4^2}{c_3^2} = \gamma_2^2 \gamma_0^{-2}.$$

и, опять опуская штрихи, записываем соотношения (1.4.3), (1.4.7) и (1.4.8), а также (1.4.4), (1.4.5) и (1.4.9), (1.4.10) в безразмерной форме. Первые три группы сохраняют свой вид, а равенства уравнения (1.4.4), (1.4.5) принимают следующий вид:

$$\ddot{\Phi} = \gamma_0^{-2} \Delta \Phi - 4\alpha \nu \Phi. \quad (1.4.12)$$

$$\ddot{u} = \eta_{1\alpha}^+ D(u) - 2\alpha D(\Psi), \quad (1.4.13)$$

$$\ddot{\Psi} = \gamma_2^{-2} D(\Psi) + 2\alpha \nu (u - 2\Psi).$$

Безразмерная форма нетривиальных соотношений в (1.4.9) и (1.4.10) записывается так:

$$\sigma_{r\vartheta} = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{r\vartheta} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\vartheta r}, \sigma_{\vartheta r} = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\vartheta r} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{r\vartheta}, \quad (1.4.14)$$

$$\sigma_{\theta\vartheta} = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\theta\vartheta} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\vartheta\theta}, \sigma_{\vartheta\theta} = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\vartheta\theta} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\theta\vartheta}.$$

$$\begin{aligned}
\mu_{rr} &= 2\eta_1\chi_{rr} + \eta_2X, \\
\mu_{\theta\theta} &= \eta_1\chi_{\theta\theta} + \eta_2X, \quad \mu_{\varphi\varphi} = \eta_1\chi_{\varphi\varphi} + \eta_2X, \\
\mu_{r\theta} &= \chi_{r\theta} + \eta\chi_{\theta r}, \quad \mu_{\theta r} = \chi_{\theta r} + \eta\chi_{r\theta}.
\end{aligned} \tag{1.4.15}$$

Глава 2. Распространение осесимметричных возмущений от сферической полости

2.1. Представление решения в виде рядов

Потенциалы, перемещения и компоненты напряженного состояния с представляем в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(x)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ w \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \Phi_n \\ w_n \end{pmatrix} P_n(\cos\theta), \quad \begin{pmatrix} \Psi \\ v \\ \omega \end{pmatrix} = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \Psi_n \\ v_n \\ \omega_n \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta). \tag{2.1.1}$$

Подставляя их в (1.3.3), получаем

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{\partial\Phi_n}{\partial r} - n(n+1)\frac{\Psi_n}{r} \quad (n \geq 0), \\
v_n &= \frac{\Phi_n - \Psi_n}{r} - \frac{\partial\Psi_n}{\partial r} \quad (n \geq 1).
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Далее с помощью рядов (2.1.1) и формул (1.3.5) и (1.3.6), находим разложения компонент тензора деформаций и изгиба-кручения:

$$\begin{aligned}
\gamma_{rr}(r, \theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{rrn}(r, \tau) P_n(\cos\theta), \\
\gamma_{r\theta}(r, \theta, \tau) &= -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{r\theta n}(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta), \\
\gamma_{\theta r}(r, \theta, \tau) &= -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\theta rn}(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta), \\
\gamma_{\theta\theta}(r, \theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\theta\theta n}(r, \tau) P_n(\cos\theta) + \cos\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(r, \tau)}{r} C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta), \\
\gamma_{\varphi\varphi}(r, \theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\varphi\varphi n}(r, \tau) P_n(\cos\theta) - \cos\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(r, \tau)}{r} C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta).
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

где

$$\gamma_{rm} = \frac{\partial w_n}{\partial r}, \gamma_{\theta\theta n} = \frac{1}{r} [w_n - n(n+1)v_n], \quad (2.1.4)$$

$$\gamma_{\vartheta\vartheta n} = \frac{w_n}{r}, \gamma_{r\theta n} = \frac{\partial v_n}{\partial r} - \omega_n, \gamma_{\theta m} = \frac{w_n - v_n}{r} + \omega_n.$$

$$\chi_{r\vartheta} (r, \theta, \tau) = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{r\vartheta n} (r, \tau) C_{n-1}^{3/2} (\cos \theta),$$

$$\chi_{\theta\vartheta} (r, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\theta\vartheta n} (r, \tau) P_n (\cos \theta) + \chi_{\vartheta\theta} (r, \theta, \tau), \quad (2.1.5)$$

$$\chi_{\vartheta r} (r, \theta, \tau) = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\vartheta r n} (r, \tau) C_{n-1}^{3/2} (\cos \theta),$$

$$\chi_{\vartheta\theta} (r, \theta, \tau) = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\vartheta\theta n} (r, \tau) C_{n-1}^{3/2} (\cos \theta).$$

где

$$\chi_{r\vartheta n} = \frac{\partial \omega_n}{\partial r}, \chi_{\vartheta r n} = -\frac{\omega_n}{r}, \chi_{\theta\vartheta n} = -n(n+1)\frac{\omega_n}{r}, \chi_{\vartheta\theta n} = \frac{\omega_n}{r}. \quad (2.1.6)$$

Аналогичным образом строим разложения в ряды компонент тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rn} P_n (\cos \theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\theta\theta n} P_n (\cos \theta) + \frac{1-\kappa}{r} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} v_n C_{n-1}^{3/2} (\cos \theta), \quad (2.1.7)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\vartheta\vartheta n} P_n (\cos \theta) - \frac{1-\kappa}{r} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} v_n C_{n-1}^{3/2} (\cos \theta),$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} \end{pmatrix} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_{r\theta n} \\ \sigma_{\theta r n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2} (\cos \theta).$$

где

$$\sigma_{rm} = \frac{\partial w_n}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} [2w_n - n(n+1)v_n],$$

$$\sigma_{\theta\theta n} = \kappa \frac{\partial w_n}{\partial r} + (\kappa + 1) \frac{w_n}{r} - n(n+1) \frac{v_n}{r},$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta n} = \kappa \frac{\partial w_n}{\partial r} + (\kappa + 1) \frac{w_n}{r} - n(n+1) \kappa \frac{v_n}{r}, \quad (2.1.8)$$

$$\sigma_{r\theta n} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial v_n}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{w_n - v_n}{r} - 2\alpha \omega_n,$$

$$\sigma_{\theta r n} = (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial v_n}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{w_n - v_n}{r} + 2\alpha \omega_n.$$

$$\begin{aligned}
\mu_{r\vartheta}(r, \theta, \tau) &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{r\vartheta n}(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\mu_{\vartheta r}(r, \theta, \tau) &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\vartheta r n}(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\mu_{\vartheta\vartheta}(r, \theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\vartheta\vartheta n}(r, \tau) P_n(\cos \theta) + \frac{1+\eta}{r} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\mu_{\vartheta\theta}(r, \theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\vartheta\theta n}(r, \tau) P_n(\cos \theta) + \frac{1+\eta}{r} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta),
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
\mu_{r\vartheta n} &= \frac{\partial \omega_n}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \omega_n, \mu_{\vartheta r n} = \eta \frac{\partial \omega_n}{\partial r} - \frac{\omega_n}{r}, \\
\mu_{\vartheta\vartheta n} &= -\frac{\omega_n}{r} n(n+1), \mu_{\vartheta\theta n} = -\eta \frac{\omega_n}{r} n(n+1) = \eta \mu_{\vartheta\vartheta n}.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Уравнения (1.3.10) с учетом (П.1.8) и (П.1.9) переходят в следующие равенства для коэффициентов рядов

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}_n &= \Delta_n \phi_n \quad (n \geq 0), \\
\gamma_1^2 \ddot{\psi}_n &= (1 + \alpha \gamma_1^2) \Delta_n \psi_n + 2\alpha \gamma_1^2 \omega_n, \\
\gamma_2^2 \ddot{\omega}_n &= \Delta_n \omega_n - 2\alpha \nu \gamma_2^2 (\Delta_n \psi_n + 2\omega_n) \quad (n \geq 1).
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Заметим, что в соотношениях (2.1.8) среди пяти коэффициентов разложений независимыми являются только две. Действительно, первые три из этих равенств приводятся к следующему виду

$$\begin{aligned}
\sigma_{rm} &= \frac{\partial w_n}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} [2w_n - n(n+1)v_n], \\
\sigma_{\theta\theta n} &= \kappa \sigma_{rm} + \frac{1-\kappa}{r} [(1+2\kappa)w_n - n(n+1)(1+\kappa)v_n], \\
\sigma_{\vartheta\vartheta n} &= \sigma_{rm} + \frac{1-\kappa}{r} [(1+2\kappa)w_n - n(n+1)\kappa v_n],
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

а последние два записываются так:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta n} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial v_n}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{w_n - v_n}{r} - 2\alpha \omega_n, \\
\sigma_{\theta r n} &= \frac{1}{\gamma_1^{-2} + \alpha} \left[(\gamma_1^{-2} - \alpha) \sigma_{r\theta n} + 4\gamma_1^{-2} \alpha \left(\frac{w_n - v_n}{r} + \omega_n \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Аналогичным образом получаем, что в (2.1.10) только две независимые функции:

$$\begin{aligned}\mu_{r\vartheta n} &= \frac{\partial \omega_n}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \omega_n, \quad \mu_{\vartheta r n} = \eta \mu_{r\vartheta n} - \frac{1-\eta^2}{r} \omega_n, \\ \mu_{\theta\vartheta n} &= -n(n+1) \frac{\omega_n}{r}, \quad \mu_{\vartheta\theta n} = \eta \mu_{\theta\vartheta n}.\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

Поэтому далее достаточно находить только σ_{rm} , $\sigma_{r\theta n}$ и $\mu_{r\vartheta n}$, $\mu_{\theta\vartheta n}$.

2.2. Изображения общего решения

Далее везде будем полагать, что в начальный момент времени среда находится в покое:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0,\tag{2.2.1}$$

что соответствует однородным условиям для коэффициентов рядов

$$\varphi_n|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 0), \quad \psi_n|_{\tau=0} = \dot{\psi}_n|_{\tau=0} = \omega_n|_{\tau=0} = \dot{\omega}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 1).\tag{2.2.2}$$

К уравнениям (2.1.11) и соотношениям (2.1.2), (2.1.8) и (2.1.10) применяем преобразование Лапласа по времени (s - параметр; индекс « L » обозначает трансформанту). В результате получаем уравнения относительно изображений

$$s^2 \varphi_n^L = \Delta_n \varphi_n^L \quad (n \geq 0).\tag{2.2.3}$$

$$\gamma_1^2 s^2 \psi_n^L = (1 + \alpha \gamma_1^2) \Delta_n \psi_n^L + 2\alpha \gamma_1^2 \omega_n^L,\tag{2.2.4}$$

$$\gamma_2^2 s^2 \omega_n^L = \Delta_n \omega_n^L - 2\alpha \nu \gamma_2^2 (\Delta_n \psi_n^L + 2\omega_n^L) \quad (n \geq 1).$$

и дополнительные соотношения

$$w_0^L = \frac{\partial \varphi_0^L}{\partial r}, \quad w_n^L = \frac{\partial \varphi_n^L}{\partial r} - n(n+1) \frac{\psi_n^L}{r}, \quad v_n^L = \frac{\varphi_n^L - \psi_n^L}{r} - \frac{\partial \psi_n^L}{\partial r} \quad (n \geq 1).\tag{2.2.5}$$

$$\sigma_{rm}^L = \frac{\partial w_n^L}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} [2w_n^L - n(n+1)v_n^L],\tag{2.2.6}$$

$$\sigma_{r\theta n}^L = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial v_n^L}{\partial r} + \frac{(\gamma_1^{-2} - \alpha)}{r} (w_n^L - v_n^L) - 2\alpha \omega_n^L.$$

$$\mu_{r\vartheta n}^L = \frac{\partial \omega_n^L}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \omega_n^L, \quad \mu_{\theta\vartheta n}^L = -n(n+1) \frac{\omega_n^L}{r}.\tag{2.2.7}$$

Общее решение уравнения (2.2.3) в соответствии с (П.2.6) имеет вид:

$$\varphi_n^L = C_{n1}^{(0)}(s)Z_{1n}(rs) + C_{n2}^{(0)}(s)Z_{2n}(rs), \quad (2.2.8)$$

где $C_{n1}^{(0)}(s)$ и $C_{n2}^{(0)}(s)$ - постоянные интегрирования.

Для построения общего решения системы уравнений (2.2.4) записываем ее в матричном виде

$$\mathbf{C}\Delta_n \begin{pmatrix} \Psi_n^L \\ \omega_n^L \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \Psi_n^L \\ \omega_n^L \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 s^2 & -2\alpha\gamma_1^2 \\ 0 & \gamma_2^2 (s^2 + 4\alpha\nu) \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} (1 + \alpha\gamma_1^2) & 0 \\ -2\alpha\nu\gamma_2^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

и приводим к канонической форме (П.3.1):

$$\Delta_n \begin{pmatrix} \Psi_n^L \\ \omega_n^L \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \Psi_n^L \\ \omega_n^L \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{1 + \alpha\gamma_1^2} \begin{pmatrix} \gamma_1^2 s^2 & -2\alpha\gamma_1^2 \\ 2\alpha\nu\gamma_1^2\gamma_2^2 s^2 & \gamma_2^2 [(1 + \alpha\gamma_1^2)s^2 + 4\alpha\nu] \end{pmatrix}.$$

Далее используем приведенный в параграфе П.3 алгоритм. Сначала строим характеристическое уравнение матрицы \mathbf{A} относительно собственных значений λ^2 :

$$|\mathbf{A} - \lambda^2 \mathbf{E}| = \frac{1}{1 + \alpha\gamma_1^2} (A\lambda^4 - B\lambda^2 + C) = 0, \text{Re}\lambda > 0, \quad (2.2.11)$$

$$A = 1 + \alpha\gamma_1^2, B = B_0 + \alpha B_1, C = \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2 (s^2 + 4\alpha\nu),$$

$$B_0 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)s^2, B_1 = \gamma_2^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4\nu).$$

Его корни определяются так:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{B \pm \sqrt{D}}{2A}, D = D_0 - 2\alpha D_1 + \alpha^2 D_2, D_0 = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^2 s^4, \quad (2.2.12)$$

$$D_1 = \gamma_2^2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4\nu), D_2 = \gamma_2^2 [\gamma_2^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4\nu)^2 - 16\nu\gamma_1^4 s^2].$$

При $\alpha = 0$ отсюда получаем

$$\lambda_{1,2}^2 \Big|_{\alpha=0} = \frac{(\gamma_2^2 + \gamma_1^2)s^2 \pm (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)s^2}{2} = s^2 \begin{cases} \gamma_1^2, \\ \gamma_2^2, \end{cases} \quad (2.2.13)$$

что соответствует системе (2.2.4).

Здесь учтено, что для многих материалов, в том числе для композита в виде алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, для характерных скоростей имеют место неравенства:

$$c_2 < c_1 < c_3, \quad (2.2.14)$$

откуда следует следующее соотношение между безразмерными коэффициентами в (1.3.9):

$$\gamma_2 < 1 < \gamma_1. \quad (2.2.15)$$

Соответствующие λ_k^2 собственные векторы есть решения систем линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{A} - \lambda_k^2 \mathbf{E}) \mathbf{Y}_k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y}_k = (y_{1k}, y_{2k})^T. \quad (2.2.16)$$

Их выбираем так, чтобы имела место линейная независимость и при $\alpha = 0$ (как решения первого и второго скалярных уравнений в (2.2.16) соответственно):

$$\begin{aligned} y_{11} &= \gamma_2^2 \left[(1 + \alpha \gamma_1^2) s^2 + 4\alpha \nu \right] - \lambda_1^2 (1 + \alpha \gamma_1^2), \quad y_{21} = -2\alpha \nu \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2, \\ y_{12} &= 2\alpha \gamma_1^2, \quad y_{22} = \gamma_1^2 s^2 - \lambda_2^2 (1 + \alpha \gamma_1^2). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Независимость подтверждается отличием от нуля определителя матрицы перехода в (П.3.3):

$$\det(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \Big|_{\alpha=0} = (\gamma_2^2 s^2 - \lambda_1^2)(\gamma_1^2 s^2 - \lambda_2^2) \Big|_{\alpha=0} = -(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^2 s^4. \quad (2.2.18)$$

Собственные функции оператора Δ_n как решения уравнений

$$\Delta_n F_{nkl} = \lambda_k^2 F_{nkl} \quad (2.2.19)$$

определяются аналогично (2.2.8):

$$F_{nk1}(r, s) = Z_{1n}(\lambda_k r), \quad F_{nk2}(r, s) = Z_{2n}(\lambda_k r). \quad (2.2.20)$$

Следовательно, в соответствии с (П.3.9) общее решение системы уравнений (2.2.4) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Psi_n^L \\ \omega_n^L \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^2 \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} \left[C_{n1}^{(k)}(s) Z_{1n}(\lambda_k r) + C_{n2}^{(k)}(s) Z_{2n}(\lambda_k r) \right]. \quad (2.2.21)$$

Далее, подставляя (2.2.8) и (2.2.21) в (2.2.5) – (2.2.7), с учетом (П.2.4), (П.2.7),

(П.2.8) и (П.2.10) получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} w_n^L &= s \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) X_{ln}(rs) + n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{1k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) Y_{ln}(\lambda_k r), \\ v_n^L &= \sum_{k,l=1}^2 y_{1k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) Y_{l+2,n}(\lambda_k r) - s \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) Y_{ln}(rs), \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

$$\omega_n^L = \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) Z_{ln}(\lambda_k r).$$

$$\sigma_{rrn}^L = s^2 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) S_{rrln}^{(0)}(rs) + n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{1k} \lambda_k^2 C_{nl}^{(k)}(s) S_{rrln}^{(1)}(\lambda_k r), \quad (2.2.23)$$

$$\sigma_{r\theta n}^L = s^2 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) S_{r\theta ln}^{(0)}(rs) + \sum_{k,l=1}^2 \lambda_k \left[y_{1k} \lambda_k S_{r\theta ln}^{(k)}(\lambda_k r) - 2\alpha y_{2k} Z_{ln}(\lambda_k r) \right] C_{nl}^{(k)}(s),$$

где

$$\begin{aligned} S_{rrln}^{(0)}(z) &= c_n(z) Z_{ln}(z) + 2(1-\kappa) U_{ln}(z), \quad c_n(z) = 1 + (1-\kappa) \frac{n(n+1)}{z^2}, \\ S_{rrln}^{(1)}(z) &= -\frac{1-\kappa}{z} [X_{ln}(z) + Y_{ln}(z)], \quad S_{r\theta ln}^{(0)}(z) = \frac{2\gamma_1^{-2}}{z} [X_{ln}(z) + Y_{ln}(z)], \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

$$S_{r\theta ln}^{(1)}(z) = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \left[U_{l+2,n}(z) - \frac{1}{z} Y_{ln}(z) \right] + \frac{1}{z} (\gamma_1^{-2} - \alpha) [n(n+1) Y_{ln}(z) - Y_{l+2,n}(z)],$$

$$\mu_{r\theta n}^L = \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 C_{nl}^{(k)}(s) [X_{ln}(\lambda_k r) + \eta Y_{ln}(\lambda_k r)], \quad (2.2.25)$$

$$\mu_{\theta\theta n}^L = n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 C_{nl}^{(k)}(s) Y_{ln}(\lambda_k r).$$

2.3. Изображения решения при кинематических возмущениях

Положим, что на сферической полости единичного радиуса в пространстве, заполненном средой Коссера, заданы осесимметрично распределенные перемещения, что согласно (1.2.6) соответствует равенствам

$$w|_{r=1} = W_0(\theta, \tau), \quad v|_{r=1} = V_0(\theta, \tau), \quad \omega|_{r=1} = 0, \quad (2.3.1)$$

а на бесконечности возмущения отсутствуют.

Отметим, что частный случай этих граничных условий соответствует жестко сцепленному с полостью абсолютно твердому шару, поступательно перемещающемуся вдоль оси Oz по закону $Z(\tau)$. Действительно,

соответствующий вектор перемещения \mathbf{u} и правые части первых двух равенств в (2.3.1) имеют вид:

$$\mathbf{u} = Z\mathbf{k} = Z(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta), W_0 = Z\cos\theta, V_0(\theta, \tau) = -Z\sin\theta. \quad (2.3.2)$$

Предварительно раскладываем правые части этих граничных условий (2.3.1) в виде рядов (2.1.1):

$$W_0(\theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{0n}(\tau) P_n(\cos\theta), V_0(\theta, \tau) = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} v_{0n}(\tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta). \quad (2.3.3)$$

Тогда приходим к таким равенствам:

$$w_n|_{r=1} = w_{0n}(\tau) (n \geq 0), v_n|_{r=1} = v_{0n}(\tau), \omega_n|_{r=1} = 0 (n \geq 1). \quad (2.3.4)$$

В пространстве изображений они трансформируются следующим образом:

$$w_n^L|_{r=1} = w_{0n}^L(s) (n \geq 0), v_n^L|_{r=1} = v_{0n}^L(s), \omega_n^L|_{r=1} = 0 (n \geq 1) \quad (2.3.5)$$

Поскольку функция $I_{n+1/2}(z)$ неограничена в окрестности бесконечно удаленной точки, то в (2.2.8) и (2.2.21) необходимо положить

$$C_{n2}^{(0)}(s) = C_{n2}^{(1)}(s) = C_{n2}^{(2)}(s) = 0. \quad (2.3.6)$$

Подставляя (2.2.21) и (2.2.22) в (2.3.5), с учетом (2.3.6) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{n1}^{(0)}(s), C_{n1}^{(1)}(s), C_{n1}^{(2)}(s)$:

$$sC_{01}^{(0)}(s)X_{10}(s) = w_{00}^L(s); \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned} sC_{n1}^{(0)}(s)X_{1n}(s) + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k C_{n1}^{(k)}(s) Y_{1n}(\lambda_k) &= w_{0n}^L(s), \\ \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k C_{n1}^{(k)}(s) Y_{3n}(\lambda_k) - sC_{n1}^{(0)}(s) Y_{1n}(s) &= v_{0n}^L(s), \\ \sum_{k=1}^2 y_{2k} C_{n1}^{(k)}(s) Z_{1n}(\lambda_k) &= 0 (n \geq 1). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Решение уравнения (2.3.7) имеет вид:

$$C_{01}^{(0)}(s) = \frac{w_{00}^L(s)}{sX_{10}(s)}. \quad (2.3.9)$$

Тогда из (2.2.22) получаем

$$w_0^L(r, s) = G_{ww0}^L(r, s)w_{00}^L(s), G_{ww0}^L(r, s) = \frac{X_{10}(rs)}{X_{10}(s)}. \quad (2.3.10)$$

Систему уравнений (2.3.8) записываем в матричном виде

$$\mathbf{A}_n \mathbf{C}_n = \mathbf{B}_n \quad (n \geq 1),$$

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} sX_{1n}(s) & n(n+1)y_{11}\lambda_1 Y_{1n}(\lambda_1) & n(n+1)y_{12}\lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2) \\ -sY_{1n}(s) & y_{11}\lambda_1 Y_{3n}(\lambda_1) & y_{12}\lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2) \\ 0 & y_{21}Z_{1n}(\lambda_1) & y_{22}Z_{1n}(\lambda_2) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} C_{n1}^{(0)}(s) \\ C_{n1}^{(1)}(s) \\ C_{n1}^{(2)}(s) \end{pmatrix}, \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} w_{0n}^L(s) \\ v_{0n}^L(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2.3.11)

Для ее решения сначала находим определитель матрицы системы:

$$|\mathbf{A}_n| = D_n(s) = s[X_{1n}(s)A_{n11}(s) - Y_{1n}(s)A_{n21}(s)], \quad (2.3.12)$$

где

$$A_{n11}(s) = \begin{vmatrix} y_{11}\lambda_1 Y_{3n}(\lambda_1) & y_{12}\lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2) \\ y_{21}Z_{1n}(\lambda_1) & y_{22}Z_{1n}(\lambda_2) \end{vmatrix} =$$

$$= y_{11}\lambda_1 Y_{3n}(\lambda_1) y_{22}Z_{1n}(\lambda_2) - y_{21}Z_{1n}(\lambda_1) y_{12}\lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2), \quad (2.3.13)$$

$$A_{n21}(s) = -n(n+1) \begin{vmatrix} y_{11}\lambda_1 Y_{1n}(\lambda_1) & y_{12}\lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2) \\ y_{21}Z_{1n}(\lambda_1) & y_{22}Z_{1n}(\lambda_2) \end{vmatrix} =$$

$$= -n(n+1)[y_{11}\lambda_1 Y_{1n}(\lambda_1) y_{22}Z_{1n}(\lambda_2) - y_{12}\lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2) y_{21}Z_{1n}(\lambda_1)].$$

Здесь и далее $A_{nij}(s)$ - алгебраическое дополнение расположенного в i -й строке и j -м столбце элемента матрицы \mathbf{A}_n .

Тогда решение системы (2.1.11) можно записать следующим образом:

$$D_n(s)C_{n1}^{(0)}(s) = A_{n11}(s)w_{0n}^L(s) + A_{n21}(s)v_{0n}^L(s),$$

$$D_n(s)C_{n1}^{(1)}(s) = A_{n12}(s)w_{0n}^L(s) + A_{n22}(s)v_{0n}^L(s), \quad (2.3.14)$$

$$D_n(s)C_{n1}^{(2)}(s) = A_{n13}(s)w_{0n}^L(s) + A_{n23}(s)v_{0n}^L(s).$$

где

$$\begin{aligned}
A_{n12}(s) &= -s \begin{vmatrix} -Y_{1n}(s) & y_{12}\lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2) \\ 0 & y_{22}Z_{1n}(\lambda_2) \end{vmatrix} = sy_{22}Y_{1n}(s)Z_{1n}(\lambda_2), \\
A_{n22}(s) &= s \begin{vmatrix} X_{1n}(s) & n(n+1)y_{12}\lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2) \\ 0 & y_{22}Z_{1n}(\lambda_2) \end{vmatrix} = sy_{22}X_{1n}(s)Z_{1n}(\lambda_2), \\
A_{n13}(s) &= s \begin{vmatrix} -Y_{1n}(s) & y_{11}\lambda_1 Y_{3n}(\lambda_1) \\ 0 & y_{21}Z_{1n}(\lambda_1) \end{vmatrix} = -sy_{21}Y_{1n}(s)Z_{1n}(\lambda_1), \\
A_{n23}(s) &= -s \begin{vmatrix} X_{1n}(s) & n(n+1)y_{11}\lambda_1 Y_{1n}(\lambda_1) \\ 0 & y_{21}Z_{1n}(\lambda_1) \end{vmatrix} = -sy_{21}X_{1n}(s)Z_{1n}(\lambda_1).
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Используя теперь (2.3.14), равенства (2.2.22), (2.2.23) и (2.2.25) приводим к следующему виду:

$$\begin{aligned}
w_n^L(r, s) &= G_{wvn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{wvn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
v_n^L(r, s) &= G_{vvn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{vvn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
\omega_n^L(r, s) &= G_{\omega vn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\omega vn}^L(r, s)v_{0n}^L(s).
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rm}^L &= G_{\sigma rrvn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\sigma rrvn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
\sigma_{r\theta n}^L &= G_{\sigma r\theta vn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\sigma r\theta vn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
\mu_{r\theta n}^L &= G_{\mu r\theta vn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\mu r\theta vn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
\mu_{\theta\theta n}^L &= G_{\mu\theta\theta vn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\mu\theta\theta vn}^L(r, s)v_{0n}^L(s).
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Здесь $G_{wvn}^L(r, s), G_{vvn}^L(r, s), \dots, G_{\mu\theta\theta vn}^L$ - изображения поверхностных функций влияния, которые записываются так:

$$\begin{aligned}
D_n(s)G_{wvn}^L(r, s) &= sA_{n11}(s)X_{1n}(rs) + n(n+1)\sum_{k=1}^2 y_{1k}\lambda_k A_{n1,k+1}(s)Y_{1n}(\lambda_k r), \\
D_n(s)G_{vvn}^L(r, s) &= sA_{n21}(s)X_{1n}(rs) + n(n+1)\sum_{k=1}^2 y_{1k}\lambda_k A_{n2,k+1}(s)Y_{1n}(\lambda_k r), \\
D_n(s)G_{\omega vn}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{1k}\lambda_k A_{n1,k+1}(s)Y_{3n}(\lambda_k r) - sA_{n11}(s)Y_{1n}(rs), \\
D_n(s)G_{\sigma rrvn}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{1k}\lambda_k A_{n2,k+1}(s)Y_{3n}(\lambda_k r) - sA_{n21}(s)Y_{1n}(rs), \\
D_n(s)G_{\sigma r\theta vn}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{2k}A_{n1,k+1}(s)Z_{1n}(\lambda_k r), \quad D_n(s)G_{\mu r\theta vn}^L(r, s) = \sum_{k=1}^2 y_{2k}A_{n2,k+1}(s)Z_{1n}(\lambda_k r).
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

$$\begin{aligned}
D_n(s)G_{\sigma r r v n}^L(r,s) &= s^2 S_{r r 1 n}^{(0)}(rs)A_{n11}(s) + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k^2 S_{r r 1 n}^{(1)}(\lambda_k r) A_{n1,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\sigma r r v n}^L(r,s) &= s^2 S_{r r 1 n}^{(0)}(rs)A_{n21}(s) + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k^2 S_{r r 1 n}^{(1)}(\lambda_k r) A_{n2,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\sigma r \theta v n}^L(r,s) &= s^2 S_{r \theta 1 n}^{(0)}(rs)A_{n11}(s) + \sum_{k=1}^2 \left[y_{1k} \lambda_k^2 S_{r \theta 1 n}^{(1)}(\lambda_k r) - 2\alpha y_{2k} \lambda_k Z_{1n}(\lambda_k r) \right] A_{n1,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\sigma r \theta v n}^L(r,s) &= s^2 S_{r \theta 1 n}^{(0)}(rs)A_{n21}(s) + \sum_{k=1}^2 \left[y_{1k} \lambda_k^2 S_{r \theta 1 n}^{(1)}(\lambda_k r) - 2\alpha y_{2k} \lambda_k Z_{1n}(\lambda_k r) \right] A_{n2,k+1}(s), \quad (2.3.19) \\
D_n(s)G_{\mu r \vartheta v n}^L(r,s) &= \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 \left[X_{1n}(\lambda_k r) + \eta Y_{1n}(\lambda_k r) \right] A_{n1,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\mu r \vartheta v n}^L(r,s) &= \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 \left[X_{1n}(\lambda_k r) + \eta Y_{1n}(\lambda_k r) \right] A_{n2,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\mu \theta \vartheta v n}^L(r,s) &= n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n1,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\mu \theta \vartheta v n}^L(r,s) &= n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n2,k+1}(s).
\end{aligned}$$

2.4. Линейное приближение решения при кинематических возмущениях

Получить аналитически оригиналы функций влияния при $n \geq 1$ не представляется возможным. Поэтому используем разложения в степенные ряды по малому параметру α , ограничиваясь только линейными слагаемыми. При этом приближенные равенства заменяем точными.

Для корней (2.2.12) с учетом (2.2.11) получаем

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1 - \alpha \gamma_1^2}{2} \left[B_0 + \alpha B_1 \mp \left(1 + \frac{D_1}{D_0} \alpha \right) \sqrt{D_0} \right] = \begin{cases} (1 - \alpha \gamma_1^2) \gamma_1^2 s^2, \\ \gamma_2^2 (s^2 + 4\alpha \upsilon). \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Отсюда следуют равенства:

$$\lambda_1 = \gamma_{1\alpha} s, \quad \lambda_2 = \gamma_2 \left(s + \frac{2\alpha \upsilon}{s} \right), \quad \gamma_{1\alpha} = \gamma_1 \sqrt{1 - \alpha \gamma_1^2} = \gamma_1^2 \sqrt{\eta_{1\alpha}^-}. \quad (2.4.2)$$

Величины $\eta_{1\alpha}^\pm$ введены в (1.4.11).

Кроме того, с учетом (2.4.1) находим линейные приближения компонент собственных векторов в (2.2.17):

$$\begin{aligned}
y_{22} &= -y_{11} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2 - \gamma_2^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4\upsilon) \alpha, \\
y_{12} &= 2\alpha \gamma_1^2, \quad y_{21} = -2\alpha \upsilon \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2.
\end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Равенства (2.4.3) и (2.3.15) показывают, что имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$y_{12}, y_{21}, A_{n13}, A_{n23} = O(\alpha), \alpha \rightarrow 0 \quad (2.4.4)$$

Их учет позволяет с принятой точностью записать равенства (2.3.18) и (2.3.19) следующим образом:

$$\begin{aligned} D_n(s)G_{wwn}^L(r,s) &= sA_{n11}(s)X_{1n}(rs) + n(n+1)y_{11}\lambda_1A_{n12}(s)Y_{1n}(\lambda_1r), \\ D_n(s)G_{wvn}^L(r,s) &= sA_{n21}(s)X_{1n}(rs) + n(n+1)y_{11}\lambda_1A_{n22}(s)Y_{1n}(\lambda_1r), \\ D_n(s)G_{vwn}^L(r,s) &= -sA_{n11}(s)Y_{1n}(rs) + y_{11}\lambda_1A_{n12}(s)Y_{3n}(\lambda_1r), \\ D_n(s)G_{vvn}^L(r,s) &= -sA_{n21}(s)Y_{1n}(rs) + y_{11}\lambda_1A_{n22}(s)Y_{3n}(\lambda_1r), \\ D_n(s)G_{own}^L(r,s) &= y_{21}A_{n12}(s)Z_{1n}(\lambda_1r) + y_{22}A_{n13}(s)Z_{1n}(\lambda_2r), \\ D_n(s)G_{ovn}^L(r,s) &= y_{21}A_{n22}(s)Z_{1n}(\lambda_1r) + y_{22}A_{n23}(s)Z_{1n}(\lambda_2r); \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} D_n(s)G_{srrwn}^L(r,s) &= s^2S_{rr1n}^{(0)}(rs)A_{n11}(s) + n(n+1)y_{11}\lambda_1^2S_{rr1n}^{(1)}(\lambda_1r)A_{n12}(s), \\ D_n(s)G_{srrvn}^L(r,s) &= s^2S_{rr1n}^{(0)}(rs)A_{n21}(s) + n(n+1)y_{11}\lambda_1^2S_{rr1n}^{(1)}(\lambda_1r)A_{n22}(s), \\ D_n(s)G_{sr\theta wn}^L(r,s) &= s^2S_{r\theta 1n}^{(0)}(rs)A_{n11}(s) + y_{11}\lambda_1^2S_{r\theta 1n}^{(1)}(\lambda_1r)A_{n12}(s), \\ D_n(s)G_{sr\theta vn}^L(r,s) &= s^2S_{r\theta 1n}^{(0)}(rs)A_{n21}(s) + y_{11}\lambda_1^2S_{r\theta 1n}^{(1)}(\lambda_1r)A_{n22}(s). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Для остальных функций влияния остаются справедливыми формулы (2.3.19).

Аналогично преобразовываем формулы (2.3.12) и (2.3.13):

$$A_{n11}(s) = y_{11}y_{22}\lambda_1Y_{3n}(\lambda_1)Z_{1n}(\lambda_2), \quad (2.4.7)$$

$$A_{n21}(s) = -n(n+1)\lambda_1y_{11}y_{22}Y_{1n}(\lambda_1)Z_{1n}(\lambda_2).$$

$$D_n(s) = s\lambda_1y_{11}y_{22}\Pi_n(s, \lambda_1)Z_{1n}(\lambda_2), \quad (2.4.8)$$

$$\Pi_n(x, y) = X_{1n}(x)Y_{3n}(y) + n(n+1)Y_{1n}(x)Y_{1n}(y).$$

Использование этих равенств, формул (2.3.15), (2.4.2), (2.4.3) и (2.4.7), (2.4.8) приводит изображения функций влияния (2.4.5), (2.4.6) к такому виду:

$$\begin{aligned} G_{wwn}^L(r,s) &= \frac{F_{wwn}(r,s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s)}, \quad G_{wvn}^L(r,s) = \frac{F_{wvn}(r,s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s)}, \\ G_{vwn}^L(r,s) &= \frac{F_{vwn}(r,s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s)}, \quad G_{vvn}^L(r,s) = \frac{F_{vvn}(r,s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s)}, \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$G_{own}^L(r,s) = \frac{F_{own}(r,s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s)Z_{1n}(\gamma_2s)}, \quad G_{ovn}^L(r,s) = \frac{F_{ovn}(r,s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s)Z_{1n}(\gamma_2s)},$$

где

$$\begin{aligned}
F_{wvn}(r, s) &= X_{1n}(rs)Y_{3n}(\gamma_{1\alpha}s) + n(n+1)Y_{1n}(s)Y_{1n}(\gamma_{1\alpha}rs), \\
F_{vvn}(r, s) &= n(n+1)[X_{1n}(s)Y_{1n}(\gamma_{1\alpha}rs) - Y_{1n}(\gamma_{1\alpha}s)X_{1n}(rs)], \\
F_{vwn}(r, s) &= Y_{1n}(s)Y_{3n}(\gamma_{1\alpha}rs) - Y_{3n}(\gamma_{1\alpha}s)Y_{1n}(rs), \quad k_\omega = \frac{2\nu\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \\
F_{vvn}(r, s) &= X_{1n}(s)Y_{3n}(\gamma_{1\alpha}rs) + n(n+1)Y_{1n}(\gamma_{1\alpha}s)Y_{1n}(rs), \\
F_{\omega vn}(r, s) &= \alpha\gamma_2 k_\omega s^{-1} M_{\omega n}(r, s) Y_{1n}(s), \quad F_{\omega vn}(r, s) = \alpha\gamma_2 k_\omega s^{-1} M_{\omega n}(r, s) X_{1n}(s), \\
M_{\omega n}(r, s) &= Z_{1n}(\gamma_{1\alpha}rs)Z_{1n}(\gamma_2s) - Z_{1n}(\gamma_{1\alpha}s)Z_{1n}(\gamma_2rs).
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Аналогичным образом трансформируются формулы (2.4.6):

$$\begin{aligned}
G_{\sigma abc}^L(r, s) &= \frac{sF_{\sigma abc}(r, s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s)} \quad (abc = rrw, rrv, r\theta w, r\theta v), \\
G_{\mu abc}^L(r, s) &= \frac{sF_{\mu abc}(r, s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s)Z_{1n}(\gamma_2s)} \quad (abc = r\vartheta w, r\vartheta v, \theta\vartheta w, \theta\vartheta v).
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
F_{\sigma rrw}(r, s) &= Y_{3n}(\gamma_{1\alpha}s)S_{rr1n}^{(0)}(rs) + n(n+1)\gamma_{1\alpha}Y_{1n}(s)S_{rr1n}^{(1)}(\gamma_{1\alpha}rs), \\
F_{\sigma rrv}(r, s) &= n(n+1)[\gamma_{1\alpha}X_{1n}(s)S_{rr1n}^{(1)}(\gamma_{1\alpha}rs) - Y_{1n}(\gamma_{1\alpha}s)S_{rr1n}^{(0)}(rs)], \\
F_{\sigma r\theta w}(r, s) &= Y_{3n}(\gamma_{1\alpha}s)S_{r\theta 1n}^{(0)}(rs) + \gamma_{1\alpha}Y_{1n}(s)S_{r\theta 1n}^{(1)}(\gamma_{1\alpha}rs), \\
F_{\sigma r\theta v}(r, s) &= \gamma_{1\alpha}X_{1n}(s)S_{r\theta 1n}^{(1)}(\gamma_{1\alpha}rs) - n(n+1)Y_{1n}(\gamma_{1\alpha}s)S_{r\theta 1n}^{(0)}(rs), \\
F_{\mu r\vartheta w}(r, s) &= \alpha\gamma_2 k_\omega M_{r\vartheta n}(r, s)Y_{1n}(s), \\
F_{\mu r\vartheta v}(r, s) &= \alpha\gamma_2 k_\omega M_{r\vartheta n}(r, s)X_{1n}(s), \\
F_{\mu\theta\vartheta w}(r, s) &= \alpha\gamma_2 k_\omega M_{\theta\vartheta n}(r, s)Y_{1n}(s), \\
F_{\mu\theta\vartheta v}(r, s) &= \alpha\gamma_2 k_\omega M_{\theta\vartheta n}(r, s)X_{1n}(s).
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

где

$$\begin{aligned}
M_{r\vartheta n}(r, s) &= \gamma_{1\alpha}^2 [X_{1n}(\gamma_{1\alpha}rs)Z_{1n}(\gamma_2s) + \eta Y_{1n}(\gamma_{1\alpha}rs)Z_{1n}(\gamma_2s)] - \\
&\quad - \gamma_2^2 [X_{1n}(\gamma_2rs)Z_{1n}(\gamma_{1\alpha}s) + \eta Y_{1n}(\gamma_2rs)Z_{1n}(\gamma_{1\alpha}s)], \\
M_{\theta\vartheta n}(r, s) &= n(n+1)[\gamma_{1\alpha}^2 Y_{1n}(\gamma_{1\alpha}rs)Z_{1n}(\gamma_2s) - \gamma_2^2 Y_{1n}(\gamma_2rs)Z_{1n}(\gamma_{1\alpha}s)].
\end{aligned}$$

Далее, используя (П.2.12) - (П.2.17) и (2.2.24), выражаем входящие в (2.4.8), (2.4.10) и (2.4.12) функции через элементарные функции ($a, b = v, w$):

$$\Pi_n(x, y) = -\frac{\pi P_n(x, y)}{2x^{n+2}y^{n+2}} e^{-(x+y)}, \quad \Pi_n(s, \gamma_{1\alpha}s) = -\frac{\pi P_n(s, \gamma_{1\alpha}s) e^{-(\gamma_{1\alpha}+1)s}}{2s^{2(n+2)}\gamma_{1\alpha}^{n+2}}, \quad (2.4.13)$$

$$P_n(x, y) = R_{n1}(x)R_{n3}(y) - n(n+1)R_{n0}(x)R_{n0}(y);$$

$$\begin{aligned} F_{abn}(r, s) &= -\frac{\pi}{2r^{n+2}s^{2(n+2)}\gamma_{1\alpha}^{n+2}} \left[F_{abn}^{(0)}(r, s) e^{-(\gamma_{1\alpha}+r)s} + F_{abn}^{(1)}(r, s) e^{-(1+\gamma_{1\alpha}r)s} \right] \\ F_{\omega bn}(r, s) &= \\ &= -\frac{\pi^{3/2}}{2^{3/2}r^{n+1}s^{3n+5}\gamma_{1\alpha}^{n+1}\gamma_2^{n+1}} \left[F_{\omega bn}^{(0)}(r, s) e^{-(\gamma_{1\alpha}+\gamma_2r+1)s} + F_{\omega bn}^{(1)}(r, s) e^{-(\gamma_{1\alpha}r+\gamma_2+1)s} \right], \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

где

$$\begin{aligned} F_{wvn}^{(0)}(r, s) &= R_{n1}(rs)R_{n3}(\gamma_{1\alpha}s), \quad F_{wvn}^{(1)}(r, s) = -n(n+1)R_{n0}(s)R_{n0}(\gamma_{1\alpha}rs), \\ F_{wvn}^{(0)}(r, s) &= n(n+1)R_{n0}(\gamma_{1\alpha}s)R_{n1}(rs), \quad F_{wvn}^{(1)}(r, s) = -n(n+1)R_{n1}(s)R_{n0}(\gamma_{1\alpha}rs), \\ F_{vvn}^{(0)}(r, s) &= -R_{n3}(\gamma_{1\alpha}s)R_{n0}(rs), \quad F_{vvn}^{(1)}(r, s) = R_{n0}(s)R_{n3}(\gamma_{1\alpha}rs), \\ F_{vvn}^{(0)}(r, s) &= -n(n+1)R_{n0}(\gamma_{1\alpha}s)R_{n0}(rs), \quad F_{vvn}^{(1)}(r, s) = R_{n1}(s)R_{n3}(\gamma_{1\alpha}rs), \\ F_{\omega vn}^{(0)}(r, s) &= -\alpha k_{\omega} \gamma_2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha}s)R_{n0}(\gamma_2sr)R_{n0}(s), \\ F_{\omega vn}^{(1)}(r, s) &= \alpha k_{\omega} \gamma_2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha}sr)R_{n0}(\gamma_2s)R_{n0}(s), \\ F_{\omega vn}^{(0)}(r, s) &= -\alpha k_{\omega} \gamma_2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha}s)R_{n0}(\gamma_2sr)R_{n1}(s), \\ F_{\omega vn}^{(1)}(r, s) &= \alpha k_{\omega} \gamma_2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha}sr)R_{n0}(\gamma_2s)R_{n1}(s). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Следовательно, изображения функций влияния записываются так ($b = w, v$):

- при $a = w, v$

$$G_{abn}^L(r, s) = \sum_{k=0}^1 G_{abn}^{(k)L}(r, s), \quad G_{abn}^{(k)L}(r, s) = H_{abn}^{(k)L}(r, s) e^{-\gamma_{k\alpha}(r-1)s}, \quad \gamma_{0\alpha} = 1 \quad (2.4.16)$$

- при $a = \omega$

$$\begin{aligned} G_{\omega bn}^L(r, s) &= \sum_{k=0}^1 G_{\omega bn}^{(k)L}(r, s), \\ G_{\omega bn}^{(0)L}(r, s) &= H_{\omega bn}^{(0)L}(r, s) e^{-\gamma_2(r-1)s}, \quad G_{\omega bn}^{(1)L}(r, s) = H_{\omega bn}^{(1)L}(r, s) e^{-\gamma_{1\alpha}(r-1)s}, \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Здесь

$$H_{abn}^{(k)L}(r, s) = \frac{F_{abn}^{(k)}(r, s)}{r^{n+2}P_n(s, \gamma_{1\alpha}s)} \quad (a \neq \omega), \quad H_{\omega bn}^{(k)L}(r, s) = \frac{\gamma_{1\alpha}F_{\omega bn}^{(k)}(r, s)}{r^{n+1}P_n(s, \gamma_{1\alpha}s)R_{n0}(\gamma_2s)}. \quad (2.4.18)$$

Аналогично преобразовываем формулы (2.4.12):

$$F_{\sigma abc n}(r, s) = -\frac{\pi}{2\gamma_{1\alpha}^{n+2} s^{2(n+2)+1} r^{n+3}} \left[F_{\sigma abc n}^{(0)}(r, s) e^{-(r+\gamma_{1\alpha})s} + F_{\sigma abc n}^{(1)}(r, s) e^{-(\gamma_{1\alpha} r+1)s} \right] \\ (abc = rrw, rrv, r\theta w, r\theta v), \quad (2.4.19)$$

$$F_{\mu abc n}(r, s) = -\frac{\pi^{3/2}}{2^{3/2} s^{3n+5} r^{n+2} \gamma_{1\alpha}^{n+1} \gamma_2^{n+1}} \left[F_{\mu abc n}^{(0)}(r, s) e^{-(\gamma_{1\alpha} + \gamma_2 r+1)s} + F_{\mu abc n}^{(1)}(r, s) e^{-(\gamma_{1\alpha} r + \gamma_2 + 1)s} \right] \\ (abc = r\vartheta w, r\vartheta v, \theta\vartheta w, \theta\vartheta v),$$

где

$$F_{\sigma rrwn}^{(0)}(r, s) = -Q_{n1}(rs) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s), \quad F_{\sigma rrwn}^{(1)}(r, s) = n(n+1) Q_{n2}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n0}(s), \\ F_{\sigma rrvn}^{(0)}(r, s) = -n(n+1) Q_{n1}(rs) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s), \\ F_{\sigma rrvn}^{(1)}(r, s) = n(n+1) Q_{n2}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n1}(s), \quad (2.4.20) \\ F_{\sigma r\theta wn}^{(0)}(r, s) = Q_{n2}(rs) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s), \quad F_{\sigma r\theta vn}^{(0)}(r, s) = n(n+1) Q_{n2}(rs) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s), \\ F_{\sigma r\theta wn}^{(1)}(r, s) = Q_{n3\alpha}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n0}(s), \quad F_{\sigma r\theta vn}^{(1)}(r, s) = Q_{n3\alpha}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n1}(s);$$

$$F_{\mu r\vartheta wn}^{(0)} = \alpha \gamma_2^2 k_\omega M_{r\vartheta n}(\gamma_2 sr) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(s), \\ F_{\mu r\vartheta wn}^{(1)} = -\alpha \gamma_2 k_\omega \gamma_{1\alpha} M_{r\vartheta n}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(s), \\ F_{\mu r\vartheta vn}^{(0)} = \alpha \gamma_2^2 k_\omega M_{r\vartheta n}(\gamma_2 sr) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n1}(s), \\ F_{\mu r\vartheta vn}^{(1)} = -\alpha \gamma_2 k_\omega \gamma_{1\alpha} M_{r\vartheta n}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n1}(s), \\ M_{r\vartheta n}(z) = R_{n1}(z) + \eta R_{n0}(z), \quad M_{\vartheta rn}(z) = \eta R_{n1}(z) + R_{n0}(z), \quad (2.4.21) \\ F_{\mu\theta\vartheta wn}^{(0)}(r, s) = n(n+1) \alpha \gamma_2^2 k_\omega R_{n0}(\gamma_2 sr) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(s), \\ F_{\mu\theta\vartheta wn}^{(1)}(r, s) = -n(n+1) \alpha \gamma_2 k_\omega \gamma_{1\alpha} R_{n0}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(s), \\ F_{\mu\theta\vartheta vn}^{(0)}(r, s) = n(n+1) \alpha \gamma_2^2 k_\omega R_{n0}(\gamma_2 sr) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n1}(s), \\ F_{\mu\theta\vartheta vn}^{(1)}(r, s) = -n(n+1) \alpha \gamma_2 k_\omega \gamma_{1\alpha} R_{n0}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n1}(s).$$

Здесь использованы аналогичные введенным в [23] обозначения:

$$Q_{n1}(z) = R_{n2}(z) - 2\kappa R_{n1}(z) - n(n+1)\kappa R_{n0}(z), \\ Q_{n2}(z) = (1 - \kappa) R_{n5}(z), \\ Q_{n3\alpha}(z) = -\alpha z^2 R_{n0}(z) - Q_{n3}(z), \\ Q_{n3}(z) = \gamma_{1\alpha}^{-2} [R_{n2}(z) + (n+2)(n-1)R_{n0}(z)], \\ Q_{n4}(z) = \kappa R_{n4}(z) - R_{n1}(z) - n(n+1)R_{n0}(z), \\ Q_{n5}(z) = \kappa z^2 R_{n0}(z) - (1 - \kappa) R_{n1}(z). \quad (2.4.22)$$

Тогда функции в (2.4.11) при $a = \sigma r r, \sigma r \theta$ определяются формулой (2.4.15), в которой

$$G_{abn}^L(r, s) = \sum_{k=0}^1 G_{abn}^{(k)L}(r, s), G_{abn}^{(0)L}(r, s) = H_{abn}^{(0)L}(r, s) e^{-(r-1)s},$$

$$G_{abn}^{(1)L}(r, s) = H_{abn}^{(1)L}(r, s) e^{-\gamma_{1\alpha}(r-1)s}, H_{abn}^{(k)L}(r, s) = \frac{F_{abn}^{(k)}(r, s)}{r^{n+3} P_n(s, \gamma_{1\alpha} s)}. \quad (2.4.23)$$

а при $a = \mu r \vartheta, \mu \theta \vartheta$ - формулой (2.4.16), в которой

$$G_{abn}^L(r, s) = \sum_{k=0}^1 G_{abn}^{(k)L}(r, s), G_{abn}^{(0)L}(r, s) = H_{abn}^{(0)L}(r, s) e^{-\gamma_2(r-1)s},$$

$$G_{abn}^{(1)L}(r, s) = H_{abn}^{(1)L}(r, s) e^{-\gamma_{1\alpha}(r-1)s}, H_{abn}^{(k)L}(r, s) = \frac{s \gamma_{1\alpha} F_{abn}^{(k)}(r, s)}{r^{n+2} P_n(s, \gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(\gamma_2 s)}. \quad (2.4.24)$$

Достаточно легко проверяется, что в части перемещений v, w и напряжений σ_{rr} с точностью до обозначений изображения совпадают с решением аналогичной задачи для упругой среды, приведенном в параграфе 4.2 книги [23], при замене $\gamma_{1\alpha}$ величиной γ_1 . Таким образом, в линейном приближении по отношению к упругой среде изменяется скорость сдвиговых волн и, естественно, появляются дополнительные компоненты напряженно-деформированного состояния.

Отметим также, что в линейном приближении второе равенство в (2.1.13) упрощается:

$$\sigma_{\theta m} = (1 - 2\alpha\gamma_1^2) \sigma_{r\theta n} + 4\alpha \left(\frac{w_n - v_n}{r} + \omega_n \right). \quad (2.4.25)$$

Но из третьего равенства в (2.3.16) и (2.4.15), (2.4.17), (2.4.18) следует оценка

$$\omega_n(r, \tau) = O(\alpha),$$

$$\alpha \rightarrow 0. \quad (2.4.26)$$

Поэтому в линейном приближении формулу (2.4.25) можно записать так:

$$\sigma_{\theta m} = (1 - 2\alpha\gamma_1^2) \sigma_{r\theta n} + 4\alpha \frac{w_n - v_n}{r}. \quad (2.4.27)$$

2.5. Оригиналы решения при кинематических возмущениях

Оригинал функции $G_{ww0}^L(r, s)$ в (2.3.10) находится достаточно просто, поскольку он соответствует упругому решению [23]. Это изображение преобразовываем с использованием (П.2.12), (П.2.14) и (П.2.16):

$$G_{ww0}^L(r, s) = \frac{1}{r} e^{-(r-1)s} + G_{ww0r}^L(r, s), \quad G_{ww0r}^L(r, s) = -\frac{r-1}{r^2(s+1)} e^{-(r-1)s}. \quad (2.5.1)$$

Отсюда с помощью свойств преобразования Лапласа и таблиц [21] получаем:

$$\begin{aligned} G_{ww0}(r, \tau) &= \frac{1}{r} \delta(\tau - r + 1) + G_{ww0r}(r, \tau), \\ G_{ww0r}(r, \tau) &= -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{r}\right) e^{-\tau+r-1} H(\tau - r + 1). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

где $\delta(\tau)$ и $H(\tau)$ - дельта-функция Дирака и единичная функция Хевисайда.

Остальные оригиналы определяем с учетом того, что функции в (2.4.18), (2.4.23) и (2.4.24) - рациональные функции параметра s .

Сначала рассмотрим первые из них. С учетом (П.2.12) и (П.2.16) находим степени многочленов в числителях и знаменателях:

$$\deg R_{n0}(z) = n, \quad \deg R_{n1}(z) = \deg R_{n3}(z) = n + 1, \quad \deg P_n(s, \gamma_{1\alpha}s) = 2(n + 1). \quad (2.5.3)$$

Следовательно, $H_{wvn}^{(0)L}(r, s)$ и $H_{vvn}^{(1)L}(r, s)$ являются неправильными, а остальные функции в (2.4.18) правильными дробями аргумента s .

Для выделения целой части этих функций с использованием (П.2.21) находим асимптотику многочлена $P_n(\alpha s, \beta s)$ в (2.2.13) при $s \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} P_n(\alpha s, \beta s) &\square R_{n1}(\alpha s) R_{n3}(\beta s) \square \alpha^{n+1} \beta^{n+1} s^{2(n+1)} + \alpha^n \beta^n a_{Pn}(\alpha, \beta) s^{2n+1} \\ a_{Pn}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \left[(n+1)n\alpha + (n^2 + n + 2)\beta \right]. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

В результате, полагая $\alpha = 1, \beta = \gamma_{1\alpha}$, получаем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H_{wvn}^{(0)L}(r, s) = \lim_{s \rightarrow \infty} H_{vvn}^{(1)L}(r, s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} s^{2(n+1)} \gamma_{1\alpha}^{n+1}}{r^{n+2} \gamma_{1\alpha}^{n+1} s^{2(n+1)}} = \frac{1}{r}. \quad (2.5.5)$$

$$\begin{aligned}
H_{wwn}^{(0)L}(r,s) &= \frac{1}{r} + H_{wwnr}^{(0)L}(r,s), \quad H_{wwnr}^{(0)L}(r,s) = \frac{F_{wwn}^{(0)}(r,s)}{r^{n+2}P_n(s,\gamma_{1\alpha}s)} - \frac{1}{r}, \\
H_{vvn}^{(1)L}(r,s) &= \frac{1}{r} + H_{vvnr}^{(1)L}(r,s), \quad H_{vvnr}^{(1)L}(r,s) = \frac{F_{vvn}^{(1)L}(r,s)}{r^{n+2}P_n(s,\gamma_{1\alpha}s)} - \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Особыми точками функций в (2.4.18) при $a \neq \omega$ являются полюсы – нули функции $P_n(s, \gamma_{1\alpha}s)$. При этом таковым является и $s = 0$, что вытекает из построенного с помощью равенства (П.2.22):

$$P_n(0,0) = R_{n1}(0)R_{n3}(0) - n(n+1)R_{n0}(0)R_{n0}(0) = 0 \tag{2.5.7}$$

Для выяснения порядка этого полюса, учитывая (П.2.22) и (П.2.23) при $s \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned}
P_n(\alpha s, \beta s) &\square p_1(\alpha, \beta)s + p_2(\alpha, \beta)s^2 + p_3(\alpha, \beta)s^3, \\
p_1(\alpha, \beta) &= [(2n-1)!!]^2 [n(n+1)(\alpha + \beta) - n(n+1)(\alpha + \beta)] = 0, \\
p_2(\alpha, \beta) &= \frac{[(2n-1)!!]^2}{2n-1} [n\alpha^2 + (n+1)\beta^2] \neq 0, \\
p_3(\alpha, \beta) &= \frac{[(2n-1)!!]^2}{2n-1} [n\alpha + (n+1)\beta] \alpha\beta \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Таким образом, имеют место равенства

$$P_n(s, \gamma_{1\alpha}s) = s^2 Q_n(s), \quad Q_n(s) = p_2(1, \gamma_{1\alpha}) + p_3(1, \gamma_{1\alpha})s + \dots \tag{2.5.9}$$

Кроме того, замечаем, что числители функций в (2.4.18) и (2.5.6) в точке $s = 0$ не обращаются в ноль. Следовательно, эти функции имеют полюс второго порядка в точке $s = 0$, а также простые полюсы в точках $s = s_j$, где

$$Q_n(s_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n). \tag{2.5.10}$$

Тогда оригиналы изображений $H_{wwnr}^{(0)L}(r,s)$ и $H_{vvnr}^{(1)L}(r,s)$ в (2.5.6), а также функций в (2.4.18) при $a \neq \omega$ вычисляются следующим образом [21,48]:

$$\begin{aligned}
H_{wwn}^{(0)}(r,\tau) &= \frac{1}{r} \delta(\tau) + H_{wwnr}^{(0)}(r,\tau), \quad H_{wwnr}^{(0)}(r,\tau) = \sum_{j=0}^{2n} H_{wwn}^{(0j)}(r,\tau), \\
H_{vvn}^{(1)}(r,\tau) &= \frac{1}{r} \delta(\tau) + H_{vvnr}^{(1)}(r,\tau), \quad H_{vvnr}^{(1)}(r,\tau) = \sum_{j=0}^{2n} H_{vvn}^{(1j)}(r,\tau), \\
H_{vvn}^{(0)}(r,\tau) &= \sum_{j=0}^{2n} H_{vvn}^{(0j)}(r,\tau), \quad H_{wwn}^{(1)}(r,\tau) = \sum_{j=0}^{2n} H_{wwn}^{(1j)}(r,\tau),
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

$$H_{abn}^{(k)}(r,s) = \sum_{j=0}^{2n} H_{abn}^{(kj)}(r,\tau).$$

Здесь (при $a = b = w$ под $H_{abn}^{(0)L}$ понимается $H_{wwnr}^{(0)L}$, а при $a = b = v$ под $H_{abn}^{(1)L} - H_{vvr}^{(1)}$)

$$H_{abn}^{(k0)}(r, \tau) = \operatorname{res}_{s=0} \left[H_{abn}^{(k)L}(r, s) e^{s\tau} \right],$$

$$H_{abn}^{(kj)}(r, \tau) = \operatorname{res}_{s=s_j} H_{abn}^{(k)L}(r, s) e^{s\tau} = \frac{F_{abn}^{(k)}(r, s_j)}{r^{n+2} P_n'(s_j, \gamma_{1\alpha} s_j)} e^{s_j \tau} \quad (j \neq 0), \quad (2.5.12)$$

$$P_n'(s, \gamma_{1\alpha} s) = R_{n1}'(s) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s) + \gamma_{1\alpha} R_{n1}(s) R_{n3}'(\gamma_{1\alpha} s) -$$

$$-n(n+1) \left[R_{n0}'(s) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) + \gamma_{1\alpha} R_{n0}(s) R_{n0}'(\gamma_{1\alpha} s) \right].$$

Функции $H_{\omega bn}^{(k)L}$ имеют дополнительные простые полюсы – нули функции $R_{n0}(\gamma_2 s)$:

$$R_{n0}(\gamma_2 s_j) = 0 \quad (j = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n). \quad (2.5.13)$$

Оригиналы этих функций определяются так:

$$H_{\omega bn}^{(k)}(r, s) = \sum_{j=0}^{2n} H_{\omega bn}^{(kj)}(r, \tau),$$

$$H_{\omega bn}^{(k0)}(r, \tau) = \operatorname{res}_{s=0} \left[H_{\omega bn}^{(k)L}(r, s) e^{s\tau} \right],$$

$$H_{\omega bn}^{(kj)}(r, \tau) = \operatorname{res}_{s=s_j} H_{\omega bn}^{(k)L}(r, s) e^{s\tau} = \frac{F_{\omega bn}^{(k)}(r, s_j)}{r^{n+2} P_n'(s_j) R_{n0}(\gamma_2 s_j)} e^{s_j \tau}, \quad (2.5.14)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 2n).$$

$$H_{\omega bn}^{(kj)}(r, \tau) = \frac{F_{\omega bn}^{(k)}(r, s_j)}{\gamma_2 r^{n+2} P_n(s_j) R_{n0}'(\gamma_2 s_j)} e^{s_j \tau},$$

$$(j = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n).$$

Вычеты (2.5.12) в полюсе кратности 2 удобнее определять с помощью алгоритма, приведенного в приложении П.4.

Отсюда следует, что оригиналы функций в (2.4.16) и (2.4.17) при индексах a, b одновременно не совпадающими с w или v вычисляются так ($b = w, v$):

$$\begin{aligned}
G_{wvn} (r, \tau) &= \frac{1}{r} \delta(\tau - r + 1) + G_{wwnr} (r, \tau), \\
G_{wwnr} (r, \tau) &= H_{wwnr}^{(0)} (r, \tau - r + 1) H(\tau - r + 1) + \\
&\quad + H_{wvn}^{(1)} [r, \tau - \gamma_{1\alpha} (r - 1)] H[\tau - \gamma_{1\alpha} (r - 1)], \\
G_{vvn} (r, \tau) &= \frac{1}{r} \delta[\tau - \gamma_{1\alpha} (r - 1)] + G_{vvnr} (r, \tau), \\
G_{vvnr} (r, \tau) &= H_{vvnr}^{(0)} (r, \tau - r + 1) H(\tau - r + 1) + \\
&\quad + H_{vvnr}^{(1)} [r, \tau - \gamma_{1\alpha} (r - 1)] H[\tau - \gamma_{1\alpha} (r - 1)], \\
G_{abn} (r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 H_{abn}^{(k)} [r, \tau - \gamma_{k\alpha} (r - 1)] H[\tau - \gamma_{k\alpha} (r - 1)] (a \neq \omega), \\
G_{\omega bn} (r, \tau) &= H_{\omega bn}^{(0)} [r, \tau - \gamma_2 (r - 1)] H[\tau - \gamma_2 (r - 1)] + \\
&\quad + H_{\omega bn}^{(1)} [r, \tau - \gamma_{1\alpha} (r - 1)] H[\tau - \gamma_{1\alpha} (r - 1)].
\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Далее аналогично строим оригиналы функций в (2.4.23) и (2.4.24). При этом с учетом (2.5.3) – (2.5.5) замечаем, что среди них имеются две группы неправильных дробей:

- функции

$$H_{\sigma rrvn}^{(0)L} (r, s), H_{\sigma r\theta vn}^{(1)L} (r, s), H_{\mu r\vartheta vn}^{(0)L} (r, s), H_{\mu r\vartheta vn}^{(1)L} (r, s) \tag{2.5.16}$$

со степенью числителя на единицу больше степени знаменателя;

- функции

$$\begin{aligned}
&H_{\sigma rrvn}^{(0)L} (r, s), H_{\sigma rrvn}^{(1)L} (r, s), H_{\sigma r\theta vn}^{(0)L} (r, s), H_{\sigma r\theta vn}^{(1)L} (r, s), \\
&H_{\mu r\vartheta vn}^{(0)L} (r, s), H_{\mu r\vartheta vn}^{(1)L} (r, s), H_{\mu\theta\vartheta vn}^{(0)L} (r, s), H_{\mu\theta\vartheta vn}^{(1)L} (r, s).
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

с равными степенями числителя и знаменателя.

Поэтому необходимо выделять их целые части. Однако эта процедура для функций в (2.5.16) приведет к слагаемому в виде многочлена первой степени, что в пространстве оригиналов соответствует наличию производной от дельта-функции Дирака. Поэтому введем следующие функции:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{\sigma rrvn}^{(0)L} (r, s) &= s^{-1} H_{\sigma rrvn}^{(0)L} (r, s), \tilde{H}_{\sigma r\theta vn}^{(1)L} (r, s) = s^{-1} H_{\sigma r\theta vn}^{(1)L} (r, s), \\
\tilde{H}_{\mu r\vartheta vn}^{(0)L} (r, s) &= s^{-1} H_{\mu r\vartheta vn}^{(0)L} (r, s), \tilde{H}_{\mu r\vartheta vn}^{(1)L} (r, s) = s^{-1} H_{\mu r\vartheta vn}^{(1)L} (r, s).
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

которые, очевидно, уже относятся к функциям вида (2.5.17). В результате получаем (нижние и верхние индексы соответствуют индексам в (2.5.17) и (2.5.18):

$$\begin{aligned} H_c^{(k)L}(r, s) &= d_c^{(k)}(r) + H_{cr}^{(k)L}(r, s), \\ H_{cr}^{(k)L}(r, s) &= H_c^{(k)L}(r, s) - d_c^{(k)}(r). \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Здесь и далее, если это не приведет к разночтениям знак «тильда» опускаем.

Величины $d_c^{(k)}(r)$ находятся как соответствующие пределы. Например,

$$d_{\sigma rrwn}^{(0)}(r) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{H}_{\sigma rrwn}^{(0)L}(r, s) = - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{r^2 s^2 R_{n0}(rs) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s)}{s r^{n+3} \gamma_{1\alpha}^{n+1} s^{2(n+1)}} = - \frac{1}{r}. \quad (2.5.20)$$

Остальные результаты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d_{\sigma rrwn}^{(0)}(r) &= - \frac{n(n+1)}{\gamma_{1\alpha} r}, d_{\sigma rrwn}^{(1)}(r) = n(n+1) \frac{1-\kappa}{r^2}, d_{\sigma r\theta vn}^{(0)} = \frac{1-\kappa}{r^2} = \frac{2}{\gamma_1^2 r^2}, \\ d_{\sigma r\theta vn}^{(1)}(r) &= d_{\sigma r\theta vn}^{(1)}(r) = - \frac{\gamma_{1\alpha} (\gamma_{1\alpha}^{-2} + \alpha)}{r}, d_{\mu r\vartheta vn}^{(0)}(r) = d_{\mu r\vartheta vn}^{(0)}(r) = \frac{\alpha k_\omega \gamma_2^3}{r}, \\ d_{\mu r\vartheta vn}^{(1)}(r) &= d_{\mu r\vartheta vn}^{(1)}(r) = - \frac{\alpha \gamma_2 k_\omega \gamma_{1\alpha}^2}{r}, d_{\mu\theta\vartheta vn}^{(0)}(r) = \frac{n(n+1) \alpha k_\omega \gamma_2^2}{r^2}, \\ d_{\mu\theta\vartheta vn}^{(1)}(r) &= - \frac{n(n+1) \alpha \gamma_2 k_\omega \gamma_{1\alpha}}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Тогда оригиналы изображений в (2.5.19) вычисляются так:

$$H_c^{(k)}(r, \tau) = d_c^{(k)}(r) \delta(\tau) + H_{cr}^{(k)}(r, \tau). \quad (2.5.22)$$

Входящие сюда функции $H_{cr}^{(k)}(r, \tau)$ представляются аналогично (2.5.11) - (2.5.16). При этом необходимо учесть, что для функций в (2.5.18) точка $s = 0$ является полюсом третьего порядка и использовать приложение П.4.

Функциям (2.5.18) соответствуют модифицированные функции влияния

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\sigma rrwn}^L(r, s) &= s^{-1} G_{\sigma rrwn}^L(r, s), \tilde{G}_{\sigma r\theta vn}^L(r, s) = s^{-1} G_{\sigma r\theta vn}^L(r, s), \\ \tilde{G}_{\mu r\vartheta vn}^L(r, s) &= s^{-1} G_{\mu r\vartheta vn}^L(r, s). \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Остальные изображения в (2.4.23) и (2.4.24) не требуют выделения целых частей и их оригиналы опять же представляются аналогично (2.5.11) - (2.5.14).

где функции $H_{\sigma r r v n}^{(k j)}(r, \tau)$ и $H_{\sigma r r v n}^{(k j)}(r, \tau)$ находятся по формулам (2.5.16) и (2.5.17).

Отсюда следует, что оригиналы функций влияния в (2.4.11), соответствующих (2.5.16) и (2.5.17) с учетом модификации (2.5.23) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\sigma r r v n}(r, \tau) &= d_{\sigma r r v n}^{(0)}(r) \delta(\tau - r + 1) + G_{\sigma r r v n r}(r, \tau), \\
G_{\sigma r r v n}(r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 d_{\sigma r r v n}^{(k)}(r) \delta[\tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] + G_{\sigma r r v n r}(r, \tau), \\
G_{\sigma r \theta v n}(r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 d_{\sigma r \theta v n}^{(k)}(r) \delta[\tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] + G_{\sigma r \theta v n r}(r, \tau), \\
\tilde{G}_{\sigma r \theta v n}(r, \tau) &= d_{\sigma r \theta v n}^{(1)}(r) \delta[\tau - \gamma_{1 \alpha}(r - 1)] + G_{\sigma r \theta v n r}(r, \tau), \\
G_{\mu r \vartheta v n}(r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 d_{\mu r \vartheta v n}^{(k)}(r) \delta[\tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] + G_{\mu r \vartheta v n r}(r, \tau), \\
\tilde{G}_{\mu r \vartheta v n}(r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 d_{\mu r \vartheta v n}^{(k)}(r) \delta[\tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] + G_{\mu r \vartheta v n r}(r, \tau), \\
G_{\mu \theta \vartheta v n}(r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 d_{\mu \theta \vartheta v n}^{(k)}(r) \delta[\tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] + G_{\mu \theta \vartheta v n r}(r, \tau),
\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{\sigma a n r}(r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 H_{\sigma a n r}^{(k)}[r, \tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] H[\tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] \\
&\quad (a = r r w, r r v, r \theta w, r \theta v), \\
G_{\mu b n r}(r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 H_{\mu b n r}^{(k)}[r, \tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] H[\tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] \\
&\quad (b = r \vartheta w, r \vartheta v, \theta \vartheta v).
\end{aligned} \tag{2.5.25}$$

Остальные же оригиналы функций влияния в (2.4.11) имеют вид:

$$G_{\mu \theta \vartheta v n}(r, s) = \sum_{k=0}^1 H_{\mu \theta \vartheta v n}^{(k)}[r, \tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)] H[\tau - \gamma_{k \alpha}(r - 1)]. \tag{2.5.26}$$

Окончательно из (2.3.16) и (2.3.17) с учетом (2.5.15) и (2.5.24) получаем:

$$\begin{aligned}
w_n(r, \tau) &= \frac{1}{r} w_{0n}(\tau - r + 1) + G_{w v n r}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{w v n}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\
v_n(r, \tau) &= \frac{1}{r} v_{0n}[\tau - \gamma_{1 \alpha}(r - 1)] + G_{v v n}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{v v n r}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\
\omega_n(r, \tau) &= G_{\omega v n}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{\omega v n r}(r, \tau) * v_{0n}(\tau);
\end{aligned} \tag{2.5.27}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rm} &= d_{\sigma_{rrwn}}^{(0)}(r) \dot{w}_{0n}(\tau - r + 1) + G_{\sigma_{rrwnr}}(r, \tau) * \dot{w}_{0n}(\tau) + \\
&+ \sum_{k=0}^1 d_{\sigma_{rrvn}}^{(k)}(r) v_{0n}[\tau - \gamma_{k\alpha}(r - 1)] + G_{\sigma_{rrvnr}}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\
\sigma_{r\theta n} &= \sum_{k=0}^1 d_{\sigma_{r\theta wn}}^{(k)}(r) w_{0n}[\tau - \gamma_{k\alpha}(r - 1)] + G_{\sigma_{r\theta wnr}}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + \\
&+ d_{\sigma_{r\theta vn}}^{(1)}(r) \dot{v}_{0n}[\tau - \gamma_{1\alpha}(r - 1)] + G_{\sigma_{r\theta vnr}}(r, \tau) * \dot{v}_{0n}(\tau), \\
\mu_{r\theta n} &= \sum_{k=0}^1 d_{\mu_{r\theta wn}}^{(k)}(r) w_{0n}[\tau - \gamma_{k\alpha}(r - 1)] + G_{\mu_{r\theta wnr}}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + \\
&+ G_{\mu_{r\theta vnr}}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\
\mu_{\theta\theta n} &= G_{\mu_{\theta\theta wn}}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + \sum_{k=0}^1 d_{\mu_{\theta\theta vn}}^{(k)}(r) v_{0n}[\tau - \gamma_{k\alpha}(r - 1)] + \\
&+ G_{\mu_{\theta\theta vnr}}(r, \tau) * v_{0n}(\tau).
\end{aligned} \tag{2.5.28}$$

2.6. Примеры расчетов функций влияния

В качестве примера рассмотрим среду в виде композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками [28,99]:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 7,59 \text{ ГПа}; \mu = 1,89 \text{ ГПа}; \alpha = 7,45 \text{ МПа}; \gamma + \varepsilon = 2,64 \text{ кН}; \\
J &= 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}; c_1 = 2,28 \cdot 10^3 \text{ м/с}; c_2 = 9,29 \cdot 10^2 \text{ м/с}; c_3 = 2,48 \cdot 10^3 \text{ м/с}.
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Отсюда, используя (1.2.15), находим плотность ρ среды:

$$\rho = \frac{\mu}{c_2^2} = 2,19 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Далее везде в качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1 \text{ м}$.

В результате находим необходимые в этой главе безразмерные параметры в (1.3.9):

$$\gamma_1 = 2,45; \gamma_2 = 0,919; \alpha' = 0,66 \cdot 10^{-3}; \nu = 5,1 \cdot 10^6; \kappa = 0,668. \tag{2.6.2}$$

Отсюда согласно (2.4.2) вытекает соотношение $\gamma_{1\alpha} \approx \gamma_1$.

На рис 2.6.1 - 2.6.22 приведены графики распределений по радиусу и времени функций влияния $G_{wvnr}(r, \tau)$ при $n = 0, 1$, а также $G_{vvnr}(r, \tau)$, $G_{wvn}(r, \tau)$, $G_{vvn}(r, \tau)$, $G_{\omega vn}(r, \tau)$, $G_{\omega vn}(r, \tau)$ и $G_{\sigma_{rrwnr}}(r, \tau)$, $G_{\sigma_{rrvnr}}(r, \tau)$, $G_{\sigma_{r\theta wnr}}(r, \tau)$, $G_{\sigma_{r\theta vnr}}(r, \tau)$ при $n = 1$. Для них характерны скачки напряжений и производной от перемещения на фронтах $\tau = r - 1$ и $\tau = \gamma_{1\alpha}(r - 1)$ волн.

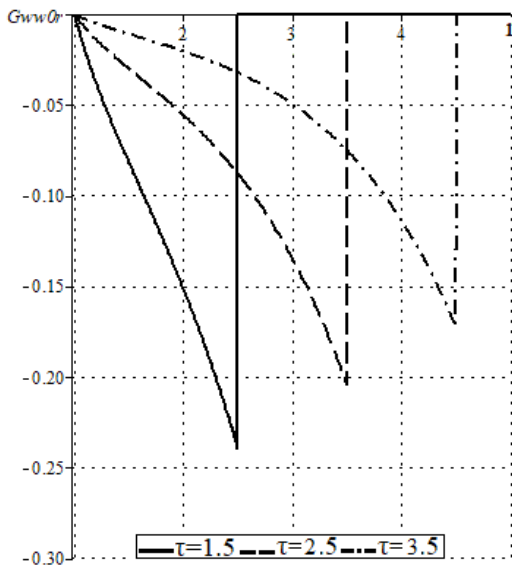


Рис.2.6.1

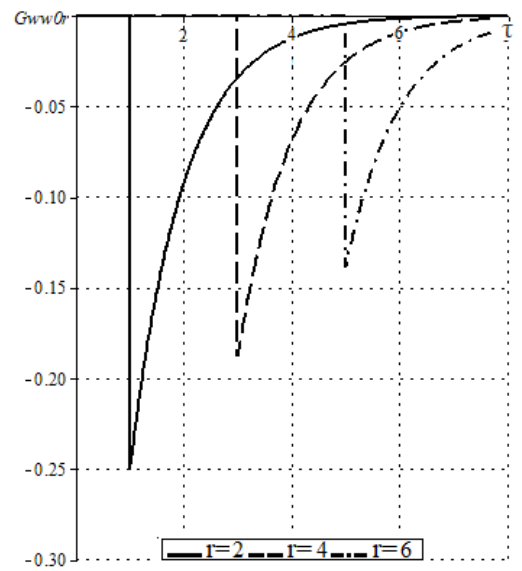


Рис.2.6.2

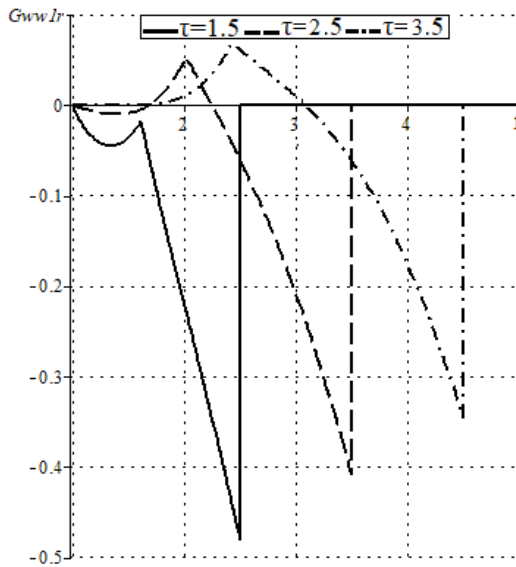


Рис.2.6.3

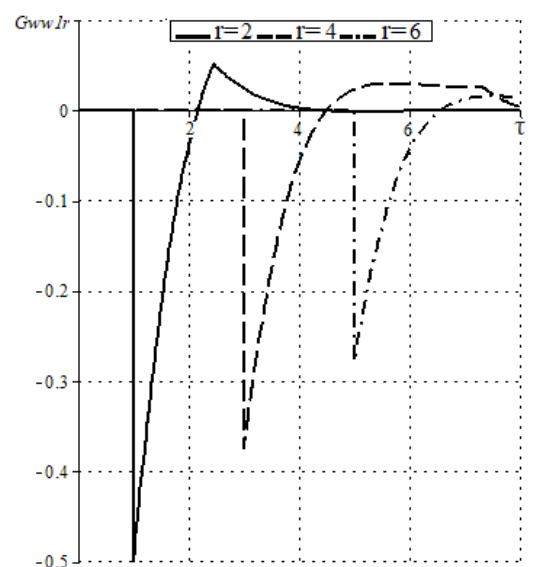


Рис.2.6.4

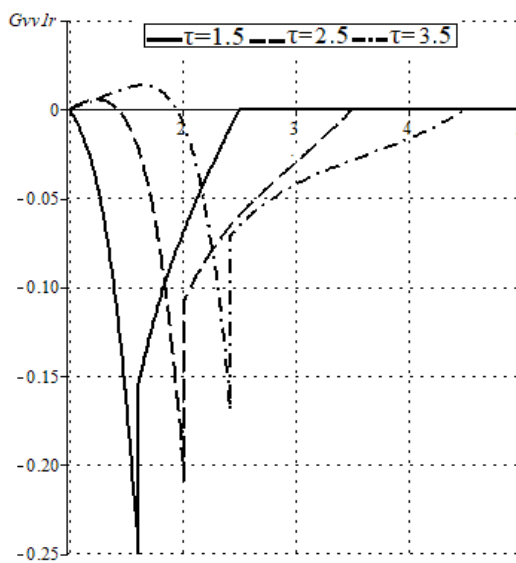


Рис.2.6.5

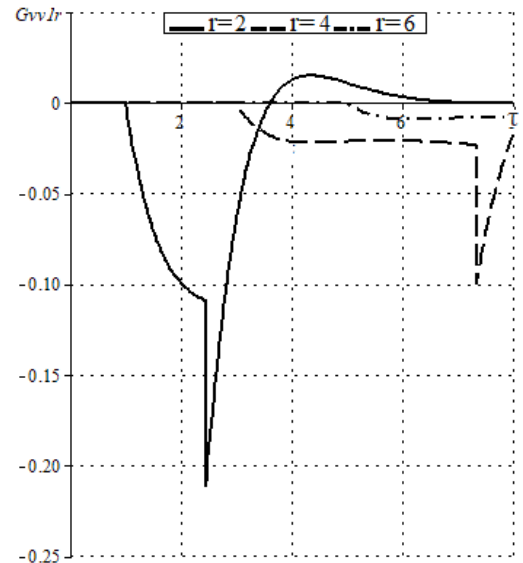


Рис.2.6.6

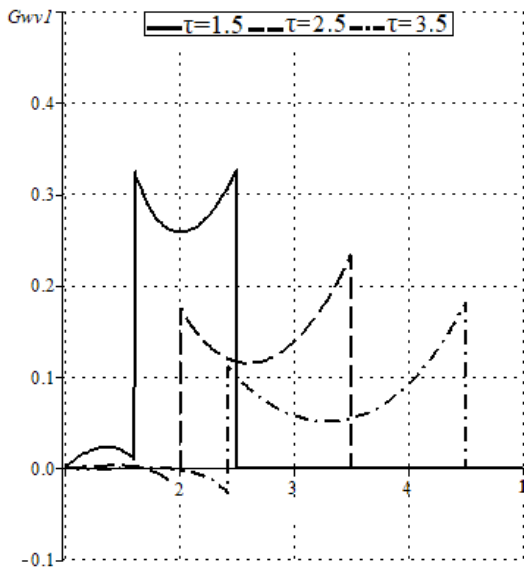


Рис.2.6.7

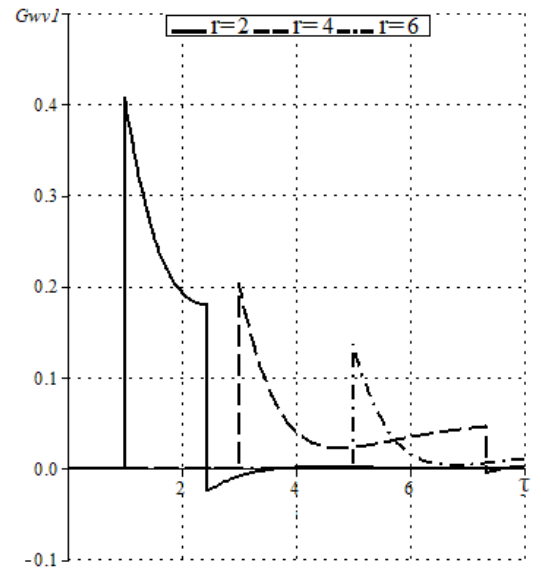


Рис.2.6.8

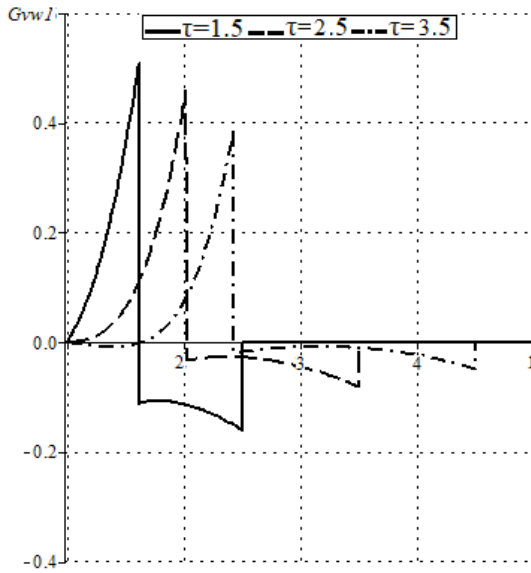


Рис.2.6.9

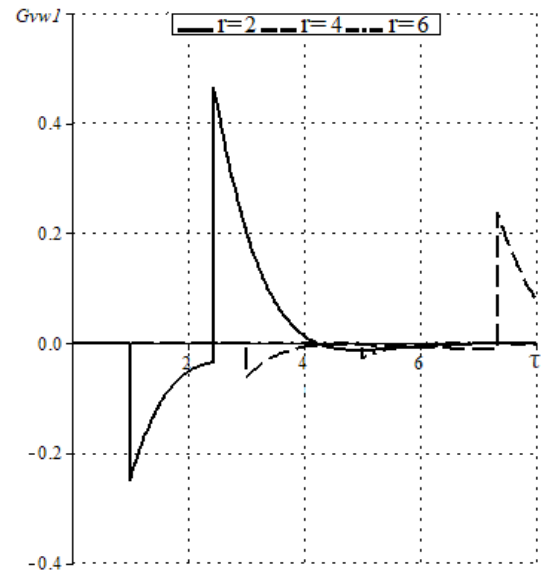


Рис.2.6.10

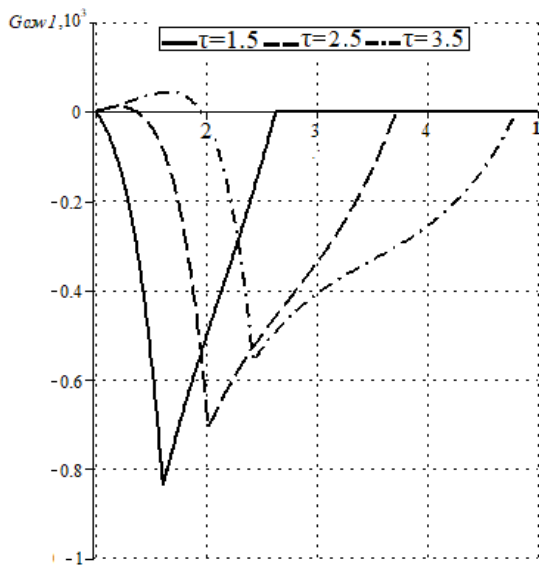


Рис.2.6.11

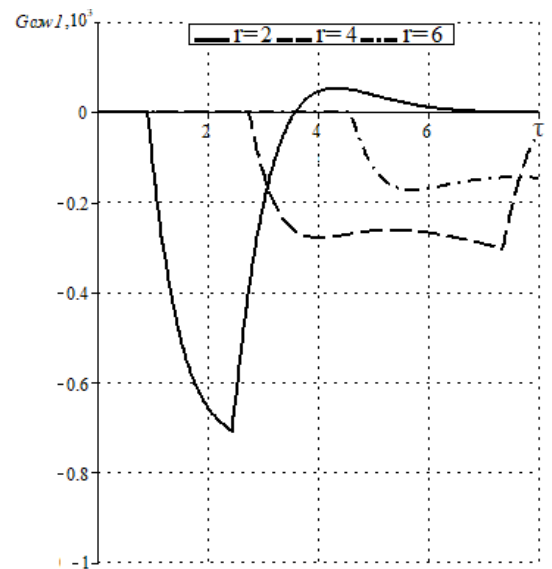


Рис.2.6.12

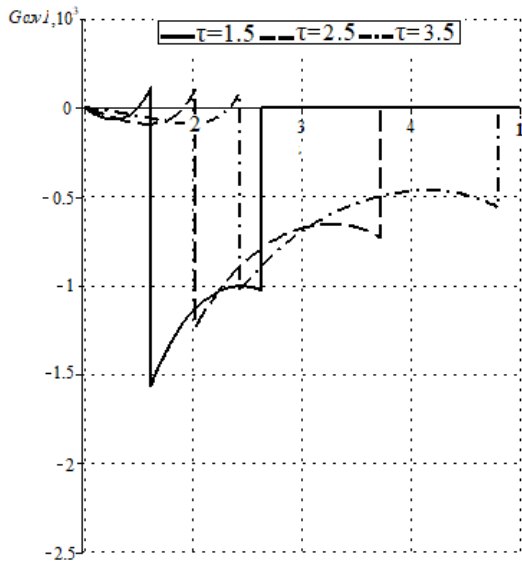


Рис.2.6.13

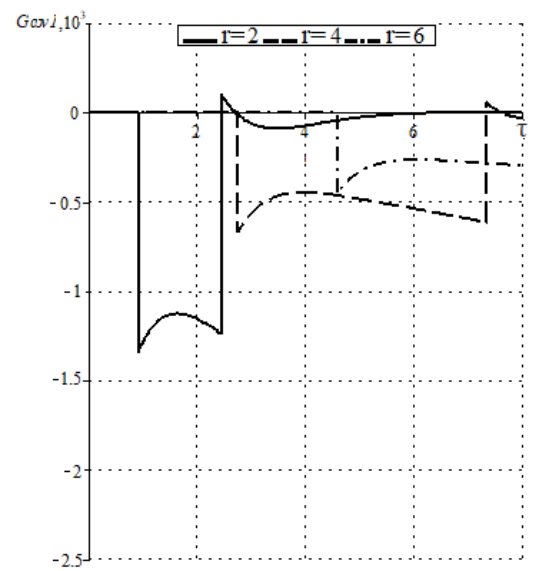


Рис.2.6.14

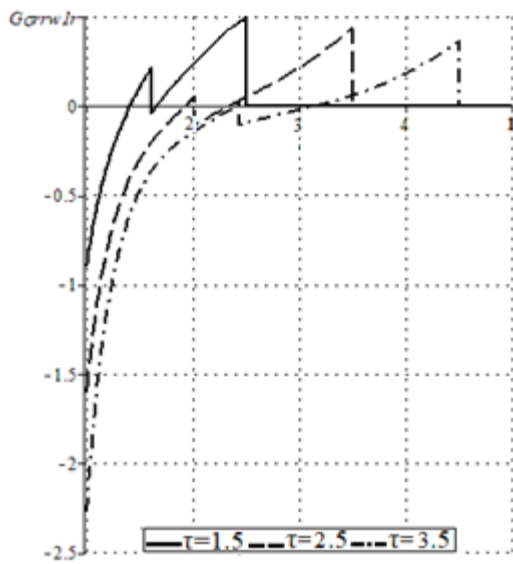


Рис.2.6.15

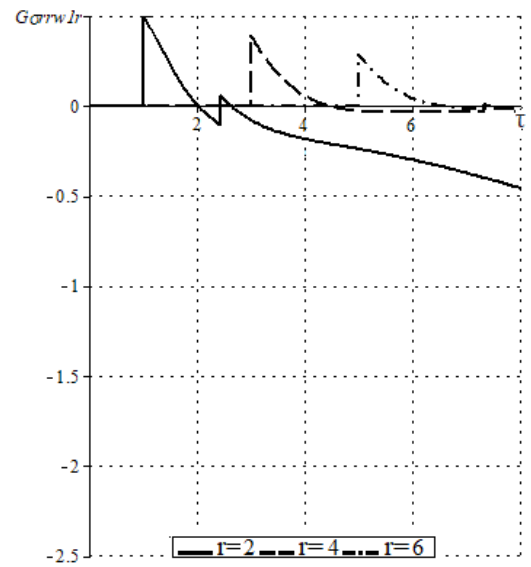


Рис.2.6.16

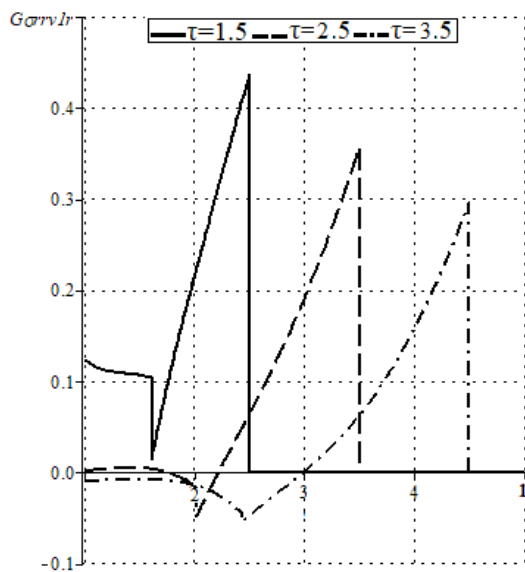


Рис.2.6.17

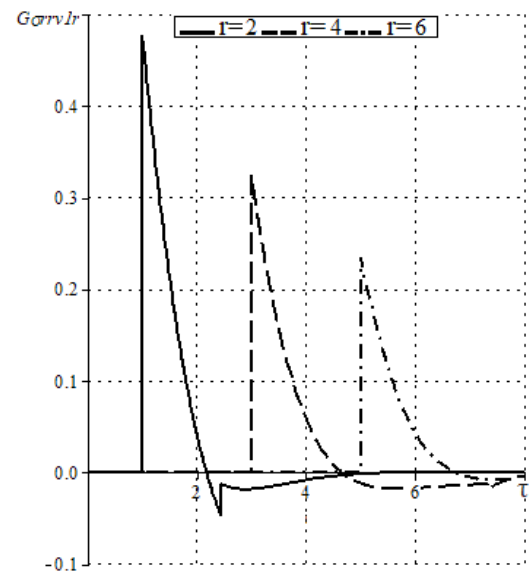


Рис.2.6.18

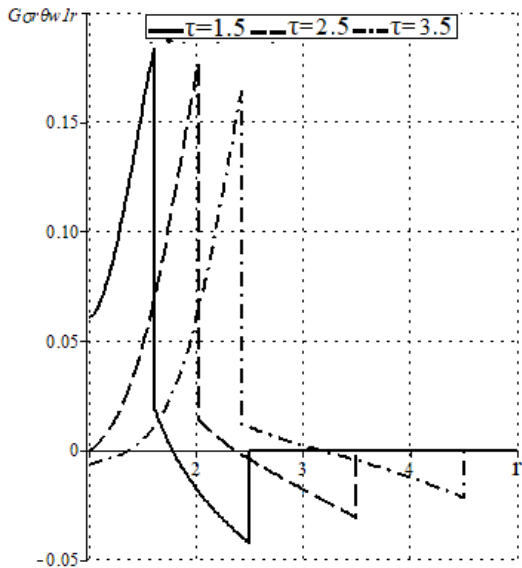


Рис.2.6.19

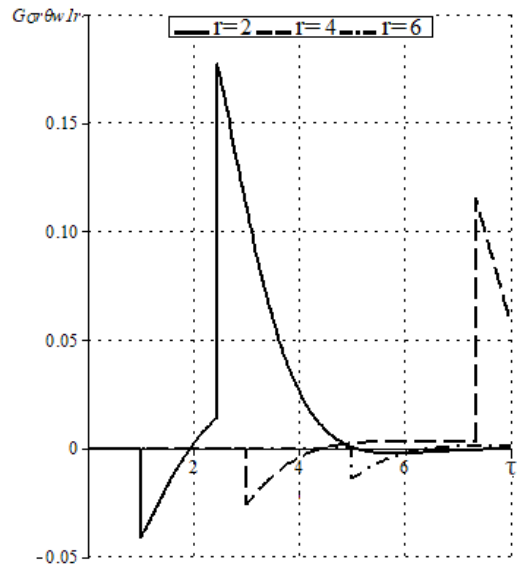


Рис.2.6.20

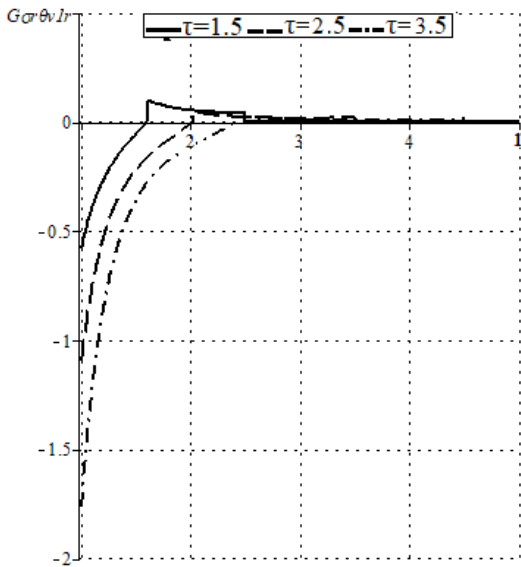


Рис.2.6.21

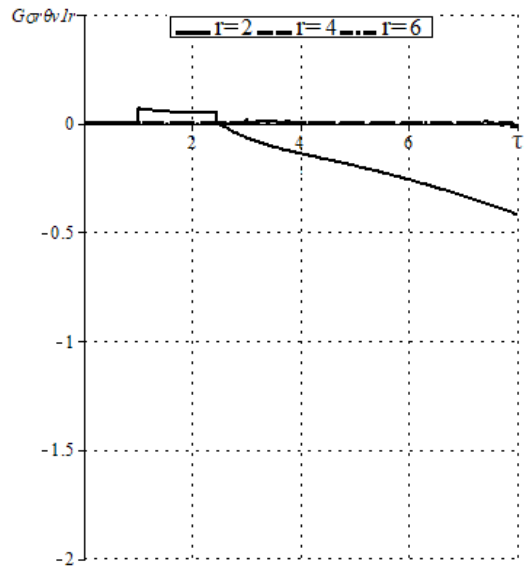


Рис.2.6.22

Отметим, что функции $G_{ww/r}(r, \tau)$ и $G_{vv/r}(r, \tau)$ на фронте волны $\tau = \gamma_{1\alpha}(r-1)$ непрерывны, что, как можно показать, также следует из (2.4.15) и анализа степеней числителей и знаменателей в (2.4.18) и (2.5.6).

2.7. Примеры расчетов при кинематических возмущениях

Рассмотрим теперь примеры для конкретных граничных условий для среды, указанной в предыдущем разделе. При этом ограничимся вычислением только кинематических параметров и напряжений.

В первом варианте положим, что на полости заданы только нормальные перемещения, а именно, нетривиальные правые части условий (2.3.1) имеют вид:

$$W_0(\theta, \tau) = \tau_+ \cos \theta, V_0(\theta, \tau) = 0. \quad (2.7.1)$$

При этом, поскольку $P_1(x) = x$ [1,24], то из (2.3.3) получаем

$$w_{00}(\tau) = 0, w_{01}(\tau) = \tau_+, w_{0n}(\tau) = 0 (n \geq 2), v_{0n}(\tau) = 0 (n \geq 1). \quad (2.7.2)$$

Следовательно, согласно (2.1.1), (2.1.7) и (2.1.9) перемещения и напряжения определяются так:

$$w = w_1 \cos \theta, v = -v_1 \sin \theta C_0^{3/2}(\cos \theta) = -v_1 \sin \theta, \omega = -\omega_1 \sin \theta; \quad (2.7.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr1} \cos \theta, \sigma_{r\theta} = -\sigma_{r\theta1} \sin \theta, \sigma_{r\vartheta} = -\sigma_{r\vartheta1} \sin \theta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(\sigma_{\theta\theta1} + \frac{1-\kappa}{r} v_1 \right) \cos \theta, \sigma_{\vartheta\vartheta} = \left(\sigma_{\vartheta\vartheta1} - \frac{1-\kappa}{r} v_1 \right) \cos \theta; \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Входящие в эти равенства функции w_1, v_1, ω_1 и $\sigma_{rr1}, \sigma_{r\theta1}$ определяются равенствами (2.5.27) и (2.5.28) с учетом (2.7.2) и (2.7.3):

$$\begin{aligned} w_1(r, \tau) &= \frac{1}{r} (\tau - r + 1)_+ + G_{ww1r}(r, \tau) * \tau_+, \\ v_1(r, \tau) &= G_{vw1}(r, \tau) * \tau_+, \\ \omega_1(r, \tau) &= G_{\omega w1}(r, \tau) * \tau_+. \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr1} &= d_{\sigma rr1}^{(0)}(r) H(\tau - r + 1) + G_{\sigma rr1r}(r, \tau) * H(\tau), \\ \sigma_{r\theta1} &= \sum_{k=0}^1 d_{\sigma r\theta w1}^{(k)}(r) [\tau - \gamma_{k\alpha}(r-1)]_+ + G_{\sigma r\theta w1r}(r, \tau) * \tau_+. \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

Остальные же вычисляются достаточно просто с помощью (2.1.12) и (2.4.27):

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta1} &= \kappa \sigma_{rr1} + \frac{1-\kappa}{r} [(1+2\kappa)w_1 - 2(1+\kappa)v_1], \\ \sigma_{\vartheta\vartheta1} &= \sigma_{rr1} + \frac{1-\kappa}{r} [(1+2\kappa)w_1 - 2\kappa v_1], \\ \sigma_{\theta r1} &= (1 - 2\alpha\gamma_1^2) \sigma_{r\theta1} + 4\alpha \frac{w_1 - v_1}{r}. \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Входящие в равенства (2.7.6) свертки находим численным интегрированием.

Замечание. Отметим, что носителями всех сверток является множество $\tau \geq r - 1$. Причем они являются непрерывными функциями, и при $\tau = r - 1$ они равны нулю. Это следует из структуры приведенных в параграфе 2.5 их ядер, неравенства $\gamma_{1\alpha} > 1$, а также из следующих равенств для непрерывной функции $f(\tau)$:

$$\begin{aligned} f(\tau - a)H(\tau - a) * \tau_+ &= \int_0^\tau (\tau - t) f(t - a) H(t - a) dt = \\ &= H(\tau - a) \int_a^\tau (\tau - t) f(t - a) dt = H(\tau - a) \int_0^{\tau - a} (\tau - t - a) f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

С учетом того, что распределение по углу определяется равенствами (2.7.3), (2.7.4) на рис.2.7.1 - 2.7.10 приведены результаты только для функций в (2.7.5) - (2.7.7).

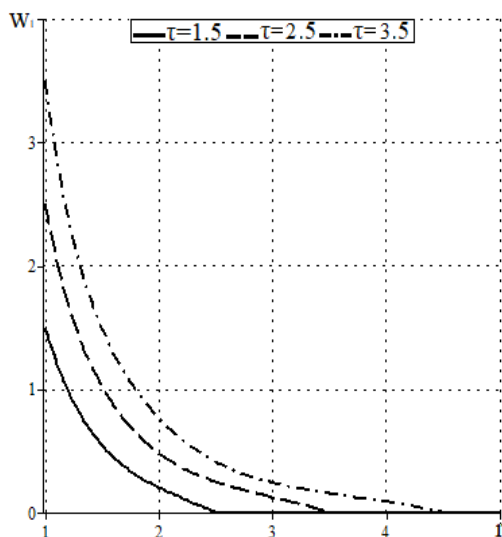


Рис.2.7.1

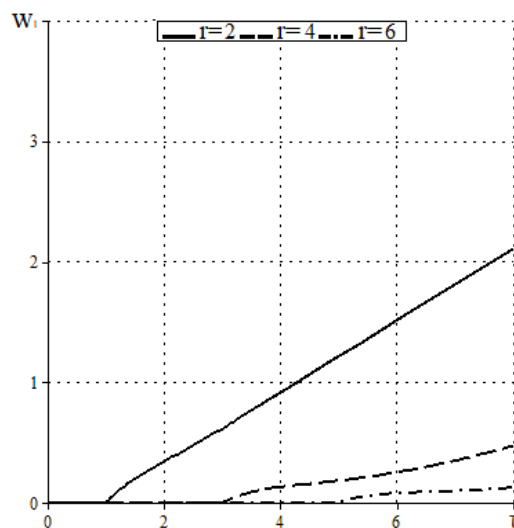


Рис.2.7.2

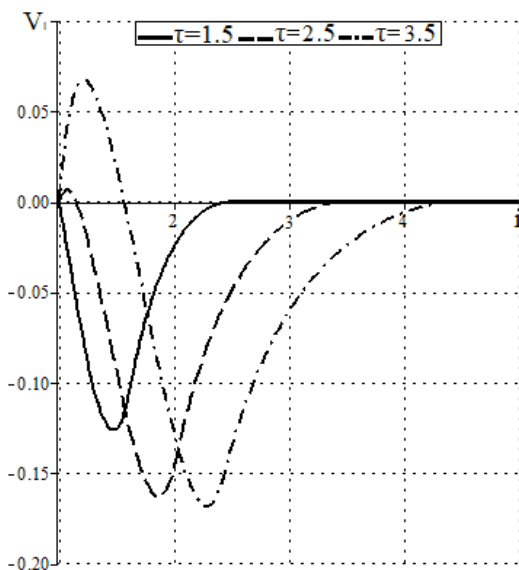


Рис.2.7.3

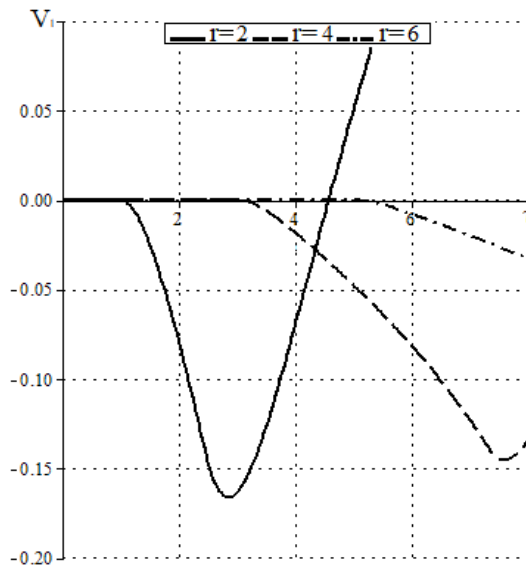


Рис.2.7.4

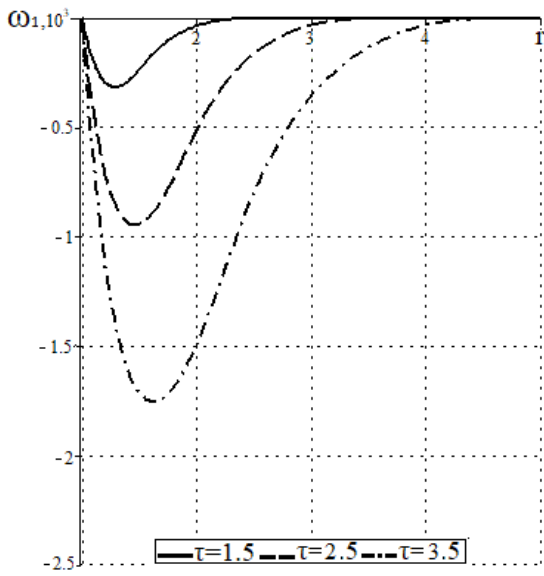


Рис.2.7.5

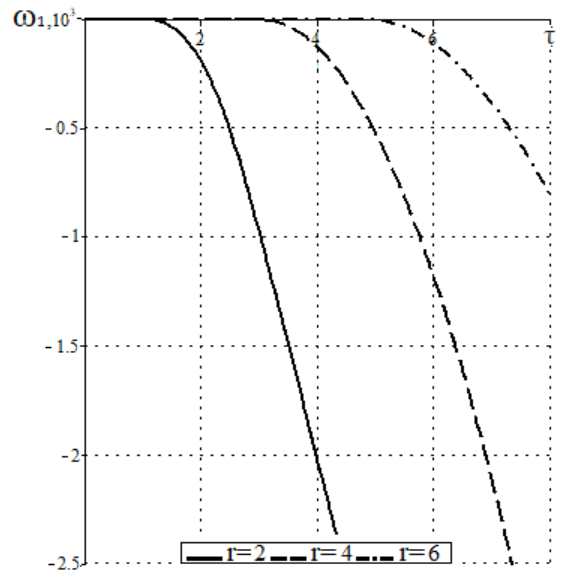


Рис.2.7.6

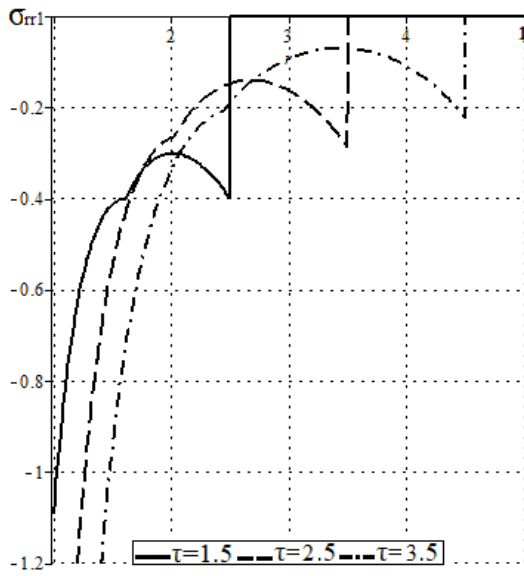


Рис.2.7.7

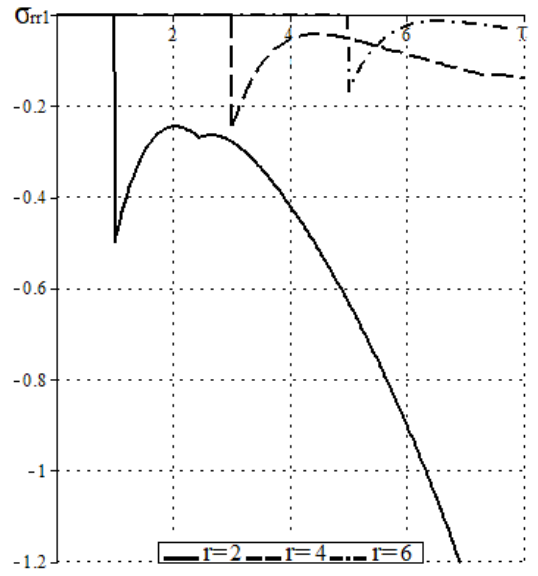


Рис.2.7.8

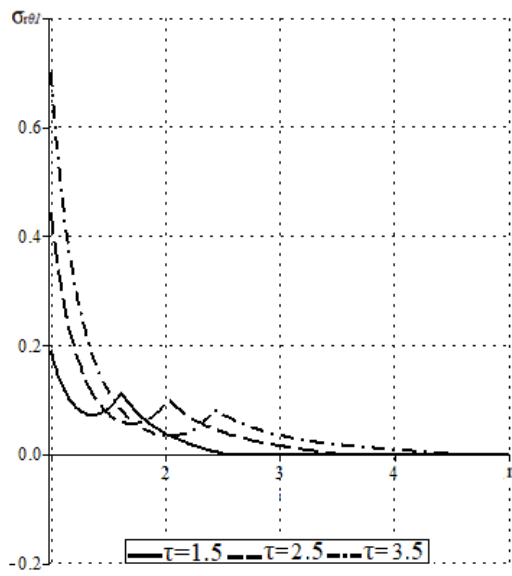


Рис.2.7.9

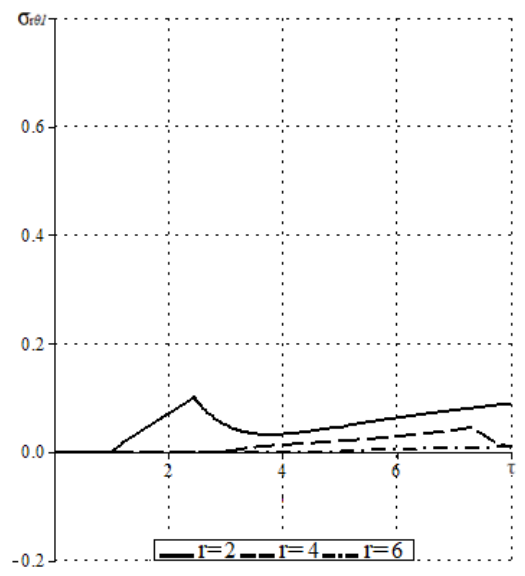


Рис.2.7.10

Во втором варианте положим, что на полости заданы только тангенциальные перемещения, а именно, нетривиальные правые части условий (2.3.1) имеют вид:

$$W_0(\theta, \tau) = 0, V_0(\theta, \tau) = -\tau_+ \sin \theta. \quad (2.7.9)$$

При этом, поскольку $C_0^{3/2}(x) = 1$ [7, 8], то из (2.3.3) получаем

$$w_{0n}(\tau) = 0 \quad (n \geq 0), v_{01}(\tau) = -\tau_+, v_{0n}(\tau) = 0 \quad (n \geq 2). \quad (2.7.10)$$

При этом перемещения и напряжения определяются формулами (2.7.3) и (2.7.4). Входящие в них функции определяются аналогично (2.7.6) и (2.7.7):

$$\begin{aligned} w_1(r, \tau) &= -G_{wv1}(r, \tau) * \tau_+, \\ v_1(r, \tau) &= -\frac{1}{r} [\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)]_+ - G_{v1r}(r, \tau) * \tau_+, \\ \omega_1(r, \tau) &= -G_{\omega v1}(r, \tau) * \tau_+. \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

$$\sigma_{rr1} = -\sum_{k=0}^1 d_{\sigma rr v1}^{(k)}(r) [\tau - \gamma_{k\alpha}(r-1)]_+ - G_{\sigma rr v1r}(r, \tau) * \tau_+, \quad (2.7.12)$$

$$\sigma_{r\theta 1} = -d_{\sigma r\theta v1}^{(1)}(r) H[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] - G_{\sigma r\theta v1r}(r, \tau) * H(\tau),$$

Их графики представлены на рис. 2.7.11 - 2.7.20.

Остальные функции в (2.7.3) и (2.7.4) вычисляются с помощью равенств (2.7.7).

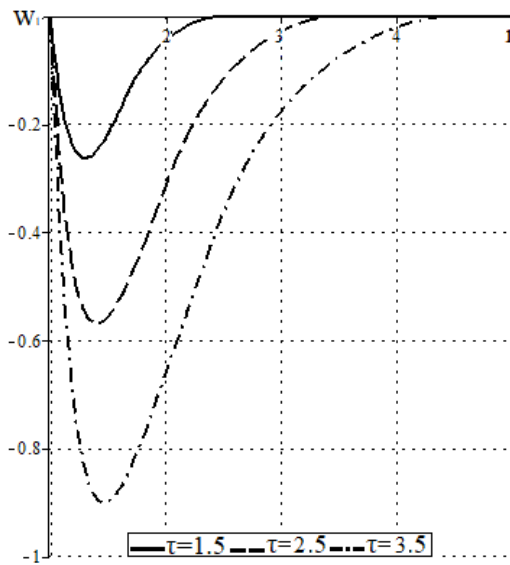


Рис.2.7.11

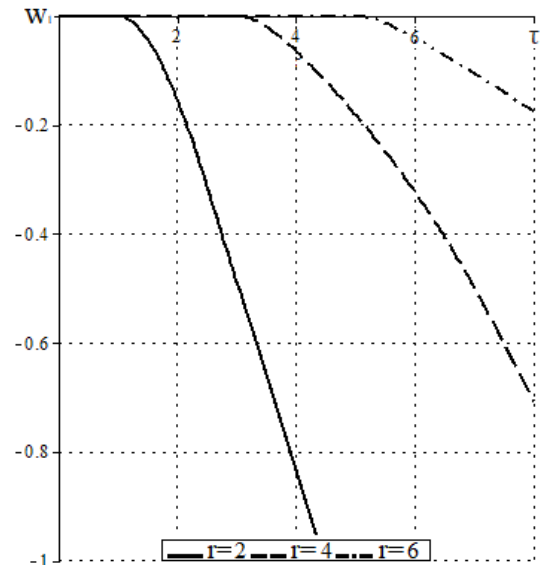


Рис.2.7.12

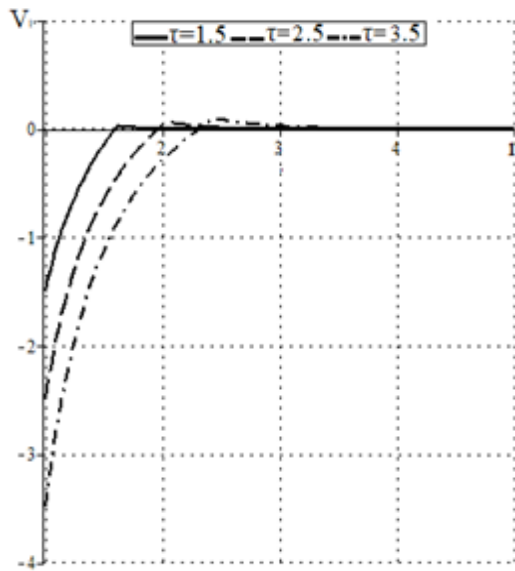


Рис.2.7.13

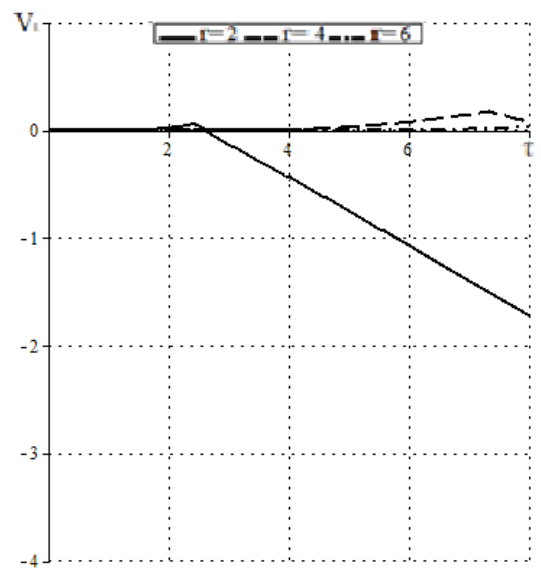


Рис.2.7.14

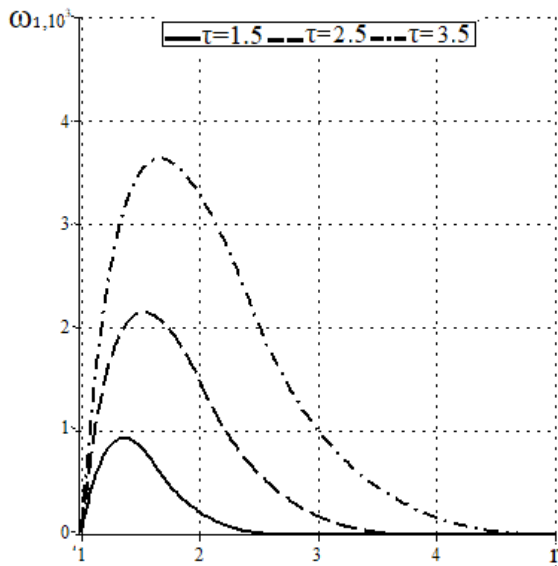


Рис.2.7.15

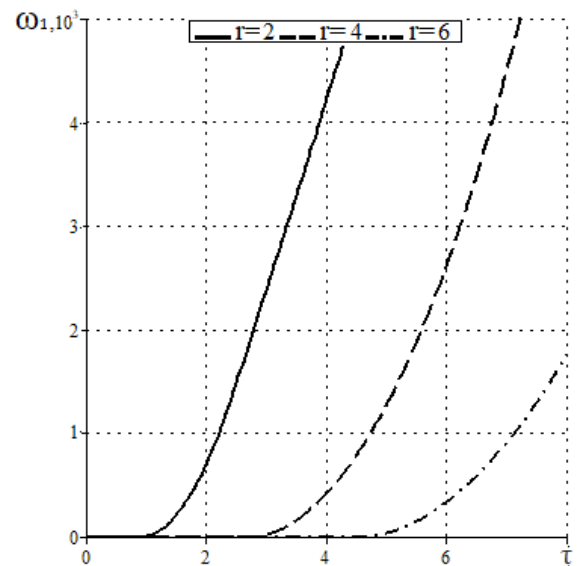


Рис.2.7.16

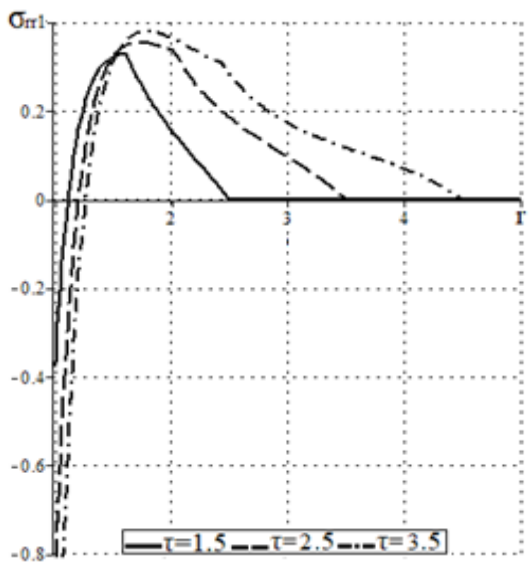


Рис.2.7.17

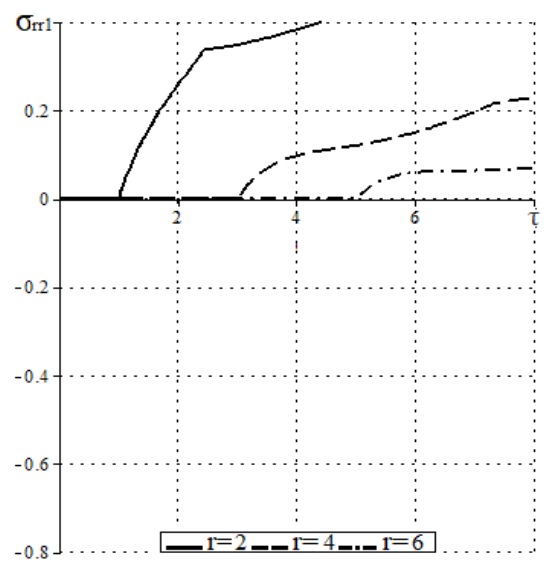


Рис.2.7.18

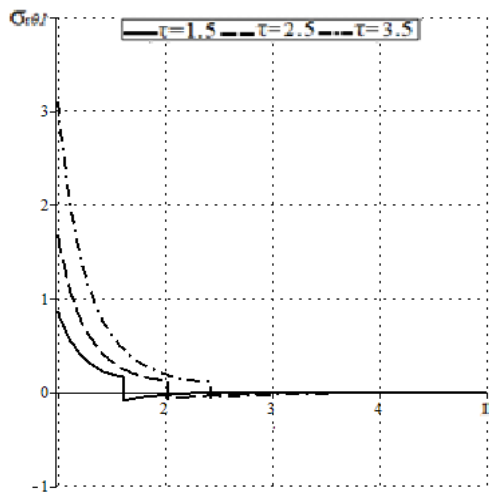


Рис.2.7.19

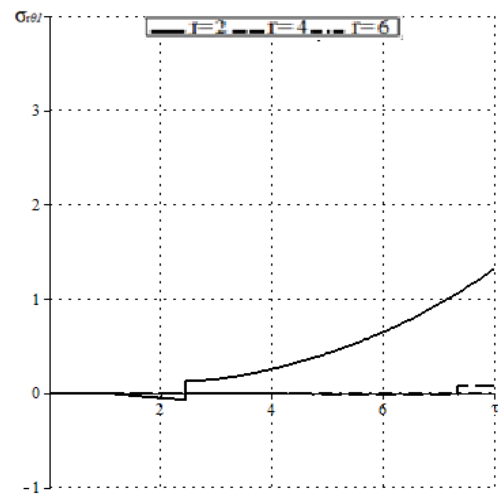


Рис.2.7.20

В соответствии с (2.3.2), (2.7.3) и (2.7.9) сумма результатов этих примеров приводит к решению задачи о поступательном перемещении вдоль оси Oz по закону $Z(\tau) = \tau_+$ жестко сцепленного с полостью абсолютно твердого шара.

Соответствующие графики представлены на рис.2.7.21- 2.7.30

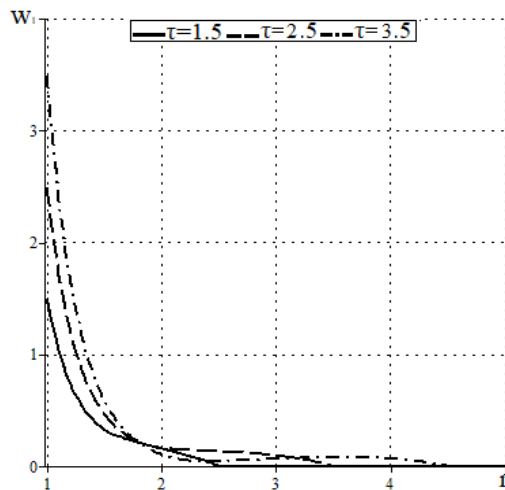


Рис.2.7.21

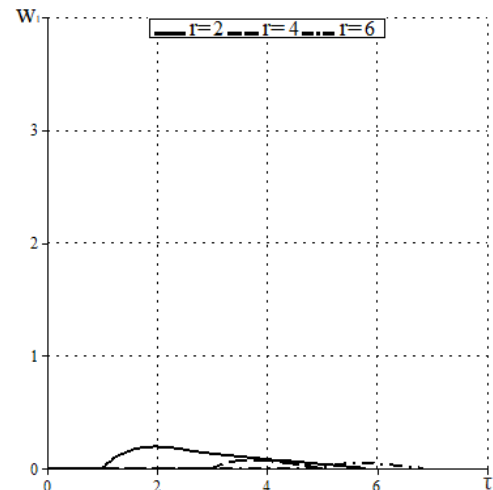


Рис.2.7.22

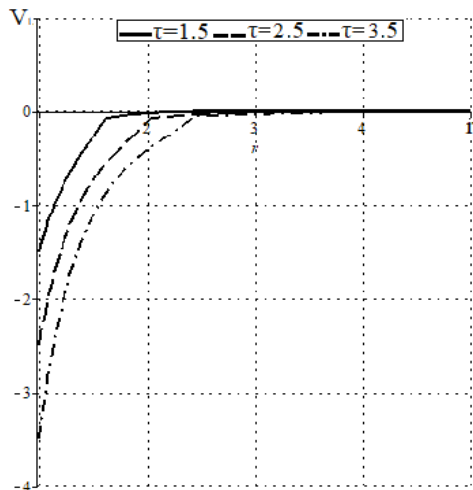


Рис.2.7.23

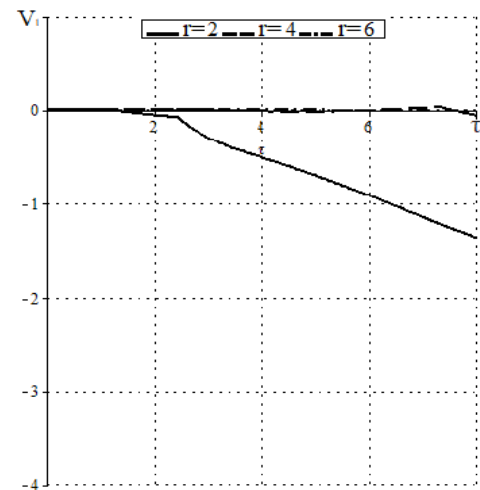


Рис.2.7.24

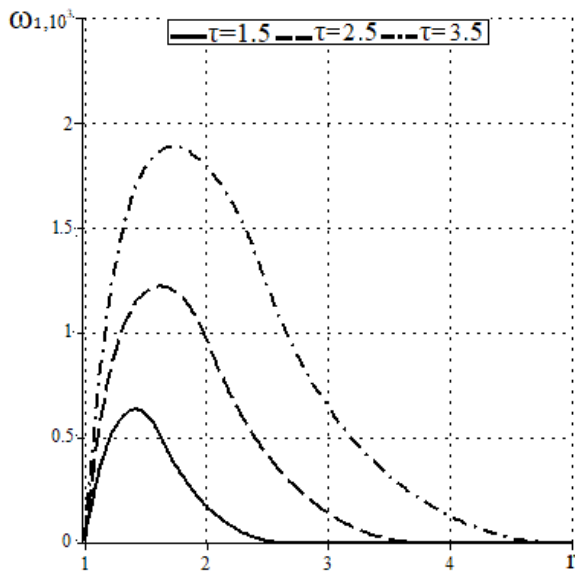


Рис.2.7.25

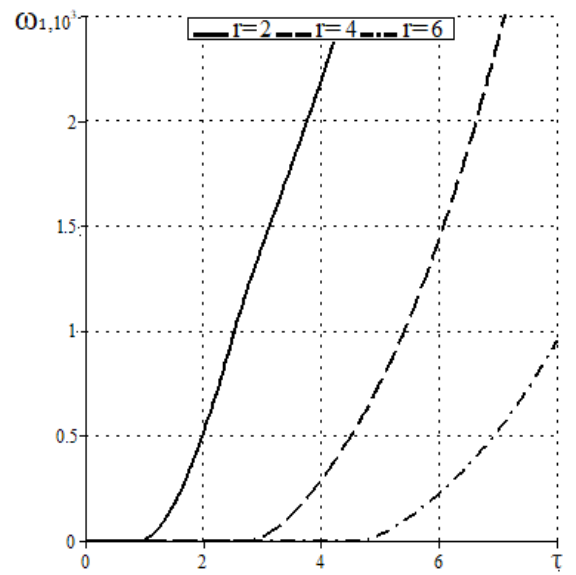


Рис.2.7.26

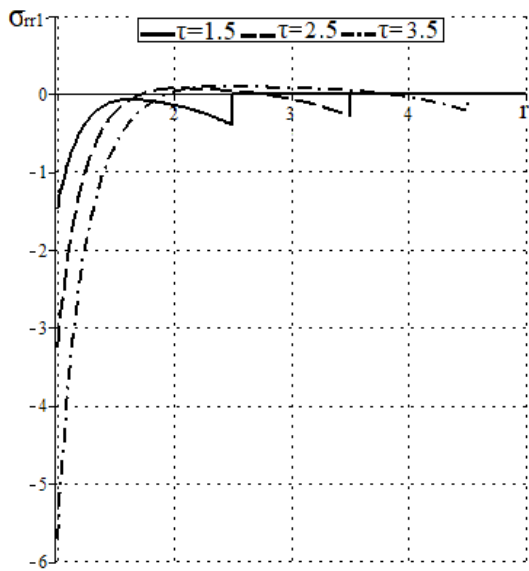


Рис.2.7.27

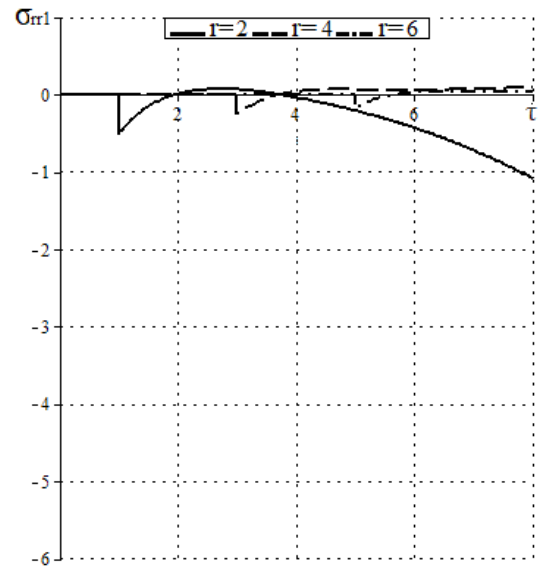


Рис.2.7.28

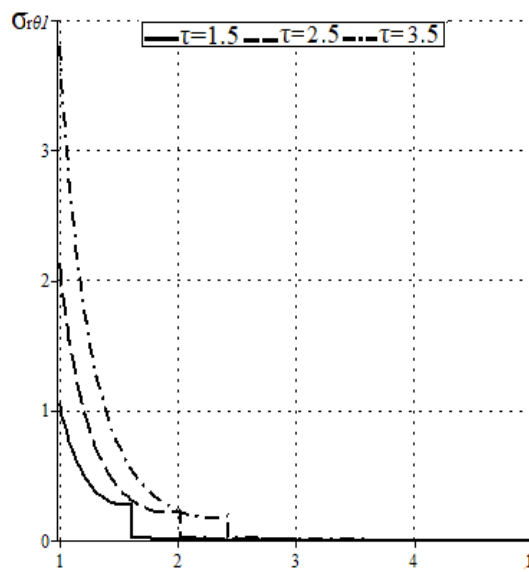


Рис.2.7.29

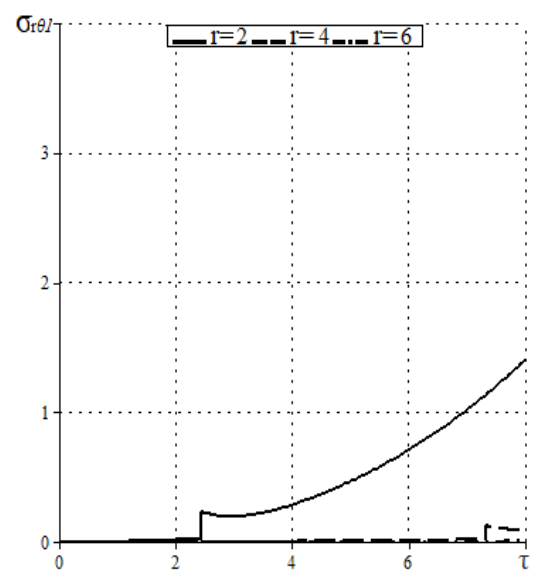


Рис.2.7.30

2.8. Оценка учета моментных свойств среды при осесимметричных возмущениях

Эту оценку проведем для перемещения и угла поворота. Для соответствующих перемещениям и углу поворота функций влияния введем подобные (1.2.10) и (1.2.11) обозначения:

$$\begin{aligned} G_{\zeta ce} &= G_{\zeta} - G_{\zeta e}, \quad G_{\zeta e} = G_{\zeta} \Big|_{\alpha=0} \quad (\zeta = wwnr, wvn, vwn, vvnr, \omega wn, \omega vn), \\ G_{\zeta cp} &= G_{\zeta} - G_{\zeta p}, \quad G_{\zeta pe} = G_{\zeta p} - G_{\zeta e} \quad (\zeta = \omega wn, \omega vn). \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

Сначала рассмотрим соответствующие перемещениям функции. В силу их аналитической зависимости от малого параметра α имеют место следующие соотношения:

$$G_{\zeta ce}(r, \tau) = O(\alpha), \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (\zeta = wwnr, wvn, vwn, vvnr). \quad (2.8.2)$$

Далее обозначая подобно (1.2.10)

$$w_{nce} = w_n - w_{ne}, \quad v_{nce} = v_n - v_{ne}, \quad w_{ne} = w_n \Big|_{\alpha=0}, \quad v_{ne} = v_n \Big|_{\alpha=0}, \quad (2.8.3)$$

из первых двух равенств в (2.5.27) получаем

$$\begin{aligned} w_{nce}(r, \tau) &= G_{wwnrce}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{wvnce}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\ v_{nce}(r, \tau) &= \frac{1}{r} \left\{ v_{0n} [\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] - v_{0n} [\tau - \gamma_1(r-1)] \right\} + \\ &+ G_{vwnce}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{vvnrcce}(r, \tau) * v_{0n}(\tau). \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Для разности в первом слагаемом во втором равенстве с учетом (2.4.2) при $\alpha \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} &v_{0n} [\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] - v_{0n} [\tau - \gamma_1(r-1)] = \\ &= -(r-1) \dot{v}_{0n} [\tau - \gamma_1(r-1)] \frac{d\gamma_{1\alpha}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \alpha + o(\alpha) = \\ &= \frac{\gamma_1^3(r-1)}{2} \dot{v}_{0n} [\tau - \gamma_1(r-1)] \alpha + o(\alpha) = O(\alpha). \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Следовательно, имеют место равенства

$$w_{nce}(r, \tau), v_{nce}(r, \tau) = O(\alpha), \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (2.8.6)$$

т.е. поправки, вносимые в перемещение за счет учета моментных свойств, имеют порядок α .

Для оценки влияния учета моментных свойств на угол поворота прежде всего замечаем, что для ненулевой координаты ω_{pe} вектора $\mathbf{\omega}_{pe}$ в (1.2.11) в силу (2.8.6) справедливо соотношение

$$\omega_{pe}(r, \tau) = O(\alpha), \alpha \rightarrow 0. \quad (2.8.7)$$

Очевидно аналогичные оценки имеют место и для функций $G_{\omega_{wnpe}}, G_{\omega_{vnpe}}$:

$$G_{\omega_{wnpe}}(r, \tau), G_{\omega_{vnpe}}(r, \tau) = O(\alpha), \alpha \rightarrow 0. \quad (2.8.8)$$

Далее выражаем ненулевую координату ω_{cp} вектора $\mathbf{\omega}_{cp}$ через перемещения:

$$\omega_{cp} = \omega - \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]. \quad (2.8.9)$$

Тогда из (1.2.4) с использованием (1.3.5) получаем

$$\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r} = 2\alpha(\gamma_{r\theta} - \gamma_{\theta r}) = 2\alpha \left[\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2\omega \right] = -4\alpha\omega_{cp}. \quad (2.8.10)$$

Отсюда вытекает равенство для коэффициентов рядов (2.1.1) и (2.1.7):

$$\omega_{ncp} = \frac{\sigma_{\theta rn} - \sigma_{r\theta n}}{4\alpha}. \quad (2.8.11)$$

Здесь и далее $\omega_{n\xi}$, где $\xi = e, p, ce, cp, pe$, коэффициенты разложения в соответствующие ряды в (2.1.1) функций ω_{ξ} .

Следовательно, функции $G_{\omega_{bncp}}$ ($b = w, v$) можно вычислить так:

$$G_{\omega_{wncp}} = \frac{1}{4\alpha} (G_{\sigma_{\theta rwn}} - G_{\sigma_{r\theta wn}}), \quad G_{\omega_{vncp}} = \frac{1}{4\alpha} (G_{\sigma_{\theta rvn}} - G_{\sigma_{r\theta vn}}). \quad (2.8.12)$$

Отсюда с учетом (2.4.27) получаем равенства

$$G_{\omega_{bncp}} = -\frac{\gamma_1^2}{2} G_{\sigma_{\theta rbn}} + \frac{G_{wbn} - G_{vbn}}{r}. \quad (2.8.13)$$

Дальнейшие выкладки удобнее провести в пространстве преобразования Лапласа.

Используя (2.4.16), (2.4.18), и (2.4.23), приходим к таким результатам:

$$G_{\omega bncp}^L(r, s) = \sum_{k=0}^1 H_{\omega bncp}^{(k)}(r, s) e^{-\gamma_{k\alpha}(r-1)s}, \quad H_{\omega bncp}^{(k)L} = \frac{F_{\omega bncp}^{(k)}(r, s)}{2r^{n+3} P_n(s, \gamma_{1\alpha} s)}, \quad (2.8.14)$$

$$F_{\omega bncp}^{(k)}(r, s) = -\gamma_1^2 F_{\sigma r \theta bn}^{(k)}(r, s) + 2F_{wbn}^{(k)}(r, s) - 2F_{vbn}^{(k)}(r, s).$$

Функции $F_{\omega bncp}^{(k)}$ преобразовываем с помощью (2.4.15), (2.4.20), (2.4.22), (П.2.20) и (П.216):

$$F_{\omega bncp}^{(0)}(r, s) = F_{\omega bncp}^{(0)}(r, s) = 0,$$

$$F_{\omega bncp}^{(1)}(r, s) = (1 + \alpha) \gamma_{1\alpha}^2 r^2 s^2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n0}(s), \quad (2.8.15)$$

$$F_{\omega bncp}^{(1)}(r, s) = (1 + \alpha) \gamma_{1\alpha}^2 r^2 s^2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n1}(s).$$

Подставляя эти соотношения в (2.8.14), при дополнительном учете (2.4.2) получаем

$$G_{\omega bncp}^L(r, s) = \tilde{G}_{\omega bncp}^L(r, s) + O(\alpha) (\alpha \rightarrow 0), \quad \tilde{G}_{\omega bncp}^L(r, s) = H_{\omega bncp}^L(r, s) e^{-\gamma_1(r-1)s},$$

$$H_{\omega bncp}^L(r, s) = \frac{\gamma_1^2 s^2 R_{n0}(\gamma_1 rs) R_{n0}(s)}{2r^{n+1} P_n(s, \gamma_1 s)}, \quad H_{\omega bncp}^L(r, s) = \frac{\gamma_1^2 s^2 R_{n0}(\gamma_1 rs) R_{n1}(s)}{2r^{n+1} P_n(s, \gamma_1 s)}. \quad (2.8.16)$$

Таким образом, для функций $G_{\omega bnce}$ и $G_{\omega bnce}$ с учетом (2.8.8) справедливы соотношения

$$G_{\omega bnce}(r, \tau) = G_{\omega bncp}(r, \tau) + G_{\omega bnce}(r, \tau) =$$

$$= G_{\omega bncp}(r, \tau) + O(\alpha) = \tilde{G}_{\omega bncp}(r, \tau) + O(\alpha), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (2.8.17)$$

С использованием их и обозначений (2.8.1) из третьего равенства в (2.5.27) с точностью до слагаемых порядка α определяем поправку, вносимую в угол поворота за счет учета моментных свойств:

$$\omega_{nce}(r, \tau) = G_{\omega bnce}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{\omega bnce}(r, \tau) * v_{0n}(\tau) =$$

$$= G_{\omega bncp}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{\omega bncp}(r, \tau) * v_{0n}(\tau) = \omega_{ncp}(r, \tau) =$$

$$= \tilde{G}_{\omega bncp}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + \tilde{G}_{\omega bncp}(r, \tau) * v_{0n}(\tau).$$

Отсюда дополнительно следует, что поправки, вносимые моделями Коссера и псевдоконтинуума Коссера, в линейном приближении совпадают.

Оригиналы функций $\tilde{G}_{\omega bncp}$ и $\tilde{G}_{\omega bncp}$ находятся так же, как в параграфе 2.5.

Прежде всего, с использованием (2.5.3) получаем, что для первой дроби $H_{\omega bncp}^L$

степень числителя совпадает со степенью знаменателя, а для $H_{\omega_{\text{внсп}}}^L$ - на единицу больше. Поэтому с использованием (2.5.4) и (П.2.21) выделяем целые части этих дробей:

$$H_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, s) = \frac{\gamma_1}{2r} + H_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, s), \quad H_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, s) = H_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, s) - \frac{\gamma_1}{2r}, \quad (2.8.19)$$

$$s^{-1}H_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, s) = \frac{\gamma_1}{2r} + H_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, s), \quad H_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, s) = s^{-1}H_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, s) - \frac{\gamma_1}{2r}.$$

Оригиналы регулярных составляющих $H_{\omega_{\text{внсп}}}^L$ и $H_{\omega_{\text{внсп}}}^L$ вычисляются аналогично (2.5.14). При этом оригиналы функций $\tilde{G}_{\omega_{\text{внсп}}}^L$ и $\tilde{G}_{\omega_{\text{внсп}}}^L$ определяются так:

$$\tilde{G}_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, \tau) = \frac{\gamma_{1\alpha}}{2r} \delta[\tau - \gamma_1(r-1)] + G_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, \tau),$$

$$\tilde{G}_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, \tau) = \frac{\gamma_{1\alpha}}{2r} \dot{\delta}[\tau - \gamma_1(r-1)] + \dot{G}_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, \tau), \quad (2.8.20)$$

$$G_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, \tau) = H_{\omega_{\text{внсп}}}^L[r, \tau - \gamma_1(r-1)]H[\tau - \gamma_1(r-1)],$$

$$\dot{G}_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, \tau) = H_{\omega_{\text{внсп}}}^L[r, \tau - \gamma_1(r-1)]\dot{H}[\tau - \gamma_1(r-1)].$$

Окончательно для поправки на угол поворота получаем следующий результат:

$$\omega_{\text{внсп}}(r, \tau) = \frac{\gamma_1}{2r} w_{0n}[\tau - \gamma_1(r-1)] + G_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + \frac{\gamma_1}{2r} \dot{w}_{0n}[\tau - \gamma_1(r-1)] + G_{\omega_{\text{внсп}}}^L(r, \tau) * \dot{w}_{0n}(\tau). \quad (2.8.21)$$

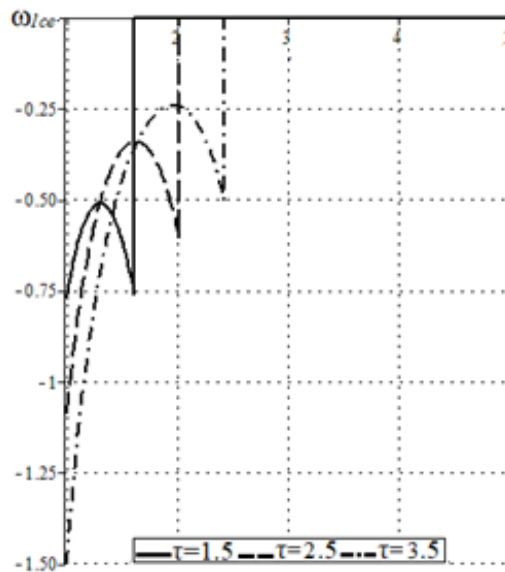


Рис.2.8.1.

На рис. 2.8.1 приведены графики изменения функции $\omega_{lce}(r, \tau)$, соответствующей поступательному перемещению вдоль оси Oz по закону $Z(\tau) = \tau_+$ жестко сцепленного с полостью абсолютно твердого шара. Они определяют поправку к результатам, изображенным на рис. 2.7.25. Отсюда следует, что за исключением окрестности точки $r = 1$ поправка имеет порядок 10^{-3} , т.е. 0,1%. При этом для выбранного закона движения имеются качественные отличия, а именно, $\omega_1(1, \tau) = 0$ и $\omega_{lce}(1, \tau) \neq 0$, а также непрерывность функции $\omega_1(r, \tau)$ и наличие разрывов первого рода в графиках $\omega_{lce}(r, \tau)$.

Глава 3. Распространение антисимметричных возмущений от сферической полости

3.1. Представление решения в виде рядов

Координаты векторов перемещения, угла поворота и векторного потенциала, а также скалярный потенциал в (1.4.1) представляем в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(x)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \omega_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \Phi_n \\ \omega_{rn} \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \quad \begin{pmatrix} u \\ \Psi \\ \omega_\theta \end{pmatrix} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ \Psi_n \\ \omega_{\theta n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \quad (3.1.1)$$

Используя эти равенства из (1.4.3) с помощью (П.1.3) и (П.1.4) получаем

$$\omega_{rn} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - n(n+1) \frac{\Psi_n}{r} \quad (n \geq 0), \quad \omega_{\theta n} = \frac{\Phi_n}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi_n)}{\partial r} \quad (n \geq 1). \quad (3.1.2)$$

Аналогично из формул (1.4.7) и (1.4.8) с дополнительным учетом (П.1.4) находим разложения нетривиальных компонент тензора деформаций и изгиба-кручения:

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{r\theta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad \gamma_{\theta r} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\theta r n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\ \gamma_{\theta\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\theta\theta n} P_n(\cos \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} u_n C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\ \gamma_{\theta\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\theta\theta n} P_n(\cos \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} u_n C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\gamma_{r\theta n} = \frac{\partial u_n}{\partial r} + \omega_{\theta n}, \quad \gamma_{\theta r n} = -\frac{u_n}{r} - \omega_{\theta n}, \quad \gamma_{\theta\theta n} = -n(n+1) \frac{u_n}{r} - \omega_{rn}, \quad \gamma_{\theta\theta n} = \omega_{rn}.$$

$$\begin{aligned}
\chi_{rr} &= \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{rm} P_n(\cos \theta), \quad \chi_{\theta\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\theta\theta n} P_n(\cos \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\theta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\chi_{\vartheta\vartheta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\vartheta\vartheta n} P_n(\cos \theta) - \frac{\cos \theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\theta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n(\cos \theta), \\
\chi_{r\theta} &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{r\theta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad \chi_{\theta r} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\theta r n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\chi_{rm} &= \frac{\partial \omega_m}{\partial r}, \quad \chi_{\theta\theta n} = \frac{\omega_m - n(n+1)\omega_{\theta n}}{r}, \quad \chi_{\vartheta\vartheta n} = \frac{\omega_m}{r}, \\
X_n &= \chi_{rm} + \chi_{\theta\theta n} + \chi_{\vartheta\vartheta n}, \quad \chi_{r\theta n} = \frac{\partial \omega_{\theta n}}{\partial r}, \quad \chi_{\theta r n} = \frac{\omega_m - \omega_{\theta n}}{r}.
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Аналогичным образом строим разложения в ряды необходимых компонент тензоров напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\vartheta} &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{r\vartheta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad \sigma_{\vartheta r} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\vartheta r n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\sigma_{\theta\vartheta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\theta\vartheta n} P_n(\cos \theta) + \frac{2\gamma_1^{-2} \cos \theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} u_n C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\sigma_{\vartheta\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\vartheta\theta n} P_n(\cos \theta) + \frac{2\gamma_1^{-2} \cos \theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} u_n C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\sigma_{r\vartheta n} &= \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{r\vartheta n} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\vartheta r n}, \quad \sigma_{\vartheta r n} = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\vartheta r n} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{r\vartheta n}, \\
\sigma_{\theta\vartheta n} &= \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\theta\vartheta n} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\vartheta\theta n}, \quad \sigma_{\vartheta\theta n} = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\vartheta\theta n} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\theta\vartheta n}. \\
\mu_{rr} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{rm} P_n(\cos \theta),
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{\theta\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\theta\theta n} P_n(\cos \theta) + \eta_1 \frac{\cos \theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\theta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\mu_{\vartheta\vartheta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\vartheta\vartheta n} P_n(\cos \theta) - \eta_1 \frac{\cos \theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\theta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\mu_{r\theta} &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{r\theta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad \mu_{\theta r} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\theta r n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\
\mu_{rm} &= 2\eta_1 \chi_{rm} + \eta_2 X_n, \quad \mu_{\theta\theta n} = \eta_1 \chi_{\theta\theta n} + \eta_2 X_n, \quad \mu_{\vartheta\vartheta n} = \eta_1 \chi_{\vartheta\vartheta n} + \eta_2 X_n, \\
\mu_{r\theta n} &= \chi_{r\theta n} + \eta \chi_{\theta r n}, \quad \mu_{\theta r n} = \chi_{\theta r n} + \eta \chi_{r\theta n}.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Уравнения (1.4.12) и (1.4.13) с учетом (П.1.8) и (П.1.9) переходят в следующие равенства для коэффициентов рядов:

$$\ddot{\Phi}_n = \gamma_0^{-2} \Delta_n \Phi_n - 4\alpha \nu \Phi_n \quad (n \geq 0). \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_n &= \eta_{1\alpha}^+ \Delta_n u_n - 2\alpha \Delta_n \Psi_n, \\
\ddot{\Psi}_n &= \gamma_2^{-2} \Delta_n \Psi_n + 2\alpha \nu (u_n - 2\Psi_n) \quad (n \geq 1).
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

3.2. Изображения общего решения

Далее аналогично п. 2.2 считаем, что в начальный момент времени среда среда находится в покое:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \Phi|_{\tau=0} = \dot{\Phi}|_{\tau=0} = \Psi|_{\tau=0} = \dot{\Psi}|_{\tau=0} = 0, \quad (3.2.1)$$

что соответствует однородным условиям для коэффициентов рядов

$$\Phi_n|_{\tau=0} = \dot{\Phi}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 0), \quad u_n|_{\tau=0} = \dot{u}_n|_{\tau=0} = \Psi_n|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 1). \quad (3.2.2)$$

К уравнениям (3.1.7), (3.1.8) и соотношениям (3.1.2) - (3.1.6) применяем преобразование Лапласа по времени. В результате получаем уравнения относительно изображений

$$s^2 \Phi_n^L = \gamma_0^{-2} \Delta_n \Phi_n^L - 4\alpha \nu \Phi_n^L \quad (n \geq 0); \quad (3.2.3)$$

$$s^2 u_n^L = \eta_{1\alpha}^+ \Delta_n u_n^L - 2\alpha \Delta_n \Psi_n^L, \quad (3.2.4)$$

$$s^2 \Psi_n^L = 2\alpha \nu u_n^L + (\gamma_2^{-2} \Delta_n - 4\alpha \nu) \Psi_n^L \quad (n \geq 1)$$

и дополнительные соотношения

$$\omega_m^L = \frac{\partial \Phi_n^L}{\partial r} - n(n+1) \frac{\Psi_n^L}{r} \quad (n \geq 0), \quad \omega_{\theta n}^L = \frac{\Phi_n^L}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Psi_n^L)}{\partial r} \quad (n \geq 1) \quad (3.2.5)$$

$$\gamma_{r9n}^L = \frac{\partial u_n^L}{\partial r} + \omega_{\theta n}^L, \quad \gamma_{9rn}^L = -\frac{u_n^L}{r} - \omega_{\theta n}^L, \quad \gamma_{\theta 9n}^L = -n(n+1) \frac{u_n^L}{r} - \omega_m^L, \quad \gamma_{9\theta n}^L = \omega_{rn}^L. \quad (3.2.6)$$

$$\chi_{rm}^L = \frac{\partial \omega_m^L}{\partial r}, \quad \chi_{\theta \theta n}^L = \frac{\omega_m^L - n(n+1)\omega_{\theta n}^L}{r}, \quad \chi_{99n}^L = \frac{\omega_{rn}^L}{r}, \quad (3.2.7)$$

$$X_n^L = \chi_{rm}^L + \chi_{\theta \theta n}^L + \chi_{99n}^L, \quad \chi_{r\theta n}^L = \frac{\partial \omega_{\theta n}^L}{\partial r}, \quad \chi_{\theta rm}^L = \frac{\omega_m^L - \omega_{\theta n}^L}{r}.$$

$$\sigma_{r9n}^L = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{r9n}^L + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{9rn}^L, \quad \sigma_{9rn}^L = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{9rn}^L + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{r9n}^L, \quad (3.2.8)$$

$$\sigma_{\theta 9n}^L = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\theta 9n}^L + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{9\theta n}^L, \quad \sigma_{9\theta n}^L = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{9\theta n}^L + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\theta 9n}^L.$$

$$\mu_{rm}^L = 2\eta_1 \chi_{rm}^L + \eta_2 X_n^L, \quad \mu_{\theta \theta n}^L = \eta_1 \chi_{\theta \theta n}^L + \eta_2 X_n^L, \quad \mu_{99n}^L = \eta_1 \chi_{99n}^L + \eta_2 X_n^L, \quad (3.2.9)$$

$$\mu_{r\theta n}^L = \chi_{r\theta n}^L + \eta \chi_{\theta rm}^L, \quad \mu_{\theta rn}^L = \chi_{\theta rm}^L + \eta \chi_{r\theta n}^L.$$

Общее решение уравнения (3.2.3) в соответствии с (П.2.6) имеет вид:

$$\Phi_n^L = \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) Z_{ln}(\lambda_0 r) \quad (3.2.10)$$

Здесь

$$\lambda_0 = \gamma_0 \sqrt{s^2 + 4\alpha \upsilon}, \operatorname{Re} \lambda_0 > 0, \quad (3.2.11)$$

а $C_{n1}^{(0)}(s)$ и $C_{n2}^{(0)}(s)$ - постоянные интегрирования.

Для построения общего решения системы уравнений (3.2.4) аналогично п. 2.2 записываем ее в матричном виде

$$\mathbf{C} \Delta_n \begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ -2\alpha \upsilon & (s^2 + 4\alpha \upsilon) \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \eta_{1\alpha}^+ & -2\alpha \\ 0 & \gamma_2^{-2} \end{pmatrix}. \quad (3.2.12)$$

и приводим эту систему канонической форме (П.3.1):

$$\Delta_n \begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} = \frac{\gamma_2^2}{\eta_{1\alpha}^+} \begin{pmatrix} (\gamma_2^{-2} s^2 - 4\alpha^2 \upsilon) & 2\alpha (s^2 + 4\alpha \upsilon) \\ -2\alpha \upsilon \eta_{1\alpha}^+ & \eta_{1\alpha}^+ (s^2 + 4\alpha \upsilon) \end{pmatrix}. \quad (3.2.13)$$

Построение характеристического уравнения матрицы \mathbf{A} при дополнительном учете (1.4.11) показывает, что оно совпадает с (2.2.11). Следовательно, его корни имеют вид (2.2.12).

Соответствующие собственные векторы находим как решения системы уравнений (2.2.16) с матрицей \mathbf{A} из (3.2.13):

$$\begin{aligned} y_{11} &= \gamma_2^2 (s^2 + 4\alpha \upsilon) - \lambda_1^2, \quad y_{21} = 2\alpha \gamma_2^2 \upsilon, \\ y_{12} &= -2\alpha \gamma_1^2 \gamma_2^2 (s^2 + 4\alpha \upsilon), \quad y_{22} = \gamma_1^2 (s^2 - 4\alpha^2 \gamma_2^2 \upsilon) - \lambda_2^2 (1 + \alpha \gamma_1^2). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Их независимость при $\alpha = 0$ проверяется аналогично (2.2.18).

Далее подобно (2.2.21) записываем общее решение системы уравнений (3.2.4):

$$\begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix} = \sum_{k,l=1}^2 \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} C_{nl}^{(k)}(s) Z_{ln}(\lambda_k r). \quad (3.2.15)$$

Подставляя теперь (3.2.10) и (3.2.15) в (3.2.5) - (3.2.9), с учетом (П.2.4), (П.2.7), (П.2.8) и (П.2.10) получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \omega_m^L &= \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) X_{ln}(\lambda_0 r) + n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} C_{nl}^{(k)}(s) \lambda_k Y_{ln}(\lambda_k r), \\ \omega_{\theta n}^L &= -\lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) Y_{ln}(\lambda_0 r) + \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) Y_{l+2,n}(\lambda_k r), \\ u_n^L &= \sum_{k,l=1}^2 y_{1k} C_{nl}^{(k)}(s) Z_{ln}(\lambda_k r). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{r9n}^L &= -\lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) Y_{ln}(\lambda_0 r) + \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^2 \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) [y_{1k} X_{ln}(\lambda_k r) + y_{2k} Y_{l+2,n}(\lambda_k r)], \\
\gamma_{9rn}^L &= \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) Y_{ln}(\lambda_0 r) + \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^2 C_{nl}^{(k)}(s) \lambda_k [y_{1k} Y_{ln}(\lambda_k r) - y_{2k} Y_{l+2,n}(\lambda_k r)], \tag{3.2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{09n}^L &= -\lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) X_{ln}(\lambda_0 r) + \\
&\quad + n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) [y_{1k} Y_{ln}(\lambda_k r) - y_{2k} Y_{ln}(\lambda_k r)], \\
\gamma_{90n}^L &= \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) X_{ln}(\lambda_0 r) + n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} C_{nl}^{(k)}(s) \lambda_k Y_{ln}(\lambda_k r).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{rm}^L &= \lambda_0^2 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) [U_{ln}(\lambda_0 r) - U_{l+2,n}(\lambda_0 r)] - \\
&\quad - \frac{n(n+1)}{r} \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} C_{nl}^{(k)}(s) \lambda_k [X_{ln}(\lambda_k r) + Y_{ln}(\lambda_k r)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{00n}^L &= \frac{1}{r} \left\{ \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) [X_{ln}(\lambda_0 r) + n(n+1) Y_{ln}(\lambda_0 r)] + \right. \\
&\quad \left. + n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} C_{nl}^{(k)}(s) \lambda_k X_{ln}(\lambda_k r) \right\},
\end{aligned}$$

$$\chi_{99n}^L = \frac{1}{r} \left\{ \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) X_{ln}(\lambda_0 r) + n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} C_{nl}^{(k)}(s) \lambda_k Y_{ln}(\lambda_k r) \right\},$$

$$\mathbf{X}_n^L = \lambda_0^2 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) \mathbf{Z}_{ln}(\lambda_0 r), \tag{3.2.18}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{r0n}^L &= \frac{1}{r} \left\{ \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) [X_{ln}(\lambda_0 r) + Y_{ln}(\lambda_0 r)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) [\lambda_k r U_{l+2,n}(\lambda_k r) - Y_{ln}(\lambda_k r)] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{0rn}^L &= \frac{1}{r} \left\{ \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) [X_{ln}(\lambda_0 r) + Y_{ln}(\lambda_0 r)] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} C_{nl}^{(k)}(s) \lambda_k [n(n+1) Y_{ln}(\lambda_k r) - Y_{l+2,n}(\lambda_k r)] \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r9n}^L &= \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{r9ln}^{(0)}(\lambda_0 r) + \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^2 \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) \left[y_{1k} T_{r9ln}^{(1)}(\lambda_k r) + y_{2k} T_{r9ln}^{(2)}(\lambda_k r) \right], \\
\sigma_{9rn}^L &= \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{9rln}^{(0)}(\lambda_0 r) + \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^2 \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) \left[y_{1k} T_{9rln}^{(1)}(\lambda_k r) + y_{2k} T_{9rln}^{(2)}(\lambda_k r) \right], \\
\sigma_{\theta9n}^L &= \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{\theta9ln}^{(0)}(\lambda_0 r) + \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^2 \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) \left[y_{1k} T_{\theta9ln}^{(1)}(\lambda_k r) + y_{2k} T_{\theta9ln}^{(2)}(\lambda_k r) \right], \\
\sigma_{9\theta n}^L &= \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{9\theta ln}^{(0)}(\lambda_0 r) + \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^2 \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) \left[y_{1k} T_{9\theta ln}^{(1)}(\lambda_k r) + y_{2k} T_{9\theta ln}^{(2)}(\lambda_k r) \right].
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{rrn}^L &= \lambda_0^2 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{rrln}^{(0)}(\lambda_0 r) + n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 C_{nl}^{(k)}(s) T_{rrln}^{(2)}(\lambda_k r), \\
\mu_{\theta\theta n}^L &= \frac{1}{r} \left\{ \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{\theta\theta ln}^{(0)}(\lambda_0 r) + \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) T_{\theta\theta ln}^{(2)}(\lambda_k r) \right\}, \\
\mu_{99n}^L &= \frac{1}{r} \left\{ \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{99ln}^{(0)}(\lambda_0 r) + \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) T_{99ln}^{(2)}(\lambda_k r) \right\}, \\
\mu_{r\theta n}^L &= \frac{1}{r} \left\{ \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{r\theta ln}^{(0)}(\lambda_0 r) + \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) T_{r\theta ln}^{(2)}(\lambda_k r) \right\}, \\
\mu_{\theta rn}^L &= \frac{1}{r} \left\{ \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) T_{\theta rln}^{(0)}(\lambda_0 r) + \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) T_{\theta rln}^{(2)}(\lambda_k r) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
T_{r\vartheta ln}^{(0)}(z) &= -T_{\vartheta rln}^{(0)}(z) = -2\alpha Y_{ln}(z), \\
T_{r\vartheta ln}^{(1)}(z) &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) X_{ln}(z) + (\gamma_1^{-2} - \alpha) Y_{ln}(z), \\
T_{\vartheta rln}^{(1)}(z) &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) Y_{ln}(z) + (\gamma_1^{-2} - \alpha) X_{ln}(z), \\
T_{r\vartheta ln}^{(2)}(z) &= -T_{\vartheta rln}^{(2)}(z) = 2\alpha Y_{l+2,n}(z), \\
T_{\theta\vartheta ln}^{(0)}(z) &= -T_{\vartheta\theta ln}^{(0)}(z) = -2\alpha X_{ln}(z), T_{\theta\vartheta ln}^{(1)}(z) = (\gamma_1^{-2} + \alpha)n(n+1)Y_{ln}(z), \\
T_{\vartheta\theta ln}^{(1)}(z) &= (\gamma_1^{-2} - \alpha)n(n+1)Y_{ln}(z), T_{\theta\vartheta ln}^{(2)}(z) = -T_{\vartheta\theta ln}^{(2)}(z) = -2\alpha n(n+1)Y_{ln}(z), \\
T_{r\theta ln}^{(0)}(z) &= 2\eta_1 [U_{ln}(z) - U_{l+2,n}(z) + \eta_2 Z_{ln}(z)], \tag{3.2.21} \\
T_{r\theta ln}^{(2)}(z) &= -\frac{2}{z}\eta_1 [X_{ln}(z) + Y_{ln}(z)], T_{\theta\theta ln}^{(2)}(z) = \eta_1 n(n+1)X_{ln}(z), \\
T_{\theta\theta ln}^{(0)}(z) &= \eta_1 [X_{ln}(z) + n(n+1)Y_{ln}(z) + \eta_2 z Z_{ln}(z)], \\
T_{\vartheta\vartheta ln}^{(0)}(z) &= \eta_1 X_{ln}(z) + \eta_2 z Z_{ln}(z), T_{\vartheta\vartheta ln}^{(2)}(z) = \eta_1 n(n+1)Y_{ln}(z), \\
T_{r\theta ln}^{(0)}(z) &= T_{\theta rln}^{(0)}(z) = (1 + \eta) [X_{ln}(z) + Y_{ln}(z)], \\
T_{r\theta ln}^{(1)}(z) &= n(n+1) [zU_{l+2,n}(z) - Y_{ln}(z)] + \eta [n(n+1)Y_{ln}(z) - Y_{l+2,n}(z)], \\
T_{\theta rln}^{(1)}(z) &= \eta n(n+1) [zU_{l+2,n}(z) - Y_{ln}(z)] + [n(n+1)Y_{ln}(z) - Y_{l+2,n}(z)].
\end{aligned}$$

3.3. Изображения решения при кинематических возмущениях

Положим, что на сферической полости единичного радиуса в пространстве, заполненном средой Коссера, заданы антисимметрично распределенные перемещения и угол поворота, что согласно (1.2.6) соответствует равенствам

$$u|_{r=1} = U_0(\theta, \tau), \omega_r|_{r=1} = \Omega_{r0}(\theta, \tau), \omega_\theta|_{r=1} = \Omega_{\theta 0}(\theta, \tau), \tag{3.3.1}$$

а на бесконечности возмущения отсутствуют.

Отметим, что частный случай этих граничных условий соответствуют жестко сцепленному с полостью единичного радиуса абсолютно твердому шару, поворачивающемуся вокруг оси Oz по закону $\Omega(\tau)$. Действительно, соответствующий вектор поворота $\mathbf{\Omega}$ и правые части последних двух равенств в (3.3.1) имеют вид:

$$\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{k} = \Omega (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta), \Omega_{r0} = \Omega \cos \theta, \Omega_{\theta 0}(\theta, \tau) = -\Omega \sin \theta. \tag{3.3.2}$$

Вектор перемещения поверхности шара \mathbf{U} и правая часть первого равенства в (3.3.1) с учетом (1.3.1) определяются так:

$$\mathbf{U} = \left[\boldsymbol{\Omega}, (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \Big|_{r=1} \right] = \Omega \left(-y \Big|_{r=1} \mathbf{i} + x \Big|_{r=1} \mathbf{j} \right) = \Omega \sin \theta \mathbf{e}_g, \quad U_0 = \Omega \sin \theta. \quad (3.3.3)$$

Аналогично (2.3.3) представляем правые части граничных условий (3.3.1) в виде рядов (3.1.1):

$$U_0(\theta, \tau) = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(\tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad \Omega_{r_0}(\theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{r_0n}(\tau) P_n(\cos \theta), \quad (3.3.4)$$

$$\Omega_{\theta_0}(\theta, \tau) = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\theta_0n}(\tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta).$$

Тогда приходим к равенствам

$$\omega_{rn} \Big|_{r=1} = \omega_{r_0n}(\tau) \quad (n \geq 0), \quad u_n \Big|_{r=1} = u_{0n}(\tau), \quad \omega_{\theta n} \Big|_{r=1} = \omega_{\theta_0n}(\tau) \quad (n \geq 1), \quad (3.3.5)$$

которые в пространстве изображений имеют вид:

$$\omega_{rn}^L \Big|_{r=1} = \omega_{r_0n}^L(s) \quad (n \geq 0), \quad u_n^L \Big|_{r=1} = u_{0n}^L(s), \quad \omega_{\theta n}^L \Big|_{r=1} = \omega_{\theta_0n}^L(s) \quad (n \geq 1). \quad (3.3.6)$$

В силу ограниченности решения подобно (2.3.6) в (3.2.10) и (3.2.14) полагаем

$$C_{n2}^{(0)}(s) = C_{n2}^{(1)}(s) = C_{n2}^{(2)}(s) = 0. \quad (3.3.7)$$

Подставляя (3.2.14) и (3.2.15) в (3.3.6), с учетом (3.3.7) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{n1}^{(0)}(s)$, $C_{n1}^{(1)}(s)$, $C_{n1}^{(2)}(s)$:

$$\lambda_0 C_{01}^{(0)}(s) X_{10}(\lambda_0) = \omega_{r_00}^L(s) \quad (3.3.8)$$

$$\lambda_0 C_{n1}^{(0)}(s) X_{1n}(\lambda_0) + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{n1}^{(k)}(s) Y_{1n}(\lambda_k) = \omega_{r_0n}^L(s),$$

$$-\lambda_0 C_{n1}^{(0)}(s) Y_{1n}(\lambda_0) + \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{n1}^{(k)}(s) Y_{3n}(\lambda_k) = \omega_{\theta_0n}^L(s), \quad (3.3.9)$$

$$\sum_{k=1}^2 y_{1k} C_{n1}^{(k)}(s) Z_{1n}(\lambda_k) = u_{0n}^L(s) \quad (n \geq 1).$$

Решение уравнения (3.3.8) имеет вид:

$$C_{01}^{(0)}(s) = \frac{\omega_{r_00}^L(s)}{\lambda_0 X_{10}(\lambda_0)}. \quad (3.3.10)$$

Тогда из (3.2.15) получаем

$$\omega_{r0}^L(r, \lambda_0) = G_{\omega r r 0}^L(r, s) \omega_{r00}^L(s), \quad G_{\omega r r 0}^L(r, s) = \frac{X_{10}(\lambda_0 r)}{X_{10}(\lambda_0)}. \quad (3.3.11)$$

Систему уравнений (3.3.9) записываем в матричном виде

$$\mathbf{A}_n \mathbf{C}_n = \mathbf{B}_n \quad (n \geq 1),$$

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0) & n(n+1) y_{21} \lambda_1 Y_{1n}(\lambda_1) & n(n+1) y_{22} \lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2) \\ -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0) & y_{21} \lambda_1 Y_{3n}(\lambda_1) & y_{22} \lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2) \\ 0 & y_{11} Z_{1n}(\lambda_1) & y_{12} Z_{1n}(\lambda_2) \end{pmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} C_{n1}^{(0)}(s) \\ C_{n1}^{(1)}(s) \\ C_{n1}^{(2)}(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} \omega_{r0n}^L(s) \\ \omega_{\theta 0n}^L(s) \\ u_{0n}^L(s) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица \mathbf{A}_n в этой формуле схожа с использованной в (2.3.11) матрицей. Отличие состоит в том, что здесь в первом столбце вместо s стоит λ_0 , а во втором и третьем столбцах компоненты собственных векторов меняются местами.

Процедура решения системы уравнений (3.3.12) полностью аналогична, использованной в п. 2.3. В результате получаем

$$\begin{aligned} D_n(s) C_{n1}^{(0)}(s) &= A_{n11}(s) \omega_{r0n}^L(s) + A_{n21}(s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + A_{n31}(s) u_{0n}^L(s), \\ D_n(s) C_{n1}^{(1)}(s) &= A_{n12}(s) \omega_{r0n}^L(s) + A_{n22}(s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + A_{n32}(s) u_{0n}^L(s), \\ D_n(s) C_{n1}^{(2)}(s) &= A_{n13}(s) \omega_{r0n}^L(s) + A_{n23}(s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + A_{n33}(s) u_{0n}^L(s). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Здесь

$$D_n(s) = |\mathbf{A}_n| = \lambda_0 [X_{1n}(\lambda_0) A_{n11}(s) - Y_{1n}(\lambda_0) A_{n21}(s)]. \quad (3.3.14)$$

$$\begin{aligned} A_{n11}(s) &= \lambda_1 y_{12} y_{21} Y_{3n}(\lambda_1) Z_{1n}(\lambda_2) - \lambda_2 y_{11} y_{22} Z_{1n}(\lambda_1) Y_{3n}(\lambda_2), \\ A_{n21}(s) &= -n(n+1) [\lambda_1 y_{12} y_{21} Y_{1n}(\lambda_1) Z_{1n}(\lambda_2) - \lambda_2 y_{11} y_{22} Z_{1n}(\lambda_1) Y_{1n}(\lambda_2)], \\ A_{n31} &= n(n+1) \lambda_1 \lambda_2 y_{21} y_{22} [Y_{1n}(\lambda_1) Y_{3n}(\lambda_2) - Y_{3n}(\lambda_1) Y_{1n}(\lambda_2)], \\ A_{n12} &= \lambda_0 y_{12} Y_{1n}(\lambda_0) Z_{1n}(\lambda_2), \quad A_{n22} = \lambda_0 y_{12} X_{1n}(\lambda_0) Z_{1n}(\lambda_2), \\ A_{n32} &= -\lambda_0 \lambda_2 y_{22} [X_{1n}(\lambda_0) Y_{3n}(\lambda_2) + n(n+1) Y_{1n}(\lambda_0) Y_{1n}(\lambda_2)], \\ A_{n13} &= -\lambda_0 y_{11} Y_{1n}(\lambda_0) Z_{1n}(\lambda_1), \quad A_{n23} = -\lambda_0 y_{11} X_{1n}(\lambda_0) Z_{1n}(\lambda_1), \\ A_{n33} &= \lambda_0 \lambda_1 y_{21} [X_{1n}(\lambda_0) Y_{3n}(\lambda_1) + n(n+1) Y_{1n}(\lambda_0) Y_{1n}(\lambda_1)]. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Подставляя теперь (3.3.13) в (3.2.15) изображения искомым коэффициентов представляем аналогично (2.3.16):

$$\begin{aligned}\omega_m^L(r, s) &= G_{\omega rm}^L(r, s)\omega_{r0n}^L(s) + G_{\omega r\theta n}^L(r, s)\omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{\omega run}^L(r, s)u_{0n}^L(s), \\ \omega_{\theta n}^L(r, s) &= G_{\omega\theta rm}^L(r, s)\omega_{r0n}^L(s) + G_{\omega\theta\theta n}^L(r, s)\omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{\omega\theta un}^L(r, s)u_{0n}^L(s), \\ u_n^L(r, s) &= G_{u\omega rn}^L(r, s)\omega_{r0n}^L(s) + G_{u\omega\theta n}^L(r, s)\omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{uun}^L(r, s)u_{0n}^L(s);\end{aligned}\quad (3.3.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned}D_n G_{\omega rm}^L &= \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n11} + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n1,k+1}, \\ D_n G_{\omega r\theta n}^L &= \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n21} + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n2,k+1}, \\ D_n G_{\omega run}^L &= \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n31} + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n3,k+1}, \\ D_n G_{\omega\theta rm}^L &= -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n11} + \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{3n}(\lambda_k r) A_{n1,k+1}, \\ D_n G_{\omega\theta\theta n}^L &= -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n21} + \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{3n}(\lambda_k r) A_{n2,k+1}, \\ D_n G_{\omega\theta un}^L &= -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n31} + \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{3n}(\lambda_k r) A_{n3,k+1}, \\ D_n G_{u\omega rn}^L &= \sum_{k=1}^2 y_{1k} A_{n1,k+1} Z_{1n}(\lambda_k r), \quad D_n G_{u\omega\theta n}^L = \sum_{k=1}^2 y_{1k} A_{n2,k+1} Z_{1n}(\lambda_k r), \\ D_n(s) G_{uun}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{1k} A_{n3,k+1} Z_{1n}(\lambda_k r).\end{aligned}\quad (3.3.17)$$

Здесь и далее в силу вида граничных условий и громоздкости выкладок ограничиваемся определением только перемещения и компонент угла поворота. Для определения напряжений необходимо привлечение компьютерной математики.

3.4. Линейное приближение решения при кинематических возмущениях

Здесь аналогично п. 2.4 используем линейное приближения разложений по малому параметру α . Как отмечено в п. 3.2, собственные числа λ_1 и λ_2 имеют вид (2.2.12). Следовательно, для них остаются справедливыми равенства (2.4.2).

Точное равенство (3.2.11) для λ_0 отличается от формулы для λ_2 в (2.4.1) только множителем. Следовательно, соответствующее приближение имеет вид:

$$\lambda_0 = \gamma_0 \left(s + \frac{2\alpha \upsilon}{s} \right). \quad (3.4.1)$$

Далее подобно (2.4.3) получаем

$$\begin{aligned} y_{11} &= (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) s^2 + \alpha (\gamma_1^4 s^2 + 4\upsilon \gamma_2^2), \quad y_{21} = 2\alpha \gamma_2^2 \upsilon, \\ y_{22} &= (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2 - \alpha \gamma_2^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4\upsilon), \quad y_{12} = -2\alpha \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Равенства (3.4.2) и (3.3.15) показывают, что имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$y_{12}, y_{21}, A_{n12}, A_{n22}, A_{n31}, A_{n33} = O(\alpha), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3.4.3)$$

Их учет позволяет с принятой точностью записать равенства (3.3.17):

$$\begin{aligned} D_n(s) G_{\omega r r m}^L(r, s) &= \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n11} + n(n+1) y_{22} \lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2 r) A_{n13}, \\ D_n(s) G_{\omega r \theta n}^L(r, s) &= \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n21} + n(n+1) y_{22} \lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2 r) A_{n23}, \\ D_n G_{\omega r u n}^L(r, s) &= \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n31} + n(n+1) y_{22} \lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2 r) A_{n33}, \\ D_n(s) G_{\omega \theta r m}^L(r, s) &= -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n11} + y_{22} \lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2 r) A_{n13}, \\ D_n(s) G_{\omega \theta \theta n}^L(r, s) &= -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n21} + y_{22} \lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2 r) A_{n23}, \\ D_n G_{\omega \theta u n}^L &= -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n31} + y_{21} \lambda_1 Y_{3n}(\lambda_1 r) A_{n32} + y_{22} \lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2 r) A_{n33}, \\ D_n G_{u \omega r m}^L(r, s) &= y_{11} A_{n12} Z_{1n}(\lambda_1 r) + y_{12} A_{n13} Z_{1n}(\lambda_2 r), \\ D_n G_{u \omega \theta n}^L(r, s) &= y_{11} A_{n22} Z_{1n}(\lambda_1 r) + y_{12} A_{n23} Z_{1n}(\lambda_2 r), \\ D_n(s) G_{u u n}^L(r, s) &= y_{11} A_{n32} Z_{1n}(\lambda_1 r). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Аналогично преобразовываем формулы (3.3.14) и (3.3.15):

$$\begin{aligned} A_{n11}(s) &= -\lambda_2 y_{11} y_{22} Z_{1n}(\lambda_1) Y_{3n}(\lambda_2), \\ A_{n21}(s) &= n(n+1) \lambda_2 y_{11} y_{22} Z_{1n}(\lambda_1) Y_{1n}(\lambda_2), \\ A_{n31} &= n(n+1) \lambda_1 \lambda_2 y_{21} y_{22} P_n(\lambda_1, \lambda_2), \\ A_{n12} &= \lambda_0 y_{12} Y_{1n}(\lambda_0) Z_{1n}(\lambda_2), \quad A_{n22} = \lambda_0 y_{12} X_{1n}(\lambda_0) Z_{1n}(\lambda_2), \\ A_{n32} &= -\lambda_0 \lambda_2 y_{22} \Pi_n(\lambda_0, \lambda_2), \quad A_{n13} = -\lambda_0 y_{11} Y_{1n}(\lambda_0) Z_{1n}(\lambda_1), \\ A_{n23} &= -\lambda_0 y_{11} X_{1n}(\lambda_0) Z_{1n}(\lambda_1), \quad A_{n33} = \lambda_0 \lambda_1 y_{21} \Pi_n(\lambda_0, \lambda_1), \\ P_n(x, y) &= Y_{1n}(x) Y_{3n}(y) - Y_{3n}(x) Y_{1n}(y). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$$D_n(s) = -\lambda_0 \lambda_2 y_{11} y_{22} \Pi_n(\lambda_0, \lambda_2) Z_{1n}(\lambda_1) \quad (3.4.6)$$

Функция $\Pi_n(x, y)$ в последнем равенстве задана в (2.4.8).

Использование этих равенств, формул (3.4.1), (3.4.5) и (3.4.6) приводит изображения функций влияния (3.4.4) к такому виду:

$$\begin{aligned} G_{\omega r m}^L(r, s) &= \frac{F_{\omega r m}(r, s)}{\Pi_n(\lambda_0, \lambda_2)}, G_{\omega r \theta n}^L(r, s) = \frac{F_{\omega r \theta n}(r, s)}{\Pi_n(\lambda_0, \lambda_2)}, \\ G_{\omega r u n}^L(r, s) &= \frac{y_{21} F_{\omega r u n}(r, s)}{y_{11} \Pi_n(\lambda_0, \lambda_2) Z_{1n}(\lambda_1)}, G_{\omega \theta m}^L(r, s) = \frac{F_{\omega \theta m}(r, s)}{\Pi_n(\lambda_0, \lambda_2)}, \\ G_{\omega \theta \theta n}^L(r, s) &= \frac{F_{\omega \theta \theta n}(r, s)}{\Pi_n(\lambda_0, \lambda_2)}, G_{\omega \theta u n}^L(r, s) = \frac{y_{21} F_{\omega \theta u n}(r, s)}{y_{11} \Pi_n(\lambda_0, \lambda_2) Z_{1n}(\lambda_1)}, \\ G_{u \omega r m}^L(r, s) &= \frac{y_{12} F_{u \omega r m}(r, s)}{y_{22} \lambda_2 \Pi_n(\lambda_0, \lambda_2) Z_{1n}(\lambda_1)}, G_{u \omega \theta n}^L = \frac{y_{12} F_{u \omega \theta n}(r, s)}{y_{22} \lambda_2 \Pi_n(\lambda_0, \lambda_2) Z_{1n}(\lambda_1)}, \\ G_{u n}^L(r, s) &= \frac{Z_{1n}(\lambda_1 r)}{Z_{1n}(\lambda_1)}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\omega r m}(r, s) &= X_{1n}(\lambda_0 r) Y_{3n}(\lambda_2) + n(n+1) Y_{1n}(\lambda_2 r) Y_{1n}(\lambda_0), \\ F_{\omega r \theta n}(r, s) &= n(n+1) [Y_{1n}(\lambda_2 r) X_{1n}(\lambda_0) - X_{1n}(\lambda_0 r) Y_{1n}(\lambda_2)], \\ F_{\omega r u n} &= -\lambda_1 n(n+1) [X_{1n}(\lambda_0 r) P_n(\lambda_1, \lambda_2) + Y_{1n}(\lambda_2 r) \Pi_n(\lambda_0, \lambda_1)], \\ F_{\omega \theta m}(r, s) &= Y_{3n}(\lambda_2 r) Y_{1n}(\lambda_0) - Y_{1n}(\lambda_0 r) Y_{3n}(\lambda_2), \\ F_{\omega \theta \theta n}(r, s) &= n(n+1) Y_{1n}(\lambda_0 r) Y_{1n}(\lambda_2) + Y_{3n}(\lambda_2 r) X_{1n}(\lambda_0), \\ F_{\omega \theta u n} &= \lambda_1 [n(n+1) Y_{1n}(\lambda_0 r) P_n(\lambda_1, \lambda_2) + Y_{3n}(\lambda_1 r) \Pi_n(\lambda_0, \lambda_2) - \\ &\quad - Y_{3n}(\lambda_2 r) \Pi_n(\lambda_0, \lambda_1)], \\ F_{u \omega r m} &= [Z_{1n}(\lambda_1) Z_{1n}(\lambda_2 r) - Z_{1n}(\lambda_2) Z_{1n}(\lambda_1 r)] Y_{1n}(\lambda_0), \\ F_{u \omega \theta n} &= [Z_{1n}(\lambda_1) Z_{1n}(\lambda_2 r) - Z_{1n}(\lambda_2) Z_{1n}(\lambda_1 r)] X_{1n}(\lambda_0). \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Как следует из (3.4.2), содержащие множители y_{12} и y_{21} функции в (3.4.7) в рамках линейного приближения пропорциональны параметру α и с учетом (2.4.2), (3.4.1) и (3.4.8) записываются так:

$$\begin{aligned} G_{an}^L(r, s) &= \frac{\alpha F_{an}^{(1)}(r, s)}{s \Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) Z_{1n}(\gamma_1 s)} \\ (a &= \omega r u, \omega \theta u, u \omega r, u \omega \theta), \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

где

$$\begin{aligned}
F_{\omega rn}^{(1)}(r, s) &= n(n+1)\gamma_2 k_\omega \left[X_{1n}(\gamma_0 rs) P_n(\gamma_1 s, \gamma_2 s) + Y_{1n}(\gamma_2 rs) \Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_1 s) \right], \\
F_{\omega \theta n}^{(1)}(r, s) &= -\gamma_2 k_\omega \left[n(n+1) Y_{1n}(\gamma_0 rs) P_n(\gamma_1 s, \gamma_2 s) + Y_{3n}(\gamma_1 rs) \Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) - \right. \\
&\quad \left. - Y_{3n}(\gamma_2 rs) \Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_1 s) \right], \tag{3.4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\omega \theta n}^{(1)}(r, s) &= \gamma_1 k_\omega \left[Z_{1n}(\gamma_1 s) Z_{1n}(\gamma_2 rs) - Z_{1n}(\gamma_2 s) Z_{1n}(\gamma_1 rs) \right] Y_{1n}(\gamma_0 s), \\
F_{\omega \theta n}^{(1)}(r, s) &= \gamma_1 k_\omega \left[Z_{1n}(\gamma_1 s) Z_{1n}(\gamma_2 rs) - Z_{1n}(\gamma_2 s) Z_{1n}(\gamma_1 rs) \right] X_{1n}(\gamma_0 s).
\end{aligned}$$

Используемая здесь величина k_ω введена в (2.4.10).

Также достаточно просто записывается функция G_{unn}^L :

$$G_{unn}^L(r, s) = \frac{Z_{1n}(\gamma_{1\alpha} rs)}{Z_{1n}(\gamma_{1\alpha} s)}. \tag{3.4.11}$$

Для остальных функций в (3.4.7) необходима дополнительная линеаризация из-за входящих в них нелинейных зависимостей величин λ_0 и λ_2 от α , линейное приближение которых дано в (2.2.12) и (3.4.1). При этом будем использовать следующие приближения:

$$\begin{aligned}
\Pi_n(\lambda_0, \lambda_2) &= \Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) + \frac{2\gamma_0 v}{s} \frac{\partial \Pi_n}{\partial \lambda_0} \Big|_{\alpha=0} + \frac{2\gamma_2 v}{s} \frac{\partial \Pi_n}{\partial \lambda_2} \Big|_{\alpha=0} = \\
&= \Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) + 2\alpha v s^{-2} \Pi_n^{(1)}(\gamma_0 s, \gamma_2 s), \tag{3.4.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_n^{(1)}(x, y) &= x X'_{1n}(x) Y_{3n}(y) + y X_{1n}(x) Y'_{3n}(y) + \\
&\quad + n(n+1) \left[x Y'_{1n}(x) Y_{1n}(y) + y Y_{1n}(x) Y'_{1n}(y) \right], \\
X_{1n}(\lambda_m r) &= X_{1n}(\gamma_m rs) + 2\alpha v \gamma_m rs^{-1} X'_{1n}(\gamma_m rs), \\
Y_{ln}(\lambda_m r) &= Y_{ln}(\gamma_m rs) + 2\alpha v \gamma_m rs^{-1} Y'_{ln}(\gamma_m rs) \quad (m = 0, 2; l = 1, 3). \tag{3.4.13}
\end{aligned}$$

Учет последних равенств получаем следующие линеаризации числителей функций $G_{\omega rn}^L, G_{\omega r\theta n}^L, G_{\omega \theta rn}^L, G_{\omega \theta \theta n}^L$:

$$\begin{aligned}
F_{\zeta n}(r, s) &= F_{\zeta n}^{(0)}(r, s) + 2\alpha v s^{-1} F_{\zeta n}^{(1)}(r, s), \\
(\zeta &= \omega rr, \omega r\theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta). \tag{3.4.14}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
F_{\zeta n}^{(0)}(r, s) &= F_{\zeta n}(r, s) \Big|_{\lambda_0=\gamma_0 s, \lambda_2=\gamma_2 s} \\
F_{\omega r r n}^{(1)}(r, s) &= X_{1n}(\gamma_0 s r) \gamma_2 Y'_{3n}(\gamma_2 s) + \gamma_0 r X'_{1n}(\gamma_0 s r) Y_{3n}(\gamma_2 s) + \\
&\quad + n(n+1) \left[Y_{1n}(\gamma_2 s r) \gamma_0 Y'_{1n}(\gamma_0 s) + \gamma_2 r Y'_{1n}(\gamma_2 s r) Y_{1n}(\gamma_0 s) \right], \\
F_{\omega r \theta n}^{(1)}(r, s) &= n(n+1) \left[Y_{1n}(\gamma_2 r s) \gamma_0 X'_{1n}(\gamma_0 s) + r \gamma_2 Y'_{1n}(\gamma_2 r s) X_{1n}(\gamma_0 s) - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_0 r X'_{1n}(\gamma_0 s r) Y_{1n}(\gamma_2 s) - \gamma_2 X_{1n}(\gamma_0 s r) Y'_{1n}(\gamma_2 s) \right], \\
F_{\omega \theta r n}^{(1)}(r, s) &= \gamma_0 Y'_{1n}(\gamma_0 s) Y_{3n}(\gamma_2 r s) + \gamma_2 r Y'_{3n}(\gamma_2 r s) Y_{1n}(\gamma_0 s) - \\
&\quad - \gamma_2 Y'_{3n}(\gamma_2 s) Y_{1n}(\gamma_0 r s) - \gamma_0 r Y'_{1n}(\gamma_0 r s) Y_{3n}(\gamma_2 s), \\
F_{\omega \theta \theta n}^{(1)}(r, s) &= n(n+1) \left[\gamma_0 r Y_{1n}(\gamma_2 s) Y'_{1n}(\gamma_0 r s) + \gamma_2 Y_{1n}(\gamma_0 r s) Y'_{1n}(\gamma_2 s) \right] + \\
&\quad + \gamma_2 r Y'_{3n}(\gamma_2 r s) X_{1n}(\gamma_0 s) + \gamma_0 Y_{3n}(\lambda_2 r) X'_{1n}(\gamma_0 s).
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Отсюда при учете (3.4.12) вытекают следующие формулы для изображений функций $G_{\omega r r n}^L$, $G_{\omega r \theta n}^L$, $G_{\omega \theta r n}^L$, $G_{\omega \theta \theta n}^L$:

$$\begin{aligned}
G_{\zeta n}^L(r, s) &= \frac{F_{\zeta n}^{(0)}(r, s) + 2\alpha \upsilon s^{-1} F_{\zeta n}^{(1)}(r, s)}{\Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) + 2\alpha \upsilon s^{-2} \Pi_n^{(1)}(\gamma_0 s, \gamma_2 s)} = \\
&= G_{\zeta n}^{(0)L}(r, s) + 2\alpha \upsilon G_{\zeta n}^{(1)L}(r, s) \quad (\zeta = \omega r r, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta),
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{\zeta n}^{(0)L}(r, s) &= \frac{F_{\zeta n}^{(0)}(r, s)}{\Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s)}, \quad G_{\zeta n}^{(1)L}(r, s) = \frac{\tilde{F}_{\zeta n}^{(1)}(r, s)}{s^2 \Pi_n^2(\gamma_0 s, \gamma_2 s)}, \\
\tilde{F}_{\zeta n}^{(1)}(r, s) &= F_{\zeta n}^{(1)}(r, s) s \Pi_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) - F_{\zeta n}^{(0)}(r, s) \Pi_n^{(1)}(\gamma_0 s, \gamma_2 s).
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Далее аналогично параграфу 2.4 с использованием параграфа П.2 выражаем функции в (3.4.9), (3.4.11) и (3.4.16) через элементарные. Наиболее просто это выполняется для $G_{u n n}^L$:

$$G_{u n n}^L(r, s) = H_{u n n}^L(r, s) e^{-\gamma_{1\alpha}(r-1)s}, \quad H_{u n n}^L(r, s) = \frac{R_{n0}(\gamma_{1\alpha} r s)}{r^{n+1} R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s)}. \tag{3.4.18}$$

Для построения изображений остальных функций влияния в дополнение к (2.4.13) строим вспомогательные формулы для функций $P_n(x, y)$ и $\Pi_n^{(1)}(x, y)$ в (3.4.5) и (3.4.12):

$$\begin{aligned}
P_n(x, y) &= \frac{\pi}{2x^{n+2}y^{n+2}} \left[R_{n3}(x)R_{n0}(y) - R_{n0}(x)R_{n3}(y) \right] e^{-(x+y)}, \\
\Pi_n^{(1)}(x, y) &= \frac{\pi P_n^{(1)}(x, y)}{2x^{n+2}y^{n+2}} e^{-(x+y)}, \\
P_n^{(1)}(x, y) &= R_{n2}(x)R_{n3}(y) + R_{n1}(x)R_{n6}(y) - \\
&\quad - n(n+1) \left[R_{n5}(x)R_{n0}(y) + R_{n0}(x)R_{n5}(y) \right].
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Затем выполняем ту же процедуру для функций в (3.4.10) и (3.4.15):

$$\begin{aligned}
F_{\omega r u n}^{(1)} &= \frac{n(n+1)\gamma_2 k_\omega \pi^{3/2}}{2^{3/2} \gamma_0^{n+2} \gamma_1^{n+2} \gamma_2^{n+2} r^{n+2} s^{3(n+2)}} \left[F_{\omega r u n}^{(10)} e^{-(\gamma_0 r + \gamma_2) s} + F_{\omega r u n}^{(12)} e^{-(\gamma_0 + \gamma_2 r) s} \right] e^{-\gamma_1 s}, \\
F_{\omega \theta u n}^{(1)}(r, s) &= \frac{k_\omega \pi^{3/2}}{2^{3/2} \gamma_0^{n+2} \gamma_1^{n+2} \gamma_2^{n+1} r^{n+2} s^{3(n+2)}} \times \\
&\quad \times \left[F_{\omega \theta u n}^{(10)} e^{-(\gamma_0 r s + \gamma_1 s + \gamma_2 s)} + F_{\omega \theta u n}^{(11)} e^{-(\gamma_0 s + \gamma_1 r s + \gamma_2 s)} + F_{\omega \theta u n}^{(12)} e^{-(\gamma_0 s + \gamma_1 s + \gamma_2 r s)} \right], \\
F_{u \omega r n}^{(1)}(r, s) &= \frac{\gamma_1 k_\omega \pi^{3/2}}{2^{3/2} \gamma_0^{n+2} \gamma_1^{n+1} \gamma_2^{n+1} r^{n+1} s^{3n+4}} \left[F_{u \omega r n}^{(11)} e^{-(\gamma_1 r + \gamma_2) s} + F_{u \omega r n}^{(12)} e^{-(\gamma_1 + \gamma_2 r) s} \right] e^{-\gamma_0 s}, \\
F_{u \omega \theta n}^{(1)}(r, s) &= \frac{\gamma_1 k_\omega \pi^{3/2}}{2^{3/2} \gamma_0^{n+2} \gamma_1^{n+1} \gamma_2^{n+1} r^{n+1} s^{3n+4}} \left[F_{u \omega \theta n}^{(11)} e^{-(\gamma_1 r + \gamma_2) s} + F_{u \omega \theta n}^{(12)} e^{-(\gamma_1 + \gamma_2 r) s} \right] e^{-\gamma_0 s}.
\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{\omega r u n}^{(10)}(r, s) &= \left[R_{n0}(\gamma_1 s) R_{n3}(\gamma_2 s) - R_{n3}(\gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 s) \right] R_{n1}(\gamma_0 r s), \\
F_{\omega r u n}^{(12)}(r, s) &= P_n(\gamma_0 s, \gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 r s), \\
F_{\omega \theta u n}^{(10)}(r, s) &= n(n+1) R_{n0}(\gamma_0 r s) \left[R_{n3}(\gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 s) - R_{n0}(\gamma_1 s) R_{n3}(\gamma_2 s) \right], \\
F_{\omega \theta u n}^{(11)}(r, s) &= R_{n3}(\gamma_1 r s) P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s), \quad F_{\omega \theta u n}^{(12)}(r, s) = -R_{n3}(\gamma_2 r s) P_n(\gamma_0 s, \gamma_1 s), \\
F_{u \omega r n}^{(11)}(r, s) &= R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 r s) R_{n0}(\gamma_0 s), \\
F_{u \omega r n}^{(12)}(r, s) &= -R_{n0}(\gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 r s) R_{n0}(\gamma_0 s), \\
F_{u \omega \theta n}^{(11)}(r, s) &= R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 r s) R_{n1}(\gamma_0 s), \\
F_{u \omega \theta n}^{(12)}(r, s) &= -R_{n0}(\gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 r s) R_{n1}(\gamma_0 s); \\
F_{\zeta n}^{(0)}(r, s) &= F_{\zeta n}(r, s) \Big|_{\lambda_0 = \gamma_0 s, \lambda_2 = \gamma_2 s} = \\
&= \frac{\pi}{2r^{n+2} s^{2(n+2)} \gamma_0^{n+2} \gamma_2^{n+2}} \left[F_{\zeta n}^{(00)} e^{-(\gamma_0 r + \gamma_2) s} + F_{\zeta n}^{(02)} e^{-(\gamma_0 + \gamma_2 r) s} \right] \quad (\zeta = \omega r r, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta),
\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{\omega rn}^{(00)}(r, s) &= -R_{n1}(\gamma_0 sr)R_{n3}(\gamma_2 s), \quad F_{\omega rn}^{(02)}(r, s) = n(n+1)R_{n0}(\gamma_2 sr)R_{n0}(\gamma_0 s), \\
F_{\omega r\theta n}^{(00)}(r, s) &= -n(n+1)R_{n1}(\gamma_0 sr)R_{n0}(\gamma_2 s), \\
F_{\omega r\theta n}^{(02)}(r, s) &= n(n+1)R_{n0}(\gamma_2 sr)R_{n1}(\gamma_0 s), \\
F_{\omega\theta rn}^{(00)}(r, s) &= R_{n0}(\gamma_0 sr)R_{n3}(\gamma_2 s), \quad F_{\omega\theta rn}^{(02)}(r, s) = -R_{n0}(\gamma_0 s)R_{n3}(\gamma_2 sr), \\
F_{\omega\theta\theta n}^{(00)}(r, s) &= n(n+1)R_{n0}(\gamma_2 s)R_{n0}(\gamma_0 sr), \quad F_{\omega\theta\theta n}^{(02)}(r, s) = -R_{n1}(\gamma_0 s)R_{n3}(\gamma_2 sr).
\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

$$\begin{aligned}
F_{\zeta n}^{(1)}(r, s) &= \frac{\pi}{2r^{n+2}s^{2n+5}\gamma_0^{n+2}\gamma_2^{n+2}} \left[F_{\zeta n}^{(10)} e^{-(\gamma_0 r + \gamma_2) s} + F_{\zeta n}^{(12)} e^{-(\gamma_0 + \gamma_2 r) s} \right] \\
(\zeta &= \omega rr, \omega r\theta, \omega\theta r, \omega\theta\theta),
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{\omega rn}^{(10)}(r, s) &= R_{n1}(\gamma_0 sr)R_{n6}(\gamma_2 s) + R_{n2}(\gamma_0 sr)R_{n3}(\gamma_2 s), \\
F_{\omega rn}^{(12)}(r, s) &= -n(n+1) \left[R_{n0}(\gamma_2 sr)R_{n5}(\gamma_0 s) + R_{n0}(\gamma_0 s)R_{n5}(\gamma_2 sr) \right], \\
F_{\omega r\theta n}^{(10)}(r, s) &= n(n+1) \left[R_{n0}(\gamma_2 s)R_{n2}(\gamma_0 sr) + R_{n1}(\gamma_0 sr)R_{n5}(\gamma_2 s) \right], \\
F_{\omega r\theta n}^{(12)}(r, s) &= -n(n+1) \left[R_{n0}(\gamma_2 rs)R_{n2}(\gamma_0 s) + R_{n1}(\gamma_0 s)R_{n5}(\gamma_2 rs) \right], \\
F_{\omega\theta rn}^{(10)}(r, s) &= -R_{n0}(\gamma_0 rs)R_{n6}(\gamma_2 s) - R_{n3}(\gamma_2 s)R_{n5}(\gamma_0 rs), \\
F_{\omega\theta rn}^{(12)}(r, s) &= R_{n3}(\gamma_2 rs)R_{n5}(\gamma_0 s) + R_{n0}(\gamma_0 s)R_{n6}(\gamma_2 rs), \\
F_{\omega\theta\theta n}^{(10)}(r, s) &= -n(n+1) \left[R_{n0}(\gamma_2 s)R_{n5}(\gamma_0 rs) + R_{n0}(\gamma_0 rs)R_{n5}(\gamma_2 s) \right], \\
F_{\omega\theta\theta n}^{(12)}(r, s) &= R_{n1}(\gamma_0 s)R_{n6}(\gamma_2 rs) + R_{n2}(\gamma_0 s)R_{n3}(\gamma_2 sr).
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

Из формул (3.4.17)-(3.4.25) с учетом (2.4.13) получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{\zeta n}^{(1)}(r, s) &= -\frac{\pi^2}{4r^{n+2}s^{4(n+2)}\gamma_0^{2(n+2)}\gamma_2^{2(n+2)}} \left[\tilde{F}_{\zeta n}^{(10)} e^{-(\gamma_0 r + \gamma_2) s} + \tilde{F}_{\zeta n}^{(12)} e^{-(\gamma_0 + \gamma_2 r) s} \right] e^{-(\gamma_0 + \gamma_2) s}, \\
\tilde{F}_{\zeta n}^{(1k)}(r, s) &= F_{\zeta n}^{(1k)}(r, s)P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) + F_{\zeta n}^{(0k)}(r, s)P_n^{(1)}(\gamma_0 s, \gamma_2 s) \\
(\zeta &= \omega rr, \omega r\theta, \omega\theta r, \omega\theta\theta).
\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

Следовательно, изображения функций влияния в (3.4.9) и коэффициентов в (3.4.17) для функций (3.4.16) записываются так:

$$\begin{aligned}
G_{\omega rn}^L(r, s) &= \alpha \sum_{k=0,2}^2 H_{\omega rn}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s}, \quad G_{\omega\theta rn}^L(r, s) = \alpha \sum_{k=0}^2 H_{\omega\theta rn}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s}, \\
G_{\omega\theta\theta n}^L(r, s) &= \alpha \sum_{k=1}^2 H_{\omega\theta\theta n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s}, \quad G_{\omega\theta\theta n}^L(r, s) = \alpha \sum_{k=1}^2 H_{\omega\theta\theta n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s},
\end{aligned} \tag{3.4.27}$$

где

$$H_{\omega run}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{n(n+1)\gamma_2 k_{\omega} F_{\omega run}^{(1k)}(r, s)}{\gamma_1 r^{n+2} s^2 P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s)} \quad (k=0, 2),$$

$$H_{\omega \theta un}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{\gamma_2 k_{\omega} F_{\omega \theta un}^{(1k)}(r, s)}{\gamma_1 r^{n+2} s^2 P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s)} \quad (k=0, 1, 2),$$

$$H_{u \omega rn}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{\gamma_1 \gamma_2 k_{\omega} F_{u \omega rn}^{(1k)}(r, s)}{r^{n+1} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s)} \quad (k=1, 2),$$

$$H_{u \omega \theta n}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{\gamma_1 \gamma_2 k_{\omega} F_{u \omega \theta n}^{(1k)}(r, s)}{r^{n+1} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s)} \quad (k=1, 2);$$

$$G_{\zeta n}^{(l)L}(r, s) = \sum_{k=0, 2} H_{\zeta n}^{(lk)L}(r, s) e^{-\gamma_k (r-1)s} \quad (\zeta = \omega rr, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta; l=0, 1), \quad (3.4.29)$$

где

$$H_{\zeta n}^{(0k)L}(r, s) = -\frac{F_{\zeta n}^{(0k)}(r, s)}{r^{n+2} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s)}, \quad H_{\zeta n}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{\tilde{F}_{\zeta n}^{(1k)}(r, s)}{r^{n+2} s^2 P_n^2(\gamma_0 s, \gamma_2 s)}. \quad (3.4.30)$$

3.5. Оригиналы решения при кинематических возмущениях

Наиболее просто вычисляется оригиналы функции $G_{\omega rr 0}^L(r, s)$ в (3.3.11).

Однако в отличие от $G_{w \omega \theta}(r, \tau)$ в параграфе 2.5 здесь необходимо использование линеаризации. Из (3.4.16), (3.4.23), (3.4.25), (3.4.26) и (3.4.28)-(3.4.30) получаем:

$$G_{\omega rr 0}^L(r, s) = \left[H_{\omega rr 0}^{(00)L}(r, s) + 2\alpha \cup H_{\omega rr 0}^{(10)L}(r, s) \right] e^{-\gamma_0 (r-1)s}$$

$$H_{\omega rr 0}^{(00)L}(r, s) = \frac{R_{01}(\gamma_0 sr) R_{03}(\gamma_2 s)}{r^2 P_0(\gamma_0 s, \gamma_2 s)}, \quad H_{\omega rr 0}^{(10)L}(r, s) = -\frac{\tilde{F}_{\omega rr 0}^{(10)}(r, s)}{r^2 s^2 P_0^2(\gamma_0 s, \gamma_2 s)}, \quad (3.5.1)$$

$$\tilde{F}_{\omega rr 0}^{(10)}(r, s) = \left[R_{01}(\gamma_0 sr) R_{06}(\gamma_2 s) + R_{02}(\gamma_0 sr) R_{03}(\gamma_2 s) \right] P_0(\gamma_0 s, \gamma_2 s) -$$

$$- R_{01}(\gamma_0 sr) R_{03}(\gamma_2 s) \left[R_{02}(\gamma_0 s) R_{03}(\gamma_2 s) + R_{01}(\gamma_0 s) R_{06}(\gamma_2 s) \right].$$

Эту формулу преобразовываем с использованием вытекающих из (П.2.12), (П.2.16), (П.2.20) и (2.4.13) равенств

$$R_{00}(z) = 1, \quad R_{10}(z) = R_{01}(z) = z + 1, \quad R_{03}(z) = z,$$

$$R_{02}(z) = z^2 + 2(z + 1), \quad R_{06}(z) = z^2 + z + 1, \quad P_0(x, y) = (x + 1)y. \quad (3.5.2)$$

В результате для коэффициентов в (3.5.1) приходим к таким равенствам:

$$H_{\omega rr 0}^{(00)L}(r, s) = \frac{\gamma_0 s r + 1}{r^2 (\gamma_0 s + 1)} = \frac{1}{r} + H_{\omega rr 0 r}^{(00)L}(r, s), \quad H_{\omega rr 0 r}^{(00)L}(r, s) = -\frac{r-1}{r^2 (\gamma_0 s + 1)}, \quad (3.5.3)$$

$$H_{\omega rr 0}^{(10)L}(r, s) = -\frac{\gamma_0^2 (r-1)(\gamma_0 r s + r + 1)}{r^2 (\gamma_0 s + 1)^2}.$$

Оригиналы функций $H_{\omega rr 0}^{(00)L}(r, s)$ и $H_{\omega rr 0}^{(10)L}(r, s)$ находим, учитывая, что они имеют полюсы в точке $s = -\gamma_0^{-1}$:

$$H_{\omega rr 0 r}^{(00)}(r, \tau) = \operatorname{res}_{s=-\gamma_0^{-1}} H_{\omega rr 0 r}^{(00)L}(r, s) e^{s\tau} = -\frac{r-1}{r^2 \gamma_0} e^{-\tau/\gamma_0}, \quad (3.5.4)$$

$$H_{\omega rr 0}^{(10)}(r, \tau) = \operatorname{res}_{s=-\gamma_0^{-1}} H_{\omega rr 0}^{(10)L}(r, s) e^{s\tau} = -\frac{r-1}{r^2} (\tau + \gamma_0 r) e^{-\tau/\gamma_0}.$$

Используя теперь (3.5.4), находим оригинал функции $G_{\omega rr 0}^L(r, s)$:

$$G_{\omega rr 0}(r, \tau) = \frac{1}{r} \delta[\tau - \gamma_0 (r-1)] + G_{\omega rr 0 r}(r, \tau),$$

$$G_{\omega rr 0 r}(r, \tau) = H_{\omega rr 0 r} [r, \tau - \gamma_0 (r-1)] H[\tau - \gamma_0 (r-1)], \quad (3.5.5)$$

$$H_{\omega rr 0 r}(r, \tau) = -\frac{r-1}{r^2} \left[\frac{1}{\gamma_0} + 2\alpha \nu(\tau + \gamma_0 r) \right] e^{-\tau/\gamma_0}.$$

Остальные оригиналы определяем с учетом того, что функции в (3.4.18), (3.4.27) и (3.4.29) - рациональные функции параметра s . Для выяснения их типа в дополнение к (2.5.3) с учетом (П.2.18) и (П.2.20) находим степени многочленов в числителях и знаменателях:

$$\deg R_{n_2}(z) = \deg R_{n_4}(z) = \deg R_{n_6}(z) = n + 2, \quad (3.5.6)$$

$$\deg R_{n_5}(z) = n + 1, \quad \deg P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) = 2(n + 1).$$

Анализ равенств в (3.4.18), (3.4.27) и (3.4.29) показывает, что среди этих функций только три неправильные дроби.

$$H_{\omega rr 0}^L(r, s), H_{\omega rr 0 r}^{(00)L}(r, s), H_{\omega rr 0 r}^{(02)L}(r, s), \quad (3.5.7)$$

и все они имеют равные степени числителя и знаменателя.

Для выделения их целых частей используем (П.2.21) и (2.5.4) при $\alpha = \gamma_0, \beta = \gamma_2$:

$$\begin{aligned}
H_{uun}^L(r, s) &= \frac{1}{r} + H_{uunr}^L(r, s), & H_{uunr}^L(r, s) &= H_{uun}^L(r, s) - \frac{1}{r}, \\
H_{\omega r n}^{(00)L}(r, s) &= \frac{1}{r} + H_{\omega r n r}^{(00)L}(r, s), & H_{\omega r n r}^{(00)L}(r, s) &= H_{\omega r n}^{(00)L}(r, s) - \frac{1}{r}, \\
H_{\omega \theta \theta n}^{(02)L}(r, s) &= \frac{1}{r} + H_{\omega \theta \theta n r}^{(02)L}(r, s), & H_{\omega \theta \theta n r}^{(02)L}(r, s) &= H_{\omega \theta \theta n}^{(02)L}(r, s) - \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Оригиналы всех функций в (3.4.18), (3.4.27), (3.4.29) и (3.5.9) находятся с помощью вычетов по формулам, аналогичным (2.5.12) и (2.5.14). При этом по виду знаменателя Z разбиваем их на следующие группы:

$$H_{uunr}^L(r, s), Z = r^{n+1} R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s). \tag{3.5.9}$$

$$H_{\zeta n}^{(0k)L}(r, s) (\zeta = \omega r r, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta; k = 0, 2), Z = r^{n+2} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s). \tag{3.5.10}$$

$$H_{u\omega r n}^{(1k)L}(r, s), H_{u\omega \theta n}^{(1k)L}(r, s) (k = 1, 2), Z = r^{n+1} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s). \tag{3.5.11}$$

$$\begin{aligned}
H_{\omega r n}^{(1k)L}(r, s) (k = 0, 2), & H_{\omega \theta n}^{(1k)L}(r, s) (k = 0, 1, 2), \\
Z = \gamma_1 r^{n+2} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) & R_{n0}(\gamma_1 s).
\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

$$\begin{aligned}
H_{\zeta n}^{(1k)L}(r, s) (\zeta = \omega r r, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta; k = 0, 2), \\
Z = r^{n+2} s^2 P_n^2(\gamma_0 s, \gamma_2 s).
\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Для определения вида особых точек этих функций, прежде всего, с использованием (2.5.7) и (2.5.8) представляем многочлен $P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s)$ так:

$$P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) = s^2 Q_{na}(s) \tag{3.5.14}$$

где $Q_{na}(s)$ - имеющий простые нули s_{ja} многочлен степени $2n$.

Кроме того, замечаем, что, как указано в [23], многочлен $R_{n0}(s)$ имеет « n » простых нулей.

В результате получаем, что функции (3.5.9) - (3.5.13) имеют следующие особые точки:

- (3.5.9) « n » полюсов первого порядка в нулях многочлена $R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s)$;
- (3.5.10) « $2n$ » полюсов первого порядка в нулях многочлена $Q_{na}(s)$ и полюс второго порядка $s = 0$;

- (3.5.11) « n » полюсов первого порядка в нулях многочлена $R_{n0}(\gamma_1 s)$, « $2n$ » полюсов первого порядка в нулях многочлена $Q_{na}(s)$ и полюс второго порядка $s = 0$;

- (3.5.12) « n » полюсов первого порядка в нулях многочлена $R_{n0}(\gamma_1 s)$, « $2n$ » полюсов первого порядка в нулях многочлена $Q_{na}(s)$ и полюс четвертого порядка $s = 0$;

- (3.5.13) « $2n$ » полюсов второго порядка в нулях многочлена $Q_{na}(s)$ и полюс шестого порядка $s = 0$.

Окончательно оригиналы изображений функций влияния в (3.4.18) и (3.4.26) с учетом (3.5.8) и свойств преобразования Лапласа принимают следующий вид:

$$G_{uun}(r, \tau) = \frac{1}{r} \delta[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] + G_{uunr}(r, \tau), \quad (3.5.15)$$

$$G_{uunr}(r, \tau) = H_{uunr}[r, \tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] H[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)].$$

$$G_{\zeta n}(r, \tau) = \alpha \sum_{k=0,2} H_{\zeta n}^{(1k)}[r, \tau - \gamma_k(r-1)] H[\tau - \gamma_k(r-1)] \quad (3.5.16)$$

($\zeta = \omega ru, \omega \theta u, u \omega r, u \omega \theta$).

А оригиналы $G_{\zeta n}(r, \tau)$ функций в (3.4.15) с учетом (3.4.26) и (3.5.8) записываются так:

$$G_{\zeta n}(r, \tau) = G_{\zeta n}^{(0)}(r, \tau) + 2\alpha \cup G_{\zeta n}^{(1)}(r, \tau), \quad (3.5.17)$$

($\zeta = \omega rr, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta$).

Здесь функции $G_{\zeta n}^{(l)}(r, \tau)$ при $\zeta = \omega r \theta, \omega \theta r; l = 0, 1$, а также при $\zeta = \omega rr, \omega \theta \theta, l = 1$ имеют вид

$$G_{\zeta n}^{(l)}(r, \tau) = \sum_{k=0,2} H_{\zeta n}^{(lk)}[r, \tau - \gamma_k(r-1)] H[\tau - \gamma_k(r-1)], \quad (3.5.18)$$

а остальные из них определяются так:

$$\begin{aligned}
G_{\omega rnr}^{(0)}(r, \tau) &= \frac{1}{r} \delta[\tau - \gamma_0(r-1)] + G_{\omega rnr}^{(0)}(r, \tau), \\
G_{\omega \theta \theta n}^{(0)}(r, \tau) &= \frac{1}{r} \delta[\tau - \gamma_2(r-1)] + G_{\omega \theta \theta n}^{(0)}(r, \tau), \\
G_{\omega rnr}^{(0)}(r, \tau) &= H_{\omega rnr}^{(00)}[r, \tau - \gamma_0(r-1)]H[r, \tau - \gamma_0(r-1)] + \\
&\quad + H_{\omega rnr}^{(02)}[r, \tau - \gamma_2(r-1)]H[r, \tau - \gamma_2(r-1)], \\
G_{\omega \theta \theta n}^{(0)}(r, \tau) &= H_{\omega \theta \theta n}^{(00)}[r, \tau - \gamma_0(r-1)]H[r, \tau - \gamma_0(r-1)] + \\
&\quad + H_{\omega \theta \theta n}^{(02)}[r, \tau - \gamma_2(r-1)]H[r, \tau - \gamma_2(r-1)].
\end{aligned} \tag{3.5.19}$$

Окончательно из (3.3.16) с учетом (3.5.15), (3.5.17) и (3.5.19) получаем

$$\begin{aligned}
\omega_m(r, \tau) &= \frac{1}{r} \omega_{r0n}[\tau - \gamma_0(r-1)] + G_{\omega rnr}(r, \tau) * \omega_{r0n}(\tau) + \\
&\quad + G_{\omega r\theta n}(r, \tau) * \omega_{\theta 0n}(\tau) + G_{\omega rnr}(r, \tau) * u_{0n}(\tau), \\
\omega_{\theta n}(r, \tau) &= \frac{1}{r} \omega_{\theta 0n}[\tau - \gamma_2(r-1)] + G_{\omega \theta m}(r, \tau) * \omega_{r0n}(\tau) + \\
&\quad + G_{\omega \theta \theta n}(r, \tau) * \omega_{\theta 0n}(\tau) + G_{\omega \theta m}(r, \tau) * u_{0n}(\tau), \\
u_n(r, \tau) &= \frac{1}{r} u_{0n}[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] + G_{u\omega m}(r, \tau) * \omega_{r0n}(\tau) + \\
&\quad + G_{u\omega \theta n}(r, \tau) * \omega_{\theta 0n}(\tau) + G_{u\omega n}(r, \tau) * u_{0n}(\tau),
\end{aligned} \tag{3.5.20}$$

где

$$G_{\zeta nr}(r, \tau) = G_{\zeta nr}^{(0)}(r, \tau) + 2\alpha \cup G_{\zeta n}^{(1)}(r, \tau) (\zeta = \omega r, \omega \theta). \tag{3.5.21}$$

3.6. Примеры расчетов функций влияния

Рассматриваем ту же среду, что и в параграфе 2.6. При этом дополнительно с использованием [26,20] сначала определяем скорость c_4 в (1.2.19):

$$c_4 = c_3 \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\rho c_2^2}} = 2,485 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Следовательно, необходимый для расчетов дополнительный безразмерный параметр в (1.4.11) такой: $\gamma_0 = 0,918$

На рис.3.6.1-3.6.20 представлены графики изменения по радиусу и времени соответственно функций влияния $G_{\omega rnr}(r, \tau)$ при $n = 0,1$, а также $G_{\omega \theta \theta n}(r, \tau)$, $G_{\omega r\theta n}(r, \tau)$, $G_{\omega \theta m}(r, \tau)$, $G_{\omega rnr}(r, \tau)$, $G_{\omega \theta m}(r, \tau)$, $G_{u\omega m}(r, \tau)$, $G_{u\omega \theta n}(r, \tau)$ и $G_{u\omega n}(r, \tau)$ при $n = 1$.

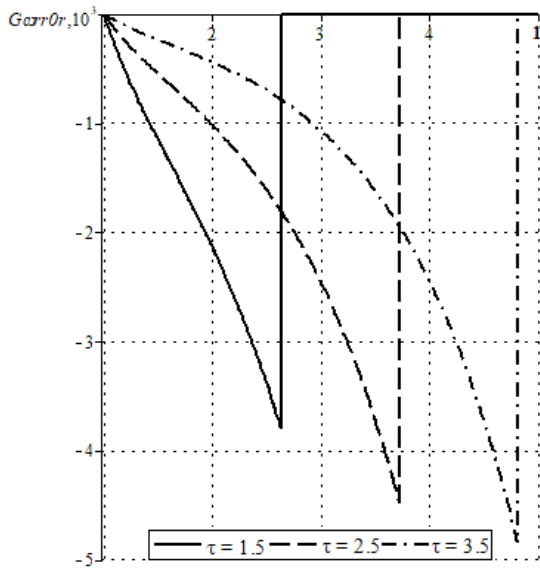


Рис 3.6.1

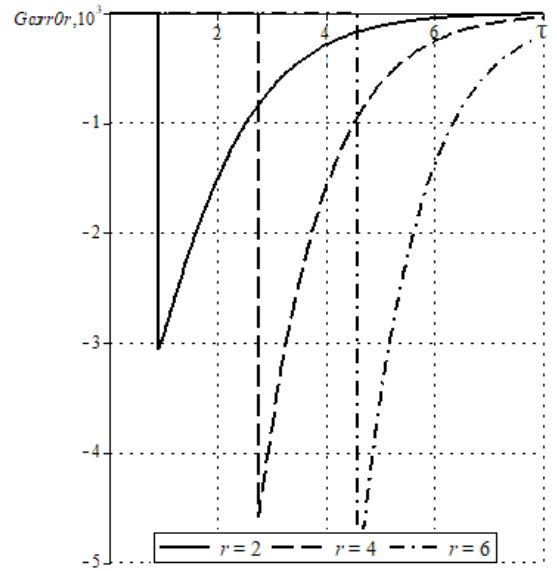


Рис 3.6.2

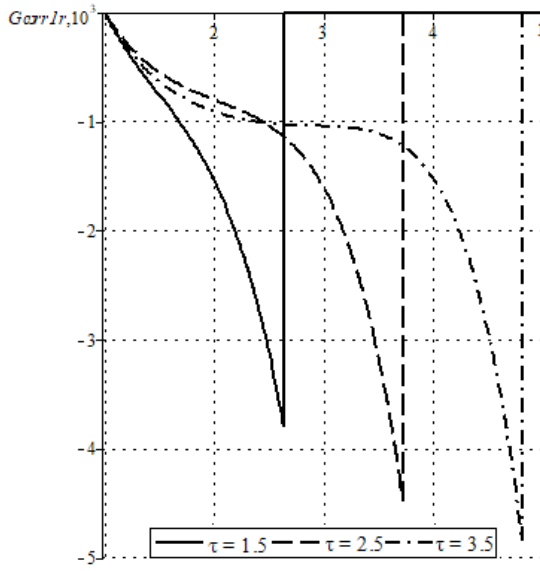


Рис 3.6.3

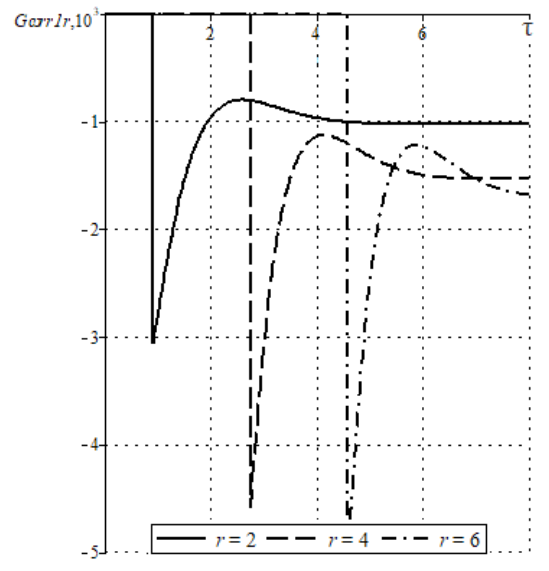


Рис 3.6.4

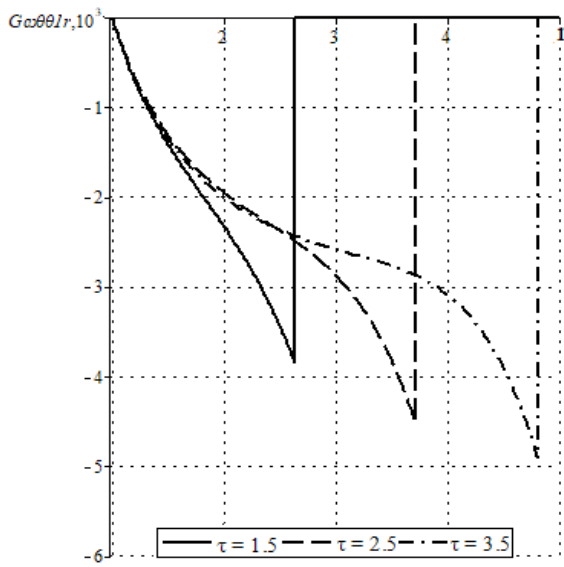


Рис 3.6.5

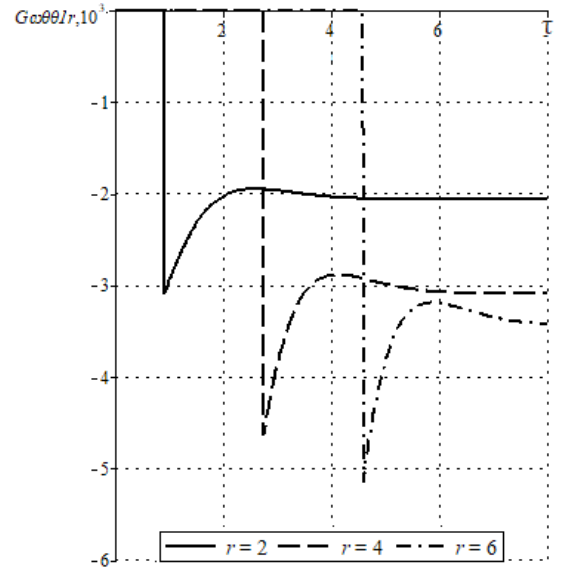


Рис 3.6.6

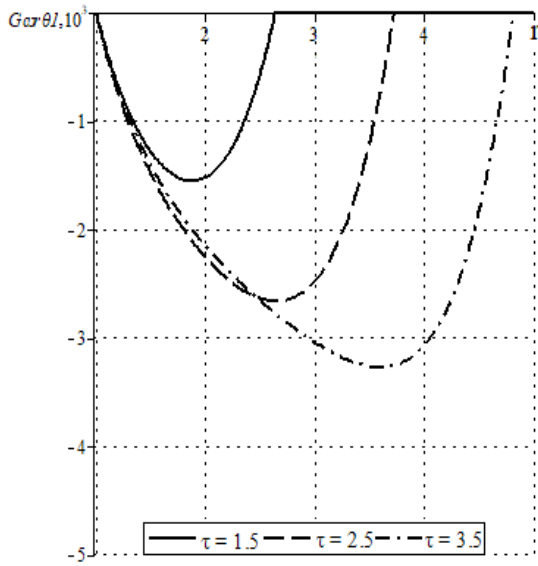


Рис 3.6.7

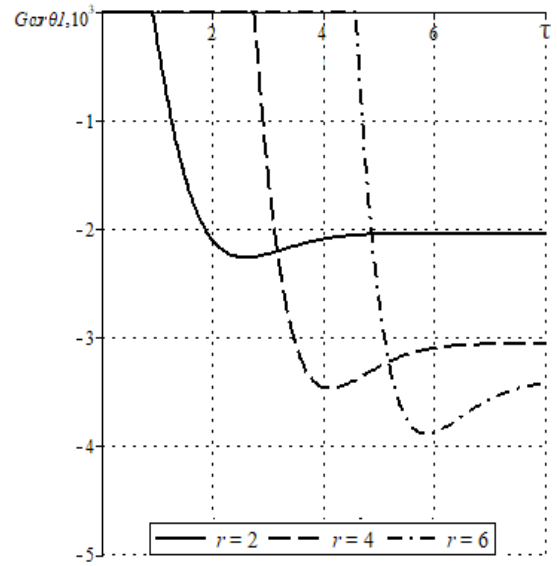


Рис 3.6.8

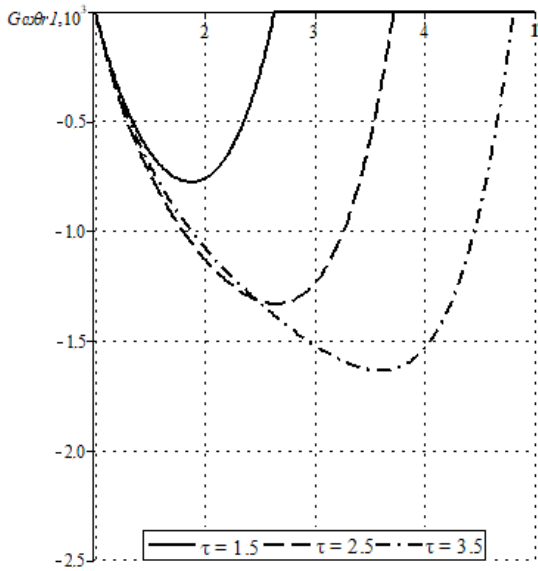


Рис 3.6.9

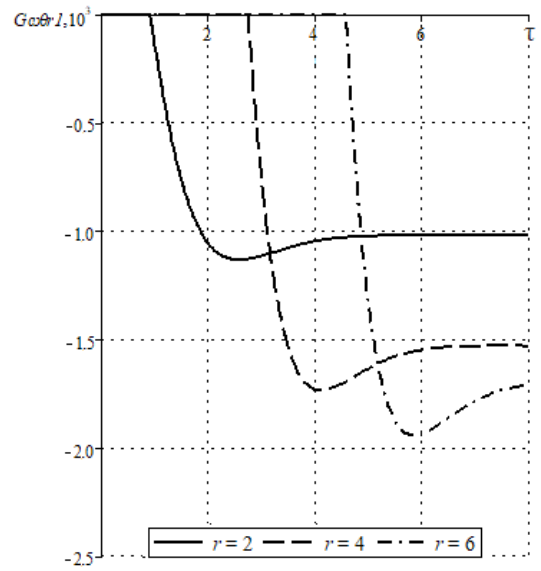


Рис 3.6.10

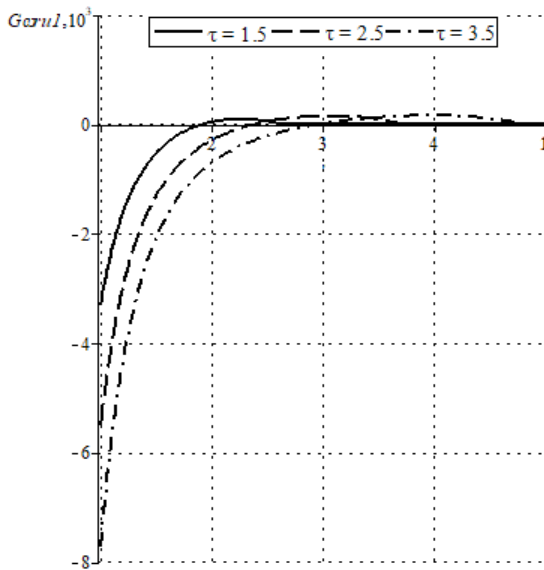


Рис 3.6.11

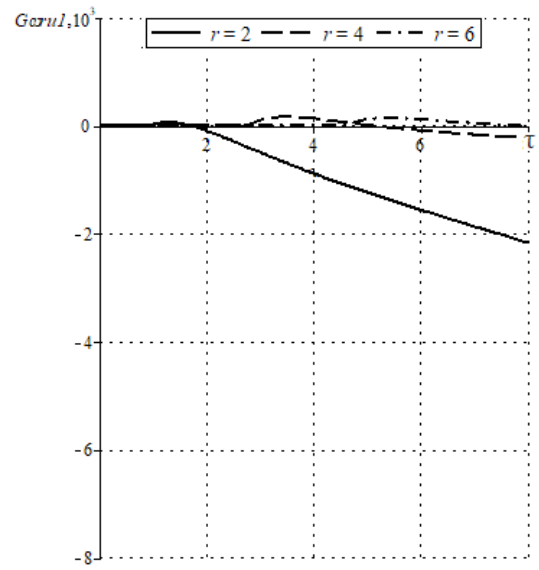


Рис 3.6.12

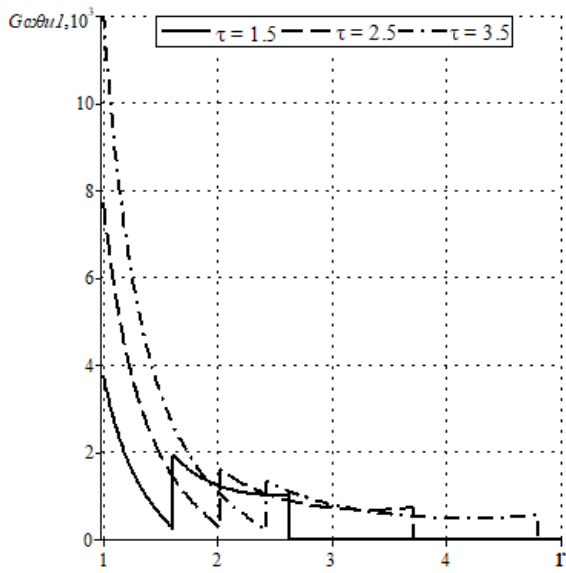


Рис 3.6.13

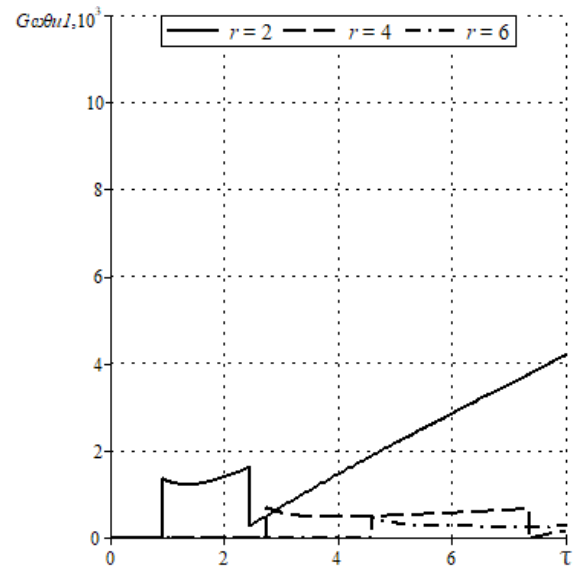


Рис 3.6.14

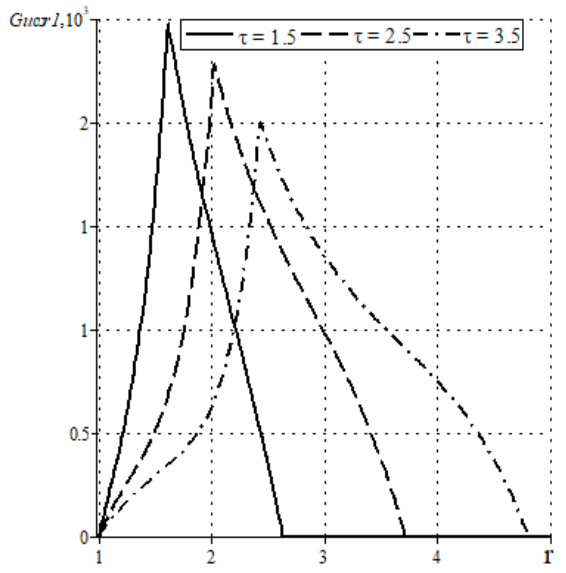


Рис 3.6.15

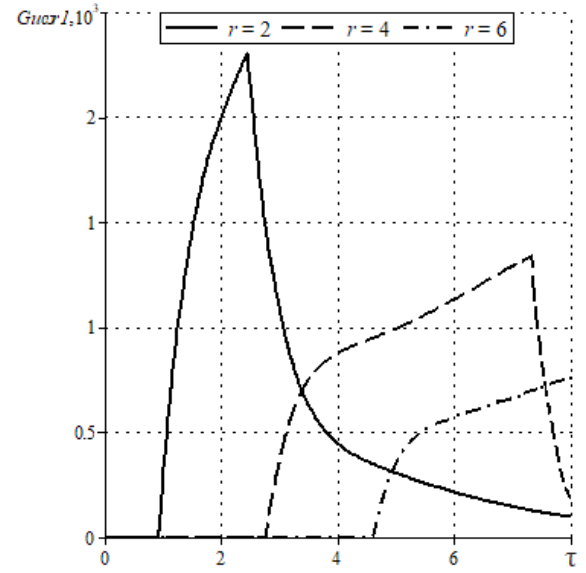


Рис 3.6.16

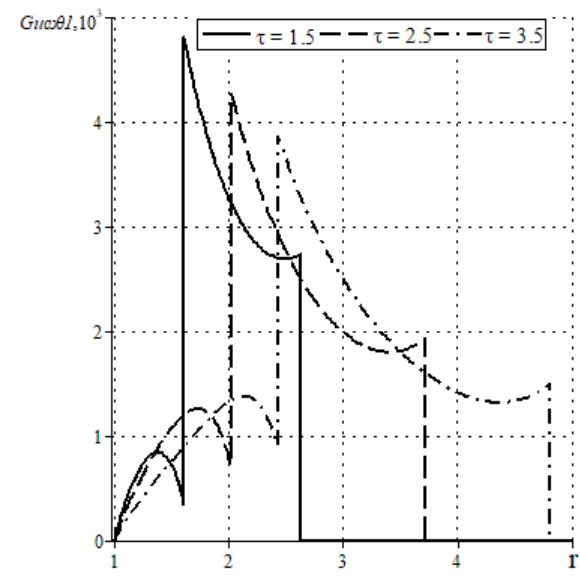


Рис 3.6.17

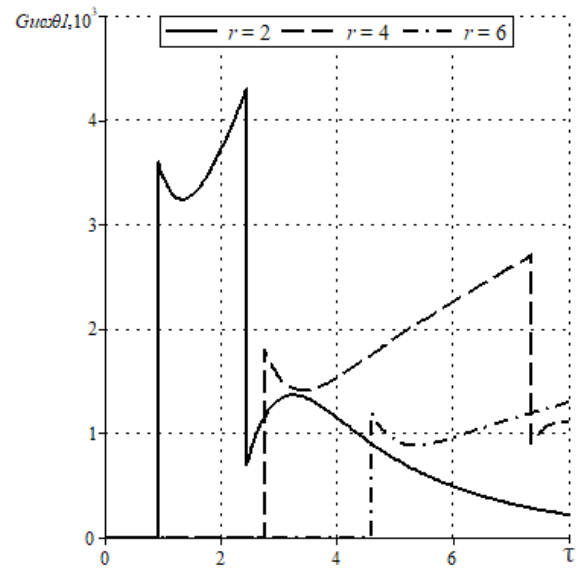


Рис 3.6.18

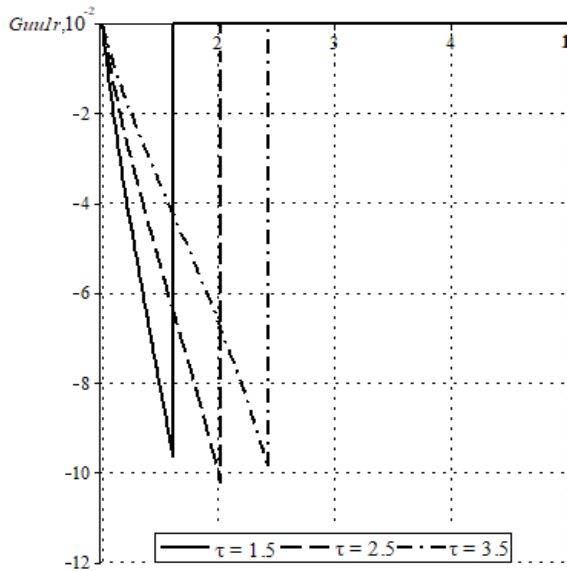


Рис 3.6.19

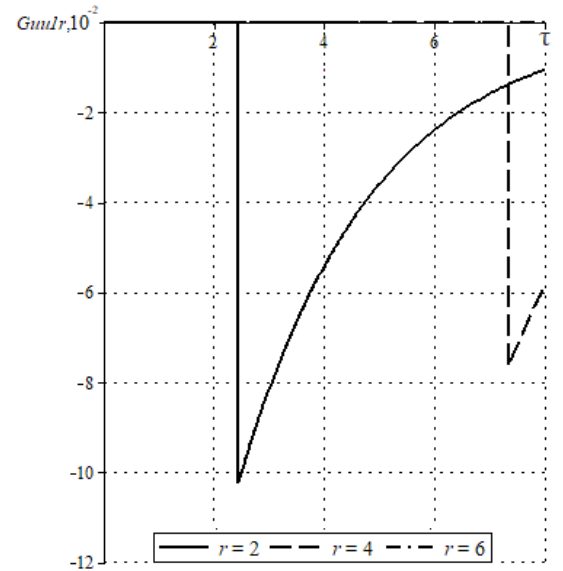


Рис 3.6.20

3.7. Примеры расчетов при кинематических возмущениях

Применим теперь полученные выше результаты к конкретным граничным условиям для среды, указанной в предыдущем разделе. Сначала рассмотрим три варианта условий, соответствующих вращению вокруг оси Oz по закону $\Omega(\tau) = \tau_+$ жестко сцепленного с полостью единичного радиуса абсолютно твердого шара. А именно, в соответствии с (3.3.2) и (3.3.3) положим, что правые части граничных условий имеют соответственно следующие формы:

$$u|_{r=1} = \tau_+ \sin \theta, \quad \omega_r|_{r=1} = 0, \quad \omega_\theta|_{r=1} = 0, \quad (3.7.1)$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad \omega_r|_{r=1} = \tau_+ \cos \theta, \quad \omega_\theta|_{r=1} = 0, \quad (3.7.2)$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad \omega_r|_{r=1} = 0, \quad \omega_\theta|_{r=1} = -\tau_+ \sin \theta. \quad (3.7.3)$$

При этом, очевидно, в рядах (3.1.1) ненулевыми являются только члены с индексами $n = 1$:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \tau) &= -u_1(r, \tau) \sin \theta, \quad \omega_r(r, \theta, \tau) = \omega_{r1}(r, \tau) \cos \theta, \\ \omega_\theta(r, \theta, \tau) &= -\omega_{\theta 1}(r, \tau) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

В случае граничных условий (3.7.1) коэффициенты этих равенств в соответствии (3.5.22) определяются так:

$$\begin{aligned} \omega_{r1}(r, \tau) &= G_{\omega_{r1}}(r, \tau) * \tau_+, \quad \omega_{\theta 1}(r, \tau) = G_{\omega_{\theta 1}}(r, \tau) * \tau_+, \\ u_1(r, \tau) &= \frac{1}{r} \left[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1) \right]_+ + G_{u1r}(r, \tau) * \tau_+. \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

Их графики изображены на рис. 3.7.1 – 3.7.6.

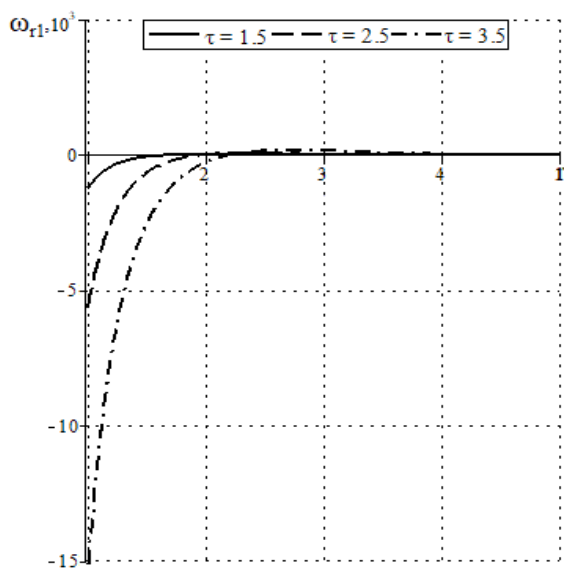


Рис 3.7.1

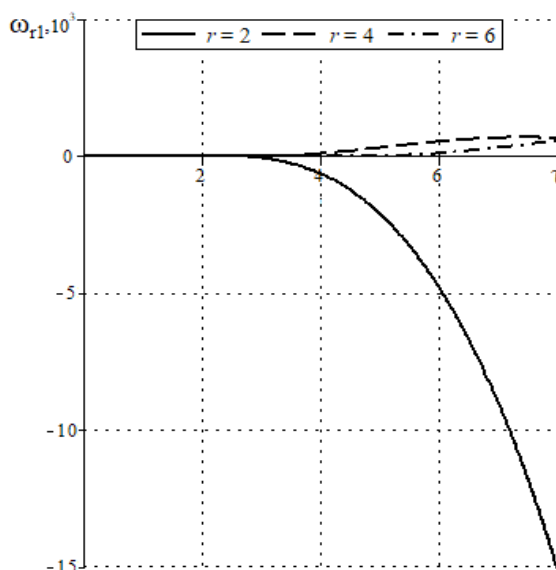


Рис 3.7.2

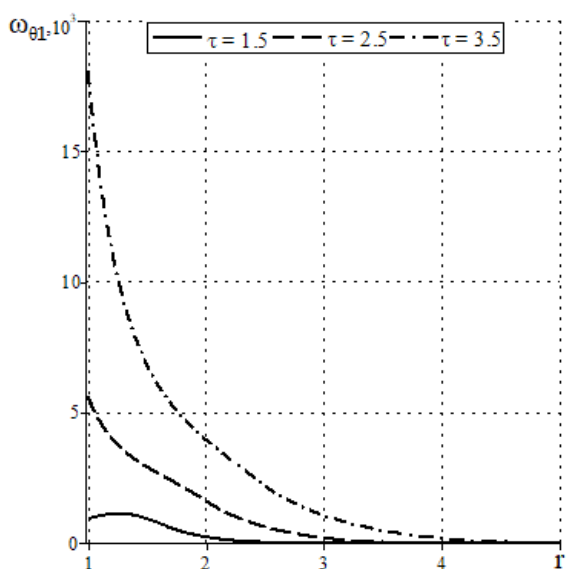


Рис 3.7.3

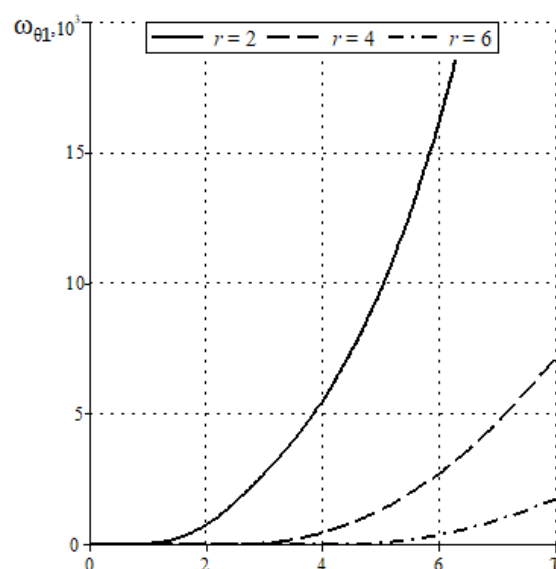


Рис 3.7.4

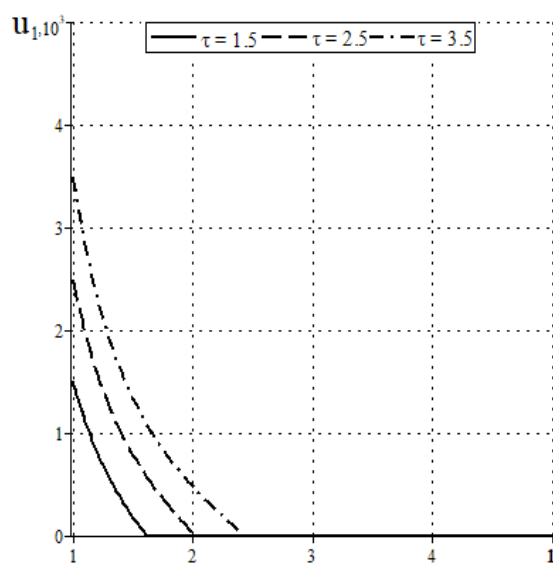


Рис 3.7.5

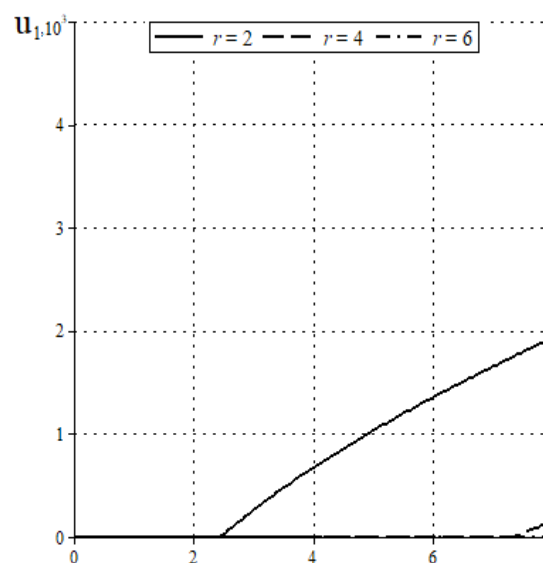


Рис 3.7.6

В случае граничных условий (3.7.2) аналогично (3.7.5) получаем равенства:

$$\begin{aligned} \omega_{r1}(r, \tau) &= \frac{1}{r} [\tau - \gamma_0(r-1)]_+ + G_{\omega r1r}(r, \tau) * \tau_+, \\ \omega_{\theta 1}(r, \tau) &= G_{\omega \theta r1}(r, \tau) * \tau_+, \quad u_1(r, \tau) = G_{u \omega r1}(r, \tau) * \tau_+. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Графики этих функций представлены на рис. 3.7.7 - 3.7.12.

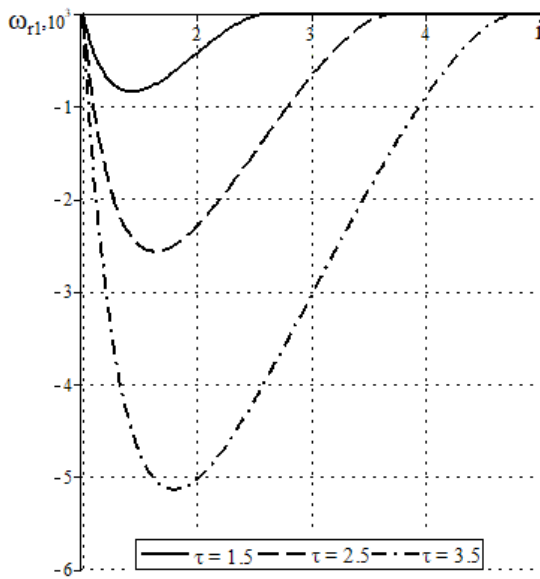


Рис 3.7.7

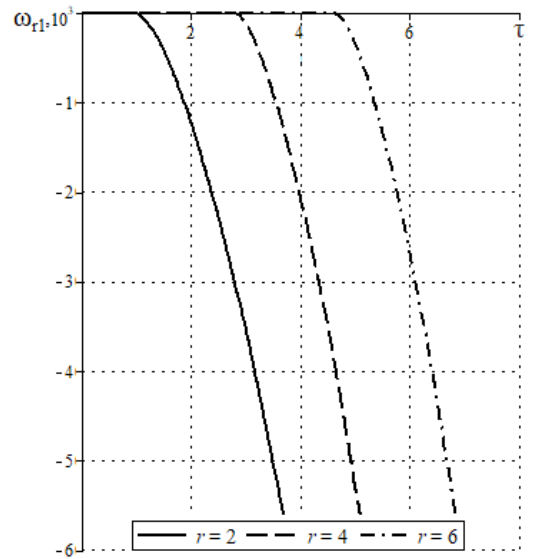


Рис 3.7.8

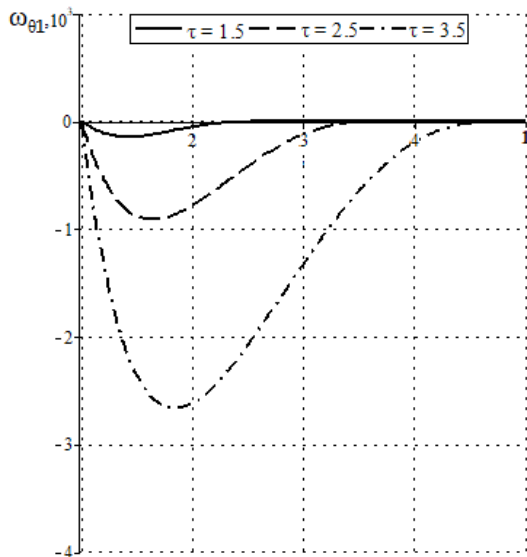


Рис 3.7.9

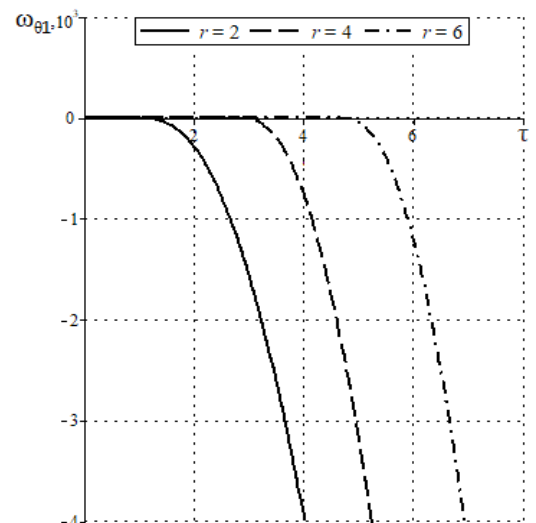


Рис 3.7.10

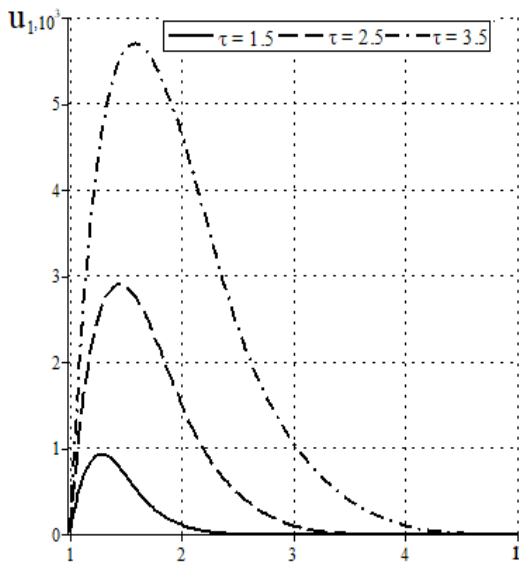


Рис 3.7.11

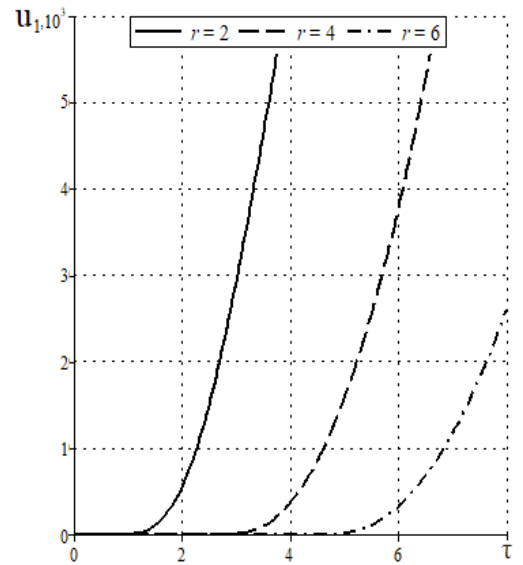


Рис 3.7.12

Если же имеют место условия (3.7.3), то приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \omega_{r1}(r, \tau) &= -G_{\omega r \theta 1}(r, \tau) * \tau_+, \quad u_1(r, \tau) = -G_{u \omega \theta 1}(r, \tau) * \tau_+, \\ \omega_{\theta 1}(r, \tau) &= -\frac{1}{r} [\tau - \gamma_2(r-1)]_+ - G_{\omega \theta \theta 1 r}(r, \tau) * \tau_+. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Графики этих функций представлены на рис. 3.7.13 – 3.7.18.

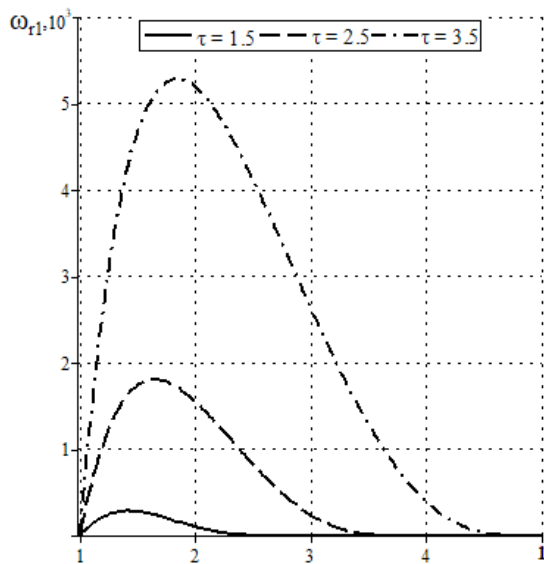


Рис 3.7.13

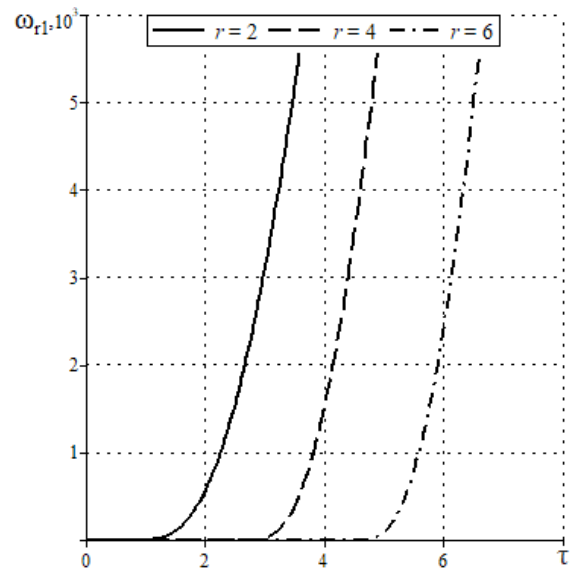


Рис 3.7.14

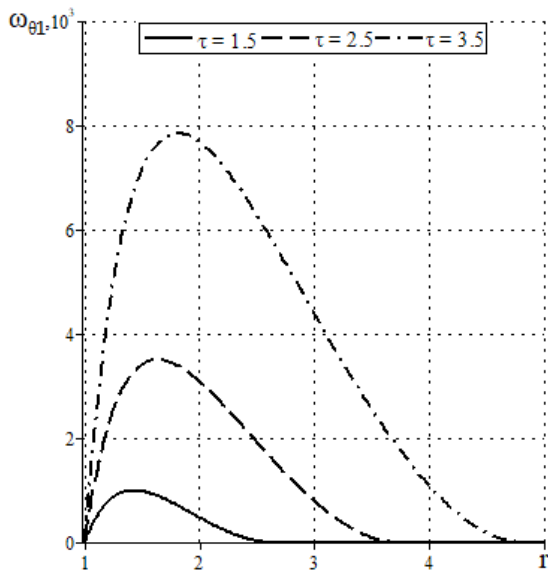


Рис 3.7.15

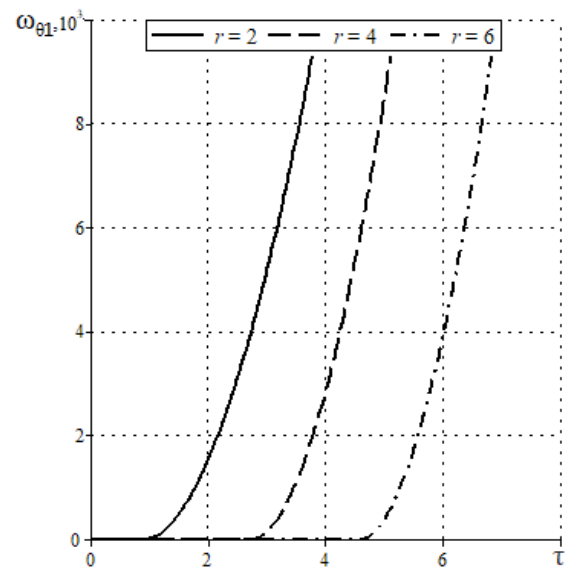


Рис 3.7.16

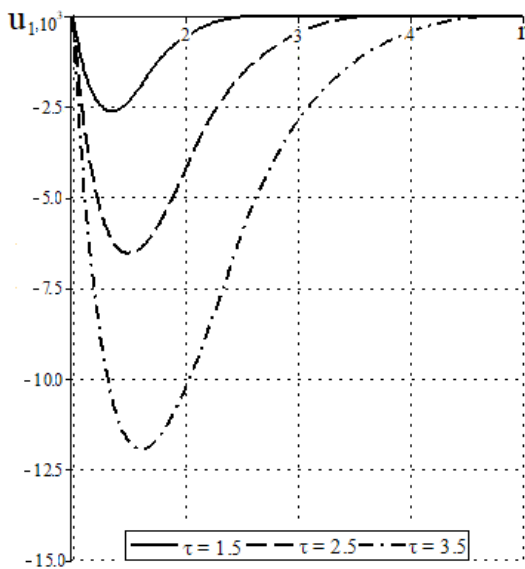


Рис 3.7.17

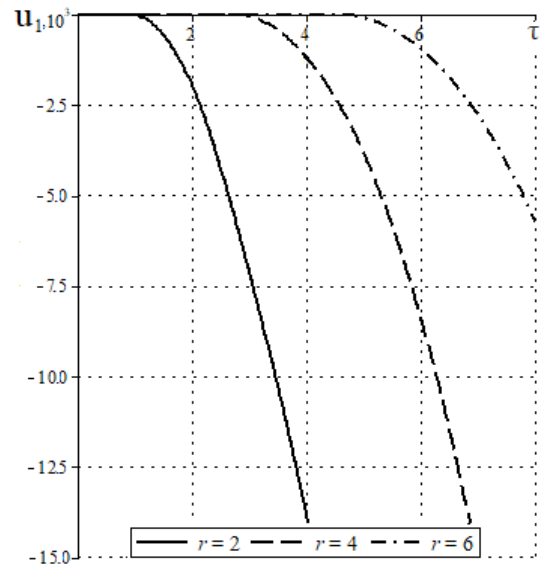


Рис 3.7.18

Суммируя теперь результаты для граничных условий (3.7.1) - (3.7.3) получаем решение задачи о вращении вокруг оси Oz по закону $\Omega(\tau) = \tau_+$ жестко сцепленного с полостью единичного радиуса абсолютно твердого шара. Соответствующие графики представлены на рис. 3.7.19 – 3.7.24.

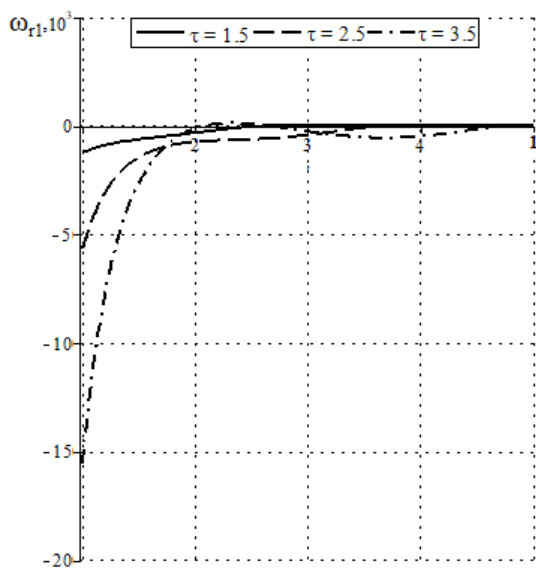


Рис 3.7.19

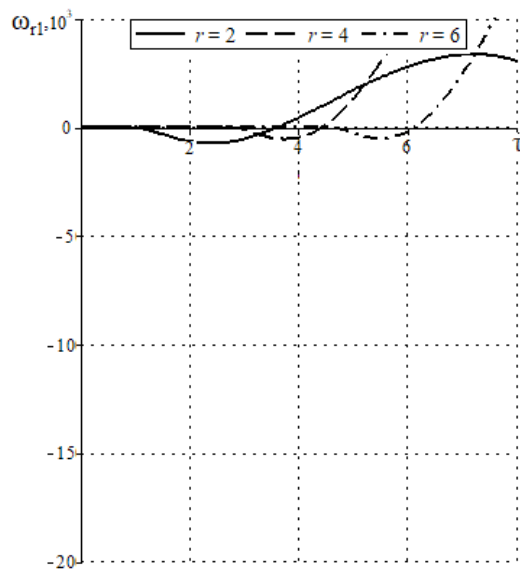


Рис 3.7.20

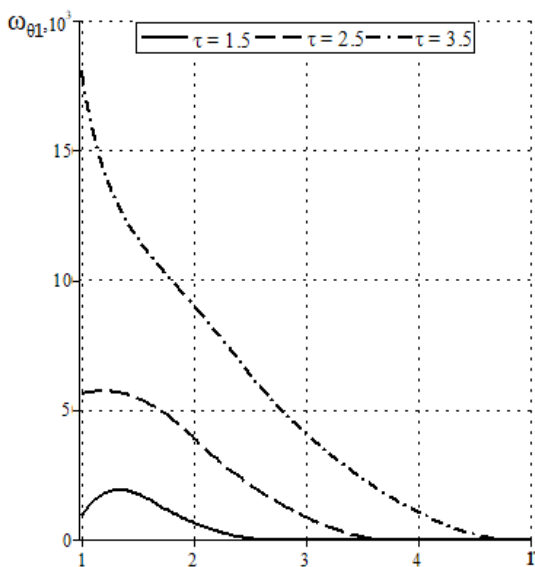


Рис 3.7.21

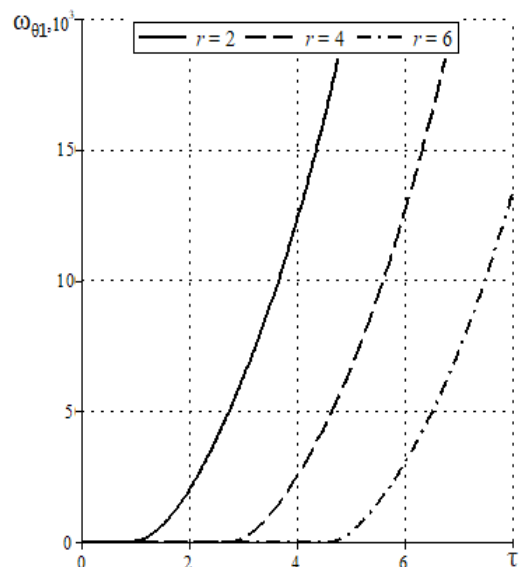


Рис 3.7.22

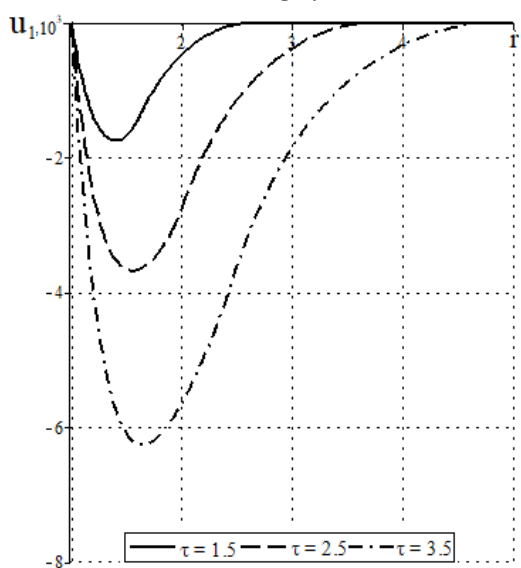


Рис 3.7.23

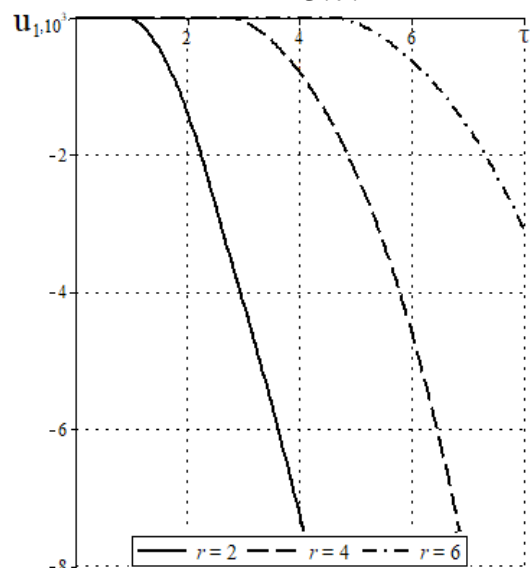


Рис 3.7.24

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы следующие.

1. Получено решение нестационарных задач о распространении осесимметричных возмущений от сферической полости в пространстве, занятом средой Коссера.
2. Проведено подробное исследование задач о распространении нестационарных антисимметричных возмущений от сферической полости в среде Коссера.
3. Показано, что в линейном приближении по малому параметру имеются волновых фронта, соответствующие волне растяжения-сжатия и модифицированной с учетом свободного вращения волне сдвига.
4. Обоснован и реализован метод решения систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными.
5. Построена оценка учета моментных свойств среды при осесимметричных возмущениях.

Приложение

П.1. Свойства многочленов Лежандра и Гегенбауэра

Здесь приводятся используемые в работе свойства многочленов Лежандра и Гегенбауэра [1,23,24].

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right] &= \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta} \right) P_n(\cos \theta) = \\ &= -n(n+1)P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{П.1.1})$$

$$C_{n-1}^{3/2}(x) = P'_n(x). \quad (\text{П.1.2})$$

Отсюда

$$\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta P'_n(\cos \theta) = -\sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \quad (\text{П.1.3})$$

Кроме того, с использованием (П.1.1) и (П.1.3), получаем равенство

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left\{ \sin \theta \left[\sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] \right\} = n(n+1)P_n(\cos \theta). \quad (\text{П.1.4})$$

Отсюда вытекает следующее соотношение:

$$\frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] = n(n+1)P_n(\cos \theta) - \cos \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \quad (\text{П.1.5})$$

Далее с помощью (П.1.3) и (П.1.5) приходим к такому результату:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\theta} \left\{ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] \right\} = \\ &= \frac{d}{d\theta} \left\{ \sin \theta \left[n(n+1)P_n(\cos \theta) - \cos \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] \right\} = \\ &= n(n+1) \left[\cos \theta P_n(\cos \theta) + \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right] + \\ &+ \sin^2 \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) - \cos \theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] = \\ &= n(n+1) \left[\cos \theta P_n(\cos \theta) - \sin^2 \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] + \\ &+ \sin^2 \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) - \cos \theta \left[n(n+1)P_n(\cos \theta) - \cos \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] = \\ &= \left[1 - n(n+1)\sin^2 \theta \right] C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{П.1.6})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left\{ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] \right\} = \\
& = \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta} \right) \left[\sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \right] = \\
& = \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} - n(n+1) \right] \sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta).
\end{aligned} \tag{П.1.7}$$

С использованием (П.1.1) - (П.1.7) для оператора Лапласа и оператора D в (1.3.4) относительно рядов (2.1.1) получаем

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n \varphi_n P_n(\cos \theta); \tag{П.1.8}$$

$$D(\psi) = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n \psi_n C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \tag{П.1.9}$$

где

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2}. \tag{П.1.10}$$

П.2. Собственные функции оператора Δ_n

В соответствии с рассматриваемыми задачами положим, что они определяются как решения уравнения

$$\Delta_n R_{kn}(r) = \lambda^2 R_{kn}(r), \operatorname{Re} \lambda > 0, (k = 1, 2). \tag{П.2.1}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda = 1$

$$\Delta_n Z_{kn}(z) = Z_{kn}(z) (k = 1, 2). \tag{П.2.2}$$

Фундаментальную систему решений этого уравнения образуют следующие функции [1,24]:

$$Z_{1n}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} K_{n+1/2}(z), Z_{2n}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} I_{n+1/2}(z). \tag{П.2.3}$$

Здесь $K_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ - модифицированные функции Бесселя. Из их свойств вытекают следующие равенства для производных $Z'_{1n}(z)$, $Z'_{2n}(z)$ и вронскиана $W(Z_{1n}, Z_{2n})$ [17]:

$$\begin{aligned} X_{1n}(z) = Z'_{1n}(z) &= -\frac{1}{2z^{3/2}} K_{n+1/2}(z) + \frac{1}{z^{3/2}} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) K_{n+1/2}(z) - z K_{n+3/2}(z) \right] = \\ &= \frac{1}{z^{3/2}} \left[n K_{n+1/2}(z) - z K_{n+3/2}(z) \right] = \frac{1}{z} \left[n Z_{1n}(z) - z Z_{1,n+1}(z) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

$$\begin{aligned} X_{2n}(z) = Z'_{2n}(z) &= -\frac{1}{2z^{3/2}} I_{n+1/2}(z) + \frac{1}{z^{3/2}} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) I_{n+1/2}(z) + z I_{n+3/2}(z) \right] = \\ &= \frac{1}{z^{3/2}} \left[n I_{n+1/2}(z) + z I_{n+3/2}(z) \right] = \frac{1}{z} \left[n Z_{2n}(z) + z Z_{2,n+1}(z) \right]; \end{aligned}$$

$$W(Z_{1n}, Z_{2n}) = \begin{vmatrix} Z_{1n}(z) & Z_{2n}(z) \\ X_{1n}(z) & X_{2n}(z) \end{vmatrix} = \frac{1}{z^2} \begin{vmatrix} K_{n+1/2}(z) & I_{n+1/2}(z) \\ -z K_{n+3/2}(z) & z I_{n+3/2}(z) \end{vmatrix} = \frac{1}{z^2}. \quad (\text{П.2.5})$$

Для построения фундаментальной системы решений уравнения (П.2.1) выполняем в замену переменной $\xi = \lambda r$ и приходим к такому результату:

$$F_{kn}(r) = Z_{kn}(\lambda r) \quad (k = 1, 2). \quad (\text{П.2.6})$$

Кроме функций в (П.2.4) дополнительно аналогично [17] вводим необходимые в основном материале функции ($l = 1, 2$):

$$Y_{ln}(z) = -\frac{1}{z} Z_{ln}(z), \quad Y_{l+2,n}(z) = -\frac{1}{z} \left[z Z_{ln}(z) \right]' = Y_{ln}(z) - X_{ln}(z); \quad (\text{П.2.7})$$

$$\begin{aligned} U_{ln}(z) &= -\frac{1}{z} X_{ln}(z), \quad U_{l+2,n}(z) = -z^{-1} \left[z X_{ln}(z) \right]' = U_{ln}(z) - X'_{ln}(z) = \\ &= U_{ln}(z) - b_n(z) Z_{ln}(z) - 2U_{ln}(z) = -b_n(z) Z_{ln}(z) - U_{ln}(z). \end{aligned} \quad (\text{П.2.8})$$

В последних равенствах использованы следующие из (П.2.2) соотношения:

$$\begin{aligned} X'_{ln}(z) = Z''_{ln}(z) &= \Delta_n Z_{ln}(z) - \frac{2}{z} X_{ln}(z) + \frac{n(n+1)}{z^2} Z_{ln}(z) = \\ &= b_n(z) Z_{ln}(z) - \frac{2}{z} X_{ln}(z) = b_n(z) Z_{ln}(z) + 2U_{ln}(z), \quad b_n(z) = 1 + \frac{n(n+1)}{z^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.9})$$

Кроме того, из (П.2.4), (П.2.7) и (П.2.8) вытекают следующие соотношения между введенными функциями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} [zY_{ln}(z)]' &= -\frac{1}{z} Z'_{ln}(z) = -\frac{1}{z} X_{ln}(z) = U_{ln}(z), \\ Y'_{ln}(z) &= \frac{1}{z} [zY_{ln}(z)]' - \frac{1}{z} Y_{ln}(z) = U_{ln}(z) - \frac{1}{z} Y_{ln}(z) = -\frac{X_{ln}(z) + Y_{ln}(z)}{z}, \quad (\text{П.2.10}) \\ Y'_{l+2,n}(z) &= Y'_{ln}(z) - X'_{ln}(z) = U_{ln}(z) - \frac{1}{z} Y_{ln}(z) - X'_{ln}(z) = U_{l+2,n}(z) - \frac{1}{z} Y_{ln}(z). \end{aligned}$$

Введенные здесь функции являются элементарными, поскольку имеют место равенства [1,23,24]:

$$\begin{aligned} K_{n+1/2}(z) &= \frac{1}{z^{n+1/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n0}(z) e^{-z}, \\ I_{n+1/2}(z) &= \frac{(-1)^n}{z^{n+1/2} \sqrt{2\pi}} [R_{n0}(-z) e^z - R_{n0}(z) e^{-z}], \end{aligned} \quad (\text{П.2.11})$$

где

$$R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k (n-k)! k!}. \quad (\text{П.2.12})$$

Как показано в [17] отсюда вытекают следующие соотношения:

$$Z_{1n}(z) = \frac{1}{z^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n0}(z) e^{-z}, \quad Z_{2n}(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n+1} \sqrt{2\pi}} \Lambda_{n0}(z), \quad (\text{П.2.13})$$

$$X_{1n}(z) = -\frac{1}{z^{n+2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n1}(z) e^{-z}, \quad X_{2n}(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+2} \sqrt{2\pi}} \Lambda_{n1}(z), \quad (\text{П.2.14})$$

$$Y_{1n}(z) = -\frac{1}{z^{n+2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n0}(z) e^{-z}, \quad Y_{2n}(z) = -\frac{(-1)^n}{z^{n+2} \sqrt{2\pi}} \Lambda_{n0}(z), \quad (\text{П.2.15})$$

$$Y_{3n}(z) = \frac{1}{z^{n+2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n3}(z) e^{-z}, \quad Y_{4n}(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n+2} \sqrt{2\pi}} \Lambda_{n3}(z).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Lambda_{nk}(z) &= R_{nk}(-z)e^z - R_{nk}(z)e^{-z} \quad (k=0,1,3), \\ R_{n3}(z) &= R_{n1}(z) - R_{n0}(z), \quad R_{n1}(z) = R_{n+1,0}(z) - nR_{n0}(z).\end{aligned}\tag{П.2.16}$$

Отсюда уже следуют соответствующие равенства для функций $U_{ln}(z)$:

$$\begin{aligned}U_{1n}(z) &= \frac{1}{z^{n+3}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n1}(z) e^{-z}, \quad U_{2n}(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n+3} \sqrt{2\pi}} \Lambda_{n1}(z), \\ U_{3n}(z) &= -\frac{1}{z^{n+3}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n4}(z) e^{-z}, \\ U_{4n}(z) &= \frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+3} \sqrt{2\pi}} \left\{ [z^2 + n(n+1)] \Lambda_{n0}(z) + \Lambda_{n1}(z) \right\},\end{aligned}\tag{П.2.17}$$

где

$$R_{n4}(z) = [z^2 + n(n+1)] R_{n0}(z) + R_{n1}(z) = (z^2 + n^2) R_{n0}(z) + R_{n+1,0}(z).\tag{П.2.18}$$

Кроме того, построим аналогичные формулы для некоторых производных, а именно, из (П.2.9), (П.2.10) и (П.2.13) - (П.2.15) и (П.2.17) получаем

$$\begin{aligned}X'_{1n}(z) &= \frac{1}{z^{n+3}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n2}(z) e^{-z}, \quad Y'_{1n}(z) = \frac{1}{z^{n+3}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n5}(z) e^{-z}, \\ Y'_{3n}(z) &= -\frac{1}{z^{n+3}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n6}(z) e^{-z},\end{aligned}\tag{П.2.19}$$

где

$$\begin{aligned}R_{n2}(z) &= [z^2 + n(n+1)] R_{n0}(z) + 2R_{n1}(z) = R_{n4}(z) + R_{n1}(z), \\ R_{n5}(z) &= R_{n1}(z) + R_{n0}(z), \\ R_{n6}(z) &= R_{n4}(z) - R_{n0}(z) = (z^2 + n^2) R_{n0}(z) + R_{n1}(z).\end{aligned}\tag{П.2.20}$$

Рассмотрим также асимптотическое поведение некоторых из введенных здесь многочленов в (П.2.12) и (П.2.16).

При $z \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}R_{n0}(z) &\square A_{n0} z^n + A_{n1} z^{n-1} = z^n + \frac{(n+1)n}{2} z^{n-1}, \\ R_{n1}(z) &\square z^{n+1} + \frac{n^2 + n + 2}{2} z^n, \quad R_{n3}(z) \square z^{n+1} + \frac{(n+1)n}{2} z^n.\end{aligned}\tag{П.2.21}$$

А при $z \rightarrow 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 R_{n0}(z) &= A_m + A_{n,n-1}z + A_{n,n-2}z^2 = (2n-1)!! \left(1 + z + \frac{n-1}{2n-1}z^2 \right), \\
 R_{n1}(z) &= (2n-1)!! \left[(n+1)(1+z) + \frac{n^2}{2n-1}z^2 \right], \\
 R_{n3}(z) &= (2n-1)!! \left[n(1+z) + \frac{n^2-n+1}{2n-1}z^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{П.2.22}$$

Здесь использованы формулы:

$$A_m = (2n-1)!!, \quad A_{n,n-1} = A_m, \quad A_{n,n-2} = \frac{n-1}{2n-1}A_m,
 \tag{П.2.23}$$

П.3. Общее решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида

Рассмотриваем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{y}) &= \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T, \quad \mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n} \quad (x, a_{ij} \in \mathbb{R}), \\
 L(y) &= \sum_{k=0}^m b_{m-k}(x) y^{(k)}(x).
 \end{aligned}
 \tag{П.3.1}$$

При этом полагаем, что матрица \mathbf{A} имеет простой спектр с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ [16]. Они являются корнями характеристического уравнения

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0.
 \tag{П.3.2}$$

Тогда эта матрица приводится к диагональному виду:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n),
 \tag{П.3.3}$$

где \mathbf{Y}_k - ее собственные векторы, которые являются решением следующих систем линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E})\mathbf{Y}_k = \mathbf{0}.
 \tag{П.3.4}$$

Вводя новый столбец искомых функций

$$\mathbf{z} = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))^T = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}, \quad (\text{П.3.5})$$

приводим систему уравнений (П.3.1) к такому виду

$$L(\mathbf{z}) = \mathbf{Dz}. \quad (\text{П.3.6})$$

В силу (П.3.3) эта система эквивалентна совокупности независимых уравнений:

$$L(z_k) = \lambda_k z_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{П.3.7})$$

Полагаем, что последние уравнения имеют фундаментальные системы решений $\{F_{kl}(x)\}$ ($l = 1, 2, \dots, m$). Тогда их общие решения имеют вид [9]:

$$z_k = \sum_{l=1}^m C_{kl} F_{kl}(x), \quad (\text{П.3.8})$$

где C_{kl} - произвольные постоянные.

Отсюда с использованием (П.3.3) и (П.3.5) получаем общее решение системы уравнений (П.3.1):

$$\mathbf{y} = \mathbf{Tz} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n) \sum_{l=1}^m \begin{pmatrix} C_{kl} F_{kl}(x) \\ \dots \\ C_{kl} F_{kl}(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}_k \sum_{l=1}^m C_{kl} F_{kl}(x). \quad (\text{П.3.9})$$

П.4. Алгоритм вычисления вычетов в полюсе кратности больше единицы

При определении оригиналов в п. 2.3 возникает необходимость вычисления следующего вычета:

$$\operatorname{res}_{s=0} \frac{F(s)}{s^k} e^{s\tau}, \quad F(s) = \frac{f(s)}{Q(s)}, \quad Q(0) \neq 0, \quad k > 1. \quad (\text{П.4.1})$$

Он определяется так:

$$\operatorname{res}_{s=0} \frac{F(s)}{s^k} e^{s\tau} = \frac{1}{(k-1)!} \left[F(s) e^{s\tau} \right]_{s=0}^{(k-1)} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{F^{(k-1-l)}(0) \tau^l}{(k-1-l)! l!}. \quad (\text{П.4.2})$$

При этом для вычисления входящих сюда производных дроби $F(s)$ используем равенство:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(s) &= [F(s)Q(s)]^{(n)} = \sum_{j=0}^n C_n^j F^{(j)}(s) Q^{(n-j)}(s) = \\
&= F^{(n)}(s)Q(s) + \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j F^{(j)}(s) Q^{(n-j)}(s).
\end{aligned}
\tag{П.4.3}$$

Отсюда получаем рекуррентные соотношения

$$F^{(n)}(0) = \frac{1}{Q(0)} \left[f^{(n)}(0) - \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j F^{(j)}(0) Q^{(n-j)}(0) \right],
\tag{П.4.4}$$

позволяющие последовательно, начиная с $n = 1$ вычислять значения производных любого порядка. При этом начальным условием для них является равенство

$$F^{(0)}(0) = F(0) = \frac{f(0)}{Q(0)}.
\tag{П.4.5}$$

Аналогичный алгоритм использован в [23].

Список использованных источников

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. Наука, 1979.- 832 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки // Изв. АН РА. Механика. – 2002. – № 3. – С. 20–33.
3. *Амбарцумян С.А.* Температурная задача микрополярной пластинки // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2000. – № 3. – С. 17–20.
4. *Атоян А.А., Саркисян С.О.* Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости. - Изв. АН Армении. Мех. - 2004. - Т. 57. № 2. - С. 18 - 33.
5. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // ФТТ. – 1964. – Т. 6. – Вып. 9. – С. 2689-2699.
6. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. – 1960. – Т. 2. – Вып. 7. – С. 1399-1409.
7. *Баскаков В.А., Бестужева Н.П., Кончакова Н.А.* О нелинейных уравнениях динамики термоупругих микрополярных сред // Деп. в ВИНТИ. – 1998. 185–В98.
8. *Белоносов С.М.* Моментная теория упругости: (Статика). – Владивосток: Дальнаука, 1993. – 148 с.
9. *Берлин А.А.* Современные полимерные композиционные материалы (ПКМ) // Соросовский образовательный журнал, 1995, No1, с. 57-65.
10. *Бытев В.О., Слезко И.В.* Решение задач асимметричной упругости // Математическое и информационное моделирование: Сборник научных трудов. –Тюмень: Вектор Бук, 2008. – Вып. 10. – С. 27–32.

11. *Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В.* Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры, Издательство: Днепропетровск, Пороги, 2008.
12. *Бояндин В.С., Козак А.Л.* Моментная теория деформирования железобетона с трещинами. – Киев: Киев. инж.-строит. ин-т., 1989. – 50 с.
13. *Бровко Г.Л.* Об одной конструкционной модели среды Коссера // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – № 1. – С. 75–91.
14. *Ванин Г.А.* Моментная термодинамика неоднородных сред // Достижения и задачи машиноведения: К 70-летию академика Константина Васильевича Фролова. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 192–206.
15. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
16. *Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Ч.1. - М.: изд-во МАИ, 2002. – 460 с.
17. *Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Мусий Р.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругих телах . – М.: Физматлит, 2019. – 263с.
18. *Гайданский А.И., Громашев А.Г., Кривонос В.В., Куликов С.В., Тарасов Ю.М.* Тенденции применения полимерных композиционных материалов в производстве гражданской авиационной техники // Доклад на конференции «Перспективные материалы в авиационно-космической промышленности: новые технологии и возможности применения». 25 ноября 2010 г. Москва.
19. *Гарагаш И.А., Николаевский В.Н.* Механика Коссера для наук о земле // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т.2. – № 4. – С. 44-66.
20. *Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н.* Волновые процессы в сплошных средах. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2012. 260 с.

21. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов . – М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
22. *Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: Учебник для вузов. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
23. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 264 с. — ISBN 5 – 02 – 014006 – 6.
24. *Градиштейн И.С, Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1108 с.
25. *Дегтярев А.В., Коваленко В.А., Потапов А.В.* Применение композиционных материалов при создании перспективных образцов ракетной техники // *Авиационно-космическая техника и технология.* 2012. № 2. С. 89.
26. *Деев В.М.* Системный анализ уравнений пространственной задачи несимметричной теории упругости в перемещениях // *Математическое моделирование в естественных науках. Тезисы докладов 10-й Всероссийской конференции молодых ученых.* Пермь, 2001. С.14.
27. *Дудников В.А., Назаров С.А.* Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // *Докл. АН СССР.* – 1982. – Т. 262. – № 2. – С. 306–309.
28. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. - М.: Изд-во МГУ, 1999. - 328 с.
29. *Ерофеев В.И., Потапов А.И.* Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментными напряжениями // *Акустический журнал.* – 1991. – Т. 37. № 3. – С. 477-483.

30. *Ерофеев В.И.* Распространение нелинейных сдвиговых волн в твердом теле с микроструктурой // Прикл. механика (Киев). – 1993. – Т. 29. № 4. – С.18 - 22.
31. *Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф.* Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т.2. – № 4. – С. 67–75.
32. *Жидкова, О.Г.* Применение метода парных сравнений при проектировании композитных корпусов космических телескопов / О.Г. Жидкова // Онтология проектирования. – 2019. – Т.9, №4(34). – С.536-548. – DOI: 10.18287/2223.
33. *Зволинский Н.В., Шхинек К.Н.* Континуальная модель слоистой среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1.С. 5-14.
34. *Зеленина А.А., Зубов Л.М.* Одномерные деформации нелинейно упругих микрополярных тел // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 97–106.
35. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
36. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А.* Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 54-61.
37. *Каюк Я.Ф., Жуковский А.П.* К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера // Прикладная механика. – 1981. – Т. XVII. – № 10. – С. 80–85.
38. *Койтер В.Т.* Моментные напряжения в теории упругости // Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. – 1965. – № 3. – С.89-112.
39. *Комаров, В.А.* Учет масштабного фактора при проектировании крупногабаритных размеростабильных конструкций космических аппаратов / В.А. Комаров, О.Г. Жидкова // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». – 2019. – № 6. – С. 16-22.

40. Кошелев А.И., Нарбут М.А. Лекции по механике деформируемого твердого тела: Учеб. пособие. – Спб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2003. – 276 с.

41. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. Пер. с англ. под ред. Ю. М. Тарнопольского. — М.: Мир, 1982. — 334 с.

42. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Улитин М.В., Шардаков И.Н. Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн // Прикл. мех. и техн. физ. – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 196-203.

43. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 416 с.

44. Kumar P., Singh R., T.K. Chadha T.K. Метод собственных значений для второй динамической задачи теории микрополярных упругих тел, Indian J. Pure and Appl. Math. 34(5) (2003) 743-754.

45. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736с.

46. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Электронный журнал “Труды МАИ”. – 2012. – № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>.

47. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // РЭНСИТ. – 2013. – Т.5. – № 1. – С. 119–125.

48. Лай Тхань Туан, Дмитрий Тарлаковский. Осесимметричные нестационарные волны в упругой моментной среде со сферической полостью // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 442 – 443.

49. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Нестационарные осесимметричные граничные возмущения от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТР-принт», 2011. – С. 28 – 29.

50. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от сферической полости в упругом моментном пространстве // Материалы XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – Чебоксары: ГУП «ИПК «Чувашия», 2010. – С. 66.

51. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

52. *Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. – 1982. – Т. 28. – № 6. – С. 838–840.

53. *Мартынова Е.Д.* Определение статических и динамических осредненных характеристик периодических упругих каркасов. В кн.: Упругость и неупругость. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1993. С. 155-162.

54. *Миндлин Р.Д.* Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика: Сборник переводов. – 1964. – Т. 85. – № 4. – С. 115-128.

55. *Миндлин Р.Д.* Микроструктура в линейной упругости // Механика: Сборник переводов. – 1964. – Т. 86. – № 4. – С. 129-160.

56. *Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов. – 1964. – Т.86. – № 4. – С. 80-114.

57. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Действие нестационарных антисимметричных инематических возмущений на сферическую полость в

среде Коссера. Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Междунар. конф. (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.). Т. 1. – Ростов-на-Дону; Таганрог: изд-во ЮФУ, 2020. – С. 243 – 246.

58. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Антисимметричные волны в упругом моментном пространстве со сферической полостью. Матер. Всерос. Науч. Конфер. с междунар. участием. Актуальные проблемы механики сплошной среды — 2020., 28 сентября — 2 октября 2020 г., Казань. – Казань: Казанский ун-т; изд-во АН РТ, 2020. – С. 391 – 394.

59. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Нестационарные антисимметричные волны в упругом моментном пространстве со сферической полостью. Ломоносовские чтения. Научн. конф. Секция механики. Октябрь 2020 г. Тез. докл. – М.: Изд-во МГУ, 2020. – С. 166 - 167.

60. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных антисимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. –2020. –№ 4. –С. 201–210. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.17 = *Tarlakovskii D.V., Lam Nguyen Van* Propagation of non-stationary antisymmetric kinematic perturbations from a spherical cavity in Cosserat medium. PNRPU Mechanics Bulletin, 2020, no. 4, pp. 201-210. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.17.

61. *Тарлаковский Д.В., Нгуен Ван Лам.* Действие нестационарных осесимметричных кинематических возмущений на сферическую полость в среде Коссера // Упругость и неупругость. Матер. Междунар. научн. симпоз. по пробл. мех. деформ. тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. Москва 20 – 21 января 2021 года. - М.: Изд-во Московского университета, 2021. – С. 6 – 13.

62. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных осесимметричных кинематических возмущений от сферической

полости в среде Коссера. Материалы XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – М.: ООО "ТРП", 2019. – С. 119-120.

63. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Нестационарная динамика среды Коссера со сферической полостью. Ломоносовские чтения. Научн. конф. Секция механики. 15–25 апреля 2019 г. Тез. докл. – М.: Изд-во МГУ, 2019. – С. 196-197.

64. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Вращение недеформируемого шара в упругом моментном пространстве. Математическое моделирование в естественных науках. Тез. XXIX Всерос. школы-конф. – Пермь: ПНИПУ. – с. 77.

65. *Николау В.И.* Моментная теория упругости (Развитие, анализ, приложения). – Одесса: Астропринт, 2006. – 352 с.

66. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872с.

67. *Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.Н.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977. — 144 с.

68. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т.28. – Вып.3. – С. 401-408.

69. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т.28. – Вып. 6. – С.1117-1120.

70. *Пальмов В.А.* Приложение теории обобщенного континуума к проблеме пространственного затухания в сложных механических системах // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т.2. – № 4. – С. 105-110.

71. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. — М.: МГУ, 1984. —336 с.

72. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы. 1983. – 752 с.

73. Садовский В.М. “Термодинамически самосогласованная система законов сохранения несимметричной теории упругости”, Дальневост. матем. журн., 11:2 (2011), 201–212.

74. Саркисян С.Н. Общая теория магнитотермоупругости тонких оболочек, Известия НАН Армении, Механика. 63(3) (2010) 41-51.

75. Саркисян С.О., Варданян С.А., Фарманян А.Ж. Некоторые задачи прочности и термоупругости микрополярных пластин // Международная научная конференция по механике «IV Поляховские чтения», Санкт-Петербург, 7-10 февр., 2006: Тезисы докладов. СПб: ВВМ. – 2006. – С. 213–214.

76. Саркисян С.О., Алваджян Ш.И. Модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких балок и особенности их прочностных-жесткостных характеристик // Научно-технический сборник ВАНТ. – 2011. – № 4. – С. 196–204.

77. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.

78. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.

79. Смолин И.Ю. Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне // Математическое моделирование систем и процессов. – 2006. – № 14. – С. 189-205.

80. Суворов Е.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // ПММ. – 2012. – Т. 76. – Вып. 5. – С. 850–859.

81. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Изв. АН. МТТ. 2015. № 2. С. 118-128.

82. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Михайлова Е. Ю.* Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2018. Т. 160. № 3. С. 561-577.

83. *Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.

84. *Тупин Р.А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения // Механика: Сборник переводов. – 1965. – № 3. – С. 113-140.

85. *Угодчиков А.Г., Игумнов Л.А.* Моментный анализ деформирования упругого тела // 3-й Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): посвящ. памяти. Соболева С.Л. (1908-1989). Тез. докл. Ч. 2. Секции: Вычислительные методы. Математическая геофизика. Математические модели процессов в атмосфере, океане и водоеме. Механика. Устойчивость, управление и оптимизация. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. – 1998. – С. 127.

86. *Федоров Ю.А.* Основные уравнения плоской задачи моментной теории термоупругости // Изв. Иван. отд-ния Петр. Акад. наук и искусств. – 1998. – № 3. – С. 103–105.

87. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. — М.: Мир, 1982. — 232 с.

88. *Хмидашвили М.А., Схвитаридзе К.М., Бицадзе Р.Г.* Краевые задачи моментной теории упругости для шара // Проблемы механики. – 2005. – № 3. – С. 74–79.

89. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием

нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 231–245. Перевод: Tran Le Thai, D.V. Tarlakovskii. Nonstationary Axisymmetric Motion of an Elastic Momentum Half-Space under Nonstationary Normal Surface Displacements // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39. – No. 9. – P. 1484–1494.

90. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов- М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. -296 с.

91. *Чернина В.С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 456 с.

92. *Чкадуа О.О., Хамза Ф.* Исследование основных задач моментной теории упругости для анизотропных сред // Сообщ. АН ГССР. – 1987. – Т. 128. – № 3. – С. 469–472.

93. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М. Наука, 1969. — 425 с.

94. *Эринген А.К.* Теория микрополярной упругости., Разрушение. Т.2 - М.: Мир, 1975, с.646-751.

95. Bagdоеv A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Wave Dynamics of Generalized Continua. Springer: Heidelberg, New York, Dordrecht, London. 2016. 274 p.

96. Birsan Mircea. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells // Eur. J. Mech. A. – 2009. – V. 28. № 1. – P. 94-101.

97. Birsan Mircea. Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids // Mech. Res. Commun. – 2006. – Vol. 33. – No. 2. – P. 157–176.

98. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformeables., Hermann, Paris, 1909.

99. Gauthier R.D and Jahsman W.E. "A Quest for Micropolar Elastic Constants, Pt 2," Arch. Mech. 33 (5), 717-737 (1981).

100. Gheorghita Vitali. Фундаментальные решения в линейной микрополярной теории упругости // Bul. Inst. politehn. Iasi. – 1985. – supl.[sec. 1]. – P. 263-268.

101. Han S.Y., Narasimhan M.N.L., Kennedy T.C. Dynamic propagation of a finite crack in a micropolar elastic solid // Аста месн. – 1990. – V. 85. №3 - 4. – P. 179-191.

102. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. О свойствах поверхностных волн в упругой среде Коссера [Properties of surface waves in an elastic Cosserat medium] // Математическое моделирование систем и процессов: Сборник научных трудов. – Perm': PGU, 2006. – Вып. 14. – pp. 109–113.

103-. Kumar Rajneesh, Gupta Rajani Rani. Propagation of waves in transversely isotropic micropolar generalized thermoelastic half space // Int. Commun. Heat and Mass Transfer. – 2010. – Vol. 37. – Iss. 10. – P. 1452–1458.

104. Korepanov V.V., Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости [Analytical and numerical solutions of static and dynamic problems of asymmetric theory of elasticity]// Fiz. mezomekh. – 2007. – V. 10. – № 5. – pp. 77-90.

105. Lam V. Nguyen, Tarlakovskii D.V. Propagation of Non-stationary Axisymmetric Perturbations from a Spherical Cavity in Cosserat Medium // Advanced Structured Materials, V. 122. Nonlinear Wave Dynamics. - Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 273 – 292.

106. Mac Cullagh J., Trans. Roy. Irish. Acad Sei., 1839, v.21, p. 17-50

107. *Muhlhaus H.B., Triantafyllidis Th.* Surface waves in a layered half-space with bedding stiffness // *Ground Motion and Eng. Seismol.* Amsterdam e. a. – 1987. – pp. 277 - 290.

108. *Nistor I.* Обобщенная теория термоупругих сред Коссера // *Bul. Inst. politehn. Iasi. Sec. 1.* – 1991. – Т. 37. – № 1. – С. 89-96.

109. *Niu M.C.* Composite Airframe Structures, Comilit Press Ltd, Hong Kong, 1992.

110. *Reissner H.* Spannungen in Kugelschalen (Kuppeln). H. Müller-Breslau Festschrift, Leipzig, 1912, pp.181-193.

111. *Saxena Hirdeshwar S., Dhaliwal Ranjit S.* Application of the eigen-number method to an axisymmetric coupled micropolar thermoelasticity // *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.* - 1990. - Т. 38. № 1. - P. 7 - 18.