УДК 539.12

# Разница между спином и орбитальным моментом импульса

Р. И. Храпко

**Аннотация**

Представлены доводы против общепринятого мнения, согласно которому, спин электромагнитных волн является моментом линейного импульса. Приведен тензор спина, описывающий спин фотонов в рамках классической электродинамики.

**Ключевые слова**

параксиальный луч; излучение диполя; излучение спина.

## 1. Момент импульса светового луча

Луч света круговой поляризации несет момент импульса (МИ) [1,2]. Однако существует волнующий вопрос: каково распределение этого МИ по сечению луча и какова природа этого МИ, орбитальная или спиновая? Мы рассмотрим здесь два важных примера, дающих ответ на этот вопрос. Ответ заключается в следующем. Момент линейного импульса является орбитальным МИ, а не спиновым. Для учета спина необходимо введение тензора спина в стандартную электродинамику.

Параксиальный Лагерр-Гауссовый луч круговой поляризации [3], $\mathrm{LG}^l_p$, в цилиндрических координатах $\rho, \varphi, z$ с метрикой $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$, именно,

$$\underset{\to}{E} = \exp\{i(l+1)\varphi + i\omega(z-t)\}(\omega\underset{\to}{\rho} + i\omega\rho\underset{\to}{\varphi} + i\underset{\to}{z}\,\partial_\rho)u^l_p(\rho,z), \quad \underset{\to}{B} = -i\underset{\to}{E},$$

$$u^l_p = \frac{C^l_p}{w(z)}\left[\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w}\right)^l L^l_p\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right)\right]\exp\left\{-\frac{\rho^2}{w^2} + \frac{i\rho^2}{w^2 z_R} - i(2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right\} \dots \quad .(1)$$

($\underset{\to}{\rho}, \underset{\to}{\varphi}, \underset{\to}{z}$ являются *ковариантными* векторами, $k = \omega, c = 1$) представляет собой собственную функцию орбитального, а не спинового, оператора МИ $-i\hbar\partial_\varphi$ с собственным числом $\hbar(l+1)$. Это означает, что и круговая поляризация, и спиральный волновой фронт, соответствующий числу $l$, несут только орбитальный МИ, не спин, в соответствии с современной теорией поля.

## 2. Излучение вращающегося диполя

Мы рассмотрим теперь точное волновое, не параксиальное, решение уравнений Максвелла, решение для излучения вращающегося электрического диполя [4-6]. Будут использоваться сферические координаты $r, \theta, \varphi$:

$$E^r = (2/r^3 - i2\omega/r^2)\sin\theta\, \exp[i\varphi + i\omega(r-t)]/4\pi\,, \tag{2}$$

$$E^\theta = (-1/r^4 + i\omega/r^3 + \omega^2/r^2)\cos\theta\, \exp[i\varphi + i\omega(r-t)]/4\pi, \tag{3}$$

$$E^\varphi = (-i/r^4 - \omega/r^3 + i\omega^2/r^2)\exp[i\varphi + i\omega(r-t)]/(4\pi\sin\theta), \tag{4}$$

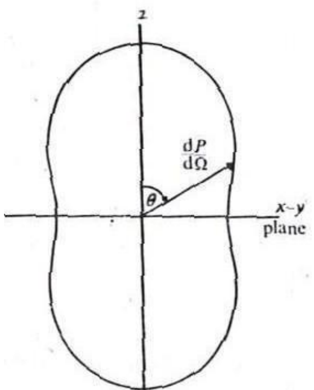
$$B_{r\theta} = (i\omega/r + \omega^2)\cos\theta\, \exp[i\varphi + i\omega(r-t)]/4\pi, \tag{5}$$

$$B_{\varphi r} = (\omega/r - i\omega^2)\sin\theta\, \exp[i\varphi + i\omega(r-t)]/4\pi, \quad B_{\theta\varphi} = 0. \tag{6}$$

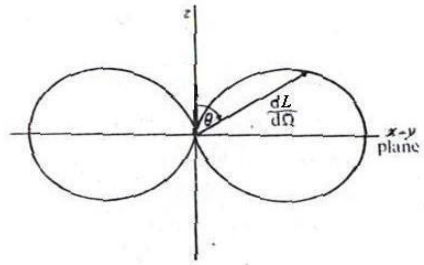
Угловое распределение потока энергии, $dP/d\Omega = <(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_r r^2> = \omega^4(\cos^2\theta + 1)/(32\pi^2)$, и угловое распределение $z$-компоненты потока МИ, т.е. момента силы,

$$dL_z/dtd\Omega = d\tau_z/d\Omega = <[\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})]_z r^2> = \omega^3\sin^2\theta/(16\pi^2)\,, \tag{7}$$

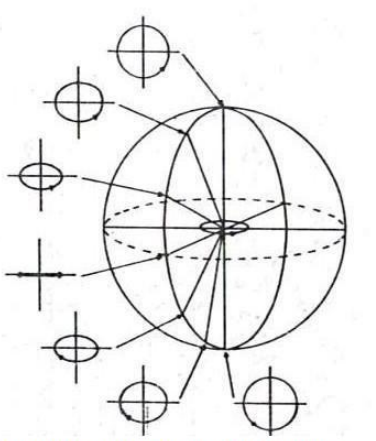
изображены на рисунке. Полная мощность и полный момент силы равны $P = \omega^4/6\pi$ и $\tau_z = \omega^3/6\pi$. На рисунке мы приводим также распределение степени круговой поляризации $\sigma$ этого излучения [4], которая приблизительно равна отношению длин осей эллипса: $\sigma \cong \cos\theta$.



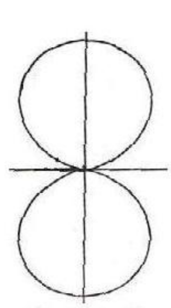

Угловое распределение потока энергии
$dP/d\Omega \propto (\cos^2\theta + 1)$




Угловое распределение z-компоненты потока момента импульса
$dL_z/dtd\Omega \propto \sin^2\theta$



Поляризация электрического поля вращающегося диполя при наблюдении с различных направлений



Степень круговой поляризации
$\sigma \cong \cos\theta$

Видно, что МИ (7) излучается в основном в экваториальную часть пространства, расположенную вблизи $x-y$-плоскости, где поляризация эллиптическая или линейная. Полярные области, расположенные вблизи оси z, обеднены МИ (7), хотя они интенсивно освещаются излучением почти круговой поляризации. Поэтому, если мы ассоциируем спин электромагнитного излучения с круговой поляризацией, мы должны признать, что МИ (7) является орбитальным МИ, а не спиновым.

Следует также заметить, что поля (2) – (6) являются собственными функциями оператора *орбитального* МИ, $-i\hbar\partial_{\varphi}$ (не оператора спина) с собственным значением $\hbar$. Это также подтверждает орбитальный характер МИ (7).

Таким образом, видимо, стандартная электродинамика не замечает спин электромагнитного излучения (1) – (6), и, следовательно, нуждается в дополнении

### 3. Классический спин электромагнетизма

Классическая теория поля указывает путь для такого дополнения. Как хорошо известно, стандартный лагранжевый формализм дает два бездивергентных тензора для свободных полей, именно, канонический тензор энергии-импульса и канонический тензор спина [7]:

$$T^{\lambda\mu} = \partial^{\lambda} A_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu} A_{\alpha})} - g^{\lambda\mu} L \ , \quad \Upsilon^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}\delta^{\mu]}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu} A_{\alpha})} . \qquad (8)$$

К сожалению, стандартная процедура Белинфанте-Розенфельда [8,9], проводимая с целью исправления канонических тензоров, не приводит к тензору энергии-импульса электродинамики и, что хуже всего, элиминирует тензор спина электродинамики [10,11]. Мы применили альтернативную процедуру [12-14], которая дает непосредственно максвелловский тензор энергии-импульса, сопровождаемый тензором спина электродинамики [15]

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = A^{[\lambda}\partial^{|\nu|}A^{\mu]} + \Pi^{[\lambda}\partial^{|\nu|}\Pi^{\mu]} . \qquad (9)$$

Здесь $A^{\lambda}$ и $\Pi^{\lambda}$ суть магнитный и электрический векторные потенциалы, удовлетворяющие соотношениям $\partial_{\lambda} A^{\lambda} = \partial_{\lambda}\Pi^{\lambda} = 0$, $2\partial_{[\mu} A_{\nu]} = F_{\mu\nu}$, $2\partial_{[\mu}\Pi_{\nu]} = -e_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/2$, где $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$, $F_{\mu\nu} = F^{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}$ есть тензор электромагнитного поля; $e_{\mu\nu\alpha\beta}$ есть антисимметричная тензорная плотность Леви-Чивита.

Тензор (9) дает правильное угловое распределение $z$-компоненты потока спина в излучении вращающегося диполя [5,6]:

$$dS_z / dtd\Omega = \omega^3 \cos^2\theta / (16\pi^2) . \qquad (10)$$

При этом общий поток $z$-компоненты спина, $dS_z / dt = \omega^3 / (12\pi)$, оказывается равен половине величины $P/\omega$, что представляется оправданным, поскольку фотоны не летят все вдоль оси z. Важно, что отношение плотности потока спина к плотности мощности при $\theta = 0$ равно правильному значению $1/\omega$, характерному для одиночного фотона

$$\left.\frac{dS_z}{dPdt}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{\omega^3 \cos^2\theta/(16\pi^2)}{\omega^4(\cos^2\theta+1)/(32\pi^2)}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{\omega}, \qquad (11)$$

Вообразите, наш вращающийся диполь окружен поглощающей сферой. Тогда различные фотоны приносят различные МИ на эту сферу. Сложение выражений (7) и (10) позволяет найти отношение плотности потока полного МИ вдоль оси z к плотности мощности

$$\frac{dJ_z}{dtdP} = \frac{dL_z + dS_z}{dtdP} = \frac{2}{\omega(\cos^2\theta+1)}. \qquad (12)$$

Выражение (12) означает, что, если волновая функция фотона коллапсирует на полюсе сферы $(\theta = 0)$, полюс получает спин, равный $\hbar$, а если волновая функция коллапсирует на экваторе, $(\theta = \pi/2)$, точка сферы получает орбитальный МИ, поскольку фотон линейно поляризован. И этот орбитальный МИ равен $2\hbar$. В среднем фотон приносит момент импульса, равный $3\hbar/2$.

Между прочим, формула (10) совпадает с результатом простого вычисления плотности потока спина Р. Фейнманом [16]. Действительно, амплитуды того, что право поляризованный и лево поляризованный фотоны излучаются в направлении $\theta$, суть [16 (18.1), (18.2)]

$$a(1+\cos\theta)/2 \quad \text{и} \quad -a(1-\cos\theta)/2. \qquad (13)$$

Значит, в этом направлении плотность потока спина пропорциональна выражению

$$[a(1+\cos\theta)/2]^2 - [a(1-\cos\theta)/2]^2 = a^2\cos\theta, \qquad (14)$$

и его проекция на ось z оказывается равной

$$dS_z / dtd\Omega \propto a^2\cos^2\theta. \qquad (15)$$

В то же время, выражения (13) дают правильную плотность мощности

$$dP/d\Omega \propto [a(1+\cos\theta)/2]^2 + [a(1-\cos\theta)/2]^2 = a^2(1+\cos^2\theta)/2. \qquad (16)$$

Значит, игнорируя частоту излучения, мы получаем отношение (11)

$$\frac{dS_z}{dPdt} \propto \frac{\cos^2\theta}{(\cos^2\theta+1)/2}. \qquad (17)$$

## 4. Благодарности

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за отважную публикацию моего вопроса [17] (вопрос был направлен в редакцию 07.10.1999) и профессору Тимо Ниеминену за содержательные дискуссии (Newsgroups: sci.physics.electromag).

### Библиографический список

1. Beth R.A. Direct Detection of the Angular Momentum of Light. //Phys. Rev. – 1935, **48**.- p.471
2. Parkin S., Knoner G., Nieminen T. A., Measurement of the total optical angular momentum transfer in optical tweezers // Optics Express. – 2006, **14**.- p.6963
3. Allen L., Padgett M.J., M. Babiker M, The orbital angular momentum of light // Progress in Optics XXXIX, E. Wolf, ed. (Elsevier, Amsterdam, 1999)
4. Corney A. Atomic and Laser Spectroscopy. – Oxford: University Press, 1977.- 567p.
5. Khrapko R.I., Radiation of spin by a rotator. - mp_arc@mail.ma.utexas.edu REQUEST: send papers NUMBER: 03-315 (2003)
6. Khrapko R. I. A rotating electric dipole radiates spin and orbital angular momentum, www.sciprint.org (2006)
7. Rohrlich F. Classical Charged Particles. – Mass.: Addison-Wesley, 1965. –756 p.
8. Belinfante F.J. On the spin angular momentum of Meson. //Physica. – 1939, **6.**- p.887-98
9. Rosenfeld L. Sur le Tenseut d'Impulsion-Energie. //Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Belgiques.-. 1940, **18** No. 6.- p.1-30
10. Khrapko R.I., Mechanical stresses produced by a light beam, //J. Modern Optics – 2008, **55**, 1487-1500
11. Khrapko R.I., Mechanical stresses produced by a light beam,"http://www.sciprint.org (2007)
12. Khrapko R.I. True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero. - http://arXiv.org/abs/physics/0102084 (10.08.2001)
13. Khrapko R.I. Violation of the gauge equivalence. - http://arXiv.org/abs/physics/0105031 (11.12.2001)
14. Khrapko R.I, Experimental verification of Maxwellian electrodynamics, // Measurement Techniques – 2003, **46**, No. 4, 317-321
15. Храпко Р. И. Истинные тензоры энергии-импульса и спина среды однозначны. //Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации. X Российская гравитационная конф., Владимир. 1999: Тез. докл. - Москва, 1999. - с.47.

16. Feynman R. P. et al. The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3. – Addison-Wesley, London, 1965.- 435p.
17. Khrapko R.I. Does plane wave not carry a spin? //Amer. J. of Physics. – 2001, 69.- p.405.

### Сведения об авторе

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.

125993 Москва, Волоколамское шоссе 4, Российская Федерация.

+7 499 144-63-12, khrapko_ri@hotmail.com.