

На правах рукописи



АЙ МИН ВИН

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЁТА ДИНАМИКИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ СО
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Москва - 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования (ФГБОУ ВПО) «Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана» на кафедре «Космические аппараты и ракеты-носители» СМ-1.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент **Темнов Александр Николаевич**.

Официальные оппоненты: **Нестеров Сергей Владимирович**,
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник,
Институт проблем механики им. А.Ю.
Ишлинского РАН.

Жаворонок Сергей Игоревич,
Кандидат физико-математических наук,
доцент, старший научный сотрудник, Институт
прикладной механики РАН.

Ведущая организация: Открытое акционерное общество «Криогенмаш»
(ОАО«КРИОГЕНМАШ»)

Защита состоится « 30 » сентября 2015г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) – МАИ по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) – МАИ и на сайте http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=58831.

Автореферат разослан « » 2015г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент.



Федотенков Г. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В настоящее время в связи с развитием ракетно-космической техники в значительной степени возросло использование криогенных топливных компонент: жидких водорода, кислорода, метана, шуги. Освоение дальнего космического пространства невозможно без создания орбитальных заправочных станций. Отличительной особенностью упомянутых выше жидкостей является низкие значения температуры и различные значения плотности частиц жидкости, наблюдаемые в режимах хранения и транспортировки.

В сечениях, перпендикулярных к оси ёмкости, разница в температуре криогенной жидкости реализуется в основном в тонком пограничном слое, около стенок сосуда. В тоже время изменение плотности и температуры частиц основной массы жидкости отказывается значительным в направлении коллинеарном оси сосуда. Такое распределение температуры и плотности жидкости позволяет считать основную массу жидкости однородной в плоскости, перпендикулярной к оси сосуда и приближённо рассматривать криогенную жидкость как стратифицированную, т.е. как жидкость в которой распределение плотности и температуры в невозмущённом состоянии зависит от одной координаты.

В другой стороны при разработке ряда устройств, таких как сепараторы, биологические ультрацентрифуги, а также при создании различных приборов таких как датчики конвекции, поплавковые гироскопы, приходится сталкиваться со случаями неравномерного прогрева жидкости, который оказывает значительное влияние на динамику устройства с жидкостью.

В настоящее время движения твёрдых тел, имеющих полости, наполненные неравномерно нагретой жидкостью, практически мало изучены.

Целью работы является разработка методов расчёта динамики твёрдых тел, имеющих полости, наполненные стратифицированной жидкостью, а также исследование влияния расслоения жидкости на динамику твёрдого тела с жидкостью. Для достижения заданной цели в качестве модели криогенной жидкости была обоснована и выбрана несжимаемая стратифицированная жидкость, поставлены и решены следующие проблемы:

- Исследованы колебания стратифицированной жидкости в частично заполненном неподвижном цилиндрическом сосуде произвольного поперечного сечения.
- Разработаны методы расчета собственных частот колебаний жидкости, стратификация которой изменяется по произвольному закону.
- Разработан метод определения динамических характеристик при действии импульсивных сил на твёрдое тело, имеющего полости, наполненные стратифицированной жидкостью, совершающей квазипотенциальное движение.
- Разработан метод определения характеристик твёрдого тела, совершающего малые вращательные движения, и имеющего цилиндрическую полость, частично или полностью заполненной криогенной жидкостью.

- Исследована устойчивость вращения вокруг неподвижной точки твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, целиком заполненную стратифицированной жидкостью.

Метод исследования. В работе использованы известные подходы для решений задач динамики движения твердого тела с жидкостью. При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные вычислительные и математические методы: метод конечных элементов, метод тригонометрических рядов, метод разделения переменных и метод обобщенных потенциалов.

Научную новизну работы имеют следующие результаты:

- Исследованы вопросы динамики твёрдого тела, имеющего полость, наполненной стратифицированной жидкостью.

- Получены теоретические и численные результаты в виде уравнений движения и динамических характеристик, которые вместе с приведёнными примерами демонстрируют отличие динамики твёрдого тела со стратифицированной жидкостью от случая движения тела с однородной жидкостью.

- Получены асимптотические формулы, позволяющие оценить влияние стратификации на частоты поверхностных волн.

- Разработана методика вычисления частот внутренних волн стратифицированной жидкости для различных законов изменения плотности.

- Исследована устойчивость вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной неравномерно нагретой жидкостью при различных режимах стратификации.

Практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при проектировании крупногабаритных ракетно-космических конструкции, например космических заправочных станции, а также в учебном процессе кафедр, выпускающих инженеров по ракетно-космическим специальностям.

Достоверность полученных результатов следует из сравнения с известными аналитическими и численными решениями, полученными для однородной жидкости.

Публикация и апробация работы. По теме диссертации опубликовано 7 работ. Из них 4 статьи в журналах из перечня ВАК РФ, 3 работы в трудах международных и российских конференций. Результаты работы докладывались на следующих международных конференциях: XIV международный симпозиум «Уникальные феномены и универсальные ценности культуры» (Москва, апрель 2012г); Международная конференция «Актуальные проблемы российской космонавтики: труды XXXVII академических чтений по космонавтике» (Москва, январь 2013г); 4-ая международная научная конференция «Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы» (РКТ - Москва, ноябрь 2013г), Международная молодежная научная конференция «XL

Гагаринские чтения» (Москва, апрель 2014г); Международная научная конференция «Физико-математические проблемы создания новой техники» (PhysMathTech – Москва, ноябрь 2014г).

Объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав с краткими выводами по каждой главе, заключения, списка литературы, содержащего 152 наименования. Полный объем диссертации составляет 166 машинописных страниц, включает 45 рисунков и 20 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность проблемы, научная новизна, практическая ценность и достоверность полученных результатов, а также приведены данные о структуре и объеме диссертации.

В первой главе приводится краткое описание космических заправочных станции (КЗС), анализ литературных источников с точки зрения современного состояния проблем динамики твёрдых тел с полостями наполненными жидкостью и динамики стратифицированной и криогенной жидкостей, а также твердых тел с криогенной жидкостью. В разделе 1.2.1 приведены работы по динамике твёрдых тел, имеющих полости, частично или полностью заполненные однородной жидкостью. В разделе 1.2.2 приведён обзор литературы по исследованию колебаний криогенной жидкости в подвижных резервуарах. В разделе 1.2.3 приведен обзор работ по динамике стратифицированных и криогенных жидкостей, заполняющих ограниченную и открытую области. В последнем разделе первой главы определены цели и задачи диссертации.

Во второй главе приведены уравнения движения идеальной криогенной жидкости частично или полностью, заполняющей неподвижной резервуар. Рассмотрены задачи об определении собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью, а также при произвольном законе изменения плотности жидкости.

В разделе 1 приведена общая система уравнения гидродинамики, описывающие малые движения стратифицированной жидкости. Одной из основных динамических характеристик стратифицированной жидкости является частота плавучести N - частота свободных колебаний отдельной частицы жидкости. В криогенной жидкости, заполняющей цилиндрический бак, при разнице температур $\Delta T_0 = 10^\circ$ в слое толщиной $\Delta x_3 = 1\text{м}$, квадрат частоты плавучести имеет оценку

$$\text{для жидкого водорода } N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} \approx \alpha g \frac{\Delta T_0}{\Delta x_3} = 0.0126 \cdot 10 \cdot 10 = 1.26 \text{сек}^{-2}$$

$$\text{для жидкого кислорода } N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} \approx \alpha g \frac{\Delta T_0}{\Delta x_3} = 0.00385 \cdot 10 \cdot 10 = 0.385 \text{сек}^{-2}$$

$$\text{для жидкого азота } N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} \approx \alpha g \frac{\Delta T_0}{\Delta x_3} = 0.005 \cdot 10 \cdot 10 = 0.5 \text{сек}^{-2}$$

где α - коэффициент теплового расширения.

Наиболее распространенные профили температуры в резервуарах с криогенной жидкостью показаны на Рис. 1, 2.

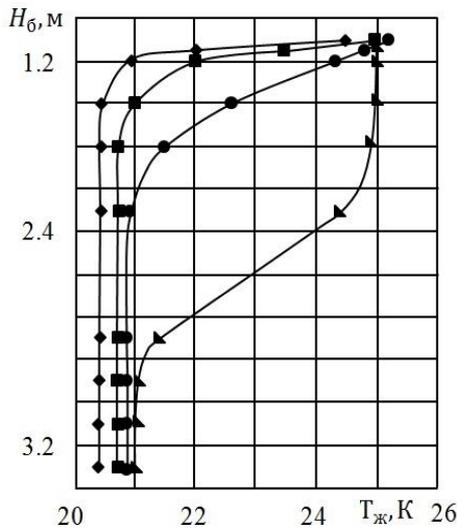


Рис. 1. Экспериментальные данные по влиянию на прогрев верхнего слоя жидкого водорода в модели с $R_0 = 1 \text{ м}$, при колебаниях свободной поверхности в течение 600 с

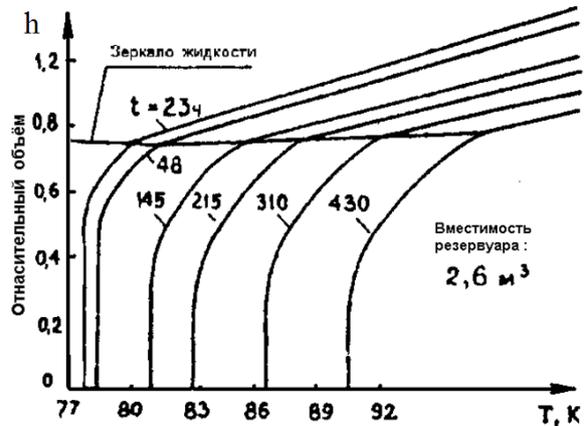


Рис. 2. Профили температуры в резервуаре с жидким азотом при бездренажном хранении.

Уравнения малых движений криогенной несжимаемой идеальной жидкости, рассмотренные в диссертации, имеют вид

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(x_3)} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0(x_3)} \vec{G}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + W \frac{d\rho_0}{dx_3} = 0, \quad \text{div } \vec{V} = 0. \quad (2)$$

где W - проекция вектора скорости на Ox_3 , p - давление, ρ - плотность, \vec{V} - вектор скорости частиц жидкости, $\vec{G} = -g\vec{e}_3$.

Непосредственное использование системы уравнений (1), (2) удобно при теоретическом исследовании. Однако изучение конкретной задачи и получение численных результатов наиболее удобно проводить, используя редукцию исходной системы уравнений к одному скалярному уравнению для функции $p(\vec{x}, t)$. При постоянной частоте плавучести, которая отвечает экспоненциальному закону распределения плотности $\rho_0(x_3) = \rho_0^* \exp(-\beta_0 x_3)$ и при использовании приближения Буссинеска, уравнение для функции $p(\vec{x}, t)$ принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + \beta_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p}{\partial x_3} + N_0^2 \Delta_h p = 0. \quad (3)$$

В разделе 2 рассмотрены малые колебания криогенной жидкости с постоянной частотой плавучести, частично заполняющей цилиндрический

резервуар произвольного поперечного сечения и предлагается метод расчета собственных частот колебаний криогенной жидкости, основанный на использовании асимптотических формул.

Рассмотрена асимптотика малой стратификации и получены приближённые формулы для оценки поверхностных волн с учётом расслоения

$$\omega^2(\varepsilon) = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1^2 + \varepsilon^2\omega_2^2 + \varepsilon^3\omega_3^2 + O(\varepsilon^4), \quad (4)$$

где $\varepsilon = \bar{\beta}_0 \bar{H}$ - малый параметр, $\bar{\beta}_0 = \beta_0 r_0$, $\bar{H} = H/r_0$.

Если ограничиться первым приближением, то полученная формула имеет вид

$$\bar{\omega}_{mn}^2 \approx \bar{\omega}_0^2 + \bar{\omega}_1^2 \varepsilon = \bar{\omega}_0^2 - \frac{\bar{\beta}_0 [\xi_{mn} \bar{H} - \text{th}(\xi_{mn} \bar{H})]}{\text{sh}(2\xi_{mn} \bar{H})}, \quad (5)$$

где $\bar{\omega}_0^2 = \xi_{mn} \text{th}(\xi_{mn} \bar{H})$, $\bar{\omega}_1^2 = -\frac{1}{2} \bar{\omega}_0^2 \frac{\xi_{mn} \bar{H} - \text{th}(\xi_{mn} \bar{H})}{\xi_{mn} \bar{H} \text{sh}^2(\xi_{mn} \bar{H})}$.

Для квадрата частоты внутренних волн при экспоненциальном распределении плотности жидкости в первом приближении, получена асимптотическая формула при наличии свободной поверхности

$$\bar{\omega}_{mnl}^2 = \frac{\xi_{mn}^2 \bar{\beta}_0 \bar{H}^2}{\xi_{mn}^2 \bar{H}^2 + \frac{\bar{\beta}_0^2}{4} \bar{H}^2 + \pi^2 l^2 \left(1 + \frac{\bar{\beta}_0 \bar{H}}{\pi^2 l^2}\right)^2}. \quad (6)$$

Далее в качестве примеров рассмотрены задачи для некоторых конкретных областей поперечного сечения цилиндрической ёмкости. Приведены результаты расчётов собственных частот поверхностных и внутренних волн.

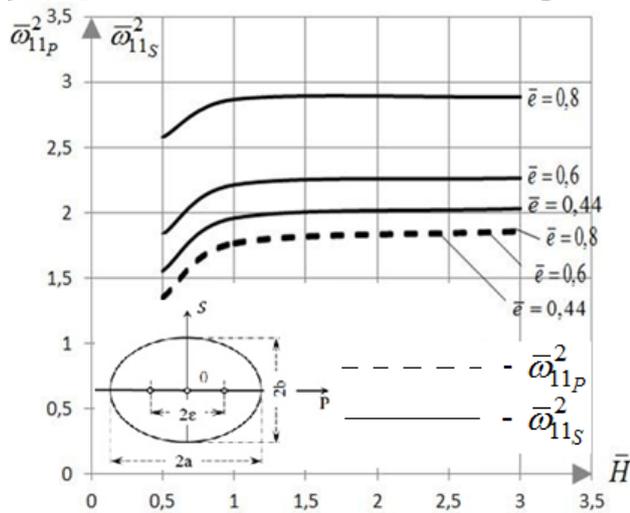


Рис. 3. Зависимости собственных частот поверхностных волн в эллиптическом цилиндре от глубины заполнения \bar{H} .

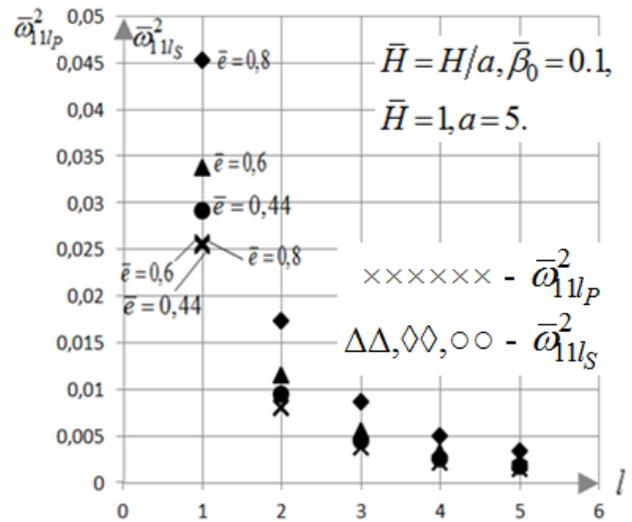


Рис. 4. Зависимости собственных частот внутренних волн в эллиптическом цилиндре от номера тона l .

Определены собственные частоты колебаний стратифицированной жидкости в цилиндрических ёмкостях, поперечные сечения которых

образованы эллипсом (Рис. 3, 4) (P, S - направление волны, \bar{e} - эксцентриситет) и коаксиальными цилиндрами, связанными M сплошными равноотстоящими радиальными перегородками ($M > 2$) (Рис. 5, 6).

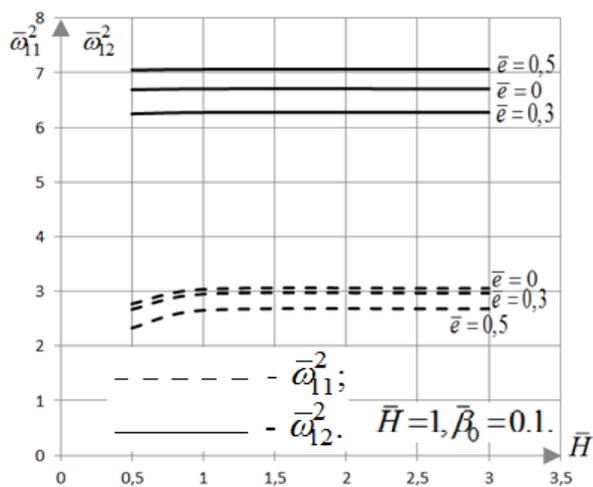


Рис. 5. Зависимости собственных частот поверхностных волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками от глубины заполнения.

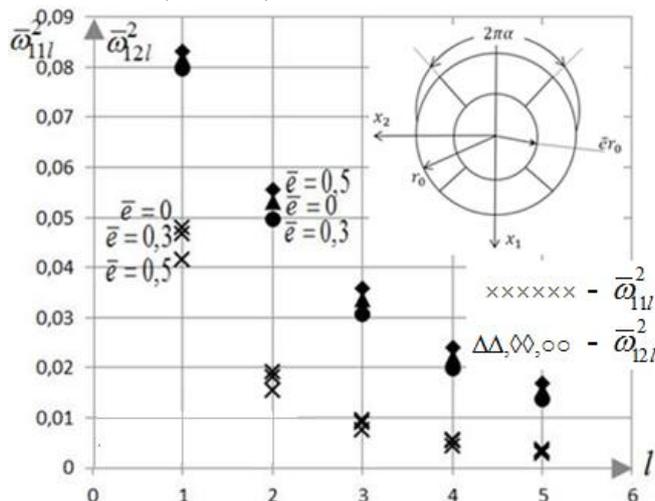


Рис. 6. Зависимости собственных частот внутренних волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками от номера тонна l .

Приведенные примеры определения собственных частот поверхностных волн позволяют сделать следующие выводы: А) При постоянной величине стратификации ($\beta_0 = const$), увеличение глубины жидкости приводит к уменьшению влияния стратификация на частоты поверхностных волн. Б) Для неглубокой жидкости отличие частот поверхностных волн однородной и стратифицированной жидкости составляют $4 \div 10\%$.

В разделе 3 разработаны методы определения собственных частот колебаний внутренних волн криогенной жидкости, стратификация которой может изменяться по произвольному закону. Для решения подобной задачи были разработаны вычислительные программы, основанные на использовании метода тригонометрических рядов и метода конечных элементов. При исследовании задачи на собственные значения методом конечных элементов использовались интегральные выражения, полученные с помощью метода Бубнова-Галеркина. Для каждого конечного элемента безразмерной длины h , интегральное соотношение задачи о собственных колебаниях жидкости имело вид

$$-\bar{\omega}^2 \int_0^h \left(\frac{dU_m}{dz} \frac{d\varphi_k^m}{dz} + \xi^2 U_m \varphi_k^m \right) d\bar{z} + \xi^2 \int_0^h \bar{\beta}_0(\bar{z}) U_m \varphi_k^m d\bar{z} = 0. \quad (7)$$

где $U_m(z) = \sum U_k \varphi_k^m(z)$ – функция перемещения, U_k – узловые перемещения, φ_k^m – функции формы.

После вычисления интегралов и локальных матриц исходная задача на собственные колебания запишется в виде

$$-\bar{\omega}^2 [M] \{U\} + [K] \{U\} = 0. \quad (8)$$

где $\{U\} = \{U_1, U_2, U_3, \dots, U_k, \dots\}^T$ – смещение элементов.

Глобальные матрицы $[K]$ и $[M]$, в случае разбиения всей области на три элемента длиной h , имели вид

$$[K] = \begin{bmatrix} \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{3} & \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{6} & \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{3} + \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{3} & \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{6} & \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{2h}{3} & \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{6} & \xi^2 \bar{\beta}_0 \frac{h}{3} - \xi^2 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & 0 & 0 \\ -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & \frac{2}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} + \xi^2 \frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & \frac{2}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} + \xi^2 \frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & \frac{1}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} \end{bmatrix}.$$

Метод конечных элементов реализовывала программа, написанная в системе компьютерной математики Matlab.

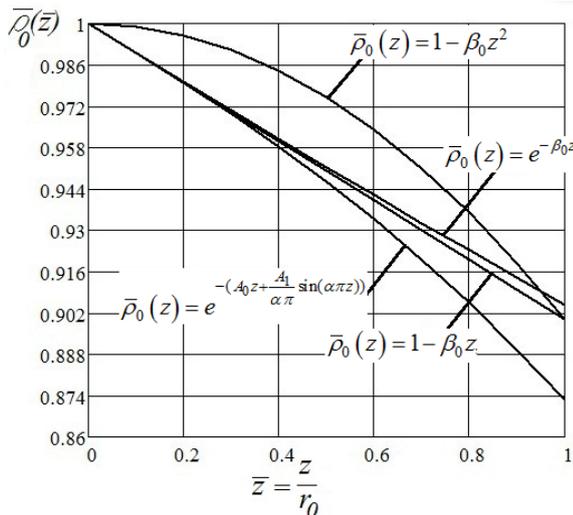


Рис. 7. Относительное изменение плотности

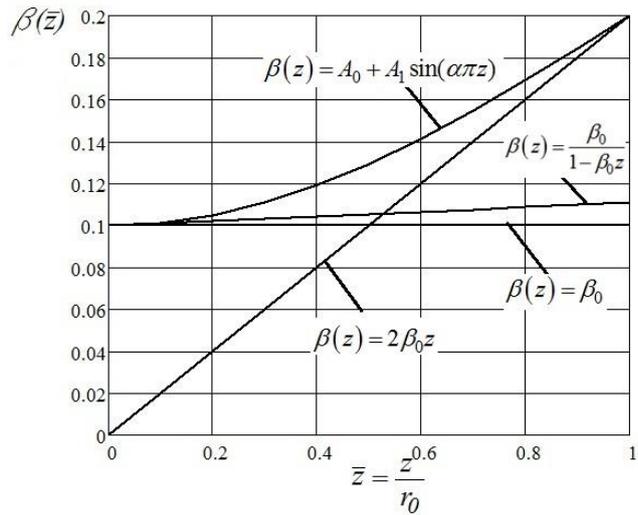


Рис. 8. Изменение безразмерного квадрата частоты плавучести

На рисунках 7, 8 приведены некоторые законы изменения плотности и квадрата частоты плавучести, которые использовались для определения собственных колебаний жидкости в методах тригонометрических рядов и

конечных элементов. Формы колебаний первого и второго тонов, полученные методом конечных элементов для законов изменения квадрата частоты плавучести $\beta(z) = \beta_0/(1 - \beta_0 z)$ и $\beta(z) = A_0 + A_1 \cos(\alpha \pi z)$, приведены на Рис. 9.

$$\beta(z) = \frac{\beta_0}{1 - \beta_0 z}$$

$$\beta(z) = A_0 + A_1 \cos(\alpha \pi z)$$

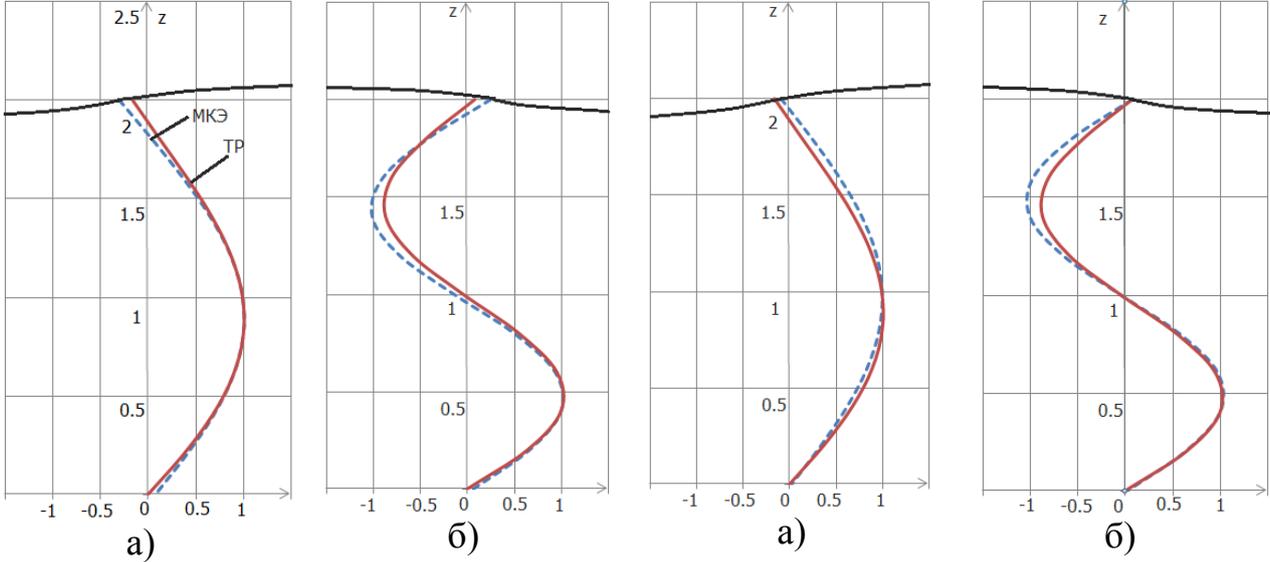


Рис. 9. Формы колебаний первого и второго тонов для 110 элементов: а) первый тон, б) второй тон; сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – МКЭ.

В третьей главе получены уравнения возмущенного движения твёрдого тела, имеющего полости наполненные стратифицированной жидкостью (Рис. 10), которые имеют вид:

уравнение изменения количества движения

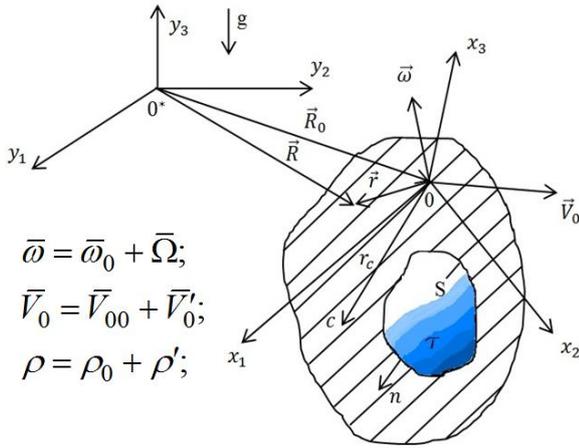
$$\begin{aligned} M \left(\dot{\vec{V}}'_0 + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_c \right) + M \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_c + M \vec{\omega}_0 \times \left(\vec{V}'_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_c \right) + \int_{\tau} \rho_0 \dot{\vec{u}} d\tau + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho_0 \vec{u} d\tau + \\ + \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho' \vec{r} d\tau + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \dot{\rho}' \vec{r} d\tau + \vec{V}_{00} \int_{\tau} \dot{\rho}' d\tau = M \delta \vec{j} + \int_{\tau} \rho' \vec{j} d\tau; \end{aligned} \quad (9)$$

уравнение изменения кинетического момента

$$\begin{aligned} \left(J_0^0 + J'_0 \right) \cdot \dot{\vec{\Omega}} + M \vec{r}_c \times \dot{\vec{V}}'_0 + \vec{\omega}_0 \times \left(J_0^0 + J'_0 \right) \cdot \vec{\Omega} + \vec{\omega}_0 \times M \vec{r}_c \times \vec{V}'_0 + \\ + \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \dot{\vec{u}} d\tau + \int_{\tau} \dot{\rho}' \vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r} d\tau + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{u} d\tau + \\ + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho' \vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r} d\tau + \vec{\Omega} \times \left(J_0^0 + J'_0 \right) \cdot \vec{\omega}_0 + \int_{\tau} \dot{\rho}' \vec{r} \times \vec{V}_{00} d\tau + \\ + \vec{V}'_0 \times M \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_c + \vec{V}_{00} \times \vec{\Omega} \times M \vec{r}_c + \int_{\tau} \rho_0 \vec{V}_{00} \times \vec{u} d\tau = M \vec{r}_c \times \delta \vec{j} + \int_{\tau} \rho' \left(\vec{r} \times \vec{j} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

где M - масса твёрдого тела затвердевшей жидкости, J_0^0 - тензор моментов инерции твёрдого тела, J'_0 - тензор моментов инерции затвердевшей жидкости,

r_c - радиус-вектор центра масс твёрдого тела и затвердевшей жидкости. \vec{j} - вектор ускорения массовых сил.



$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \bar{\omega}_0 + \bar{\Omega}; \\ \bar{V}_0 &= \bar{V}_{00} + \bar{V}'_0; \\ \rho &= \rho_0 + \rho';\end{aligned}$$

Уравнения движения жидкости в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + 2\bar{\omega}_0 \times \bar{u} + \nabla p - \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla \Pi_0 &= -\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} \times \bar{r}, \\ \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \bar{u} &= 0, \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad \bar{u} \cdot \bar{n} = 0,\end{aligned}\quad (11)$$

где $\Pi_0 = U_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2)$,

При вращении твёрдого тела с жидкостью вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс твёрдого тела и затвердевшей жидкости, уравнения изменения кинетического момента возмущенного движения запишутся в виде

$$\begin{aligned}(J_0^0 + J_0') \cdot \dot{\bar{\Omega}} + \bar{\omega}_0 \times (J_0^0 + J_0') \cdot \bar{\Omega} + \int_{\tau} \rho_0 \bar{r} \times \dot{\bar{u}} d\tau + \int_{\tau} \rho' \bar{r} \times \bar{\omega}_0 \times \bar{r} d\tau + \\ + \bar{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho_0 \bar{r} \times \bar{u} d\tau + \bar{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho' \bar{r} \times \bar{\omega}_0 \times \bar{r} d\tau + \bar{\Omega} \times (J_0^0 + J_0') \cdot \bar{\omega}_0 = \int_{\tau} \rho' (\bar{r} \times \vec{j}) d\tau.\end{aligned}\quad (12)$$

Полученные в разделе 1 уравнения движения являются достаточно общими и сложными, поэтому сначала были изучены некоторые частные виды движения твёрдого тела и жидкости. В разделе 2 разработаны методы расчета динамических характеристик для некоторых частных видов движения твёрдого тела (начало движения, действия импульсивных сил), имеющего полости наполненные криогенной жидкостью, совершающего квазипотенциальное движение. Под квазипотенциальным движением понимается такое движение неоднородной жидкости, при котором $rot \vec{V} \neq 0$, но выполняется условие

$$\vec{V} \cdot rot \vec{V} = 0, \quad (13)$$

где $\vec{V} = grad F / \rho_0(\vec{r})$ - скорость частиц жидкости, $\rho_0(\vec{r})$ - известная непрерывная функция изменения плотности жидкости, F - квазипотенциал, абсолютных скоростей жидкости, удовлетворяющий краевой задаче

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho_0} \nabla F = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial F}{\partial n} = \vec{V}_0 \cdot \bar{n} + \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{n}). \quad (15)$$

где \bar{n} - орт внешней нормали, $\nabla = \sum_{j=1}^3 \bar{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ - оператор Гамильтона.

Представление функции F в виде суммы двух скалярных произведений векторных потенциалов $\vec{\Phi} = \sum_{k=1}^3 \Phi_k \vec{e}_k$ и $\vec{\Psi} = \sum_{j=1}^3 \Psi_j \vec{e}_j$ на векторы \vec{V}_0 и $\vec{\omega}$

$$F(\vec{r}, t) = \vec{\Phi} \cdot \vec{V}_0 + \vec{\Psi} \cdot \vec{\omega}, \quad (16)$$

позволяет сформулировать исходную задачу (14, 15) для функции F в виде шести краевых задач

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi_j \right) = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{e}_j, \quad j=1,2,3 \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Psi_i \right) = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot \vec{e}_i. \quad i=1,2,3 \quad (18)$$

После определений квазипотенциалов Φ_j и Ψ_i , уравнения движения твёрдого тела с криогенной жидкостью запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} (\vec{Q} + \vec{Q}') + \vec{\omega} \times (\vec{Q} + \vec{Q}') = \vec{K}_T, \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{M} + \vec{M}') + \vec{\omega} \times (\vec{M} + \vec{M}') + \vec{V}_0 \times \vec{Q}' = \vec{L}_T, \quad (20)$$

где

$$\vec{Q} = \vec{Q}_T + \vec{Q}_{3.ж.}, \quad \vec{Q}' = \mathfrak{M} \cdot \vec{V}_0 - L \cdot \vec{\omega} - \vec{L}_0 \times \vec{\omega},$$

$$\vec{M} = \vec{M}_T + \vec{M}_{3.ж.}, \quad \vec{M}' = L \cdot \vec{V}_0 + \vec{L}_0 \times \vec{V}_0 + J \cdot \vec{\omega}.$$

Здесь $\vec{Q}_{3.ж.} = \int_{\tau} \rho_0 \vec{V}_0 d\tau$, $\vec{M}_{3.ж.} = \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{V}_0 d\tau$ – количество и момент количества движения «затвердевшей» неоднородной жидкости, \mathfrak{M}, J – тензоры присоединенной массы и присоединенных моментов инерции жидкости.

$$\mathfrak{M} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{e}_k \vec{e}_j \mu_{kj}, \quad L = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{e}_k \vec{e}_j l_{kj}; \quad (21)$$

$$J = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{e}_k \vec{e}_j i_{kj}, \quad \vec{L}_0 = \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} d\tau = m \vec{r}_c;$$

$$\mu_{kj} = \int_{\tau} x_j \frac{d\rho_0}{dx_k} d\tau + \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \Phi_j^* dS; \quad (22)$$

$$l_{kj} = \int_{\tau} x_j (\vec{r} \times \nabla \rho_0)_k d\tau + \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_k}{\partial n} \cdot \Phi_j^* dS; \quad (23)$$

$$i_{kj} = \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_k}{\partial n} \Psi_j dS; \quad (24)$$

где \vec{L}_0 – статический момент «затвердевшей» неоднородной жидкости массой m , \vec{r}_c – радиус-вектор центра масс «затвердевшей» неоднородной жидкой массы.

Анализ уравнений движения (19) и (20) показывает, что при приложении силы в центре масс всей системы, твёрдое тело с криогенной жидкостью не

будет совершать поступательное движение, совпадающее с вектором действия силы.

В разделе 3 главы 3 рассмотрен пример на плоское движение цилиндрического бака, заполненного частично или полностью стратифицированной жидкостью, плотность которой изменялась по экспоненциальному закону $\rho_0 = \rho_0^* \exp(\beta_0 x_3)$.

Краевые задачи для этого случая, имели вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi_1 \right) &= 0, & \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Psi_2 \right) &= 0, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= \sin \eta, & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= x_3 \sin \eta, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0, H} &= \sin \eta, & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0, H} &= -r \sin \eta, \\ \Phi_1 \Big|_{x_3=0} &= 0, & \Psi_2 \Big|_{x_3=0} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя решения задачи (25) и формулы (21-24) были определены: присоединенная масса μ_{11} и присоединенный момент инерции I_{22} (Рис. 11, 13) относительно оси лежащий в плоскости крышки цилиндрического бака, а также эффективный момент инерции I_0 (Рис. 12), относительно поперечной оси, расположенной на расстоянии L_y от верхней крышки и проходящей через метациентр жидкости. На Рис. 14 приведено изменение величины $d = L_y - z_c$, где z_c - расстояние от плоскости верхней крышки до центра масс затвердевшей жидкости.

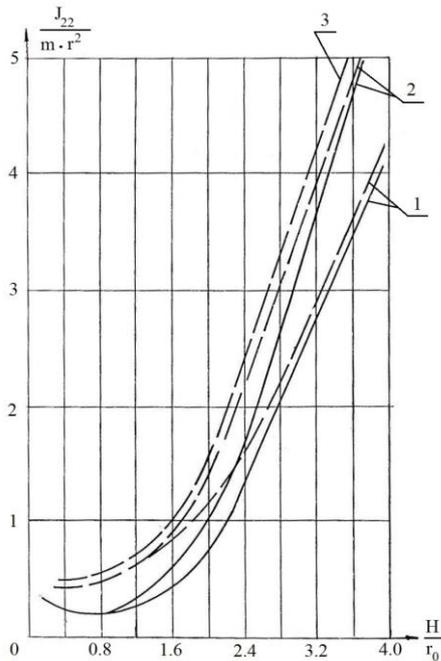


Рис. 11. Изменение $J_{22}/m \cdot r^2$ от глубины заполнения бака: 1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.5$; 3 - $\beta_0 = 0.9$

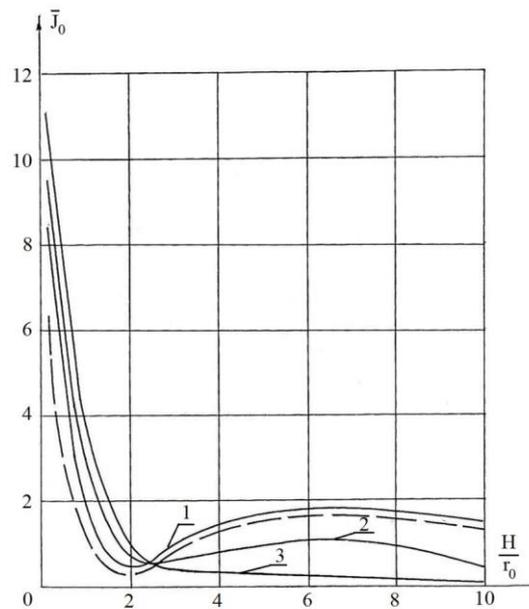


Рис. 12. Изменение \bar{J}_0 от глубины заполнения бака: 1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.7$; 3 - $\beta_0 = 0.9$

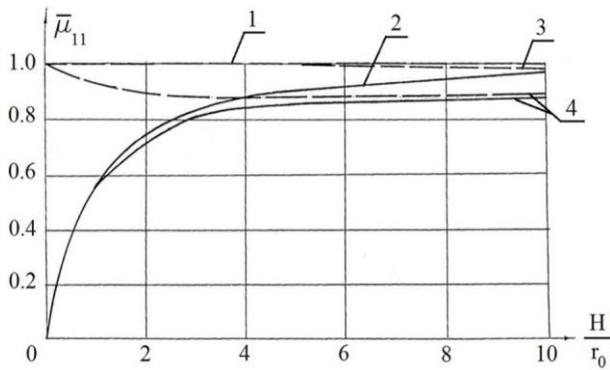


Рис. 13. Изменение $\bar{\mu}_{11}$ от глубины заполнения бака: 1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.1$; 3 - $\beta_0 = 0.3$; 4 - $\beta_0 = 0.9$

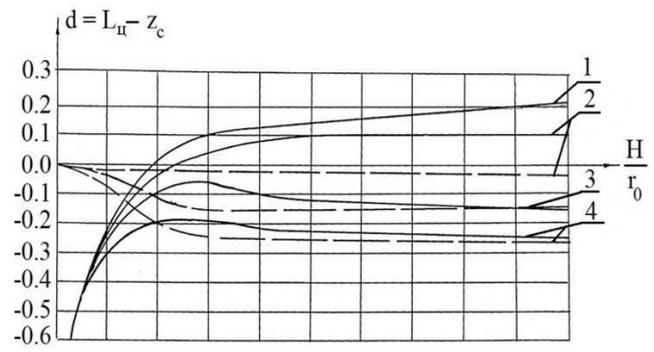


Рис. 14. Изменение d от глубины заполнения бака: 1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.1$; 3 - $\beta_0 = 0.5$; 4 - $\beta_0 = 0.9$

На Рис. 11-14 пунктирная кривая - полное заполнение, сплошная - со свободной поверхностью.

В четвертой главе диссертации разработаны методы расчёта динамических характеристик колебаний твёрдых тел, имеющих полости заполненные криогенной жидкостью.

В разделе 1 было рассмотрено движение стратифицированной жидкости в цилиндрической полости сферического маятника. В разделе 2 для исследования качественного влияния движения жидкости на твёрдое тело был определен присоединённый момент инерции жидкости - I_{11} при колебаниях физического маятника относительно оси Ox_1 :

$$I_{11} = mr_0^2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2} \times \left(\frac{8r_0}{h} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{th\mu_n h}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} - 1 + \frac{2r_0}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\mu_n 2h - 1}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} \frac{\dot{\chi}_n}{\Omega_1} \right), \quad (26)$$

где m - масса жидкости, χ_n - обобщенная координата волновых движений свободной поверхности жидкости в связанной системе координат. Для проверки достоверности полученной формулы было вычислено значение момента инерции эквивалентного тела при вращении относительно оси Ox_1 в отсутствии свободной поверхности и расслоения. Тогда момент инерции эквивалентного тела выразится формулой (27), результат которой ($h/r_0 = 1$) совпадает с результатом, полученным Жуковским в 1885 году.

$$I_{11}^{\partial} = I_{11}^{3\partial} + iI_{11},$$

$$\lim_{N^2 \rightarrow 0} \frac{I_{11}^{\partial}}{mr_0^2} = \lim_{N^2 \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 - \frac{N^2}{\sigma^2}} \left(8 \frac{r_0}{h} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{N^2}{\sigma^2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{th \left(\xi_n \frac{h}{r_0} \sqrt{1 - \frac{N^2}{\sigma^2}} \right)}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} - 1 \right) + \frac{7}{12} \right] = 0.0953. \quad (27)$$

Вывод: Присоединенный момент инерции стратифицированной жидкости зависит не только от формы полости, но и от соотношения частоты плавучести и частоты колебаний самой полости.

В следующих разделах 3 и 4 представлена задача об устойчивости вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью (Рис. 15). С учетом допущений $\omega_0^2 \ell / g \ll 1$ (ℓ – характерный размер) краевые задачи для обобщенных потенциалов имеют вид

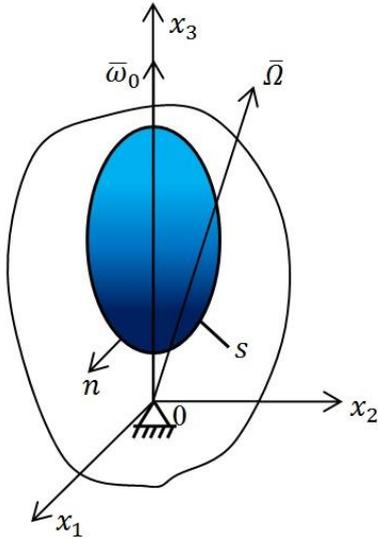


Рис. 15. Твердое тело с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной жидкостью

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{\lambda}{\det A(\lambda)} \left[L \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r}) \right] \right\} = 0 \text{ в } \tau, \quad (28)$$

$$j = 1, 2, 3 \dots$$

$$\vec{n} \cdot \left[L \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r}) \right] = 0 \text{ на } S.$$

Далее рассмотрена задача о собственных колебаниях свободного вращающегося твердого тела с стратифицированной жидкостью. В предположении, что момент внешних сил относительно точки O равен нулю и точка O совпадает с центром масс динамически симметричного твёрдого тела с затвердевшей жидкостью, возмущённое движение вращающегося твёрдого тела описывается уравнением

$$\begin{aligned} & \left(J_0 + I_0^{(1)} \right) \cdot \ddot{\vec{\theta}} + \omega_0 \vec{e}_3 \times \left[\left(J_0 + I_0^{(1)} \right) \cdot \dot{\vec{\theta}} - J_{33} \dot{\vec{\theta}} \right] + \\ & + \omega_0 I_0^{(2)} \cdot \dot{\vec{\theta}} + g I_0^{(3)} \cdot \vec{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}} = \lambda \vec{\theta}_0 e^{\lambda t}$; $J_{ijk} = J_{jk}^0 + J'_{jk}$; $(J_{ijk} = J_{okj}; j, k = 1, 2, 3)$.

Здесь J_{jk}^0 – моменты инерции твёрдого тела, J'_{jk} – момент инерции затвердевшей жидкости.

Компоненты тензоров для определения влияния движения криогенной жидкости в полости подвижного твердого тела имеют вид

$$I_{jk}^{(1)} = \frac{1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{e}_j) \cdot \left[L \cdot (\nabla \varphi_k - \vec{e}_k \times \vec{r}) \right] d\tau, \quad (30)$$

$$I_{kj}^{(2)} = - \int_{\tau} \rho_0' \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3 \times \vec{r})_k d\tau; \quad (31)$$

$$I_{kj}^{(3)} = \int_{\tau} \rho_0^* \frac{N^2}{4\omega_0^2} \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3)_k d\tau \quad (32)$$

Задача на собственные колебания для вращающегося тела с жидкостью, записанная матричном виде, будет

$$\begin{pmatrix} q^2 K_{11} - \frac{q}{2} (K_{21} + I_{11}^{(2)}) + F_r^2 I_{11}^{(3)} & q^2 K_{12} - \frac{q}{2} (K_{22} + I_{12}^{(2)} - J_{33}) + F_r^2 I_{12}^{(3)} & q^2 K_{13} - \frac{q}{2} K_{23} \\ q^2 K_{21} + \frac{q}{2} (K_{11} - I_{21}^{(2)} - J_{33}) + F_r^2 I_{21}^{(3)} & q^2 K_{22} + \frac{q}{2} (K_{12} - I_{22}^{(2)}) + F_r^2 I_{22}^{(3)} & q^2 K_{23} + \frac{q}{2} K_{13} \\ q^2 K_{31} & q^2 K_{32} & q^2 K_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (33)$$

где

$$K_{jk} = J_{ojk} + I_{jk}^{(1)}; \quad F_r^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}; \quad q = \frac{\lambda}{2\omega_0}; \quad (34)$$

Используя матричное уравнение (33) было получено характеристическое уравнение, которое исследовалось в следующих случаях:

- А) вращение твёрдого тела с затвердевшей жидкостью,
- Б) вращение динамически симметричного твёрдого тела с однородной жидкостью, имеющего полость в виде эллипсоида вращения,
- В) вращение твёрдого тела со стратифицированной жидкостью.

В главе 4 получены области неустойчивости вращения твердого тела со стратифицированной жидкостью в следующих случаях:

- а) случай невесомости, но с учетом инерции твёрдого тела,
- б) случай когда момент инерции твёрдого тела равен нулю.

После громоздких несложных преобразований характеристическое уравнение, записывается в безразмерном виде

$$2q^3 \left[\bar{J}_{11} (1 + \bar{a}_3^2) - \bar{\gamma} \alpha \bar{a}_3^2 \right] + q^2 \left[\Delta (1 + \bar{a}_3^2) - 2\bar{J}_{11} + \bar{\gamma} \alpha^* \bar{a}_3^2 \right] - q \left[2\bar{J}_{11} \bar{a}_3^2 F_r^2 + \bar{\Delta} - \bar{\gamma} \bar{a}_3^2 F_r^2 \right] - \bar{\Delta} \bar{a}_3^2 F_r^2 = 0; \quad (35)$$

где $\bar{J}_{11} = \frac{J_{11}}{\rho_0^* d a_1^5}; \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{\rho_0^* d a_1^5}; \quad \Delta = y = J_{33} - J_{11}; \quad \bar{\gamma} = \frac{16}{15} \pi \bar{a}_3; \quad \bar{a}_3 = \frac{a_3}{a_1};$

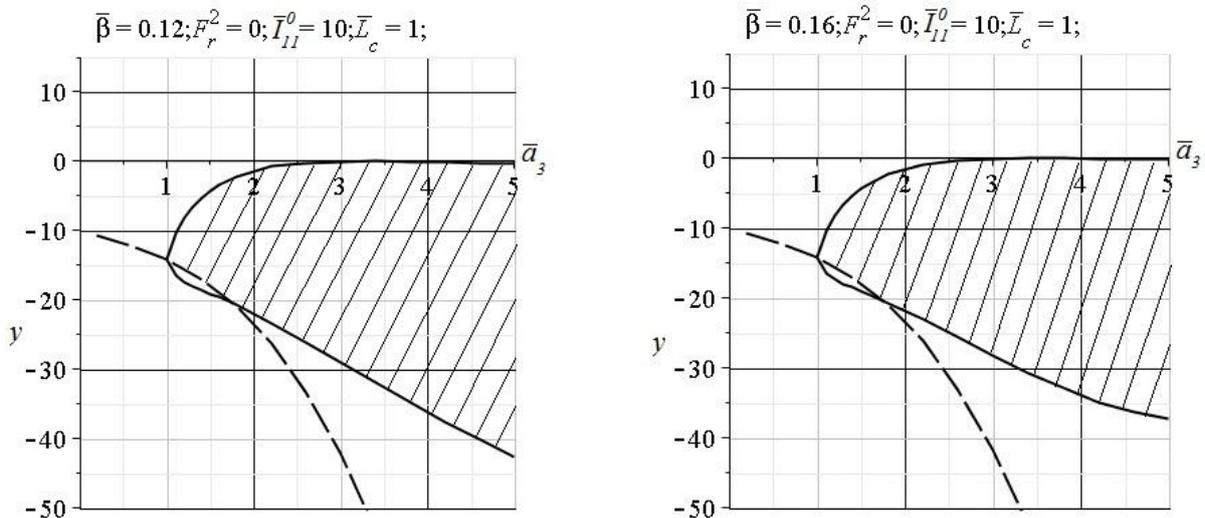
$\alpha = 1 - \frac{3}{2} \frac{\beta}{d} l_0; \quad \alpha^* = 1 - 2 \frac{\beta}{d} l_0; \quad d = 1 - \beta l_0.$

Условие устойчивого стационарного вращения имеет вид неравенства

$$D < 0$$

где D - дискриминант кубического уравнения.

Области устойчивости вращения твёрдого тела с криогенной жидкостью и с учётом инерции твёрдого тела представлены на Рис. 16. (зоны неустойчивости заштрихованы)



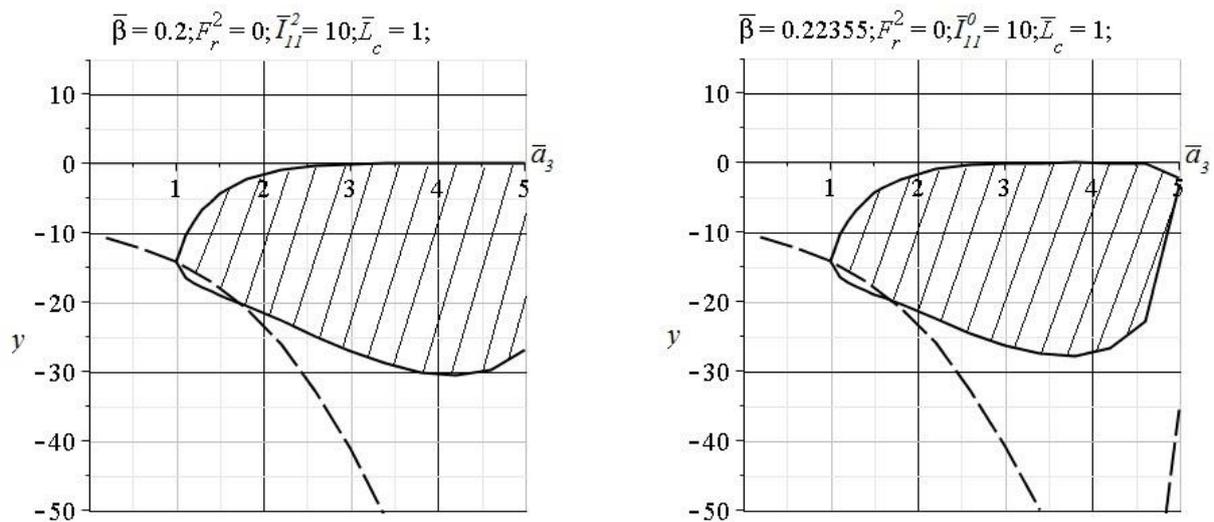


Рис. 16. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с криогенной жидкостью ($F_r^2 = 0$)

Для случая безмассовой оболочки твёрдого тела области устойчивости для разных чисел Фруда F_r^2 приведены на Рис. 17.

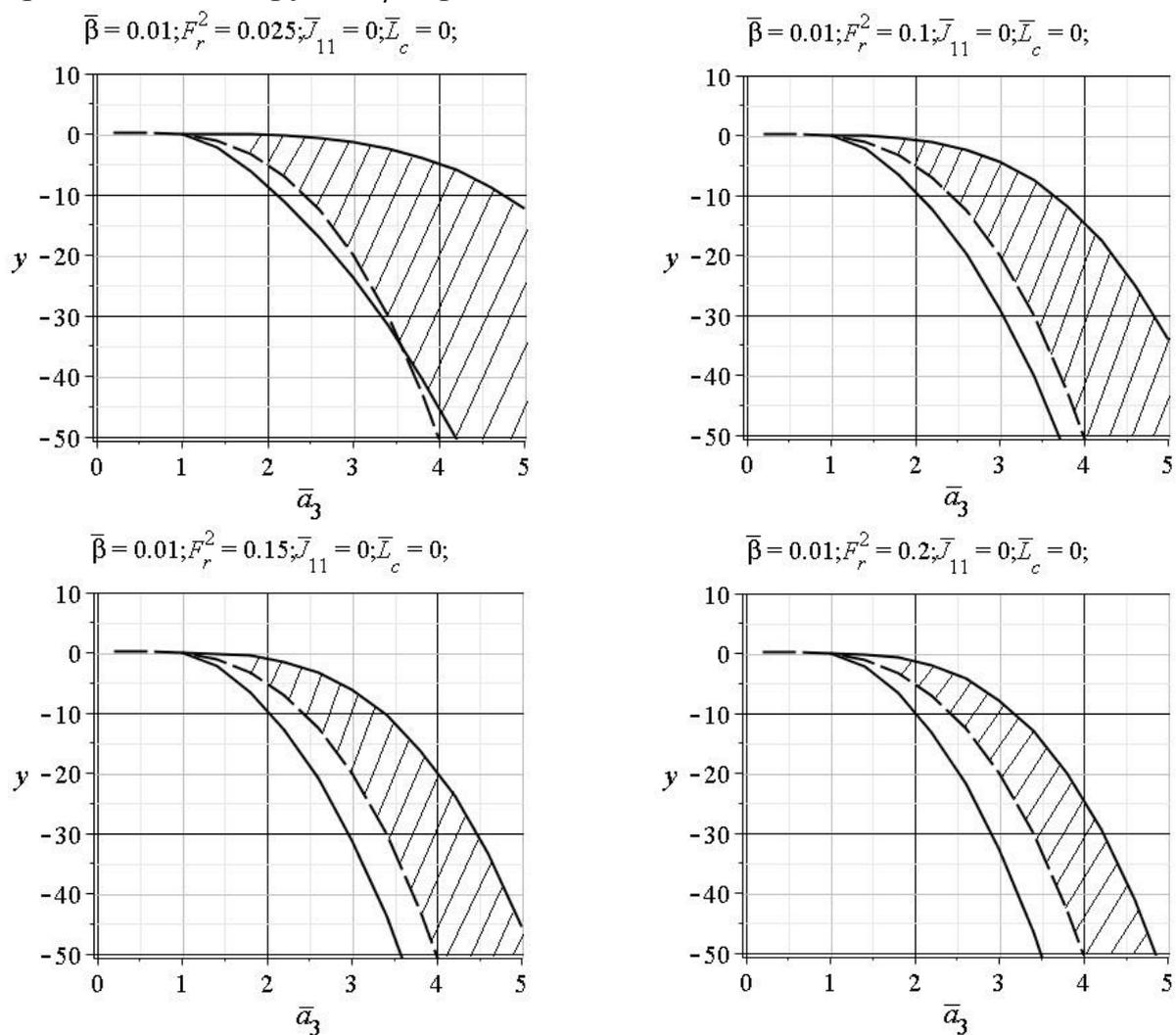


Рис. 17. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с криогенной жидкостью ($F_r^2 \neq 0$)

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

- В устойчиво стратифицированной жидкости, частично заполняющей цилиндрический резервуар, произвольного поперечного сечения существуют поверхностные и внутренние волны.
 - Расслоение в криогенной жидкости приводит к уменьшению частоты колебаний поверхностных волн, а наличие свободной поверхности к уменьшению частоты колебаний внутренних волн.
 - Разработаны методы определения собственных частот внутренних волн для произвольного закона распределения плотности. Достоверность полученных численных результатов подтверждена совпадением с результатом вычисления частот по аналитическим формулам, получаемых из решений дифференциальных уравнений с постоянной частотой плавучести.
 - Механический эффект неоднородной жидкой массы, совершающей квазипотенциальное движение в полностью наполненном сосуде, будет эквивалентен действию «затвердевшей» жидкой массы и твердого тела, обладающего количеством движения \vec{Q}' и моментом количества движения \vec{M}' , присоединенных к несущему твердому телу и образующих в совокупности систему твердых тел.
 - Гидродинамическое воздействие стратифицированной жидкости на движение твёрдого тела в случае цилиндрической полости определяется счетным множеством парциальных движений, а в случае эллипсоидальной полости гидродинамическое воздействие стратифицированной жидкости создается конечным числом парциальных движений.
 - Выполненные численные расчёты показывают отличие инерционных характеристик твёрдого тела с криогенной жидкостью от случая движения тела с однородной жидкостью.
 - Устойчивая стратификация жидкости приводит к уменьшению областей неустойчивости вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью целиком наполненной жидкостью.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Ай Мин Вин. Динамика стратифицированной жидкости и твёрдых тел с жидкостью в условиях транспортировки // Сборник научных докладов. XIV международный симпозиум «Уникальные феномены и универсальные ценности культуры». 2012. С. 290-292.
2. Темнов А. Н., Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки, 2012. С. 86-101.
3. Ай Мин Вин, Темнов А. Н. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела // Труды XXXVII академических чтений по космонавтике. 2013. С. 76.
4. Ай Мин Вин, Темнов А. Н. О движении твёрдого тела с криогенной жидкостью // Наука и образование, Электрон. журн., № 12, 2013. 19 с. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/627898.html> (дата обращения 13.04.2015)

5. Ай Мин Вин. Динамика твёрдого тела с криогенной жидкостью // Международная молодежная научная конференция «XL Гагаринские чтения». 2014. С. 265-266.
6. Ай Мин Вин. Колебания криогенной жидкости в неподвижном баке // Наука и образование, Электрон. журн., № 9, 2014. 9 с. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/726215.html> (дата обращения 13.04.2015)
7. Ай Мин Вин, Темнов А. Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. Электрон. журн., Вып. 79, 2015. 23 с. URL: <https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=55633> (дата обращения 13.04.2015)