

Труды МАИ. 2024. № 135
Trudy MAI, 2024, no. 135

Научная статья
УДК 539.3;517.9
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179680>

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ДВУХ СООСНЫХ ОБОЛОЧКАХ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА С КОМБИНИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ МЕЖДУ НИМИ И ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБОЛОЧКЕ

Елизавета Викторовна Попова

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
СГТУ, Саратов, Россия

elizaveta.popova.97@bk.ru

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы постановки задачи гидроупругости для двух соосных цилиндрических оболочек типа Кирхгофа-Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке. Материал оболочек рассматривается как несжимаемый и имеющий нелинейный закон связи напряжений с деформацией и интенсивностью деформаций. Получены уравнения динамики оболочек для случая, когда указанный закон имеет жесткую комбинированную нелинейность в виде степенной функции с дробным показателем степени и квадратичной функции. Динамика вязкой жидкости рассматривается в рамках гидродинамической теории смазки, т.е. движение жидкости принимается ползущим. Используя метод двухмасштабных разложений проведен

асимптотический анализ сформулированной задачи гидроупругости. В результате получена система двух эволюционных уравнений для моделирования распространения нелинейных продольных волн деформации в оболочках. Показано, что в случае несжимаемого материала оболочек наличие вязкой жидкости во внутренней оболочке не сказывается на волновом процессе. Уравнения системы представляют собой обобщенные уравнения Кортевега-де Вриза-Шамеля. Найдено точное частное решение полученной системы эволюционных уравнений в виде уединенной волны с произвольным волновым числом для случая, когда данная волна распространяется в каждой из оболочек. Для проведения численного моделирования получена новая разностная схема для нелинейной системы двух обобщенных уравнений Кортевега-де Вриза-Шамеля на основе применения техники базисов Гребнера. Проведены вычислительные эксперименты по исследованию эволюции уединенных продольных волн деформаций, возбуждаемых в оболочках. Численное моделирование показало, что уединенные нелинейные волны деформации в оболочках являются сверхзвуковыми солитонами, а также передачу энергии от одной оболочки к другой за счет вязкости жидкости, находящейся между ними.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейные волны деформации, соосные оболочки, вязкая жидкость, несжимаемый материал, комбинированная нелинейность, вычислительный эксперимент

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект № 23-29-00140

Для цитирования. Попова Е.В. Моделирование эволюции уединенных волн деформации в двух соосных оболочках из несжимаемого материала с комбинированной нелинейностью, содержащих вязкую жидкость между ними и во внутренней оболочке // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179680>

Original article

MODELING THE EVOLUTION OF SOLITARY STRAIN WAVES IN TWO COAXIAL SHELLS OF INCOMPRESSIBLE MATERIAL WITH COMBINED NONLINEARITY, CONTAINING A VISCOUS FLUID BETWEEN THEM AND IN THE INNER SHELL

Elizaveta V. Popova

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
Saratov, Russia

elizaveta.popova.97@bk.ru

Abstract. The article deals with the hydroelasticity problem formulation for the two coaxial cylindrical shells of the Kirchhoff-Love type, containing a viscous incompressible fluid in the annular gap and in the inner shell. The material of the shells is considered as incompressible and of a nonlinear law of stress-strain relationship and strain intensity. The shell dynamics equations are obtained for the case when this law has a tough combined nonlinearity in the form of a function with a fractional exponent and a quadratic function. The viscous fluid dynamics are being considered in the framework of the hydrodynamic theory of lubrication, i.e., the fluid motion is assumed to be creeping. The asymptotic

analysis of the formulated problem of hydroelasticity is performed applying the two-scale perturbation method. As the result, a system of two evolution equations for modeling the onlinear longitudinal strain waves propagation in shells is obtained. It demonstrated that in the case of incompressible shell material, the presence of viscous fluid in the inner shell does not affect the wave process. The equations of the system represent the Korteweg-de Vries-Schamel equations. The exact partial solution for the obtained system of evolution equations in the form of a solitary wave with an arbitrary wave number is found for the case when that wave propagates in each of the shells. The new difference scheme for the nonlinear system of two generalized Korteweg-de Vries-Schamel equations based on the application of the Gröbner basis technique is derived for numerical simulations. Computational experiments have been performed to study the evolution of solitary longitudinal strain waves excited in shells. Numerical modeling has revealed that solitary nonlinear strain waves in the shells are supersonic solitons, as well as the presence of the energy transfer from one shell to another due to the fluid viscosity between them.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear strain waves, coaxial shells, viscous fluid, incompressible material, combined nonlinearity, computational experiment

Funding: the study was funded by Russian Science Foundation (RSF) according to the project No. 23-29-00140

For citation: Popova E.V. Modeling the evolution of solitary strain waves in two coaxial shells of incompressible material with combined nonlinearity, containing a viscous fluid between them and in the inner shell. *Trudy MAI*, 2024, no. 135. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179680>

Введение

Цилиндрические оболочки используются в различных инженерных конструкциях авиакосмической техники, и, в частности, в трубопроводных системах для транспортировки различных жидкостей. Для данных систем актуальными и практически важными являются вопросы их волновой динамики как фундаментальная основа методов волновой неразрушающей диагностики, а также для практических расчетов. Например, рассматривая проблему гидроудара в трубопроводах используют линейную волновую теорию [1]. В рамках такого подхода в [2] проведено моделирование распространения волны гидравлического удара в трубопроводе с установленным на нем стабилизатором давления. С другой стороны, исследование проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью, их заполняющей, сопряжены с рассмотрением задач гидроупругости [3]. Первые исследования волновых процессов в системах упругая оболочка-жидкость выполнены в линейной постановке. Среди таких работ отметим [4], где исследовано осесимметричное волновое движение несжимаемой жидкости в тонкой упругой цилиндрической трубке и определена скорость распространения волны давления жидкости с учетом инерции движения стенок и сил вязкого трения жидкости, а также [5], посвященную исследованию волнового пульсирующего движения вязкой несжимаемой жидкости по тонкостенной упругой трубе кругового сечения применительно к изучению кровотока в сосудах. Современное состояние исследований в области гидроупругости цилиндрических оболочек дано в [6-8].

Можно отметить, что в большинстве исследований рассматривается идеальная жидкость и обсуждаются задачи без учета нелинейных волновых процессов в оболочках. Приведем ниже ряд работ, в которых изучены данные вопросы. В [9, 10] исследовано распространение нелинейных уединенных волн в геометрически нелинейной цилиндрической оболочке, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Осуществлена постановка осесимметричной задачи гидроупругости, и на основе ее асимптотического анализа получено уравнение Кортевега–де Вриза для прогиба оболочки. Представлены численные примеры расчетов эволюции уединенных волн в оболочке для случаев: отсутствия в ней жидкости, ее полного заполнения жидкостью и движения в ней стационарного потока жидкости с постоянной скоростью. В [11] сформулирована осесимметричная задача гидроупругости для физически нелинейной цилиндрической оболочки с конструкционным демпфированием в продольном направлении, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью и окруженной средой Винклера. Используя метод возмущений получено эволюционное уравнение для продольных волн деформации в оболочке, обобщающее модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза и проведено его численное исследование. Моделирование нелинейных продольных волн деформации в физически нелинейной оболочке, заполненной вязкой жидкостью и окруженной с нелинейной реакцией в продольном направлении проведено в [12]. Показано, что наличие окружающей среды приводит к интегро-дифференциальному уравнению, обобщающему уравнение Кортевега - де Вриза и для его численного исследования получена новая разносная схема. Проведено численное решение уравнения, с целью оценки влияния жидкости и окружающей

упругой среды на эволюцию нелинейных уединенных волн деформации. В [13, 14] исследованы продольные уединенные волны деформации в двух коаксиальных оболочках, между которыми находится вязкая жидкость. В [13] учтена инерция движения вязкой жидкости в кольцевом зазоре, получена и численно исследована система двух обобщенных модифицированных уравнений Кортевега–де Вриза–Бюргера для оболочек с конструкционным демпфированием, материал которых имеет физический закон с кубической нелинейностью и окруженных упругой средой Винклера. В [14] движение вязкой жидкости в кольцевом зазоре рассмотрено как ползущее, получена и численно исследована система двух обобщенных уравнений Шамеля для цилиндрических оболочек, материал которых имеет физический закон связи напряжений с деформациями и интенсивностью деформаций с дробным показателем степени нелинейного члена. Дальнейшее развитие данного исследования осуществлено в [15, 16] за счет рассмотрения случая заполнения вязкой жидкостью внутренней оболочки. В частности, в [15] рассмотрен случай несжимаемого материала оболочки и ползущего движения жидкости, а в [16] учтены сжимаемость материала оболочки и инерция движения жидкости в кольцевом зазоре между оболочками и во внутренней оболочке.

Предлагаемое исследование нацелено на изучение эволюции уединенных волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках, материал которых несжимаем и имеет комбинированный нелинейный физический закон, а оболочки образуют каналы кольцевого и кругового сечений, заполненные вязкой несжимаемой жидкостью.

Постановка задачи гидроупругости соосных оболочек

Рассмотрим две цилиндрические оболочки, изготовленные из одинакового материала и имеющие общую продольную ось симметрии. Полагаем, что пространство между оболочками и внутренняя оболочка, полностью заполнены сильно вязкой жидкостью (см. рис.1). Изучая волновой процесс в оболочках будем считать, что они бесконечно длинные, т.е. исключать из рассмотрения отражение волн от торцов. Будем полагать, что движения вязкой жидкости ползущее.

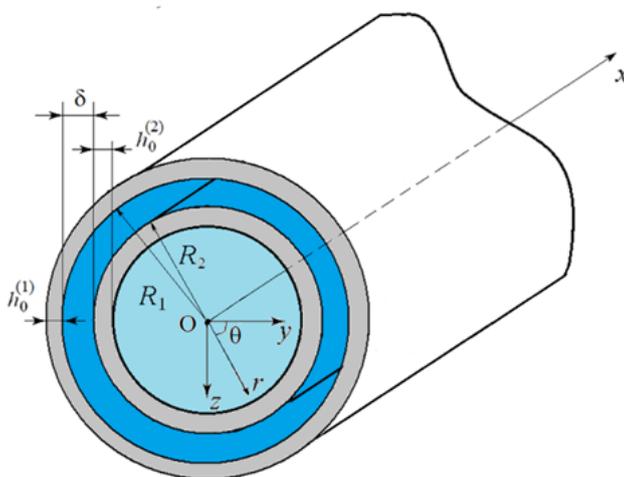


Рис.1. Соосные цилиндрические оболочки, содержащие вязкую жидкость

Вдоль оси симметрии направим ось x декартовой системы координат xuz , центр которой находится в точке O произвольного (начального) поперечного сечения. С этой же точкой совместим центр цилиндрической системы координат $r\theta x$. Будем изучать осесимметричный волновой процесс, эволюция которого происходит в положительном направлении оси x . Радиус внутренней поверхности внешней оболочки R_1 , а R_2 - радиус внешней поверхности внутренней оболочки, тогда в невозмущенном состоянии зазор между оболочками $\delta = R_1 - R_2$. Введем

обозначение толщины для i -ой оболочки как $h_0^{(i)}$, а $R^{(i)}$ для радиуса ее срединной поверхности, где $i = 1$ соответствует внешней, а $i = 2$ - внутренней оболочке. Принимая это во внимание, верхним индексом i будем обозначать параметры, соответствующие i -ой оболочке.

Полагаем, что оболочки удовлетворяют гипотезам Киргофа-Лява и запишем уравнения их динамики согласно [17] учитывая нагрузку на оболочки со стороны вязкой жидкости

$$\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - (q_x^{(i)} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial r} + (i-1)(q_x^{cir} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{cir}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{cir}}{\partial r})) \Big|_{R^{(i)}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\theta^{(i)} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} -$$

$$- ((-1)^{i-1} (q_n + U^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial r}) + (i-1)(q_n^{cir} + U^{(i)} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial r})) \Big|_{R^{(i)}}, \text{ где } i = 1, 2.$$

В уравнениях (1) приняты следующие обозначения: $M_x^{(i)}$ – изгибающий момент в элементе срединной поверхности i -ой оболочки, $N_x^{(i)}$, $N_\theta^{(i)}$ – нормальные силы, вдоль соответствующих осей x и θ , элемента срединной поверхности i -ой оболочки, $W^{(i)}$ – перемещение элемента срединной поверхности по нормали (прогиб) i -ой оболочки, положительное направление которого принято к центру кривизны оболочки, $U^{(i)}$ – продольное перемещение элемента срединной поверхности i -ой оболочки, $q_x^{(i)}$, q_n – касательное и нормальное напряжения вязкой жидкости, находящейся между оболочками, q_x^{cir} , q_n^{cir} – касательное и нормальное напряжения жидкости, заполняющей внутреннюю оболочку, t – время, ρ_0 – плотность материала оболочек.

Момент $M_x^{(i)}$ и нормальные силы $N_x^{(i)}$, $N_\theta^{(i)}$ определяются как [17]

$$M_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} z dz, \quad N_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} dz, \quad N_\theta^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_\theta^{(i)} dz, \quad (2)$$

где $\sigma_x^{(i)}$, $\sigma_\theta^{(i)}$ – нормальные напряжения, вдоль соответствующих осей x и θ , в элементе i -ой оболочки, z – локальная координата нормальная к срединной поверхности i -ой оболочки.

Для записи уравнений (1) в перемещениях необходимо задать физический закон, связывающий напряжения и деформации в материале оболочек. В случае физически нелинейного материала для аппроксимации экспериментально определенных диаграмм его деформирования используют нелинейные степенные зависимости: квадратичную, кубическую или дробную, а также их комбинации [18]. Например, случай физического закона с мягкой дробной или комбинированной мягкой дробной и квадратичной нелинейностью исследован в [19, 20] для синтетических несжимаемых материалов на основе эпоксидных смол. Такая аппроксимация позволяет отразить факт ограничения роста напряжений с ростом деформации. В предлагаемом исследовании используем аппроксимацию в виде физического закона с жесткой комбинированной дробно-квадратической нелинейностью. Это позволяет отразить эффект упрочнение материала, т.е. наличие у диаграмм напряжение-деформация участков нелинейного роста напряжений с ростом деформации. Например, такое поведение характерно для биотканей – кожи, сосудов кровеносной системы животных и человека [21]. С учетом сказанного, далее будем рассматривать несжимаемый материал, т.е. как в [19, 20] полагать коэффициент Пуассона $\mu_0 = 1/2$ и запишем связь компонент тензора напряжений σ_x , σ_θ с компонентами тензора деформаций ε_x , ε_θ и интенсивностью деформаций ε_u по

[22] в виде

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{4E}{3} \left[(\varepsilon_x^{(i)} + \frac{1}{2} \varepsilon_\theta^{(i)}) \left\{ 1 + \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)1/2} + \frac{m_2}{E} \varepsilon_u^{(i)} \right\} \right], \quad (3)$$

$$\sigma_\theta^{(i)} = \frac{4E}{3} \left[\left(\frac{1}{2} \varepsilon_x^{(i)} + \varepsilon_\theta^{(i)} \right) \left\{ 1 + \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)1/2} + \frac{m_2}{E} \varepsilon_u^{(i)} \right\} \right], \quad \varepsilon_u^{(i)} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\varepsilon_x^{(i)2} + \varepsilon_\theta^{(i)2} + \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_\theta^{(i)}]^{1/2}.$$

В выражениях (3) E - модуль Юнга, m , m_2 рассматриваем как положительные константы материала, имеющие размерность напряжений и определяемые из опытов на растяжение-сжатие нелинейно-упругого материала оболочек [23]. Заметим, что синтетические материалы на основе эпоксидных смол с мягкой физической квадратичной или комбинированной нелинейностью, соответствуют (3), если считать, аналогично [19, 20], что $m < 0$, $m_2 = 0$ или $m < 0$, $m_2 < 0$.

Полагаем, что деформации и упругие перемещения элемента i -ой оболочки связаны между собой как [15, 16]

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}}, \quad -h_0^{(i)}/2 \leq z \leq h_0^{(i)}/2. \quad (4)$$

Подставим (3), (4) в (2), а затем в (1) рассматривая аналогично [15, 16] интенсивность деформаций на срединной поверхности оболочек, т.е. при $z = 0$. В результате получаем уравнения динамики рассматриваемых соосных оболочек, материал которых имеет физический закон с комбинированной дробно-квадратической нелинейностью, записанные в перемещениях

$$\frac{4Eh_0^{(i)}}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] - \right. \right. \quad (5)$$

$$\left. \left. - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\}^{1/4} + \frac{m_2}{E} \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/2} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - (q_x^{(i)} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial r} + (i-1)(q_x^{cir} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{cir}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{cir}}{\partial r})) \Big|_{R^{(i)}}, \\
&\frac{E h_0^{(i)}}{9} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle -\frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right\rangle + \frac{4E h_0}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right. \\
&+ \left. \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[\left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/4} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{m_2}{E} \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/2} \right] \right\rangle + \frac{4E h_0^{(i)}}{3} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right. \\
&+ \left. \left[\frac{1}{2} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[\left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/4} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{m_2}{E \sqrt{3}} \left[\left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/2} \right] \right\rangle \\
&= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - \\
&- ((-1)^{i-1} (q_n + U^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial r}) + (i-1)(q_n^{cir} + U^{(i)} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial r})) \Big|_{R^{(i)}}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Заметим, что в (1), (5) правые части, т.е. нагрузка на оболочки, представляют собой касательные и нормальные напряжения вязкой несжимаемой жидкости, записанные в лагранжево-эйлеровом подходе [24]. Нагрузка снесена на невозмущенные срединные поверхности оболочек, как это принято в задачах гидроупругости [3]. Выражения для $q_x^{(i)}$, q_n и q_x^{cir} , q_n^{cir} на невозмущенных срединных поверхностях оболочек запишутся в подходе Эйлера как [25]

$$q_x^{(i)} = -\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \text{ при } r=R^{(i)}, \quad q_n^{(i)} = -p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \text{ при } r=R^{(i)}. \quad (6)$$

Здесь принимаем во внимание, что выражения для q_x^{cir} , q_n^{cir} совпадают с (6) при $i=2$. В случае, если физические свойства жидкости в кольцевой щели и

внутренней оболочке разные, то полагая в (6) $i = 2$, также обозначаем плотность и кинематическую вязкость жидкости во внутренней оболочке как ρ_c и ν_c .

Для определения (6) совместно с (5) необходимо рассмотрение уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между оболочками и во внутренней оболочке. Запишем данные уравнения для случая ползущего движения вязкой жидкости [25]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} V_r + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0.$$

где V_x , V_r – проекции скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат, p – давление в жидкости, ρ – плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости.

Дополним (7) краевыми условиями прилипания жидкости, находящейся между оболочками (канал кольцевого сечения) и во внутренней оболочке (канал круглого сечения) к их поверхностям. Для канала кольцевого сечения эти условия имеют вид

$$V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r} = - \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r = R_i - W^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Для канала круглого сечения они аналогичны, если принять в (8) $r = (R_i - h_0^{(i)}) - W^{(i)}$ и $i = 2$. Для компонент скорости на оси симметрии для вязкой жидкости во внутренней оболочке, используем условия, предложенные в [16] Могилевичем Л.И., которые автоматически исключают в общем решении степенную и логарифмическую особенности

$$rV_r = 0, \quad r \frac{\partial V_x}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0. \quad (9)$$

Асимптотический анализ задачи гидроупругости методом возмущений.

Система эволюционных уравнений

Рассматривая волновой процесс в оболочках полагаем, что имеют место следующие соотношения

$$\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1), \quad \frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} = O(1), \quad \frac{m}{E} = O(1), \quad \frac{m_2}{E} = O(\varepsilon^{-1/2}), \quad (10)$$

и используем безразмерные переменные

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad x^* = x/l, \quad t^* = t c_0/l, \quad r^* = r/R^{(i)}, \quad (11)$$

где $c_0 = 2/\sqrt{3} \sqrt{E/\rho_0}$ – скорость звука в материале оболочки, l – длина волны, принимаемая за характерный линейный масштаб, u_m , w_m – характерные масштабы упругих перемещений оболочек, ε – малый параметр задачи.

Проведем анализ уравнений (5) методом возмущений [26] рассматривая асимптотические разложения функций упругих перемещений оболочек

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{31}^{(i)} + \dots \quad (12)$$

и вводя новые независимые переменные ξ и τ

$$\xi = x^* - t^* \sqrt{3}/2, \quad \tau = \varepsilon^{1/2} t^*. \quad (13)$$

Записывая (5) в безразмерном виде с учетом (10)-(13) и ограничиваясь первым членом в (12) имеем систему (нулевое приближение по ε)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} u_{30}^{(i)} \right\rangle = \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} = u_{30}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

а ограничиваясь первыми двумя членами в (12), с учетом второго уравнения (14), получим систему (первое приближения по ε)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} \right) + \frac{m}{E} \frac{3}{4} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^{3/2} + \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \right\rangle + \sqrt{3} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} = \\ & = - \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (q_x^{(i)} + (i-1)q_x^{cir}) \Big|_{R^{(i)}}, \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} - \frac{3}{8} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} = - \frac{R^{(i)}}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} ((-1)^{i-1} q_n^{(i)} + (i-1)q_n^{cir}) \Big|_{R^{(i)}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим систему (14) и подставим прогиб из второго уравнения в первое, в результате получаем тождество. Следовательно, продольное перемещение $u_{10}^{(i)}$ - произвольная функция. Кроме того, заметим, что первый член разложения (12) соответствует линейному волновому процессу, эволюция которого происходит со скоростью звука, а учет второго члена позволяет получить добавку, обусловленную нелинейным волновым процессом.

Рассматривая систему (15) исключим из нее u_{11} , u_{31} в результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3\sqrt{3}}{8} \left| \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right|^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3/2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\ & = - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} + (i-1)q_x^{cir} - \frac{1}{2} \varepsilon^{1/4} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + (i-1)q_n^{cir})}{\partial \xi} \right] \Big|_{R^{(i)}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения, входящие в систему (16) являются обобщениями уравнения Кортевега–де Вриза–Шамеля для продольной деформации $\partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi$. Отметим, что исключение из рассмотрения жидкости между оболочками и во внутренней оболочке эквивалентно полаганию $q_x^{(i)} = q_n = q_x^{cir} = q_n^{cir} = 0$. В этом случае система (16) распадается на два независимых уравнения Кортевега–де Вриза–Шамеля для

внешней и внутренней оболочки.

Для определения $q_x^{(i)}$, q_n , q_x^{cir} , q_n^{cir} проведем асимптотический анализ уравнений динамики жидкости (7)-(9) между оболочками и во внутренней оболочке аналогично [15, 16]. С этой целью для жидкости между оболочками (канал кольцевого сечения) вводим безразмерные переменные вида

$$V_r = h_0^{(i)} \frac{c_0}{l} v_r, V_x = h_0^{(i)} \frac{c_0}{\delta} v_x, r^* = \frac{r - R^{(2)}}{\delta}, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l}, p = \frac{\rho v c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3} P, \quad (17)$$

а для жидкости во внутренней оболочке (канал кругового сечения) используем следующие безразмерные переменные

$$V_r = h_0^{(i)} \frac{c_0}{l} v_r, V_x = h_0^{(i)} \frac{c_0}{R^{(2)}} v_x, r^* = \frac{r}{R^{(2)}}, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{1}{l} x, p = \frac{\rho v c_0 h_0^{(i)}}{R^{(2)3}} P. \quad (18)$$

Учитываем, что в рассматриваемой постановке для канала кольцевого сечения имеют место следующие соотношения

$$\psi = \frac{\delta}{R^{(2)}} = \varepsilon^{1/2}, \lambda = \frac{h_0^{(i)}}{\delta} = \varepsilon^{1/2}, \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon, \frac{h_0^{(i)}}{l} = \varepsilon^{5/4}, \frac{\delta}{l} = \varepsilon^{3/4}, \quad (19)$$

а для канала круглого сечения мы принимаем

$$\frac{R^{(2)}}{l} = \psi_c = O(\varepsilon^{1/4}), \lambda_c = \frac{h_0^{(i)}}{R^{(2)}} = \varepsilon. \quad (20)$$

Тогда переходя в (6)-(9) к безразмерным переменным (17) или (18) с учетом (19) или (20), для каналов соответствующего сечения, рассмотрим следующие асимптотические разложения:

$$P = P^0 + \varepsilon^{1/2} P^1 + \dots, v_r = v_r^0 + \varepsilon^{1/2} v_r^1 + \dots, v_x = v_x^0 + \varepsilon^{1/2} v_x^1 + \dots. \quad (21)$$

Ограничиваясь в (21) первым членом получим линеаризованные задачи динамики вязкой жидкости в соответствующем канале.

Для канала кольцевого сечения уравнения гидродинамики примут вид

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0, \quad (22)$$

с краевыми условиями

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \text{ при } r^* = 1, \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \text{ при } r^* = 0. \quad (23)$$

Для канала кругового сечения уравнения гидродинамики запишутся как

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0, \quad (24)$$

с краевыми условиями

$$r^* v_r^0 = r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \text{ при } r^* = 0, \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \text{ при } r^* = 1. \quad (25)$$

Выражения для $q_x^{(i)}$, q_n , q_x^{cir} , q_n^{cir} запишутся как

$$q_x^{(i)} = -\rho \nu \frac{h_0^{(i)} c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \text{ при } r^* = 1 \text{ (для } i=1) \text{ или при } r^* = 0 \text{ (для } i=2), \quad q_n = -\frac{\rho \nu c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3} P^0. \quad (26)$$

$$q_x^{cir} = -\lambda_c \frac{v_c}{R^{(2)} c_0} \rho_c c_0^2 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}, \quad q_n^{cir} = -\frac{\lambda_c}{\psi_c} \frac{v_c}{R^{(2)} c_0} \rho_c c_0^2 P^0 \text{ при } r^* = 1. \quad (27)$$

Решение задач (22)-(25) проведено в [15] и определены давление P^0 и градиенты скорости $\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}$, а также показано, что в кольцевом канале

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = 6\sqrt{3}(u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}), \quad \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 3\sqrt{3}(u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}), \quad \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = -\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}. \quad (28)$$

а в канале кругового сечения

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = 4\sqrt{3} \left(2u_{30}^{(2)} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right), \quad \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 2\sqrt{3} \left(2u_{30}^{(2)} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right), \quad (29)$$

Тогда, принимая во внимание в (28) и (29), что при несжимаемом материале

согласно второго уравнения (14) $u_{30}^{(i)} = (1/2)\partial u_{10}^{(i)}/\partial \xi$, то для кольцевого канала имеем

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = 3\sqrt{3}(u_{10}^{(1)} - u_{10}^{(2)}), \quad \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(u_{10}^{(1)} - u_{10}^{(2)}), \quad \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = -\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}, \quad (30)$$

а для канала кругового сечения

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 0. \quad (31)$$

Можно отметить, что выражения (31) указывают на то, что в рассматриваемой постановке несжимаемость материала внутренней оболочки обуславливает исключение влияния вязкой жидкости, заполняющей внутреннюю оболочку, на нелинейный волновой процесс в оболочках. Аналогичный результат для случая несжимаемого материала с дробной нелинейностью имел место в [15].

Подставляя в (16) выражения (26), (27), (30), (31), а также учитывая малые параметры ψ , λ и принимая $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$, $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} = h_0$ получим следующую систему двух эволюционных уравнений

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3\sqrt{3}}{8} \left| \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right|^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3/2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} = \quad (32)$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right).$$

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3\sqrt{3}}{8} \left| \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right|^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} =$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right).$$

Заметим, что полученная система при исключении из рассмотрения жидкости, т.е. при правых частях равных нулю, и при $m_2 = 0$ распадается на два независимых

уравнения Шамеля. Данные уравнения при $m < 0$ совпадают с уравнением, полученным в [20], для оболочки с внутренними стрингерами и обшивкой из несжимаемого материала с мягкой дробной физической нелинейностью, при высоте стрингеров равной нулю.

Численное моделирование эволюции уединенных волн в соосных оболочках

Представим систему эволюционных уравнений (32) в виде

$$\varphi_t^{(1)} + 6\alpha_0 |\varphi^{(1)}|^{1/2} \varphi_\eta^{(1)} + 6\alpha_1 \varphi^{(1)} \varphi_\eta^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_0 (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) = 0, \quad (33)$$

$$\varphi_t^{(2)} + 6\alpha_0 |\varphi^{(2)}|^{1/2} \varphi_\eta^{(2)} + 6\alpha_1 \varphi^{(2)} \varphi_\eta^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \sigma_0 (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) = 0.$$

введя следующие обозначения

$$\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} = c_3 \varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} = c_3 \varphi^{(2)}, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau, \quad \sigma_0 = \frac{3}{2} \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \frac{\nu}{\delta c_0} \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{1}{c_2}, \quad (34)$$

$$\text{где } c_3 = \left[\frac{3}{4} \frac{m}{m_2 \varepsilon^{1/2}} \right]^2, \quad c_1 = \left[\frac{4}{3} \frac{c_3 m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \right]^{1/2}, \quad c_2 = \left[\frac{c_3 c_1}{4\sqrt{3}} \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \right].$$

Нижний индекс в системе (33) обозначает соответствующую частную производную, а система описывает эволюцию продольных нелинейных волн деформации в рассматриваемых оболочках. Если положить $\alpha_0 = 0$ осуществляется переход к системе уравнений, обобщающих уравнение Кортевега–де Вриза, при $\alpha_1 = 0$ получается система уравнений, обобщающих уравнение Шамеля, а при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ – система обобщенных уравнений Кортевега–де Вриза–Шамеля.

В общем случае система (33) требует численного решения. Однако отметим, что система имеет точное решение в виде уединенной волны

$$\varphi^{(1)}(t, \eta) = \varphi^{(2)}(t, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + \frac{25}{8} k^2 \alpha_1 \operatorname{ch}(k(\eta - 4k^2 t))} \right)^{-2}. \quad (35)$$

В этом решении k – волновое число, является произвольным. Указанное точное решение можно использовать в качестве начального условия при численном решении системы эволюционных уравнений (33) полагая в (35) $t = 0$ и принимая $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. В таком подходе можно рассматривать следующие варианты:

- в начальный момент времени в каждой из оболочек возбуждается уединенная волна с одним и тем же волновым числом

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \varphi^{(2)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25}{8} k^2 \operatorname{ch}(k\eta)} \right)^{-2}. \quad (36)$$

- в начальный момент времени уединенная волна возбуждается только во внешней оболочке

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25}{8} k^2 \operatorname{ch}(k\eta)} \right)^{-2}, \quad \varphi^{(2)}(0, \eta) = 0. \quad (37)$$

Кроме того, можно рассмотреть возбуждение в начальный момент времени двух волн с разными волновыми числами, т.е. с разными скоростями и амплитудами, в каждой из оболочек. В этом случае начальные условия для первой уединенной волны во внешней и внутренней оболочках задаем как

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \varphi^{(2)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k_1^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25}{8} k_1^2 \operatorname{ch}(k_1 \eta)} \right)^{-2}, \quad (38)$$

а для второй волны во внешней и внутренней оболочках задаем в виде

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \varphi^{(2)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k_2^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25}{8} k_2^2 \operatorname{ch}(k_2 \eta)} \right)^{-2}. \quad (39)$$

Здесь k_1, k_2 суть волновые числа, соответствующие первой и второй уединенным волнам, возбуждаемым в каждой из оболочек.

Для реализации численного решения системы нелинейных эволюционных уравнений (33) использован подход построения новых разностных схем для дискретизации уравнений в частных производных с помощью техники базисов Грёбнера [27, 28]. Последовательность получения разностной схемы, проверка ее адекватности и устойчивости аналогична [16], а сама полученная новая разностная схема для системы обобщенных уравнений Кортевега–де Вриза–Шамеля (33), т.е. при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 4 \frac{(u^{(1)3/2n+1}_{j+1} - u^{(1)3/2n+1}_{j-1}) + (u^{(1)3/2n}_{j+1} - u^{(1)3/2n}_{j-1})}{4h} + \\ & + 3 \frac{(u^{(1)2n+1}_{j+1} - u^{(1)2n+1}_{j-1}) + (u^{(1)2n}_{j+1} - u^{(1)2n}_{j-1})}{4h} + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\ & + \frac{(u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2})}{4h^3} + \sigma_0 \left(\frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} + 4 \frac{(u^{(2)3/2n+1}_{j+1} - u^{(2)3/2n+1}_{j-1}) + (u^{(2)3/2n}_{j+1} - u^{(2)3/2n}_{j-1})}{4h} + \\ & + 3 \frac{(u^{(2)2n+1}_{j+1} - u^{(2)2n+1}_{j-1}) + (u^{(2)2n}_{j+1} - u^{(2)2n}_{j-1})}{4h} + \frac{(u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\ & + \frac{(u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2})}{4h^3} + \sigma_0 \left(\frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Здесь введены дискретные сеточные функции $u^{(1)n}_j = \varphi^{(1)}(t_n, \eta_j)$, $u^{(2)n}_j = \varphi^{(2)}(t_n, \eta_j)$ и обозначено $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$.

Программная реализация разностной схемы (40) требует проведения

линеаризации нелинейных степенных сеточных функций с показателем степени $3/2$ и 2 для следующего временного слоя. Для осуществления данной процедуры предложены следующие расчетные соотношения

$$v_{k+1}^{3/2} = v_{k+1}^{3/2} - v_k^{3/2} + v_k^{3/2} = (v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2})(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2} + v_k) + v_k^{3/2} = \quad (41)$$

$$= (v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2})(v_{k+1} + v_k^{1/2}) \frac{(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2} + v_k)}{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}} + v_k^{3/2} \approx (v_{k+1} - v_k) \frac{3}{2} v_k^{1/2} + v_k^{3/2} = \frac{3}{2} v_k^{1/2} v_{k+1} - \frac{1}{2} v_k^{3/2},$$

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx (v_{k+1} - v_k)2v_k + v_k^2 = 2v_k v_{k+1} - v_k^2.$$

На базе разностной схемы (40) с линеаризацией по (41) реализован алгоритм численного решения на языке Python с помощью пакета SciPy (<http://scipy.org>) и проведены вычислительные эксперименты по моделированию процессов распространения уединенных волн в рассматриваемых оболочках при задании начальных условий вида (36)-(39). В ходе моделирования были рассмотрены следующие случаи:

- эволюция уединенных волн деформации в оболочках для случая $\sigma_0 = 1$ при возбуждении в начальный момент времени в каждой из оболочек волны вида (36) с $k = 0,2$ представлена на рис. 2.
- эволюция уединенных волн деформации в оболочках для случая $\sigma_0 = 1$ при возбуждении в начальный момент времени во внешней оболочке волны вида (37) с $k = 0,2$ представлена на рис. 3.
- эволюция уединенных волн деформации с разными амплитудами и скоростями в каждой из оболочек для случая $\sigma_0 = 1$ при возбуждении в начальный момент времени в каждой оболочке двух волн вида (38), (39) (первая волна (38) с $k_1 = 0,225$ и начальным значением пространственной переменной $\eta = -50$, а вторая волна (39) с

$k_2 = 0,2$ и начальным $\eta = 0$) представлена на рис. 4.

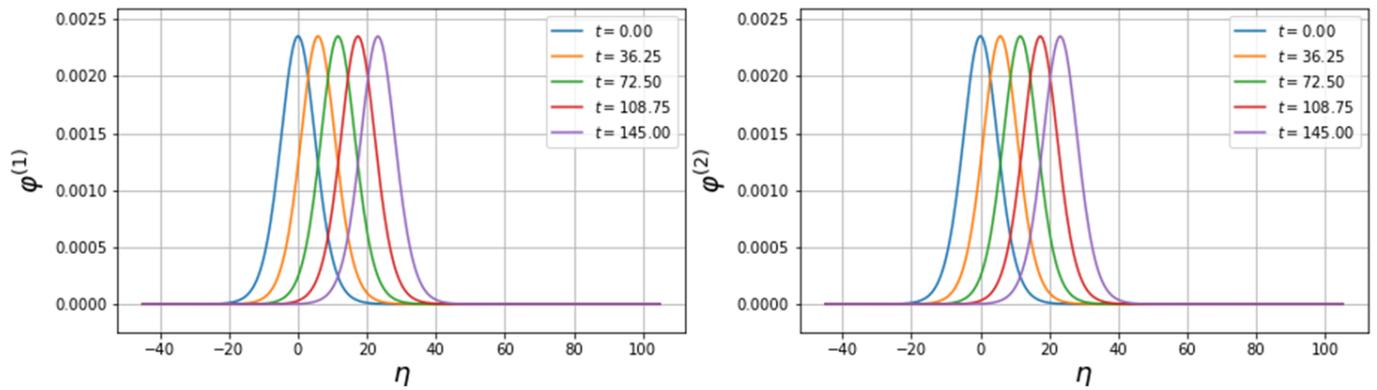


Рис. 2. Результаты численного решения системы (33) при $\sigma_0 = 1$ с начальными условиями (36) с волновым числом $k = 0,2$

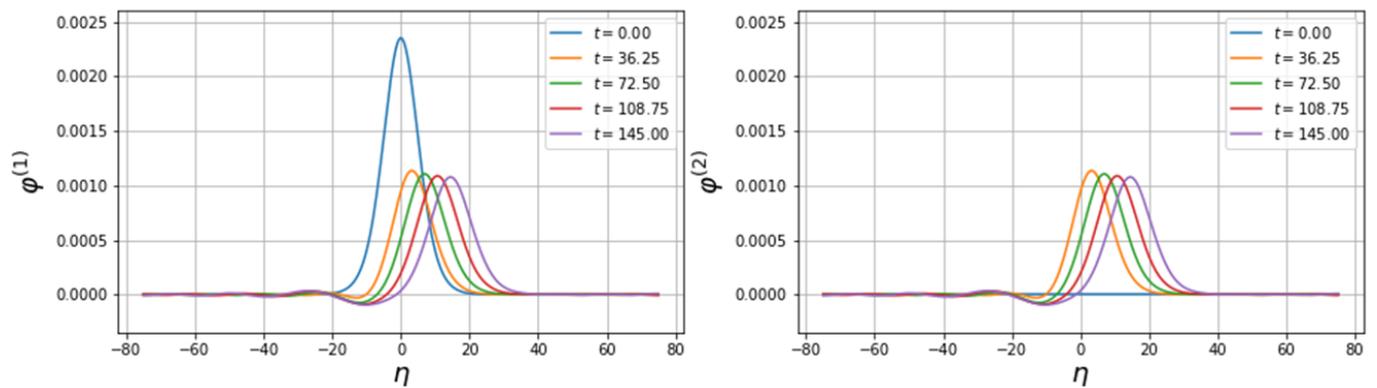


Рис. 3. Результаты численного решения системы (33) при $\sigma_0 = 1$ с начальными условиями (37) с волновым числом $k = 0,2$

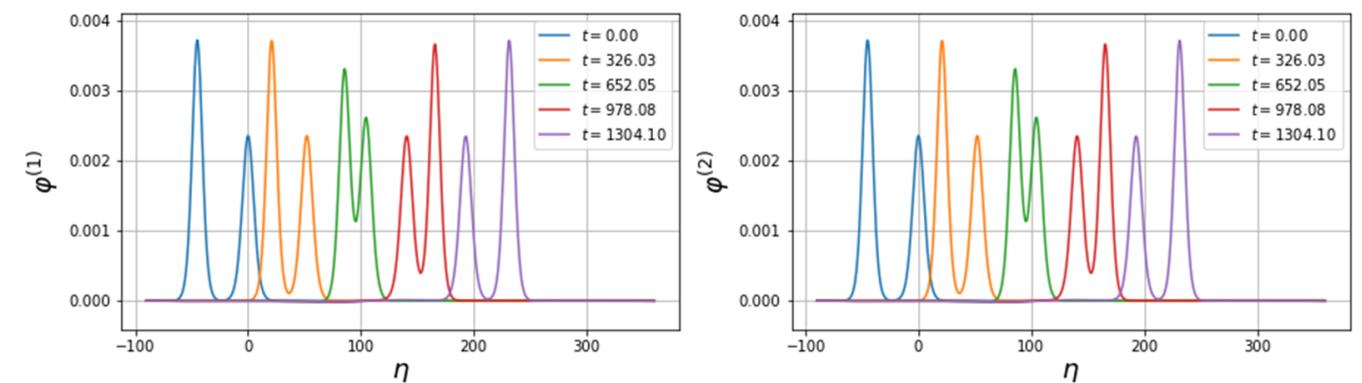


Рис. 4. Результаты численного решения системы (33) при $\sigma_0 = 1$ с начальными

условиями вида (38), (39): условие (38) с $k_1 = 0,225$ и начальным значением $\eta = -50$,
условие (39) с $k_1 = 0,2$ и начальным значением $\eta = 0$

Выводы и заключение

Представленные на рис.2-рис.4 расчеты показывают, что для рассмотренного в работе случая наблюдается движение волн вправо, т.е. нелинейная добавка к линейной составляющей волнового процесса положительна, следовательно, распространение уединенных волн происходит со сверхзвуковой скоростью. Анализ кривых рис.2 указывает на то, что эволюция уединенных волн деформации в оболочках происходит с постоянной скоростью и амплитудой. Расчеты, представленные на рис.3 демонстрируют, что при возбуждении в начальный момент времени уединенной волны деформации только во внешней оболочке происходит, с течением времени, возбуждение волны во внутренней оболочке. На начальном этапе данный процесс сопровождается падением амплитуды уединенной волны во внешней оболочке и ростом амплитуды возбуждаемой уединенной волны во внутренней оболочке. С дальнейшим ходом времени в оболочках наблюдается две волны практически одинаковой амплитуды и скорости. Это указывает на передачу энергии от внешней оболочки внутренней через вязкую жидкость, заполняющую кольцевой канал. Результаты расчетов на рис.4 позволяют сделать вывод, что две уединенных волны с разной скоростью и амплитудой возбужденные в начальный момент времени в каждой из оболочек при эволюции взаимодействуют между собой. После взаимодействия волны сохраняют свою форму и скорость, т.е. они взаимодействуют как частицы. Такое поведение указывает на то, что в

рассматриваемых случаях уединенные волны деформации в оболочках представляют собой сверхзвуковые солитоны.

Подводя итог представленного исследования, отметим, что в работе сформулирована задача гидроупругости двух соосных цилиндрических оболочек, выполненных из несжимаемого материала с жесткой комбинированной квадратично-дробной нелинейностью. На базе асимптотического анализа данной задачи получена система эволюционных уравнений, включающая в себя два обобщенных уравнения Кортевега–де Вриза–Шамеля, описывающая нелинейный волновой процесс в оболочках. Для дискретизации полученной системы получена новая разностная схема с использованием техники базисов Грёбнера. Вычислительные эксперименты позволили оценить влияние наличия вязкой несжимаемой жидкости между оболочками на процессы эволюции нелинейных уединенных волн деформации в них. Кроме того, показать, что наличие вязкой жидкости во внутренней оболочке из несжимаемого материала не сказывается на волновом процессе. Полученные в работе результаты могут быть использованы как фундаментальный задел дальнейшего развития методов волновой диагностики состояния трубопроводов кольцевого сечения, заполненных вязкой жидкостью и видятся важными для современных изделий авиакосмической промышленности, в которых широко используются новые материалы с существенно нелинейными физическими свойствами.

Список источников

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в

сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. - 472 с.

2. Башарина Т.А., Глебов С.Е., Акользин И.В. Исследование распространения гидроударной волны в стабилизаторе давления поршневого типа // Труды МАИ.

2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177661>

3. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. – М.: Физматлит, 2000. - 592 с.

4. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках. - М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 172-183.

5. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves // Philosophical Magazine, 1955, vol. 46, p. 199-221. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564>

6. Païdoussis M.P. Fluid-Structure Interactions. Volume 2: Slender Structures and Axial Flow. Second Edition. London, Elsevier Academic Press, 2016, 942 p. URL: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>

7. Amabili M. Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials. Cambridge, Cambridge University Press, 2018, 586 p. URL: <http://doi.org/10.1017/9781316422892>

8. Païdoussis M.P. Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review // Journal of Fluids and Structures, 2021, vol. 107. URL: <http://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103374>

9. Кореньков А.Н. Линейная дисперсия и солитоны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 6. С. 122-125.

10. Кореньков А.Н. Уединенные волны на цилиндрической оболочке с жидкостью //

- Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6. № 1. С. 131-143. URL: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.110>
11. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104003>
12. Быкова Т.В., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование продольных волн в оболочке с физически квадратичной нелинейностью, заполненной жидкостью и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2020. № 111. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=115113>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-3](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-3)
13. Могилевич Л.И., Блинков Ю.А., Иванов С.В. Волны деформации в двух соосных кубически нелинейных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью между ними // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т. 28. № 4. С. 435-454. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-435-454>
14. Mogilevich L.I., Popova E.V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 2023, vol. 31, no. 3, pp. 365-376. DOI: [10.18500/0869-6632-003040](https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040)
15. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Евдокимова Е.В., Попова Е.В., Попова М.В. Моделирование волн деформации в стенках соосных кольцевого и кругового каналов с вязкой жидкостью, материал которых несжимаем и имеет дробную физическую нелинейность // Труды МАИ. 2023. № 129. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=173017>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-05)
16. Блинков Ю. А., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова Е.В. Эволюция уединенных

- гидроупругих волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с физической нелинейностью Шамеля // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16(4). С. 430-444. URL: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.4.36>
17. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М: Наука, 1972. - 432 с.
18. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. - 204 с.
19. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 98(1), pp. 185-194. URL: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
20. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration, 2021, vol. 491, 115752. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752>
21. Fung Y.C. Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. New York, Springer-Verlag, 1993, 568 p.
22. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.
23. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin, Springer, 1958, 684 p.
24. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: ЛГУ, 1978. - 296 с.
25. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. - 840 с.
26. Nayfeh A.H. Perturbation methods. New York, Wiley, 1973, 425 p.
27. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006, vol. 2. URL:

<https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051>

28. Blinkov Y.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods // Programming and Computer Software, 2017, vol. 43, no. 2, pp. 84-89. URL: <https://doi.org/10.1134/S0361768817020049>

References

1. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous media), Moscow, Fizmatlit, 2004. 472 p.
2. Basharina T.A., Glebov S.E., Akol'zin I.V. *Trudy MAI*, 2023, no. 133. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177661>
3. Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyarchuk F.N. *Aerogidrouprugost' konstruktsii* (Aerohydroelasticity of Structures), Moscow, Fizmatlit, 2000, 592 p.
4. Gromeka I.S. *O skorosti rasprostraneniya volnoobraznogo dvizheniya zhidkosti v uprugikh trubkakh* (On the velocity of wave-like motion of fluids in elastic tubes), Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1952, pp. 172-183.
5. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves, *Philosophical Magazine*, 1955, vol. 46, p. 199-221. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564>
6. Païdoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions. Volume 2: Slender Structures and Axial Flow*. Second Edition. London, Elsevier Academic Press, 2016, 942 p. URL: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>

7. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*. Cambridge, Cambridge University Press, 2018, 586 p. URL: <http://doi.org/10.1017/9781316422892>
8. Païdoussis M.P. Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review, *Journal of Fluids and Structures*, 2021, vol. 107. URL: <http://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103374>
9. Koren'kov A.N. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2000, vol. 70, no. 6, pp. 122-125.
10. Koren'kov A.N. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 131-143. URL: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.110>
11. Ivanov S.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104003>
12. Bykova T.V., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Trudy MAI*, 2020, no. 111. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115113>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-3](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-3)
13. Mogilevich L.I., Blinkov Yu.A., Ivanov S.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika*, 2020, vol. 28, no. 4, pp. 435-454. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-435-454>
14. Mogilevich L.I., Popova E.V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 31, no. 3, pp. 365-376. DOI: [10.18500/0869-6632-003040](https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040)

15. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Evdokimova E.V., Popova E.V., Popova M.V. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=173017>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-05)
16. Blinkov Yu. A., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova E.V. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2023, vol. 16(4), pp. 430-444. URL: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.4.36>
17. Vol'mir A.S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* (Nonlinear dynamics of plates and shells: studies. Manual for undergraduate and graduate), Moscow, Nauka, 1972, 432 p.
18. Lukash P.A. *Osnovy nelineinoi stroitel'noi mekhaniki* (Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics), Moscow, Stroiizdat, 1978, 204 p.
19. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells, *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 98(1), pp. 185-194. URL: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
20. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 491, 115752. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752>
21. Fung Y.C. *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. New York, Springer-Verlag, 1993, 568 p.
22. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy* (Continuum mechanics), Moscow, Izd-vo MGU, 1990, 310 p.
23. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*, Berlin, Springer, 1958, 684 p.

24. Vallander S.V. *Lektsii po gidroaeromekhanike* (Lectures on Hydroaeromechanics), Leningrad, LGU, 1978, 296 p.
25. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Mechanics of Liquids and Gases), Moscow, Drofa, 2003, 840 p.
26. Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. New York, Wiley, 1973, 425 p.
27. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2006, vol. 2. URL: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051>
28. Blinkov Y.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods, *Programming and Computer Software*, 2017, vol. 43, no. 2, pp. 84-89. URL: <https://doi.org/10.1134/S0361768817020049>

Статья поступила в редакцию 26.01.2024

Одобрена после рецензирования 31.01.2024

Принята к публикации 26.04.2024

The article was submitted on 26.01.2024; approved after reviewing on 31.01.2024; accepted for publication on 26.04.2024