

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



Игнатов Алексей Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ  
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ГРАФОВЫХ СТРУКТУРАХ

Специальность 2.3.1.

Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
доктор физико-математических наук,  
профессор А. И. Кибзун

Москва, 2024 год

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>1 Оптимизация в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами</b>	<b>30</b>
1.1. Основные обозначения и предположения . . . . .	30
1.2. Система ограничений, задающая движение по мультиграфу транспортной сети . . . . .	33
1.3. Критериальная функция . . . . .	41
1.4. Постановка и решение задачи поиска оптимального расписания движения	43
1.4.1. Постановка задачи . . . . .	43
1.4.2. Алгоритм поиска приближенного решения . . . . .	44
1.4.2.1. Вспомогательная система ограничений . . . . .	44
1.4.2.2. Вспомогательный критерий оптимальности . . . . .	49
1.4.2.3. Алгоритм для поиска расписания . . . . .	50
1.4.3. Примеры . . . . .	54
1.4.3.1. Пример №1 . . . . .	54
1.4.3.2. Пример №2 . . . . .	57
1.4.3.3. Пример №3 . . . . .	62
1.4.3.4. Пример №4 . . . . .	67
1.5. Постановка и решение задачи назначения «технологического окна» . . . .	70
1.5.1. Дополнительные ограничения . . . . .	70
1.5.2. Постановка задачи . . . . .	72
1.5.3. Алгоритм поиска приближенного решения . . . . .	72
1.5.4. Пример . . . . .	76
1.6. Основные результаты главы 1 . . . . .	79
<b>2 Оптимизация в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами</b>	<b>80</b>
2.1. Основные обозначения и предположения . . . . .	80
2.2. Управление движением в транспортной сети . . . . .	81
2.2.1. Формирование расписания движения . . . . .	81
2.2.1.1. Система ограничений, задающая движение по графу транспортной сети . . . . .	81
2.2.1.2. Постановка задачи поиска расписания движения и ее сведение к задаче смешанного целочисленного линейного программирования . . . . .	83
2.2.2. Постановка и решение задачи назначения «технологического окна»	85

2.2.2.1.	Дополнительные обозначения и предположения . . . . .	85
2.2.2.2.	Постановки задач . . . . .	85
2.2.2.3.	Пример . . . . .	91
2.3.	Основные результаты главы 2 . . . . .	93

### **3 Математические методы для решения задач управления надежностью в транспортных системах . . . . . 94**

3.1.	Теоретические аспекты управления надежностью . . . . .	94
3.1.1.	Основные обозначения и предположения . . . . .	94
3.1.2.	Критерий в форме математического ожидания . . . . .	96
3.1.3.	Критерий в форме вероятности . . . . .	97
3.2.	Математические методы для прогнозирования последствий схода с рельсов подвижных единиц грузовых поездов . . . . .	98
3.2.1.	Предварительный анализ данных . . . . .	98
3.2.2.	Основные обозначения . . . . .	100
3.2.3.	Оценка распределения количества подвижных единиц грузового поезда при сходе с рельсов . . . . .	102
3.2.3.1.	Постановка задачи . . . . .	103
3.2.3.2.	Вспомогательные сведения . . . . .	106
3.2.3.3.	Результат исследования . . . . .	106
3.2.4.	Оценивание вероятности возникновения некоторых негативных последствий от схода с рельсов . . . . .	111
3.2.4.1.	Количественный анализ . . . . .	111
3.2.4.2.	Постановка задачи . . . . .	112
3.2.4.3.	Вспомогательные сведения . . . . .	114
3.2.4.4.	Результаты исследования . . . . .	116
3.3.	Метод оценивания вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции . . . . .	117
3.3.1.	Основные обозначения и предположения . . . . .	117
3.3.2.	Оценка вероятности бокового столкновения и ее компонент . . . . .	119
3.3.3.	Вероятность столкновения пассажирского (грузового) поезда при движении через станцию. . . . .	126
3.3.4.	Пример . . . . .	127
3.4.	Управление безопасностью движения по вероятностному и квантильному критериям на железнодорожных переездах . . . . .	132
3.4.1.	Основные обозначения и предположения . . . . .	132
3.4.2.	Оптимизация функции вероятности . . . . .	136
3.4.3.	Оптимизация функции квантили . . . . .	137
3.4.4.	Пример . . . . .	140
3.5.	Основные результаты главы 3 . . . . .	142

<b>4</b>	<b>Интегральный риск на всём заранее заданном пути следования транспортного средства</b>	<b>144</b>
4.1.	Функции интегрального риска . . . . .	144
4.2.	Статистическое оценивание вероятности и ущерба при движении грузовых поездов . . . . .	148
4.2.1.	Свертка вероятностей . . . . .	150
4.2.2.	Оценивание ущерба . . . . .	155
4.2.3.	Пример . . . . .	156
4.3.	Основные результаты главы 4 . . . . .	158
<b>5</b>	<b>Комплекс программ для решения задач управления движением и его безопасностью в транспортных системах</b>	<b>160</b>
5.1.	Комплекс программ для сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования . . . . .	160
5.1.1.	Общий вид задачи смешанного целочисленного линейного программирования . . . . .	161
5.1.2.	Метод сравнения решателей . . . . .	161
5.1.3.	Используемые решатели . . . . .	163
5.1.4.	Сравнение работы решателей для различных задач . . . . .	165
5.1.4.1.	Задача с билинейной целевой функцией и вероятностным критерием . . . . .	165
5.1.4.2.	Задача корректирования скалярного терминального состояния спутника с геостационарной орбитой . . . . .	169
5.1.4.3.	Задача квантильной оптимизации для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров . . . . .	171
5.1.4.4.	Двухуровневая задача планирования производства . . . . .	172
5.1.5.	Исследование компонент времени получения решения . . . . .	173
5.2.	Программа для формирования расписания движения и «технологического окна» в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами . . . . .	174
5.3.	Программа для формирования «технологического окна» в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами . . . . .	175
5.4.	Комплекс программ для прогнозирования последствий схода с рельсов грузовых поездов . . . . .	175
5.5.	Программа для оценки вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции . . . . .	176
5.6.	Программа для задачи управления безопасностью движения на железнодорожных переездах . . . . .	177
5.7.	Программа для оценивания интегрального риска . . . . .	177
5.8.	Основные результаты главы 5 . . . . .	178

Заключение	179
Список литературы	181
Приложение. Начальные данные для решения задачи грузоперевозок на железнодорожной сети	198

## Введение

(Не)ориентированные (мульти)графы – удобное средство для математического моделирования и принятия решений в различных прикладных областях. Одно из наиболее важных направлений исследования графовых структур – поиск оптимального маршрута и времени движения по графу с учетом различных ограничений на пропускную способность, время транспортировок и их стоимость. Исследования, посвящённые поиску оптимального расписания движения грузов (заказов, поездов) между вершинами графа, можно поделить на две категории по признаку фиксированности времени транспортировок. В классических постановках задачи маршрутизации транспорта (vehicle routing problem) [95, 136, 157] и ее модификациях с наличием ограничений на грузоподъемность [60–62], постановках задачи поиска маршрута по местам продажи товаров (traveling purchaser problem) [82] движение между вершинами графа может быть осуществлено в любое время. Отметим, что в [61] появляется ограничение на время, но это время не доступности ребра графа для движения, а время обслуживания потребителя, которое необходимо для правильного (с точки зрения доступного времени обслуживания) обхода вершин графа/потребителей.

Пожалуй, наибольшее развитие прикладных исследований в области движения по графам получило формирование расписания движения в железнодорожной отрасли. В англоязычной литературе, посвященной железнодорожной тематике, время движения между вершинами транспортной сети часто не задано. Это время определяется при построении расписания [86, 99, 101, 135, 137, 153].

По сути, в задачах с нефиксированным временем движения из вершины в вершину предлагается мгновенная готовность некоего транспортного средства перевезти груз/пассажира из одной вершины в другую. Однако в реальной жизни такое не всегда возможно. Так, например, регулярные железнодорожные и авиаперевозки осуществляются по расписанию, а нерегулярные могут быть просто недоступны. А ввиду пробок на автомобильных дорогах, возникающих, например, утром и вечером, длительность поездки между вершинами неодинакова. Иными словами, пропускная способность рё-

бер/дуг графа транспортной сети зависит от времени. В этой связи в первой главе диссертации рассматривается постановка задачи, в которой движение между вершинами мультиграфа возможно только в заранее определенные промежутки времени.

Среди публикаций, посвященных формированию расписания перевозок, когда движение между вершинами осуществляется согласно некоторому заранее заданному расписанию, выделим [4,8,9,127]. В [127] была рассмотрена задача одновременного формирования расписания и маршрутов движения вагонов, составов по железнодорожной сети общего вида так, чтобы минимизировать суммарное взвешенное время выполнения заказов. Данная задача была сформулирована в виде задачи целочисленного линейного программирования. Отметим, что в [127] также предлагались постановки с нефиксированным временем движения между вершинами. В [4] среди прочего исследовалась задача о перемещении вагонов, которые перевозятся поездами с фиксированным временем отправления, между двумя железнодорожными станциями. В [8] задача назначения локомотивов решалась с учетом случайных задержек в готовности составов и критерием в форме минимума числа задействованных локомотивов. В [9] рассматривался аналогичный критерий, что и в [8], а поиск решения задачи назначения локомотивов решался приближенно с использованием функции полезности.

Следует подчеркнуть, что в постановках из [4,8,9,127] возникает проблема, связанная с конечностью промежутка времени, на которое строится расписание (далее – горизонт планирования). Внутри этого промежутка времени надо успеть развезти все грузы. Однако это не всегда бывает возможно как по причине недостатка в рамках горизонта планирования возможностей для транспортировки (иными словами, некому перевозить), так и по причине того, что потребность перевозки возникает к концу горизонта планирования (иными словами, не хватает времени). Таким образом, решение задачи поиска оптимального расписания может не существовать, так как останутся недоставленные грузы. При этом необходимость в доставке грузов не исчезает. Такая проблема поднималась в [127], где предлагалось расширить горизонт планирования, либо отказаться от ограничения на прибытия всех грузов в рамках горизонта планирования. Первый подход приводит к росту размерности оптимизационной задачи, а второй подход может привести к тому, что груз будет доставлен на станцию, с которой практически невозможно добраться в станцию назначения. Следовательно, актуальна

разработка системы ограничений, задающей движение по графу транспортной сети, которая бы учитывала возможность и после окончания горизонта планирования находиться грузу в движении, если ожидаемое время в пути будет допустимым. Такая система ограничений и формулируется в первой главе диссертации.

Публикации, посвященные задаче составления расписания движения (грузов, поездов, локомотивов), можно разделить на несколько групп и по другим признакам: по наличию времени движения в задаче, по возможности/фиксированности маршрута движения при оптимизации, по структуре мультиграфа транспортной сети. Например, в [75] использовалась только длительность следования через дуги графа транспортной сети общего вида, а в [86, 101] рассматривается однопутная железная дорога. В [99, 137] рассматривается задача построения расписания для железнодорожных сетей общего вида при фиксированном наборе маршрутов для поездов. Также как и в [99, 137], в [153] рассматривалась железнодорожная сеть общего вида, однако предлагалась несколько более сложная методика формирования расписания, предполагающая итерационную процедуру, в которой последовательно модифицировались набор маршрутов для поездов и время их движения по железнодорожной сети. В [87, 127, 135] задача поиска маршрута движения поездов и времени их движения по железнодорожной сети решалась одновременно. Время в [87, 127, 135] полагалось дискретным, что может приводить к очень большой размерности поставленной задачи.

Как и в [87, 127, 135], система ограничений в первой главе диссертации допускает любой вид графа, время движения и маршрут движения ищутся одновременно, при этом фиксация маршрута движения груза не обязательна.

Работы, посвященные задаче формирования расписания движения на железной дороге, можно разделить и по объекту исследования: задача формирования бесконфликтного набора ниток (по сути последовательностей из вершины начала движения, конца движения и соответствующих времен) для последующего составления из них маршрутов движения поездов [13], задача поиска маршрутов движения поездов по железнодорожной сети [25, 92, 125, 127], задача назначения локомотивов составам [8, 9, 27, 69, 78, 85, 145, 160]. В [92] был приведен подробный обзор публикаций, посвященных задаче составления расписаний и поиска маршрутов поездов по железнодорожной сети, на начало 21-го века. В [125] решалась задача составления циклического

расписания с учетом задержек в исполнении расписания. В [25] рассматривается задача построения расписания двустороннего движения поездов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой с разъездом. Оптимальное расписание строится методом динамического программирования. В [160] задача назначения локомотивов с критерием в форме минимизации затрат была сведена к задаче смешанного целочисленного нелинейного программирования, решение которой было найдено приближенно при помощи метода декомпозиции Данцига-Вульфа. В [69] задача подвязки локомотивов была сформулирована в виде задачи целочисленного линейного программирования с критерием в форме минимизации затрат, которая решалась эвристическими методами. В [145] ставилась задача о назначении локомотивов составам в самой общей динамической постановке в дискретном времени. Для решения этой задачи с использованием соотношений метода динамического программирования предложено приближенное к оптимальному решение.

Отметим, что при решении задач поиска расписания движения по железнодорожной сети может оказаться, что найти расписание для всех поездов невозможно. При возникновении такой проблемы в [86, 99] предлагалось исключать из плана перевозок поезда, для которых расписание найти не удастся. Иными словами, в виду того, что сформулированные в задаче математического программирования ограничения оказывались несовместными, предлагалось модифицировать данные ограничения и рассматривать формально ту же задачу, но с другими ограничениями. Отметим, что задача с несовместными ограничениями непосредственно связана с графами максимальных совместных подсистем [10, 11, 14] и задачей о минимальном комитете [11, 50, 51, 58, 59].

В силу того, что некоторые участки пути железнодорожной сети должны подлежать срочному/плановому ремонту, конструируемое расписание должно включать в себя «технологические окна» (ТО) – время, в течение которого прекращается движение поездов по отдельным железнодорожным путям для производства ремонтно-строительных работ [55]. Как правило, «технологическое окно» имеет 2 основных параметра: перегон, на котором должны выполняться работы, и продолжительность окна. Обычно запрашивают окна определенной продолжительности для конкретного перегона и при этом требуется, чтобы окно располагалось в заданном временном промежутке или интервале предоставления окна. Например, требуется предоставить «технологиче-

ское окно» на перегон между станциями  $A$  и  $B$ , продолжительностью 4 часа в светлое время суток (с 9 часов утра до 18 часов вечера). При этом на каждые сутки имеется план перевозок, в котором задано, какие перевозки необходимо осуществить в эти сутки.

Исследования задачи о назначении «технологического окна» проводятся для железнодорожных перегонов, а сами исследования можно разделить на несколько групп. Одна часть исследований посвящена проблеме назначения «технологического окна» на основе прогноза состояния (деградации) железнодорожной инфраструктуры, стоимости ремонта, объема железнодорожных перевозок [73, 97, 103]. Другая часть посвящена вопросу назначения «технологического окна» исходя из действующего расписания [26, 70, 99, 105, 128, 129].

В [105] рассматривалась задача по назначению технических бригад для обслуживания путей с учетом возможных задержек как в расписании поездов, так и в исполнении технических работ в свободные от движения пассажирских/грузовых поездов промежутки времени с точки зрения минимизации неисполнения базового расписания и минимизации времени исполнения всех запланированных технических работ. При этом получившаяся задача математического программирования оказалась нелинейной. В [70] рассматривается однопутная железная дорога с разъездами, для которой все исходное расписание грузовых поездов перестраивается с учетом необходимости проведения «технологических окон» на каких-то участках пути. При этом «технологическое окно» интерпретируется как псевдо-поезд и может быть перенесено во времени. В [99, 129] рассматривалась задача назначения «технологического окна» для железнодорожной сети общего вида, в которой поезда могут быть отменены, задержаны или отправлены по другому маршруту с критерием в форме минимизации расходов на осуществление движения. В [128] рассматривалась задача по назначению ТО на некотором сегменте железнодорожной сети одновременно с поиском расписания движения поездов. Движение поездов предлагалось осуществлять по некоторым заранее заданным маршрутам движения. Критерием оптимизации выступала минимизация затрат на осуществление перевозок и проведение ремонтных работ. Задача по назначению ТО была сформулирована в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. В [26] рассмотрен случай, когда один из путей двухпутной железной дороги становится недо-

ступным, оставшийся путь содержит разъезд, а все поезда делятся на две категории: приоритетные и обычные. Представлен полиномиальный алгоритм корректировки расписания движения поездов для данного случая.

Подходы для назначения «технологического окна», предложенные в [26, 70, 99, 128, 129], близки к материалу диссертации, однако в полной мере неприменимы. В отличие от Австралийских железных дорог, которым посвящена [70], в сети железных дорог Российских дорог имеются и двухпутные, и трехпутные участки пути. Помимо этого в [70] отсутствует формализованная постановка задачи. В [99] «технологическое окно» выбирается из некоторого наперед заданного набора. Время в [129] полагалось дискретным, однако время поиска существенно растёт, если временные периоды очень малы, а если периоды времени очень крупны, то можно не осуществить план перевозок. В [128] используются фиксированные маршруты для движения.

Во второй главе диссертации рассматривается задача поиска расписания движения по графу транспортной сети, в которой предполагается возможным движение между вершинами графа в произвольные промежутки времени. Типовой иллюстрацией такой сети является движение на железнодорожной станции.

Среди публикаций по моделированию и оптимизации движения на железнодорожной станции выделим [67, 100, 143, 154]. В [100] рассматривается задача по определению путей отправления и прибытия группы поездов на станцию. Учитывается ограничение на то, что два поезда могут занимать один и тот же путь только через некоторый промежуток времени. В виду того, что станция рассматривается укрупнённо без учета подробной топологии станции, то по факту определяются не пути движения по станции, а платформы прибытия/отправления поездов. Данное обстоятельство вызвано тем, что ключевое понятие различности маршрутов не вводится. Если считать различными маршрутами такие, которые не содержат ни одного совпадающего участка ж/д пути, то большая часть ж/д инфраструктуры не должна использоваться, а это сильно снижает пропускную способность станции. Если маршруты считаются различными, когда хотя бы один участок в них отличается, то возникает вопрос о допустимости использования этих маршрутов двумя поездами. Может оказаться так, что системами централизации и блокировки предлагаемое движение будет запрещено. Следует также отметить, что в реальной жизни с поездом на станции могут проводить различные технологические

операции, например, смена поездного локомотива или же расформирование поезда. Это обстоятельство может привести к тому, что, формируя пути движения поездов, может получиться так, что сменить локомотив будет попросту невозможно из-за занятости путей. Однако результаты, опубликованные в [100], крайне полезны в свете получения приближённой (верхней) оценки пропускной способности ж/д станции. Бóльшая часть исследований по моделированию и оптимизации движения на железнодорожной станции отражена в зарубежных публикациях. В [67] представлен подробный обзор исследований, посвященных оценке и оптимизации пропускной способности станции, на начало 2000-х гг. В [67] выделено несколько подходов для оценки пропускной способности: использование некоторых аналитических формул, которые могут использоваться в качестве начального приближения для оценки пропускной способности; подход, основанный на оптимизации расписания движения, в котором предполагается встраивать новые поезда в действующее, возможно пустое, расписание; имитационное моделирование. Наиболее близок настоящей статье подход, основанный на оптимизации расписания. Среди публикаций, посвященных оптимизационному подходу, выделим [143, 154]. В [142, 143] ставилась задача по поиску циклического, т.е. повторяющегося через некоторый промежуток времени, расписания в части времени движения по перегонам и времени нахождения на станции. Рассматривалась однопутная однонаправленная железнодорожная сеть, учитывались различные технологические ограничения, в том числе количество станционных путей на железнодорожных станциях. Критерием оптимизации выступала взвешенная сумма из длины цикла и суммарного времени поездов в пути. Таким образом, в [143] использовалась пропускная способность станции, которая неявно оптимизировалась. В [154] рассматривалась наиболее близкая диссертации постановка задачи. В этой статье исследовалась задача по назначению платформы прибытия поездов на станцию и выбору маршрутов движения связанных с этими поездами отцепляющихся и прицепляющихся вагонов. Авторы [154] отметили среди недостатков своей работы то, что оптимизация по выбору маршрута движения из одной точки входа-выхода со станции до платформы не проводится, при этом возможность движения для других поездов по всему железнодорожному пути из этого маршрута полностью исключается, хотя по некоторым участкам пути из этого маршрута движение безопасно. Данный недостаток обуславливается тем, что авторы [154] не используют графовую структуру станции, а

используют лишь маршруты, которые в [154], по сути, представляют пару: платформа – точка входа-выхода со станции. В диссертации эти недостатки отсутствуют.

Отметим, что задача по управлению движением на железнодорожной станции рассматривается и в разрезе моделирования передвижения пассажиров по станции с целью увеличения пропускной способности станции [40].

Как и в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами, в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами возникает задача выбора оптимального промежутка времени для проведения ремонтно-технологических работ. Для этой задачи в диссертации разрабатывается ряд критериев оптимальности, а сами задачи формулируются в виде задач смешанного целочисленного линейного программирования.

При формировании расписания движения необходимо принимать в расчет риски всевозможных неблагоприятных событий. Типовой интерпретацией риска является отклонение в большую или меньшую сторону от целевого значения некоторого показателя вследствие неопределенностей [17]. В данной терминологии у понятия присутствует не только негативная коннотация, а риск ничем не отличается от убытка/прибыли от ведения некоторой деятельности. В то же время в межгосударственном стандарте [16] постулируется, что риск – это сочетание вероятности нанесения ущерба и тяжести этого ущерба. Именно этим понятием риска мы и будем пользоваться, не учитывая доход. Риски различных неблагоприятных событий рассматриваются в главе 3, а в главе 4 разрабатывается концепция интегрального риска – риска на всем пути следования транспортного средства.

Одним из наиболее опасных видов транспортных происшествий являются сходы железнодорожного подвижного состава, которые в зависимости от тяжести последствий могут также классифицироваться как аварии и крушения. Последствия схода могут быть весьма различны: от незначительного повреждения верхнего строения железнодорожного пути и повреждения вагонов в объеме текущего отцепочного ремонта до повреждения пути, требующего усиленного капитального ремонта, и повреждения вагонов до исключения из инвентаря, а также утраты груза и прерывания железнодорожного движения на длительный период времени. В этой связи актуальной задачей представляется оценка потенциального числа подвижных единиц в сходе с рельсов в

зависимости от различных факторов, например, скорости движения поезда, его веса для последующей выработки рекомендаций по снижению среднего/наиболее вероятного числа вагонов в сходе, а, следовательно, и по снижению возможного ущерба.

Отправной точкой при анализе факторов, приводящих к наиболее тяжелым последствиям при сходе вагонов при поездной работе, является исследование протоколов транспортных происшествий. За 2013–2016 гг. имеется 262 протокола сходов (в том числе классифицированных как крушения) вагонов грузовых и пассажирских поездов, которые произошли в Российской Федерации, не считая протоколов транспортных происшествий, которые классифицированы как крушения. Если рассматривать упомянутые выше железные дороги США и Индии, то из [107, 108] следует, что в США за 2015–2016 гг. произошло 2493 схода, а в Индии за промежуток с 2010–2011 по 2014–2015 годы произошло 293 сходов, данные по Китаю являются закрытыми. Логичным представляется использование для анализа американских протоколов, как это было сделано, например, для оценки ущерба от транспортных происшествий в [15] или индийских протоколов. Однако хотя протоколы транспортных происшествий в США и России практически совпадают, существуют отличия: в российских протоколах имеется информация о наличии или отсутствии стрелочного перевода в месте схода, плане и профиле пути, на котором произошел сход. Данные факторы будем считать влияющими не только на сам сход вагонов, но и на тяжесть последствий от схода. По транспортным происшествиям в Индии детальная информация в открытых источниках отсутствует. Поэтому использование американских или индийских протоколов не представляется возможным, и анализ производится исключительно по российским данным.

При исследовании количества вагонов в сходе можно построить доверительный интервал для потенциального числа сошедших вагонов или попытаться установить закон распределения числа вагонов в сходе, однако этих характеристик недостаточно, поскольку они будут одинаковыми и для поезда, состоящего из 3-х вагонов, и для поезда, состоящего из 63-х вагонов. Поэтому необходимо отыскание функциональной зависимости между количеством вагонов в сходе и различными факторами. В одной из первых работ [149], посвященных прогнозированию и оценке последствий железнодорожных происшествий, рассматривалась задача оценки влияния номера первой сошедшей с рельсов подвижной единицы (вагонов и секций локомотива) на число сошедших с

рельсов подвижных единиц. Предлагалось проводить оптимизацию расположения вагонов с опасными грузами с целью уменьшения вероятности схода с рельсов именно этих вагонов. В [131] в качестве факторов, влияющих на последствия схода, были выделены скорость в момент схода, остаточная длина состава (общее количество вагонов, начиная с первого сошедшего), наличие дополнительных локомотивов в середине/хвоста состава, доля груженых вагонов. Однако информация о радиусе кривой и наличии уклона в месте схода в расчет не принималась. В [130] оценивался уровень схода (уровень опасности), зависящий от класса пути, пропущенного тоннажа, наличие систем сигнализации (например, о занятости поездом секции). Но получаемая зависимость носит общий характер и не позволяет для конкретного поезда снизить риск от схода вагонов. В [74, 79] исследовалась схожая задача поиска функциональной зависимости между вероятностью схода и длиной состава, пройденным количеством километров поездом и классом пути. Однако геометрические особенности пути также не были учтены. В этой связи необходимо уточнение и модификация предложенных в [74, 79, 130, 131, 149] зависимостей, что и делается в диссертации.

Логичным продолжением и развитием метода, позволяющего оценить закон распределения количества подвижных единиц в сходе с рельсов, является прогнозирование дополнительного негативного последствия от схода с рельсов помимо собственно повреждения подвижного состава – нарушения габарита соседнего пути хотя бы одной сошедшей с рельсов подвижной единицей. Габаритом соседнего пути называется область, в которой может находиться некоторый (другой) поезд. Нарушение габарита соседнего пути по данным протоколов транспортных происшествий в Российской Федерации за 2013–2016 гг. произошло 37 раз. В результате таких сходов произошло 6 столкновений с поездами, двигающимися во встречном направлении или стоящими на соседнем пути (в том числе с 1 пассажирским), что привело к гибели 8 человек во встречных поездах, а также к повреждениям вагонов/секций локомотивов встречных поездов вплоть до исключения их из инвентарного парка. Средняя задержка движения по соседнему пути составила порядка шести с половиной часов. Как следует из приведенных данных, проблема схода с рельсов подвижных единиц подвижного состава грузового поезда и последующего нарушения габарита соседнего пути крайне актуальна. Однако вопрос количественной оценки вероятности нарушения габарита соседнего пути сошедшими с

рельсов подвижными единицами остается как в России, так и за рубежом неисследованным. Наиболее близко к вопросу количественного оценивания подошли в [133]. В данной работе приводятся различные факторы, приводящие к нарушению габарита соседнего пути, а также приводится некоторый, по сути, эвристический индекс опасности нарушения габарита соседнего пути, связывающий все факторы в единое целое.

Поскольку в результате схода подвижного состава с рельсов возможны только два варианта: либо габарит соседнего пути будет нарушен, либо нет, – то случайная величина, характеризующая нарушение габарита соседнего пути, имеет распределение Бернулли, параметром которого является искомая вероятность нарушения сошедшими подвижными единицами подвижного состава габарита соседнего пути. В качестве оценки данной величины можно использовать выборочную оценку вероятности [47], однако такая оценка будет весьма грубой, так как она не учитывает ни геометрические особенности пути, ни параметры движения поезда. Для более точной оценки следует искать некоторые функциональные зависимости между вероятностью и различными факторами, что возможно при применении метода максимального правдоподобия, который и используется в дальнейшем в диссертации. Метод максимального правдоподобия в случае, когда случайная величина, породившая выборку, имеет распределение Бернулли, приводит к задаче бинарного выбора [121]. Данная задача и ставится в диссертации.

В задачах на железнодорожную тематику бинарный выбор исследовался, в частности, в [132] в задаче поиска вероятности того, что сход произойдет по причине излома рельсов. В [84] на основе логистической регрессии была построена функциональная зависимость между вероятностью столкновения между поездами и автомобильным транспортом на произвольном железнодорожном переезде за некоторый промежуток времени.

Самой опасной по возможным последствиям инфраструктурой в составе железных дорог являются станции, на которых движение поездов является наиболее сложным и интенсивным. Топология станции бывает весьма сложной, а изменение этой топологии зачастую сопряжено с массой ограничений, поскольку многие крупные станции расположены в черте города. Такое расположение железнодорожных станций является дополнительным фактором, приводящим к серьёзным последствиям от столкновения составов. Для снижения риска аварий на железнодорожном транспорте необходимо, в

первую очередь, добиться минимизации вероятности столкновений подвижного состава на железнодорожных станциях.

Вероятностный подход к решению проблем обеспечения безопасности различных технических систем развивается в [3, 53, 54, 56, 57, 63, 91, 117, 122, 126, 139, 152]. Суть вероятностной концепции составляют: количественная оценка степени опасности (риска), применение имитационного моделирования для выявления возможных путей снижения риска, установление приемлемых уровней риска. В диссертации предлагается алгоритм оценки вероятности бокового столкновения поезда с маневровым составом на железнодорожной станции в течение заданного периода времени. Поток маневровых составов через каждый стрелочный перевод предполагается пуассоновским.

Одним из наиболее резонансных видов транспортных происшествий являются столкновения на железнодорожных переездах – при столкновении поезда с автомобилями нередко гибнет большое количество людей. Кроме того, нередки случаи, когда при столкновении происходит сход вагонов поезда, что может привести к масштабной экологической катастрофе, если в вагонах везутся опасные химические грузы. Кроме репутационного ущерба столкновения на транспортных переездах приводят к большим финансовым затратам от поврежденной инфраструктуры и подвижного состава, а также от простоя поездов, связанным с работой восстановительных поездов на месте транспортных происшествий.

Основная часть исследований, посвященная катастрофам на транспортных переездах, посвящена либо построению регрессионных зависимостей числа происшествий от различных факторов [88, 151], либо получению некоторого интегрального индекса, характеризующего степень опасности/безопасности на транспортном переезде [76, 147]. При этом не менее важным вопросом является задача об оптимальном расходовании инвестиций в устройства, запрещающие переезд. Данная проблема актуальна, так как построение путепроводов или тоннелей приводит к тому, что столкновения между автомобилями и поездами на данном транспортном переезде сводятся к нулю. Однако в силу того, что строительство тоннелей и путепроводов стоит весьма значительных материальных средств, то на средства, запрещающие переезд, на других транспортных переездах попросту может не хватить средств. Поэтому возникает вопрос о рациональном использовании средств в установку средств, запрещающих переезд, на протяжен-

ной железнодорожной сети. Общая концепция разработки стратегии установки средств, запрещающих переезд, представлена в работах [123, 147, 148]. В [147] обсуждались различные подходы к оценке эффективности установки на том или ином переезде той или иной системы защиты, которая строилась на основе некоторых средних характеристик. Для решения задачи установки средств защиты на всей железнодорожной сети, предлагалось использовать некоторое детерминированное число, характеризующее количество транспортных происшествий за год на конкретном транспортном переезде. Однако количество транспортных происшествий является случайной величиной, а самой задаче по рациональному расходованию средств было дано лишь словесное описание. В [148] приведена математическая постановка задачи о рациональном распределении средств в установку средств, запрещающих переезд, однако в качестве полезности от установки той или иной системы защиты используется средний доход. Однако на основе средних характеристик невозможно получить какие-то гарантирующие характеристики, весьма важные в железнодорожных процессах, в которых могут пострадать люди. В [123] единицей полезности от установки системы защиты является некоторая детерминированная величина, получаемая на основе некоторого ожидаемого числа происшествий на транспортном переезде. Эти недостатки учитываются и исправляются в настоящей диссертации. Кроме того, предлагаются способы оценивания вероятности столкновения поездов и автотранспорта на переездах.

Следует отметить, что исследуемая задача по улучшению транспортной инфраструктуры принадлежит к классу задач распределения ресурсов (resource allocation problem) [116, 141], а сама она представляет задачу по увеличению надежности. Прикладные аспекты задачи по управлению ресурсами можно найти в [77, 144]. Прикладные аспекты задачи по оценке надежности приводятся в [49, 66]: в [49] изучается надежность рельсов, а в [66] — надежность тепловозов с точки зрения вероятности возникновения пожаров. В [138] представлен подробный обзор использования квантильных характеристик для анализа надежности. В [106] рассматривалась задача по распределению ресурсов между вершинами отправления транспортной сети, представляемой ориентированным графом. Целью оптимизации являлось максимизировать вероятность успешной передачи ресурсов от вершин отправления к вершинам назначения. Пропускная способность дуг полагалась случайной. Задача, обратная к [106], рассматривается в настоящей

диссертации. Согласно терминологии [106] в диссертации ресурсы рассматриваются как фиксированные в вершинах отправления, управление происходит пропускной способностью с учетом того, что она полагается случайной.

Как было отмечено выше, движение транспорта сопряжено с большим количеством различных неблагоприятных событий. В этой связи возникает вопрос о нахождении общего (суммарного, интегрального) риска. По данной тематике можно выделить работы [80, 146]. В них строится функция интегрального (общего на всем пути следования) риска с целью оптимального расположения вагонов с опасными грузами с точки зрения минимизации суммарного риска. Данная функция зависит от скорости (при итоговом расчете используется не реальная скорость поезда в пути, а максимальная допустимая на участке), а также зависит от номера первой сошедшей с рельсов подвижной единицы и причины схода с рельсов. Следует отметить, что сход с рельсов по конкретной причине – случайное событие, однако учет этого обстоятельства (например, при помощи формулы полной вероятности) в [80, 146] опускается. Другие факторы, например, профиль и кривизна пути не используются, а это, в свою очередь, снижает точность полученного результата. Кроме того, в [80, 146] поезд представляется материальной точкой, для которой не учитывается, что голова поезда может находиться, например, на стрелочном переводе, а хвост еще нет. Также не рассматриваются другие, помимо схода с рельсов, неблагоприятные события, которые могут произойти при транспортировке, а в качестве функции риска не постулируется вероятность отсутствия всех неблагоприятных событий при движении. В диссертации устраняются эти, а также некоторые другие недостатки.

Задачи смешанного целочисленного линейного программирования, неоднократно используемые в диссертации, помимо применения управления движением в транспортных системах [98, 158, 159] имеют множество и других практических приложений. Такие задачи используются также в задачах портфельной оптимизации [45, 81], задачах размещения предприятий [68, 114], задачах управления ресурсами [118, 140, 155], а также других областях.

Для решения задач смешанного целочисленного линейного программирования разработан ряд коммерческих и бесплатных решателей. Одними из самых популярных решателей являются CPLEX, Gurobi, SCIP. Решатель CPLEX использовался, в

частности, в [68, 81, 98, 140, 158, 159]. Решатель Gurobi применялся среди прочих работ в [114, 118]. Иногда [155] в статьях рассматриваются одновременно Gurobi и CPLEX. Решатель SCIP хорош тем, что позволяет решать даже задачи с нелинейными ограничениями.

Сравнение различных решателей можно найти в [72, 119, 124]. В [72] проводится анализ решателей CPLEX, Gurobi, XPRESS с точки зрения возможных задач математического программирования, которые они могут решить, а также особенностей функционирования этих решателей. В [124] сравнивались решатели задач смешанного целочисленного нелинейного программирования. В качестве характеристики качества использовалось количество решенных задач тем или иным решателем за заданный промежуток времени. Всего таких задач было 335. При этом не обсуждался вопрос, насколько долго решается та или иная задача тем или иным решателем. Также не исследовался вопрос, насколько входные данные влияют на скорость получения решения. Кроме того, не обсуждался вопрос о влиянии программной среды на скорость и оптимальность получаемого решения. В [119] исследовалось уменьшение времени счета для решателей, доступных на начало 2000-х годов и на конец 2010-х. В [119] отмечалось то, что в зависимости от порядка заполнения матрицы ограничений время поиска решения, вообще говоря, неодинаково. Влияние начальных данных на время получения решения не исследовалось. Не выясняется, какой именно из решателей лучше. Указанные недостатки в дальнейшем исправляются в концепции сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования в пятой главе диссертации.

Отметим, что для тестирования решателей можно выбрать часть задач из [102], однако выбор той или иной задачи наталкивается на необходимость поиска задач из различных прикладных областей, важность которых не вызывает сомнений. В дальнейшем в пятой главе будут исследоваться задача портфельной оптимизации из [45], структура которой схожа с задачей управления спутниковым аппаратом, задача корректирования летательного аппарата [30], задача планирования производства [94], а также теоретическая задача с полиэдральной функцией потерь [28]. При этом основной целью главы является ответ на вопрос о возможности ускорения времени счета разработанных в первых трех главах диссертации процедур и алгоритмов на ряде описанных выше более простых задач.

**Объектом исследования** диссертационной работы являются системы управления движением и его безопасностью (надежностью) в транспортных системах, задаваемых графовыми структурами.

**Предметом исследования** диссертационной работы являются алгоритмы и методы управления движением и его безопасностью в транспортных системах, задаваемых графовыми структурами.

**Цель и задачи работы.** Целью диссертации является разработка математического, алгоритмического, программного обеспечения для решения задачи управления движением в транспортных системах, задаваемых графовыми структурами.

Для достижения выбранной цели предполагается декомпозировать задачу управления движением на блоки: блок выбора маршрута и времени движения по графу, блок оценки безопасности (надежности) скоростного режима движения при заданном маршруте и времени движения между вершинами графа.

Необходимо решить следующие задачи.

1. Разработать математическое и алгоритмическое обеспечение для поиска расписания движения в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами: систему ограничений, задающую движение мультиграфу по транспортной сети, критериальную функцию, алгоритм поиска решения в поставленной задаче – учитывающее возможность движения по окончании горизонта планирования. Разработать программную реализацию алгоритма.

2. Разработать математическое и алгоритмическое обеспечение для поиска расписания движения в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами на основе системы ограничений, учитывающей графовую структуру сети и ряд технологических особенностей движения. Разработать алгоритм поиска промежутка времени, в которое часть ребер графа можно сделать недоступным для движения в таких транспортных сетях.

3. Разработать математическое и алгоритмическое обеспечение для решения задач управления надежностью на железнодорожном транспорте.

4. Найти явный вид функций интегрального риска на всём заранее заданном пути следования транспортного средства: среднего ущерба и вероятности возникновения неблагоприятных событий. Разработать метод оценки компонент интегрального риска

при движении грузовых поездов для решения задачи анализа безопасности движения.

5. Разработать статистический метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования и вызывающих их программных сред.

**Методы исследования.** В диссертации используются методы системного анализа, теории вероятностей, математической статистики, математического программирования, математического моделирования.

**Достоверность результатов** обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

**Научная новизна.** 1. В диссертационной работе решается проблема конечности горизонта планирования – промежутка времени, на который строится расписание движения – на основе специальной постановки задачи. Разрабатывается универсальная критериальная функция, включающая в себя одновременно различные временные компоненты перевозок, стоимость, количество доставленных в рамках горизонта планирования грузов.

2. Ставится постановка задачи поиска расписания движения в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами, в которой учитывается технологический процесс функционирования транспортных сетей, в частности, рассматривается доступность каждого ребра графа сети во времени. Предлагается ряд постановок задач для назначения «технологического окна» в форме задач смешанного целочисленного линейного программирования.

3. Получен явный вид оценки вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции; решается задача об улучшении безопасности движения в транспортных сетях (и, в частности, на железнодорожных переездах) с квантильным критерием с использованием неравенства Чернова; на основе методов математической статистики предлагается типизация причин сходов с рельсов грузовых поездов.

4. Предлагаются функции интегрального риска, учитывающие невозможность движения после возникновения неблагоприятного события, а также скоростной режим движения на всем пути следования. Предлагается метод оценки компонент интегрального риска, учитывающий различные неблагоприятные события, которые могут про-

изойти с грузовыми поездами во время их движения, и геометрические особенности грузовых поездов.

5. Предлагается новый метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования, который учитывает то, что время выполнения операций компьютером можно считать случайным, а также то, что решение задачи смешанного целочисленного линейного программирования существенно зависит от набора исходных данных.

**Теоретическая ценность** работы заключается в разработке алгоритмов для решения задач смешанного целочисленного линейного программирования специального вида, имеющих высокую размерность, нахождении детерминированных эквивалентов и границ критериальных функций для некоторого класса задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями, явных выражений для функций интегрального риска для произвольного количества и типов неблагоприятных случайных событий.

**Практическая ценность** работы состоит в том, что разработанные в работе процедуры и алгоритмы ориентированы на применение в различных транспортных компаниях для формирования расписания движения, а также для выбора скоростного режима беспилотного рельсового транспорта.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** В диссертации проведено исследование задач оптимизации, разработаны методы и алгоритмы для решения задач оптимизации на графах, которые применены для анализа в том числе прикладных объектов. На основе методов теории вероятностей и математической статистики разработано математическое, алгоритмическое, программное обеспечение для решения задач анализа и управления надежностью на железнодорожном транспорте (области исследования 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 17 специальности 2.3.1.).

**Личный вклад.** Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в который был определяющим.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация содержит введение, пять глав, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 214 страниц, включая 12 рисунков, 47 таблиц, список литературы, содержащий 161 наименование, и при-

ложение.

### Содержание диссертации

**Во введении** дан подробный обзор имеющихся работ по выбранной теме диссертационного исследования и смежным темам, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

**В первой главе** рассматривается задача формирования расписания грузоперевозок в транспортной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Перевозки между вершинами могут осуществляться только в заранее определенные промежутки времени. Времена готовности грузов к отправлению, начала и конца движения любого транспортного средства, осуществляющего перевозку между вершинами – фиксированные. При этом данные характеристики являются вещественными числами. Формулируется новая система ограничений, задающая движение по транспортной сети, представляемой неориентированным мультиграфом, в виде системы линейных равенств и неравенств, содержащих бинарные и непрерывные переменные. Предлагается критерий оптимальности расписания грузоперевозок, содержащий в себе помимо временных характеристик перевозок их стоимость, также учитывается количество недоставленных грузов. Задача поиска оптимального расписания формулируется в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. Оптимизация проводится по использованию того или иного транспортного средства для того или иного груза. Рассматриваются и другие оптимизационные переменные, которые характеризуют время стоянки грузов в различных вершинах, ожидаемое количество времени до доставки по окончании горизонта планирования, доставку груза до вершины назначения. Предлагается итеративный алгоритм поиска решения, приближенного к оптимальному по значению критерия, в исследуемой задаче. Алгоритм конструируется на основе решения задач смешанного целочисленного линейного программирования. Для снижения времени счета в алгоритме проводится декомпозиция множества грузов, а также декомпозиция горизонта планирования. Для дополнительного уменьшения времени счета предусматривается возможность удаления транспортировок, которые вряд ли могут быть использованы грузами в виду того, что они осуществляются в удаленных от места нахождения грузов частях транспортной сети. На ряде примеров проводится содержа-

тельное тестирование разработанного алгоритма и его версий.

Также формулируется новая система ограничений для одновременного поиска «технологического окна» – промежутка времени, в которое некоторые участки железнодорожной сети закрываются для проведения ремонтных работ – и расписания движения поездов по некоторому сегменту сети. Исходная постановка сведена к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Ввиду возможных вычислительных сложностей при решении сформулированной задачи предлагается способ поиска субоптимального решения, который основан на формировании базового расписания движения и последующей его корректировке с учетом необходимости в «технологическом окне».

**Во второй главе** рассматривается задача поиска расписания движения по графу транспортной сети, в которой с учетом занятости ребер предполагается возможным движение между вершинами графа в произвольные промежутки времени. Типовой иллюстрацией такого движения является движение на железнодорожной станции.

Рассматривается задача по увеличению пропускной способности транспортной сети. Транспортная сеть представляется в виде неориентированного нагруженного графа. Имеется некоторое базовое расписание движения грузов, позволяющее определить свободу ребер графа транспортной сети для движения. Ставится задача по поиску времени и маршрута движения дополнительных грузов по станции с учетом возможности стоянки груза в сети, а также смены перевозящих его транспортных средств. Эта задача формулируется в виде набора задач смешанного целочисленного линейного программирования. Если существует решение в хотя бы одной задаче из этого набора, то рассматриваемый груз может быть пропущен через транспортную сеть. Подобная процедура по «встраиванию» новых грузов в действующее расписание проводится для каждого груза, который планируется пропустить через транспортную сеть в порядке приоритетности этих грузов.

Также во второй главе исследована проблема установления «технологического окна» в транспортной сети с нефиксированным временем движения между вершинами с учетом действующего расписания движения. Для нахождения «технологического окна» были сформулированы три задачи:

- поиск промежутка времени максимальной длины, когда все участки пути, подлежащие ремонту, одновременно свободны;
- поиск промежутка времени, длительности не меньше заданной, при котором ребра транспортной сети, подлежащие ремонту, заняты минимальное количество раз;
- поиск промежутка времени, длительности не меньше заданной, при котором будет задержано или перенесено минимальное число грузов, следующих через участки пути, подлежащие ремонту

в форме задач смешанного целочисленного линейного программирования.

**В третьей главе** конструируются различные математические методы для расчета и управления надежностью движения в транспортных системах.

В начале исследуется задача минимизации негативного влияния случайного фактора на транспортное происшествие с помощью критерия в форме математического ожидания. Также рассматривается задача по поиску оптимального уровня фактора, начиная с которого имеет смысл проводить профилактические работы, с учетом баланса суммарных затрат и надежности принятия решения. Для этого используется критерий в форме вероятности.

Строится функциональная зависимость между средним количеством грузовых вагонов в сходе с рельсов и различными факторами движения: скоростью поезда, планом и профилем пути, длиной и массой поезда. Путем статистического анализа определяются различные группы транспортных происшествий: сход вследствие неисправности вагона или секций локомотива вне стрелочного перевода; сход вследствие неисправности рельсов вне стрелочного перевода; сход на стрелочном переводе, не вызванный ранее сошедшим составом. Для каждой группы транспортных происшествий при помощи метода максимального правдоподобия и отрицательной биномиальной регрессии получены функции среднего количества вагонов в сходе. Получена формула, которая позволяет при заданном наборе различных факторов движения: скорости поезда, плана и профиля пути, длины и веса поезда – построить оценку распределения количества вагонов в сходе.

Для двух группы происшествий: сходов с рельсов по причине неисправности вагонов/секций локомотива, сходов с рельсов по причине неисправности пути – на основе

классических моделей бинарного выбора строится оценка вероятности нарушения габарита соседнего пути хотя бы одной сошедшей с рельсов единицы подвижного состава грузового поезда. Данная оценка получается зависящей от степени загрузки поезда и количества единиц подвижного состава в сходе.

Рассматривается задача оценки вероятности столкновения маневровых составов с пассажирскими (грузовыми) поездами на железнодорожной станции. Поток маневровых составов предполагается пуассоновским для каждого стрелочного перевода, на котором возможны боковые столкновения. Имеется возможность задания уникальных для каждого часа интенсивностей передвижений через стрелки. Предполагается, что разрешено проведение маневровых работ в районе приемки/отправки пассажирского поезда. Само столкновение возникает лишь при проезде машинистом поезда или машинистом маневрового локомотива на запрещающий сигнал светофора. Такой проезд считается случайным и происходит с малой заданной вероятностью. Движение пассажирских поездов подчиняется заданному расписанию, но при проезде станции каждый пассажирский поезд может проследовать по одному из заданных маршрутов. Для каждого поезда и для каждого маршрута определяется вероятность столкновения с маневровым составом. Это позволяет оптимизировать маршрут с точки зрения снижения указанной вероятности. Для расчета вероятности столкновения на конкретном стрелочном переводе используются средние значения скорости и длины.

Также исследуется задача распределения ресурсов в технические средства, предотвращающие несанкционированный проезд автотранспортом железнодорожных переездов. Исследована возможность как установки систем защиты на необорудованный железнодорожный переезд, так и улучшения имеющихся систем защиты. Задача максимизации вероятности того, что на железнодорожных переездах не произойдет ни одного столкновения сведена к задаче целочисленного линейного программирования. Для задачи с квантильным критерием предлагается процедура приближенного решения, основанная на использовании границы Чернова для оценки вероятности, и последующего решения задач нелинейного программирования.

**В четвертой главе** рассматривается задача по оцениванию и анализу риска транспортных происшествий на рельсовом транспорте. Предлагаются две функции интегрального риска, позволяющие оценить опасность движения на всем маршруте следо-

вания транспортного средства. В качестве таких функций выбираются вероятность возникновения неблагоприятного события при транспортировке, а также средний ущерб. Формулируется теорема о виде этих функций при наличии условных вероятностей возникновения неблагоприятных событий. Предлагается концепция оценивания вероятности и ущерба от неблагоприятных событий при движении грузовых поездов. На основе ранее обработанной статистики по движению грузовых поездов и происходивших с ними неблагоприятных событий приводится содержательный пример расчета функций интегрального риска.

**В пятой главе** описывается разработанный в рамках работы над диссертацией комплекс программ. Обсуждается назначение программ, их входные и выходные характеристики. Также разрабатывается процедура тестирования решателей, включающая в себя многократное повторение решения одной и той же задачи математического программирования, а также решение задачи математического программирования с теми же переменными, но другими входными данными. Предлагаются компоненты тестирования решателей. Эти компоненты включают как различные временные характеристики, так и характеристики, связанные с продуцируемым решателями «оптимальным» значением критериальной функции. Исследование работы решателей проводится с учетом того, что их запуск может осуществляться из различных сред. Обсуждаются различные особенности вызова решателей из различных программных сред.

**В заключении** подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые диссертантом к защите.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования Московского авиационного института (рук. проф. Кибзун А.И.), лаборатории №7 ИПУ РАН (рук. проф. РАН Хлебников М.В.), лаборатории дискретной оптимизации ОФ ИМ СО РАН (рук. доц. Еремеев А.В.).

Материалы диссертации представлялись на следующих конференциях: «Интеллектуальные системы управления железнодорожным транспортом. Компьютерное и математическое моделирование.» (Россия, Москва, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 гг.), XLIV международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», (Россия, Москва, 2018 г.), 22-я международная конференция «Теория математической

оптимизации и исследование операций» (Россия, Екатеринбург, 2023 г.), XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (Россия, Москва, 2024 г.), международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (Россия, Екатеринбург, 2024 г.).

Работа поддержана грантами РНФ (№ 23-21-00293, 16-11-00062), грантом Минобрнауки (2.2461.2017/ПЧ), грантами РФФИ (20-07-00046 А, 17-20-03050 офи\_м\_РЖД).

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликовано 15 статей, среди которых

- 10 [5–7, 12, 32, 33, 36, 111, 113] опубликованы в журналах из перечня ВАК и проиндексированы в МСЦ WoS и/или Scopus,
- 4 [20, 22, 42, 44] опубликованы в журналах из перечня ВАК,
- 1 [110] опубликована в сборнике докладов конференции, проиндексированном в МСЦ Scopus.

Также по теме диссертации опубликовано 11 [2, 19, 21, 23, 24, 29, 34, 39, 41, 43, 46] работ в различных сборниках и материалах конференций, в сборниках тезисов докладов конференций; получено 4 [1, 35, 37, 38] свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Общее число публикаций — 30.

**Благодарности.** Автор выражает глубокую признательность научному консультанту заведующему кафедрой «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» МАИ профессору А. И. Кибзуну, профессору А. В. Наумову, профессору С. В. Иванову, профессору А. В. Борисову за ценные комментарии и замечания, а также за другую помощь, оказанную диссертанту в процессе исследований и написания диссертации.

# 1. Оптимизация в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами

В разделе 1.1 вводятся основные обозначения и предположения для формирования системы ограничений, задающей движение в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами. В разделе 1.2 с использованием линейных по оптимизируемому переменным равенств и неравенств строится система ограничений, задающая движение в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами. В разделе 1.3 формируется критериальная функция для поиска оптимального расписания движения. В разделе 1.4 ставится задача поиска оптимального расписания и приводится алгоритм поиска приближенного решения в поставленной задаче, основанный на решении ряда задач смешанного целочисленного линейного программирования; также проводится ряд численных экспериментов, демонстрирующих применимость построенного алгоритма. В разделе 1.5 ставится и приближенно решается задача назначения «технологического окна» – промежутка времени, в течение которого часть путей транспортной сети закрывается для движения в рамках ремонтных работ.

## 1.1. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим транспортную систему, представляемую неориентированным мультиграфом  $G = \langle V, E \rangle$ , где  $V$  – множество вершин (городов, железнодорожных станций, заводов, аэропортов, морских портов) и  $E$  – множество ребер (шоссе, железнодорожных путей, воздушных трасс, морских путей), соединяющих эти вершины. Пусть  $|V| = M \geq 2$ . Перенумеровав вершины мультиграфа  $G$  от 1 до  $M$ , составим множество индексов  $V' = \{1, 2, \dots, M\}$ . Каждый элемент этого множества единственным образом определяет вершину мультиграфа  $G$ . Отметим, что необходимость в представлении транспортных систем с использованием мультиграфов следует из предметной области. Так, встречное движение между двумя железнодорожными станциями в один и тот же промежуток времени в целях безопасности должно быть разнесено по разным железнодорожным путям. Поэтому приходится отдельно рассматривать все железнодорожные пути (ребра) из одной вершины (станции) в другую (станцию).

Будем отсчитывать время в минутах относительно некоторого момента отсчета. Под горизонтом планирования будем понимать промежуток времени  $[0, t_{\max})$ , на который строится план перевозок. Если план перевозок строится на день (1440 минуты), то  $t_{\max} = 1440$ .

Пусть имеется  $I$  грузов (посылок, контейнеров, поездов). Для  $i$ -го груза заданы:

- индекс вершины отправления  $v_i^{\text{отпр.}} \in V'$ ;
- индекс вершины прибытия (назначения)  $v_i^{\text{приб.}} \in V'$ ;
- время готовности к отправлению  $t_i^{\text{отпр.}} \in [0, t_{\max})$ ;
- максимальное время  $d_i$  в течение которого грузу позволяет находиться в пункте отправления с момента готовности;
- время груза в пути  $t_i$ , т.е. максимальное время, в течение которого грузу позволяет находиться в транспортной системе (исключая время в вершине отправления), вычисляемое в минутах;
- масса груза  $w_i \in \mathbb{R}_+$ ,

$i = \overline{1, I}$ . Груз предполагается неделимым в том смысле, что его нельзя отправить по частям.

Движение между вершинами может выполняться только в определенные промежутки времени. Пусть доступно ровно  $K$  перемещений/транспортировок (самолетами, морскими судами, поездами, грузовиками) между вершинами. Параметры транспортировки математически можно представить в виде семиэлементного вектора-строки  $z_k \triangleq (v_k^{\text{нач.}}, v_k^{\text{кон.}}, n_k, t_k^{\text{нач.}}, t_k^{\text{кон.}}, w_k^{\text{макс}}, C_k)$ , где  $v_k^{\text{нач.}} \in V'$  – индекс вершины начала движения,  $v_k^{\text{кон.}} \in V'$  – индекс вершины конца движения, причем  $v_k^{\text{нач.}}$  и  $v_k^{\text{кон.}}$  – индексы смежных вершин в графе  $G$ ,  $n_k$  – номер ребра, соединяющего вершины с индексами  $v_k^{\text{нач.}}$  и  $v_k^{\text{кон.}}$ ,  $t_k^{\text{нач.}} \in [0, t_{\max})$  – время начала движения,  $t_k^{\text{кон.}}$  – время конца движения,  $w_k^{\text{макс}}$  – максимальная перевозимая масса при транспортировке,  $C_k$  – стоимость транспортировки единицы массы,  $k = \overline{1, K}$ . Обозначим через  $\mathcal{Z}$  множество всех векторов  $z_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Перенумеруем элементы множества  $\mathcal{Z}$  от 1 до  $K$ . Таким образом, число от 1 до  $K$  однозначно определяет конкретную транспортировку и ее параметры.

В дальнейшем под *расписанием движения* груза будем понимать набор номеров транспортировок, которые им используются. Зная номера транспортировок, можно легко определить вершины, посещаемые грузом, время посещения вершин, используемые для движения ребра мультиграфа, а также прочие характеристики движения.

При выполнении перевозок склады, в которых хранятся грузы, могут быть заполнены. Кроме того, с грузом могут производиться некоторые операции, например, переупаковка. В этой связи введем минимально и максимально возможную длительность стоянки в вершине с индексом  $v_k^{\text{кон.}}$  после выполнения транспортировки с номером  $k$  груза с номером  $i$ :  $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}$  и  $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Очевидно,  $\forall i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$   $0 \leq t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} \leq t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}$ .

Зададим величину  $\tau_{m_1, m_2}$  – ожидаемое время (начиная с момента готовности к отправлению) перевозки груза из вершины с индексом  $m_1$  в вершину с индексом  $m_2$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1, M}$ . Очевидно, что  $\tau_{m_1, m_1} = 0$ ,  $m_1 = \overline{1, M}$ . Если доступны исторические наблюдения по перевозке из вершины с индексом  $m_1$  в вершину с индексом  $m_2$ , то в качестве  $\tau_{m_1, m_2}$  можно выбрать реализацию выборочного среднего по имеющимся наблюдениям,  $m_1, m_2 = \overline{1, M}$ . Если эти данные отсутствуют, то указанную величину можно оценить экспертным путем. Также введем величину  $\eta_{m_1, m_2}$  – ожидаемое время с момента готовности до отправления груза из вершины с индексом  $m_1$  в вершину с индексом  $m_2$ , которая вычисляется по аналогичному принципу, что и  $\tau_{m_1, m_2}$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1, M}$ .

Под маршрутом груза с номером  $i$  будем понимать набор вершин, последовательно пересекаемых этим грузом,  $i = \overline{1, I}$ . Ограничим максимальное число транспортировок при движении в рамках горизонта планирования некоторым заранее заданным числом  $J$ . Под  $j$ -м этапом движения груза с номером  $i$  будем понимать движение этого груза, когда используется  $j$ -я по порядку использования транспортировка,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J + 1}$ . Этап  $J + 1$  – технический, движение на нем не производится, он нужен для корректного задания системы ограничений. Будем называть вершину промежуточной для  $i$ -го груза, если она не является для него ни вершиной отправления, ни вершиной назначения,  $i = \overline{1, I}$ .

Введем также величину  $\mathcal{D}_i$ , характеризующую отказ в транспортировке  $i$ -му грузу: 0 – грузу отказано в транспортировке, 1 – иначе,  $i = \overline{1, I}$ . Отказ в транспортировке

может быть связан с тем, что для груза не хватает транспортировок, чтобы добраться до вершины назначения с учетом ограничения на время в пути и других физических ограничений. В идеальном случае все величины  $\mathcal{D}_i$  равны единице,  $i = \overline{1, I}$ , однако такое не всегда физически реализуемо или не удастся найти расписание движения, приводящее к такому результату.

## 1.2. Система ограничений, задающая движение по мультиграфу транспортной сети

Сформулируем систему ограничений, задающую движения введенных выше  $I$  грузов по транспортной сети, задаваемой мультиграфом  $G$ , на основе множества транспортировок  $\mathcal{Z}$ .

Введем вспомогательные переменные  $\delta_{i,j,k}$ , характеризующие использование грузом с номером  $i$  транспортировки с номером  $k$  на  $j$ -м этапе,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Переменная  $\delta_{i,j,k}$  равна нулю, если транспортировка с номером  $k$  не используется  $i$ -м грузом на  $j$ -м этапе, и 1 – в противоположном случае.

Теперь сформулируем множество допустимых стратегий.

По определению переменных  $\delta_{i,j,k}$  имеем

$$\delta_{i,j,k} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J+1}, k = \overline{1, K}. \quad (1.1)$$

Поскольку этапов для движения может быть не более  $J$ , введем ограничение

$$\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \delta_{i,J+1,k} = 0. \quad (1.2)$$

Так как груз неделим, то на любом этапе (в том числе первом) можно использовать максимум одну транспортировку

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \leq 1, i = \overline{1, I}. \quad (1.3)$$

Если перевозка груза начинается, то она должна быть осуществлена из соответствующей вершины отправления

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} v_k^{\text{нач.}} = v_i^{\text{отпр.}} \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k}, i = \overline{1, I}. \quad (1.4)$$

Движение по мультиграфу  $G$  возможно только по смежным вершинам

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} v_k^{\text{кон.}} \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} v_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k}\right) M^3, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J-1}, \quad (1.5)$$

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} v_k^{\text{кон.}} \geq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} v_k^{\text{нач.}} - \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k}\right) M, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J-1}. \quad (1.6)$$

Отправление в промежуточных вершинах маршрута не должно происходить раньше прибытия в эти вершины. Поэтому с учетом ограничений на минимальное и максимальное время стоянки, имеем

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}) \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k}\right) \bar{t}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J-1}, \quad (1.7)$$

где<sup>1</sup>

$$\bar{t} = \max_{i \in \{1, \dots, I\}, k \in \{1, \dots, K\}} t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин.}},$$

$$\sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}) \geq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{нач.}}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J-1}. \quad (1.8)$$

Прокомментируем ограничения (1.3)–(1.8). В связи с наличием ограничений (1.1) компонентами вектора

$$\delta_i \triangleq \left( \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k}, \sum_{k=1}^K \delta_{i,2,k}, \dots, \sum_{k=1}^K \delta_{i,J,k}, \sum_{k=1}^K \delta_{i,J+1,k} \right)$$

могут быть только целые неотрицательные числа. В связи с ограничениями (1.3) первая компонента вектора  $\delta_i$  либо равна нулю, либо равна единице.

Рассмотрим вначале случай, когда первая компонента вектора  $\delta_i$  равна единице. Правая часть (1.4) будет равна номеру индекса вершины отправления соответствующего груза. Для выполнения (1.4) будет подобрана транспортировка, у которой индекс вершины отправления совпадает с индексом вершины отправления соответствующего груза. Если вторая компонента вектора  $\delta_i$  равна нулю, то ограничения (1.5)–(1.8) выполняются автоматически. Если вторая компонента вектора  $\delta_i$  равна единице, то ограничения (1.5)–(1.6) приводят к тому, что должно выполняться условие стыковок

<sup>1</sup>Здесь и далее полагается, что сумма любых переменных по пустому множеству равна нулю

транспортировок по месту, т.е. отправление и прибытие осуществляются из одной вершины. Ограничения (1.7)–(1.8) приводят к тому, что должно выполняться условие стыковок транспортировок по времени, т.е. время отправления не может раньше времени прибытия (с учетом стоянки на станции). Если вторая компонента вектора  $\delta_i$  равна  $k^* = \sum_{k=1}^K \delta_{i,2,k} \geq 2$ , то тогда ограничение (1.5) не может быть выполнено. Это связано с тем, что максимальное значение правой части ограничения (1.5) окажется отрицательным, т.к. по постановке задачи  $M \geq 2$  и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \delta_{i,2,k} v_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,2,k}\right) M^3 &\leq \sum_{k=1}^K \delta_{i,2,k} M + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,2,k}\right) M^3 = \\ &= k^* M + (1 - k^*) M^3 \leq \max_{k^* \geq 2} k^* M + (1 - k^*) M^3 = 2M - M^3 < 0. \end{aligned}$$

в то время как левая часть этого ограничения положительна, так как индексы вершин положительны. Аналогично, на любом месте в векторе  $\delta_i$  после единицы может стоять только единица, либо ноль. Отметим, что после нуля в векторе  $\delta_i$  может стоять только ноль, т.к. тогда в противном случае нарушится ограничение (1.6). Если после нуля в векторе  $\delta_i$  стоит единица, то левая часть (1.6) равна нулю, а правая равна некоторому положительному числу. Если после нуля в векторе  $\delta_i$  стоит некоторое число  $\tilde{k} \geq 2$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} v_k^{\text{нач.}} - \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k}\right) M &\geq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} - \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k}\right) M = \\ &= \tilde{k} - (1 - \tilde{k})M \geq \min_{\tilde{k} \geq 2} \tilde{k} - (1 - \tilde{k})M = 2 + 2M - 1 > 0. \end{aligned}$$

В то же время левая часть (1.6) равна нулю.

Теперь рассмотрим случай, когда первая компонента вектора  $\delta_i$  равна нулю. Как отмечалось выше, после нуля в векторе  $\delta_i$  может стоять только ноль.

Поэтому вектор  $\delta_i$  либо нулевой, либо представляет набор единиц, после которых идет набор нулей. В векторе  $\delta_i$  гарантированно будет один ноль в силу ограничения (1.2).

Груз может быть не отправлен, если время готовности к отправлению в сумме с максимальным количеством времени пребывания в вершине отправления выходят за пределы горизонта планирования. В противном случае нужно отправить груз не позднее максимального количества времени в вершине отправления с момента готовности.

Поэтому наложим ограничения

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k}\right) t_{\text{макс}} \leq t_i^{\text{отпр.}} + d_i, i = \overline{1, I}. \quad (1.9)$$

Для того чтобы отправить груз не ранее момента готовности, введем ограничение

$$t_i^{\text{отпр.}} \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k}\right) t_{\text{макс}}, i = \overline{1, I}. \quad (1.10)$$

Запретим грузу выходить из вершины и входить в вершину более чем один раз

$$\sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k: v_k^{\text{нач.}}=m, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} \leq 1, i = \overline{1, I}, m = \overline{1, M}, \quad (1.11)$$

$$\sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k: v_k^{\text{кон.}}=m, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} \leq 1, i = \overline{1, I}, m = \overline{1, M}. \quad (1.12)$$

Если предполагается, что груз будет стоять в некоторой промежуточной вершине в момент окончания горизонта планирования, необходимо гарантировать допустимость такой стоянки

$$\begin{aligned} \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} - t_{\text{макс}}) + \\ + t_{\text{макс}} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} \geq 0, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Также необходимо запретить дальнейшее движение груза после прибытия в пункт назначения. С этой целью введем ограничения

$$\sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}}=v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} \leq 2 \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k}\right), i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, \quad (1.14)$$

Введем величину  $\hat{T}_{i,j}$  – количество времени, проводимого грузом с номером  $i$  в  $j$ -й (по порядку следования) промежуточной вершине своего маршрута в рамках горизонта планирования

$$\begin{aligned} \hat{T}_{i,j} = \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} (t_k^{\text{нач.}} - t_{\text{макс}}) + \\ + \sum_{k: v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}, t_k^{\text{кон.}} < t_{\text{макс}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (t_{\text{макс}} - t_k^{\text{кон.}}), i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для удобства формулирования ставящейся в дальнейшем постановки задачи также положим  $\hat{T}_{i,J+1} = 0$ .

Введем новые переменные  $F_i$ , характеризующие ожидаемое количество времени, требуемого до прибытия в пункт назначения грузу с номером  $i$ , после окончания горизонта планирования

$$F_i = \tau_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (\tau_{v_k^{\text{кон.}}, v_i^{\text{приб.}}} - \tau_{v_k^{\text{нач.}}, v_i^{\text{приб.}}}) + \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} \geq t_{\text{макс}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} - t_{\text{макс}}), i = \overline{1, I}. \quad (1.16)$$

Движение грузов должно осуществляться с учетом ожидаемого времени до прибытия в пункт назначения. Например, продолжительное пребывание в промежуточных вершинах в маршруте должно быть возможно, когда подобная стратегия не приведет к тому, что время пребывания груза в транспортной системе будет превышено. В этой связи введем ограничения

$$F_i + \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} < t_{\text{макс}}, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} - t_{\text{макс}}) + \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} (t_{\text{макс}} - t_k^{\text{нач.}}) \leq t_i + \left( 1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \right) \eta_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}}, i = \overline{1, I}. \quad (1.17)$$

Отметим, что в рамках построенной системы ограничений возможно жесткое задание конкретного набора ребер мультиграфа  $G$ , последовательно пересекаемых в рамках движения грузом. Для этого на каждом этапе нужно ввести ограничения вида

$$\sum_{k \in K_i^j} \delta_{i,j,k} = 1, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J_i^*},$$

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} = 0, i = \overline{1, I}, j = \overline{J_i^* + 1, J + 1},$$

где  $K_i^j \subset \{1, \dots, K\}$  – множество номеров транспортировок, допустимых для использования  $i$ -м грузом на  $j$ -м этапе согласно заранее заданной последовательности ребер графа  $G$  для движения, а  $J_i^*$  – количество используемых этапов для движения груза.

Теперь введем переменные  $\omega_i$ , характеризующие, прибыл ли груз с номером  $i$  в пункт назначения в рамках горизонта планирования: 0 – прибыл, 1 – не прибыл,

$$\omega_i = 1 - \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} < t_{\text{макс}}, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k}, i = \overline{1, I}. \quad (1.18)$$

Прокомментируем введенные ограничения. Рассмотрим груз с номером  $i^* \in \{1, \dots, I\}$ .

Рассмотрим (1.13)–(1.15). Для этого вначале отметим, что возможны несколько случаев (выберем  $j^* \in \{1, \dots, J\}$ ):

- 1) при движении груза с номером  $i^*$  этап с номером  $j^*$  не задействован;
- 2) при движении груза с номером  $i^*$  этап с номером  $j^*$  задействован, груз не прибыл в пункт назначения, этап с номером  $j^* + 1$  не задействован;
- 3) при движении груза с номером  $i^*$  этап с номером  $j^*$  задействован, груз не прибыл в пункт назначения, этап с номером  $j^* + 1$  задействован;
- 4) при движении груза с номером  $i^*$  этап с номером  $j^*$  задействован, по окончании этапа груз прибыл в рамках горизонта планирования или прибудет после окончания горизонта планирования в пункт назначения.

В случае 1)  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*, k} = 0$ . Ввиду ограничений (1.1)

$$\sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 0,$$

а из-за ограничений (1.5), (1.6)  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*+1, k} = 0$ . Поэтому (1.13), (1.14) выполняются. Величина  $\hat{T}_{i^*, j^*}$  окажется равной нулю.

В случае 2)

$$\sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 1, \quad \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 0, \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*+1, k} = 0.$$

Ограничение (1.14) выполняется, так как его левая часть окажется равной нулю, а правая – двум. Если груз, не прибыв в пункт назначения, находится в момент окончания горизонта планирования в движении, то ограничение (1.13) выполнится автоматически. Это связано с тем, что время окончания транспортировки будет не меньше  $t_{\text{макс}}$ . При этом величина  $\hat{T}_{i^*, j^*}$  окажется равной нулю, что логично, так как остановка, если

таковая будет, в  $j^*$ -й промежуточной по порядку следования вершине произойдет уже после горизонта планирования. Если же груз, не прибыв в пункт назначения, стоит в момент окончания горизонта планирования, то ограничение (1.13) будет гарантировать допустимость стоянки по крайней мере до конца горизонта планирования. Переменная  $\hat{T}_{i^*,j^*}$  будет равна времени стоянки в  $j^*$ -й промежуточной по порядку следования вершине в рамках горизонта планирования.

В случае 3)

$$\sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 1, \quad \sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 0, \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*,k} = 1.$$

Ограничение (1.14) выполняется, так как его левая и правая часть окажется равной нулю. Ограничение (1.13) выполнится по определению, так как для всех  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$  по условию  $t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} \geq 0$ . Величина  $\hat{T}_{i^*,j^*}$  окажется равной разности между временем отправления и временем прибытия в  $j^*$ -ю промежуточную по порядку следования вершину.

В случае 4)

$$\sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 0, \quad \sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 1.$$

Ввиду ограничений (1.5), (1.6)  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*,k}$  может быть равна либо нулю, либо единице. Ограничения (1.13) выполняются в любом из указанных вариантов. Если  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*,k}$  равна нулю, то ограничение (1.14) выполняется. Величина  $\hat{T}_{i^*,j^*}$  будет равна нулю, что соответствует смыслу введенной переменной, так как у груза будет только  $j^* - 1$  промежуточных вершин. Если же  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*,k}$  равна единице, то ограничение (1.14) не выполняется. Значит, такой вариант недопустим. Это соответствует здравому смыслу, так как в случае прибытия в пункт назначения, не имеет смысла перевозить груз дальше.

Теперь обсудим (1.16)–(1.18). Если груз с номером  $i^*$  не отправляется из пункта отправления, то  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,1,k} = 0$ . Как следствие из ограничений (1.5), (1.6),  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j,k} = 0$ ,  $j = \overline{2, J}$ . Значит,  $F_{i^*}$  будет равна ожидаемому времени в пути из вершины отправления в вершину назначения. Если будет использовано ровно  $\bar{j} \in \{1, \dots, J\}$  транспортировок, то суммирование первой и второй компоненты  $F_{i^*}$  даст  $\tau_{v_{k^*}^{\text{кон.}}, v_{i^*}^{\text{приб.}}}$ , где  $k^*$  – номер  $\bar{j}$ -й по порядку использования транспортировки груза с номером  $i^*$ . Иными словами,

получится ожидаемое количество времени, которое требуется грузу для прибытия в вершину с индексом  $v_{i^*}^{\text{приб.}}$  из вершины с индексом  $v_{k^*}^{\text{кон.}}$ . Если груз по окончании горизонта планирования находится в движении, то третья компонента  $F_{i^*}$  окажется ненулевой и будет характеризовать время, которое потребуется грузу до прибытия в вершину с индексом  $v_{k^*}^{\text{кон.}}$  после окончания горизонта планирования.

Если груз не отправлен в рамках горизонта планирования, то вторая и третья компоненты левой части неравенства (1.17) равны нулю. В этом случае требуется, чтобы ожидаемое время прибытия из вершины отправления в вершину назначения было не больше допустимого времени нахождения по графу. Если груз отправлен и доставлен в рамках горизонта планирования, то  $F_{i^*} = 0$ , а суммирование второй и третьей компоненты левой части неравенства даст время между окончанием движения груза и началом движения груза. Если груз отправлен, но не доставлен в рамках горизонта планирования, то вторая компонента неравенства (1.17) равна нулю, а  $F_{i^*}$  будет складываться суммарно с количеством времени, которое груз уже находится на сети после отправления из вершины отправления.

Если на каком-то этапе груз с номером  $i^*$  прибыл в вершину назначения, причем этап был закончен до окончания горизонта планирования, тогда  $\omega_{i^*} = 1$ . В противном случае окажется  $\omega_{i^*} = 0$ .

Необходимость не превысить максимально допустимый вес при транспортировке с номером  $k$  приводит к ограничениям

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k} w_i \leq w_k^{\text{макс}}, k = \overline{1, K}. \quad (1.19)$$

Отметим, что ограничения (1.1)–(1.19) могут оказаться несовместными, а значит, множество допустимых стратегий, задаваемое этими ограничениями, пусто. Такой случай может возникнуть, например, когда транспортировки между вершинами слишком медленные. Приведем условия существования хотя бы одного решения системы ограничений (1.1)–(1.19).

**ЛЕММА 1.1.** *Для существования хотя бы одного решения системы ограничений (1.1)–(1.19) достаточно выполнения условий*

$$t_i^{\text{omnp.}} + d_i \geq t_{\text{макс}}, \quad \tau_{v_i^{\text{omnp.}}, v_i^{\text{npub.}}} \leq t_i + \eta_{v_i^{\text{omnp.}}, v_i^{\text{npub.}}}, i = \overline{1, I}. \quad (1.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1.

Рассмотрим стратегию, когда каждый груз остается в вершине своего отправления в рамках горизонта планирования, т.е.  $\delta_{i,j,k} = 0$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Очевидно, что такая стратегия удовлетворяет (1.1). Равенство (1.2) выполняется, так как левая часть равна нулю. Неравенства (1.3) справедливы в виду того, что их левая часть окажется равной нулю. Равенства (1.4) верны, так как левая и правая части равны нулю. Неравенства (1.5), (1.7), (1.11), (1.12), (1.14), (1.19) верны, потому что слева ноль, а справа положительное число. Неравенства (1.6) верны, так как слева ноль, а справа отрицательное число. Неравенства (1.8), (1.13) верны, так как слева и справа окажется ноль. Равенства (1.15), (1.16), (1.18) зададут значения соответствующие этим равенствам переменных. Неравенства (1.9), (1.17) будут выполнены в виду условия (1.20), а (1.10) – из условия задачи.

Таким образом, оказывается, что стратегия  $\delta_{i,j,k} = 0$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$  при выполнении условий (1.20) является допустимой, что и доказывает лемму.

Лемма доказана.

Следует отметить, что даже если условия (1.20) нарушаются, это не означает, что ограничения (1.1)–(1.19) обязательно несовместны.

### 1.3. Критериальная функция

Сформулируем критерий для поиска оптимального расписания. Для этого составим из всех  $\delta_{i,j,k}$  вектор  $\delta$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Также составим из всех  $F_i$  вектор  $F$ , а из  $\omega_i$  – вектор  $\omega$ ,  $i = \overline{1, I}$ . Объединим все  $\hat{T}_{i,j}$  в вектор  $\hat{T}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ .

Критерий сформулируем в виде свертки различных характеристик: суммарного времени в движении, суммарного количества недоставленных грузов в рамках горизонта планирования и других.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(\delta, F, \omega, \hat{T}) = & c_1 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (\min\{t_k^{\text{кон.}}, t_{\text{макс}}\} - t_k^{\text{нач.}})}_{\substack{\text{суммарное время в движении} \\ \text{в рамках горизонта планирования}}} + c_2 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \hat{T}_{i,j}}_{\substack{\text{суммарное время} \\ \text{стоянки в} \\ \text{промежуточных} \\ \text{вершинах}}} + \\
 & + c_3 \underbrace{\sum_{i=1}^I \left( \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left( 1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \right) t_{\text{макс}} - t_i^{\text{отпр.}} \right)}_{\substack{\text{суммарное время стоянки в вершинах отправления} \\ \text{с момента готовности к отправлению}}} + \\
 & + c_4 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} w_i C_k}_{\substack{\text{суммарная стоимость} \\ \text{транспортировок}}} + c_5 \underbrace{\sum_{i=1}^I F_i}_{\substack{\text{суммарное} \\ \text{ожидаемое} \\ \text{время до} \\ \text{доставки}}} + c_6 \underbrace{\sum_{i=1}^I \omega_i}_{\substack{\text{суммарное} \\ \text{количество} \\ \text{недоставленных} \\ \text{грузов в рамках} \\ \text{горизонта} \\ \text{планирования}}}, \tag{1.21}
 \end{aligned}$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  – некоторые неотрицательные числа. Под  $r$ -й компонентой критерия будем понимать сомножитель числа  $c_r$  в (1.21),  $r = \overline{1,6}$ . Отметим, что ввиду ограничений (1.16), (1.17), (1.18) переменные  $F_i, \hat{T}_{i,j}, \omega_i$  избыточны – их можно заменить на переменные  $\delta_{i,j,k}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Однако использование этих переменных позволяет сделать запись критериальной функции лаконичнее и понятнее.

При различных значениях чисел  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  критериальная функция (1.21) имеет разный смысл. Например, при  $c_1 = \dots = c_5 = 0$ ,  $c_6 = 1$  критериальная функция характеризует количество недоставленных в рамках горизонта планирования грузов, при  $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$ ,  $c_4 = 1$  – стоимость перевозок. Следует отметить, что не все компоненты критериальной функции имеют одинаковую размерность и порядок значений: первая, вторая, третья, пятая компоненты измеряются в минутах, четвертая – в единицах стоимости, шестая – в штуках. Если при оптимизации рассматриваются только однородные компоненты, то размерность коэффициентов  $c_1, \dots, c_6$  неважна. При необходимости учета разнородных компонент имеет смысл рассматривать общие затраты, т.е. величины  $c_1, c_2, c_3, c_5$  будут иметь размерность условные единицы/мин., а  $c_6$  будет иметь размерность условные единицы/шт.

## 1.4. Постановка и решение задачи поиска оптимального расписания движения

Перейдем к постановке и решению задачи поиска оптимального расписания движения.

### 1.4.1. Постановка задачи

Для поиска оптимального расписания необходимо решить задачу

$$\mathcal{C}(\delta, F, \omega, \hat{T}) \rightarrow \min_{\delta, F, \omega \in \{0,1\}^I, \hat{T}} \quad (1.22)$$

при ограничениях (1.1)–(1.19) и дополнительных ограничениях

$$\hat{T}_{i,j} \geq 0, \hat{T}_{i,J+1} = 0, F_i \geq 0, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J+1}, k = \overline{1, K}. \quad (1.23)$$

Заметим, что требование (1.23) неотрицательности переменных  $F_i, \hat{T}_{i,j}$ , вообще говоря, избыточно в виду наличия ограничений (1.1)–(1.10), (1.14). Однако ограничение на их неотрицательность позволяет в некоторых задачах ускорить поиск оптимального решения.

Следует отметить, что представленная система ограничений, задающая движение, и поставленная задача оптимизации прежде всего предназначена для задачи перевозки тех или иных грузов (посылок, контейнеров) различными транспортными средствами (самолетами, поездами и др.). А именно рассмотренная постановка позволяет «привязать» тот или иной груз к тому или иному транспортному средству и назначить время перевозки грузу. При этом представленную постановку задачи можно использовать и для формирования расписания движения самих транспортных средств. Так, например, при помощи предложенной постановки задачи можно формировать расписание движения грузовых поездов: в терминологии настоящей работы грузом станет грузовой поезд, транспортным средством – локомотив, а понятие транспортировка будет синонимично «поднитке». Масса поезда будет полагаться единице, как и максимальный вес при той или иной транспортировке. При этом предложенную постановку можно использовать и для других отраслей транспорта, добавляя при необходимости те или иные ограничения из конкретной предметной области. Отсюда резюмируем, что предложенная система ограничений, задающая движения по графу, и критерий формируют универсальную постановку задачи грузоперевозок.

Заметим, что поиск точного решения в задаче (1.22) при ограничениях (1.1)–(1.19), (1.23) в связи с большим количеством переменных и ограничений может занять крайне продолжительное время. Кроме того, возможен случай, когда количество ограничений и переменных столь велико, что попросту не может быть обработано компьютером в силу ограниченных вычислительных мощностей. В этой связи предложим алгоритм поиска приближенного решения в задаче (1.22) при ограничениях (1.1)–(1.19), (1.23).

#### 1.4.2. Алгоритм поиска приближенного решения

Алгоритм поиска приближенного решения поставленной выше задачи будем формировать на основе ее декомпозиции.

##### 1.4.2.1. Вспомогательная система ограничений

Разделим горизонт планирования на  $P$  непересекающихся промежутков (полуинтервалов)  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ , т.е.  $[0, t_{\max}) \equiv \bigcup_{p=1}^P \mathcal{T}_p$ , где  $\forall p_1, p_2 \in \{1, \dots, P\} : p_1 \neq p_2 \mathcal{T}_{p_1} \cap \mathcal{T}_{p_2} \equiv \emptyset$ . Эти промежутки в дальнейшем будем называть *промежутками разбиения*. Введем вспомогательные величины  $\underline{\mathcal{T}}_p \triangleq \inf \mathcal{T}_p$ ,  $\overline{\mathcal{T}}_p \triangleq \sup \mathcal{T}_p$ ,  $p = \overline{1, P}$ . Будем строить множества  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$  так, что

$$\underline{\mathcal{T}}_1 = 0, \overline{\mathcal{T}}_P = t_{\max}, \underline{\mathcal{T}}_{p+1} = \overline{\mathcal{T}}_p, p = \overline{1, P-1}.$$

Разделим множество номеров грузов  $\mathcal{I}$  на  $S$  непересекающихся подмножеств  $\mathcal{I}_s$ , т.е.  $\mathcal{I} \triangleq \{1, \dots, I\} \equiv \bigcup_{s=1}^S \mathcal{I}_s$ , причем  $\forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\} : s_1 \neq s_2 \mathcal{I}_{s_1} \cap \mathcal{I}_{s_2} \equiv \emptyset$ . Например, можно осуществлять разбиение множества  $\mathcal{I}$  по принципу нахождения в подмножествах номеров грузов с одинаковыми вершинами отправления и назначения. Кроме того, можно составить ровно столько подмножеств, сколько имеется грузов. При этом в подмножестве с индексом 1 будет номер груза с наиболее ранним/поздним временем готовности к отправлению, с индексом 2 – вторым/предпоследним и так далее.

Предположим, что для всех грузов с номерами из множеств  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_{\tilde{s}-1}$  имеется отказ в транспортировке или расписание движения, где  $\tilde{s} \in \{1, \dots, S\}$ . Напомним, что под расписанием движения понимается набор номеров транспортировок, которые используются грузом. Если грузу с номером  $\hat{i} \in \bigcup_{s=1}^{\tilde{s}-1} \mathcal{I}_s$  отказано в транспортировке, то

полагается  $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , а  $\mathcal{D}_i = 0$ . Если груз с номером  $i \in \bigcup_{s=1}^{\bar{s}-1} \mathcal{I}_s$  допущен к транспортировке, то  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  полагается равной единице, если этот груз на этапе с номером  $j$  использует транспортировку с номером  $k$ , и нулю в противоположном случае,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . При этом полагается  $\mathcal{D}_i = 1$ .

В соответствии с введенными промежутками разбиения  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$  разделим множество транспортировок на несколько частей, а именно  $\{1, \dots, K\} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \dots \cup \mathcal{K}_P$ , где  $\mathcal{K}_p \triangleq \{k \in \mathbb{N} : k \leq K, t_k^{\text{нач.}} \in \mathcal{T}_p\}$ ,  $p = \overline{1, P}$ .

Для снижения размерности решаемых в дальнейшем задач оптимизации расписание движения будет вначале строиться для промежутка времени  $[0, \overline{\mathcal{T}}_1)$ . При построении расписания на промежутке времени  $[0, \overline{\mathcal{T}}_2) = [0, \overline{\mathcal{T}}_1) \cup \mathcal{T}_2$  будет учитываться (фиксироваться) расписание на промежутке  $[0, \overline{\mathcal{T}}_1)$ , при построении расписания на промежутке времени  $[0, \overline{\mathcal{T}}_3) = [0, \overline{\mathcal{T}}_2) \cup \mathcal{T}_3$  будет учтено (зафиксировано) расписание на промежутке времени  $[0, \overline{\mathcal{T}}_2)$  и так далее. В этих обозначениях  $\overline{\mathcal{T}}_1, \overline{\mathcal{T}}_2, \overline{\mathcal{T}}_3$  – некоторые числа.

В этой связи рассмотрим только транспортировки от начала горизонта планирования до конца промежутка  $\mathcal{T}_{\tilde{p}}$ , где  $\tilde{p}$  – произвольное число из множества  $\{1, 2, \dots, P\}$ . Сформулируем множество ограничений, задающих движение по мультиграфу для грузов с номерами из множества  $\mathcal{I}_{\bar{s}}$  в это время, т.е. в субгоризонт планирования  $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$ . Предположим вначале, что расписания движения для грузов с номерами из множества  $\mathcal{I}_{\bar{s}}$  на субгоризонт  $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}-1})$  ( $\tilde{p} > 1$ ) в наличии не имеется.

Под  $\mathcal{K}^{\bar{s}, \tilde{p}}$  будем понимать некоторое непустое подмножество транспортировок  $\bigcup_{p=1}^{\tilde{p}} \mathcal{K}_p$ , выбираемое для грузов из множества  $\mathcal{I}_{\bar{s}}$ .

Для этого введем вспомогательные переменные  $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$ , характеризующие использование грузом с номером  $i$  транспортировки с номером  $k$  на  $j$ -м этапе при формировании расписания для субгоризонта планирования  $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \tilde{p}}$ . Переменная  $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$  равна единице, если транспортировка с номером  $k$  используется  $i$ -м грузом на  $j$ -м этапе, и 0 – в противоположном случае.

По определению  $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$  переменных

$$\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} \in \{0, 1\}, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, j = \overline{1, J+1}, k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \tilde{p}}. \quad (1.24)$$

Движение исключительно по смежным вершинам мультиграфа  $G$  задается со-

гласно ограничениям

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{кон.}} \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}}\right) M^3, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, j = \overline{1, J-1}, \quad (1.25)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{кон.}} \geq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач.}} - \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}}\right) M, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, j = \overline{1, J-1}. \quad (1.26)$$

Напомним, что  $M$  – количество вершин в мультиграфе  $G$ .

Поскольку этапов для движения может быть не более  $J$ , введем ограничение

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,J+1,k}^{\bar{p}} = 0. \quad (1.27)$$

Так как груз неделим, то на любом этапе (в том числе первом) можно использовать максимум одну транспортировку

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} \leq 1, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}. \quad (1.28)$$

Если перевозка груза начинается, то она должна быть осуществлена из соответствующей вершины отправления

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач.}} = v_i^{\text{отпр.}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}}, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}. \quad (1.29)$$

Если готовность груза к отправлению происходит после верхней границы промежутка времени  $\mathcal{T}_{\bar{p}}$ , то вплоть до окончания  $\mathcal{T}_{\bar{p}}$  никакие транспортировки грузу использовать не разрешено, т.е.

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} = 0, \forall i \in \mathcal{I}_{\bar{s}} : t_i^{\text{отпр.}} \geq \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}. \quad (1.30)$$

Груз должен быть отправлен не раньше момента готовности к отправлению с учетом максимального времени в вершине отправления. При этом можно не отправить груз в период  $[0, \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}})$ , если это допустимо с учетом максимального времени в вершине отправления. В этой связи имеем ограничения

$$t_i^{\text{отпр.}} \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}}\right) \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}, \forall i \in \mathcal{I}_{\bar{s}} : t_i^{\text{отпр.}} < \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}. \quad (1.31)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}}\right) \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}} \leq t_i^{\text{отпр.}} + d_i, \forall i \in \mathcal{I}_{\bar{s}} : t_i^{\text{отпр.}} < \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}. \quad (1.32)$$

Из одной и той же вершины можно выйти лишь единожды

$$\sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{нач.}} = m} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \leq 1, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, m = \overline{1, M}, \quad (1.33)$$

В одну и ту же вершину можно попасть лишь единожды

$$\sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон.}} = m} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \leq 1, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, m = \overline{1, M}, \quad (1.34)$$

Отправление в промежуточных вершинах маршрута не должно происходить раньше прибытия в эти вершины. Поэтому с учетом ограничений на минимальное и максимальное время стоянки, имеем

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}) \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач.}} + \left( 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right) \bar{t}, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, j = \overline{1, J-1}, \quad (1.35)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}) \geq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач.}}, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, j = \overline{1, J-1}. \quad (1.36)$$

Напомним, что в (1.35)

$$\bar{t} = \max_{i \in \{1, \dots, I\}, k \in \{1, \dots, K\}} t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}.$$

Чтобы гарантировать допустимость стоянки груза по окончании субгоризонта  $[0, \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}})$  (если таковая имеет место) введем ограничение

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} - \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}) + \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \geq 0, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, j = \overline{1, J}, \quad (1.37)$$

Для запрета движения груза после прибытия в пункт назначения введем ограничения

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \leq 2 \left( 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right), i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, j = \overline{1, J}, \quad (1.38)$$

Введем величину  $\hat{T}_{i,j}^{\bar{p}}$  – количество времени, проводимого грузом с номером  $i$  в  $j$ -й (по порядку следования) промежуточной вершине своего маршрута в рамках суб-

горизонта планирования

$$\begin{aligned} \hat{T}_{i,j}^{\bar{p}} = & \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{нач.}} - \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}) + \\ & + \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}, t_k^{\text{кон.}} < \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (\bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}} - t_k^{\text{кон.}}), i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, j = \overline{1, J}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Для удобства положим  $\hat{T}_{i,J+1}^{\bar{p}} = 0$ .

Введем новые переменные  $F_i^{\bar{p}}$ , характеризующие ожидаемое количество времени, требуемого до прибытия в пункт назначения грузу с номером  $i$ , после окончания субгоризонта  $[0, \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}})$

$$\begin{aligned} F_i^{\bar{p}} = & \tau_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k} (\tau_{v_k^{\text{кон.}}, v_i^{\text{приб.}}} - \tau_{v_k^{\text{нач.}}, v_i^{\text{приб.}}}) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: t_k^{\text{кон.}} \geq \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} - \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}), i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Для того, чтобы не превысить допустимое время в пути, введем ограничения

$$\begin{aligned} F_i^{\bar{p}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: t_k^{\text{кон.}} < \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон.}} - \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}) + \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} (\bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}} - t_k^{\text{нач.}}) \leq \\ \leq t_i + \left( 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} \right) \eta_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}}, \forall i \in \mathcal{I}_{\bar{s}} : t_i^{\text{отпр.}} < \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Зададим переменные  $\omega_i^{\bar{p}}$ , характеризующие, прибыл ли груз с номером  $i$  в пункт назначения на основе используемых транспортировок в субгоризонт планирования  $[0, \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}})$ : 0 – прибыл, 1 – не прибыл

$$\omega_i^{\bar{p}} = 1 - \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: t_k^{\text{кон.}} < \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}}, i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}. \quad (1.42)$$

Необходимость не превысить максимально допустимый вес при транспортировке с номером  $k$  приводит к ограничениям

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}} \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} w_i \leq w_k^{\text{макс}} - \sum_{\substack{\bar{s}=1 \\ i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}}}^{\bar{s}-1} \sum_{j=1}^{J+1} \hat{\delta}_{i,j,k} w_i, k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}. \quad (1.43)$$

Ограничения (1.24)–(1.29), (1.31)–(1.43) идентичны ограничениям (1.1)–(1.19).

### 1.4.2.2. Вспомогательный критерий оптимальности

Составим из всех  $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$  вектор  $\delta^{\tilde{s},\tilde{p}}$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}$ . Также составим из всех  $F_i^{\tilde{p}}$  вектор  $F^{\tilde{s},\tilde{p}}$ , а из  $\omega_i^{\tilde{p}}$  – вектор  $\omega^{\tilde{s},\tilde{p}}$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ . Объединим все  $\hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}}$  в вектор  $\hat{T}^{\tilde{s},\tilde{p}}$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ .

Выберем критериальную функцию следующего вида

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{\tilde{s}}^{\tilde{p}}(\delta^{\tilde{s},\tilde{p}}, F^{\tilde{s},\tilde{p}}, \omega^{\tilde{s},\tilde{p}}, \hat{T}^{\tilde{s},\tilde{p}}) = & c_1 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} (\min\{t_k^{\text{кон.}}, \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}\} - t_k^{\text{нач.}})}_{\substack{\text{суммарное время в движении} \\ \text{в рамках субгоризонта планирования } [0, \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}]}} + \\
 + c_2 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \sum_{j=1}^{J+1} \hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}}}_{\substack{\text{суммарное время} \\ \text{стоянки в} \\ \text{промежуточных} \\ \text{вершинах}}} + c_3 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \left( \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}} \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} t_k^{\text{нач.}} + \left( 1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} \right) \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}} - t_i^{\text{отпр.}} \right)}_{\substack{\text{суммарное время стоянки в вершинах отправления} \\ \text{с момента готовности к отправлению} \\ \text{до конца субгоризонта планирования } [0, \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}]}} + \\
 + c_4 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} w_i C_k}_{\substack{\text{суммарная стоимость} \\ \text{транспортировок}}} + c_5 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} F_i^{\tilde{p}}}_{\substack{\text{суммарное} \\ \text{ожидаемое} \\ \text{время до} \\ \text{доставки}}} + c_6 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \omega_i^{\tilde{p}}}_{\substack{\text{суммарное} \\ \text{количество} \\ \text{недоставленных} \\ \text{грузов в рамках} \\ \text{субгоризонта} \\ \text{планирования}}}, \tag{1.44}
 \end{aligned}$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_6$  – неотрицательные константы, выбираемые лицом, принимающим решение.

**ЛЕММА 1.2.** При  $\tilde{s} \equiv S = 1$ ,  $\tilde{p} = P$ ,  $\mathcal{K}^{\tilde{s},P} = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{K}_p$  критериальная функция (1.44) и система ограничений (1.24)–(1.43) будут повторять критериальную функцию (1.21) и систему ограничений (1.1)–(1.19) с точностью до замены переменных  $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$ ,  $\hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}}$ ,  $F_i^{\tilde{p}}$ ,  $\omega_i^{\tilde{p}}$  на  $\delta_{i,j,k}$ ,  $\hat{T}_{i,j}$ ,  $F_i$ ,  $\omega_i$  соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2.** При  $S = 1$  расщепления множества грузов не происходит, т.е. в ограничениях (1.24)–(1.43)  $i$  меняется от 1 до  $I$ . Кроме того,  $\bar{\mathcal{T}}_P = t_{\text{макс}}$ . Поэтому ограничение (1.30), а также условие  $t_i^{\text{отпр.}} < \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}$  в ограничениях (1.31), (1.32), (1.41) исчезают, так как по постановке задачи  $t_i^{\text{отпр.}} \in [0, t_{\text{макс}})$ . Так как по условию леммы  $\mathcal{K}^{\tilde{s},P} = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{K}_p$ , а  $\bigcup_{p=1}^P \mathcal{K}_p = \{1, \dots, K\}$ , то ограничения (1.24)–(1.43) повторяют ограничения (1.1)–(1.19) с точностью до замены переменных  $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$ ,  $\hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}}$ ,  $F_i^{\tilde{p}}$ ,  $\omega_i^{\tilde{p}}$  на пере-

менные  $\delta_{i,j,k}$ ,  $\hat{T}_{i,j}$ ,  $F_i$ ,  $\omega_i$  Аналогично и критериальные функции (1.21), (1.44) идентичны друг другу с точностью до замены переменных  $\hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}}$ ,  $F_i^{\tilde{p}}$ ,  $\omega_i^{\tilde{p}}$  на переменные  $\delta_{i,j,k}$ ,  $\hat{T}_{i,j}$ ,  $F_i$ ,  $\omega_i$ .

Лемма доказана.

### 1.4.2.3. Алгоритм для поиска расписания

Теперь перейдем к формированию алгоритма поиска хотя и не оптимального, но более быстрого (в терминах времени счета) решения, чем непосредственное решение задачи (1.21) при ограничениях (1.1)–(1.19).

При формировании алгоритма учтем возможность более быстрого его функционирования путем удаления транспортировок, которые вряд ли будут использованы. Так, не имеет смысла учитывать при составлении расписания на данный субгоризонт планирования транспортировки из вершин, до которых ни один из грузов в этот субгоризонт не успеет добраться. Вообще говоря, для того чтобы определить, сумеет ли тот или иной груз за заданное время добраться до конкретной вершины, необходимо решить соответствующую задачу оптимизации. Однако решение такого рода задач требует времени. Поэтому для установления того факта, что грузы не доберутся до некоторой вершины, будем использовать величины  $\tau_{m_1, m_2}$ ,  $m_1 = \overline{1, M}$ ,  $m_2 = \overline{1, M}$ . Безусловно, не всегда вывод о возможности прибыть в некоторую вершину на основе величин  $\tau_{m_1, m_2}$  является верным,  $m_1 = \overline{1, M}$ ,  $m_2 = \overline{1, M}$ . Это связано с тем, что эти величины строятся на основе прошлой истории перевозок, а не на транспортировках, доступных сейчас. Тем не менее это существенно позволяет сократить время счета, хотя и с ухудшением значения критериальной функции/невозможностью принять к перевозке некоторые грузы. Величины  $\tau_{m_1, m_2}$  будем сравнивать с отношением длины соответствующего промежутка разбиения к параметру ускорения,  $m_1 = \overline{1, M}$ ,  $m_2 = \overline{1, M}$ . Параметр ускорения, который является безразмерным, будем обозначать  $A$ . Чем меньше  $A$ , тем меньше транспортировок будет вычеркнуто, но тем, скорее всего, больше грузов будет принято к перевозке. И, напротив, чем больше  $A$  тем быстрее получится решение, но тем менее качественное (в терминах количества принятых к отправке грузов) оно будет. При  $A = 0$  никаких удалений делать не будем. При решении задач оптимизации наиболее рациональным представляется полагать  $A$  равным единице. В таком случае ожидаемое

время до прибытия в некоторую вершину будет сравниваться с длительностью соответствующего промежутка разбиения, т.е. промежутка времени, в который расписание еще не зафиксировано и ищется.

1. Задаются числа  $c_1, c_2, \dots, c_6 \in \mathbb{R}_+$ . Фиксируются числа  $P, J \in \mathbb{N}$ . Задается число  $A \in \mathbb{R}_+$ .

2. Множество номеров грузов расщепляется на  $S \in \mathbb{N}$  непересекающихся подмножеств  $\mathcal{I}_s$ , т.е.  $\{1, \dots, I\} \equiv \bigcup_{s=1}^S \mathcal{I}_s$ , причем  $\forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\} : s_1 \neq s_2 \mathcal{I}_{s_1} \cap \mathcal{I}_{s_2} \equiv \emptyset$ .

3. Формируется множество промежутков  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$  так, что  $[0, t_{\max}) \equiv \bigcup_{p=1}^P \mathcal{T}_p$ , где  $\forall p_1, p_2 \in \{1, \dots, P\} : p_1 \neq p_2 \mathcal{T}_{p_1} \cap \mathcal{T}_{p_2} \equiv \emptyset$ , причем  $\underline{\mathcal{T}}_1 = 0, \overline{\mathcal{T}}_P = t_{\max}, \underline{\mathcal{T}}_{p+1} = \overline{\mathcal{T}}_p, p = \overline{1, P-1}$ .

4. Формируются множества  $\mathcal{K}_p = \{k \in \mathbb{N} : k \leq K, t_k^{\text{нач.}} \in \mathcal{T}_p\}, p = \overline{1, P}$ .

5. Инициализируется параметр  $\tilde{s} = 1$ .

6. Инициализируется параметр  $\tilde{p} = 1$ .

7. Если  $\tilde{p}$  равно единице, то формируется множество  $\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} v_i^{\text{отпр.}}$ . Если  $\tilde{p}$  больше единицы, то

$$\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \begin{cases} v_i^{\text{отпр.}}, & \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1} = 0, \\ \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j_i,k}^{\tilde{p}-1} v_k^{\text{кон.}}, & \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1} > 0, \end{cases}$$

где  $j_i = \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1}$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ . Множество  $\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$  состоит из индексов вершин отправления для тех грузов, что еще не в пути, и индексов последних (на текущий момент) вершин движения для грузов, начавших свое движение из соответствующих вершин отправления.

8. Если  $A = 0$ , то  $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \mathcal{K}_{\tilde{p}}$ . Если  $A > 0$ , то формируется множество

$$\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \left\{ k \in \mathcal{K}_{\tilde{p}} : \min_{m \in \mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \tau_{m, v_k^{\text{нач.}}} \leq (\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}} - \underline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}) / A, \min_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} t_i^{\text{отпр.}} \leq t_k^{\text{нач.}} \right\}.$$

9. Если  $\tilde{p} > 1$  формируется множество  $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{p=1}^{\tilde{p}-1} \mathcal{K}^{\tilde{s}, p} \cup \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ . Если  $\tilde{p} = 1$ , то  $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ .

10. Если множество  $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$  пусто и  $\tilde{p} < P$ , то величина  $\tilde{p}$  увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 7.

Если множество  $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$  пусто и  $\tilde{p} = P$ , то  $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$ ,  $\mathcal{D}_i = 0$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Если  $\tilde{s} = S$ , то алгоритм завершен. Если  $\tilde{s} < S$ , то величина  $\tilde{s}$  увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Если множество  $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$  непусто, то происходит переход к шагу 11.

11. Решается задача

$$C_{\tilde{s}}^{\tilde{p}}(\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}, F^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \omega^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}}) \rightarrow \min_{\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}, F^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \omega^{\tilde{s}, \tilde{p}} \in \{0,1\}^{|\mathcal{I}_{\tilde{s}}|, \hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}}}}$$

при ограничениях (1.24)–(1.43),

$$\hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}} \geq 0, \hat{T}_{i,J+1}^{\tilde{p}} = 0, F_i^{\tilde{p}} \geq 0, i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, j = \overline{1, J+1}, k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}.$$

а также при  $\tilde{p} > 1$  ограничениях

$$\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} = \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1}, i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, j = \overline{1, J+1}, k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}. \quad (1.45)$$

Если решение этой задачи не существует, то  $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$ ,  $\mathcal{D}_i = 0$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Если  $\tilde{s} = S$ , то алгоритм завершен. Если  $\tilde{s} < S$ , то величина  $\tilde{s}$  увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Если решение задачи найдено и  $\tilde{p} < P$ , то задаются величины  $\bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}}$  равные единице, если на промежуток времени  $[0, \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$  для груза с номером  $i$  на этапе с номером  $j$  зарезервирована транспортировка с номером  $k$ , и равные нулю в противном случае,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ . Величина  $\tilde{p}$  увеличивается на единицу. Происходит переход к шагу 7.

Если решение задачи найдено и  $\tilde{p} = P$ , то  $\mathcal{D}_i = 1$ , задаются величины  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  равные единице, если для груза с номером  $i$  на этапе с номером  $j$  используется транспортировка с номером  $k$ , и равные 0 в противном случае,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Если  $\tilde{s} = S$ , то алгоритм завершен. Если  $\tilde{s} < S$ , то величина  $\tilde{s}$  увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Отметим, что ограничение (1.45) позволяет зафиксировать расписание на промежуток  $[0, \bar{\mathcal{T}}_1)$  при поиске расписания на промежуток  $[0, \bar{\mathcal{T}}_2)$ , расписание на промежуток  $[0, \bar{\mathcal{T}}_2)$  при поиске расписания на промежуток  $[0, \bar{\mathcal{T}}_3)$  и так далее.

Связь между решением задачи (1.22) при ограничениях (1.1)–(1.19), (1.23) и решением, порождаемым представленным выше алгоритмом устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. Если  $\sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i \equiv I$ , то существует хотя бы одно решение системы ограничений (1.1)–(1.19), (1.23), причем одно из решений этой системы можно получить, положив  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Если  $0 < \sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i < I$ , то существует хотя бы одно решение системы ограничений (1.1)–(1.19), (1.23) для модифицированного набора грузов  $\{i \in \mathbb{N} : i \leq I, \mathcal{D}_i \equiv 1\}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1.

Если  $\sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i \equiv I$ , то по построению  $\forall \tilde{s} \in \{1, \dots, S\} \forall i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}} \forall j \in \{1, \dots, J+1\}$   $\hat{\delta}_{i,j,k}$  равна оптимальной  $\delta_{i,j,k}^P$  (для  $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, P}$ ) и  $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$  (для  $k \in \{1, \dots, K\} \setminus \mathcal{K}^{\tilde{s}, P}$ ). Так как  $\delta_{i,j,k}^P$  может быть либо нулем, либо единице в виду (1.24), то (1.1) выполняется при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ .

При этом  $\forall \tilde{s} \in \{1, \dots, S\}$  и  $\tilde{p} = P$  выполняются ограничения (1.24)–(1.43) для  $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ .

Рассмотрим ограничения (1.24)–(1.43) при  $\tilde{p} = P$ . Как и при доказательстве леммы (1.2) отметим, что  $\overline{\mathcal{T}}_P = t_{\max}$ . Поэтому ограничение (1.30), а также условие  $t_i^{\text{отпр.}} < \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}$  в ограничениях (1.31), (1.32), (1.41) исчезают, так как по постановке задачи  $t_i^{\text{отпр.}} \in [0, t_{\max})$ . Теперь добавим в левую и правую сторону каждого из ограничений (1.25)–(1.29), (1.31)–(1.42) при наличии в них суммирования по  $k$  аналогичную сумму с точностью до замены в этой сумме множества  $\mathcal{K}^{\tilde{s}, P}$  на множество  $\{1, \dots, K\} \setminus \mathcal{K}^{\tilde{s}, P}$ , при этом подставляя  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  вместо  $\delta_{i,j,k}^P$ . Такое добавление не изменит ограничения, так как по построению эти добавки будут нулевыми. Так как ограничения (1.25)–(1.26), (1.28)–(1.29) (1.31)–(1.42) выполняются для каждого  $s \in \{1, \dots, S\}$ , то с учетом введенных выше добавок в совокупности они составляют ограничения (1.3)–(1.18) при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ . Ограничение (1.2) имеет место при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ , так как (1.27) выполняется для каждого  $s \in \{1, \dots, S\}$ , а значит, и при суммировании по  $s \in \{1, \dots, S\}$  также получится ноль.

Отметим, что если транспортировка имеет номер не из множества  $\bigcup_{\tilde{s}=1}^S \mathcal{K}^{\tilde{s}, P}$ , то согласно алгоритму использована она быть не может, значит левая часть (1.19) будет равна нулю при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ . Так как ограничение (1.43) выполняется для всех  $s \in \{1, \dots, S\}$ , в том числе при  $s = S$ , то путем переноса суммы в правой части (1.43) в левую часть получается ограничение (1.19) при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ .

Так как при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$  выполняются ограничения (1.1)–(1.10), (1.14), то выпол-

нятся и ограничения (1.23). Следовательно, алгоритм порождает решение, удовлетворяющее системе ограничений (1.1)–(1.19), (1.23).

Если  $0 < \sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i < I$ , то рассуждения выше справедливы для измененного набора начальных данных. А именно при изменении в ограничениях (1.1)–(1.19), (1.23) с  $i = \overline{1, I}$  на  $\{i : \mathcal{D}_i \equiv 1\}$ .

Теорема доказана.

Алгоритмом *по направлению* (или иначе *алгоритмом 1*) будем называть такую версию вышеописанного алгоритма, при котором дробление множества грузов происходит по направлению движения, т.е. множества  $\mathcal{I}_s$  формируются по принципу нахождения в них номеров грузов, у которых были одинаковые вершины отправления, а также одинаковые вершины назначения.  $s = \overline{1, S}$ . Чем меньше элементов во множестве, тем меньше номер этого множества.

Алгоритмом *по наименьшему/наибольшему времени* (или иначе *алгоритмом 2.1/алгоритм 2.2*) будем называть такой алгоритм, при котором на 2-м шаге дробление происходит по возрастанию/убыванию времени готовности грузов к отправлению. А именно множество  $\mathcal{I}_1$  будет состоять из номера груза с самым ранним/поздним временем готовности к отправлению,  $\mathcal{I}_2$  — со вторым/предпоследним и так далее.

### 1.4.3. Примеры

Продemonстрируем применимость разработанной системы ограничений и алгоритма на ряде примеров. Все численные эксперименты в них проводились при помощи математического пакета ILOG CPLEX 12.5.1 на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 16 GB DDR3 RAM).

Вначале рассмотрим пример, который является модельным.

#### 1.4.3.1. Пример №1

Пусть транспортная сеть имеет вид, изображенный на рисунке 1.1. Нумерацию путей на рисунке 1.1 опустим. Если две смежные вершины соединены двумя ребрами, т.е. двумя путями, то ребро, представляемое прямой линией имеет номер 1, в ином случае – 2.

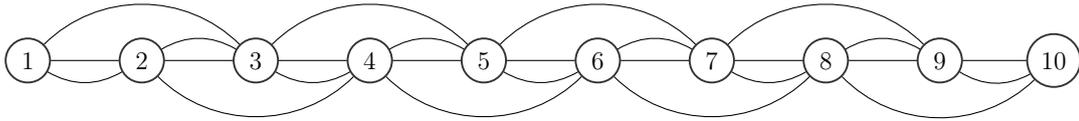


Рисунок 1.1. Мультиграф  $G$  транспортной сети.

Положим  $t_{\max} = 1440$  минут. Выбран некоторый момент отсчета. Начиная с момента отсчета:

- каждые 60 минут в вершине с индексом 1 появляется по 10 грузов одинаковой массы в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 10;
- каждые 60 минут из вершины с индексом  $m$  в вершину с индексом  $m + 1$  по пути номер 2 отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц массы, стоимость транспортировки составляет 3 условные единицы за единицу массы, время транспортировки – 120 минут,  $m = \overline{1, 9}$ .
- каждые 60 минут из вершины с индексом  $m$  в вершину с индексом  $m + 1$  по пути номер 1 отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц массы, стоимость транспортировки составляет 9 условных единиц за единицу массы, время транспортировки – 60 минут,  $m = \overline{1, 9}$ .
- каждые 60 минут из вершины с индексом  $m$  в вершину с индексом  $m + 2$  отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц массы, стоимость транспортировки составляет 81 условных единиц за единицу массы, время транспортировки – 60 минут,  $m = \overline{1, 8}$ .

Именно такой выбор стоимостей транспортировок был вызван тем, что более быстрая транспортировка по одному и тому же направлению должна стоить дороже. Максимальное время каждого груза в пути с момента начала движения – 1 сутки.

Положим  $\tau_{m_1, m_2} = 60|m_2 - m_1|$ ,  $m_1 = \overline{1, 10}$ ,  $m_2 = \overline{1, 10}$ . Такой выбор вызван тем, что время в пути между смежными вершинами мультиграфа  $G$  может составлять 60 минут. Предположим, что  $\eta_{m_1, m_2} = 0$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1, 10}$ .

Учитывая вышесказанное, получается  $I = 240$ ,  $K = 624$ . Положим  $d_i = 180$ ,  $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} = 0$  и  $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} = 120$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Поскольку максимальное количество

транспортировок, которые нужны при перемещении из вершины с индексом 1 в вершину с индексом 10, равно девяти, то положим  $J = 9$ . Условия (1.20) не выполняются.

Выберем  $A = 0$ ,  $P = 1$ . Такой выбор  $A$  и  $P$  позволяет на содержательном примере проверить возможности разработанного алгоритма в терминах времени вычислений даже без учета дополнительного снижения размерностей за счет декомпозиции временного промежутка и вычеркивания потенциально бесполезных транспортировок.

Проиллюстрируем работу алгоритмов 1, 2.1 и 2.2 при различных значениях чисел  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ . Предварительно отметим, что алгоритм 1 продуцирует точное решение, так как в исследуемой задаче у всех грузов совпадают вершины отправления, а также вершины назначения. Кроме того, всеми алгоритмами во всех рассмотренных далее случаях были приняты к доставке все  $I = 240$  грузов.

Таблица 1.1. Результаты численного эксперимента

Решение	Параметры алгоритма						Компоненты критерия						Время поиска решения, мин
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	1	2	3	4	5	6	
Точное							59940	2640	3420	64848	23460	50	7,1
Алгоритм 2.1	1	1	1	0	0	0	60000	3900	11100	58485	30300	60	8,17
Алгоритм 2.2							60900	1800	6900	59490	28200	55	8,03
Точное							66000	0	0	73260	10800	50	24,35
Алгоритм 2.1	1	1	1	0	1	0	69000	6600	3900	65490	15600	70	7,5
Алгоритм 2.2							70800	600	0	68145	11100	55	7,67
Точное							82680	63000	33480	<b>3615</b>	83220	235	177,5
Алгоритм 2.1	0	0	0	1	0	0	72000	68700	39300	<b>3915</b>	86400	240	7,18
Алгоритм 2.2							116400	34500	10200	<b>5880</b>	60600	190	8,32
Точное							86340	13380	3300	60282	<b>10800</b>	55	98,5
Алгоритм 2.1	0	0	0	0	1	0	93900	43200	9300	44640	<b>23100</b>	130	6,97
Алгоритм 2.2							79500	18900	0	62145	<b>11100</b>	60	7,17
Точное							73140	12600	6780	54264	25140	<b>50</b>	28,3
Алгоритм 2.1	0	0	0	0	0	1	68400	45000	31800	31200	33705	<b>125</b>	6,88
Алгоритм 2.2							71400	18600	6900	53325	27000	<b>55</b>	6,85

Жирным шрифтом в таблице 1.1 выделены значения критериальной функции (1.21) на том или ином решении.

Как следует из таблицы 1.1, в одном случае поиск точного решения занимает примерно столько же времени, сколько и поиск приближенного ( $c_1 = c_2 = c_3 = 1, c_4 =$

$= c_5 = c_6 = 0$ ). Однако в остальных случаях приближенное решение находится в разы быстрее. При этом для любого из рассмотренных вариантов чисел  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  поиск приближенного решения стабильно занимает 6-8 минут. Как правило, алгоритм 2.2 точнее алгоритма 2.1. Погрешность наилучшего из приближенных решений составляет порядка 5-10% относительно точного. При задаче минимизации стоимости перевозок велико время перевозок, так как дешевые перевозки длительны по времени. И, напротив, в задаче максимизации числа доставленных грузов растет стоимость перевозок. Задача по минимизации ожидаемого оставшегося времени до прибытия в пункты назначения ожидаемо приводит к тому, что большинство грузов (для решений по алгоритмам 1 и 2.2) прибывает в вершины назначения в рамках горизонта планирования. Все грузы были приняты к перевозке.

Отдельно следует отметить, что время работы алгоритмов существенно зависит не только от размера матрицы ограничений, но и от ее содержимого. Так, например, иногда некоторый набор ограничений может быть вычеркнут из матрицы ограничений в силу их избыточности. В таком случае размерность задачи снизится. Однако ввиду большого количества входных данных априорно высказать предположение о количестве таких исключений и (не)большом времени счета алгоритмов представляется затруднительным.

#### 1.4.3.2. Пример №2

Рассмотрим прикладной пример. Для этого выберем железнодорожную сеть, мультиграфовая модель  $G$  которой изображена на рисунке 1.2. Некоторые части отдельных ребер выделены пунктиром с целью показать разноуровневое пересечение двух железнодорожных путей. Нумерация путей на рисунке опущена: если две соседние вершины соединяют два ребра, то есть два пути, то ребро, представленной прямой линией, имеет номер 1, другое же – номер 2. Путь, соединяющий вершины с индексами 21 и 29, а также путь, соединяющий вершины с индексами 10 и 30, имеет номер 1.

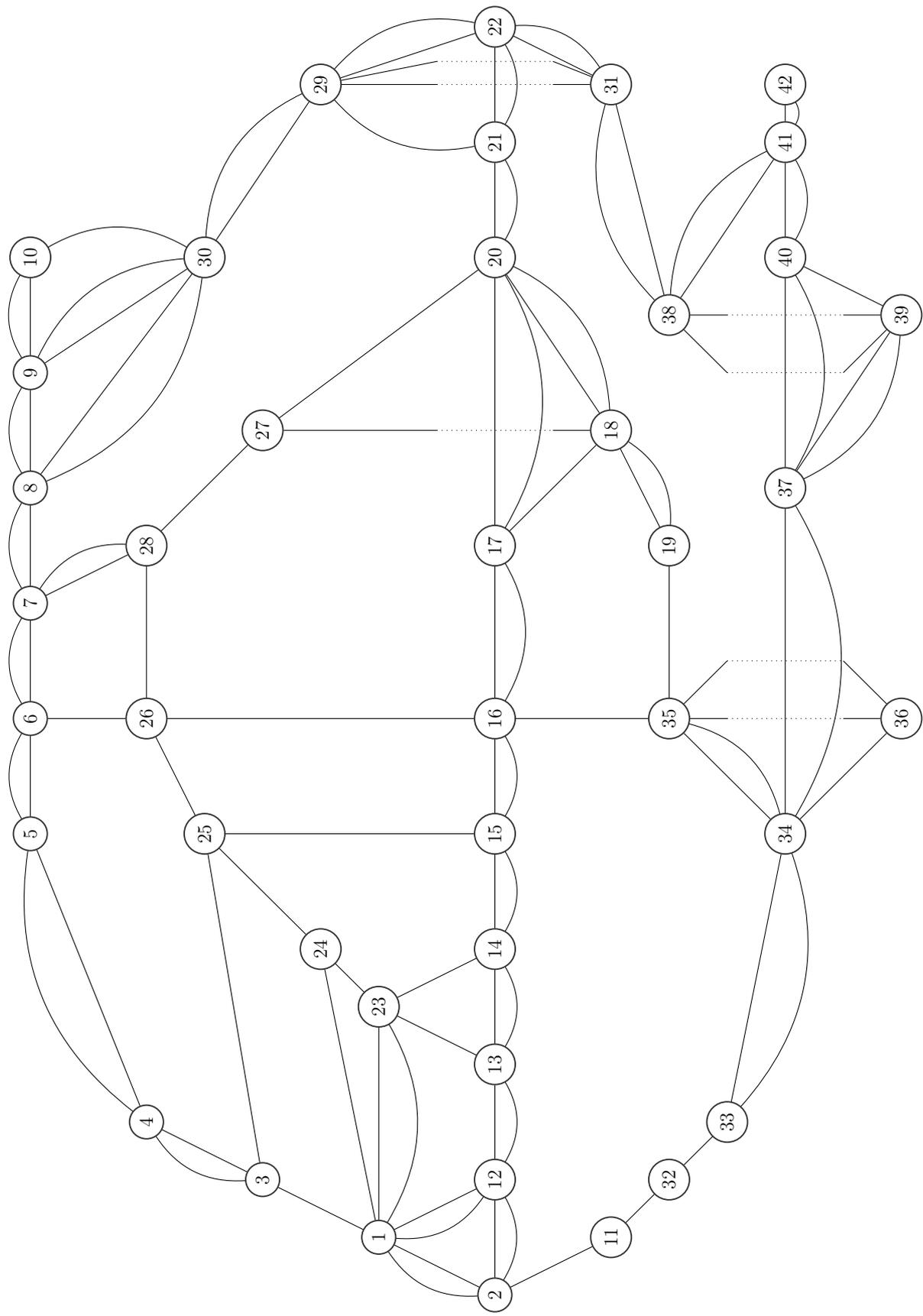


Рисунок 1.2. Мультиграф железнодорожной сети  $G$ .

Пусть требуется пропустить  $I = 62$  поездов. Детальную информацию о времени готовности к отправлению, вершинах отправления поездов приведем в таблице П.1 Приложения. Укажем вершины отправления и назначения этих поездов.

Таблица 1.2. Направление движения поездов.

Направление движения (отпр. → назнач.)	Кол-во поездов	Направление движения (отпр. → назнач.)	Кол-во поездов
2 → 10	13	10 → 2	13
2 → 22	8	22 → 2	8
34 → 42	7	42 → 32	7
34 → 33	2	2 → 33	1
10 → 42	1	42 → 10	1
5 → 34	1		

Пусть для осуществления плана перевозок имеется  $K = 1249$  транспортировок (в железнодорожной отрасли такие транспортировки называются «поднитками»). Детальную информацию о времени и месте возможного движения приведем в таблице П.2 из Приложения.

Таблица 1.3. Множество «подниток».

Направление движения (отпр. → назнач.)	Кол-во «подниток»	Направление движения (отпр. → назнач.)	Кол-во «подниток»	Направление движения (отпр. → назнач.)	Кол-во «подниток»
1 → 2	22	1 → 3	21	1 → 12	3
1 → 23	5	1 → 24	3	2 → 1	21
2 → 11	5	2 → 12	22	3 → 1	22
3 → 4	21	3 → 25	3	4 → 3	22
4 → 5	21	5 → 4	22	5 → 6	21
6 → 5	22	6 → 7	21	6 → 26	3
7 → 6	22	7 → 8	21	7 → 28	4
8 → 7	22	8 → 9	21	9 → 8	22
9 → 10	21	9 → 30	5	10 → 9	22
10 → 30	4	11 → 2	5	11 → 32	5
12 → 1	3	12 → 2	23	12 → 13	22
13 → 12	23	13 → 14	22	13 → 23	3
14 → 13	23	14 → 15	22	14 → 23	3
15 → 14	23	15 → 16	22	15 → 25	3
16 → 15	23	16 → 17	22	16 → 26	4
16 → 35	3	17 → 16	23	17 → 18	3
17 → 20	22	18 → 17	3	18 → 19	7
18 → 20	6	18 → 27	4	18 → 35	4
19 → 18	7	20 → 17	23	20 → 18	6
20 → 21	22	20 → 27	4	21 → 20	23
21 → 22	22	21 → 29	3	22 → 21	23
22 → 29	5	22 → 31	8	23 → 1	5
23 → 13	3	23 → 14	3	23 → 24	4
24 → 1	3	24 → 23	4	24 → 25	3

Таблица 1.3. Множество «подниток» (*продолжение*).

25 → 3	3	25 → 15	3	25 → 24	3
25 → 26	4	26 → 6	3	26 → 16	4
26 → 25	4	26 → 28	3	27 → 18	4
27 → 20	4	27 → 28	3	28 → 7	4
28 → 26	3	28 → 27	3	29 → 21	3
29 → 22	5	29 → 30	5	29 → 31	7
30 → 9	6	30 → 10	4	30 → 29	5
31 → 22	8	31 → 29	7	31 → 38	8
32 → 11	5	32 → 33	5	33 → 32	5
33 → 34	15	34 → 33	15	34 → 35	5
34 → 37	15	35 → 16	3	35 → 18	4
35 → 34	5	37 → 34	15	37 → 40	15
38 → 31	8	38 → 41	6	40 → 37	15
40 → 41	15	41 → 38	6	41 → 40	15
41 → 42	15	42 → 41	15		

Предположим, что  $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} = 0$  и  $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} = 120$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Положим также  $t_{\text{макс}} = 1440$ .

Значения величин  $\tau_{m_1, m_2}$  зададим как минимальное время в пути до вершины с индексом  $m_2$  при отправлении из вершины  $m_1$  через 360 минут от начала отсчета (по сути в 6 утра),  $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$ . Если допустимых транспортировок не оказывается, то  $\tau_{m_1, m_2}$  полагаем равной 4000,  $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$ . Для простоты будем предполагать, что  $\eta_{m_1, m_2} = 0$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$ . Зафиксируем  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ ,  $c_4 = c_5 = c_6 = 0$ , получая задачу по минимизации суммарного времени в движении и в стоянке в течение горизонта планирования. Отметим, что при заданных значениях чисел  $c_1, \dots, c_6$  величины  $C_k$  никак в оптимизации не участвуют,  $k = \overline{1, 1249}$ . А при используемых значениях величин  $w_k^{\text{макс}}$ ,  $w_i$ ,  $i = \overline{1, 62}$ ,  $k = \overline{1, 1249}$ , ограничения на максимальный вес (1.19) идентичны ограничению на безопасность движения – одна «поднитка» может быть использована максимум одним поездом. Условия (1.20) нарушаются.

Зафиксируем параметр  $J = 12$ . Как и ранее, вновь зададим  $A = 0$ ,  $P = 1$ .

По итогам численного эксперимента оказалось, что решения по алгоритмам 1 и 2.1 позволяют принять к перевозке все грузы, в то время как решение по алгоритму 2.2 этого не позволяет. Оптимальное значение критериальной функции (1.21) на решении, полученном при помощи алгоритма 1/алгоритма 2.1, составило 26951/27151. Решение и по алгоритму 1, и по алгоритму 2.1 таково, что все поезда прибывают в соответствующие пункты назначения в рамках горизонта планирования, хотя это и не

было обязательным требованием. Время вычислений по алгоритму 1/2.1 составило 28/8 минут.

Приведем цепочки индексов вершин, пересекаемых поездами, по алгоритму 1.

Таблица 1.4. Цепочки индексов вершин, пересекаемых поездами.

Направление движения	Количество поездов	Цепочки индексов вершин, пересекаемых поездами
2 → 10	12	2 → 1 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10
	1	2 → 12 → 13 → 14 → 15 → 16 → 17 → → 20 → 21 → 22 → 29 → 30 → 10
10 → 2	12	10 → 9 → 8 → 7 → 6 → 5 → 4 → 3 → 1 → 2
	1	10 → 30 → 29 → 22 → 21 → 20 → 17 → → 16 → 15 → 14 → 13 → 12 → 2
2 → 22	8	2 → 12 → 13 → 14 → 15 → 16 → 17 → 20 → 21 → 22
22 → 2	8	22 → 21 → 20 → 17 → 16 → 15 → 14 → 13 → 12 → 2
34 → 42	7	34 → 37 → 40 → 41 → 42
42 → 34	7	42 → 41 → 40 → 37 → 34
34 → 33	2	34 → 33
2 → 33	1	2 → 11 → 32 → 33
10 → 42	1	10 → 9 → 30 → 29 → 22 → 31 → 38 → 41 → 42
42 → 10	1	42 → 41 → 38 → 31 → 29 → 30 → 9 → 10
5 → 34	1	5 → 6 → 26 → 16 → 17 → 18 → 19 → 35 → 34

Как следует из таблицы 1.4, большинство поездов, у которых одинаковы вершины отправления и одинаковы вершины назначения, следуют по одной и той же цепочке вершин. Исключение составляет лишь движение между вершинами с индексами 2 и 10. При этом решение получается разумным с точки зрения движения по графу железнодорожной сети: движение из вершины с индексом 34 в вершину с индексом 33 не осуществляется через какие-то промежуточные станции, движение из 34 в 42 и обратно не происходит по «круглым» цепочкам вершин (напр. при движении не задействована вершина с индексом 16).

Как следует из таблиц 1.3 и 1.4, суммарно задействовано 468 из 1249 «подниток». Однако ответить на вопрос о том, сколько еще можно пропустить поездов с учетом занятых «подниток» – затруднительно, поскольку возможность пропуска дополнительного поезда зависит не только от количества доступных «подниток», но и времени: времени готовности состава к отправления и времени движения по той или иной «поднитке».

Заметим, что если рассмотреть даже не все грузы, а их часть, например, первые 15 грузов (т.е. грузы с номерами 1, 2, ..., 15) из списка перевозок, то оптимальное реше-

ние в задаче (1.22) при ограничениях (1.1)–(1.19), (1.23) за 2 часа счета не находится. В этой связи для данного примера сделать вывод о точности полученного приближенного решения, к сожалению, невозможно.

Проанализируем теперь время работы алгоритма 2.1 в зависимости от количества грузов, планируемых к перевозке. Выберем 5, 10, 15, ..., 55, 60 первых грузов из списка перевозок и вычислим для каждого случая время работы алгоритма 2.1 в минутах.

Таблица 1.5. Время работы алгоритма 2.1 в минутах.

Количество грузов к перевозке	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Время работы алгоритма	0,63	1,33	2,43	2,95	3,67	4,42	5,73	5,93	6,33	7,13	7,4	7,7

Как следует из представленных результатов, увеличение количества грузов не обязательно ведет к увеличению времени счета. Этот факт вызван тем, что добавление каждого нового груза к списку перевозок запускает цепную реакцию и приводит к полному пересчету расписания ввиду того, что согласно алгоритму 2.1 расписание в первую очередь ищется для груза с минимальным временем готовности к отправлению, а не для груза с минимальным номером. Исходный же список перевозок не является отсортированным по возрастанию времени готовности к отправлению. При этом добавление каждых 5 новых грузов для расчета, как правило, приводит к увеличению времени работы алгоритма на 0,5-1,5 минуты.

### 1.4.3.3. Пример №3

Рассмотрим еще один модельный пример.

Пусть мультиграф транспортной сети имеет вид, представленный на рисунке 1.3. Для большей наглядности второе ребро между смежными вершинами опущено. На графе представлены ребра с номером 1. Некоторые ребра обозначены пунктирной линией с целью показать разноуровневое пересечение ребер в транспортной сети.

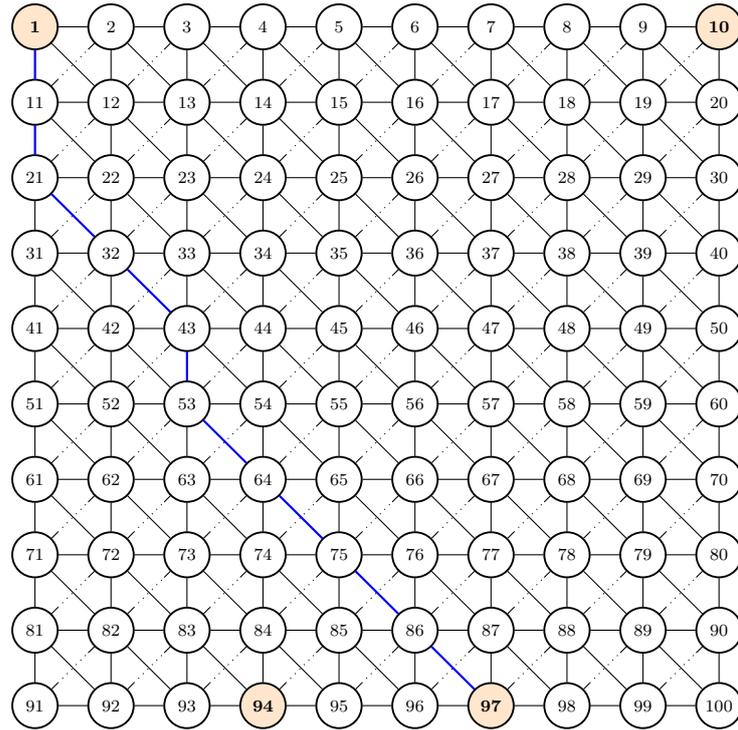


Рисунок 1.3. Мультиграф  $G$  транспортной сети (оранжевым выделены вершины отправления и назначения, синим выделен наиболее часто встречающийся путь у доставленных грузов на одном из полученных решений).

Положим  $t_{\max} = 1440$  минут. Выбран некоторый момент отсчета. Начиная с момента отсчета: каждые 60 минут в вершине с индексом 1 появляется по 5 грузов одинаковой массы в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 97; каждые 60 минут в вершине с индексом 10 появляется по 5 грузов одинаковой массы в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 94.

Транспортировки между вершинами с разностью индексов, равной 1 или 10 по модулю, осуществляются каждые 30 минут, цена такой транспортировки – 10 условных единиц, максимально перевозимая масса – 2 условные единицы, длительность транспортировки – 1 час. Транспортировки между вершинами с разностью индексов, равной 9 или 11 по модулю, осуществляются каждые 30 минут, цена такой транспортировки – 20 условных единиц, максимально перевозимая масса – 2 условные единицы, длительность транспортировки – 85 минут. Таким образом,  $I = 240$ ,  $K = 32832$ ,  $M = 100$ .

Предположим, также что  $d_i = 180$ ,  $t_i = 960$ ,  $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} = 0$ ,  $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} = 120$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

Положим  $\eta_{m_1, m_2} = 0$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1, 100}$ . Пусть также

$$\tau_{m_1+1, m_2+1} = \begin{cases} 90, & |m_1 \% 10 - m_2 \% 10| = 1 \text{ и} \\ & |[m_1/10] - [m_2/10]| = 1 \\ 60(\max\{m_1 \% 10, m_2 \% 10\} - \min\{m_1 \% 10, m_2 \% 10\}) + & \text{иначе,} \\ +60|[m_1/10] - [m_2/10]|, & \end{cases}$$

где  $x \% y$  – остаток от деления числа  $x$  на число  $y$ ,  $[x]$  – целая часть числа  $x$ ,  $m_1, m_2 = \overline{0, 99}$ . Такой выбор величин  $\tau_{m_1, m_2}$  обеспечивает то, что ожидаемое время перевозки грузов от одной смежной вершины до другой, если они соединены по диагонали, составляет 90 минут, во всех остальных случаях ожидаемая длительность перевозок пропорциональна минимальному количеству ребер при пути от одной вершины до другой без использования диагональных ребер.

Рассмотрим случай  $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$ ,  $c_4 = c_6 = 0$ . Положим  $A = 1$ . Проанализируем, как зависят от  $P$  и  $J$ , результаты применения предложенных алгоритмов. Длительность промежутков  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_P$  будем выбирать одинаковой. Предварительно отметим, что при имеющихся транспортировках движение из вершины с индексом 1 в вершину с индексом 12 стоит столько же, сколько движение через промежуточную вершину с индексом 2 (или индексом 11), при этом движение напрямую занимает меньшее время. Однако наиболее быстрое движение из вершин отправления – по диагонали – вследствие заявленного максимального веса и периодичности транспортировок доступно не для каждого груза, поэтому исследуемая оптимизационная задача, вообще говоря, нетривиальна.

Таблица 1.6. Показатели приближенного решения, найденного алгоритмом по наименьшему времени, в формате суммарное время перевозок/количество принятых к перевозке грузов/количество доставленных грузов/цены перевозок/времени счета в минутах для различных  $P$  и  $J$

$P \setminus J$	9	12	15
6	147740/192/70/21560/70	<b>183605</b> /240/123/28840/78	<b>183790</b> /240/122/28840/106
12	141675/182/60/19720/45	<b>186435</b> /240/117/28520/53	<b>186435</b> /240/117/28520/58
24	170230/220/94/25200/54	<b>195590</b> /240/96/28160/59	<b>195590</b> /240/96/28160/61

Таблица 1.7. Показатели приближенного решения, найденного алгоритмом по наибольшему времени, в формате суммарное время перевозок/количество принятых к перевозке грузов/количество доставленных грузов/цены перевозок/времени счета в минутах для различных  $P$  и  $J$

$P \setminus J$	9	12	15
6	145425/188/62/20980/71	<b>183585</b> /240/122/29020/76	<b>183585</b> /240/122/29020/116
12	124245/156/26/15560/48	187870/236/106/28060/54	<b>191685</b> /240/110/28770/60
24	171470/222/96/25760/55	171470/222/96/25760/57	171470/222/96/25760/60

Жирным в таблицах 1.6 и 1.7 выделены те случаи, когда все грузы приняты к доставке. Как следует из таблиц 1.6 и 1.7, наилучший результат был достигнут для алгоритма по наибольшему времени при  $P = 6$ ,  $J = 12$ . Это решение будем называть *базовым*. Для базового решения наиболее часто использованная цепочка индексов вершин, пересекаемых грузами при движении, это

$$1 \rightarrow 11 \rightarrow 21 \rightarrow 32 \rightarrow 43 \rightarrow 53 \rightarrow 64 \rightarrow 75 \rightarrow 86 \rightarrow 97.$$

Такая цепочка встретилась для 8 грузов. Среди доставленных в рамках горизонта планирования грузов для 74 грузов было задействовано 9 транспортировок, для 40 грузов – 10, для 8 грузов – 11. Из доставленных грузов ровно половина отправлялась из вершины с индексом 1.

Еще одним результатом проведенного исследования является тот факт, что для случаев, когда все грузы приняты к перевозке, при фиксированном  $J$  с убыванием  $P$  с 12 до 6 ожидаемо растет время счета, так как решаются задачи математического программирования большей размерности. Однако также наблюдается уменьшение критерия. Убывание  $P$  с 24 до 12 не увеличивает время счета. Это связано с тем, что хотя и при  $P = 24$  решаются задачи меньшей размерности, чем при  $P = 12$ , но таких задач решается больше, и для каждой из них требуется время не только на решение, но и на преобразование задачи математического программирования из программного кода во внутренний формат используемого решателя (так называемое *generation time*). Рост  $J$  при фиксированном  $P$  приводит к тому, что большее количество грузов принимается к доставке. Однако увеличение  $J$  с 12 до 15 в данной задаче не всегда позволяет уменьшить значение критерия. Этот факт может быть вызван тем, что  $t_i$  относительно невелико,  $i = \overline{1, I}$ . Поэтому движение с большим числом транспортировок и временем

в пути от момента готовности невозможно. Кроме того, цель оптимизации – в минимизации суммарного времени перевозок, а движение по диагонали, как отмечалось ранее, быстрее.

Заметим, что уже при  $J = 12$  с учетом ограничения (1.2) в исследуемой задаче имеется  $I \cdot J \cdot K = 94556160$  бинарных переменных, подлежащих оптимизации. При этом время поиска решения составляет около часа, что можно признать приемлемой скоростью. Для ускорения поиска решения можно, например, вначале зафиксировать некоторый набор вершин, через которые должен проследовать тот или иной груз. Если для этого набора будут найдены соответствующие транспортировки, то можно не искать расписание для этого набора грузов на всем множестве транспортировок. Также можно уменьшить количество элементов во множестве  $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ , формируемого на 8 шаге предложенного алгоритма,  $\tilde{s} = \overline{1, S}$ ,  $\tilde{p} = \overline{1, P}$ . Например, можно исключать транспортировки с вершинами начала или конца движения, в которых уже побывали все грузы из множества  $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$ ,  $\tilde{s} = \overline{1, S}$ . Однако любые такого рода модификации, приводя к увеличению скорости получения решения, могут ухудшить решение в терминах качества.

Исследуем вопрос о качестве получаемого решения, если уменьшить  $P$  или  $A$  относительно уже использованных.

Таблица 1.8. Дальнейшее улучшение базового решения в алгоритме по наибольшему времени

Параметры алгоритма	Суммарное время перевозок	Количество принятых к перевозке грузов	Количество доставленных грузов	Цена перевозок	Время счета, мин.
$A = 1, P = 4,$ $J = 12$	<b>182455</b>	240	122	28830	210
$A = 0.5, P = 6,$ $J = 12$	<b>183165</b>	240	124	29000	181

Как следует из таблицы 1.8, и уменьшение  $A$ , и уменьшение  $P$  позволило найти решение, несколько лучшее (порядка 0,5 %) по значению критерия, чем базовое решение. Однако время поиска улучшенного решения увеличилось в несколько раз. Увеличение времени счета связано с увеличением размерности решаемых при функционировании алгоритма задач.

Отметим, что потенциально предложенный алгоритм может использоваться не

только в целях стратегического, но и оперативного планирования. Оперативное планирование возможно в ситуациях с меньшим количеством транспортировок/меньшим числом вершин мультиграфа, чем рассмотренное в настоящем примере. Вопрос о максимальной размерности решаемой задачи, при которой возможно оперативное планирование при помощи разработанного алгоритма, представляет отдельный научный интерес. При этом можно ускорить работу предложенного алгоритма новой/другой версией решателя задач смешанного целочисленного линейного программирования.

#### 1.4.3.4. Пример №4

Рассмотрим другой пример.

Пусть мультиграф транспортной сети имеет вид, представленный на рисунке 1.4. Для большей наглядности второе ребро между смежными вершинами опущено. На графе представлены ребра с номером 1.

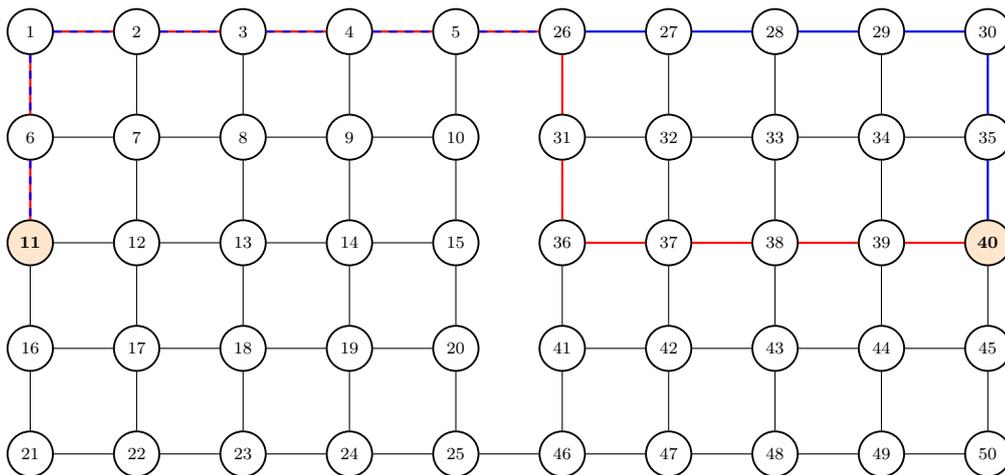


Рисунок 1.4. Мультиграф  $G$  транспортной сети (оранжевым выделены вершины отправления и назначения, синим и красным выделены наиболее часто встречающиеся пути у доставленных грузов на одном из полученных решений).

Положим  $t_{\max} = 1440$  минут. Выбран некоторый момент отсчета. Начиная с момента отсчета каждые 30 минут в вершине с индексом 11 появляется по 10 грузов одинакового веса в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 40.

Все транспортировки между смежными вершинами осуществляются каждые 30 минут, цена каждой транспортировки – 1 условная единица стоимости, максимальный перевозимый вес – 7 условных единиц веса. Длительность всех транспортировок, за

исключением транспортировок из вершины с индексом 25 в вершину с индексом 46 (и обратно) – 30 минут. Длительность транспортировок из вершины с индексом 25 в вершину с индексом 46 и из вершины с индексом 46 в вершину с индексом 25 составляет 60 минут. Отсюда получается, что быстрее всего из *левой части* мультиграфа (вершины с индексами  $1, 2, \dots, 25$ ) добраться в *правую часть* мультиграфа (вершины с индексами  $26, 27, \dots, 50$ ) при движении из вершины с индексом 5 в вершину с индексом 26, однако пропускная способность такого ребра ограничена 7 единицами веса в полчаса.

Согласно введенным предположениям получаем, что  $I = 480, K = 7872, M = 50$ .

Дополнительно предположим  $d_i = 180, t_i = 540, t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} = 0, t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} = 120, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, K}$ .

Положим  $\eta_{m_1, m_2} = 0, m_1, m_2 = \overline{1, 100}$ . Пусть также

$$\tau_{m_1+1, m_2+1} = 30|[m_1/10] - [m_2/10]| + 30|m_1 \% 10 - m_2 \% 10|, \quad (1.46)$$

где  $x \% y$  – остаток от деления числа  $x$  на число  $y$ ,  $[x]$  – целая часть числа  $x$ ,  $m_1, m_2 = \overline{0, 24}$ . Также предположим, что

$$\tau_{m_1+1, m_2+1} = 30|[m_1/10] - [m_2/10]| + 30|m_1 \% 10 - m_2 \% 10|, m_1, m_2 = \overline{25, 49}. \quad (1.47)$$

Также выберем

$$\tau_{m_1+1, m_2+1} = \min\{\tau_{m_1+1, 5} + \tau_{26, m_2+1} + 30, \tau_{m_1+1, 25} + \tau_{46, m_2+1} + 60\}, m_1 = \overline{0, 24}, m_2 = \overline{25, 49}, \quad (1.48)$$

$$\tau_{m_1+1, m_2+1} = \min\{\tau_{m_1+1, 26} + \tau_{5, m_2+1} + 30, \tau_{m_1+1, 46} + \tau_{25, m_2+1} + 60\}, m_1 = \overline{25, 49}, m_2 = \overline{0, 24}. \quad (1.49)$$

Формула (1.46) задает ожидаемое время до доставки груза при движении с вершинами отправления и назначения в левой части графа, формула (1.47) – в правой части графа. Формулы (1.48) и (1.49) задают ожидаемое время при движении между левой и правой частями мультиграфа. Выбор (1.48) и (1.49) означает, что использование ребра между вершинами с индексами 25 и 46 предполагается только в том случае, когда движение с использованием ребра между вершинами с индексами 5 и 26 быстрее по ожидаемому времени в пути.

Отметим, что выбор  $\tau_{m_1, m_2}$  согласно (1.46)–(1.49) является *оптимистическим*,  $m_1, m_2 = \overline{1, 50}$ . К примеру, из вершины с индексом 5 в вершину с индексом 26 без ожидания до перевозки каждые полчаса можно отправить не более 7 грузов. При этом каждые полчаса есть потребность в перевозке 10 грузов, однако согласно (1.48) перевозка без ожидания потенциально доступна для любого количества грузов. Аналогичная ситуация с движением, например, из вершины с индексом 1 в вершину с индексом 2. Какой бы ни был необходим объем перевезенных грузов между этим вершинами ожидаемое время до доставки составляет 30 минут, хотя доставить за 30 минут можно только 7 грузов. Иными словами, пропускная способность ребер мультиграфа является ограниченной для данного набора грузов.

Зададим параметры критериальной функции следующим образом:  $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$ ,  $c_4 = c_6 = 0$ . В таком случае получается задача по минимизации суммарного времени перевозок. Положим  $A = 1$ .

Проанализируем, как зависят от  $P$  результаты алгоритма минимального/максимального времени. Длительность промежутков  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_P$  будем выбирать одинаковой.

Таблица 1.9. Показатели приближенного решения при  $A = 1$ ,  $J = 16$ .

Алгоритм	$P$	Количество принятых к перевозке грузов	Суммарное время перевозок	Количество доставленных грузов	Цена перевозок	Время счета, мин.
Минимального времени	6	474	211200	322	8028	102
	5	<b>480</b>	<b>205200</b>	<b>334</b>	<b>8050</b>	<b>128</b>
	4	<b>480</b>	<b>208020</b>	<b>325</b>	<b>8150</b>	<b>454</b>
Максимального времени	6	414	164250	290	7237	88
	5	429	171000	302	7452	121
	4	447	179280	311	7701	465

Жирным в таблице 1.9 выделены те случаи, когда все грузы приняты к доставке. Как следует из таблицы 1.9, наилучший результат был достигнут для алгоритма по минимальному времени при  $P = 5$ . Это решение будем называть *базовым*. Для базового решения наиболее часто использованные цепочки индексов вершин, пересекаемых грузами при движении, это

$$11 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 26 \rightarrow 27 \rightarrow 28 \rightarrow 29 \rightarrow 30 \rightarrow 35 \rightarrow 40 \text{ (27 раз),}$$

11 → 6 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 26 → 31 → 36 → 37 → 38 → 39 → 40 (19 раз).

Среди доставленных в рамках горизонта планирования грузов для 311 грузов было задействовано 13 транспортировок, для 23 грузов – 15.

Ввиду того, что часть грузов имеют схожие характеристики (одинаковое время отправления, вес, и т.д.) для данной задачи разумно использовать несколько другой алгоритм поиска общего расписания. А именно, можно искать общее расписание последовательно не по одному грузу, а по 10, 20 или любому другому кратному 10 числу грузов. Кратность десяти вызвана тем, что характеристики перевозок совпадают у первых десяти, вторых десяти и так далее грузов. Однако для уменьшения размерности решаемых задач следует выбирать большие  $P$ , чем рассмотренные в таблице 1. В частности, при  $A = 1$ ,  $P = 12$ , поиске расписания последовательно по 10 грузов от минимального времени отправления к максимальному расписание было найдено только для 420 грузов из 480. Но при последовательном построении расписания по двадцать грузов при тех же параметрах  $A$  и  $P$  расписание перевозок было найдено для всех грузов, суммарное время перевозок равно 202890, что меньше примерно на процент, чем наилучший результат из таблицы 1. Время счета – 44 минуты. В этой связи заключаем, что алгоритмы минимального и максимального времени в тех задачах, где характеристики перевозок совпадают, могут быть усовершенствованы. При этом само по себе совершенствование данных алгоритмов является предметом отдельного научного интереса.

## 1.5. Постановка и решение задачи назначения «технологического окна»

### 1.5.1. Дополнительные ограничения

Пусть для ремонта, длительности не меньше заданного параметра  $\Delta$ , который должен быть осуществлен не ранее  $t_1^o$  и не позднее  $t_2^o$ , должны быть закрыты некоторые ребра графа  $G$ . Поставим задачу отыскания расписания указанных выше  $I$  грузов через транспортную сеть, задаваемую мультиграфом  $G$ , на основе множества транспортировок  $\mathcal{Z}$  с учетом того, что некоторые ребра мультиграфа  $G$  должны быть закрыты для ремонта, длительности не меньше заданного параметра  $\Delta$ . Очевидно, что  $\Delta \leq t_2^o - t_1^o$ . Предполагается, что для ремонта отводится интервал  $(T_1, T_2)$ , где  $T_1$  и  $T_2$  – переменные, подлежащие определению. При этом будем руководствоваться ранее введенной

критериальной функцией (1.22).

Выделим из множества  $\mathcal{Z}$  номера тех транспортировок, у которых ребро, образующее первыми тремя компонентами вектора свойств транспортировки, подлежит ремонту. На основе этих номеров составим множество  $Z' \subset \{1, 2, \dots, K\}$ .

Необходимо исключить транспортировки, связанные с ребрами мультиграфа  $G$ , подлежащими ремонту, попадающие в «технологическое окно». Для этого транспортировки по ребрам, подлежащим ремонту, возможны либо до начала «технологического окна» (далее – ТО), либо по его окончании. С этой целью введем вспомогательные бинарные переменные  $\gamma_k$  и  $\varkappa_k$ ,  $k \in Z'$ . Если время окончания транспортировки до начала ТО, то только в этом случае  $\gamma_k = 1$ ,  $k \in Z'$ . Если время начала транспортировки после ТО, то только в этом случае  $\varkappa_k = 1$ ,  $k \in Z'$ . Соответственно, для того чтобы транспортировка была осуществима, нужно, чтобы хотя бы одна из переменных  $\gamma_k$  и  $\varkappa_k$  оказалась равной единице,  $k \in Z'$ . С учетом введенных переменных заключаем

$$\gamma_k t_k^{\text{кон.}} \leq T_1, k \in Z', \quad (1.50)$$

$$T_2 \leq \varkappa_k t_k^{\text{нач.}} + (1 - \varkappa_k) t_{\text{макс}}, k \in Z', \quad (1.51)$$

$$\delta_{i,j,k} \leq \varkappa_k + \gamma_k, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, k \in Z', \quad (1.52)$$

Поясним смысл ограничений (1.50)–(1.52). Если хотя бы одна из переменных  $\varkappa_k$  и  $\gamma_k$  будет равна единице, то ограничения (1.52) вырождаются в ограничения (1.1) и транспортировка с номером  $k$  будет осуществима,  $k \in Z'$ . В остальных случаях окажется, что  $\delta_{i,j,k} \leq 0$ , а значит,  $\delta_{i,j,k} = 0$ , что приведет к невозможности осуществления транспортировки с номером  $k$ ,  $k \in Z'$ .

Для того, чтобы «технологическое окно» было длиной не меньше заданного параметра  $\Delta$  введем ограничение

$$T_2 - T_1 \geq \Delta. \quad (1.53)$$

А для того, чтобы «технологическое окно» было в заданный временной промежуток времени наложим ограничения

$$t_1^o \leq T_1, \quad T_2 \leq t_2^o. \quad (1.54)$$

### 1.5.2. Постановка задачи

С учетом введенных выше ограничений получаем следующую постановку задачи

$$\mathcal{C}(\delta, F, \omega, \hat{T}) \rightarrow \min_{\delta, F, \omega \in \{0,1\}^I, \hat{T}, T_1, T_2, \alpha_k, \gamma_k, k \in Z'} \quad (1.55)$$

при ограничениях (1.1)–(1.19), (1.23), (1.50)–(1.54).

### 1.5.3. Алгоритм поиска приближенного решения

Как отмечалось ранее, уже решение задачи (1.22) при ограничениях (1.1)–(1.19), (1.23) весьма трудоемко, не говоря об учете дополнительных ограничений (1.50)–(1.54). Поэтому, как и для поиска расписания движения без необходимости в ТО, предложим последовательность действий по поиску субоптимального решения в задаче (1.55) при ограничениях (1.1)–(1.19), (1.23), (1.50)–(1.54).

Вначале необходимо определить расписание движения как если бы необходимость назначения ТО отсутствовала. Далее необходимо подобрать ТО так, чтобы в него попадало минимальное количество грузов. Далее нужно исключить транспортировки, попадающие в ТО, и заново построить расписание движения для всех грузов.

Пусть найдено оптимальное/субоптимальное решение задачи построения расписания движения грузов по всей транспортной сети: задано множество  $Z_i \subset \{1, \dots, K\}$  – множество номеров транспортировок, используемых при движении грузом с номером  $i$ ,  $i = \overline{1, I}$ .

Далее сформируем множество номеров грузов  $\overline{\mathcal{I}} \triangleq \{i \in \mathbb{N} : i \leq I, Z_i \cap Z' \neq \emptyset\}$ . Если множество  $\overline{\mathcal{I}}$  пусто, то можно назначить ТО любой длительности в пределах горизонта планирования. Если же множество  $\overline{\mathcal{I}}$  непусто, то нужно решить задачу по минимизации количества грузов, попадающих в ТО.

Для этого введем дополнительные бинарные переменные  $\tilde{\delta}_p$ , равенство нулю которых означает, что ни одна из транспортировок для груза с номером  $p$  не попадает по времени в ТО,  $p \in \overline{\mathcal{I}}$ . В этой связи введем новые бинарные переменные  $\tilde{\delta}_p^{k_p}$ , равенство нулю которых означает, что используемая грузом с номером  $p$  транспортировка с номером  $k_p$  будет доступна вследствие ТО,  $p \in \overline{\mathcal{I}}$ ,  $k_p \in Z_p \cap Z'$ . Для того, чтобы переменная  $\tilde{\delta}_p^{k_p}$  была равна нулю, нужно выполнение либо  $T_1 \geq t_{k_p}^{\text{кон.}}$ , либо  $T_2 \leq t_{k_p}^{\text{нач.}}$ . В этой связи

введем дополнительные бинарные переменные  $\alpha_p^{k_p}$ ,  $\beta_p^{k_p}$ . Переменная  $\alpha_p^{k_p}$  равна нулю, только если  $T_1 \geq t_{k_p}^{\text{кон.}}$ . Переменная  $\beta_p^{k_p}$  равна нулю, только если  $T_2 \leq t_{k_p}^{\text{нач.}}$ .

С использованием введенных переменных получается следующая задача

$$\sum_{p \in \bar{\mathcal{I}}} \tilde{\delta}_p \rightarrow \min_{T_1, T_2, \tilde{\delta}_p, \tilde{\delta}_p^{k_p}, \alpha_p^{k_p}, \beta_p^{k_p}, p \in \bar{\mathcal{I}}, k_p \in Z_p \cap Z'} \quad (1.56)$$

при ограничениях (1.53), (1.54) и

$$T_1 \geq (1 - \alpha_p^{k_p}) t_{k_p}^{\text{кон.}}, p \in \bar{\mathcal{I}}, k_p \in Z_p \cap Z', \quad (1.57)$$

$$T_2 \leq (1 - \beta_p^{k_p}) t_{k_p}^{\text{нач.}} + \beta_p^{k_p} t_{\text{макс.}}, p \in \bar{\mathcal{I}}, k_p \in Z_p \cap Z', \quad (1.58)$$

$$\tilde{\delta}_p^{k_p} \geq \alpha_p^{k_p} + \beta_p^{k_p} - 1, p \in \bar{\mathcal{I}}, k_p \in Z_p \cap Z', \quad (1.59)$$

$$\tilde{\delta}_p \geq \frac{\sum_{k_p \in Z_p \cap Z'} \tilde{\delta}_p^{k_p}}{K}, p \in \bar{\mathcal{I}}, \quad (1.60)$$

$$\tilde{\delta}_p \in \{0, 1\}, \tilde{\delta}_p^{k_p} \in \{0, 1\}, \alpha_p^{k_p} \in \{0, 1\}, \beta_p^{k_p} \in \{0, 1\}, p \in \bar{\mathcal{I}}, k_p \in Z_p \cap Z'. \quad (1.61)$$

В виду структуры задачи оптимизации равенство переменной  $\tilde{\delta}_p$  единице на оптимальном решении означает, что хотя бы одна из переменных  $\tilde{\delta}_p^{k_p}$  равна единице,  $p \in \bar{\mathcal{I}}$ ,  $k_p \in Z_p \cap Z'$ . Это, в свою очередь, означает, что хотя бы для одной транспортировки  $k'_p \in Z_p \cap Z'$  на оптимальных  $T_1$  и  $T_2$  не будет выполнено ни  $T_1 \geq t_{k'_p}^{\text{кон.}}$ , ни  $T_2 \leq t_{k'_p}^{\text{нач.}}$ . Таким образом, равенство  $\tilde{\delta}_p$  единице на оптимальном решении означает, что груз с номером  $p$  попадает по времени в ТО,  $p \in \bar{\mathcal{I}}$ .

Если оптимальное значение критерия равно нулю, то перестраивать имеющееся расписание движения не нужно. Если же оптимальное значение критерия больше нуля, то нужно перестраивать расписание движения грузов с учетом транспортировок, попадающих в ТО, а именно не использовать эти транспортировки при поиске оптимального расписания.

В итоге получаем следующий алгоритм совместного поиска расписания и ТО.

1. При помощи алгоритма по направлению/наибольшему(наименьшему) времени ищется расписание движения.

Если по итогу работы алгоритма оказывается  $\sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i \equiv 0$ , то не удастся построить расписание ни одному из грузов, при этом «технологическое окно» можно установить

любой длительности (например, в качестве  $T_1$  можно взять  $t_1^0$ , а в качестве  $T_2 - t_2^0$ ), алгоритм завершен.

Если по итогу работы алгоритма оказывается  $0 < \sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i \leq I$ , то происходит переход к шагу 2.

2. Формируется множество  $\bar{\mathcal{I}} = \{i \in \mathbb{N} : i \leq I, \mathcal{D}_i \equiv 1, Z_i \cap Z' \neq \emptyset\}$ , где  $Z_i$  – множество номеров транспортировок, используемых при движении грузом с номером  $i$ ,  $i = \overline{1, I}$ , согласно построенному на 1-м шаге настоящего алгоритма расписанию.

Если множество  $\bar{\mathcal{I}}$  пусто, то можно назначить ГО любой длительности в пределах горизонта планирования (например, в качестве  $T_1$  можно взять  $t_1^0$ , а в качестве  $T_2 - t_2^0$ ), расписание движения построено на шаге 1, алгоритм завершен.

Если множество  $\bar{\mathcal{I}}$  непусто, то происходит переход к шагу 3.

3. Решается задача (1.56) при ограничениях (1.53), (1.54) и (1.57)–(1.61). Пусть  $T_1^*$  и  $T_2^*$  – оптимальное значение переменных  $T_1$  и  $T_2$  соответственно в этой задаче. Если оптимальное значение критерия в (1.56) при ограничениях (1.53), (1.54) и (1.57)–(1.61) равно нулю, то  $T_1^*$  и  $T_2^*$  задают время для проведения ГО, расписание грузов перестраивать не нужно, алгоритм завершен. Если оптимальное значение критерия в задаче (1.56) при ограничениях (1.53), (1.54) и (1.57)–(1.61) отлично от нуля, то формируется множество  $\mathcal{K}' = Z' \cap \{k \in Z' : t_k^{\text{кон.}} \leq T_1^*\} \cap \{k \in Z' : t_k^{\text{нач.}} \geq T_2^*\}$ , происходит переход к шагу 4.

4. При помощи алгоритма по направлению/наибольшему (наименьшему) времени ищется расписание движения с учетом того, что на шаге 11 соответствующего алгоритма добавляются ограничения

$$\delta_{i,j,k}^{\bar{p}} = 0, i \in \bar{\mathcal{I}}, j = \overline{1, J+1}, k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}} \cap \mathcal{K}', \quad (1.62)$$

гарантирующие, что транспортировки, попадающие в ГО, не будут использованы. Вычисляется  $I_{\text{кон}} = \sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i$ .

**ТЕОРЕМА 1.2.** *Если  $\sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i \equiv I$ , то существует хотя бы одно решение системы ограничений (1.1)–(1.19), (1.23), (1.50)–(1.54), причем на одном из решений выполняется  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ , переменные  $T_1$  и  $T_2$  для этого решения задаются на шагах 2–4 алгоритма совместного поиска расписания и ГО,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Если  $0 <$*

$< \sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i < I$ , то существует хотя бы одно решение системы ограничений (1.1)–(1.19), (1.23), (1.50)–(1.54) для модифицированного набора грузов  $\{i \in \mathbb{N} : i \leq I, \mathcal{D}_i \equiv 1\}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2.

Рассмотрим вначале случай  $\sum_{i=1}^I \mathcal{D}_i \equiv I$ . В этом случае либо множество  $\bar{\mathcal{I}}$  пусто, либо если это множество непусто, то оптимальное значение критерия в (1.56) при ограничениях (1.53), (1.54) и (1.57)–(1.61) равно нулю или же оптимальное значение критерия в (1.56) при ограничениях (1.53), (1.54) и (1.57)–(1.61) не равно нулю, но на 4-м шаге алгоритма все грузы оказались приняты к доставке. Рассмотрим каждый из этих вариантов.

Если множество  $\bar{\mathcal{I}}$  пусто, то согласно результатам теоремы 1.1 ограничения (1.1)–(1.19), (1.23) будут выполнены при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ , где величины  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  определяются на втором шаге алгоритма,  $i = \overline{1, I_{\text{кон}}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Пустота множества  $\bar{\mathcal{I}}$  означает, что ни один из грузов не использует транспортировки, попадающие по месту в «технологическое окно». Это означает, что в левой части неравенства (1.52) при подстановке  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  вместо  $\delta_{i,j,k}$  окажется ноль, а переменные  $\varkappa_k$  и  $\gamma_k$  можно положить равными нулю,  $k \in Z'$ .

Если множество  $\bar{\mathcal{I}}$  непусто, а оптимальное значение критерия в (1.56) при ограничениях (1.53), (1.54) и (1.57)–(1.61) равно нулю, то согласно результатам теоремы 1.1 ограничения (1.1)–(1.19), (1.23) будут выполнены при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ , где величины  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  определяются на первом шаге описанного выше алгоритма назначения ТО,  $i = \overline{1, I_{\text{кон}}}$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Так как оптимальное значение критерия (1.56) равно нулю, то все переменные  $\tilde{\delta}_p$  в (1.60) можно положить нулевыми,  $p \in \bar{\mathcal{I}}$ . Отсюда можно и каждую переменную  $\tilde{\delta}_p^{k_p}$  положить нулем,  $p \in \bar{\mathcal{I}}$ ,  $k_p \in Z_p \cap Z'$ . Поэтому хотя для каждой пары  $(p, k_p)$  хотя бы одна из переменных  $\alpha_p^{k_p}$  и  $\beta_p^{k_p}$  будет равна нулю,  $p \in \bar{\mathcal{I}}$ ,  $k_p \in Z_p \cap Z'$ . Это означает, что каждая используемая грузами транспортировка (их перечень определяется на втором шаге алгоритма), попадающая в «технологическое окно» по месту, не будет попадать по времени. Иными словами, каждая такая транспортировка будет заканчиваться не позднее начала «технологического окна» и начинаться не раньше его окончания. Таким образом, при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$  в (1.50)–(1.52) можно положить  $\gamma_k = 1$  и  $\varkappa_k = 0$ , если  $t_k^{\text{кон.}} \leq T_1^*$ , а также  $\gamma_k = 0$  и  $\varkappa_k = 1$ , если  $T_2^* \leq t_k^{\text{нач.}}$ ,  $k \in Z' \cap \bigcup_{p \in \bar{\mathcal{I}}} Z_p$ .

Для  $k \in Z' \setminus \cup_{p \in \bar{I}} Z_p$ , то есть для тех транспортировок, попадающих по месту в «технологическое окно», но не используемых грузами, переменные  $\varkappa_k$  и  $\gamma_k$  можно положить равными нулю.

Если множество  $\bar{I}$  непусто, но оптимальное значение критерия в (1.56) при ограничениях (1.53), (1.54) и (1.57)–(1.61) не равно нулю, то согласно результатам теоремы 1.1, учитывая, что требуется выполнение дополнительных ограничений (1.62), ограничения (1.1)–(1.19), (1.23) будут выполнены при  $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$ , где величины  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  определяются на четвертом шаге описанного выше алгоритма назначения ТО,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J+1}, = \overline{1, K}$ . При этом ввиду ограничения (1.62) для  $k \in \mathcal{K}'$  можно положить  $\varkappa_k$  и  $\gamma_k$  равными нулю. Транспортировки с номерами из множества  $k \in Z' \setminus \mathcal{K}'$  либо начинаются не раньше  $T_2^*$ , либо заканчиваются не позднее  $T_1^*$ . Значит, для  $k \in Z' \setminus \mathcal{K}'$  можно положить  $\gamma_k = 1$  и  $\varkappa_k = 0$ , если  $t_k^{\text{кон.}} \leq T_1^*$ , а также  $\gamma_k = 0$  и  $\varkappa_k = 1$ , если  $T_2^* \leq t_k^{\text{нач.}}$ .

Очевидно, что если рассмотреть ограничения (1.1)–(1.19), (1.23), (1.50)–(1.54) и все их компоненты только для  $\{i \in \mathbb{N} : i \leq I, \mathcal{D}_i \equiv 1\}$ , то все рассуждения выше также окажутся справедливыми.

Теорема доказана.

Если на шагах 1 и 4 используется алгоритм по направлению, то алгоритм совместного поиска расписания и ТО будем называть алгоритмом I, при использовании алгоритма по наименьшему времени – алгоритмом II.I, при использовании алгоритма по наибольшему времени – алгоритмом II.II.

#### 1.5.4. Пример

Рассмотрим условия задачи из раздела 1.4.3.2. и предположим, что на пути номер 2 между вершинами с индексами 1 и 2 должны производиться ремонтные работы.

Проанализируем применимость и качество алгоритмов I и II.I. Алгоритм II.II не рассматривается, так как и без учета необходимости в проведении ремонтных работ этот алгоритм не порождает решение, когда к доставке (формированию) принимаются все  $I = 62$  поезда. Для алгоритмов I и II укажем

- значение критериальной функции (1.21) на расписании, получаемом на шаге 1 алгоритма совместного поиска расписания и ТО (иными словами, значение критериальной функции при отсутствии необходимости в проведении ТО);

- субоптимальный промежуток времени для назначения ТО, который получается на шаге 3;
- количество поездов при использовании расписания из шага 1, которые попадают в «технологического окна» согласно временному промежутку из шага 3;
- значение критериальной функции (1.21) на расписании, получаемом на шаге 4 алгоритма совместного поиска расписания и ТО (иными словами, значение критериальной функции при наличии необходимости в проведении ТО);

при различных  $\Delta$ .

Таблица 1.10. Результаты работы алгоритмов I и II.

$\Delta$	Алгоритм I				Алгоритм II			
	Значение функции (1.21) без учета ТО	$[T_1^*, T_2^*]$	Значение критерия в (1.56)	Значение функции (1.21) с учетом ТО	Значение функции (1.21) без учета ТО	$[T_1^*, T_2^*]$	Значение критерия в (1.56)	Значение функции (1.21) с учетом ТО
600	26951	[0,600]	0	<b>26951</b>	27151	[0,600]	0	<b>27151</b>
690		[16,706]	1	<b>27438</b>		[16,706]	1	<b>27262</b>
720		[56,776]	2	<b>27338</b>		[141,861]	2	27235
780		[0,780]	3	<b>27723</b>		[0,780]	2	27603
900		[0,900]	4	19360		[0,900]	3	27630

Жирным в столбце «Значение функции (1.21) с учетом ТО» таблицы 1.10 выделены те случаи, когда даже с учетом в необходимости ТО к доставке (формированию) принимаются все поезда.

Как следует из таблицы 1.10, в терминах значения критериальной функции алгоритм I не всегда дает лучшие результаты нежели алгоритм II. Однако для рассмотренного примера алгоритм I позволяет чаще найти такое расписание, при котором к отправке (формированию) принимаются все поезда.

Теперь проанализируем время работы алгоритмов I и II при различных  $\Delta$ .

Таблица 1.11. Время работы алгоритмов I и II (в минутах)

$\Delta$	Алгоритм I				Алгоритм II			
	Поиск расписания без учета ТО	Поиск ТО	Поиск расписания с учетом ТО	Итого	Поиск расписания без учета ТО	Поиск ТО	Поиск расписания с учетом ТО	Итого
600	28	0,07	0	19,07	8	0,07	0	8,07
690		0,07	32	60,07		0,07	8,4	16,47
720		0,07	117	145,07		0,07	–	–
780		0,07	123	151,07		0,07	–	–
900		0,07	–	–		0,07	–	–

Прочерки поставлены в тех случаях, когда тот или иной алгоритм не позволял найти решение, позволяющее перевезти (сформировать) все поезда из списка перевозок. Это связано с тем, что сравнивать временные затраты в таких случаях с затратами, когда были приняты к отправке (формированию) все поезда нельзя, так как, по сути, отличаются планы перевозок (или иначе – множество исходных данных). Как следует из таблицы 1.11, алгоритм I работает существенно дольше алгоритма II. В этой связи говорить о предпочтительности алгоритма I над алгоритмом II нельзя.

Приведем цепочки индексов вершин, пересекаемых поездами, при необходимости проведения ТО в случае  $\Delta = 780$  при использования алгоритма I.

Таблица 1.12. Цепочки индексов вершин, пересекаемых поездами по алгоритму I при необходимости в «технологическом окне» ( $\Delta = 780$ ).

Направление движения	Количество поездов	Цепочки индексов вершин, пересекаемых поездами
2 → 10	12	2 → 1 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10
	1	2 → 12 → 13 → 14 → 15 → 16 → 17 → 20 → 21 → 22 → 29 → 30 → 10
10 → 2	11	10 → 9 → 8 → 7 → 6 → 5 → 4 → 3 → 1 → 2
	1	10 → 30 → 29 → 22 → 21 → 20 → 17 → 16 → 15 → 14 → 13 → 12 → 2
	1	10 → 9 → 8 → 7 → 6 → 5 → 4 → 3 → 1 → 12 → 2
2 → 22	8	2 → 12 → 13 → 14 → 15 → 16 → 17 → 20 → 21 → 22
22 → 2	8	22 → 21 → 20 → 17 → 16 → 15 → 14 → 13 → 12 → 2
34 → 42	7	34 → 37 → 40 → 41 → 42
42 → 34	7	42 → 41 → 40 → 37 → 34
34 → 33	2	34 → 33
2 → 33	1	2 → 11 → 32 → 33
10 → 42	1	10 → 9 → 30 → 29 → 22 → 31 → 38 → 41 → 42
42 → 10	1	42 → 41 → 38 → 31 → 29 → 30 → 9 → 10
5 → 34	1	5 → 6 → 26 → 16 → 17 → 18 → 19 → 35 → 34

Согласно таблицам 1.4 и 1.12 в связи с необходимостью проведения ремонтных

работ для поездов, следующих из вершины с индексом 10 в вершину с индексом 2, приходится менять путь по мультиграфу. А именно, один поезд объезжает участок между вершинами с индексом 1 и вершиной с индексом 2, где должны проводиться ремонтные работы.

Все результаты были получены с помощью математического пакета ILOG CPLEX на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 16 GB DDR3 RAM).

### **1.6. Основные результаты главы 1**

1. Разработана система ограничений, щадающая движение по мультиграфу транспортной сети с фиксированным временем движения между вершинами, сформулированная в виде системы нелинейных ограничений и неравенств, содержащих непрерывные и бинарные переменные, допускающая движение и после окончания горизонта планирования, если такое движение допустимо с учетом прогнозируемого времени в пути.

2. Разработан универсальный критерий оптимальности, сочетающий различные временные компоненты перевозок, стоимость, количество доставленных в рамках горизонта планирования грузов.

3. Построен алгоритм формирования расписания движения в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами, которая учитывает фитнесность горизонта планирования, основанный на последовательном решении задач смешанного целочисленного линейного программирования. Разработаны подвиды алгоритма.

4. Сформулирована математическая постановка задачи назначения «технологического окна» в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования.

5. Разработан алгоритм поиска приближенного решения задачи назначения «технологического окна».

**Основные результаты главы опубликованы в [6, 12, 32–34, 111].**

## 2. Оптимизация в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами

В разделе 2.1 приводятся основные обозначения и предположения для формирования системы ограничений, задающей движение, и для дальнейшей оптимизации времени движения в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами. В разделе 2.2 разрабатывается: система ограничений, задающая движение в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами; математическая постановка задачи оптимизации движения, которая формулируется в виде задач смешанного целочисленного линейного программирования; ставится задача назначения «технологического окна», для которой разрабатывается ряд критериев оптимальности.

### 2.1. Основные обозначения и предположения

Пусть имеется неориентированный граф транспортной сети  $G = \langle V, E \rangle$ , где  $V$  – множество вершин (для железнодорожной станции – это стрелочные переводы, стыки между рельсами и точки входа и выхода со станции (границы станции)), а  $E$  – множество ребер (для станции – железнодорожных путей), соединяющих данные вершины. Также задана функция  $D : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , характеризующая длину ребра. Пусть количество ребер в графе  $G$  равно  $m$ . Пронумеровав ребра графа  $G$  от единицы до  $m$ , составим новый граф  $G' = \langle V', E' \rangle$ , множеством вершин  $V'$  которого являются номера ребер графа  $G$ , т.е.  $V' = \{1, 2, \dots, m\}$ . Множество ребер  $E'$  включает в себя ребра между вершинами из  $V'$ , если эти вершины являются смежными ребрами в графе  $G$ . На элементах множества  $V'$  введем функцию  $D' : V' \rightarrow \mathbb{R}_+$ , характеризующую «вес» вершин в графе  $G'$ , т.е. длину соответствующих ребер в графе  $G$ .

Будем отсчитывать время, начиная от некоторого момента отсчета. Пусть в транспортной сети имеется некоторое базовое расписание движения грузов и перевозящих их транспортных средств на промежуток времени  $[0, \bar{t}]$ , где  $\bar{t}$  – некоторое число.

Такое расписание можно представить в виде функции  $F_{\text{общ}} : V' \times [0, \bar{t}] \rightarrow \{0, 1\}$ :

$$F_{\text{общ}}(e, t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{ребро (графа } G) \text{ с номером } e \\ & \text{свободно для движения в момент времени } t, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases}$$

характеризующую занятость ребра графа для движения в момент времени  $t$ . При этом транспортное средство может двигаться отдельно от груза.

Для управления движением сформируем множество  $\mathcal{T}_e$ , состоящее из левой и правой границ интервалов времени, когда ребро с номером  $e$  свободно для движения в рамках действующего расписания. С помощью множества  $\mathcal{T}_e$  выделим моменты времени, в которые ребро с номером  $e$  свободно. Упорядочим элементы множества  $\mathcal{T}_e$  по возрастанию, составим из них вектор  $\tau_e$ . Пусть

$$\dim \tau_e = 2I_e,$$

где  $I_e$  – количество промежутков времени, когда ребро с номером  $e$  свободно для движения.

## 2.2. Управление движением в транспортной сети

### 2.2.1. Формирование расписания движения

#### 2.2.1.1. Система ограничений, задающая движение по графу транспортной сети

Пусть требуется встроить в действующее расписание груз/транспортное средство со следующими характеристиками:

- номер ребра  $e_0$  графа  $G$ , на котором начинается движение;
- номер ребра  $e_T$  графа  $G$ , на котором заканчивается движение/происходит выход из транспортной сети;
- средняя скорость груза/транспортного средства по транспортной сети  $v_{\text{ср}}$ ;
- время  $t_{\text{приб}}$  прибытия на ребро  $e_0$ ;
- время  $t_{\text{мин}}$ , не ранее которого нужно закончить движение по ребру  $e_T$ ;

– время  $t_{\max} \in [0, \bar{t}]$ , не позднее которого нужно закончить движение по ребру  $e_T$ .

Рассмотрим некоторое количество путей (называемых в дальнейшем маршрутами) в графе  $G'$  из вершины  $e_0$  в вершину  $e_T$ , т.е. последовательностей вершин графа  $G'$ , упорядоченных по порядку следования груза через транспортную сеть. Пусть общее количество таких последовательностей равно  $L$ . Составим из этих последовательностей множество  $\mathcal{E}$ . Произвольный элемент  $E_l$  множества  $\mathcal{E}$  имеет вид  $E_l = \{e_{0,l}, e_{1,l}, \dots, e_{k,l}, \dots, e_{K_l,l}\}$ , где  $e_{k,l} \in V'$ , причем  $e_{0,l} = e_0$  и  $e_{K_l,l} = e_T$ ,  $k = \overline{1, K_l}$ ,  $l = \overline{1, L}$ .

Пусть  $t_{k,l}$  – момент перехода с вершины с номером  $e_{k-1,l}$  на вершину с номером  $e_{k,l}$  графа  $G'$ ,  $k = \overline{1, K_l}$ . Пусть также  $t_{0,l}$  – время прибытия на вершину с номером  $e_{0,l}$  графа  $G'$ ;  $t_{K_l+1,l}$  – время убытия из вершины с номером  $e_{K_l,l}$  графа  $G'$ . Построим систему ограничений, задающих движение по маршруту  $E_l$  по графу  $G$ , т.е. при некотором фиксированном  $l \in \{1, \dots, L\}$ . Условие физической реализуемости (невозможности проехать любое ребро графа  $G$  за бесконечно малое время) запишем в виде

$$t_{k+1,l} - t_{k,l} \geq \frac{D'(e_{k,l})}{v_{\text{сп}}}, k = \overline{0, K_l}, \quad (2.1)$$

Условие на движение только по свободным ребрам графа  $G$  записывается в виде

$$\forall t \in [t_{k,l}, t_{k+1,l}] F(e_{k,l}, t) = 0, k = \overline{0, K_l},$$

которое эквивалентно ограничениям

$$\int_{t_{k,l}}^{t_{k+1,l}} F_{\text{общ}}(e_{k,l}, t) dt = 0, k = \overline{0, K_l}. \quad (2.2)$$

Также имеют место следующие ограничения на момент окончания движения

$$t_{\min} \leq t_{K_l+1,l} \leq t_{\max}. \quad (2.3)$$

Так как движение начинается в момент времени  $t_{\text{приб}}$ , введем ограничение

$$t_{0,l} = t_{\text{приб}}. \quad (2.4)$$

### 2.2.1.2. Постановка задачи поиска расписания движения и ее сведение к задаче смешанного целочисленного линейного программирования

Для максимизации прибыли от перевозок людей/грузов следует увеличивать объемы перевозок, что можно осуществить, максимально эффективно используя ресурсы транспортной сети. Для этой цели следует максимально быстро освобождать ребра транспортной сети, поэтому в качестве критерия оптимизации выберем минимизацию времени нахождения груза в транспортной сети. Таким образом, задача оптимизации времени прохождения груза через транспортную сеть по маршруту  $E_l$ , имеет вид

$$t_{K_l+1,l} \rightarrow \min_{t_{0,l}, t_{1,l}, \dots, t_{K_l+1,l}} \quad (2.5)$$

при ограничениях (2.1)–(2.4).

Отметим, что непосредственное решение задачи (2.5) при ограничениях (2.1)–(2.4) затруднительно, так как ограничения (2.2) являются нелинейными. В этой связи путем введения целочисленных переменных сведем исходную задачу нелинейного программирования к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Для этого введем новые переменные  $\delta_{k,l}^i$ , равные единице, если движение по ребру с номером  $e_{k,l}$  в рамках маршрута  $E_l$  осуществляется в промежуток времени между  $\tau_{e_{k,l}}^{2i-1}$  и  $\tau_{e_{k,l}}^{2i}$ , и равные нулю, если движение по ребру с номером  $e_{k,l}$  в промежуток времени между  $\tau_{e_{k,l}}^{2i-1}$  и  $\tau_{e_{k,l}}^{2i}$  не осуществляется,  $k = \overline{0, K_l}$ ,  $i = \overline{1, I_{e_{k,l}}}$ . Для того, чтобы начать движение по ребру с номером  $e_{k,l}$  не раньше  $\tau_{e_{k,l}}^{2i-1}$  введем ограничение

$$t_{k,l} \geq \delta_{k,l}^i \tau_{e_{k,l}}^{2i-1}, k = \overline{0, K_l}, i = \overline{1, I_{e_{k,l}}}. \quad (2.6)$$

Чтобы закончить движение по ребру с номером  $e_{k,l}$  не позднее  $\tau_{e_{k,l}}^{2i-1}$  наложим ограничения

$$t_{k+1,l} \leq \delta_{k,l}^i \tau_{e_{k,l}}^{2i} + (1 - \delta_{k,l}^i) t_{\max}, k = \overline{0, K_l}, i = \overline{1, I_{e_{k,l}}}. \quad (2.7)$$

При этом движение по каждому ребру может осуществляться только в один из промежутков свободы этого ребра

$$\sum_{i=1}^{I_{e_{k,l}}} \delta_{k,l}^i = 1, k = \overline{0, K_l}. \quad (2.8)$$

Таким образом, для решения задачи поиска времени движения по маршруту  $E_l$  нужно решить задачу

$$t_{K_l+1,l} \rightarrow \min_{t_{k,l}, t_{K_l+1,l}, \delta_{k,l}^i \in \{0,1\}, k=0, \overline{K_l}, i=1, \overline{I_{e_{k,l}}}} \quad (2.9)$$

при ограничениях (2.1), (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8).

Заметим, что задача (2.9) с ограничениями (2.1)–(2.4), (2.6)–(2.8) является задачей смешанного целочисленного линейного программирования и может быть решена, например, как и ранее, в пакете CPLEX, а, кроме того, VNS-методом [104], доказавшим свою эффективность на ряде практических примеров.

Поскольку задача (2.9) с ограничениями (2.1)–(2.4), (2.6)–(2.8) может не иметь решения, то введем новую величину

$$T_l \triangleq \begin{cases} \text{решение задачи (2.9)} \\ T_l^*, & \text{с ограничениями (2.1)–(2.4), (2.6)–(2.8) существует,} \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$l = \overline{1, L}$ , где  $T_l^*$  – оптимальное значение критерия в задаче (2.9) с ограничениями (2.1)–(2.4), (2.6)–(2.8).

Для решения общей задачи поиска маршрута и времени движения груза и транспортных средств по транспортной сети надо определить

$$\overline{T}^* = \min_{l=1, \dots, L} \overline{T}_l.$$

С использованием величины  $\overline{T}^*$  формируется алгоритм поиска расписания движения груза (транспортного средства) через транспортную сеть. Если  $\overline{T}^*$  конечно, то надо найти  $l$ , при котором  $\overline{T}_l$  будет равно  $\overline{T}^*$ , и использовать полученные времена и маршрут движения груза (транспортного средства). В противном случае, когда  $\overline{T}^*$  бесконечно, груз пропустить через рассматриваемую транспортную сеть невозможно. Подобная процедура по «встраиванию» новых грузов (транспортных средств) в действующее расписание проводится для каждого груза (транспортного средства), который планируется пропустить через транспортную сеть в порядке приоритетности.

При помощи построенной постановки задачи и алгоритма можно составить расписание движения по транспортной сети и когда базового расписания нет. Для поис-

ка результирующего расписания процедура «вставки» производится по одному грузу (транспортному средству).

Заметим, что задача по поиску оптимального маршрута движения дополнительного груза и транспортных средств через станцию может быть распараллелена. А именно для различных  $l$  задача (2.9) с ограничениями (2.1)–(2.4), (2.6)–(2.8) может быть решена на различных ядрах процессора/на различных компьютерах. При этом сами маршруты движения по графу могут быть определены заранее с использованием теории графов. Это позволяет сократить время поиска оптимального маршрута движения дополнительных грузов (транспортных средств) через транспортную сеть.

### 2.2.2. Постановка и решение задачи назначения «технологического окна»

#### 2.2.2.1. Дополнительные обозначения и предположения

Пусть граф сети в течение рассматриваемых суток пересекают  $P$  грузов. Отсортируем эти грузы по порядку их прибытия в транспортную сеть. Для каждого из этих грузов можно априорно указать функцию  $F_p : V' \times [0, \bar{t}] \rightarrow \{0, 1\}$ , характеризующую занятость ребра графа  $G$   $p$ -м грузом (и при наличии его старым и новым транспортным средствами) в момент времени  $t$

$$F_p(e, t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{ребро (графа } G) \text{ с номером } e \text{ не занято} \\ & p\text{-м грузом в момент времени } t, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что по определению справедливо неравенство

$$\forall e \in V' \forall t \in [0, \bar{t}] \sum_{p=1}^P F_p(e, t) \leq F_{\text{общ}}(e, t).$$

#### 2.2.2.2. Постановки задач

Рассмотрим задачу по установлению «технологического окна», то есть промежутка времени, когда некоторый набор ребер  $\mathcal{J} = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_K\}$ , где  $j_k \in V'$ , закрывается для движения с целью проведения технологических работ.

Вначале рассмотрим случай поиска промежутка времени  $(t_1^*, t_2^*)$  максимальной длительности  $\Delta_{\text{макс}} \triangleq t_2^* - t_1^*$ , в который все ребра, входящие в набор  $J$ , свободны от

движения. В этом случае  $\forall j_k \in \mathcal{J}$  должно выполняться условие

$$F_{\text{общ}}(j_k, t) = 0 \quad \forall t \in (t_1^*, t_2^*),$$

которое иначе можно записать как

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} F_{\text{общ}}(j_k, t) dt = 0.$$

А задача по поиску искомого промежутка времени имеет вид

$$t_2 - t_1 \rightarrow \max_{t_1, t_2} \quad (2.10)$$

при ограничениях

$$\forall j_k \in \mathcal{J} \quad \int_{t_1}^{t_2} F_{\text{общ}}(j_k, t) dt = 0, \quad (2.11)$$

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \bar{t}. \quad (2.12)$$

Отметим, что решение задачи (2.10) при ограничениях (2.11)–(2.12) может не существовать. Этот случай возможен, когда нет промежутка времени, в который все ребра одновременно свободны. Если решение задачи (2.10) при ограничениях (2.11)–(2.12) существует, тогда  $t_1^*$  и  $t_2^*$  определяются как решение этой задачи. Однако задача (2.10) при ограничениях (2.11)–(2.12) является задачей нелинейного программирования, что приводит к затруднениям в получении решения. Поэтому путем введения целочисленных переменных сведем эту задачу к задаче смешанного целочисленного программирования.

Введем новые переменные  $\delta_{j_k}^i$ , равные единице, если промежуток времени  $[t_1, t_2]$  для ребра с номером  $j_k$  будет находиться целиком внутри  $[\tau_{j_k}^{2i-1}, \tau_{j_k}^{2i}]$ , и равные нулю в ином случае,  $k = \overline{1, K}$ ,  $i = \overline{1, I_{j_k}}$ . С учетом новых переменных  $\delta_{j_k}^i$  задача (2.10) при ограничениях (2.11)–(2.12) эквивалентным образом сводится к задаче

$$t_2 - t_1 \rightarrow \max_{t_1, t_2, \delta_{j_1}^1, \dots, \delta_{j_1}^{I_{j_1}}, \dots, \delta_{j_K}^1, \dots, \delta_{j_K}^{I_{j_K}}} \quad (2.13)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{I_{j_k}} \delta_{j_k}^i = 1, k = \overline{1, K}, \quad (2.14)$$

$$t_2 \leq \delta_{jk}^i \tau_{jk}^{2i} + (1 - \delta_{jk}^i) \bar{t}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, I_{jk}}, \quad (2.15)$$

$$t_1 \geq \delta_{jk}^i \tau_{jk}^{2i-1}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, I_{jk}}, \quad (2.16)$$

$$\delta_{jk}^i \in \{0, 1\}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, I_{jk}}, \quad (2.17)$$

$$t_1 \leq t_2. \quad (2.18)$$

Ограничения (2.14)–(2.16) гарантируют, что для каждого ребра промежуток времени  $(t_1, t_2)$  целиком находится в одном из интервалов времени, когда это ребро свободна от движения. При этом верхняя и нижняя границы времени окна не выходит за границы рассматриваемых суток.

Нередко промежуток времени  $(t_1^*, t_2^*)$  недостаточен с точки зрения его длины или технологическое окно нужно назначить во время, в которые ребра из набора  $\mathcal{J}$  могут быть заняты, поэтому приходится, назначая «технологическое окно», переносить движение на другие пути (ребра). С этой целью рассмотрим задачу поиска промежутка времени  $(\hat{t}_1^*, \hat{t}_2^*)$  длительностью не меньше заданного параметра  $\Delta$ , в который движение наименее интенсивно. Под интенсивностью здесь будем понимать суммарное по всем ребрам количество интервалов времени, когда эти ребра заняты внутри предполагаемого «технологического окна».

Если некоторое подмножество ребер из набора  $\mathcal{J}$  свободно от движения в течение рассматриваемых суток, то исключим это подмножество из набора  $\mathcal{J}$ , сформировав новый набор ребер  $\hat{\mathcal{J}}$ . Пусть в этом наборе стало  $\hat{K}$  ребер и  $\hat{\mathcal{J}} = \{j_{(1)}, \dots, j_{(k)}, \dots, j_{(\hat{K})}\}$ .

Используя функцию  $F_{\text{общ}}(e, t)$ , сформируем множество  $\hat{\mathcal{T}}_k$ , состоящее из левой и правой границ отрезков времени, когда ребро с номером  $j_{(k)}$  будет занято грузами и транспортными средствами,  $k = \overline{1, \hat{K}}$ . С помощью множества  $\hat{\mathcal{T}}_k$  можно определить интервалы времени, в которые ребро с номером  $j_{(k)}$  занято. Упорядочив элементы множества  $\hat{\mathcal{T}}_k$  по возрастанию, составим из них вектор  $\hat{\tau}_k$ , Пусть

$$\mathbf{dim} \hat{\tau}_k = 2\hat{I}_k,$$

где  $\hat{I}_k$  – количество таких отрезков времени, когда  $j_{(k)}$  занято.

Введем новые бинарные переменные  $\hat{\delta}_k^i$ , равенство нулю которых означает, что пересечение промежутка времени  $[t_1, t_2]$  с отрезком  $[\hat{\tau}_k^{2i-1}, \hat{\tau}_k^{2i}]$  состоит из максимум одной точки,  $k = \overline{1, \hat{K}}, i = \overline{1, \hat{I}_k}$ . Переменная  $\hat{\delta}_k^i$  может быть равна нулю либо когда

$t_1 \geq \hat{\tau}_k^{2i}$ , либо когда  $t_2 \leq \hat{\tau}_k^{2i-1}$ . В этой связи введем вспомогательные бинарные переменные  $\gamma_k^i, \varkappa_k^i$ . Переменная  $\gamma_k^i$  равна нулю, только если  $t_1 \geq \hat{\tau}_k^{2i}$ . Переменная  $\varkappa_k^i$  равна нулю, только если  $t_2 \leq \hat{\tau}_k^{2i-1}$ . С использованием переменных  $\gamma_k^i, \varkappa_k^i$  задача по нахождению промежутка времени длительностью, не менее заданной, при котором ребра из набора  $\hat{\mathcal{J}}$  занимают наименьшее количество раз, принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\hat{K}} \sum_{i=1}^{\hat{I}_k} \hat{\delta}_k^i \rightarrow \min_{t_1, t_2, \hat{\delta}_k^i, \gamma_k^i, \varkappa_k^i, k=1, \hat{K}, i=1, \hat{I}_k} \quad (2.19)$$

$$t_2 - t_1 \geq \Delta, \quad (2.20)$$

$$t_1 \geq (1 - \gamma_k^i) \hat{\tau}_k^{2i}, k = 1, \hat{K}, i = 1, \hat{I}_k, \quad (2.21)$$

$$t_2 \leq (1 - \varkappa_k^i) \hat{\tau}_k^{2i-1} + \bar{t} \varkappa_k^i, k = 1, \hat{K}, i = 1, \hat{I}_k, \quad (2.22)$$

$$\hat{\delta}_k^i \geq \gamma_k^i + \varkappa_k^i - 1, k = 1, \hat{K}, i = 1, \hat{I}_k, \quad (2.23)$$

$$\hat{\delta}_k^i \in \{0, 1\}, \gamma_k^i \in \{0, 1\}, \varkappa_k^i \in \{0, 1\}, k = 1, \hat{K}, i = 1, \hat{I}_k. \quad (2.24)$$

Ограничение (2.20) гарантирует, что длительность получаемого промежутка  $(\hat{t}_1^*, \hat{t}_2^*)$  будет не менее наперед заданной величины  $\Delta$ . Ограничения (2.21)–(2.22) нужны для проверки выполнения условий  $t_1 \geq \hat{\tau}_k^{2i}$  и  $t_2 \leq \hat{\tau}_k^{2i-1}$ . Ограничение (2.23) гарантирует, что если либо  $\varkappa_k^i$ , либо  $\gamma_k^i$  равно нулю, то и  $\hat{\delta}_k^i$  будет равно нулю вследствие ограничений (2.24) и вида оптимизируемой функции. Если же обе эти переменные будут равны единице, то и  $\hat{\delta}_k^i$  будет равно единице.

Заметим, что в отличие от задачи (2.13) при ограничениях (2.14)–(2.18) задача (2.19) при ограничениях (2.20)–(2.24) всегда имеет решение. Отметим, что задача (2.13) при ограничениях (2.14)–(2.18) и задача (2.19) при ограничениях (2.20)–(2.24) являются в некотором смысле взаимнообратными. В задаче находится длина промежутка времени, когда все рассматриваемые ребра свободны, а в задаче длина промежутка времени полагается фиксированной, а внутри этого промежутка ребра могут быть заняты грузами. При этом решать задачу (2.19) при ограничениях (2.20)–(2.24) имеет смысл только когда  $\Delta_{\max} < \Delta$ .

Отметим, что решение задачи (2.19) при ограничениях (2.20)–(2.24) может оказаться неединственным. Поэтому выберем из всех решений этой задачи наилучшее с точки зрения максимума длины промежутка времени, при котором нужно переносить

движение с ребер входящих в набор  $\mathcal{J}$  только  $\hat{f}^*$  раз, где  $\hat{f}^*$  – оптимальное значение критерия в задаче (2.19) при ограничениях (2.20)–(2.24). Таким образом, потенциальное технологическое окно может быть увеличено, а дополнительных переносов движения не возникнет. Для этого нужно решить задачу

$$t_2 - t_1 \rightarrow \max_{t_1, t_2, \delta_k^i, \gamma_k^i, \alpha_k^i, k=1, \hat{K}, i=1, \hat{I}_k} \quad (2.25)$$

с ограничениями (2.20)–(2.24) и дополнительным ограничением

$$\sum_{k=1}^{\hat{K}} \sum_{i=1}^{\hat{I}_k} \delta_k^i = \hat{f}^*. \quad (2.26)$$

При решении задачи (2.25) при ограничениях (2.20)–(2.24), (2.26) устанавливаются искомые  $\hat{t}_1^*$  и  $\hat{t}_2^*$ .

Также можно предложить другое толкование интенсивности движения. Под интенсивностью можно понимать количество грузов, которые придется перенести либо на соседние свободные ребра или просто принять позже вследствие назначения «технологического окна». В этой связи рассмотрим задачу поиска промежутка времени  $(\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*)$ , не меньше заданной длительности  $\Delta$ , в который заданный набор ребер  $\mathcal{J} = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_K\}$ , где  $j_k \in V'$ , был бы занят наименьшим количеством грузов. Если какие-то грузы не занимают ни одно из ребер набора  $\mathcal{J}$ , исключим их из рассмотрения, и перенумеруем оставшиеся согласно порядку прибытия в рассматриваемую транспортную сеть. Пусть после такого исключения осталось  $\tilde{P} \geq 1$  грузов. Для  $p$ -го груза рассматриваются только те ребра из маршрута его следования по графу сети, которые входят в набор  $\mathcal{J}$ , а остальные исключим из рассмотрения. Пусть после исключения таких ребер осталось  $\tilde{K}_p$  штук. Из оставшихся ребер составляется новый набор  $\tilde{\mathcal{J}}_p = \{j_{(1)}^p, \dots, j_{(k)}^p, \dots, j_{(\tilde{K}_p)}^p\}$ . Для каждого из ребер, входящих в набор  $\tilde{\mathcal{J}}_p$ , используя функцию  $F_p(j, t)$ , формируется множество  $\tilde{\mathcal{T}}_{p,k}$ , состоящее из левой и правой границ интервалов времени, когда ребро с номером  $j_{(k)}^p$  будет занято грузом с номером  $p$ ,  $k = \overline{1, \tilde{K}_p}$ . С помощью множества  $\tilde{\mathcal{T}}_{p,k}$  можно определить интервалы времени, в которые ребро с номером  $j_k$  занято грузом с номером  $p$ . Упорядочив элементы множества  $\tilde{\mathcal{T}}_{p,k}$  по возрастанию, из них составляется вектор  $\tilde{\tau}_{p,k}$ . Предполагается,

$$\dim \tilde{\tau}_{p,k} = 2\tilde{I}_{p,k},$$

где  $\tilde{I}_{p,k}$  – количество таких интервалов.

Введем бинарные переменные  $\tilde{\delta}_p$ , равенство которых нулю означает, что грузу с номером  $p$  не нужно менять маршрут движения,  $p = \overline{1, \tilde{P}}$ . Также введем новые бинарные переменные  $\tilde{\delta}_{p,k}^i$ , равенство нулю которых означает, что пересечение промежутка времени  $[t_1, t_2]$  с отрезком  $[\tilde{\tau}_{p,k}^{2i-1}, \tilde{\tau}_{p,k}^{2i}]$  состоит из максимум одной точки,  $p = \overline{1, \tilde{P}}$ ,  $k = \overline{1, \tilde{K}_p}$ ,  $i = \overline{1, \tilde{I}_{p,k}}$ . Для того, чтобы переменная  $\tilde{\delta}_{p,k}^i$  была равна нулю, нужно выполнение либо  $t_1 \geq \tilde{\tau}_{p,k}^{2i}$ , либо  $t_2 \leq \tilde{\tau}_{p,k}^{2i-1}$ . В этой связи вводятся дополнительные бинарные переменные  $\gamma_{p,k}^i$ ,  $\alpha_{p,k}^i$ . Переменная  $\gamma_{p,k}^i$  равна нулю, только если  $t_1 \geq \tilde{\tau}_{p,k}^{2i}$ . Переменная  $\alpha_{p,k}^i$  равна нулю, только если  $t_2 \leq \tilde{\tau}_{p,k}^{2i-1}$ . С использованием введенных переменных отмечается, что задача по поиску промежутка времени  $(\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*)$ , не меньше заданной длительности  $\Delta$ , в который заданный набор ребер  $J = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_K\}$ , где  $j_k \in V'$ , был бы занят наименьшим количеством грузов, принимает вид

$$\sum_{p=1}^{\tilde{P}} \tilde{\delta}_p \rightarrow \min_{t_1, t_2, \tilde{\delta}_p, \tilde{\delta}_{p,k}^i, \gamma_{p,k}^i, \alpha_{p,k}^i, p=\overline{1, \tilde{P}}, k=\overline{1, \tilde{K}_p}, i=\overline{1, \tilde{I}_{p,k}}} \quad (2.27)$$

$$t_2 - t_1 \geq \Delta, \quad (2.28)$$

$$t_1 \geq (1 - \gamma_{p,k}^i) \tilde{\tau}_{p,k}^{2i}, p = \overline{1, \tilde{P}}, k = \overline{1, \tilde{K}_p}, i = \overline{1, \tilde{I}_{p,k}}, \quad (2.29)$$

$$t_2 \leq (1 - \alpha_{p,k}^i) \tilde{\tau}_{p,k}^{2i-1} + t \alpha_{p,k}^i, p = \overline{1, \tilde{P}}, k = \overline{1, \tilde{K}_p}, i = \overline{1, \tilde{I}_{p,k}}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{\delta}_{p,k}^i \geq \gamma_{p,k}^i + \alpha_{p,k}^i - 1, p = \overline{1, \tilde{P}}, k = \overline{1, \tilde{K}_p}, i = \overline{1, \tilde{I}_{p,k}}, \quad (2.31)$$

$$\tilde{\delta}_p \geq \frac{\sum_{k=1}^{\tilde{K}_p} \sum_{i=1}^{\tilde{I}_{p,k}} \tilde{\delta}_{p,k}^i}{\sum_{k=1}^{\tilde{K}_p} \tilde{I}_{p,k}}, p = \overline{1, \tilde{P}}, \quad (2.32)$$

$$\tilde{\delta}_p \in \{0, 1\}, \tilde{\delta}_{p,k}^i \in \{0, 1\}, \gamma_{p,k}^i \in \{0, 1\}, \alpha_{p,k}^i \in \{0, 1\}, p = \overline{1, \tilde{P}}, k = \overline{1, \tilde{K}_p}, i = \overline{1, \tilde{I}_{p,k}}. \quad (2.33)$$

Ключевыми ограничениями в задаче (2.27) при ограничениях (2.28)–(2.33) являются ограничения (2.32). Эти ограничения нужны для того, чтобы определить нужно ли переносить груз с номером  $p$ . Прежде всего отметим, что по постановке задачи

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\tilde{K}_p} \sum_{i=1}^{\tilde{I}_{p,k}} \tilde{\delta}_{p,k}^i \leq \sum_{k=1}^{\tilde{K}_p} \tilde{I}_{p,k}.$$

При этом если в промежуток времени  $(t_1, t_2)$  хотя бы одно ребро, попадающее в набор ребер  $\mathcal{J}$ , из маршрута следования пассажирского/грузового поезда с номером  $p$  будет занято, то хотя бы одна переменная  $\tilde{\delta}_{p,k}^i$  будет равна единице, а значит,

$$\tilde{\delta}_p \geq \frac{\sum_{k=1}^{\tilde{K}_p} \sum_{i=1}^{\tilde{I}_{p,k}} \tilde{\delta}_{p,k}^i}{\sum_{k=1}^{\tilde{K}_p} \tilde{I}_{p,k}} > 0,$$

что приводит к тому, что  $\tilde{\delta}_p = 1$  вследствие ограничений (2.33). Ограничения (2.29)–(2.31) похожи на ограничения (2.21)–(2.23) с той лишь разницей, что ограничения (2.29)–(2.31) указывают на свободу или занятость некоторого ребра конкретным грузом в промежуток времени  $(t_1, t_2)$ , а ограничения (2.21)–(2.23) указывают на свободу или занятость некоторого ребра всеми грузами и отдельными транспортными средствами, пересекающими станцию, в промежуток времени  $(t_1, t_2)$ .

Так как решение задачи (2.27) при ограничениях (2.28)–(2.33) может оказаться неединственным, выберем из всех решений этой задачи наилучшее с точки зрения максимума длины промежутка времени, при котором нужно изменять маршрут следования только  $\tilde{f}^*$  раз, где  $\tilde{f}^*$  – оптимальное значение критерия в задаче (2.27) при ограничениях (2.28)–(2.33). Для этого решим задачу

$$t_2 - t_1 \rightarrow \max_{t_1, t_2, \tilde{\delta}_p, \tilde{\delta}_{p,k}^i, \gamma_{p,k}^i, \alpha_{p,k}^i, p=1, \tilde{P}, k=1, \tilde{K}_p, i=1, \tilde{I}_{p,k}} \quad (2.34)$$

с ограничениями (2.28)–(2.33) и дополнительным ограничением

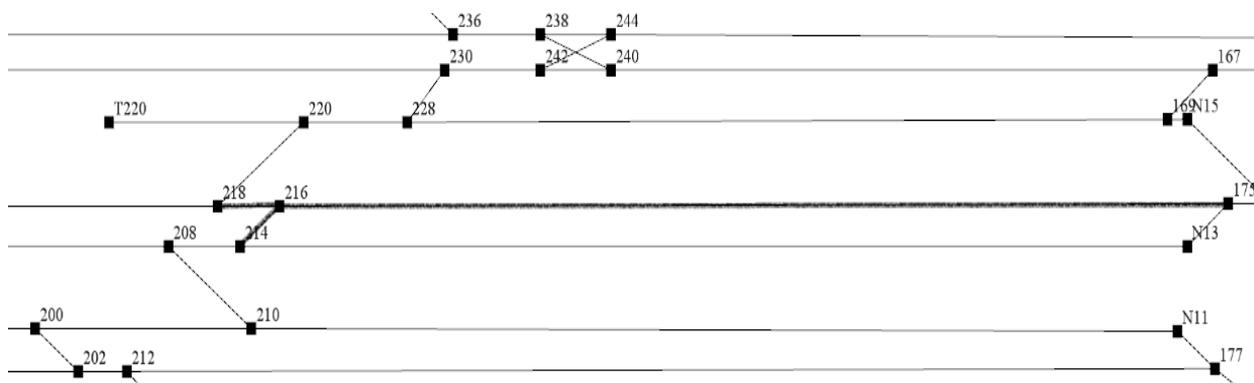
$$\sum_{p=1}^{\tilde{P}} \tilde{\delta}_p = \tilde{f}^*. \quad (2.35)$$

При решении задачи (2.34) при ограничениях (2.28)–(2.33), (2.35) устанавливаются искомые  $\tilde{t}_1^*$  и  $\tilde{t}_2^*$ .

### 2.2.2.3. Пример

Рассмотрим на некоторой железнодорожной станции, часть которой представлена на рисунке 2.1, некоторый набор ребер (путей), подлежащий закрытию для несрочного ремонта. Выберем  $\bar{t} = 86400$ , где 86400 – число секунд в сутках.

Рисунок 2.1. Схема части станции с подлежащими несрочному ремонту участками пути (набору ребер), выделенным жирным.



Пусть эти ребра заняты согласно таблице 2.1.

Таблица 2.1. Время занятости ребер поездами.

Ребро	Занятость ребра							
	С-по	№	С-по	№	С-по	№	С-по	№
216 ↔ 218	2283-2327	331	19743-19787	59	25503-25547	455	30339-30778	
	33360-33389		34224-34266	360	34328-34357		37884-37926	478
	41314-41343		43983-44027	399	50004-50046	130	55973-56015	241
	66783-66827	87	72783-72827	97	81293-81322		81352-81381	
214 ↔ 216	30088-30127	122	31021-31049		33333-33360		34300-34328	
	34950-34977		35221-35248		41287-41314		41387-41414	
	48259-50698		50941-50969		68053-70978		71221-71249	
	74564-74591		75412-75439		83775-83802			
216 ↔ 175	83-2283	331	16343-19743	59	22858-22979		22980-25503	455
	30127-33639	122	34266-36939	360	37926-40500	478	41414-41658	
	41783-43983	399	50046-52599	130	53663-55973	241	63983-66783	87
	68480-72783	97	74591-74835		75168-75412		81049-81293	
	81381-83268		83531-83775					

В таблице 2.1 в столбце «№» представлен номер пассажирского/грузового поезда, занимающего ребро, указанное в столбце «Ребро», в отрезок времени, находящийся в столбце «с-по». Если номер отсутствует, это означает, что ребро занято не пассажирским/грузовым поездом, а, например, маневровым локомотивом.

При указанных в таблице 2.1 данных решением задачи (2.13) при ограничениях (2.14)–(2.18) являются  $t_1^* = 2327$  и  $t_2^* = 16343$ .

Теперь проанализируем решения других поставленных задач в зависимости от параметра  $\Delta$ .

Таблица 2.2. Оптимальные промежутки времени для назначения технологического окна.

$\Delta$	$\hat{f}^*$	$(\hat{t}_1^*, \hat{t}_2^*)$	$\tilde{f}^*$	$(\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*)$
18000	2	(2327, 22858)	1	(2327, 22980)
21600	4	(2327, 25503)	2	(56015, 86400)
36000	16	(44027, 81049)	4	(44027, 86400)
43200	24	(41658, 86400)	5	(40500, 86400)

Как следует из таблицы 2.2, оптимальные промежутки времени, порождаемые задачей (2.25) при ограничениях (2.20)–(2.24), (2.26) и задачей (2.34) при ограничениях (2.28)–(2.33), (2.35) могут отличаться, а могут частично совпадать. При этом, как и следовало ожидать, с ростом параметра  $\Delta$  оптимальные значения соответствующих критериальных функций растут.

### 2.3. Основные результаты главы 2

1. В виде линейных ограничений и неравенств, содержащих целочисленные и непрерывные переменные, разработана система ограничений, задающая движение в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами.

2. С использованием построенной системы ограничений задача оптимизации движения в транспортной сети с нефиксированным временем движения между вершинами сформулирована в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования.

3. Разработан ряд критериев оптимальности для задачи назначения «технологического окна» в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами, которая сформулирована в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования.

4. Разработаны алгоритмы поиска расписания движения и промежутка времени для закрытия части ребер в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами, основанные на решении ряда задач смешанного целочисленного линейного программирования.

**Основные результаты главы опубликованы в [2, 7, 113].**

### **3. Математические методы для решения задач управления надежностью в транспортных системах**

В разделе 3.1 рассматриваются теоретические аспекты управления надежностью, в частности, формулируются постановки задач с критерием в форме математического ожидания и вероятности для рационального управления профилактическими работами. В разделе 3.2 исследуется задача оценивания распределения количества подвижных единиц в сходе с рельсов в зависимости от различных факторов движения, для решения которой предлагается использовать отрицательное биномиальное распределение. В разделе 3.3 рассматривается задача оценивания вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции. В разделе 3.4 исследуется задача по распределению ресурсов в транспортной сети (в частности, в сети железнодорожных переездов) для увеличения надежности по вероятностному и квантильному критериям.

#### **3.1. Теоретические аспекты управления надежностью**

Рассмотрим задачу по управлению надежностью (безопасностью) движения. Для этого рассмотрим некоторый неблагоприятный фактор, влияющий на вероятность возникновения некоторого транспортного происшествия.

##### **3.1.1. Основные обозначения и предположения**

Пусть  $A$  – транспортное происшествие (например, на железной дороге),  $\mathcal{P}(A)$  – вероятность его возникновения, а  $c$  – стоимость ущерба, возникающего при появлении этого события  $A$ , которая считается известной. Предположим, что существует некий фактор, влияющий на вероятность возникновения транспортного происшествия. Например, если исследуются происшествия на железнодорожном транспорте, то к таким факторам можно отнести число вагонов в железнодорожном составе или же модуль отклонения от номинального размера ширины колеи между внутренними гранями головок рельсов на прямых участках пути. Пусть значения этого фактора дискретны и равны  $f_1, f_2, \dots, f_N$ . Будем предполагать, что числа  $f_1, f_2, \dots, f_N$  упорядочены по возрастанию. Пусть также известны условные вероятности осуществления события  $A$

если значение фактора равно  $f_1, f_2, \dots, f_N$ . Предположим также, что эти условные вероятности растут со значением фактора. Будем предполагать, что в некоторый момент времени реализовалось то или иное значение исследуемого фактора. Значение этого фактора, а вместе и связанную с ним условную вероятность осуществления в дальнейшем транспортного происшествия, предполагается возможным понизить до некоторого уровня. Это понижение в дальнейшем будем называть *профилактикой*. Введем две случайные величины  $F_-$  – значение фактора до профилактики, и  $F_+(k)$  – значение фактора после профилактики, которая заключается в уменьшении его максимального значения до уровня  $f_k$ .

Согласно введенным предположениям безусловные законы распределения случайных величин имеют вид, представленный в таблицах 3.1 и 3.2,

Таблица 3.1. Ряд распределения случайной величины  $F_-$

$F_-$	$f_1$	$f_2$	$\dots$	$f_i$	$f_{i+1}$	$\dots$	$f_N$
$\mathcal{P}$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_i$	$p_{i+1}$	$\dots$	$p_N$

Таблица 3.2. Ряд распределения случайной величины  $F_+(k)$

$F_+(k)$	$f_1$	$f_2$	$\dots$	$f_k$
$\mathcal{P}$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k^k$

где  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ , а

$$p_k^k \triangleq p_k + p_{k+1} + \dots + p_N.$$

Введем случайную величину

$$\Phi(k) = c_E + C_F^k + C_A^k, \tag{3.1}$$

которая характеризует потери, если уменьшение значения фактора проводится до уровня  $f_k, k = \overline{1, N}$ . В (3.1)  $C_F^k$  – случайные расходы, связанные с изменением значения фактора, а  $C_A^k$  – случайные потери, связанные с возможным наступлением события  $A$ , в случае если уменьшение значения фактора проводится до уровня  $f_k, c_E$  – детерминированные расходы на эксплуатацию системы по наблюдению за фактором и поддержание системы изменения значений фактора. Случайность  $C_F^k$  вызвана случайностью  $F_-$ . Ряд распределения случайной величины  $C_F^k$  представлен в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Ряд распределения случайной величины  $C_F^k$

$C_F^k$	$c_1^k$	$c_2^k$	$\dots$	$c_i^k$	$c_{i+1}^k$	$\dots$	$c_N^k$
$\mathcal{P}$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_i$	$p_{i+1}$	$\dots$	$p_N$

Заметим, что величины  $c_i^k = 0$  при  $i \leq k$ , так как профилактика не проводится, если значение фактора  $f_i$  не больше  $f_k$ ,  $i \leq k$ . Если бы мы все-таки при  $i \leq k$  привели значение фактора к уровню  $f_k$ , то вероятность транспортного происшествия при этом лишь увеличилась бы, так же, как и дополнительные финансовые средства.

Заметим также, что вероятность случайного события  $A$  после профилактики изменится. Ряд распределения ущерба  $C_A^k$  после профилактики примет вид

Таблица 3.4. Ряд распределения случайной величины  $C_A^k$

$C_A^k$	0	$c$
$\mathcal{P}$	$1 - \mathcal{P}_k(A)$	$\mathcal{P}_k(A)$

где  $\mathcal{P}_k(A)$  – условная вероятность события  $A$  после профилактики, когда фактор приведен к уровню  $f_k$ . Эта вероятность может быть вычислена по формуле полной вероятности

$$\mathcal{P}_k(A) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{P}(A|F_+ = f_i)p_i + \mathcal{P}(A|F_+ = f_k) \sum_{i=k}^N p_i, k = 1, \dots, N,$$

так как при  $i \leq k$  профилактика не проводится, а при  $i > k$  значения фактора при осуществлении профилактики приводятся к уровню  $f_k$ .

Отметим, что рассматривается упрощенный вариант, когда при возникновении неблагоприятного события ущерб является фиксированным (неслучайным).

Возникает вопрос, после какого значения дальнейшее изменение (уменьшение) величины фактора нецелесообразно. Иными словами, какое  $k$  следует выбрать. Далее рассмотрим различные постановки задачи для определения искомого уровня.

### 3.1.2. Критерий в форме математического ожидания

В связи с вышесказанным средние суммарные затраты в случае использования системы мониторинга с профилактикой составят

$$\bar{\Phi}(k) = c_E + \mathbf{M} [C_F^k] + \mathbf{M} [C_A^k] =$$

$$= c_E + \sum_{i=k+1}^N c_i^k p_i + c \left( \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{P}(A|F_+ = f_i) p_i + \mathcal{P}(A|F_+ = f_k) \sum_{i=k}^N p_i \right).$$

Поставим задачу найти такой номер  $k_*$  значения  $f_k$  фактора, при котором средние расходы минимальны:

$$k_* = \arg \min_{1 \leq k \leq N} \bar{\Phi}(k). \quad (3.2)$$

Заметим, что, если  $\bar{\Phi}(k_*) \leq \bar{L} \triangleq c\mathcal{P}(A)$ , систему мониторинга с профилактикой следует признать полезной. В противном случае мониторинг и профилактику проводить нецелесообразно.

### 3.1.3. Критерий в форме вероятности

Необходимо отметить, что в задаче (3.2) минимизируются лишь средние потери. При этом вероятность того, что затраты на систему мониторинга окупятся, может оказаться очень маленькой. Рассмотрим вероятностную постановку задачи мониторинга, то есть оценим вероятность

$$P_{\bar{L}}(k) \triangleq \mathcal{P} \{ \Phi(k) \leq \bar{L} \} \quad (3.3)$$

такого события, при котором затраты на проведение мониторинга с профилактикой не превысят средние затраты без мониторинга. Сформулируем задачу

$$k_{\bar{L}} = \arg \max_{1 \leq k \leq N} P_{\bar{L}}(k), \quad (3.4)$$

закключающуюся в том, чтобы найти оптимальный номер  $k_{\bar{L}}$  уровня  $f_k$  фактора, при котором рассматриваемая вероятность (3.3) максимальна. Для этой цели построим ряд распределения случайной величины суммарных затрат  $\Phi(k)$ , предварительно отметив, что набор значений этой случайной величины является конечным и состоит из  $c_E$ ,  $c_E + c_i^k$ ,  $c_E + c$ ,  $c_E + c_i^k + c$ , где  $i = k+1, \dots, N$ . Значение  $c_E$  получается, если профилактика не проводится и, кроме того, событие  $A$  не происходит. Значение  $c_E + c$  получается, если профилактика не проводится, и событие  $A$  происходит. Профилактика не проводится, когда  $i \leq k$ , то есть, когда  $F_- \leq f_k$ . Поэтому

$$\mathcal{P}\{\Phi(k) = c_E\} = \mathcal{P}(\bar{A} \cdot \{F_- \leq f_k\}) = \sum_{j=1}^k (1 - \mathcal{P}(A|F_+ = f_j)) p_j,$$

$$\mathcal{P}\{\Phi(k) = c_E + c\} = \mathcal{P}(A \cdot \{F_- \leq f_k\}) = \sum_{j=1}^k \mathcal{P}(A|F_+ = f_j) p_j.$$

Значения  $c_E + c_i^k$  получаются, если событие  $A$  не происходит, а профилактика проводится, при которой фактор понижается с уровня  $f_i$  до уровня  $f_k$ ,  $i > k$ . Значение  $c_E + c_i^k + c$  получается, если событие  $A$  происходит после профилактики. И так как  $\mathcal{P}\{C_F^k = c_i^k\} = \mathcal{P}\{F_- = f_i\} = p_i$ , то

$$\mathcal{P}\{\Phi(k) = c_E + c_i^k\} = (1 - \mathcal{P}(A|F_+ = f_k))p_i, i = k + 1, \dots, N,$$

$$\mathcal{P}\{\Phi(k) = c_E + c_i^k + c\} = \mathcal{P}(A|F_+ = f_k)p_i, i = k + 1, \dots, N.$$

Таким образом, получаем ряд распределения, представленный в таблице 3.5.

Таблица 3.5. Ряд распределения случайной величины  $\Phi(k)$

$\Phi(k)$	$c_E$	$c_E + c_i^k$	$c_E + c$	$c_E + c_i^k + c$
$\mathcal{P}$	$\sum_{j=1}^k (1 - \mathcal{P}(A F_+ = f_j))p_j$	$(1 - \mathcal{P}(A F_+ = f_k))p_i$	$\sum_{j=1}^k \mathcal{P}(A F_+ = f_j)p_j$	$\mathcal{P}(A F_+ = f_k)p_i$

На основе полученного ряда распределения можно найти вероятность  $P_{\bar{L}}(k)$ . Решая задачу (3.3), можно найти такой номер  $k_{\bar{L}}$  значения  $f_k$  фактора, при котором максимальна вероятность такого события, при котором случайные затраты  $\Phi(k)$  при профилактике окажутся не больше величины средних потерь  $\bar{L}$  при транспортном происшествии без проведения мониторинга.

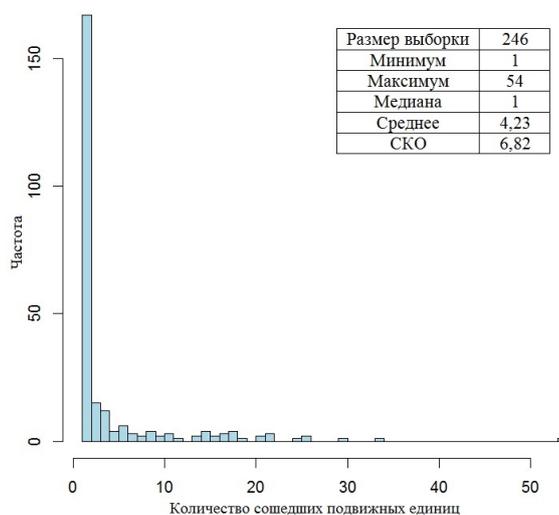
### 3.2. Математические методы для прогнозирования последствий схода с рельсов подвижных единиц грузовых поездов

#### 3.2.1. Предварительный анализ данных

Вначале построим диаграмму частот количества подвижных единиц (под которыми понимаются вагоны и секции локомотивов) в сходе, а также найдем описательные статистики количества подвижных единиц в сходе<sup>2</sup>. Данные о сходах с рельсов можно найти на сайте <http://scbist.com/>.

<sup>2</sup>Здесь и далее под среднеквадратичным отклонением понимается квадратный корень из несмещенной выборочной дисперсии

Рисунок 3.1. Диаграмма частот и описательные статистики количества вагонов в сходе при сходе с рельсов и крушении грузовых поездов за 2013-2016 гг.



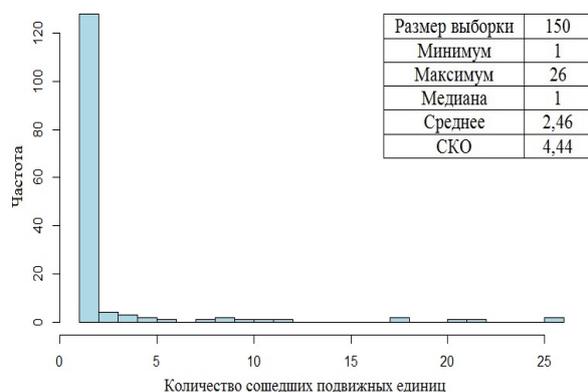
Как видно из рисунка 3.1, большинство происшествий происходит с одним вагоном в сходе, при этом среднее количество вагонов в сходе находится примерно на уровне 4 вагонов, а СКО составляет примерно 1,5 выборочного среднего. Поэтому важно отыскать функциональную зависимость между количеством вагонов в сходе и параметрами движения (скоростью, весом и другими) с целью уменьшения тяжести последствий схода. При этом в зависимости от того, какая причина повлекла сход с рельсов подвижного состава и имелся ли стрелочный перевод в месте схода, описательные статистики количества вагонов в сходе будут отличаться.

В зависимости от причины схода с рельсов его последствия могут быть различны. Поэтому в дальнейшем будем проводить анализ отдельно для трех групп происшествий:

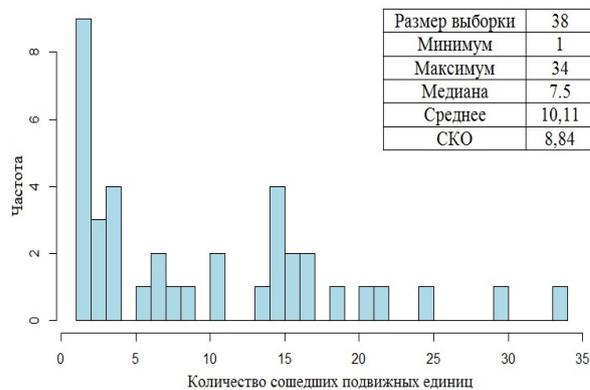
- сход вследствие неисправности вагона или секций локомотива вне стрелочных переводов;
- сход вследствие неисправности рельсов вне стрелочных переводов;
- сход на стрелочном переводе, не вызванный ранее сошедшим составом, по причине неисправности пути или вагонов/секций локомотива.

Заметим, что сходы с рельсов, вызванные ошибками машиниста в управлении поездом, не рассматриваются в виду небольшого количества таких случаев.

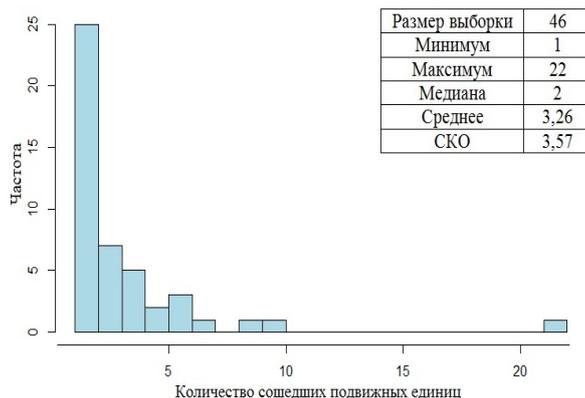
Рисунок 3.2. Диаграмма частот и описательные статистики количества сошедших с рельсов подвижных единиц в сходе при сходе с рельсов грузовых поездов: *а)* вне стрелок вследствие неисправности подвижного состава, *б)* вне стрелок вследствие неисправности пути, *в)* на стрелках, которые не вызваны ранее сошедшим составом, по причине технической неисправности любого вида.



*а)*



*б)*



*в)*

Отметим, что за рассматриваемый промежуток времени произошло 4 схода на стрелках вследствие того, что сошедший вагон, проходя стрелку, повредил ее, чем вызвал дополнительно сход вагонов идущих вслед поездов. Эти случаи будем классифицировать отдельно, поскольку не всегда сошедшая единица подвижного состава при прохождении стрелки вызывает дополнительно сход вагонов идущих вслед поездов.

### 3.2.2. Основные обозначения

Рассмотрим в  $j$ -й группе происшествий среди  $n_j$  протоколов транспортных происшествий, в которых произошел сход вагонов грузового состава при поездной работе,

некоторый  $i$ -й протокол,  $i = \overline{1, n_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Пусть для данного протокола:

$x_{ij}$  – общее количество сошедших единиц подвижного состава (секций локомотива и вагонов);

$\chi_{ij}$  – коэффициент, характеризующий количество путей в месте схода, равный нулю, если сход произошел на однопутном участке, и равный единице в обратном случае;

$y_{ij}$  – коэффициент, характеризующий нарушение хотя бы одной единицей подвижного состава габарита соседнего пути, равный единице если хотя бы одна сошедшая единица подвижного состава нарушила габарит соседнего пути, и равный нулю в обратном случае;

$v_{ij}$  – скорость поезда в момент схода, [км/ч];

$z_{ij}$  – номер первой по порядку сошедшей с рельсов подвижной единицы (с головы поезда);

$L_{ij}^{\text{лок.}}$  – суммарное количество секций локомотивов в поезде;

$L_{ij}^{\text{в}}$  – количество вагонов в поезде;

$L_{ij}$  – суммарное количество вагонов и секций локомотива в поезде;

$w_{ij}$  – вес поезда, [т];

$\varkappa_{ij}$  – кривизна кривой в месте схода (величина, обратно пропорциональная радиусу кривизны кривой) в месте схода (для прямой кривизна полагается равной нулю), [1/м];

$\gamma_{ij}$  – профиль пути (тангенс угла наклона) в месте схода, имеющий знак минус, если уклон представляет спуск, знак плюс, если уклон представляет подъем.

Также введем вспомогательную переменную  $x^{\max} = L^{\text{лок.}} + L^{\text{в}} - z + 1$ , которая является реализацией некоторой случайной величины  $X^{\max} = L^{\text{лок.}} + L^{\text{в}} - Z + 1$ , где  $Z$  – случайная величина, соответствующая номеру (от головы поезда) первой из сошедших единиц подвижного состава. В дальнейшем будем называть случайную величину  $X^{\max}$  *остаточной длиной состава*. Отметим, что имеется статистическая связь между количеством вагонов в сходе и остаточной длиной состава [79, 131, 150]. Так как для разных групп происшествий закон распределения остаточной длины, вообще говоря, неодинаков, то введем случайную величину  $X_j^{\max}$ , характеризующую остаточную длину в случае схода по  $j$ -й причине. Таким образом,  $x_{ij} = L_{ij}^{\text{лок.}} + L_{ij}^{\text{в}} - z_{ij} + 1$ ,  $i = \overline{1, n_j}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ .

Введем вспомогательную функцию  $\tilde{\mu}(w, L^{\text{в}})$ , характеризующую степень загрузки

женности (loading factor в [131]) поезда полезной нагрузкой, которая зависит от веса поезда  $w$  и  $L^B$  количества перевозимых им вагонов, и вычисляемую по формуле

$$\tilde{\mu}(w, L^B) \triangleq \pi_1 \frac{w}{L^B} + \pi_2, \quad (3.5)$$

где  $\pi_1$  и  $\pi_2$  – неизвестные параметры. Соответственно, чем ближе функция  $\tilde{\mu}(w, L^B)$  к нулю, тем больше порожних вагонов перевозит поезд. И наоборот, чем ближе к единице функция  $\tilde{\mu}(w, L^B)$ , тем меньше порожних и больше груженных вагонов перевозит поезд. Так как тара 4-осных вагонов составляет порядка 23 тонн, а грузоподъемность порядка 69 тонн, то коэффициенты  $\pi_1$  и  $\pi_2$  можно найти, решив систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 23\pi_1 + \pi_2 = 0, \\ (23 + 69)\pi_1 + \pi_2 = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Решив систему (3.6), получаем  $\pi_1 = 1/69$ ,  $\pi_2 = -1/3$ . Подставив полученные  $\pi_1$  и  $\pi_2$  в (3.5), получаем

$$\tilde{\mu}(w, L^B) = \frac{w}{69L^B} - \frac{1}{3},$$

Обозначив  $\tilde{\mu}_{ij} \triangleq \tilde{\mu}(w_{ij}, L_{ij}^B)$ , получим степень загрузки поезда полезной нагрузкой при  $i$ -м сходе в  $j$ -й группе происшествий. Отметим, что в американских протоколах происшествий количество груженных вагонов указано явно, в то время как в российских протоколах такая характеристика отсутствует, поэтому приходится выполнять некоторую оценку отношения количества груженных вагонов к общему количеству вагонов.

Заметим, что в некоторых протоколах могут отсутствовать те или иные характеристики или они могут быть указаны нечетко, поэтому возникает проблема пропущенных данных. Часто пропущенные значения усредняют имеющимися, однако в данной задаче такой подход не представляется возможным, поскольку каждое транспортное происшествие уникально, а их количество не велико. Поэтому в дальнейшем для каждой группы происшествий будем сравнивать выборки с пропущенными значениями и с полным набором требуемых характеристик.

### 3.2.3. Оценка распределения количества подвижных единиц грузового поезда при сходе с рельсов

Вначале рассмотрим задачу оценивания распределения количества подвижных единиц грузового поезда при сходе с рельсов.

### 3.2.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим  $j$ -ю группу транспортных происшествий, общее количество которых равно  $n_j$ . Пусть  $X_j$  – случайная величина, характеризующая количество вагонов и секций локомотива при сходе с рельсов для некоторой группы происшествий. Поскольку в сходе обязательно будет не менее одной подвижной единицы, то имеет место равенство

$$X_j = 1 + \tilde{X}_j,$$

где  $\tilde{X}_j$  – вспомогательная неотрицательная случайная величина, закон распределения которой мы в дальнейшем будем оценивать, имеющая значения в множестве  $\mathbb{Z}_+$ . Отметим, что ряды распределения случайных величин  $X_j$  и  $\tilde{X}_j$  зависят от набора параметров  $x^{\max}$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $L^B$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ .

Так как случайная величина  $\tilde{X}_j$  является дискретной, то применять аппарат линейной регрессии для оценки функциональной зависимости между этой случайной величиной и факторами  $x^{\max}$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $L$ ,  $L^B$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  нельзя. Частично похожим способом на линейную регрессию для целочисленной зависимой переменной является порядковая регрессия, однако в настоящем случае ее применять также некорректно, так как не для всех чисел из диапазона значений реализации выборки имеются сходы с идентичным количеством сошедших вагонов. Еще один способ отыскания искомой зависимости – квантильная регрессия [120]. Однако в силу небольшого количества наблюдений квантильная регрессия на уровне надежности, к примеру,  $\alpha = 0,999$  и 40 наблюдений, вызывает сомнения.

При анализе протоколов транспортных происшествий выяснилось, что, как правило, при сходе оказываются сошедшими с рельсов последовательно несколько вагонов до некоторого оставшегося на рельсах. В этой связи логичным представляется прогнозирование количества подвижных единиц в сходе при помощи геометрически распределенной случайной величины, которое характеризует количество «неуспехов» («успехов») в серии до первого «успеха» («неуспеха»). Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения, которое характеризует количество «неуспехов» («успехов») в серии до  $r$ -го «успеха» («неуспеха»). При этом параметр  $r$  будем полагать нецелым числом, так как не всегда после первой оставшейся на рельсах подвижной единицы сход с рельсов останавливается. Использо-

мое обобщение на случай непрерывных значений  $r$  можно найти в [115]. Таким образом, будем предполагать, что случайная величина  $\tilde{X}_j$  имеет отрицательное биномиальное распределение, характеризующее количество «успехов» в серии до  $r_j$ -го «неуспеха» с вероятностью «успеха»  $p_j$ <sup>3</sup>.

Будем предполагать  $p_j$  и  $r_j$  известными функциями характеристик движения (скорости, кривизны пути и других), а также параметров  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{m_j j}, \theta_j$ , доставляющих максимум функции правдоподобия. Для удобства дальнейшего изложения введем обозначение  $a_j \triangleq (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{m_j j})^T$ , где  $m_j$  – некоторое натуральное число.

Соотношения отрицательной биномиальной регрессии для рассматриваемого случая имеют вид [89, 93]

$$\begin{cases} \mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x} | X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, a_j, \theta_j\} = \frac{\Gamma(\tilde{x} + r_j)}{\Gamma(\tilde{x} + 1)\Gamma(r_j)} p_j^{\tilde{x}} (1 - p_j)^{r_j}, \\ \mathbf{M}[\tilde{X}_j | X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, a_j, \theta_j] = \frac{p_j r_j}{1 - p_j}, \\ \mathbf{D}[\tilde{X}_j | X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, a_j, \theta_j] = \frac{p_j r_j}{(1 - p_j)^2}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Для лаконичности записи в (3.7) у  $p_j$  и  $r_j$ , которые являются функциями характеристик движения, а также подлежащих определению параметров  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{m_j j}, \theta_j$ , данная зависимость опущена. Приводимая выше и используемая далее нотация, в которой после вертикальной черты (условия) следует ряд детерминированных величин (скорость, вес) и вектор оцениваемых параметров, означает, что те или иные характеристики (вероятность, математическое ожидание, дисперсия) вычисляются при фиксированных значениях этих детерминированных величин. Иными словами, под  $\mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x} | X_j^{\max} = x^{\max}, v, \dots, \gamma, a_j, \theta_j\}$  понимается  $\mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x} | X_j^{\max} = x^{\max}\}(v, \dots, \gamma, a_j, \theta_j)$ .

Пусть

$$\mathbf{M}[\tilde{X}_j | X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, a_j, \theta_j] = g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[\tilde{X}_j | X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, a_j, \theta_j] = g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma) \times \\ \times (1 + \theta_j g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

---

<sup>3</sup>Необходимо отметить, что геометрическое распределение и отрицательное биномиальное распределение возникают в серии испытаний, проводимых по схеме Бернулли. Условие независимости испытаний (сойдет или нет та или иная подвижная единица) дискуссионно, однако использование именно отрицательного биномиального распределения обеспечивает баланс между физикой схода с рельсов и реализуемостью использования той или иной статистической модели.

где  $g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma)$  – некоторая функция, как правило, выбирающаяся экспоненциальным преобразованием от линейной по подлежащим определению параметрам  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{m_jj}$  функции, параметр  $\theta_j > 0$  характеризует сверхдисперсию (превышение дисперсией среднего) и также подлежит определению [156].

Подставив (3.8)–(3.9) в (3.7), получаем

$$p_j = \frac{\theta_j g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma)}{1 + \theta_j g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma)},$$

$$r_j = \frac{1}{\theta_j}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x} | X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, a_j, \theta_j\} = \\ & = \frac{\Gamma(\tilde{x} + 1/\theta_j)}{\Gamma(\tilde{x} + 1)\Gamma(1/\theta_j)} (1 + \theta_j g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma))^{-(\tilde{x}+1/\theta_j)} \times \\ & \quad \times (\theta_j g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma))^{\tilde{x}}, \tilde{x} = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Составив из  $\tilde{x}_{1j}, \tilde{x}_{2j}, \dots, \tilde{x}_{n_jj}$  вектор  $\tilde{x}_j$ , а из других введенных характеристик по аналогии векторы  $x_j^{\max}, v_j, w_j, L_j, L_j^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}_j, \mathfrak{a}_j, \gamma_j$ , построим логарифмическую функцию правдоподобия

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{L}}_j(a_j, \theta_j, \tilde{x}_j, x_j^{\max}, v_j, w_j, L_j, L_j^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}_j, \mathfrak{a}_j, \gamma_j) = \\ & = \ln \left( \prod_{i=1}^{n_j} \mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x}_{ij} | X_j^{\max} = x_j^{\max}, v_{ij}, w_{ij}, L_{ij}, L_{ij}^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}_{ij}, \mathfrak{a}_{ij}, \gamma_{ij}, a_j, \theta_j\} \right) = \\ & = -n_j \ln(\Gamma(1/\theta_j)) + \sum_{i=1}^{n_j} (\ln(\Gamma(\tilde{x}_{ij} + 1/\theta_j)) + \\ & \quad + \tilde{x}_{ij} \ln(\theta_j g_j(a_j, x_j^{\max}, v_{ij}, w_{ij}, L_{ij}, L_{ij}^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}_{ij}, \mathfrak{a}_{ij}, \gamma_{ij})) - \\ & \quad - (\tilde{x}_{ij} + 1/\theta_j) \ln(1 + \theta_j g_j(a_j, x_j^{\max}, v_{ij}, w_{ij}, L_{ij}, L_{ij}^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}_{ij}, \mathfrak{a}_{ij}, \gamma_{ij})) - \ln(\Gamma(\tilde{x}_{ij} + 1))). \end{aligned}$$

Поставим задачу по отысканию неизвестного вектора  $a_j$  и параметра  $\theta_j$

$$(\theta_j^*, a_j^*)^{\mathbb{T}} = \arg \max_{a_j \in \mathbb{R}^{m_j}, \theta_j > 0} \bar{\mathcal{L}}_j(a_j, \theta_j, \tilde{x}_j, x_j^{\max}, v_j, w_j, L_j, L_j^{\mathbb{B}}, \tilde{\mu}_j, \mathfrak{a}_j, \gamma_j). \quad (3.10)$$

### 3.2.3.2. Вспомогательные сведения

Вначале опишем общие принципы выбора функций  $g_j(\cdot)$ , введенные в (3.8) и (3.9). Как ранее уже было отмечено, эти функции следует выбирать экспонентами от некоторой линейной по оцениваемым параметрам регрессии функции. Согласно [131] при оценке распределения количества подвижных единиц в сходе с рельсов выбираются логарифмы скорости поезда, логарифмы остаточной длины поезда, степень загруженности поезда полезной нагрузки, а также их различные комбинации.

### 3.2.3.3. Результат исследования

Рассмотрим отдельно каждую группу транспортных происшествий. Вначале исследуем последствия схода вследствие неисправности подвижного состава вне стрелки.

Для данной группы транспортных происшествий выберем функцию  $g_1(\cdot)$  вида

$$\begin{aligned}
 &g_1(a_1, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varepsilon, \gamma) = \\
 &= \mathbf{1}_{\varepsilon \neq 0} \exp\{a_{11} + a_{21}\varepsilon \ln(v) + a_{31}(1 - \tilde{\mu}) \ln(x^{\max}) \ln(v) \min(0, \gamma) + \\
 &\quad + a_{41}(1 - \tilde{\mu}) \ln(x^{\max}) + a_{51}(1 - \tilde{\mu})^2 \ln(x^{\max}) \ln(v) \min(0, \gamma) + \\
 &+ a_{61}\tilde{\mu} + a_{71}\mathbf{1}_{\gamma > 0}\tilde{\mu} \ln(x^{\max}) \ln(v)\} + \mathbf{1}_{\varepsilon = 0} \exp\{a_{81} + a_{91}\mathbf{1}_{\gamma < 0} \ln(v) \ln(x^{\max}) + \\
 &\quad + a_{101}\mathbf{1}_{\gamma > 0}\tilde{\mu} \ln(v) \ln^2(x^{\max})\}, \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{1}_A$  – индикатор события  $A$ , т.е.  $\mathbf{1}_A$  равен единице, если условие  $A$  выполнено, и ноль в ином случае.

Прокомментируем выбор функции (3.11). Функция фактически распадается на два слагаемых: на часть, отвечающую за тяжесть последствий от схода в кривых ( $\mathbf{1}_{\varepsilon \neq 0}$ ), и часть, отвечающую за тяжесть последствий от схода в прямых участках пути ( $\mathbf{1}_{\varepsilon = 0}$ ).

В части, связанной со сходами в кривых, можно выделить три группы слагаемых: первая группа содержит слагаемые с параметрами  $a_{11}$  и  $a_{21}$ , которые инвариантны относительно степени загруженности поезда, вторая группа содержит слагаемые с параметрами  $a_{31}$ ,  $a_{41}$ ,  $a_{51}$ , влияние которых увеличивается с уменьшением степени загрузки поезда, третья группа содержит слагаемые с параметрами  $a_{61}$ ,  $a_{71}$ , влияние которых увеличивается с увеличением степени загрузки поезда. Тяжесть последствий для загруженных поездов усиливает наличие подъема, а для порожних поездов усиливает не только наличие спуска, но и его величина. Общим для всех групп слагаемых является

ся то, что практически в каждом слагаемом есть либо логарифм скорости движения, либо логарифм остаточной длины, а порой и их произведение. Это связано с тем, что с увеличением скорости поезда и остаточной длины поезда потенциальное количество сошедших подвижных единиц также увеличивается (чем меньше номер первой сошедшей с рельсов подвижной единицы, тем для большего количества подвижных единиц возможен сход с рельсов). В части, связанной со сходами в прямых, слагаемое с параметром  $a_{91}$  отлично от нуля в случае движения на спусках, слагаемое с параметром  $a_{101}$  отлично от нуля в случае движения на подъемах. При этом сходы с серьезными последствиями (более 15 вагонов в сходе) происходили не на крутых спусках или подъемах, поэтому используются лишь наличие спуска или подъема, а не сама величина подъема или спуска.

В результате решения задачи (3.10) получаем следующие оценки максимального правдоподобия  $a_{11}^*$ ,  $a_{21}^*$ , ...,  $a_{101}^*$ ,  $\theta_1^*$  (таблица 3.6).

Таблица 3.6. Оценки максимального правдоподобия  $a_{11}^*$ ,  $a_{21}^*$ , ...,  $a_{101}^*$ ,  $\theta_1^*$  по выборке со сходами в кривых и прямых участках пути

$a_{11}^*$	$a_{21}^*$	$a_{31}^*$	$a_{41}^*$	$a_{51}^*$	$a_{61}^*$	$a_{71}^*$	$a_{81}^*$	$a_{91}^*$	$a_{101}^*$	$\theta_1^*$
-7,76	315,69	286,88	0,63	-333,03	4,32	0,17	-1,55	0,2	0,04	3,83

Отметим, что в случае подъема в кривых участках пути все слагаемые помимо константы в функции  $g_1(\cdot)$  оказываются неотрицательными при полученных значениях параметров  $a_{11}^*$ ,  $a_{21}^*$ , ...,  $a_{101}^*$ . Таким образом, любое увеличение параметров  $x^{\max}$ ,  $v$ ,  $\alpha$  приводит к большему среднему количеству вагонов в сходе, что соответствует физике схода. В случае спуска в кривых участках пути имеется неположительное слагаемое с параметром  $a_{61}^*$ . Это связано, в частности, с тем, что при небольшой загрузке поездов  $\tilde{\mu} < 0,13587$  выборочное среднее количества подвижных единиц в сходе составило 4,54 подвижных единицы при выборочном среднем в 1,38 подвижных единицы в случае  $\tilde{\mu} \geq 0,13587$ .

Отметим, что протоколов по сходу в прямых недостаточно, поскольку, если рассмотреть отдельно выборки по сходам в прямых и в кривых участках пути, получаются следующие результаты (таблицы 3.7 и 3.8).

Таблица 3.7. Оценки максимального правдоподобия  $a_{11}^*$ ,  $a_{21}^*$ , ...,  $a_{101}^*$ ,  $\theta_1^*$  по выборке со сходами только в кривых участках пути (построены по 65 наблюдениям)

$a_{11}^*$	$a_{21}^*$	$a_{31}^*$	$a_{41}^*$	$a_{51}^*$	$a_{61}^*$	$a_{71}^*$	$a_{81}^*$	$a_{91}^*$	$a_{101}^*$	$\theta_1^*$
-7,25	307,22	284,43	0,54	-329,86	3,85	0,16	—	—	—	1,87

Таблица 3.8. Оценки максимального правдоподобия  $a_{11}^*$ ,  $a_{21}^*$ , ...,  $a_{101}^*$ ,  $\theta_1^*$  по выборке со сходами только в прямых участках пути (построены по 35 наблюдениям)

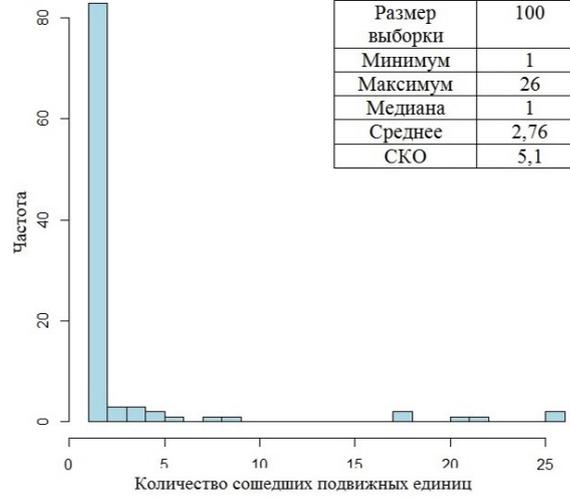
$a_{11}^*$	$a_{21}^*$	$a_{31}^*$	$a_{41}^*$	$a_{51}^*$	$a_{61}^*$	$a_{71}^*$	$a_{81}^*$	$a_{91}^*$	$a_{101}^*$	$\theta_1^*$
—	—	—	—	—	—	—	-1,52	0,2	0,04	6,05

Сравнивая результаты в таблицах 3.6, 3.7, 3.8, заключаем, что совместное рассмотрение сходов в кривых и прямых участках пути несколько видоизменяет среднее количество подвижных единиц в сходе в кривых участках пути, оставляя практически неизменным среднее количество подвижных единиц в прямых участках пути. При этом дисперсия, характеризуемая параметром  $\theta_1^*$ , изменяется существенно. Поэтому следует разделять сходы в кривых участках пути и сходы в прямых участках пути.

Более того, при обработке данных оказалось, что выборочное среднее количества сошедших подвижных единиц в прямых больше выборочного среднего количества сошедших подвижных единиц в кривых участках пути (3,74 против 2,23). Поэтому желательно дополнительное исследование как с точки зрения глубины исследования (увеличения количества рассматриваемых протоколов), так и с точки зрения качества рассматриваемых протоколов, а именно уточнения сведений о причинах происшествий и характеристик пути в месте схода, особенно для сходов с рельсов в прямых участках пути.

Анализ для данного вида происшествия проводился по выборке со следующими характеристиками (рисунок 3.3).

Рисунок 3.3. Диаграмма частот и описательные статистики количества подвижных единиц в сходе при сходе с рельсов грузовых поездов вне стрелок вследствие неисправности подвижного состава по выборке без пропущенных данных.



Теперь рассмотрим сходы с рельсов вне стрелок по причине неисправности железнодорожного полотна.

Для данной группы транспортных происшествий выберем функцию  $g_2(\cdot)$  вида

$$g_2(a_2, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varkappa, \gamma) = \exp\{a_{12} + a_{22}\tilde{\mu}^2 + a_{32} \ln^2(v)\mathbf{1}_{\gamma>0} + a_{42} \ln(x^{\max})\}. \quad (3.12)$$

Принцип построения функции  $g_2(\cdot)$  схож с принципом построения функции  $g_1(\cdot)$ . Отметим, что функция  $g_2(\cdot)$ , выбранная согласно (3.12) отличается от ее аналогов в [22] и [5]. Приведенная в (3.12) конструкция  $g_2(\cdot)$  позволяет улучшить значение функции правдоподобия.

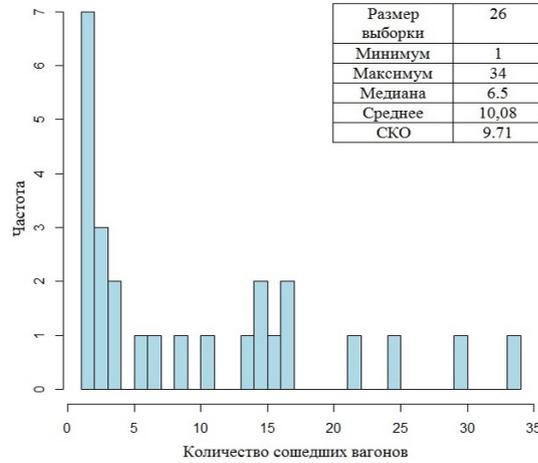
В результате решения задачи (3.10) получаем следующие оценки максимального правдоподобия  $a_{12}^*, a_{22}^*, a_{32}^*, a_{42}^*, \theta_2^*$  (таблица 3.9).

Таблица 3.9. Оценки максимального правдоподобия  $a_{12}^*, a_{22}^*, a_{32}^*, a_{42}^*, \theta_2^*$

$a_{12}^*$	$a_{22}^*$	$a_{32}^*$	$a_{42}^*$	$\theta_2^*$
-3,18	0,91	0,05	1,21	0,271

Все слагаемые функции  $g_2(\cdot)$  оказываются положительными, а значит, любое увеличение параметров движения приведет к большему среднему количеству подвижных единиц в сходе, что является логичным. Анализ для данной группы происшествий проводился по выборке со следующими характеристиками (рисунок 3.4).

Рисунок 3.4. Диаграмма частот и описательные статистики количества вагонов в сходе при сходе с рельсов грузовых поездов вне стрелок вследствие неисправности пути по выборке без пропущенных данных.



Теперь рассмотрим сход на стрелке, не вызванный ранее сошедшим составом. Для данной группы происшествий выберем функцию  $g_3(\cdot)$  вида

$$g_3(a_3, x^{\max}, v, w, L, L^b, \tilde{\mu}, \varkappa, \gamma) = \exp\{a_{13} + a_{23}\tilde{\mu} \ln(v) + a_{33}\tilde{\mu} \ln^2(x^{\max}) + a_{43} \ln(v) + a_{53} \ln(v) \ln(x^{\max})\}.$$

Отметим, что в данном случае функция  $g_3(\cdot)$  не содержит переменных  $\varkappa$  и  $\gamma$ , поскольку их определение для происшествий на стрелках только исходя из протоколов крайне затруднительно, а порой и вовсе невозможно.

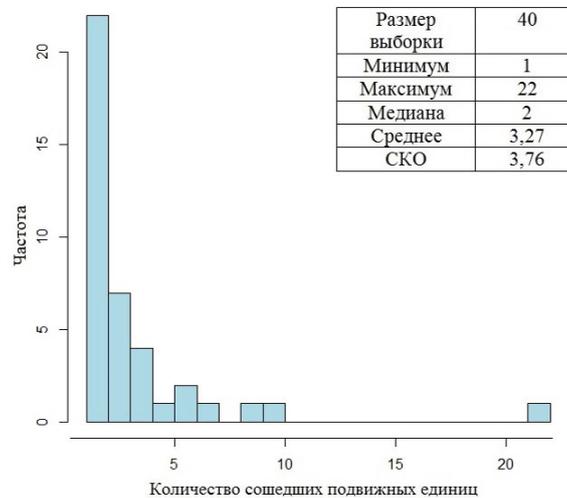
В результате решения задачи (3.10) получаем следующие оценки максимального правдоподобия  $a_{13}^*, a_{23}^*, a_{33}^*, a_{43}^*, a_{53}^*, \theta_2^*$  (таблица 3.10)

Таблица 3.10. Оценки максимального правдоподобия  $a_{13}^*, a_{23}^*, a_{33}^*, a_{43}^*, a_{53}^*, \theta_2^*$

$a_{13}^*$	$a_{23}^*$	$a_{33}^*$	$a_{43}^*$	$a_{53}^*$	$\theta_3^*$
-1,49	0,99	-0,16	-0,91	0,43	0,41

Анализ для данного вида происшествий проводился по выборке со следующими характеристиками (рисунок 3.5).

Рисунок 3.5. Диаграмма частот и описательные статистики количества вагонов в сходе при сходе с рельсов грузовых поездов на стрелках, которые не вызваны ранее сошедшим составом.



### 3.2.4. Оценивание вероятности возникновения некоторых негативных последствий от схода с рельсов

Рассмотрим задачу оценивания вероятности нарушения габарита соседнего пути (области соседнего пути, в которой может перемещаться другой поезд) хотя бы одной сошедшей с рельсов подвижной единицей грузового поезда. Такое событие влечет остановку движения на соседнем пути и, кроме того, может привести к столкновению со встречным поездом.

#### 3.2.4.1. Количественный анализ

Проанализируем по данным протоколов за 2013-2016 гг., насколько часто сход подвижных единиц с рельсов приводит к нарушению габарита соседнего пути.

Таблица 3.11. Частота сходов единиц подвижного состава с рельсов с нарушением и без нарушения габарита соседнего пути

Группа происшествий	Количество сходов	Количество нарушений габарита соседнего пути	Количество раз с отсутствием нарушения габарита соседнего пути
1	150	22	109
2	38	15	16
Итого	188	37	125

Отметим, что сумма количества происшествий, когда сошедшие с рельсов единицы подвижного состава грузового поезда нарушили или не нарушили габарит соседнего пути, не равна количеству сходов. Это связано с тем, что в некоторых протоколах отсутствует информация о нарушении габарита, а некоторые происшествия произошли на однопутных участках пути.

Как следует из таблицы 3.11, относительная частота сходов с рельсов с нарушением сошедшими подвижными единицами подвижного состава габарита соседнего пути существенно больше в случае сходов по причине неисправности пути. В то же время количество сходов с рельсов с нарушением сошедшими подвижными единицами подвижного состава габарита соседнего пути больше в случае сходов с рельсов по причине неисправности вагонов/секций локомотива. Поэтому необходимо изучение обеих групп происшествий на предмет оценки параметрической зависимости вероятности нарушения габарита соседнего пути и различных факторов движения. Данные по третьей группе происшествий не приведены, так как только по протоколам довольно редко удается выяснить нарушение габарита.

#### 3.2.4.2. Постановка задачи

Поскольку при движении по однопутному участку нарушить габарит соседнего пути невозможно, в дальнейшем будем рассматривать только те сходы, которые произошли не на однопутных участках железнодорожной сети, т.е. те, у которых  $\chi_{ij} = 1$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = \overline{1, n_j}$ . Перенумеруем оставшиеся после отсеивания протоколов происшествий на однопутных участках пути протоколы, предполагая, что их осталось для  $j$ -й группы происшествий  $\bar{n}_j$  штук,  $j = 1, 2$ .

Отметим, что, как и при построении регрессии между количеством единиц подвижного состава в сходе и различными факторами, рассмотренной ранее, для прогнозирования нарушения габарита также имеет место проблема пропущенных данных. Протоколы, в которых отсутствует хотя бы один из необходимых параметров для построения той или иной зависимости вероятности нарушения габарита от различных факторов, рассматриваться не будут.

Рассмотрим  $j$ -ю группу транспортных происшествий. Пусть  $Y_j$  – случайная величина, характеризующая нарушение подвижными единицами после схода с рельсов

габарита соседнего пути, равная единице, если сошедшие подвижные единицы нарушат габарит соседнего пути, и равная нулю в обратном случае. В этой связи будем предполагать, что

$$\begin{aligned} \text{Law}(Y_j|X_j = x, X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, b_j) = \\ = \text{Bi}(1, \hat{p}_j(b_j, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma)), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $\hat{p}_j(b_j, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma)$  – некоторая заданная функция, зависящая от скорости поезда в момент схода  $v$ , количества вагонов  $L^B$ , кривизны кривой в месте схода  $\mathfrak{a}$ , вектора параметров  $b_j \triangleq (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{\bar{m}_j j})^T$ , подлежащих заданию, и прочих параметров. Здесь  $\bar{m}_j$  – количество оцениваемых параметров.

Потенциально в качестве  $\hat{p}_j(\cdot)$  можно взять реализацию выборочной оценки вероятности [47], т.е.

$$\hat{p}_j(\cdot) = \frac{\sum_{i=1}^{\bar{n}_j} y_{ij}}{\bar{n}_j}.$$

Однако такая функция не позволяет учесть ни геометрические особенности пути, ни характеристики поезда.

С учетом сделанного предположения (3.13) справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{Y_j = 0|X_j = x, X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, b_j\} = \\ = 1 - \hat{p}_j(b_j, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma), \end{aligned} \quad (3.14)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{Y_j = 1|X_j = x, X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, b_j\} = \\ = \hat{p}_j(b_j, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma), \end{aligned} \quad (3.15)$$

а  $\mathbf{M}[Y_j|X_j = x, X_j^{\max} = x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma, b_j] = \hat{p}_j(b_j, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}, \gamma)$ . Составим из всех  $y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{\bar{n}_j j}$  вектор  $y_j$ , из  $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{\bar{n}_j j}$  вектор  $x_j$ , а из других введенных характеристик по аналогии векторы  $\bar{x}_j^{\max}, \bar{v}_j, \bar{w}_j, \bar{L}_j, \bar{L}_j^B, \bar{\mu}_j, \bar{\mathfrak{a}}_j, \bar{\gamma}_j$ . В силу (3.14) и (3.15) логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$\bar{\mathcal{L}}_j(b_j, y_j, x_j, \bar{x}_j^{\max}, \bar{v}_j, \bar{w}_j, \bar{L}_j, \bar{L}_j^B, \bar{\mu}_j, \bar{\mathfrak{a}}_j, \bar{\gamma}_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\bar{n}_j} (1 - y_{ij}) \ln(1 - \hat{p}_j(b_j, x_{ij}, x_{ij}^{\max}, v_{ij}, w_{ij}, L_{ij}, L_{ij}^B, \tilde{\mu}_{ij}, \mathfrak{a}_{ij}, \gamma_{ij})) + \\ + y_{ij} \ln(\hat{p}_j(b_j, x_{ij}, x_{ij}^{\max}, v_{ij}, w_{ij}, L_{ij}, L_{ij}^B, \tilde{\mu}_{ij}, \mathfrak{a}_{ij}, \gamma_{ij})).$$

Поставим задачу по нахождению оценок максимального правдоподобия параметров  $b_j$

$$b_j^* \triangleq (b_{1j}^*, b_{2j}^*, \dots, b_{\bar{m}_j}^*)^T = \arg \max_{b_j \in \mathbb{R}^{\bar{m}_j}} \overline{\mathcal{L}}_j(b_j, y_j, x_j, \bar{x}_j^{\max}, \bar{v}_j, \bar{L}_j, \bar{L}_j^B, \bar{\mu}_j, \bar{\mathfrak{a}}_j, \bar{\gamma}_j). \quad (3.16)$$

На оценке максимального правдоподобия  $b_j^*$  параметров  $b_j$  имеет место

$$\overline{\mathcal{L}}_j^* = \overline{\mathcal{L}}_j(b_j^*, y_j, x_j, \bar{x}_j^{\max}, \bar{v}_j, \bar{L}_j, \bar{L}_j^B, \bar{\mu}_j, \bar{\mathfrak{a}}_j, \bar{\gamma}_j).$$

### 3.2.4.3. Вспомогательные сведения

Решение задачи (3.16) существенно зависит от выбора структуры функции  $\hat{p}_j(\cdot)$ . Структура функции  $\hat{p}_j(\cdot)$  может быть выбрана, например, согласно классическим моделям бинарного выбора: логистической регрессии, пробит-регрессии, регрессии Коши - которые и будут в дальнейшем применены в настоящей работе.

Для логистической регрессии функция  $\hat{p}_j(\cdot)$  имеет вид

$$\hat{p}_j(\cdot) = \frac{1}{1 + \exp\{h_{1j}(\cdot)\}},$$

где  $h_{1j}(\cdot)$  – некоторая функция, линейная по параметрам  $b_j$ , зависящая от величин  $x$ ,  $x^{\max}$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $L$ ,  $L^B$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\gamma$ .

Для пробит-регрессии имеет место

$$\hat{p}_j(\cdot) = \Phi(h_{2j}(\cdot)),$$

где  $h_{2j}(\cdot)$  – некоторая функция, линейная по параметрам  $b_j$ , зависящая от величин  $x$ ,  $x^{\max}$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $L$ ,  $L^B$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\gamma$ , а  $\Phi(x)$  – функция распределения стандартного нормального распределения (функция Лапласа), определяемая по формуле

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

Для регрессии Коши выполняется равенство

$$\hat{p}_j(\cdot) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(h_{3j}(\cdot)) + \frac{1}{2},$$

где  $h_{3j}(\cdot)$  – некоторая функция, линейная по параметрам  $b_j$ , зависящая от величин  $x$ ,  $x^{\max}$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $L$ ,  $L^B$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ .

Теперь для различных групп происшествий вычислим силу связи между случайной величиной  $Y_j$ ,  $j = 1, 2$ , и различными параметрами движения: скоростью  $v$ , планом  $\varepsilon$  пути и другими — а также остаточной длиной  $X^{\max}$  состава и количеством  $X$  сошедших с рельсов единиц подвижного состава. Под силой связи будем понимать реализацию выборочного коэффициента корреляции в случае, если анализ проводится между двумя случайными величинами, и число, вычисляемое по формуле для реализации выборочного коэффициента корреляции, если анализ проводится между одной случайной величиной и неслучайным фактором.

Таблица 3.12. Сила связи между случайной величиной  $Y_1$ , характеризующей нарушение хотя бы одной единицей подвижного состава габарита соседнего пути вследствие схода с рельсов по причине неисправности подвижного состава, и различными факторами.

Факторы	$X$	$X^{\max}$	$v$	$w$	$\mu$	$\varepsilon$	$\gamma$
Сила связи	0,518	0,034	-0,117	0,123	0,239	0,022	0,117
Объем выборки	112	109	107	110	110	102	88

Таблица 3.13. Сила связи между случайной величиной  $Y_2$ , характеризующей нарушение хотя бы одной подвижной единицей подвижного состава габарита соседнего пути вследствие схода с рельсов по причине неисправности пути, и различными факторами.

Факторы	$X$	$X^{\max}$	$v$	$w$	$\mu$	$\varepsilon$	$\gamma$
Сила связи	0,647	0,148	0,346	0,398	0,484	-0,277	0,127
Объем выборки	24	24	22	23	23	23	19

Как следует из таблиц 3.12 и 3.13, имеется значимая положительная корреляция между случайными величинами  $Y_1$ ,  $Y_2$  и  $X$ . Также имеет место зависимость между нарушением хотя бы одной единицей подвижного состава габарита соседнего пути и степенью загрузки поезда. Таким образом, в функциях  $h_{kj}$  должны обязательно содержаться параметры  $x$  и  $\tilde{\mu}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ . В случае схода с рельсов по причине

неисправности пути можно также отметить положительную силу связи между нарушением хотя бы одной единицей подвижного состава габарита соседнего пути и скоростью, однако в силу небольшого количества наблюдений влияние скорости на вероятность нарушения габарита исследоваться не будет.

### 3.2.4.4. Результаты исследования

Сравним различные виды регрессии по отношению правдоподобия для наилучших (из построенных) по значению логарифмической функции правдоподобия функций  $\hat{p}_j(\cdot)$ . также в таблицах 3.14 и 3.15 приведем значение отношения правдоподобия, вычисляющееся как удвоенная разность между оптимальным значением логарифмической функции правдоподобия для зависимостей с бóльшим числом компонент и оптимальным значениям логарифмической функции правдоподобия с меньшим. Также приведем максимальный уровень значимости, при котором начинает приниматься гипотеза о том, что следует рассматривать зависимость с меньшим числом компонент [96].

Таблица 3.14. Сравнение различных зависимостей и видов регрессии для оценки вероятности нарушения хотя бы одной подвижной единицей подвижного состава габарита соседнего пути при сходе с рельсов по причине неисправности вагона/секций локомотива (построены по 110 наблюдениям).

Регрессия	Зависимость	$\overline{\mathcal{L}}_1^*$	Отношение правдоподобия	Значимость
Логит	$h_{11}(b_1, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varnothing, \gamma) = b_{11}$	-55,04	–	–
	$h_{11}(b_1, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varnothing, \gamma) = b_{11} + b_{21}x + b_{31}\tilde{\mu}$	-40,15	29,78	$4 \cdot 10^{-7}$
Пробит	$h_{21}(b_1, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varnothing, \gamma) = a_1$	-55,04	–	–
	$h_{21}(b_1, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varnothing, \gamma) = b_{11} + b_{21}x + b_{31}\tilde{\mu}$	-40,71	28,66	$6 \cdot 10^{-7}$
Коши	$h_{31}(b_1, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varnothing, \gamma) = b_{11}$	-55,04	–	–
	$h_{31}(b_1, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varnothing, \gamma) = b_{11} + b_{21}x + b_{31}\tilde{\mu}$	-34,32	41,44	$10^{-9}$

Таблица 3.15. Сравнение различных зависимостей и видов регрессии для оценки вероятности нарушения хотя бы одной единицей подвижного состава габарита соседнего пути при сходе с рельсов по причине неисправности пути (построены по 23 наблюдениям).

Регрессия	Зависимость	$\overline{\mathcal{L}}_2^*$	Отношение правдоподобия	Значимость
Логит	$h_{12}(b_2, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varepsilon, \gamma) = b_{12}$	-15,395	–	–
	$h_{12}(b_2, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varepsilon, \gamma) = b_{12} + b_{22}x + b_{32}\tilde{\mu}$	-6,55	17,69	$1,4 \cdot 10^{-4}$
Пробит	$h_{22}(\cdot) = b_{12}$	-15,395	–	–
	$h_{22}(b_2, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varepsilon, \gamma) = b_{12} + b_{22}x + b_{32}\tilde{\mu}$	-6,43	17,93	$1,3 \cdot 10^{-4}$
Коши	$h_{32}(\cdot) = b_{12}$	-15,395	–	–
	$h_{32}(b_2, x, x^{\max}, v, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \varepsilon, \gamma) = b_{12} + b_{22}x + b_{32}\tilde{\mu}$	-7,779	15,23	$5 \cdot 10^{-4}$

Как следует из таблиц 3.14 и 3.15, для оценки вероятности нарушения хотя бы одной единицей подвижного состава габарита соседнего пути в случае сходов с рельсов по причине неисправности подвижного состава лучше использовать регрессию Коши, а в случае сходов с рельсов по причине неисправности пути лучше использовать пробит-регрессию. Для обеих групп происшествий уровень значимости моделей близок к нулю. Это говорит о том, что получена существенно лучшая оценка функции  $\hat{p}_j(\cdot)$  нежели тривиальная.

По результатам вычислений получилось, что  $b_{11}^* = -7,16$ ,  $b_{31}^* = 1,98$ ,  $b_{21}^* = 2,05$  (при использовании регрессии Коши),  $b_{12}^* = -2,43$ ,  $b_{32}^* = 1,87$ ,  $b_{22}^* = 0,19$  (при использовании пробит-регрессии).

### 3.3. Метод оценивания вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции

#### 3.3.1. Основные обозначения и предположения

Под *маневровым составом* будем понимать локомотив, сцепленный с группой вагонов, производящий маневровые работы (сцепку/прицепку/отцепку вагонов). Такой локомотив называется маневровым. Под маневровым составом будем также понимать и маневровый локомотив без вагонов. Так как дальнейшие вычисления будут справедливы что для пассажирских, что для грузовых поездов, то в дальнейшем будем

оперировать как для пассажирского, так и для грузового поезда понятием *поезд*.

Каждый поезд, проезжая по конкретному маршруту по станции, пересекает несколько стрелочных переводов как изолированных, так и неизолированных. Изолированным стрелочным переводом называется тот, на котором столкновение, вызванное проездом на светофор с запрещающим сигналом, невозможно; неизолированным стрелочным переводом называется тот, на котором столкновение возможно. Зафиксируем произвольный маршрут и рассмотрим на нем какой-нибудь неизолированный стрелочный перевод. Для него введем обозначения:

$\lambda_m$  — интенсивность следования маневровых составов, [1/ч];

$\lambda_c$  — интенсивность останавливающихся на стрелочном переводе маневровых составов, [1/ч];

$d_{п}$  — средняя длина поезда, [км];

$d_m$  — средняя длина маневрового состава, [км];

$d_t$  — средняя длина локомотива (вагона) маневрового состава, [км];

$v_{п}$  — средняя скорость поезда, [км/ч];

$v_m$  — средняя скорость маневрового состава, [км/ч];

$\tau_c$  — среднее время нахождения маневрового состава на стрелочном переводе при условии остановки на нем, [ч];

$\tau_{пс}$  — среднее время стоянки поезда на стрелочном переводе, [ч];

$P_{пс}$  — вероятность остановки поезда на стрелочном переводе;

$P_{п}$  — вероятность проезда на запрещающий сигнал поездом;

$P_m$  — вероятность проезда на запрещающий сигнал маневровым составом.

Будем считать, что проезд маневровых локомотивов через стрелки образует поток случайных событий, являющийся пуассоновским. Также предположим, что стоящие на стрелках составы образуют пуассоновский поток событий. Для того чтобы эти предположения были справедливы, необходимо выполнение свойств стационарности (однородности), ординарности и независимости. Свойство ординарности выполнено, так как события в потоке следуют строго один за другим и не происходят вместе. Например, одновременное появление двух маневровых составов на одном стрелочном переводе с одного направления невозможно. Предполагая, что станция функционирует одинаково в течение некоторого промежутка времени, можно говорить об однородности потока.

Однако предположение о независимости, вообще говоря, дискуссионно.

Дальнейшие расчеты вероятностей предполагают, что при возникновении столкновения станция продолжает функционировать в том же режиме. Безусловно, это не так, но как именно произошедшее столкновение повлияет на интенсивность и характер движения на станции, предсказать практически невозможно.

При расчете вероятности столкновения будем использовать только средние величины, а не законы распределения таких величин, как длина состава, скорость движения, время стоянки. Это вызвано тем, что на практике непосредственные наблюдения за этими величинами для каждого стрелочного перевода почти недоступны. Хотя разрозненные наблюдения свидетельствуют о том, что, по-видимому, законы распределения длин составов и их скоростей движения являются нормальными. Но для корректной проверки данного предположения имеющейся статистики оказывается недостаточно.

В этой связи получаемые в дальнейшем оценкам вероятностей можно считать лишь первым приближением, которое требует уточнения при помощи построения имитационной модели работы станции.

Требуется определить вероятность  $P(A)$  столкновения поезда и маневрового состава на этом стрелочном переводе.

### 3.3.2. Оценка вероятности бокового столкновения и ее компонент

Для поиска искомой вероятности следующие события:

$A_m$  — столкновение на неизолированном стрелочном переводе, произошедшее по вине машиниста маневрового локомотива, проехавшего светофор с запрещающим сигналом;

$A_n$  — столкновение на неизолированном стрелочном переводе, произошедшее по вине машиниста поезда, проехавшего на запрещающий сигнал;

$A_{nc}$  — столкновение на неизолированном стрелочном переводе, произошедшее по вине машиниста маневрового состава, проехавшего на запрещающий сигнал и столкнувшегося со стоящими на стрелочном переводе вагонами поезда;

$A_{mc}$  — столкновение на неизолированном стрелочном переводе, произошедшее по вине машиниста поезда, проехавшего на запрещающий сигнал и столкнувшегося со стоящими на стрелочном переводе вагонами;

$A_{nn}$  — столкновение на неизолированном стрелочном переводе, произошедшее при про-

езде и маневровым составом, и поездом запрещающего сигнала светофора.

Тогда вероятность столкновения поезда и маневрового состава на неизолированном стрелочном переводе можно найти по формуле

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_M + A_{\Pi} + A_{\text{пс}} + A_{\text{мс}} + A_{\text{тп}}) \leq \\ &\leq P(A_M) + P(A_{\Pi}) + P(A_{\text{пс}}) + P(A_{\text{мс}}) + P(A_{\text{тп}}), \quad (3.17) \end{aligned}$$

так как вероятность суммы событий не больше суммы вероятностей этих событий [48].

Найдем вероятности событий, составляющих вероятность бокового столкновения.

Рассмотрим два возможных события. Пусть  $A_{\Pi(\Pi \rightarrow M)}$  — событие, состоящее в том, что поезд проехал светофор с запрещающим сигналом и локомотив поезда столкнулся с маневровым составом, когда тот проезжал неизолированный стрелочный перевод, а  $A_{\Pi(M \rightarrow \Pi)}$  — событие, состоящее в том, что поезд проехал светофор с запрещающим сигналом и произошло столкновение маневрового состава с поездом на неизолированном стрелочном переводе. Поскольку события  $A_{\Pi(\Pi \rightarrow M)}$ ,  $A_{\Pi(M \rightarrow \Pi)}$  являются несовместными, то

$$P(A_{\Pi}) = P(A_{\Pi(\Pi \rightarrow M)}) + P(A_{\Pi(M \rightarrow \Pi)}). \quad (3.18)$$

Найдем вначале  $P(A_{\Pi(\Pi \rightarrow M)})$ . Пусть поезд стоит перед стрелочным переводом. Тогда после начала движения поезда может произойти столкновение только с одним маневровым составом.

Пусть поезд в начальный (нулевой) момент времени находится перед рассматриваемым стрелочным переводом, на котором он оказывается через некоторое время  $\tau$ . Тогда

$$P(A_{\Pi(\Pi \rightarrow M)}) = P(B_1 B_1^+),$$

где событие  $B_1$  означает, что в момент  $\tau$  машинист поезда проехал светофор с запрещающим сигналом, а событие  $B_1^+$  — на стрелочном переводе в это время находится маневровый состав. Поскольку проезд машинистом поезда запрещающего сигнала и проведение маневровых работ на стрелочном переводе независимы, то и события  $B_1$  и  $B_1^+$  независимы. По этой причине

$$P(A_{\Pi(\Pi \rightarrow M)}) = P(B_1 B_1^+) = P(B_1)P(B_1^+).$$

Машинист поезда проезжает на запрещающий сигнал светофора с вероятностью  $P_{\Pi}$ , поэтому  $P(B_1) = P_{\Pi}$ . Для того чтобы маневровый состав находился на стрелочном переводе в тот самый момент, когда машинист поезда проезжает на запрещающий сигнал, он должен появиться на нем в любой момент времени от  $\tau - d_{\text{м}}/v_{\text{м}}$  до  $\tau$ , т.е. за время

$$\Delta = \tau - (\tau - d_{\text{м}}/v_{\text{м}}) = d_{\text{м}}/v_{\text{м}}.$$

По условию поток поезда маневровых составов через стрелки является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda_{\text{м}}$ . Поэтому вероятность события  $B_1^+$  вычисляется по формуле

$$P(B_1^+) = \lambda_{\text{м}}\Delta \exp\{-\lambda_{\text{м}}\Delta\} = \lambda_{\text{м}}\frac{d_{\text{м}}}{v_{\text{м}}} \exp\left\{-\lambda_{\text{м}}\frac{d_{\text{м}}}{v_{\text{м}}}\right\} \leq \lambda_{\text{м}}\frac{l_{\text{м}}}{v_{\text{м}}}.$$

Учитывая вышесказанное, получаем

$$P(A_{\Pi(\Pi \rightarrow \text{м})}) \leq P_{\Pi}\lambda_{\text{м}}\frac{l_{\text{м}}}{v_{\text{м}}}. \quad (3.19)$$

Найдем теперь  $P(A_{\Pi(\text{м} \rightarrow \Pi)})$ . Пусть по-прежнему поезд находится перед стрелочным переводом в начальный момент времени. Тогда вероятность события  $P(A_{\Pi(\text{м} \rightarrow \Pi)})$  вычисляется по формуле

$$P(A_{\Pi(\text{м} \rightarrow \Pi)}) = P(B_1 B_2^+),$$

где событие  $B_2^+$  означает, что за время проезда поездом стрелочного перевода появится маневровый состав. Используя определение условной вероятности, получаем

$$P(A_{\Pi(\text{м} \rightarrow \Pi)}) = P(B_1 B_2^+) = P(B_1)P(B_2^+|B_1),$$

где  $P(B_2^+|B_1)$  — вероятность того, что на стрелочном переводе появится маневровый состав за время проезда этой стрелки поездом, который находится на стрелке, проехав на запрещающий сигнал светофора. Эту вероятность можно вычислить, зная, насколько часто машинист маневрового локомотива успевает затормозить перед стрелочным переводом, видя поезд. Для простоты предположим, что экстренное торможение не помогает избежать столкновения в силу возникновения поезда прямо перед маневровой группой, тогда события  $B_1$  и  $B_2^+$  независимы и

$$P(A_{\Pi(\text{м} \rightarrow \Pi)}) = P(B_1 B_2^+) = P(B_1)P(B_2^+).$$

Поезд проезжает светофор с запрещающим сигналом с вероятностью  $P_{\Pi}$ , поэтому  $P(B_1) = P_{\Pi}$ . Отметим, что поезд проезжает стрелочный перевод с момента времени  $\tau$

до момента времени  $\tau + d_{\Pi}/v_{\Pi}$ . Поскольку время проезда поездом через стрелочный перевод равно

$$\Delta = \tau + d_{\Pi}/v_{\Pi} - \tau = d_{\Pi}/v_{\Pi},$$

то в силу пуассоновости потока маневровых составов вероятность события  $B_2^+$  вычисляется по формуле

$$P(B_2^+) = \lambda_M \Delta \exp\{-\lambda_M \Delta\} \leq \lambda_M \Delta = \lambda_M \frac{d_{\Pi}}{v_{\Pi}}.$$

Отсюда получаем

$$P(A_{\Pi(M \rightarrow \Pi)}) \leq P_{\Pi} \lambda_M \frac{d_{\Pi}}{v_{\Pi}}. \quad (3.20)$$

Учитывая (3.18)—(3.20), получаем

$$P(A_{\Pi}) = P(A_{\Pi(\Pi \rightarrow M)}) + P(A_{\Pi(M \rightarrow \Pi)}) \leq P_{\Pi} \lambda_M \frac{l_M}{v_M} + P_{\Pi} \lambda_M \frac{d_{\Pi}}{v_{\Pi}} = P_{\Pi} \lambda_M \left( \frac{l_M}{v_M} + \frac{d_{\Pi}}{v_{\Pi}} \right). \quad (3.21)$$

Рассмотрим следующие два события:

$A_{M(M \rightarrow \Pi)}$  — событие, состоящее в том, что маневровый состав проехал светофор с запрещающим сигналом и произошло столкновение маневрового локомотива с поездом, проезжающим неизолированный стрелочный перевод;

$A_{M(\Pi \rightarrow M)}$  — событие, состоящее в том, что маневровый состав проехал светофор с запрещающим сигналом и произошло столкновение локомотива поезда с маневровым составом на неизолированном стрелочном переводе.

Поскольку события  $A_{M(M \rightarrow \Pi)}$ ,  $A_{M(\Pi \rightarrow M)}$  являются попарно несовместными, то

$$P(A_M) = P(A_{M(M \rightarrow \Pi)}) + P(A_{M(\Pi \rightarrow M)}). \quad (3.22)$$

Найдем  $P(A_{M(M \rightarrow \Pi)})$ . Поскольку вероятность проезда машинистом маневрового состава светофора с запрещающим сигналом составляет  $P_M$ , то маневровые составы, проезжающие светофор с запрещающим сигналом, образуют поток событий, являющийся пуассоновским с интенсивностью  $\lambda_M P_M$ . В силу того, что поезд находится на стрелочном переводе с момента времени  $\tau$  до момента времени  $\tau + d_{\Pi}/v_{\Pi}$ , т.е. в течение времени

$$\Delta = \tau + d_{\Pi}/v_{\Pi} - \tau = d_{\Pi}/v_{\Pi},$$

событие  $A_{M(M \rightarrow \Pi)}$  означает, что за время  $\Delta$  на стрелочном переводе должен появиться маневровый состав из потока маневровых составов, проезжающих светофор с запрещающим сигналом. Поэтому

$$P(A_{M(M \rightarrow \Pi)}) = \lambda_M P_M \Delta \exp\{-\lambda_M P_M \Delta\} \leq \lambda_M P_M \Delta = \lambda_M P_M \frac{d_\Pi}{v_\Pi}. \quad (3.23)$$

Найдем  $P(A_{M(\Pi \rightarrow M)})$ . Поскольку для искомого события маневровый состав должен находиться в момент времени  $\tau$  на стрелочном переводе, то он должен появиться на стрелочном переводе с момента времени  $\tau - d_M/v_M$  до  $\tau$ , т.е. в течение времени

$$\Delta = \tau - (\tau - d_M/v_M) = d_M/v_M.$$

Так как маневровый состав при этом должен быть из потока составов, проезжающих светофор с запрещающим сигналом, то вероятность события  $A_{M(M \rightarrow \Pi)}$  вычисляется по формуле

$$P(A_{M(\Pi \rightarrow M)}) = \lambda_M P_M \Delta \exp\{-\lambda_M P_M \Delta\} \leq \lambda_M P_M \Delta = \lambda_M P_M \frac{d_M}{v_M}, \quad (3.24)$$

в предположении, что машинист поезда может отвлечься и не заметить препятствие, мешающее движению, если ему горит разрешающий сигнал светофора.

С учетом (3.22)—(3.24) получаем

$$P(A_M) = P(A_{M(M \rightarrow \Pi)}) + P(A_{M(\Pi \rightarrow M)}) \leq \lambda_M P_M \frac{d_\Pi}{v_\Pi} + \lambda_M P_M \frac{d_M}{v_M} = \lambda_M P_M \left( \frac{d_\Pi}{v_\Pi} + \frac{d_M}{v_M} \right). \quad (3.25)$$

Пусть поезд находится перед стрелочным переводом в момент времени  $\tau$ , а до времени остановки пройдет еще время  $\delta$ . Тогда

$$P(A_{\text{пс}}) = P(B_2 B_3^+),$$

где  $B_2$  — событие, заключающееся в том, что поезд остановился на рассматриваемой стрелке, а  $B_3^+$  — событие, заключающееся в том, что какой-то маневровый состав, проехал светофор с запрещающим сигналом, когда стрелочный перевод занят составом. Очевидно, что события  $B_2$  и  $B_3^+$  независимы, поэтому

$$P(A_{\text{пс}}) = P(B_2 B_3^+) = P(B_2)P(B_3^+).$$

Поскольку вероятность остановки поезда на стрелке составляет  $P_{\text{пс}}$ , то  $P(B_2) = P_{\text{пс}}$ . Вероятность проезда машинистом маневрового состава светофора с запрещающим сиг-

налом составляет  $P_M$ , поэтому маневровые составы, проезжающие светофор с запрещающим сигналом, образуют поток событий, являющийся пуассоновским с интенсивностью  $\lambda_M P_M$ . Поезд стоит на стрелочном переводе с момента времени  $\tau + \delta$  до момента времени  $\tau + \delta + \tau_{\text{пс}}$ . Поэтому для того, чтобы событие  $B_3^+$  произошло, за общее время стоянки

$$\Delta = \tau + \delta + \tau_{\text{пс}} - (\tau + \delta) = \tau_{\text{пс}}$$

на данном стрелочном переводе должен появиться маневровый состав. Отсюда вероятность события  $B_3^+$  вычисляется по формуле

$$P(B_3^+) = \lambda_M P_M \Delta \exp\{-\lambda_M P_M \Delta\} \leq \lambda_M P_M \Delta = \lambda_M P_M \tau_{\text{пс}}.$$

Таким образом, получаем

$$P(A_{\text{пс}}) = P(B_2 B_3^+) = P(B_2) P(B_3^+) \leq \lambda_M P_M P_{\text{пс}} \tau_{\text{пс}}. \quad (3.26)$$

Так как поток событий, связанных со стоящими вагонами, является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda_c$ , а  $\tau_c$  — среднее время нахождения вагонов на стрелочном переводе, то вероятность  $P(A_{\text{мс}})$  того, что поезд столкнется со стоящими на стрелочном переводе вагонами составляет

$$P(A_{\text{мс}}) = P(B_1 B_4^+),$$

где событие  $B_4^+$  означает, что вагоны находятся на стрелочном переводе в момент времени  $\tau$ . Поскольку очевидно, что события  $B_1$  и  $B_4^+$  независимы, то

$$P(A_{\text{мс}}) = P(B_1 B_4^+) = P(B_1) P(B_4^+).$$

Как и ранее, вероятность проезда поездом светофора с запрещающим сигналом составляет  $P_{\text{п}}$ , поэтому  $P(B_1) = P_{\text{п}}$ . Событие  $B_4^+$  может произойти только в случае, если вагоны появились на стрелочном переводе с момента времени  $\tau - \tau_c$  до момента времени  $\tau$ , т.е. за промежуток времени  $\Delta$  длиной

$$\Delta = \tau - (\tau - \tau_c) = \tau_c.$$

Отсюда

$$P(B_4^+) = \lambda_c \Delta \exp\{-\lambda_c \Delta\} \leq \lambda_c \Delta = \lambda_c \tau_c.$$

Следовательно,

$$P(A_{\text{мс}}) = P(B_1)P(B_4^+) \leq P_{\text{п}}\lambda_c\tau_c. \quad (3.27)$$

Рассмотрим следующие два события:

$A_{\text{тп}(м \rightarrow \text{п})}$  — событие, состоящее в том, что и маневровый состав, и поезд проехали светофор с запрещающим сигналом и маневровый состав столкнулся с поездом на неизолированном стрелочном переводе;

$A_{\text{тп}(\text{п} \rightarrow \text{м})}$  — событие, состоящее в том, что и маневровый состав, и поезд проехали светофор с запрещающим сигналом и поезд столкнулся с маневровым составом на неизолированном стрелочном переводе.

Найдем  $P(A_{\text{тп}(м \rightarrow \text{п})})$ . Поскольку поток маневровых составов, проезжающих на запрещающий сигнал светофора является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}$ , а поезд проезжает на запрещающий сигнал светофора с вероятностью  $P_{\text{п}}$ , вероятность искомого столкновения равна

$$P(A_{\text{тп}(м \rightarrow \text{п})}) = P_{\text{п}}(\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}\Delta \exp\{-\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}\Delta\}), \quad (3.28)$$

где второй множитель характеризует вероятность того, что за время проезда  $\Delta = d_{\text{п}}/v_{\text{п}}$  поездом стрелочного перевода на стрелочном переводе появится состав из потока маневровых составов, проезжающих на запрещающий сигнал светофора. Учитывая (3.28), получаем

$$P(A_{\text{тп}(м \rightarrow \text{п})}) \leq P_{\text{п}}\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}\Delta = \lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}P_{\text{п}}\frac{d_{\text{п}}}{v_{\text{п}}}. \quad (3.29)$$

Найдем  $P(A_{\text{тп}(\text{п} \rightarrow \text{м})})$ . Для осуществления искомого события на стрелочном переводе с момента времени  $\tau - d_{\text{м}}/v_{\text{м}}$  до момента времени  $d_{\text{м}}/v_{\text{м}}$ , т.е. за время

$$\Delta = \tau - (\tau - d_{\text{м}}/v_{\text{м}}) = d_{\text{м}}/v_{\text{м}},$$

должен появиться маневровый состав из потока маневровых составов интенсивности  $\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}$ , проезжающих запрещающий сигнал светофора, и при этом поезд также должен проехать запрещающий сигнал светофора. Поэтому

$$P(A_{\text{тп}(\text{п} \rightarrow \text{м})}) = P_{\text{п}}\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}\Delta \exp\{-\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}\Delta\} \leq P_{\text{п}}\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}\Delta = P_{\text{п}}\lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}\frac{d_{\text{м}}}{v_{\text{м}}}. \quad (3.30)$$

Таким образом, учитывая (3.29) и (3.30), имеем

$$P(A_{\text{тп}}) \leq \lambda_{\text{м}}P_{\text{м}}P_{\text{п}} \left( \frac{d_{\text{п}}}{v_{\text{п}}} + \frac{d_{\text{м}}}{v_{\text{м}}} \right). \quad (3.31)$$

Согласно формулам (3.17), (3.21), (3.25), (3.26), (3.27), (3.31) вероятность столкновения (событие  $A$ ) на одном неизолированном стрелочном переводе оценивается величиной

$$P(A) \leq \lambda_M P_M (1 + P_{\Pi}) \left( \frac{d_{\Pi}}{v_{\Pi}} + \frac{d_M}{v_M} \right) + \lambda_c P_{\Pi} \tau_c + \lambda_M P_{\Pi} \left( \frac{d_{\Pi}}{v_{\Pi}} + \frac{d_M}{v_M} \right) + \lambda_M P_M P_{\Pi c} \tau_{\Pi c}.$$

Если же рассматриваемый стрелочный перевод является изолированным, то столкновение невозможно, поэтому вероятность столкновения на этом переводе равна нулю. Будем в дальнейшем использовать наиболее консервативный вариант оценки вероятности столкновения  $A$  на произвольном (изолированном или неизолированном) стрелочном переводе:

$$P(A) = \left( \lambda_M \left( \frac{d_{\Pi}}{v_{\Pi}} + \frac{d_M}{v_M} \right) (P_M (1 + P_{\Pi}) + P_{\Pi}) + \lambda_c P_{\Pi} \tau_c + \lambda_M P_M P_{\Pi c} \tau_{\Pi c} \right) k_c, \quad (3.32)$$

где  $k_c$  принимает значение 1, если стрелочный перевод неизолированный, и 0, если изолированный.

### 3.3.3. Вероятность столкновения пассажирского (грузового) поезда при движении через станцию.

Заметим, что поезд, проезжая через станцию, пересекает несколько как изолированных, так и неизолированных стрелочных переводов, причем на любом из неизолированных стрелочных переводов возможно столкновение. Следовательно, помимо столкновения на одной конкретной стрелке необходимо вычислять вероятность столкновения на маршруте — последовательности стрелочных переводов, пересекаемых поездом при проезде через станцию.

Пусть у поезда с номером  $i$  имеется  $K$  маршрутов движения через станцию. Рассмотрим произвольный  $k$ -й маршрут  $R_k$ . Пусть на этом маршруте имеется  $M$  стрелочных переводов, которым присвоены номера  $j = 1, \dots, M$  согласно порядку пересечения их поездом. Тогда вероятность того, что с конкретным поездом на маршруте  $R_k$  произойдет столкновение, составляет

$$P(A_i | R_k) = P(A_{k:1}) + (1 - P(A_{k:1}))P(A_{k:2}) + \\ + (1 - P(A_{k:1}))(1 - P(A_{k:2}))P(A_{k:3}) + \dots + \prod_{j=1}^{M-1} (1 - P(A_{k:j}))P(A_{k:M}),$$

где  $P(A_i|R_k)$  означает вероятность столкновения поезда с номером  $i$ , пересекающего станцию по маршруту  $R_k$ , а  $P(A_{k:j})$  — вероятность столкновения поезда с номером  $i$ , пересекающего станцию по маршруту  $R_k$ , на стрелке с номером  $j$ . Эта вероятность  $P(A_{k:j})$  вычисляется по формуле (3.32). Отметим, что для разных поездов вероятность столкновения на одном и том же маршруте может отличаться, поскольку поезд может пересекать станцию без остановки, а может с остановкой, что влияет на среднюю скорость передвижения по станции. Аналогично, для одного и того же поезда вероятность столкновения на разных маршрутах может отличаться, поскольку на разных маршрутах может быть различное количество неизолированных стрелочных переводов, а также различная интенсивность проведения маневровых работ.

Каждый маршрут  $R_k$  может использоваться с определенной интенсивностью. Поэтому вероятность того, что прибывающий на станцию поезд с номером  $i$  проедет по маршруту  $R_k$  оценивается величиной

$$P(R_k) = \frac{m_{R_k}}{n}, \quad (3.33)$$

где  $m_{R_k}$  — число проехавших поездов с номером  $i$  по маршруту  $R_k$ , а  $n$  — общее число поездов с номером  $i$ , проехавших через станцию за некоторое время наблюдения. Таким образом, вероятность того, что произойдет боковое столкновение поезда с номером  $i$  при движении через станцию, по формуле полной вероятности составляет

$$P(A_i) = \sum_{k=1}^K P(A_i|R_k)P(R_k). \quad (3.34)$$

### 3.3.4. Пример

Применим описанную процедуру вычисления вероятности столкновения составов для конкретного примера.

Рассмотрим некоторую железнодорожную станцию. В таблице 3.16 представлены данные, описывающие ее топологию, характеристики составов, проходящих через станцию, а также маневровые работы, проводимые на станции.

Таблица 3.16. Блок данных, описывающий передвижения маневрового состава.

Наименование	Обозначение	Количество	Единицы измерения
Общее количество стрелок на станции	$n_{стр.}$	102	шт
Количество маневровых локомотивов	$n_{лок.}$	2	шт
Количество проезжаемых стрелок маневровой группой в час с локомотивом №1	$n_1^{стр.}$	36	шт
Количество проезжаемых стрелок маневровой группой в час с локомотивом №2	$n_2^{стр.}$	36	шт
Средняя длина маневрового локомотива	$d_M$	0,2	км
Средняя скорость движения маневрового состава по станции	$v_M$	4,2	км/ч
Вероятность проезда машинистом маневрового локомотива светофора с запрещающим сигналом при работе без помощника	$P_{M(один)}$	$3 \cdot 10^{-4}$	
Вероятность проезда машинистом маневрового локомотива светофора с запрещающим сигналом при работе с помощником	$P_{M(двое)}$	$10^{-4}$	
Вероятность комплектования локомотивной бригады машинистом и его помощником	$P_{двое}$	0,8	
Интенсивность останавливающихся на стрелочных переводах маневровых составов, не проехавших на запрещающий сигнал светофора (для каждого стрелочного перевода)	$\lambda_C^1$	0	1/ч
	$\lambda_C^{102}$	0	1/ч
Среднее время нахождения на стрелочном переводе маневрового состава, не проехавшего на запрещающий сигнал светофора, при условии остановки на стрелочном переводе (для каждого стрелочного перевода)	$\tau_C^1$	0	ч
	$\tau_C^{102}$	0	ч

Рассмотрим некоторый пассажирский поезд, который проезжает станцию без остановки.

Таблица 3.17. Блок данных, описывающий передвижение пассажирского поезда по станции.

Наименование	Обозначение	Количество	Единицы измерения
Средняя длина пассажирского поезда	$d_{\text{п}}$	0,48	км
Средняя скорость движения пассажирского поезда по станции	$v_{\text{п}}$	42	км/ч
Вероятность проезда запрещающего сигнала пассажирским поездом	$P_{\text{п}}$	$10^{-7}$	
Вероятность остановки пассажирского поезда на каком-нибудь стрелочном переводе	$P_{\text{пс}}$	0	
Среднее время стоянки пассажирского поезда на каком-нибудь стрелочном переводе	$\tau_{\text{пс}}$	0	ч

Вероятности  $P_{\text{м(один)}}$ ,  $P_{\text{м(двое)}}$ ,  $P_{\text{двое}}$  задаются на основании таблицы П. 5.2 «Вероятность ошибок человека-оператора» из [64]. Интенсивность пересечения маневровой группой стрелочного перевода для каждого стрелочного перевода равна

$$\tilde{\lambda}_{\text{м}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{лок.}}} \frac{n_i^{\text{стр.}}}{n_{\text{стр.}}} = \frac{36}{102} + \frac{36}{102} \approx 0,71,$$

где  $36/102$  — интенсивность пересечения произвольной стрелки маневровой группой с локомотивом №1 или с локомотивом №2.

Вычислим вероятность проезда запрещающего сигнала маневровой группой, которая зависит от вероятности  $P_{\text{двое}}$  того, что в локомотиве находится машинист и его помощник, а также от вероятностей  $P_{\text{м(двое)}}$  и  $P_{\text{м(один)}}$  того, что маневровая группа пересечет стрелочный перевод на запрещающий сигнал светофора, когда в кабине локомотива находится машинист и его помощник и когда в кабине находится только один машинист:

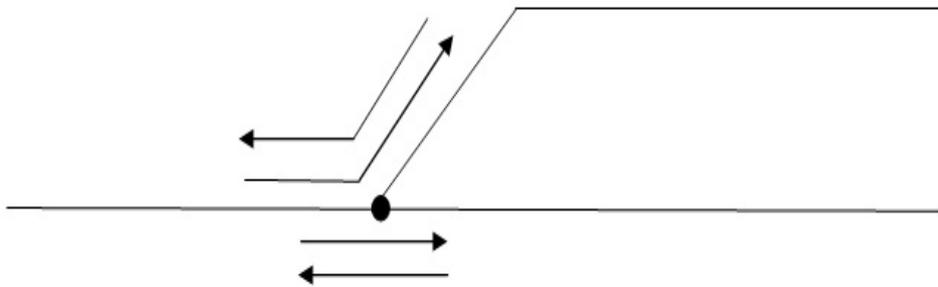
$$P_{\text{м}} = P_{\text{двое}}P_{\text{м(двое)}} + (1 - P_{\text{двое}})P_{\text{м(один)}} = 0,8 \cdot 10^{-4} + (1 - 0,8) \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 1,4 \cdot 10^{-4}.$$

Известно, что рассматриваемый пассажирский поезд пропускают только по двум маршрутам, причем первый маршрут ранее использовался этим поездом 19 раз, а второй использовался 1 раз. Рассмотрим первый маршрут  $R_1$  пересечения станции пассажирским поездом, состоящий из двенадцати (№№ 1—12) стрелок, в том числе четырех

(№3, №4, №7, №11) неизолированных, и вычислим вероятность столкновения на этом маршруте.

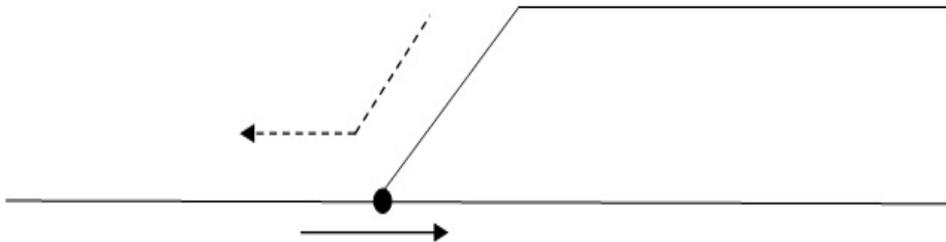
Предполагая, что маневровый локомотив пересекает стрелочный перевод равномерно в любом из возможных направлений (всего таких направлений может быть 4, см. рис. 3.6), интенсивность пересечения стрелки маневровой группой в некотором направлении вычисляется по формуле  $\lambda_m = \tilde{\lambda}_m/4$ .

Рисунок 3.6. Возможные направления следования (отмечены стрелочками) маневровой группы через стрелочный перевод (отмечен кружком).



При этом для возможного столкновения пассажирского поезда и маневрового состава последний должен проезжать стрелку лишь в одном направлении из четырех (см. рис. 3.7).

Рисунок 3.7. Направление следования (отмечено пунктирной стрелочкой) маневровой группы через стрелочный перевод (отмечен кружком), при котором возможно столкновение с пассажирским составом, следующим в направлении, показанном сплошной стрелочкой.



Вероятность столкновения на неизолированных стрелках №3, №4, №7, №11 вы-

числяется по формуле (3.32):

$$\begin{aligned} P(A_{1:3}) &= \lambda_M \left( \frac{d_{\Pi}}{v_{\Pi}} + \frac{d_M}{v_M} \right) (P_M(1 + P_{\Pi}) + P_{\Pi}) + \lambda_c P_{\Pi} \tau_c + \lambda_M P_M P_{\Pi c} = \\ &= 0,178 \left( \frac{0,48}{42} + \frac{0,2}{42} \right) (1,4 \cdot 10^{-4}(1 + 10^{-7}) + 10^{-7}) = 1,5 \cdot 10^{-6}. \\ P(A_{1:4}) &= P(A_{1:7}) = P(A_{1:11}) = 1,5 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Для изолированных стрелок №1, №2, №5, №6, №8, №9, №10, №12 вероятность столкновения на них равна нулю, т.е.

$$\begin{aligned} P(A_{1:1}) = P(A_{1:2}) = P(A_{1:5}) = P(A_{1:6}) = \\ = P(A_{1:8}) = P(A_{1:9}) = P(A_{1:10}) = P(A_{1:12}) = 0. \end{aligned}$$

Вероятность столкновения пассажирского поезда на маршруте  $R_1$  равна

$$\begin{aligned} P(A_1|R_1) &= 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 1 \cdot (1 - 1,5 \cdot 10^{-6}) \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot (1 - 1,5 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 - 1,5 \cdot 10^{-6}) \cdot 0 + \dots \approx 6 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй маршрут  $R_2$  пересечения станции пассажирским поездом, состоящий из четырнадцати (№№ 1–14) стрелок, в том числе пяти (№3, №4, №7, №11, №13) неизолированных.

Вероятность столкновения на неизолированных стрелках №3, №4, №7, №11, №13 вычисляется по формуле (3.32) и равна

$$P(A_{1:3}) = P(A_{1:4}) = P(A_{1:7}) = P(A_{1:11}) = P(A_{1:13}) = 1,5 \cdot 10^{-6}.$$

Для изолированных стрелок №1, №2, №5, №6, №8, №9, №10, №12, №14 вероятность столкновения на них равна нулю

$$\begin{aligned} P(A_{1:1}) = P(A_{1:2}) = P(A_{1:5}) = P(A_{1:6}) = P(A_{1:8}) = P(A_{1:9}) = P(A_{1:10}) = \\ = P(A_{1:12}) = P(A_{1:14}) = 0. \end{aligned}$$

Вероятность столкновения пассажирского поезда на маршруте  $R_2$ , таким образом, составляет

$$P(A_1|R_2) = 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 1 \cdot (1 - 1,5 \cdot 10^{-6}) \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} +$$

$$+1 \cdot 1 \cdot (1 - 1,5 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 - 1,5 \cdot 10^{-6}) \cdot 0 + \dots \approx 7,5 \cdot 10^{-6}.$$

Из соотношения (3.33) получаем, что вероятность использования маршрута  $R_1$  равна

$$P(R_1) = \frac{19}{19 + 1} = \frac{19}{20},$$

а вероятность использования маршрута  $R_2$  равна

$$P(R_2) = \frac{1}{19 + 1} = \frac{1}{20}.$$

Таким образом, вероятность столкновения пассажирского поезда при пересечении станции по формуле (3.34) равна

$$P(A_1) = P(A_1|R_1)P(R_1) + P(A_1|R_2)P(R_2) = 6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{19}{20} + 7,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{20} \approx 6,08 \cdot 10^{-6}.$$

Заметим, что полученная вероятность примерно равна вероятности катастрофы летательного аппарата по какой-либо технической причине, связанной с летной годностью [18], и представляет собой небольшое число.

### 3.4. Управление безопасностью движения по вероятностному и квантильному критериям на железнодорожных переездах

#### 3.4.1. Основные обозначения и предположения

Пусть имеется  $I$  поездов, которые за промежуток времени  $\mathcal{T}_+$  должны проследовать по транспортной сети, содержащей  $M$  железнодорожных переездов, на которых может произойти столкновение с автотранспортом, вызванное нарушением последним правил движения. Предполагается, что с одним поездом может произойти только одно столкновение<sup>4</sup>.

Разобьем промежуток времени  $\mathcal{T}_+$  на  $T$  частей. Пусть для  $i$ -го поезда заданы:

- $N_i$  – количество переездов, которые пересечет поезд;
- $j_{i,n}$  – номер  $n$ -го по порядку следования железнодорожного переезда ( $j_{i,n} \in \{1, \dots, M\}$ );

---

<sup>4</sup>Можно рассмотреть и другие постановки задач, например, вместо поездов можно рассматривать пакеты интернет-трафика, а в качестве переездов – роутеры (маршрутизаторы). Для такой предметной области «столкновением» будет утеря пакета на роутере.

- $t_{i,n}$  – номер промежутка пересечения  $n$ -го по порядку следования железнодорожного переезда внутри временного горизонта  $\mathcal{T}_+$  ( $t_{i,n} \in \{1, \dots, T\}$ ),

$$i = \overline{1, I}, n = \overline{1, N_i}.$$

Каждый железнодорожный переезд может быть оборудован теми или иными техническими средствами, позволяющими снизить вероятность столкновения. Далее такие технические средства будем для краткости называть системами защиты. Два набора технических средств будем считать различными системами защиты, если в них отличаются какие-то элементы. Например, автоматическую светофорную сигнализацию и автоматическую светофорную сигнализацию с автоматическими шлагбаумами будем считать различными системами защиты. Будем предполагать, что железнодорожный переезд может быть оборудован только одной системы защиты. Также предположим, что для  $m$ -го железнодорожного переезда заданы:

- $K_m$  – количество систем защиты, доступных для установки;
- $u_m^0$  – номер (пред)установленной системы защиты ( $u_m^0 \in \{1, \dots, K_m\}$ );
- $P_{m,k,t}$  – вероятность столкновения автотранспорта с поездом при пересечении последним переезда в  $t$ -й промежуток времени при установке на переезде системы защиты с номером  $k$ ;
- $c_{m,k}$  – стоимость замены текущей системы защиты на систему защиты с номером  $k$  (очевидно,  $c_{m,u_m^0} = 0$ ),

$m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, K_m}$ ,  $t = \overline{1, T}$ . На практике вероятности  $P_{m,k,t}$  могут быть оценены в форме частоты или более точно при наличии наблюдений не только за самим фактом столкновения, но и за сопутствующими происшествию факторами, например, временем года. Такая оценка может быть получена при помощи логистической или пробит-регрессий.

Введем вспомогательные бинарные переменные  $u_{m,k}$ , характеризующие установку на переезде с номером  $m$  системы защиты с номером  $k$ : 0 – на переезде с номером  $m$  система защиты с номером  $k$  не установлена, и 1 – иначе,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, K_m}$ . Символьно можно записать

$$u_{m,k} \in \{0, 1\}, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, K_m}. \quad (3.35)$$

На каждом переезде может быть установлена только одна из имеющихся систем защиты

$$\sum_{k=1}^{K_m} u_{m,k} = 1, m = \overline{1, M}. \quad (3.36)$$

Общий объем затрат, связанный с установкой (новых) систем защиты, не должен превышать объема фонда инвестиций  $C$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} u_{m,k} c_{m,k} \leq C. \quad (3.37)$$

Все переменные  $u_{1,1}, \dots, u_{1,K_1}, \dots, u_{M,1}, \dots, u_{M,K_M}$  объединяются в вектор  $u$ . Множество допустимых стратегий  $U$  формируется из векторов  $u$ , удовлетворяющих ограничениям (3.35)-(3.37).

С учетом (3.35), (3.36) и ранее введенных обозначений получаем, что вероятность  $P_{m,\cdot,t}(u)$  столкновения поезда с автотранспортом в  $t$ -й промежуток времени на переезде с номером  $m$  определяется по формуле

$$P_{m,\cdot,t}(u) \triangleq \sum_{k=1}^{K_m} u_{m,k} P_{m,k,t}, \quad m = \overline{1, M}, t = \overline{1, T}. \quad (3.38)$$

Введем в рассмотрение случайную величину  $X_i(u)$ , которая равна единице, если при выбранной стратегии установки систем защиты  $u$  с поездом с номером  $i$  произойдет столкновение на каком-то из переездов, и равна нулю в противоположном случае,  $i = \overline{1, N}$ . Вероятность  $q_i(u)$  того, что столкновений с поездом с номером  $i$  не произойдет, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} q_i(u) = & \underbrace{(1 - P_{j_{i,1},\cdot,t_{i,1}})}_{\substack{\text{вероятность того, что} \\ \text{на первом по порядку} \\ \text{следования переезде} \\ \text{не произойдет} \\ \text{столкновения}}} \cdot \underbrace{(1 - P_{j_{i,2},\cdot,t_{i,2}})}_{\substack{\text{вероятность того, что} \\ \text{на втором по порядку} \\ \text{следования переезде} \\ \text{не произойдет} \\ \text{столкновения}}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(1 - P_{j_{i,N_i},\cdot,t_{i,N_i}})}_{\substack{\text{вероятность того, что} \\ \text{на } N_i\text{-м по порядку} \\ \text{следования переезде} \\ \text{не произойдет} \\ \text{столкновения}}} = \\ & = \prod_{n=1}^{N_i} (1 - P_{j_{i,n},\cdot,t_{i,n}}(u)), \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Отметим, что для любых случайных событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  справедливо

$$P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}) = 1 - P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Поэтому верно

$$q_i(u) \geq \tilde{q}_i(u) \triangleq 1 - \sum_{n=1}^{N_i} P_{j_{i,n}, t_{i,n}}(u), \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.40)$$

И, как следствие,

$$\tilde{p}_i(u) \triangleq 1 - \tilde{q}_i(u) \geq 1 - q_i(u) = p_i(u), \quad (3.41)$$

где  $p_i(u)$  – вероятность того, что с поездом с номером  $i$  произойдет столкновение.

Очевидно, что  $X_i(u) \sim \text{Bi}(1, p_i(u))$ , где  $p_i(u) \triangleq 1 - q_i(u)$ . Сделаем допущение, что случайные величины  $X_1(u), X_2(u), \dots, X_N(u)$  независимы. Такое допущение предполагает, что даже в случае возникновения столкновения на том или ином переезде, этот переезд продолжает функционировать. Для железнодорожных переездов такое предположение выполняется не всегда: на ликвидацию последствий столкновений на переездах может уйти даже около суток. Однако спрогнозировать перенос движения поездов на другие пути, а, следовательно, скорректировать величины  $p_i(u)$  вряд ли представляется возможным,  $i = \overline{1, N}$ . Поэтому допущение о независимости, хотя и не всегда может быть признано справедливым, открывает путь к нахождению приближенных к оптимальным стратегиям улучшения железнодорожной инфраструктуры.

Введем случайную величину  $X(u)$ , характеризующее суммарное количество столкновений:

$$X(u) \triangleq X_1(u) + X_2(u) + \dots + X_I(u).$$

Введем в рассмотрение функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}(X(u) \leq \varphi), \quad \varphi \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.42)$$

Функция  $P_\varphi(u)$  характеризует вероятность того, что за промежуток времени  $\mathcal{T}_+$  произойдет не более  $\varphi$  столкновений. На практике цель состоит в максимизации функции  $P_\varphi(u)$  при  $\varphi = 0$ . В этом случае будет найдена стратегия, при которой вероятность того, что не произойдет ни одного столкновения, максимальна.

Также рассмотрим связанную с функцией вероятности  $P_\varphi(u)$  функцию квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Функция квантили характеризует наименьшее количество столкновений, которые произойдут в течение промежутка времени  $\mathcal{T}_+$ , на заданном уровне надежности  $\alpha$ . Так как

рассматриваемая задача – задача по увеличению надежности системы, то в дальнейшем будем рассматривать только  $\alpha > 1/2$ .

Поставим следующие задачи повышения надежности функционирования железнодорожной сети

$$P_0(u) \rightarrow \max_{u \in U}, \quad (3.43)$$

$$\varphi_\alpha(u) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3.44)$$

### 3.4.2. Оптимизация функции вероятности

По определению функции вероятности (3.42) имеем

$$P_0(u) = \mathcal{P}(X(u) \leq 0).$$

В виду того, что случайные величины  $X_1(u), X_2(u), \dots, X_I(u)$  неотрицательны и независимы, имеем

$$\begin{aligned} P_0(u) &= \mathcal{P}(X(u) = 0) = \mathcal{P}(X_1(u) + X_2(u) + \dots + X_I(u) = 0) = \\ &= \mathcal{P}(\{X_1(u) = 0\} \cdot \{X_2(u) = 0\} \cdot \dots \cdot \{X_I(u) = 0\}) = \\ &= \mathcal{P}(X_1(u) = 0) \cdot \mathcal{P}(X_2(u) = 0) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}(X_I(u) = 0) = \prod_{i=1}^I q_i(u). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Подставляя (3.45) в (3.39), получаем

$$P_0(u) = \prod_{i=1}^I \prod_{n=1}^{N_i} (1 - P_{j_{i,n}, t_{i,n}}(u)).$$

Учитывая (3.38), имеем

$$P_0(u) = \prod_{i=1}^I \prod_{n=1}^{N_i} \left( 1 - \sum_{k=1}^{K_{j_{i,n}}} u_{j_{i,n}, k} P_{j_{i,n}, k, t_{i,n}} \right).$$

Таким образом, найдено аналитическое выражение критериальной функции  $P_0(u)$ . Однако ее непосредственная оптимизация неудобна ввиду того, что критериальная функция является нелинейной и к тому же содержит целочисленные переменные. Однако имеет место следующая лемма.

**ЛЕММА 3.1.** *Для функции*

$$P_0^L(u) = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{K_{j_{i,n}}} u_{j_{i,n}, k} \ln (1 - P_{j_{i,n}, k, t_{i,n}})$$

справедливо тождество

$$\text{Arg max}_{u \in U} P_0^L(u) \equiv \text{Arg max}_{u \in U} P_0(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1.

Имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \ln(P_0(u)) &= \ln \left[ \prod_{i=1}^I \prod_{n=1}^{N_i} \left( 1 - \sum_{k=1}^{K_{j_{i,n}}} u_{j_{i,n},k} P_{j_{i,n},k,t_{i,n}} \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^{N_i} \ln \left( 1 - \sum_{k=1}^{K_{j_{i,n}}} u_{j_{i,n},k} P_{j_{i,n},k,t_{i,n}} \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Так как на каждом перегезде может быть установлена только одна система защиты, то

$$\ln \left( 1 - \sum_{k=1}^{K_{j_{i,n}}} u_{j_{i,n},k} P_{j_{i,n},k,t_{i,n}} \right) = \sum_{k=1}^{K_{j_{i,n}}} u_{j_{i,n},k} \ln (1 - P_{j_{i,n},k,t_{i,n}}). \quad (3.47)$$

Поэтому, подставляя (3.47) в (3.46), получаем

$$\ln(P_0(u)) = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{K_{j_{i,n}}} u_{j_{i,n},k} \ln (1 - P_{j_{i,n},k,t_{i,n}}).$$

Далее зададим функцию  $P_0^L(u) \triangleq \ln(P_0(u))$ . В виду того, что логарифм – монотонно возрастающая функция, то множество стратегий, доставляющих оптимум для функции  $\ln(P_0(u))$ , будет совпадать со множеством стратегий, доставляющим оптимум  $P_0(u)$ .

Лемма доказана.

Учитывая вышесказанное, задача (3.43) сводится к задаче

$$P_0^L(u) \rightarrow \max_{u \in U}, \quad (3.48)$$

которая представляет собой задачу целочисленного линейного программирования.

Пусть  $u_0^*$  – точка, доставляющая оптимум в (3.48)

### 3.4.3. Оптимизация функции квантили

Так как найти закон распределения случайной величины  $X(u)$  затруднительно, будем искать приближенное решение задачи (3.44). Для этого найдем нижнюю границу функции  $P_\varphi(u)$ .

ЛЕММА 3.2.  $\forall \varepsilon \geq 0 \forall \varphi \in \mathbb{Z}_+ \forall u \in U$  справедливо неравенство

$$P_\varphi(u) \geq \tilde{P}_\varphi(u, \varepsilon) \triangleq 1 - \frac{\prod_{i=1}^I [\tilde{q}_i(u) + \tilde{p}_i(u) \exp(\varepsilon)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Вначале проведем несложные преобразования

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}(X(u) \leq \varphi) = 1 - \mathcal{P}(X(u) > \varphi).$$

В виду того, что  $\varphi \in \mathbb{Z}_+$ , имеют место равенства

$$P_\varphi(u) = 1 - \mathcal{P}(X(u) > \varphi) = 1 - \mathcal{P}(X(u) \geq \varphi + 1).$$

Используя неравенство Чернова, получаем

$$P_\varphi(u) = 1 - \mathcal{P}(X(u) \geq \varphi + 1) \geq 1 - \frac{\mathbf{M}[\exp(\varepsilon X(u))]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))} \quad \forall \varepsilon \geq 0. \quad (3.49)$$

В виду независимости случайных величин  $X_1(u), X_2(u), \dots, X_N(u)$  получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\exp(\varepsilon X(u))] &= \mathbf{M}[\exp(\varepsilon(X_1(u) + X_2(u) + \dots + X_I(u)))] = \\ &= \mathbf{M}[\exp(\varepsilon X_1(u))] \mathbf{M}[\exp(\varepsilon X_2(u))] \cdot \dots \cdot \mathbf{M}[\exp(\varepsilon X_I(u))] = \prod_{i=1}^I \underbrace{\mathbf{M}[\exp(\varepsilon X_i(u))]}_{\substack{\text{производящая} \\ \text{функция} \\ \text{СВ } X_i(u)}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Поскольку случайная величина  $X_i(u)$  имеет распределение Бернулли, согласно [90] получаем

$$\mathbf{M}[\exp(\varepsilon X_i(u))] = q_i(u) + p_i(u) \exp(\varepsilon). \quad (3.51)$$

Подставляя (3.51) в (3.50), имеем

$$\mathbf{M}[\exp(\varepsilon X(u))] = \prod_{i=1}^I [q_i(u) + p_i(u) \exp(\varepsilon)]. \quad (3.52)$$

Учитывая (3.49), (3.52), получаем

$$P_\varphi(u) \geq 1 - \frac{\prod_{i=1}^I [q_i(u) + p_i(u) \exp(\varepsilon)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))}. \quad (3.53)$$

С использованием (3.40), (3.41) получаем

$$P_\varphi(u) \geq 1 - \frac{\prod_{i=1}^I [q_i(u) + p_i(u) \exp(\varepsilon)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))} = 1 - \frac{\prod_{i=1}^I [1 - p_i(u) + p_i(u) \exp(\varepsilon)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))} =$$

$$= 1 - \frac{\prod_{i=1}^I [1 + p_i(u)(\exp(\varepsilon) - 1)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))}.$$

Так как по условию  $\varepsilon \geq 0$ , а  $p_i(u) \geq 0$  по определению,  $i = \overline{1, N}$ , то, учитывая (3.41), получаем

$$\frac{\prod_{i=1}^I [1 + p_i(u)(\exp(\varepsilon) - 1)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))} \leq \frac{\prod_{i=1}^I [1 + \tilde{p}_i(u)(\exp(\varepsilon) - 1)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))}.$$

Следовательно,

$$P_\varphi(u) \geq 1 - \frac{\prod_{i=1}^I [1 + \tilde{p}_i(u)(\exp(\varepsilon) - 1)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))} = 1 - \frac{\prod_{i=1}^I [\tilde{q}_i(u) + \tilde{p}_i(u) \exp(\varepsilon)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))}.$$

Введя функцию  $\tilde{P}_\varphi(u, \varepsilon)$  как правую часть последнего равенства, получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

Для приближенного решения задачи (3.44) для каждого  $\varphi \in \mathbb{Z}_+$  необходимо решить задачу

$$\tilde{P}_\varphi(u, \varepsilon) \rightarrow \max_{u \in U, \varepsilon \geq 0}. \quad (3.54)$$

Пусть  $(\tilde{u}_\varphi^*, \varepsilon_\varphi^*)$  – точка, доставляющая оптимум в последней задаче. Если для некоторого  $\varphi^*$  справедливо  $\tilde{P}_{\varphi^*}(\tilde{u}_{\varphi^*}^*, \varepsilon_{\varphi^*}^*) \geq \alpha$ , то в качестве приближенной к оптимальной стратегии в задаче (3.44) выбирается  $\tilde{u}_{\varphi^*}^*$ , а оценкой величины  $\varphi_\alpha(u_\alpha^*)$  является  $\varphi^*$ , где  $u_\alpha^*$  – точка, доставляющая оптимум в задаче (3.44).

Отметим, что для решения задачи (3.54) можно использовать другую задачу

$$\frac{\prod_{i=1}^I [\tilde{q}_i(u) + \tilde{p}_i(u) \exp(\varepsilon)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))} \rightarrow \min_{u \in U, \varepsilon \geq 0}. \quad (3.55)$$

Прологарифмировав критериальную функцию в (3.55), окончательно получаем следующую задачу оптимизации

$$\sum_{i=1}^I \ln [\tilde{q}_i(u) + \tilde{p}_i(u) \exp(\varepsilon)] - \varepsilon(\varphi + 1) \rightarrow \min_{u \in U, \varepsilon \geq 0}.$$

Данная задача может быть решена при помощи решателя SCIP.

### 3.4.4. Пример

Пусть имеется  $M = 10$  железнодорожных переездов, каждый из которых может быть оборудован одной из 8 систем защиты, т.е.  $K_1 = K_2 = \dots = K_M = 8$ . Поделим сутки на 2 части. В таблице 3.18 зададим вероятности возникновения столкновений на переездах в зависимости от той или иной системы защиты и части суток.

Таблица 3.18. Данные по вероятностям (умноженным на  $10^{-9}$ ) возникновения столкновений с поездом при пересечении им различных переездов при установке на последних различных систем защиты (СЗ) в первую | вторую половина суток

Переезд \ СЗ	i		ii		iii		iv		v		vi		vii		viii	
1	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
2	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
3	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
4	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
5	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
6	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
7	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
8	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
9	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0
10	40	30	25	20	20	15	15	12	13	10	9	8	5	3	0	0

Предположим, что стоимости установки систем защиты на переездах задаются согласно таблице 3.19.

Таблица 3.19. Данные по стоимости установки различных систем защиты на различных переездах (жирным выделены СЗ, пред(установленные) на переезде)

Переезд	Возможные системы защиты (стоимость установки, млн. руб.)							
1	<b>i</b> (0)	ii (0,6)	iii (0,7)	iv (0,9)	v (1)	vi (1,2)	vii (1,5)	viii (800)
2	i (0,1)	<b>ii</b> (0)	iii (0,1)	iv (0,3)	v (0,4)	vi (0,6)	vii (0,9)	viii (800)
3	<b>i</b> (0)	ii (0,6)	iii (0,7)	iv (0,9)	v (1)	vi (1,2)	vii (1,5)	viii (800)
4	i (0,1)	<b>ii</b> (0)	iii (0,1)	iv (0,3)	v (0,4)	vi (0,6)	vii (0,9)	viii (800)
5	<b>i</b> (0)	ii (0,6)	iii (0,7)	iv (0,9)	v (1)	vi (1,2)	vii (1,5)	viii (800)
6	<b>i</b> (0)	ii (0,6)	iii (0,7)	iv (0,9)	v (1)	vi (1,2)	vii (1,5)	viii (800)
7	<b>i</b> (0)	ii (0,6)	iii (0,7)	iv (0,9)	v (1)	vi (1,2)	vii (1,5)	viii (800)
8	i (0,1)	<b>ii</b> (0)	iii (0,7)	iv (0,9)	v (1)	vi (1,2)	vii (1,5)	viii (800)
9	i (0,1)	ii (0,1)	iii (0,1)	<b>iv</b> (0)	v (0,1)	vi (0,3)	vii (0,6)	viii (800)
10	i (0,1)	ii (0,1)	iii (0,1)	<b>iv</b> (0)	v (0,1)	vi (0,3)	vii (0,6)	viii (800)

Пусть имеется  $I = 9300$  поездов. Предположим, что пересечение переездов поездами происходит либо только в первую половину суток, либо только во вторую. Пусть

маршруты движения поездов, то есть набор номеров переездов, последовательно пересекаемых поездами, задаются согласно таблице 3.20.

Таблица 3.20. Маршруты и время движения поездов.

Маршрут движения	Половина суток	Количество поездов
1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10	Первая	1000
1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10	Вторая	300
1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6	Первая	3000
1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6	Вторая	1000
1 → 3 → 5 → 6 → 7	Первая	1500
1 → 3 → 5 → 6 → 7	Вторая	1500
5 → 6 → 7 → 9 → 10	Первая	500
5 → 6 → 7 → 9 → 10	Вторая	500

Рассмотрим два возможных варианта: когда общий фонд инвестиций в установку систем защиты  $C$  равняется 2 и 3 млн рублей соответственно. Зафиксируем  $\alpha = 0,999$ .

При проведении численных экспериментов оказалось, что для  $C = 2$   $\varphi^* = 1$ ,  $P_0(u_0^*) = 0,9987$ , а для  $C = 3$   $\varphi^* = 1$ ,  $P_0(u_0^*) = 0,9989$ . Стратегии по модификации и установке СЗ приведем в следующей таблице.

Таблица 3.21. Данные по переездам и стратегии по установке СЗ.

Переезд	Количество пересекающих переезд поездов		Изна- чальная	СЗ на переезде			
	В первую поло- вину суток	Во вторую поло- вину суток		Оптимальная			
				$C = 2$		$C = 3$	
			$u_0^*$	$\tilde{u}_{\varphi^*}^*$	$u_0^*$	$\tilde{u}_{\varphi^*}^*$	
1	5500	2800	i	i	i	iii	iii
2	4000	1300	ii	iii	iii	iii	ii
3	5500	2800	i	i	i	iii	iii
4	4000	1300	ii	iii	iii	iii	ii
5	6000	3300	i	iv	iv	iii	iv
6	6000	3300	i	iv	iv	iii	iii
7	3000	2300	i	i	i	i	i
8	1000	300	ii	ii	ii	ii	ii
9	1500	800	iv	iv	iv	iv	iv
10	1500	800	iv	iv	iv	iv	iv

Прокомментируем результаты в таблице 3.21. Как видно из этой таблицы, стратегии по квантильному и вероятностному критерию не всегда совпадают. При  $C = 2$  по предлагаемым стратегиям инвестиции предполагается направить большей частью на переезды с большим количеством поездов. При  $C = 3$  расходование фонда инвестиций более равномерно. Если сравнивать расход средств на СЗ для различных переездов, то

для приближенной к оптимальной по квантильному критерию стратегии расход менее равномерен, чем по вероятностному критерию.

В виду того, что для поиска стратегии  $\tilde{u}_{\varphi^*}^*$  необходимо решать задачи смешанного целочисленного нелинейного программирования время поиска такой стратегии существенно больше, чем при оптимизации вероятностного критерия. Так, при  $C = 3$  стратегия  $\tilde{u}_{\varphi^*}^*$  была найдена за 1,5 часа, в то время как стратегия  $u_0^*$  была найдена за 1 секунду. Однако целиком отказываться от квантильного критерия – нецелесообразно. Рациональным представляется поиск оптимальной по вероятностному критерию стратегии  $u_0^*$  и использованию ее в качестве приближенного решения в задаче (3.55), либо же поиск такого  $\varphi$ , при котором

$$\max_{\varepsilon \geq 0} \tilde{P}_{\varphi}(u_0^*, \varepsilon) \geq \alpha.$$

Такое значение  $\varphi$  будет характеризовать гарантированное на уровне  $\alpha$  количество столкновений при выборе стратегии  $u_0^*$ .

Отдельно отметим, что если в рассматриваемом примере количество поездов пропорционально удвоить, то время вычислений приближенной к оптимальной стратегии по квантильному критерию увеличится на 25 %. Любопытно особенно для квантильного критерия проанализировать время вычислений при различных значениях вероятностей, количества поездов и систем защиты, но в то же время поиск приближенной к оптимальной по квантильному критерию стратегии может быть быстрее при использовании другого решателя.

Все результаты получены при помощи пакета Opti Toolbox в программе Matlab на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 16 GB DDR3 RAM).

### 3.5. Основные результаты главы 3

1. Разработан метод оценивания закона распределения количества подвижных единиц грузового поезда в сходе с рельсов.
2. На основе моделей бинарного выбора решена задача оценивания вероятности нарушения габарита соседнего пути хотя бы одной сошедшей с рельсов подвижной единицей грузового поезда.
3. Разработан метод оценивания вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции.

4. Разработан метод уменьшения количества происшествий на железнодорожных переездах.

**Основные результаты главы опубликованы в [19–24,36,39,41–44,46,110].**

## 4. Интегральный риск на всём заранее заданном пути следования транспортного средства

В разделе 4.1 находится закон распределения ущерба на всём заранее заданном пути следования транспортного средства; приводятся две функции интегрального (общего на всем пути следования) риска. В разделе 4.2 формулируется концепция оценки компонент интегрального риска при движении грузовых поездов: приводится ряд требуемых для оценки интегрального риска параметров движения, указываются необходимые для расчета вероятности и величины ущерба, приводятся их оценки.

### 4.1. Функции интегрального риска

Пусть задан некоторый путь следования некоего транспортного средства. Разделим этот путь на  $S \in \mathbb{N}$  непересекающихся участков. При движении происходит управление скоростью: пусть  $v_s$  – скорость на  $s$ -м участке,  $s = \overline{1, S}$ . Для упрощения модель допускает мгновенное изменение скорости на участке. При этом скорость считается заданной детерминированной величиной. Пусть на каждом участке при движении могут произойти  $n$  неблагоприятных событий (транспортных происшествий). Обозначим через  $A_{si}$  событие, заключающееся в том, что на  $s$ -м участке произойдет  $i$ -е событие,  $s = \overline{1, S}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Например, на железнодорожном транспорте такими событиями могут выступать сход с рельсов по причине неисправности подвижного состава, сход с рельсов по причине неисправности железнодорожного полотна. Будем предполагать, что на одном участке может произойти максимум одно неблагоприятное событие, причем если это событие наступает, то далее движение не осуществляется. Введем обозначения:  $P_{1i}(v_1) = \mathcal{P}(A_{1,i})$ ,  $P_{si}(v_s) = \mathcal{P}\left(A_{s,i} \mid \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{j=1}^n \bar{A}_{t,j}\right)$ ,  $s = \overline{2, S}$ , т.е. для  $s \geq 2$   $P_{si}(v_s)$  – это вероятность того, что на  $s$ -м участке произойдет  $i$ -е неблагоприятное событие, при условии, что на предыдущих  $s - 1$  участках неблагоприятных событий не произошло. Если  $P_{si}(v_s)$  не точные значения вероятностей, то равенства выше понимаются в смысле оценок вероятностей. Ущерб  $C_{si}(v_s)$  от возникновения  $i$ -го неблагоприятного события на  $s$ -м участке будем полагать случайной величиной с известным распределением, параметры которого определяются только скоростью. Дополнительно предположим, что

математическое ожидание  $\mathbf{M}[C_{si}(v_s)]$  конечно для любого значения скорости  $v_s$ .

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Случайная величина  $\Phi(v_1, \dots, v_S)$  – ущерб на всем заранее заданном пути следования – имеет вид*

$$\Phi(v_1, \dots, v_S) = \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^n C_{si}(v_s) I(A_{s,i}),$$

где  $I(A_{s,i})$  – индикатор события  $A_{s,i}$ , вероятность которого

$$\mathcal{P}(A_{s,i}) = P_{si}(v_s) \prod_{t=1}^{s-1} \left( 1 - \sum_{j=1}^n P_{tj}(v_t) \right), \quad s = \overline{2, S}, i = \overline{1, n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Выберем некоторое  $i \in \{1, \dots, n\}$ . По условию  $P_{1i}(v_1) = \mathcal{P}(A_{1,i})$ . Далее найдем вероятность того, что  $i$ -е неблагоприятное событие произойдет на 2-м участке. Для того чтобы это событие произошло, на 1-м участке неблагоприятных событий произойти не должно. Поэтому

$$\mathcal{P}(A_{2,i}) = \mathcal{P}(A_{2,i} | \bar{A}_{1,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{1,n}) \mathcal{P}(\bar{A}_{1,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{1,n}).$$

Используя равенство  $\mathcal{P}(\bar{A}_{1,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{1,n}) = 1 - \mathcal{P}(A_{1,1} + \dots + A_{1,n})$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_{2,i}) &= \mathcal{P}(A_{2,i} | \bar{A}_{1,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{1,n}) \left[ 1 - \mathcal{P} \left( \sum_{j=1}^n A_{1,j} \right) \right] = \\ &= P_{2i}(v_2) \left[ 1 - \mathcal{P} \left( \sum_{j=1}^n A_{1,j} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Так как события  $A_{1,1}, \dots, A_{1,n}$  несовместны по условию, получаем  $\mathcal{P} \left( \sum_{j=1}^n A_{1,j} \right) = \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{1,j})$ . Отсюда имеем

$$\mathcal{P}(A_{2,i}) = P_{2i}(v_2) \left( 1 - \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{1,j}) \right) = P_{2i}(v_2) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right].$$

Теперь найдем вероятность того, что  $i$ -е неблагоприятное событие произойдет на 3-м участке. Аналогичными рассуждениями получаем

$$\mathcal{P}(A_{3,i}) = \mathcal{P}(A_{3,i} | \bar{A}_{1,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{1,n} \cdot \bar{A}_{2,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{2,n}) \mathcal{P}(\bar{A}_{1,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{1,n} \cdot \bar{A}_{2,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{2,n}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= P_{3i}(v_3)(1 - \mathcal{P}(A_{1,1} + \dots + A_{1,n} + A_{2,1} + \dots + A_{2,n})) = \\
 &= P_{3i}(v_3) \left( 1 - \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{1,j}) - \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{2,j}) \right) = \\
 &= P_{3i}(v_3) \left( \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] \right) = \\
 &= P_{3i}(v_3) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \right] \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right].
 \end{aligned}$$

Вероятность того, что  $j$ -е неблагоприятное событие произойдет на 4-м участке определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 P(A_{4,i}) &= \mathcal{P}(A_{4,i} | \bar{A}_{1,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{1,n} \cdot \bar{A}_{2,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{2,n} \cdot \bar{A}_{3,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{3,n}) \cdot \\
 &\quad \cdot \mathcal{P}(\bar{A}_{1,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{1,n} \cdot \bar{A}_{2,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{2,n} \cdot \bar{A}_{3,1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{3,n}) = \\
 &= P_{4i}(v_4)(1 - \mathcal{P}(A_{1,1} + \dots + A_{1,n} + A_{2,1} + \dots + A_{2,n} + A_{3,1} + \dots + A_{3,n})) = \\
 &= P_{4i}(v_4) \left( 1 - \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{1,j}) - \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{2,j}) - \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{3,j}) \right) = \\
 &= P_{4i}(v_4) \left( \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^n P_{3j}(v_3) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \right] \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] \right) = \\
 &= P_{4i}(v_4) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{3j}(v_3) \right] \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \right] \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right].
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что аналогичные рассуждения повторяются на последующих метрах маршрута и дают по индукции

$$\mathcal{P}(A_{s,i}) = P_{si}(v_s) \prod_{t=1}^{s-1} \left( 1 - \sum_{j=1}^n P_{tj}(v_t) \right), \quad s = \overline{2, S}, i = \overline{1, n}.$$

Найдем теперь вероятность того, что с транспортным средством при движении не произойдет ни одного неблагоприятного события, т.е.

$$\mathcal{P} \left( \prod_{s=1}^S \prod_{j=1}^n \bar{A}_{s,j} \right) = 1 - \mathcal{P} \left( \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^n A_{s,j} \right) = 1 - \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{s,j}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) - \sum_{s=2}^S \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{s,j}) = \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] - \sum_{s=3}^S \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{s,j}) = \\
 &\quad = \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \right] - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n P_{3j}(v_3) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \right] - \sum_{s=4}^S \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{s,j}) = \\
 &= \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{1j}(v_1) \right] \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{2j}(v_2) \right] \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{3j}(v_3) \right] - \sum_{s=4}^S \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(A_{s,j}) = \\
 &\quad = \dots = \prod_{s=1}^S \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{sj}(v_s) \right].
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теперь в качестве функции интегрального риска можно предложить следующие два варианта

$$R_1(v_1, \dots, v_S) = 1 - \mathcal{P} \left( \prod_{s=1}^S \prod_{j=1}^n \bar{A}_{s,j} \right) = 1 - \prod_{s=1}^S \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{sj}(v_s) \right],$$

$$R_2(v_1, \dots, v_S) = \mathbf{M} [\Phi(v_1, \dots, v_S)] = \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^n \mathbf{M}[C_{si}(v_s)] P_{si}(v_s) \prod_{t=1}^{s-1} \left[ 1 - \sum_{j=1}^n P_{tj}(v_t) \right].$$

Функция  $R_1(v_1, \dots, v_S)$  при выборе режима движения, то есть набора скоростей  $v_1, \dots, v_S$ , характеризует вероятность того, что на всем пути следования произойдет неблагоприятное событие. Функция  $R_2(v_1, \dots, v_S)$  позволяет вычислить средний ущерб при транспортировке. В конкретных задачах целесообразным может оказаться использование как первой, так и второй функции, а уместнее всего использовать их комбинацию. Это вызвано тем, что при выбранном наборе скоростей  $v_1, \dots, v_S$  вероятность возникновения неблагоприятного события  $R_1(v_1, \dots, v_S)$  может быть небольшой, но средний ущерб  $R_2(v_1, \dots, v_S)$  при выборе такого режима движения может оказаться неоправданно высоким. Напротив, может оказаться, что прогнозируемый средний ущерб при заданном наборе скоростей  $v_1, \dots, v_S$  невелик, однако неблагоприятные события возникают часто.

#### 4.2. Статистическое оценивание вероятности и ущерба при движении грузовых поездов

В качестве примера практической реализуемости полученных в предыдущем разделе соотношений рассмотрим задачу по оцениванию компонент функций интегрального риска при движении грузовых поездов.

Пусть  $S$  – длина пути следования грузового поезда в метрах. Таким образом, разбиение пути следования происходит по метрам.

Зафиксируем некоторый промежуток времени  $\mathcal{T}_-$  в прошлом. Пусть  $L^B$  – число вагонов,  $L^{\text{лок.}}$  – число секций локомотива, а  $d_l$  – длина  $l$ -й подвижной единицы от головы поезда, округленная в большую сторону до метров. Для удобства введем величину  $S_0 = d_1 + d_2 + \dots + d_L$ , где  $L$  – общее число подвижных единиц грузового поезда, т.е.  $L = L^{\text{лок.}} + L^B$ .

Введем также обозначения:

$p_1$  – число сходов с рельсов/крушений за промежуток времени  $\mathcal{T}_-$  вне стрелочных переводов по причине неисправности подвижного состава;

$p_2$  – число сходов с рельсов/крушений за промежуток времени  $\mathcal{T}_-$  вне стрелочных переводов по причине неисправности железнодорожного полотна;

$p_3$  – число сходов с рельсов/крушений за промежуток времени  $\mathcal{T}_-$  на стрелочных переводах;

$p_{\text{общ.}}$  – общее число сходов с рельсов/крушений за промежуток времени  $\mathcal{T}_-$ ;

$Q'_1$  – число вагоно-километров (т.е. суммарное расстояние, пройденное всеми вагонами) за промежуток времени  $\mathcal{T}_-$ ;

$Q'_2$  – число поездо-километров (т.е. суммарное расстояние, пройденное всеми поездами) за промежуток времени  $\mathcal{T}_-$ ;

$w$  – вес поезда, т.;

$\tilde{\mu} = w/(69L^B) - 1/3$  – величина, характеризующая степень загрузки поезда;

$\varkappa_s$  – кривизна кривой на  $s$ -м метре пути (величина, обратно пропорциональная радиусу кривизны кривой, для прямой полагается равной нулю);

$\gamma_s$  – профиль пути на  $s$ -м метре пути, измеряемый в тысячных, имеющий знак минус, если уклон представляет спуск, знак плюс, если уклон представляет подъем, ед.;

$\zeta_s$  – величина, характеризующая наличие стрелочного перевода на  $s$ -м метре пути (0 –

нет стрелочного перевода, 1 – есть);

$\chi_s$  – величина, характеризующая наличие соседнего/соседних пути/путей на  $s$ -м метре пути (0 – нет соседнего пути, 1 – есть);

$\eta_s$  – величина, характеризующая начало железнодорожного переезда на  $s$ -м метре пути (0 – железнодорожной переезд не начинается на  $s$ -м метре пути, 1 – иначе);

$\xi_s$  – величина, характеризующая начало стрелочного перевода на  $s$ -м метре пути в пределах железнодорожной станции (0 – стрелочный перевод на  $s$ -м метре пути в пределах станции, 1 – иначе),  $s = \overline{2 - S_0, S}$ .

Будем рассматривать следующие неблагоприятные события

$$A_{s,i} = \left\{ \begin{array}{l} \text{сход } \lfloor (i-1)/L \rfloor + 1 \text{ подвижных единиц по причине} \\ \text{неисправности подвижного состава вне стрелочного перевода} \\ \text{по прошествии } s \text{ метров пути, начиная с} \\ i - \lfloor (i-1)/L \rfloor \cdot L \text{ подвижной единицы} \end{array} \right\}, i = \overline{1, L^2},$$

$$A_{s,i} = \left\{ \begin{array}{l} \text{сход } \lfloor (i-1-L^2)/L \rfloor + 1 \text{ подвижных единиц по причине} \\ \text{неисправности ж/д пути вне стрелочного перевода} \\ \text{по прошествии } s \text{ метров пути, начиная с} \\ i - L^2 - \lfloor (i-1-L^2)/L \rfloor \cdot L \text{ подвижной единицы} \end{array} \right\}, i = \overline{L^2 + 1, 2L^2},$$

$$A_{s,i} = \left\{ \begin{array}{l} \text{сход } \lfloor (i-1-2L^2)/L \rfloor + 1 \text{ подвижных единиц на} \\ \text{стрелочном переводе,} \\ \text{по прошествии } s \text{ метров пути, начиная с} \\ i - 2L^2 - \lfloor (i-1-2L^2)/L \rfloor \cdot L \text{ подвижной единицы} \end{array} \right\}, i = \overline{2L^2 + 1, 3L^2},$$

$$A_{s,3L^2+1} = \left\{ \text{столкновение на ж/д переезде, начинающемся на } s\text{-м метре пути} \right\},$$

$$A_{s,3L^2+2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{боковое столкновение на ж/д станции на стрелочном переводе,} \\ \text{начинающемся на } s\text{-м метре пути} \end{array} \right\},$$

где  $\lfloor x \rfloor$  здесь и далее обозначает целую часть  $x$ .

Такой способ нумерации позволяет одним индексом  $i$  пронумеровать все события в группе с учетом как номера подвижной единицы, с которой начнется сход, так и числа сошедших подвижных единиц в сходе, т.е.  $L^2$  вариантов, и, кроме того, позволяет учесть разницу причин, вызвавших неблагоприятное событие. Проиллюстрируем принцип работы предложенной нумерации, введя для лаконичности обозначение

$$q_i \triangleq \begin{cases} \lfloor (i-1)/L \rfloor + 1, & i = \overline{1, L^2}, \\ \lfloor (i-1-L^2)/L \rfloor + 1, & i = \overline{L^2 + 1, 2L^2}, \\ \lfloor (i-1-2L^2)/L \rfloor + 1, & i = \overline{2L^2 + 1, 3L^2}. \end{cases}$$

$$f_i \triangleq \begin{cases} i - \lfloor (i-1)/L \rfloor \cdot L, & i = \overline{1, L^2}, \\ i - L^2 - \lfloor (i-1-L^2)/L \rfloor \cdot L, & i = \overline{L^2+1, 2L^2}, \\ i - 2L^2 - \lfloor (i-1-2L^2)/L \rfloor \cdot L, & i = \overline{2L^2+1, 3L^2}. \end{cases}$$

Значение  $q_i$  характеризует число подвижных единиц в сходе с рельсов,  $f_i$  – номер первой сошедшей подвижной единицы.

В таблице 4.1 представлен расчет для  $L = 10$ .

Таблица 4.1. Потенциальное число подвижных единиц в сходе с рельсов и номер первой сошедшей подвижной единицы при  $L = 10$ .

Сход вне стрелочного перевода по причине неисправности подвижного состава			Сход вне стрелочного перевода по причине неисправности ж/д пути			Сход на стрелочном переводе		
$i$	$q_i$	$f_i$	$i$	$q_i$	$f_i$	$i$	$q_i$	$f_i$
1	1	1	101	1	1	201	1	1
2	1	2	102	1	2	202	1	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	1	10	110	1	10	210	1	10
11	2	1	111	2	1	211	2	1
12	2	2	112	2	2	212	2	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	2	10	120	2	10	220	2	10
...	...	...	...	...	...	...	...	...
91	10	1	191	10	1	291	10	1
92	10	2	192	10	2	292	10	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
100	10	10	200	10	10	300	10	10

#### 4.2.1. Свертка вероятностей

В [74, 79] была предложена следующая (с учетом используемых обозначений) оценка вероятности схода с рельсов подвижных единиц грузового поезда (при движении по конкретному классу пути)

$$\mathcal{P}(A_{\text{сх.}}) = 1 - \exp \left\{ -S'' \left( \frac{p_1 + p_2 + p_3}{Q_1''} L + \frac{p_{\text{общ.}} - p_1 - p_2 - p_3}{Q_2''} \right) \right\},$$

где  $S''$  – длина пути в милях,  $Q_1''$  – число вагоно-миль за промежуток времени  $\mathcal{T}$ ,  $Q_2''$  – число поездо-миль за промежуток времени  $\mathcal{T}$ . Пусть  $S'$  – длина пути в километрах.

Тогда при пересчете миль в километры и метры имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_{\text{сх.}}) &= 1 - \exp \left\{ -\frac{S'}{1,609} \left( \frac{p_1 + p_2 + p_3}{Q'_1/1,609} L + \frac{p_{\text{общ.}} - p_1 - p_2 - p_3}{Q'_2/1,609} \right) \right\} = \\ &= 1 - \exp \left\{ -S \left( \frac{p_1 + p_2 + p_3}{1000Q'_1} L + \frac{p_{\text{общ.}} - p_1 - p_2 - p_3}{1000Q'_2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$Q_1 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{1000Q'_1}, \quad Q_2 = \frac{p_{\text{общ.}} - p_1 - p_2 - p_3}{1000Q'_2},$$

будем далее полагать

$$\mathcal{P}(A_{\text{сх.}}) = 1 - \exp\{-S(Q_1L + Q_2)\}. \quad (4.2)$$

Таким образом, оценка вероятности схода с рельсов (4.2) зависит от количества подвижных единиц в поезде, расстояния, которое должен проследовать поезд, а также от характеристик, связанных с количеством сходов и пройденным расстоянием всеми поездами/вагонами в прошлом. Одновременно и преимуществом, и недостатком формулы (4.2) является то, что для ее использования не требуется детальная информация (скоростной режим, количество неисправностей пути, возраст каждой подвижной единицы, сведения о ремонтах подвижных единиц) о передвижениях поездов, когда сход не происходил. Получение такой информации вряд ли возможно.

Согласно (4.2) вероятность схода с рельсов на 1-м метре дистанции равна

$$\mathcal{P}(A_{\text{сх.,1}}) = 1 - \exp\{-(Q_1L + Q_2)\}. \quad (4.3)$$

Условная вероятность того, что сход произойдет на 2-м метре дистанции при условии, что на 1-м метре схода не произошло, вычисляется при решении уравнения

$$\mathcal{P}(A_{\text{сх.,1}}) + \mathcal{P}(A_{\text{сх.,2}}|\bar{A}_{\text{сх.,1}})\mathcal{P}(\bar{A}_{\text{сх.,1}}) = 1 - \exp\{-2(Q_1L + Q_2)\}.$$

Подставляя (4.3) в последнее уравнение, получаем

$$\begin{aligned} 1 - \exp\{-(Q_1L + Q_2)\} + \mathcal{P}(A_{\text{сх.,2}}|\bar{A}_{\text{сх.,1}}) \exp\{-(Q_1L + Q_2)\} = \\ = 1 - \exp\{-2(Q_1L + Q_2)\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Решая (4.4), получаем

$$\mathcal{P}(A_{\text{сх.,2}}|\bar{A}_{\text{сх.,1}}) = 1 - \exp\{-(Q_1L + Q_2)\}.$$

И далее по индукции

$$P_s \triangleq \mathcal{P}(A_{\text{сх.},s} | \prod_{t=1}^{s-1} \bar{A}_{\text{сх.},t}) = 1 - \exp\{-(Q_1 L + Q_2)\}, s = \overline{1, S},$$

где  $P_s$  – вероятность того, что сход произойдет на  $s$ -м метре дистанции при условии, что на предыдущих  $s - 1$  метрах сход не произошел.

Введем вспомогательные вероятности, необходимые для задания  $P_{si}(v_s)$ :  $\bar{P}^{s,l}$ ,  $\tilde{P}^{s,l}$ ,  $\hat{P}^{s,l}$  – вероятность (оценка вероятности) того, что сход начнется с  $l$ -й по порядку следования подвижной единицы по причине:

- неисправности подвижного состава вне стрелочного перевода ( $\bar{P}^{s,l}$ );
- неисправности железнодорожного полотна вне стрелочного перевода ( $\tilde{P}^{s,l}$ );
- неисправности любого вида на стрелочном переводе ( $\hat{P}^{s,l}$ )

при условии схода по прошествии  $s$  метров пути,  $s = \overline{1, S}$ ,  $l = \overline{1, L}$ .

В предположении, что номер первой по счету сошедшей подвижной единицы имеет равномерное распределение на множестве  $\{1, \dots, L\}$ , а также, основываясь на частоте сходов по причине той или иной неисправности и учитывая наличие/отсутствие стрелочного перевода в предполагаемом месте схода, зададим

$$\begin{aligned} \bar{P}^{s,l} &= \frac{1}{L} (1 - \zeta_{s-(d_1+d_2+\dots+d_{l-1})}) \frac{p_1}{p_1 + p_2}, s = \overline{1, S}, l = \overline{1, L}, \\ \tilde{P}^{s,l} &= \frac{1}{L} (1 - \zeta_{s-(d_1+d_2+\dots+d_{l-1})}) \frac{p_2}{p_1 + p_2}, s = \overline{1, S}, l = \overline{1, L}, \\ \hat{P}^{s,l} &= \frac{1}{L} \zeta_{s-(d_1+d_2+\dots+d_{l-1})}, s = \overline{1, S}, l = \overline{1, L}. \end{aligned}$$

Очевидно, что вероятности  $\bar{P}^{s,l}$ ,  $\tilde{P}^{s,l}$ ,  $\hat{P}^{s,l}$  должны зависеть от возраста и состояния рельсов, возраста и условий эксплуатации той или иной подвижной единицы, однако для простоты использованы оценки вероятности в форме частоты. Имеет смысл более точное оценивание, которое, однако, представляет собой отдельную задачу.

Пусть  $\bar{P}_{s,l,k}(v_s)$ ,  $\tilde{P}_{s,l,k}(v_s)$ ,  $\hat{P}_{s,l,k}(v_s)$  – вероятность (оценка вероятности) схода  $k$  подвижных единиц грузового поезда при условии схода по прошествии  $s$  метров пути с учетом того, что сход начнется с  $l$ -й по порядку следования подвижной единицы по причине:

- неисправности подвижного состава вне стрелочного перевода ( $\overline{P}_{s,l,k}(v_s)$ );
- неисправности железнодорожного полотна вне стрелочного перевода ( $\tilde{P}_{s,l,k}(v_s)$ );
- неисправности любого вида на стрелочном переводе ( $\hat{P}_{s,l,k}(v_s)$ ),

$$s = \overline{1, S}, l = \overline{1, L}, k = \overline{1, L}.$$

Следуя результатам, полученным в главе 3, зададим

$$\begin{aligned} \overline{P}_{s,l,k}(v_s) &= \frac{\Gamma(k-1+1/\theta_1^*)}{\Gamma(k)\Gamma(1/\theta_1^*)} \times \\ &\times (1 + \theta_1 g_1(a_1^*, L-l+1, v_s, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}_{s-\sum_{r=1}^{l-1} d_r}, \gamma_{s-\sum_{r=1}^{l-1} d_r}))^{-(k-1+1/\theta_1^*)} \times \\ &\times (\theta_1 g_1(a_1^*, L-l+1, v_s, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}_{s-\sum_{r=1}^{l-1} d_r}, \gamma_{s-\sum_{r=1}^{l-1} d_r}))^{k-1}, s = \overline{1, S}, l = \overline{1, L}, k = \overline{1, L}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $a_1^*, \theta_1^*$  – параметры, а  $g_1(\cdot)$  – функция, найденная в главе 3. Отметим, что в качестве функции  $g_1(\cdot)$  можно выбрать и некоторую другую. Аналогичным (4.5) образом задаются  $\tilde{P}_{s,l,k}(v_s)$  и  $\hat{P}_{s,l,k}(v_s)$  с точностью до замены параметров  $a_1^*$  и  $\theta_1^*$  и функции  $g_1(\cdot)$  на параметры  $a_2^*, a_3^*, \theta_2^*, \theta_3^*$  и функции  $g_2(\cdot), g_3(\cdot)$  соответственно,  $s = \overline{1, S}, l = \overline{1, L}, k = \overline{1, L}$ .

Роли вероятностей  $P_s, \overline{P}^{s,l}, \overline{P}_{s,l,k}(v_s)$  при вычислении  $P_{si}(v_s)$  иллюстрирует следующая схема:

$$\begin{aligned} P_{si}(v_s) &= \mathcal{P} \left( \left\{ \begin{array}{l} \text{сход } q_i \text{ подвижных единиц по} \\ \text{причине неисправности} \\ \text{пути, начиная с } f_i\text{-й по счету,} \\ \text{вне стрелки после } s \text{ метров}^5 \end{array} \right\} \left| \left\{ \begin{array}{l} \text{на предыдущих} \\ s-1 \text{ метрах} \\ \text{не произошло неблаго-} \\ \text{приятных событий} \end{array} \right\} \right) = \\ &= \mathcal{P} \left( \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{сход} \\ \text{после} \\ s \text{ метров} \end{array} \right\} \left| \left\{ \begin{array}{l} \text{на предыдущих} \\ s-1 \text{ метрах} \\ \text{не произошло неблаго-} \\ \text{приятных событий} \end{array} \right\}}_{=P^s \approx P_s} \right) \times \\ &\times \mathcal{P} \left( \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{сход по причине} \\ \text{неисправности пути} \\ \text{начиная с } f_i\text{-й по счету} \\ \text{подвижной единицы} \\ \text{вне стрелки} \end{array} \right\} \left| \left\{ \begin{array}{l} \text{на предыдущих} \\ s-1 \text{ метрах} \\ \text{не произошло неблаго-} \\ \text{приятных событий,} \\ \text{сход после } s \text{ метров} \end{array} \right\}}_{=\overline{P}^{s,f_i}} \right) \times \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Когда поезд проследует  $s$ -й метр своего пути

$$\times \mathcal{P} \left( \left\{ \begin{array}{c} \text{сход } q_i \\ \text{подвижных} \\ \text{единиц} \end{array} \right\} \left| \left\{ \begin{array}{c} \text{на предыдущих } s-1 \text{ метрах} \\ \text{не произошло неблагоприятных} \\ \text{событий, сход после } s \text{ метров} \\ \text{по причине неисправности пути,} \\ \text{начиная с } f_i\text{-й по счету подвижной} \\ \text{единицы вне стрелки} \end{array} \right\} \right),$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{=\bar{P}_{s,f_i,q_i}(v_s)}$$

$$i = \overline{1, L^2}.$$

Прокомментируем приближенное равенство  $P^s \approx P_s$

$$\begin{aligned} P_s &= \mathcal{P} \left( A_{\text{cx.,s}} \left| \prod_{t=1}^{s-1} \bar{A}_{\text{cx.,t}} \right. \right) = \mathcal{P} \left( A_{\text{cx.,s}} \left| \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{3L^2} \bar{A}_{t,i} \right. \right) = \\ &= \mathcal{P} \left( A_{\text{cx.,s}} \left| \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{3L^2} \bar{A}_{t,i} \left( \prod_{i=3L^2+1}^{3L^2+2} \bar{A}_{t,i} + \sum_{i=3L^2+1}^{3L^2+2} A_{t,i} \right) \right. \right) = \\ &= \frac{\mathcal{P} \left( A_{\text{cx.,s}} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{3L^2+2} \bar{A}_{t,i} \right)}{\mathcal{P} \left( \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{3L^2+2} \bar{A}_{t,i} \right) + \mathcal{P} \left( \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{3L^2} \bar{A}_{t,i} \sum_{i=3L^2+1}^{3L^2+2} A_{s-1,i} \right)} \approx \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\approx 1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\approx 0, \text{ т.к. вероятность любого неблагоприятного} \\ \text{события должна быть около нуля} \\ \text{в противном случае начинать движение опасно}} \\ &\approx \frac{\mathcal{P} \left( A_{\text{cx.,s}} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{3L^2+2} \bar{A}_{t,i} \right)}{\mathcal{P} \left( \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{3L^2+2} \bar{A}_{t,i} \right)} = \mathcal{P} \left( A_{\text{cx.,s}} \left| \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{3L^2+2} \bar{A}_{t,i} \right. \right) = P^s. \end{aligned}$$

Учитывая вышесказанное, получаем следующие оценки для величин  $P_{si}(v_s)$

$$P_{si}(v_s) = \begin{cases} P_s \bar{P}^{s,f_i} \bar{P}_{s,f_i,q_i}(v_s), & i = \overline{1, L^2}, \\ P_s \tilde{P}^{s,f_i} \tilde{P}_{s,f_i,q_i}(v_s), & i = \overline{L^2 + 1, 2L^2}, \\ P_s \hat{P}^{s,f_i} \hat{P}_{s,f_i,q_i}(v_s), & i = \overline{2L^2 + 1, 3L^2}. \end{cases}$$

В конце добавим, что вероятность  $P_{s3L^2+1}(v_s)$  можно оценить, например, при помощи имитационного моделирования [7], либо на основе пуассоновских потоков [36], при этом полученное число надо умножить на  $\xi_s$ . Вероятность  $P_{s3L^2+2}(v_s)$  может быть оценена в форме частоты на основании статистики по пересечениям грузовыми поездами переездов и столкновениям на них, полученное число при этом умножается на  $\eta_s$ .

#### 4.2.2. Оценивание ущерба

Будем исследовать только материальный ущерб. Ущерб, связанный с задержками поездов, вызванных происхождением неблагоприятных событий, в виду сложности пересчета в материальный ущерб, учитывать не будем. Иными словами, предполагается, что ущерб при задержках отсутствует.

При сходе с рельсов ущерб включает в себя расходы, связанные с ремонтом/списанием подвижных единиц грузового поезда. Поскольку стоимость различных видов ремонта подвижных единиц грузовых поездов, участвовавших в сходах и крушениях, недоступна, предложим следующую оценку среднего размера ущерба

$$\mathbf{M}[C_{si}(v_s)] = 10^5 \cdot P_{si}^a(v_s) + 4,5 \cdot 10^6 \cdot \frac{9}{200} \cdot v_s \cdot \begin{cases} q_i, & f_i + q_i - 1 \leq L, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.6)$$

где  $P_{si}^a(v_s)$  – оценка вероятности выхода в габарит соседнего пути хотя бы одной подвижной единицы грузового поезда,  $i = \overline{1, 3L^2}$ . Согласно [65] средний ущерб от столкновений составляет 1599 тыс. рублей, а по открытым источникам примерно каждый 16 раз в случае выхода в габарит соседнего пути происходит столкновение со встречным поездом. Поэтому средний ущерб при выходе в габарит соседнего пути оценивается в  $1599000/16 \approx 10^5$  рублей, что и составляет множитель  $P_{si}^a(v_s)$  в (4.6). Отметим, что данный множитель, вообще говоря, зависит от интенсивности встречного движения. Поэтому приведенное число следует рассматривать лишь как некоторое начальное приближение. Далее, скорость в 80 км/ч (как правило, выше этого порога скорость грузового поезда недопустима) эквивалентна 200/9 м/с, поэтому множитель 9/200 используется в формуле (4.6). Заметим, что 4,5 млн рублей – приблизительная стоимость нового грузового вагона. При этом в сходе с рельсов может оказаться и секция локомотива, однако повреждение секции локомотива до исключения из инвентарного парка намного более редкое событие, чем исключение вагона, поэтому для простоты предполагается, что максимальный ущерб от схода секции локомотива равен стоимости нового вагона. Следует отметить, что с ростом скорости растет и кинетическая энергия, а, следовательно, и последствия для подвижных единиц от схода. Поэтому в (4.6) предполагается линейный рост размера ущерба с ростом скорости. Значение  $P_{si}^a(v_s)$  можно

взять из раздела 3.2.4., а именно

$$P_{si}^a(v_s) = \begin{cases} \chi_{s-\sum_{r=1}^{f_i-1} d_r} \times \\ \times \hat{p}_1(b_1^*, q_i, L - f_i + 1, v_s, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}_{s-\sum_{r=1}^{f_i-1} d_r}, \gamma_{s-\sum_{r=1}^{f_i-1} d_r}), & i = \overline{1, L^2}, \\ \chi_{s-\sum_{r=1}^{f_i-1} d_r} \times \\ \hat{p}_2(b_2^*, q_i, L - f_i + 1, v_s, w, L, L^B, \tilde{\mu}, \mathfrak{a}_{s-\sum_{r=1}^{f_i-1} d_r}, \gamma_{s-\sum_{r=1}^{f_i-1} d_r}), & i = \overline{L^2 + 1, 2L^2}, \\ 1, & i = \overline{2L^2 + 1, 3L^2}. \end{cases}$$

Вместо функций  $\hat{p}_1(\cdot)$  и  $\hat{p}_2(\cdot)$  можно использовать и другие.

При столкновениях на железнодорожном переезде, как правило, виновным признается владелец автотранспорта, поэтому ущерб, вызванный столкновением, компенсируется, откуда

$$\mathbf{M}[C_{si}(v_s)] = 0, s = \overline{1, S}, i = 3L^2 + 1.$$

Аналогично согласно [65] можно положить

$$\mathbf{M}[C_{si}(v_s)] = 1599000, s = \overline{1, S}, i = 3L^2 + 2.$$

#### 4.2.3. Пример

Выберем промежуток времени  $\mathcal{T}_-$  с 2013 по 2016 гг. Согласно [22]  $p_{\text{общ.}} = 246$ ,  $p_1 = 150$ ,  $p_2 = 38$ ,  $p_3 = 46$ . Данные о величинах  $Q_1$  и  $Q_2$  в открытых источниках за данный период отсутствуют. Предположим, что  $Q'_1 = 1,8 \cdot 10^{11}$ ,  $Q'_2 = 3 \cdot 10^9$ . Отметим, что при таких значениях чисел  $Q'_1$  и  $Q'_2$  вероятность (4.2) имеет тот же порядок, что и аналогичная вероятность из [74]. Пусть  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 58$ ,  $w = 5000$ ,  $S = 250000$ . Положим  $d_1 = d_2 = 20$ ,  $d_3 = d_4 = \dots = d_{L_0+L_1} = 14$ . Таким образом, длина состава  $S_0 = 852$ . Пусть движение происходит по двухпутной железной дороге, т.е.  $\chi_s = 1$ ,  $s = \overline{2 - S_0, S}$ , железнодорожных переездов нет, т.е.  $\eta_s = 0$ ,  $s = \overline{2 - S_0, S}$ , а стрелочные переводы располагаются не в пределах станций ( $\xi_s = 0$ ,  $s = \overline{2 - S_0, S}$ ), но на каждом километре пути так, что

$$\zeta_s = \begin{cases} 1, & s = \overline{(j-1)1000 + 1, (j-1)1000 + 30}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $j = \overline{1, \lfloor S/1000 \rfloor}$ .

Зададим в таблице 4.2 кривизну и уклон на пути движения.

Таблица 4.2. Карта подъемов, спусков и кривых

$s$	$\alpha_s$	$\gamma_s$	$s$	$\alpha_s$	$\gamma_s$
[1,50000]	1/2000	-0,0001	[110001,150000]	1/1000	0,008
[50001,60000]	1/1500	-0,009	[150001,200000]	0	0
[60001,70000]	1/1500	-0,003	[200001,205000]	1/600	0,005
[70001,100000]	0	0,01	[205001,220000]	0	-0,01
[100001,110000]	1/800	-0,004	[220001,250000]	0	0,005
[-850,0]	0	0			

Выберем различные режимы движения, т.е. наборы скоростей, которые приведем в таблице 4.3.

Таблица 4.3. Значения скоростей в м/с при различных режимах движения

$s$	$v_s^1$	$v_s^2$	$v_s^3$	$s$	$v_s^1$	$v_s^2$	$v_s^3$
[1;50000]	12,5	16	16,34	[110001;150000]	12,5	12,5	10
[50001;60000]	12,5	10	11,5	[150001;200000]	12,5	20	16,28
[60001;70000]	12,5	12,5	12,5	[200001;205000]	12,5	5	10,5
[70001;100000]	12,5	10	10,5	[205001;220000]	12,5	6	10
[100001;110000]	12,5	10	12,5	[220001;250000]	12,5	16	11,692

Отметим, что для всех режимов время проследования маршрута одинаково и составляет 20000 секунд.

Вычисленные значения функций интегрального риска на рассматриваемых режимах движения приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4. Значения интегральных функций риска при различных режимах движения

Функция риска \ Режим движения	1	2	3
$R_1(v_1, \dots, v_S)$	$2,049 \cdot 10^{-5}$	$2,049 \cdot 10^{-5}$	$2,049 \cdot 10^{-5}$
$R_2(v_1, \dots, v_S)$	173,25	188,15	170,14

Прокомментируем полученные в таблице 4.4 результаты. Значения функции  $R_1(\cdot)$  на рассмотренных режимах движения ожидаемо примерно равны (в таблице 4.4 данные приведены с округлением), т.к. в предложенной концепции оценки вероятностей

неблагоприятных событий величина  $P_s$  не зависит от скорости, а

$$\forall s \in \{1, \dots, S\} \quad \forall v_s > 0 \quad \sum_{i=1}^{3L^2} P_{si}(v_s) \approx P_s.$$

Отметим, что в последней формуле используется приближенное, а не точное равенство, т.к. у применяемого при прогнозировании числа подвижных единиц в сходе с рельсов отрицательного биномиального распределения бесконечное число значений.

Комментируя значения функции  $R_2(\cdot)$ , следует обратить внимание на небольшие по абсолютной величине значения. Хотя последствия схода могут исчисляться миллионами рублей, средний ущерб на рассмотренных данных составляет порядка 130 рублей. Это вызвано тем, что сход с рельсов является крайне редким событием. Действительно, согласно (4.2) вероятность схода составляет  $2,05 \cdot 10^{-5}$ . Как отмечено в главе 3, в среднем сходит 4,23 подвижные единицы. При предполагаемом максимальном ущербе от схода подвижной единицы в 4,5 млн рублей и средней скорости в 12,5 м/с получаем, что в среднем ущерб от схода составляет порядка 220 рублей. Таким образом, порядок цифр верен. Однако в то же время возникает вопрос, зачем использовать рассмотренный в диссертации сложный аппарат для оценивания функции  $R_2(\cdot)$ . Ответ в том, что благодаря представленной концепции выяснилось, что *средний ущерб при различных режимах движения может отличаться на 10%*. А это значит, что выбором скоростного режима можно существенно сократить средний ущерб от схода.

Необходимо отметить, что значения функции интегрального риска в [5] несколько отличаются от аналогичных из таблицы 4.3, что вызвано использованием отличной от [5] функцией  $g_2(\cdot)$ . Данный результат показывает важность не только выбора скоростного режима, но и важность оценки различных компонент риска, особенно распределение количества единиц подвижного состава в сходе рельсов по причине неисправности железнодорожного полотна.

### 4.3. Основные результаты главы 4

1. Доказана теорема о виде закона распределения потерь при движении по некоторому заданному пути следования транспортного средства.

2. Найден явный вид функций интегрального (на всем пути следования) риска: среднего ущерба и вероятности возникновения неблагоприятных событий.

3. Сформулирована концепция статистического оценивания компонент интегрального риска при движении грузовых поездов.

4. Проведен численный эксперимент, показавший, что выбор скоростного режима грузового поезда существенно влияет на величину интегрального риска. Кроме того, показано, что уточнение компонент интегрального риска влияет на оценку интегрального риска.

**Основные результаты главы опубликованы в [5, 29].**

## **5. Комплекс программ для решения задач управления движением и его безопасностью в транспортных системах**

В данной главе описывается структура (входные, выходные данные) программ, разработанных в рамках диссертационного исследования; приводится статистический метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования. В разделе 5.1 приводится статистический метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования. В разделе 5.2 описывается программа, использованная в главе 1. В разделе 5.3 описывается программа, использованная в главе 2. В разделах 5.4, 5.5, 5.6 описываются программы, использованные в главе 3. В разделе 5.7 описывается программа, использованная в главе 4.

Все программы разрабатывались и запускались на персональном компьютере Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, с установленной на нем операционной системой Windows 7. Разработка и запуск проводились при объеме оперативной памяти не более 16 Gb (в некоторых случаях 8 Gb, в некоторых 16 Gb) типа DDR3.

### **5.1. Комплекс программ для сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования**

Для сравнения решателей смешанного целочисленного линейного программирования были разработаны программные коды для запуска решателей из сред CPLEX 12.5.1, Matlab, R при использовании матриц и векторов ограничений специального вида. В каждой из программ указывается максимальный уровень погрешности  $\varepsilon$ , количество повторений решателем выполнения одной и той же задачи  $R$ , также варьируются матрицы и векторы ограничений. Выходными данными выступают время решения задачи и значение критерия, продуцируемое решателем, для конкретного набора данных, решателя и повторения. Далее эти данные обрабатываются скриптом, написанным на языке Matlab, в результате чего получаются минимальное, среднее, максимальное медианное время, СКО медианного времени, количество раз с наилучшим значением критерия для каждого из решателей.

Программы в виде набора скриптов были написаны на языках Matlab, R, IBM

ILOG Script/OPL.

### 5.1.1. Общий вид задачи смешанного целочисленного линейного программирования

Пусть вектор оптимизируемых переменных имеет вид  $u = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , причем переменные с индексами из множества  $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_L\}$  являются целочисленными, а остальные непрерывными. Тогда в общем виде задача смешанного целочисленного линейного программирования может быть записана в виде

$$c^T u \rightarrow \min_{u_{j_1} \in \mathbb{Z}, u_{j_2} \in \mathbb{R}, j_1 \in \mathcal{I}, j_2 \in \{1, \dots, n\} / \mathcal{I}} \quad (5.1)$$

при ограничениях

$$A_1 u \leq b_1, \quad (5.2)$$

$$A_2 u = b_2, \quad (5.3)$$

$$l \leq u \leq r, \quad (5.4)$$

где  $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$  – некоторые заданные матрицы (векторы) соответствующей размерности, где, в свою очередь,  $m_1$  – число ограничений типа неравенств,  $m_2$  – число ограничений типа равенств. Компонентами столбцов  $l$  и  $r$  являются числа из расширенной действительной оси. Отметим, что, вообще говоря, ограничения (5.3) – избыточные, так как они могут быть переписаны в виде ограничений (5.2) с модификацией исходной матрицы  $A_1$  и вектора  $b_1$ . Ограничения (5.4) удобны с целью указания, что некоторые переменные являются бинарными, то есть принимающими значения 0 или 1. Отметим, что если то или иное из ограничений (5.2)–(5.3) не требуется, то матрицы и столбцы этих ограничений следует положить нулевыми. Если же не имеется ограничения сверху (или снизу) на какую-то компоненту вектора, то в соответствующей координате вектора  $r$  (или  $l$ ) формально ставится  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

### 5.1.2. Метод сравнения решателей

Для сравнения работы решателей и программных сред, которыми они вызываются, выберем ряд практических задач математического программирования. В каждой такой задаче будем варьировать набор входных данных. Опишем процедуру сравнения решателей для некоторой практической задачи.

Следует сказать, что скорость работы решателей, как и скорость чтения данных из файлов, вообще говоря, не является постоянной. Практика показывает, что ее можно положить случайной величиной [83]. В этой связи в дальнейшем одни и те же эксперименты повторяются несколько раз. Поэтому на одном и том же наборе входных данных, т.е. матрицах  $A_1$ ,  $A_2$ , векторах  $b_1$ ,  $b_2$  и других, задача математического программирования (5.1) при ограничениях (5.2)–(5.4) каждым решателем будет решаться  $R$  раз. Далее для каждого решателя и для каждой задачи с одинаковыми входными данными выбирается медианное время получения решения (с учетом загрузки данных из файлов). Таким образом для каждого решателя формируется вектор из значений медианного времени, по которому вычисляется среднее, минимальное, максимальное значение, а также среднеквадратичное отклонение. Размерность этого вектора совпадает с количеством наборов входных данных.

Необходимо сказать, что решатель задачи смешанного целочисленного линейного программирования за некоторое заранее заданное время может не найти допустимое решение. Или же решение, предоставляемое решателем, является неоптимальным в виду, например, ограничений на время счета и используемую при расчете память компьютера. Поэтому помимо временных характеристик для каждого решателя приведем количество раз с наилучшим значением критериальной функции.

Поясним процедуру подсчета данной величины. На тех же начальных данных задача математического программирования решается  $Q \times R$  раз ( $Q$  (количество используемых решателей)  $\times R$  повторения). Для каждого набора исходных входных данных вычисляется наилучшее по всем решателям и по всем повторениям наименьшее полученное значение критериальной функции. Далее для каждого решателя вычисляется количество случаев, когда на исследуемом наборе исходных данных, решатель породил упомянутое выше наилучшее значение критерия. После чего такое количество случаев суммируется по всем наборам исходных данных для каждого решателя, что и составляет количество раз с наилучшим значением критериальной функции. Отметим, что каждый решатель запускается  $N \times R$  раз.

Так как задачи математического программирования решаются численно, то считается, что решатель нашел наилучшее решение, если значение критерия на спродуцированном им решении отличается от наилучшего значения критерия на величину, не

большую чем  $\varepsilon$ .

### 5.1.3. Используемые решатели

Для тестирования времени работы различных решателей (суммарно со временем чтения вспомогательных для решения задач математического программирования файлов) воспользуемся

- решателем CPLEX версии 12.5.1
  - запускаемым из среды CPLEX Studio IDE (далее – CPLEX IDE);
  - запускаемым из среды MATLAB 2014b (далее – CPLEX MATLAB);
  - запускаемым при помощи надстройки Opti Toolbox версии 2.27 из среды MATLAB 2014b (далее – CPLEX OPTI)
- решателем SCIP версии 4.0.0, запускаемым при помощи надстройки Opti Toolbox версии 2.27 из среды MATLAB 2014b (далее SCIP OPTI);
- собственным решателем MATLAB 2014b, вызываемым командой `intlinprog` (далее – MATLAB);
- решателем Gurobi версии 9.5.2, запускаемым из среды MATLAB 2014b (далее – Gurobi MATLAB);
- решателем Gurobi версии 9.5.2, запускаемым из среды R Studio 1.3.959 с версией R 4.0.2 (далее – Gurobi R).

Безусловно, время поиска решения той или иной задачи математического программирования тем или иным решателем может варьироваться от установки тех или иных параметров решателя. Таким параметром может выступать, например, способ поиска решения. Однако наборы параметров у различных решателей могут отличаться, в этой связи будем проводиться сравнение «as is», т.е. используя выставленные по умолчанию значения параметров решателей.

Необходимо также отметить, что согласно комментариям к исходным кодам надстройки Opti Toolbox версии 2.27 имеется конфликт между ней и версиями 12.5.0, 12.5.1, 12.6.0 пакета CPLEX и среды MATLAB версии не ранее 2013a. Вероятно, в этой связи

без дополнительных действий с исходным кодом вызвать решатель CPLEX из надстройки Opti Toolbox не удается – его надстройка просто «не видит» – несмотря на наличие установленного пакета CPLEX, доступа у MATLAB к папкам, где находится файл, устанавливающий интерфейс между MATLAB и CPLEX, а также копирование указанного файла в папки, содержащие исходные коды надстройки Opti Toolbox. В этой связи автором была произведена «модификация» метода<sup>6</sup> OptiSolver для того, чтобы запуск решателя CPLEX при помощи надстройки стал возможен. Потенциально можно было бы обойтись и без запуска CPLEX через надстройку Opti Toolbox, однако такой запуск позволяет сделать сравнимыми результаты работы решателей SCIP и CPLEX.

Для сравнимости результатов, доставляемых различными решателями логично использовать решатели одного времени выпуска. Однако версия Gurobi 6.5.2, современная среде и решателю CPLEX версии 12.5.1, к сожалению, недоступна для скачивания. Поэтому используется наиболее «старая» из доступных версия 9.5.2. По причине использования «старой» версии 12.5.1 CPLEX не используется и наиболее современная версия Gurobi 11.0.0. Необходимо отметить, что разработчиками заявляется, что версия Gurobi 9.5.2 поддерживается в среде MATLAB версий R2019a-R2022a, однако и в MATLAB 2014b данный решатель работает.

Также следует отметить, что у надстройки Opti Toolbox версии 2.27 существует проверка допустимости выбранного решателя для решения той или иной задачи. Однако такая проверка ведется не по виду оптимизируемой функции, а по способу вызова решателя. А именно, если первый параметр метода opti указать равным 'fun' и использовать для оптимизации хотя и линейную функцию, но объявленную вне скрипта, вызывающего решатель, то такая надстройка предполагает, что решается задача смешанного целочисленного нелинейного программирования. Поэтому при вызове метода opti первый параметр задавался равным 'f', а оптимизируемая функция задавалась внутри скрипта, вызывающего решатель.

Отметим, что используемые решатели в некотором смысле устарели. В частности, программная среда CPLEX IDE, а вместе с ней и соответствующий решатель, получила с версии 12.5.1 несколько обновлений. Использование относительно старых

---

<sup>6</sup>Во избежание путаницы между математическим понятием функции и функции как части программы/скрипта, здесь и далее для функции как части программы/скрипта используется слово *метод*.

версий приведенных выше решателей вызвано проблемами получения лицензий на новое программное обеспечение.

Для тестирования будем использовать персональный компьютер (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 16 GB DDR3 RAM) с установленной на нем операционной системой Windows 7. Отметим, что, вообще говоря, на скорость работы решателей влияют не только характеристики аппаратного обеспечения, но и выбор операционной системы.

#### 5.1.4. Сравнение работы решателей для различных задач

##### 5.1.4.1. Задача с билинейной целевой функцией и вероятностным критерием

Наиболее характерной задачей с билинейной целевой функцией и вероятностным критерием – является задача портфельного анализа. В такой задаче имеется скалярное произведение вектора управлений на вектор случайных факторов. Такая же структура встречается в задаче управления космическим аппаратом [52]. Рассмотрим задачу формирования портфеля ценных бумаг по вероятностному критерию из двух рисковых активов, доходности которых  $X_1$  и  $X_2$  являются компонентами случайного вектора  $X = \text{col}(X_1, X_2)$ . Предположим, что данный вектор является дискретным и имеет  $K = 1900$  реализаций  $x_k = \text{col}(x_1^k, x_2^k)$  с одинаковыми вероятностями  $p_k = 1/K$ ,  $k = \overline{1, K}$ <sup>7</sup>. Будем предполагать, что желаемый капитал  $\varphi$  равен 1.1, а стартовый капитал варьируется таким образом, что  $C_i = 2i/N$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Пусть капитал инвестируется целиком, а операции «short-sales» запрещены, тогда<sup>8</sup> для  $i$ -го случая матрица  $A_1$  и вектор  $b_1$  имеет

<sup>7</sup>Отметим, что выбор именно 1900 реализаций вызван ограничениями имеющейся у автора лицензии на использование пакета Gurobi

<sup>8</sup>Критериальная функция и соответствующие ограничения из [45] в обозначениях [45] в диссертации не приводятся во избежание путаницы с имеющейся нотацией.

вид

$$A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1^1 & -x_2^1 & \frac{\varphi}{C_i} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x_1^2 & -x_2^2 & 0 & \frac{\varphi}{C_i} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x_1^3 & -x_2^3 & 0 & 0 & \frac{\varphi}{C_i} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -x_1^{K-1} & -x_2^{K-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\varphi}{C_i} & 0 \\ -x_1^K & -x_2^K & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\varphi}{C_i} \end{pmatrix}}_{K \text{ строк и } K+2 \text{ столбца}}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A_2$  представляет собой строку, а вектор  $b_2$  – скаляр, а именно:

$$A_2 = \left( 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \right), b_2 = 1.$$

Множество  $\mathcal{I}$  состоит из чисел  $3, 4, \dots, K + 2$ . Кроме того,  $l = \text{col}(0, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $r = \text{col}(+\infty, +\infty, 1, \dots, 1)$ . Вектор коэффициентов  $c$  критериальной функции имеет вид  $c = -\text{col}(0, 0, 1, \dots, 1)/K$ .

Заметим, что приведенная выше постановка задачи портфельного анализа представляет собой дискретизированную ее версию. При этом для моделирования доходностей в портфельном анализе нередко используют непрерывные распределения доходностей [71, 134, 161].

Выбрав  $N = 1000$ , для некоторого набора реализаций случайного вектора  $X$  проведем тестирование времени работы различных решателей. Данные реализации можно найти в [109]. Безусловно, для проверки других решателей или же решателей, используемых в статье, но на другом аппаратном обеспечении удобнее использовать уже готовые матрицы  $A_1$ , однако только для одного значения капитала матрица  $A_1$  занимает примерно 10 мегабайт дискового пространства, если хранить эту матрицу в формате .xlsx. При этом только считывание матрицы в MATLAB в таком формате занимает порядка 8 секунд. Если сохранять матрицу во внутреннем формате MATLAB .mat, то чтение этой матрицы занимает меньше полусекунды, однако в таком случае теряется свойство сравнимости результатов с программной средой CPLEX IDE, так как эта среда не считывает .mat файлы. В этой связи на вход и среде CPLEX, и среде MATLAB подаются только файл Excel, содержащий реализации случайного вектора  $X$ . Остальная часть

матрицы  $A_1$ , как и другие необходимые для расчета матрицы и векторы формируется программно.

Выберем  $R = 3$ . Безусловно, большее чем 3 количество повторений позволяет лучше сгладить результаты. Однако, как будет показано в дальнейшем, один из решателей работает довольно медленно. Компонентами получаемого времени является длительность загрузки данных из файла, формирования вектора коэффициентов критериальной функции, матриц и векторов ограничений, а также работы, собственно, решателя. Допустимое отклонение  $\varepsilon$  положим равным  $5 \cdot 10^{-4}$ .

Таблица 5.1. Сравнение работы решателей на первом пуле примеров в задаче портфельной оптимизации.

Решатель Характеристики	CPLEX IDE	CPLEX MATLAB	CPLEX OPTI	SCIP OPTI	MATLAB	Gurobi MATLAB	Gurobi R
Минимальное медианное время работы, [с]	0,766	0,493	0,567	0,514	0,514	0,594	0,058
Среднее медианное время работы, [с]	1,561	1,07	0,987	3,218	24,998	0,693	0,156
Максимальное медианное время работы, [с]	11,468	50,067	4,385	9,153	1241,763	0,913	0,457
СКО медианного времени работы, [с]	1,07	1.95	0,653	2,797	95,28	0,066	0,072
Количество раз с наилучшим значением критериальной функции, [ед]	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000

Как следует из таблицы 5.1, наихудшие результаты в терминах среднего времени работы и СКО продуцирует встроенный решатель MATLAB. Обращают на себя внимание отличия временных характеристик решателя CPLEX, вызываемого различными способами. Это, в частности, вызвано тем, что в зависимости от способа вызова решателя параметры (метод решения, допустимое количество итераций) его работы могут отличаться. Наилучшие результаты по минимальному, среднему, максимальному времени, СКО дает решатель Gurobi. На одном и том же наборе данных наилучшие значения критериальной функции для всех решателей при любом из трех повторений одинаковы. При этом от набора входных время получения оптимального решения изменяется на несколько раз, а иногда и порядков.

Очевидно, что время работы решателей зависит не только от величины стартово-

го капитала инвестора  $C_i$ , но и от реализаций вектора доходностей. Поэтому проанализируем характеристики работы решателей для других значений вектора доходностей. Будем предполагать такие доходности, подчиняющимися усеченному нормальному распределению с параметрами  $0,1; 0,1^2$  и  $0,1; 0,15^2$  соответственно. Правило усечения можно найти в [31]. Реализации вектора доходностей вновь можно найти в [109]. Вновь будем варьировать стартовое значение капитала. Результаты такого тестирования приведем в таблице 5.2.

Таблица 5.2. Сравнение работы решателей на втором пуле примеров в задаче портфельной оптимизации.

Решатель Характеристики	CPLEX IDE	CPLEX MATLAB	CPLEX OPTI	SCIP OPTI	MATLAB	Gurobi MATLAB	Gurobi R
Минимальное медианное время работы, [с]	0,755	0,47	0,533	0,491	0,508	0,576	0,055
Среднее медианное время работы, [с]	2,703	1,52	0,665	1,09	29,426	0,625	0,11
Максимальное медианное время работы, [с]	1117,81	481,93	4,041	15,681	3556,663	4,516	4,167
СКО медианного времени работы, [с]	36,586	16,395	0,446	1,916	204,408	0,206	0,216
Количество раз с наилучшим значением критериальной функции, [ед]	3000	3000	2991	3000	3000	3000	3000

Как видно из таблицы 5.2, в среднем медианное время при вызове CPLEX при помощи надстройки Opti Toolbox почти в три раза меньше, чем при непосредственном вызове из Matlab. Это вызвано, в частности, тем, что в ряде случаев достигается лимит по количеству итераций, вершин ветвления алгоритма, памяти, границы которых устанавливаются автоматически. При этом при вызове CPLEX из надстройки Opti Toolbox решатель в некоторых случаях не находит оптимальное решение.

Сравнивая результаты в таблицах 5.1 и 5.2, замечаем, что среднее медианное время для некоторых решателей выросло, а для некоторых упало. Общим является то, что для обоих типов распределений доходностей решатель Gurobi работает наиболее стабильно в терминах размаха медианного времени, а также наименьшего СКО медианного времени по отношению к другим решателям.

### 5.1.4.2. Задача корректирования скалярного терминального состояния спутника с геостационарной орбитой

Далее рассмотрим задачу корректирования скалярного терминального состояния спутника с геостационарной орбитой из [30]. Под управлением в постановке из [30] понимается величина корректирующего импульса, сообщаемого спутнику в зависимости от того, в какой диапазон отклонений попало значение его текущего отклонения. Управление в постановке из [30] ищется в классе кусочно-постоянных управлений, поэтому для этой задачи

$$A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} t_1(1 + y_1^1) & Z - (\varphi - \bar{z}^i) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_1(1 + y_1^2) & 0 & Z - (\varphi - \bar{z}^i) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ t_1(1 + y_1^{K-1}) & 0 & 0 & 0 & Z - (\varphi - \bar{z}^i) & 0 \\ t_1(1 + y_1^K) & 0 & 0 & 0 & 0 & Z - (\varphi - \bar{z}^i) \\ -t_1(1 + y_1^1) & Z - (\varphi + \bar{z}^i) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -t_1(1 + y_1^2) & 0 & Z - (\varphi + \bar{z}^i) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -t_1(1 + y_1^{K-1}) & 0 & 0 & 0 & Z - (\varphi + \bar{z}^i) & 0 \\ -t_1(1 + y_1^K) & 0 & 0 & 0 & 0 & Z - (\varphi + \bar{z}^i) \end{pmatrix}}_{2K \text{ строк и } K+1 \text{ столбец}},$$

а, кроме того,  $b_1 = Z \cdot \text{col}(1, 1, \dots, 1)$ ,  $A_2 = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $b_2 = 0$ ,  $c = -\text{col}(0, 1, \dots, 1)/K$ ,  $l = \text{col}(u_{\text{low}}, 0, \dots, 0)$ ,  $r = \text{col}(u_{\text{up}}, 1, \dots, 1)$ . В обозначениях выше

- $y_1^1, \dots, y_1^K$  – реализации некоторой случайной величины с заданным законом распределения,  $K$  – количество таких реализаций;
- $t_1$  – параметр, характеризующий влияние корректирующего воздействия на величину ошибки,  $t_1 > 0$ ;
- $u_{\text{low}}$  и  $u_{\text{up}}$  – некоторые допустимые границы величины корректирующего импульса;
- $\varphi$  – допустимая по модулю величина отклонения.

Также  $\bar{z}^i = 0,5(z^i + z^{i+1})$ ,  $z^{i+1} = z^1(1 - 2i/N)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Наконец,  $Z = |t_1| \max\{|u_{\text{low}}|, |u_{\text{up}}|\}(1 + \max\{|y_1^1|, \dots, |y_1^K|\})$ . Множество  $\mathcal{I}$  состоит из чисел  $2, 3, \dots, K + 1$ .

Как и в [30], выберем  $z_1 = -3$ ,  $t_1 = 1$ ,  $u_{\text{up}} = -u_{\text{low}} = 10$ ,  $\varphi = 1,15$ . Реализации, а точнее псевдослучайные числа, из нормального закона распределения с параметрами 0 и  $0,5^2$  читатель может найти в [109].

Положим  $K = 500$ ,  $N = 50$ . Сравним работу решателей для введенной выше структуры матриц  $A_1, A_2$ , векторов  $b_1, b_2$ , а также других векторов. Сделаем 3 повторения решения одной и той же задачи математического программирования каждым решателем ( $R = 3$ ). Таким образом каждым решателем будет решено 150 задач оптимизации. Допустимое отклонение  $\varepsilon$  выберем равным  $10^{-3}$ .

Таблица 5.3. Сравнение работы решателей для задачи скалярного терминального состояния спутника с геостационарной орбитой.

Решатель \ Характеристики	CPLEX IDE	CPLEX MATLAB	CPLEX OPTI	SCIP OPTI	MATLAB	Gurobi MATLAB	Gurobi R
Минимальное медианное время работы, [с]	0,76	0,39	0,428	0,403	0,427	0,447	0,016
Среднее медианное время работы, [с]	1,034	0,5	0,517	0,905	22,908	0,512	0,076
Максимальное медианное время работы, [с]	1,533	0,871	0,866	1,837	430,21	0,593	0,159
СКО медианного времени работы, [с]	0,231	0,125	0,116	0,489	66,38	0,05	0,054
Количество раз с наилучшим значением критериальной функции, [ед]	150	150	150	150	150	150	150

Анализируя таблицу 5.3, вновь приходим к выводу, что даже небольшое изменение набора исходных данных (в данном случае величины  $\bar{z}^i$ ) существенно влияет на скорость получения оптимального решения. Наиболее быстро работает решатель Gurobi, запускаемый из R Studio. При этом среднее медианное время при вызове решателей CPLEX и Gurobi из MATLAB меньше у CPLEX.

### 5.1.4.3. Задача квантильной оптимизации для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров

Теперь рассмотрим задачу квантильной оптимизации для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров из [28]. Как и для рассмотренных ранее задач, потенциально можно записать матрицу  $A_1$  и вектор  $b_1$  в общем виде. Однако подобного рода запись потребует множество дополнительных пояснений, поэтому такая вид матрицы  $A_1$  и вектора  $b_1$  в статье опускается. Данные вектор и матрицу для данных из примера в [28] можно найти в [109]. При этом в отличие от одного уровня доверительной вероятности  $\alpha = 0,7$ , использованной в [28], мы будем исследовать уровни доверительной вероятности от 0,5 до 0,9 с шагом 0,1. Таким образом в дальнейшем рассматривается 5 матриц  $A_1$  и получается  $N = 5$ . При этом эти матрицы отличаются друг от друга только одной строкой.

Согласно [28] в обозначениях настоящей работы  $A_2 = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $b_2 = 0$ . Кроме того, множество  $\mathcal{I}$  состоит из чисел 11, 12, ..., 18,  $l = \text{col}(\underbrace{-\infty, \dots, -\infty}_{10 \text{ штук}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{8 \text{ штук}}, -\infty)$ ,  $r = \text{col}(\underbrace{+\infty, \dots, +\infty}_{10 \text{ штук}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{8 \text{ штук}}, +\infty)$ . Вектор  $c = \text{col}(\underbrace{0, \dots, 0}_{18 \text{ штук}}, 1)$ .

Сделаем 11 повторений решения одной и той же задачи математического программирования каждым решателем, т.е.  $R = 11$ . Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Результаты проведенных экспериментов запишем в таблицу 5.4.

Таблица 5.4. Сравнение работы решателей для задачи квантильной оптимизации для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров

Решатель Характеристики	CPLEX IDE	CPLEX MATLAB	CPLEX OPTI	SCIP OPTI	MATLAB	Gurobi MATLAB	Gurobi R
Минимальное медианное время работы, [с]	1,539	0,634	0,686	0,66	0,695	0,667	0,022
Среднее медианное время работы, [с]	1,798	0,65	0,691	0,703	0,698	0,671	0,026
Максимальное медианное время работы, [с]	1,975	0,659	0,701	0,729	0,703	0,673	0,027
СКО медианного времени работы, [с]	0,16	0,01	0,006	0,027	0,003	0,003	0,002
Количество раз с наилучшим значением критериальной функции, [ед]	55	55	55	55	55	55	55

Наилучшие результаты по всем исследуемым характеристикам согласно таблице 5.4 вновь были продемонстрированы решателем Gurobi, вызываемым из среды R. Следующим по среднему медианному времени работы является решатель CPLEX, вызываемый непосредственно из MATLAB. При этом все решатели, вызываемые из MATLAB для исследуемой задачи, дают сравнимые результаты. В то же время временные характеристики, получаемые при расчете с использованием среды CPLEX IDE, ощутимо хуже.

#### 5.1.4.4. Двухуровневая задача планирования производства

Далее рассмотрим двухуровневую задачу планирования производства из [94]. Вновь будем варьировать уровень  $\alpha$  от 0,5 до 0,9 с шагом по уровню 0,1 ( $N = 5$ ). Матрицу  $A_1$  и вектор  $b_1$  можно найти в [109]. Также  $A_2 = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $b_2 = 0$ . Множество  $\mathcal{I}$  состоит из чисел 151, 152,  $\dots$ , 310,  $l = \text{col}(\underbrace{0, \dots, 0}_{312 \text{ штук}}, -\infty)$ ,  $r = \text{col}(\underbrace{+\infty, \dots, +\infty}_{150 \text{ штук}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{160 \text{ штук}}, +\infty, +\infty, +\infty)$ . Вектор  $c = \text{col}(\underbrace{0, \dots, 0}_{312 \text{ штук}}, 1)$ .

Сделаем 11 повторений решения задачи математического программирования на тех же входных данных каждым решателем, т.е.  $R = 11$ . Результаты проведенных экспериментов запишем в таблицу 5.5. Зададим  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Таблица 5.5. Сравнение работы решателей для двухуровневой задачи планирования производства.

Решатель \ Характеристики	CPLEX IDE	CPLEX MATLAB	CPLEX OPTI	SCIP OPTI	MATLAB	Gurobi MATLAB	Gurobi R
Минимальное медианное время работы, [с]	2,45	1,014	1,045	1,607	60,48	1,056	0,148
Среднее медианное время работы, [с]	2,657	1,024	1,054	1,697	1426,1	1,066	0,158
Максимальное медианное время работы, [с]	2,745	1,03	1,061	1,794	2491,4	1,077	0,173
СКО медианного времени работы, [с]	0,127	0,009	0,008	0,077	1138,8	0,008	0,011
Количество раз с наилучшим значением критериальной функции, [ед]	55	55	55	55	33	55	55

Если для задачи портфельной оптимизации решатель CPLEX, вызываемый через надстройку Opti Toolbox, не всегда находил оптимальное решение, то для задачи

планирования производства таким свойством обладает встроенный решатель MATLAB. Если сравнивать решатели CPLEX и Gurobi, вызываемые непосредственно из MATLAB, решатель CPLEX совсем немного выигрывает в терминах среднего медианного времени работы.

Анализируя результаты в таблицах 5.1–5.5, приходим к выводу, что встроенный решатель MATLAB, решатель SCIP проигрывают решателям CPLEX и Gurobi. Кроме того, использование решателя CPLEX совместно с надстройкой Opti Toolbox не всегда приводит к оптимальному решению.

### 5.1.5. Исследование компонент времени получения решения

Как видно из таблиц 5.1–5.5, решение одних и тех же задач одними и теми же решателями, вызываемых из различных сред, занимает не одно и то же время. В этой связи более детально рассмотрим время поиска решения для некоторых решателей и некоторых сред. Для этого выберем задачу корректирования орбиты летательного аппарата при  $K = 1900$ ,  $i = 1$ ,  $R = 21$  используем решатели Gurobi, CPLEX и вычислим

- медианное время загрузки данных из файлов;
- медианное время формирования ограничений;
- медианное время поиска решения самим решателем.

Результаты вычислений внесем в таблицу 5.6.

Таблица 5.6. Сравнение работы решателей в задаче корректирования орбиты летательного аппарата.

Решатель \ Характеристики	CPLEX IDE	CPLEX IDE*	CPLEX MATLAB	Gurobi MATLAB	Gurobi R
Медианное время загрузки данных из файлов	0,789	0,03	0,333	0,333	0,01
Медианное время формирования ограничений		0,01	0,064	0,173	0,022
Медианное время поиска решения самим решателем	1,31	1,4	1,139	0,238	0,244

Вначале отметим, что в CPLEX IDE при чтении Excel-файлов не в методе main не удастся разделить время на, собственно, чтение данных и генерацию модели для

последующего решения. Если же файл с исходными данными хранить в формате .csv, чтение файла осуществлять в методе main, то время подготовки к решению задачи существенно сокращается. Эти времена записаны в столбце CPLEX IDE\*. При этом независимо от среды, из которой вызывается решатель CPLEX, время решения собственно задачи математического программирования примерно одинаковое. Такое же свойство наблюдается и для решателя Gurobi, вызываемого из MATLAB и из R Studio. При этом время чтения данных и генерации модели в R Studio намного быстрее, чем в MATLAB.

Сравнивая время работы собственно решателей заключаем, что Gurobi эффективнее, чем CPLEX. Однако, повторимся, сравнение не является совсем «честным», т.к. версия решателя Gurobi более современна, чем используемая версия решателя CPLEX.

## **5.2. Программа для формирования расписания движения и «технологического окна» в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами**

Программа основана на [35] и предназначена для автоматического формирования расписания движения в задачах логистики. С использованием программы возможно определять маршруты движения транспортных средств, а также время их движения по транспортной сети, описываемой неориентированным мультиграфом. Входными данными является информация о конечных и начальных пунктах движения грузов, время готовности к отправлению грузов, масса груза, максимально допустимое время нахождения в транспортной сети от начала движения. Также входными данными являются возможности для транспортировки, которые описываются шестью элементами: вершиной начала движения, вершиной конца движения, временем начала движения, временем конца движения, максимальным допустимой массой, стоимостью перевозки единицы массы. Все эти данные вводятся в формате .csv и .xlsx. Задается значение параметра ускорения алгоритма  $A$ , число промежутков разбиения  $P$  из главы (1), также можно выбрать вид алгоритма (по направлению/времени) поиска приближенного решения. Программа позволяет определять маршруты движения, в том числе с учетом необходимости проведения профилактических работ на части ребер транспортной сети, т.е. при закрытии движения на них.

Программа в виде набора скриптов написана на языке IBM ILOG Script/OPL.

### **5.3. Программа для формирования «технологического окна» в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами**

Входные. выходные данные, предназначение разработанной в рамках работы над диссертацией программы [1] сформулированы в терминах задачи назначения «технологического окна» на железнодорожной станции, но легко обобщаются на случай произвольной транспортной сети с нефиксированным временем движения между вершинами.

Изначально программа [1] предназначена для решения задачи определения временного промежутка, в течение которого следует закрыть некоторые участки пути на железнодорожной станции для проведения ремонтных работ. Указанный промежуток строится на основе обработки информации о движении пассажирских/грузовых поездов, маневровых составов в прошлом или прогноза движения в будущем. Для решения указанной задачи определяются три промежутка времени: максимальный по длине промежуток времени, когда все участки пути, подлежащие ремонту, одновременно свободны. промежуток времени, длительности не меньше заданной, при котором занято минимальное число участков пути, подлежащих ремонту, а также промежуток времени, длительности не меньше заданной, при котором будет задержано или перенесено минимальное число пассажирских/грузовых поездов, следующих через участки пути, подлежащие ремонту. Входными данными для расчета являются расписание движения пассажирских/грузовых поездов, маневровых составов в формате .csv, а также карта станции в виде списка смежности в формате .csv. Выходными данными являются три указанных выше промежутка времени.

Структура программы (в том числе формат входных данных), первоначальный исходный код были написаны лично автором диссертации в Matlab, после чего соавторами [1] программный код был переписан на язык R.

### **5.4. Комплекс программ для прогнозирования последствий схода с рельсов грузовых поездов**

В рамках работы над главой 3 были разработаны две программы, позволяющие прогнозировать последствия схода с рельсов/крушений грузовых поездов.

Первая программа позволяет по историческим данным по сходам с рельсов/крушениям грузовых поездов: скорости в месте схода, весе поезда, количеству ва-

гонов и других данные, описанных в разделе 3.2. – по заданной функции  $g_1(\cdot)$ ,  $g_2(\cdot)$ ,  $g_3(\cdot)$  (выбирается в зависимости от причины схода с рельсов) отыскать решение задачи (3.10). Это решение, в свою очередь, используется для прогнозирования количества подвижных единиц в сходе с рельсов в зависимости от скорости поезда, загрузки, кривизны пути и других факторов.

Вторая программа позволяет по историческим данным оценить вероятность выхода в габарит соседнего пути хотя бы одной сошедшей с рельсов подвижной единицы грузового поезда: скорости в месте схода, весе поезда, количеству вагонов и других данные, описанных в разделе 3.2. – при заданном виде регрессии: логистической, пробит, Коши найти решение задачи (3.16). Это решение используется для оценки вероятности выхода в габарит соседнего пути хотя бы одной подвижной единицы грузового поезда.

Входные данные для обеих программ хранятся в виде файлов с расширением mat.

Обе программы в виде скриптов написаны на языке Matlab.

### **5.5. Программа для оценки вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции**

Программа [37], являясь развитием [38], предназначена для расчета вероятности хотя бы одного бокового столкновения пассажирских и грузовых поездов с маневровым составом на станции за произвольный промежуток времени, задаваемый пользователем. Входными данными являются расписание пассажирских поездов и грузовых поездов, проследующих станцию с/без остановки за некоторый промежуток времени, подающиеся на вход программы при помощи файлов в формате .csv. Также при помощи файла .csv вводятся номера путей, используемые поездами дальнего и пригородного сообщения. Другими входными данными являются вероятности хотя бы одного бокового столкновения на произвольном маршруте пересечения пассажирским или грузовым поездом станции как в четном, так и нечетном направлениях с учетом наличия остановки на станции. Данные вероятности подаются на вход программе в виде файлов в формате .csv. Также на вход подаются данные о прошлых пересечениях станции поездами (номера маршрутов и количество раз, когда этот маршрут был использован) через станцию, которые подаются на вход программе в виде файла в формате .csv. Если данные

о прошлых пересечениях станции каким-то поездом отсутствуют, то предполагается, что маршруты пересечения станции данным поездом для диспетчера одинаково привлекательны, то есть их использование предполагается равновероятным. Выходными данными является файл в формате .csv, в котором для каждого часа рассматриваемого промежутка времени приводятся вероятности хотя бы одного столкновения на станции.

Программа написана на языке C++.

### **5.6. Программа для задачи управления безопасностью движения на железнодорожных переездах**

Программа предназначена для управления безопасностью (надежностью) движения на железнодорожных переездах. Программа также может быть использована для вычисления вероятности отсутствия столкновений между автотранспортом и поездами на железнодорожных переездах. Кроме того, программа позволяет оценить число столкновений, гарантированное на заданном уровне надежности.

Входными данными для программы являются маршруты движения поездов, вероятности столкновения поездов с автотранспортом в зависимости от установки той или иной системы защиты, уровень надежности (если решается задача с квантильным критерием). Выходными данными являются номера систем защиты, которые имеет устанавливать. Путем специального преобразования оптимального значения критерия можно получить вероятность отсутствия столкновений/количество столкновений, гарантированное на заданном уровне надежности.

Программа в виде набора скриптов написана на языке Matlab.

### **5.7. Программа для оценивания интегрального риска**

Программа предназначена для вычисления функций интегрального риска, сопутствующего движению грузового поезда, вычислению которого посвящена глава 4. Входными данными программы является карта движения грузового поезда (величина спуска и кривизны на каждом метре дистанции), характеристики грузового поезда (количество вагонов, секций локомотива, вес). Задаются до трех скоростных режимов грузового поезда. Выходными данными являются значения функций интегрального риска для каждого из режимов движения.

Программа в виде скрипта написана на языке Matlab.

### 5.8. Основные результаты главы 5

1. Разработан метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования.

2. Проведено сравнение времени работы решателей и получаемых ими «оптимальных» значений для ряда практических задач и различных программных сред, вызывающих решатели. Было выяснено, что выбор программной среды, вообще говоря, существенно влияет на общее время поиска решения. Наблюдается существенное улучшение среднего медианного времени работы при вызове решателя Gurobi из среды R Studio по сравнению с вызовом того же решателя из MATLAB. Выяснилось, что решатель Gurobi работает более стабильно, чем решатель CPLEX в терминах СКО медианного времени работы. Если рассматривать решатели CPLEX и Gurobi, вызываемые из среды MATLAB, то средние медианные времена работы либо сравнимы, либо Gurobi оказывается чуть быстрее. При этом получаемый вывод не является «честным» в свете того, что используемый решатель Gurobi вышел на несколько лет позже используемого решателя CPLEX.

3. Было проведено детальное исследование временных компонент общего времени получения решения. В рамках исследования было выявлено, что время формирования ограничений и обработки данных может быть даже больше времени счета, собственно, решателем.

4. Разработан комплекс программ для решения задач управления движением и его безопасностью в транспортных системах [1, 35, 37, 38].

5. Разработан комплекс программ для выбора наилучшего решателя задач смешанного целочисленного линейного программирования.

**Первый, второй и третий результаты опубликованы в [111]. Четвертый результат опубликован в [1, 35, 37, 38].**

## Заключение

В рамках диссертационного исследования были разработаны алгоритмы управления движением в транспортных сетях, представляемых неориентированными (мульти)графами. Были предложены алгоритмы как для сетей с фиксированным временем движения между вершинами, так и с нефиксированным. Были рассмотрены различные задачи по управлению безопасностью (надежностью) в транспортных сетях. Были разработаны функции интегрального риска, сопутствующего движению по заданной траектории. Разработан метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного программирования, которые активно используются в разработанных в рамках диссертации алгоритмах. Полученные в работе результаты применены для разработки комплекса программ для управления движением и его надежностью в транспортных системах.

### **На защиту выносятся следующие результаты.**

1. Системный подход к решению задачи управления движением на графовых структурах: формализация задач поиска времени и маршрута движения в транспортных сетях, представляемых графами, задачи оценки риска движения на выбранном маршруте следования [5, 7, 33].

2. Математическое и алгоритмическое обеспечение для поиска расписания движения в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами: система ограничений, задающая движение по мультиграфу транспортной сети, критериальная функция, алгоритм поиска решения в поставленной задаче – учитывающее возможность движения по окончании горизонта планирования [6, 12, 32, 33, 111].

3. Математическое и алгоритмическое обеспечение для поиска расписания движения в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами на основе системы ограничений, учитывающей графовую структуру сети и ряд технологических особенностей движения. Алгоритм поиска промежутка времени, в которое часть ребер графа можно сделать недоступным для движения в таких транспортных сетях [7, 113].

4. Математические методы для решения задач управления надежностью на же-

лезнодорожном транспорте: метод оценивания закона распределения количества подвижных единиц грузового поезда в сходе с рельсов; метод оценивания вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции; метод уменьшения количества происшествий на железнодорожных переездах [20, 22, 36, 42, 110].

5. Математические утверждения о свойствах интегрального (на всем пути следования транспортного средства) риска: теорема о виде закона распределения ущерба при движении; явный вид функций интегрального риска: среднего ущерба и вероятности возникновения неблагоприятных событий [5].

6. Статистический метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования [112].

## Список литературы

1. *Азанов В.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Наумов А.В., Торишный Р.О.* Программно-алгоритмический комплекс обработки статистической информации для назначения «технологического окна» на железнодорожной станции. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2019616791 от 29.05.2019.
2. *Азанов В.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Тарасов А.Н.* Логистическая оптимизационная модель управления маневровыми локомотивами на железнодорожной станции // Труды седьмой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2018». 2018. С. 99–103.
3. *Андриенко А.Я., Портнов-Соколов Ю.П.* Формирование риска при обеспечении безопасности сложных технических систем // Приборы и системы управления. 1996. № 12. С. 11–14.
4. *Архипов Д.И., Лазарев А.А.* Минимизация максимального взвешенного временного смещения доставки заказов между двумя железнодорожными станциями // Автоматика и телемеханика. 2016. № 12. С. 3–25.
5. *Босов А.В., Игнатов А.Н.* О задаче оценки и анализа риска транспортных происшествий на рельсовом транспорте // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. № 1. С. 73–82.
6. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Алгоритмы приближенного решения задачи назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15. № 4. С. 3–11.
7. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Модель передвижения поездов и маневровых локомотивов на железнодорожной станции в приложении к оценке и анализу

- вероятности бокового столкновения // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12. № 3. С. 107–114.
8. Буянов М.В., Иванов С.В., Кибзун А.И., Наумов А.В. Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. № 4. С. 85–93.
  9. Буянов М.В., Наумов А.В. Оптимизация функционирования подвижного состава при организации грузовых перевозок на участке железнодорожной сети // Автоматика и телемеханика. 2018. № 9. С. 143–158.
  10. Гайнанов Д.Н. О комбинаторных свойствах несовместных систем линейных неравенств и многогранников // Математические заметки. 1985. Т. 38. № 3. С. 463–474.
  11. Гайнанов Д.Н. Теоретико-графовый алгоритм построения комитета несовместной системы линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1986. Т. 26. № 9. С. 1431–1432.
  12. Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н., Наумов А.В., Рассказова В.А. О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // Автоматика и телемеханика. 2020. № 6. С. 3–16.
  13. Гайнанов Д.Н., Коньгин А.В., Рассказова В.А. Моделирование грузовых железнодорожных перевозок методами теории графов и комбинаторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 60–79.
  14. Гайнанов Д.Н., Новокшенов В.Ю., Тягунов Л.И. О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств // Математические заметки. 1983. Т. 33. № 2. С. 293–300.
  15. Горяинов А.В., Замышляев А.М., Платонов Е.Н. Анализ влияния факторов на ущерб от происшествий с помощью регрессионных моделей // Надежность. 2013. Т. 2. С. 126–144.
  16. ГОСТ 33433-2015 «Безопасность функциональная. Управление рисками на железнодорожном транспорте».

17. ГОСТ Р ИСО 31000-2019. Менеджмент риска. Принципы и руководство.
18. *Жулев В.И., Иванов В.С.* Безопасность полетов летательных аппаратов. М.: Транспорт, 1986.
19. *Замышляев А.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Новожилов Е.О., Платонов Е.Н.* О вероятности выхода в габарит соседнего пути подвижных единиц грузового поезда // Труды седьмой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2018». 2018. С. 149–152.
20. *Замышляев А.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Новожилов Е.О.* О нарушении безопасности движения, связанном с выходом в габарит соседнего пути подвижных единиц грузового поезда, сошедших с рельсов // Надежность. 2018. №3. С. 39–45.
21. *Замышляев А.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Новожилов Е.О., Платонов Е.Н., Шубинский И.Б.* Об оценке количества вагонов в сходе при поездной работе на основе факторных моделей // Труды шестой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2017». 2017. С. 132–135.
22. *Замышляев А.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Новожилов Е.О.* Функциональная зависимость между количеством вагонов в сходе из-за неисправностей вагонов или пути и факторами движения // Надежность. 2018. №1. С. 53–60.
23. *Замышляев А.М., Шубинский И.Б., Игнатов А.Н., Кан Ю.С., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Методика вычисления вероятности столкновения пассажирского поезда с маневровым составом на железнодорожной станции // Труды четвертой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2015». 2015. С. 124–127.
24. *Замышляев А.М., Шубинский И.Б., Игнатов А.Н., Кан Ю.С., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Применение системы МАЛС для снижения вероятности бокового

- столкновения на железнодорожных станциях // Труды пятой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2016». 2016. С. 148–151.
25. *Зиндер Я.А., Лазарев А.А. и др.* Построение расписаний двухстороннего движения на однопутной железной дороге с разъездом // Автоматика и телемеханика. 2018. № 3. С. 144–166.
  26. *Зиндер Я.А., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.* Корректировка расписания движения на частично заблокированном сегменте железной дороги с разъездом // Автоматика и телемеханика. 2020. № 5. С. 91–105.
  27. *Иванов С.В., Кибзун А.И., Осокин А.В.* Оптимизационная стохастическая модель назначения локомотивов для перевозки грузовых составов // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 80–95.
  28. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 116–129.
  29. *Игнатов А.Н.* О влиянии скоростного режима грузового поезда на интегральный риск движения на примере одного набора данных // Материалы Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024). 2024. С. 145–148.
  30. *Игнатов А.Н.* О решении задачи корректирования скалярного терминального состояния летательного аппарата при произвольном распределении мультипликативного возмущения // Труды МАИ. 2016. № 87.
  31. *Игнатов А.Н.* О формировании позиционного управления в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием // Автоматика и телемеханика. 2020. № 12. С. 50–66.
  32. *Игнатов А.Н.* Об алгоритме формирования расписания грузоперевозок в транспортной сети // Автоматика и телемеханика. 2023. № 9. С. 135–152.

33. *Игнатов А.Н.* Об общей постановке задачи формирования расписания грузоперевозок и способах ее решения // Автоматика и телемеханика. 2023. № 4. С. 145–165.
34. *Игнатов А.Н.* Об одной задаче формирования расписания грузоперевозок // Сборник научных трудов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). 2024. С. 1991–1995.
35. *Игнатов А.Н.* Программно-алгоритмический комплекс автоматического формирования расписания движения в задачах логистики. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022664267 от 15.07.2022.
36. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Оценка вероятности столкновения железнодорожных составов на железнодорожных станциях на основе пуассоновской модели // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 43–59.
37. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Программно-алгоритмический комплекс обеспечения безопасности движения на станции с учетом заданного суточного расписания движения поездов. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2018617668 от 28.06.2018.
38. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Программно-алгоритмический комплекс расчета вероятности бокового столкновения пассажирского поезда с маневровым составом на станции. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2017617690 от 11.07.2017.
39. *Игнатов А.Н., Селютин С.Е.* Оптимальные стратегии улучшения безопасности на железнодорожных переездах // XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» 17-20 апреля 2018 г. Москва. Сборник тезисов докладов. Том 2. С. 347.
40. *Искаков Т.А.* Имитационное моделирование функционирования транспортного узла // Труды пятой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2016». 2016. С. 221–225.

41. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Методика организации профилактики транспортно-го происшествия // Труды второй научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте ИСУЖТ-2013». 2013. С. 177–179.
42. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О задаче распределения инвестиций в установку средств, предотвращающих несанкционированный проезд автотранспортом железнодорожных переездов, для различных статистических критериев // Надежность. 2018. №2. С. 31–37.
43. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О стратегиях по повышению безопасности движения на железнодорожных переездах, получаемым по различным статистическим критериям // Труды шестой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2017». 2017. С. 129–131.
44. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Организация мониторинга и оптимальной профилактики по предупреждению транспортного происшествия на заданном уровне надежности // Надежность. 2013. №4(47). С. 137–149.
45. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной функцией дохода к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2016. № 12. С. 89–111.
46. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н., Платонов Е.Н.* Методология оценки и минимизации рисков на железнодорожном транспорте // Труды третьей научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2014». 2014. С. 177–179.
47. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.

48. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Горяинова Е.Р.* Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. М.: Физматлит, 2005.
49. *Крутиков А.М.* Оценка надежности рельсов Р65 по ресурсу: экспериментальные исследования. М.: Финансы и статистика, 2016.
50. *Мазуров Вл.Д., Хачай М.Ю.* Комитетные конструкции как обобщение решений противоречивых задач исследования операций // Дискретный анализ и исследование операций. 2003. Т. 10, Сер. 2, №2. С. 56–66.
51. *Мазуров Вл.Д., Хачай М.Ю.* Комитеты систем линейных неравенств // Автоматика и телемеханика. 2004. №. 2, С. 43–54.
52. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение. 1987.
53. *Махутов Н.А., Гаденин М.М., Чернявский А.О., Шатов М.М.* Анализ рисков отказов при функционировании потенциально опасных объектов // Проблемы анализа риска. 2012. Т. 9. № 3. С. 8–20.
54. *Острейковский В.А., Швыряев Ю.В.* Безопасность атомных станций: Вероятностный анализ. М.: Физматлит, 2008.
55. Правила технической эксплуатации железных дорог Российской Федерации в редакции от 09.02.2018.
56. *Радаев Н.Н.* Повышение точности прогноза вероятности катастроф за счет учета неоднородных статистических данных по ущербу // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 183–189.
57. *Рябинин И.А.* Концепция логико-вероятностной теории безопасности // Приборы и системы управления. 1993. №. 10. С. 17–21.
58. *Хачай М.Ю.* О существовании комитета большинства // Дискретная математика. 1997. Т. 9. № 3. С. 82–95.

59. *Хачай М.Ю.* Об оценке числа членов минимального комитета системы линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37. №11. С. 1399–1404.
60. *Хачай М.Ю., Огородников Ю.Ю.* Аппроксимационная схема Хаймовича - Ринноя Кана для CVRP в метрических пространствах фиксированной размерности удвоения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 235–248.
61. *Хачай М.Ю., Огородников Ю.Ю.* Полиномиальная приближенная схема для задачи маршрутизации транспортных средств с ограничениями на грузоподъемность и временные промежутки обслуживания // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 3. С. 233–246
62. *Хачай М.Ю., Дубинин Р.Д.* Аппроксимируемость задачи об оптимальной маршрутизации транспорта в конечномерных евклидовых пространствах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 292–303.
63. *Хенли Э.Дж., Кумамото Х.* Надежность технических систем и оценка риска. М.: Машиностроение, 1984.
64. *Шубинский И.Б.* Функциональная надежность информационных систем. Методы анализа, Ульяновск: Обл. типография «Печатный двор», 2012.
65. *Шубинский И.Б., Замышляев А.М. и др.* Применение системы автоматической сигнализации для снижения риска транспортных происшествий на железнодорожных станциях // Надежность. 2017. Т. 17. № 3. С. 49–57.
66. *Шубинский И.Б., Проневич О.Б., Данилова А.Д.* Особенности оценки вероятности возникновения пожаров на тепловозах различных серий // Надежность. 2016. № 4. С. 24–29.
67. *Abril M., Barber F., et al.* An Assessment of Railway Capacity // Transportation Research Part E: Logistics and Transportation. 2008. V. 44. No. 5. P. 774–806.

68. *Albareda-Sambola M., Fernandez E., et al.* The multi-period incremental service facility location problem // *Computers & Operations Research*. 2009. Vo. 36. No. 5. P. 1356–1375.
69. *Ahuja R. K., Liu J., et al.* Solving Real-Life Locomotive-Scheduling Problems // *Transportation Science*. 2005. Vo. 39. № 4. P. 503–517.
70. *Albrecht, A. R., Panton D.M., Lee D.H.* Rescheduling rail networks with maintenance disruptions using problem space search // *Computers & Operations Research*. 2013. Vo. 40. No. 3. P. 703–712.
71. *Alexander G.J., Baptista A.M.* Portfolio Performance Evaluation Using Value at Risk // *The Journal of Portfolio Management* Summer. 2003. V. 29. No. 4. P. 93–102.
72. *Anand R., Aggarwal D., Kumar V.* A comparative analysis of optimization solvers // *Journal of Statistics and Management Systems*. 2017. Vo. 20. No. 4. P. 623–635.
73. *Andrade A., Teixeira P.* Biobjective optimization model for maintenance and renewal decisions related to rail track geometry // *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*. 2011. Vo. 2261. No, 1. P. 163–170.
74. *Anderson R.T., Barkan C.P.L.* Derailment Probability Analyses and Modeling of Mainline Freight Trains // *Proceedings of the 8th International Heavy Haul Conference*. 2005. Rio de Janeiro, Brazil. P. 491–497.
75. *Archetti C., Sperenza G., Vigo D.* Vehicle routing problems with profits. In Toth P., Vigo D. (eds.). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications* (Second ed.). 2014. P. 273–297.
76. *Austin R., Carson J.* An alternative accident prediction model for highway-rail interfaces // *Accident Analysis and Prevention*. 2002. Vo. 34. No 1. P. 31–42.
77. *Aydinel, M., Sowlati, T., et al.* Optimization of production allocation and transportation of customer orders for a leading forest products company // *Mathematical and Computer Modelling*. 2008. Vo. 48. No. 7-8. P. 1158–1169.

78. *Azanov V.M., Buyanov M.V., Gaynanov D.N., Ivanov S.V.* Algorithm and software development to allocate locomotives for transportation of freight trains // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2016. Vo. 9. No. 4. P. 73–85.
79. *Bagheri M., Saccomanno F., et al.* Reducing the threat of in-transit derailments involving dangerous goods through effective placement along the train consist // Accident Analysis & Prevention. 2011. Vo. 43. No. 3. P. 613–620.
80. *Bagheri M., Saccomanno F., Fu Li.* Effective placement of dangerous goods cars in rail yard marshaling operation // Canadian Journal of Civil Engineering. 2010. Vo. 37. P. 753–762.
81. *Benati S., Rizzi R.* A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem // European Journal of Operational Research. 2007. Vo. 176. No. 1. P. 423–434.
82. *Boctor F.F., Laporte G., Renaud J.* Heuristics for the traveling purchaser problem // Computers & Operations Research. 2003. V. 30. No. 4. P. 491–504.
83. *Borisov A., Ivanov A.* Stochastic Time Complexity Surfaces of Computing Node // Mathematics. 2023. Vo. 20. No. 11.
84. *Bureika G., Komaisko M., Jastremkas V.* Modelling the ranking of Lithuanian Railways Level Crossing By Safety Level // Transport Problems. 2017. Vo. 12. No.: Special Edition. P. 11–22.
85. *Buyanov M.V., Kibzun A.I.* Algorithm of effective transportation work for cargo traffic // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2018. Vo. 11. No. 1. P. 75–83.
86. *Cacchiani V., Caprara A., Toth P.* A column generation approach to train timetabling on a corridor // 4OR. 2008. Vo. 6. No. 2. P. 125–142.
87. *Cacchiani V., Caprara A., Toth P.* Scheduling extra freight trains on railway networks // Transportation Research Part B: Methodological. 2010. Vo. 44. No. 2. P. 215–231.

88. *Cameron A.C., Trivedi P.K.* Regression Analysis of Count Data. New York: Cambridge University Press, 1998.
89. *Cameron A.C., Trivedi P.K.* Essentials of Count Data Regression in A Companion to Theoretical Econometrics (ed B. H. Baltagi). Blackwell Publishing Ltd, 2003.
90. *Casella G., Berger R.L.* Statistical Inference. 2nd Edition. The Wadsworth group, 2002.
91. *Chen-Yu L., Rapik Saat M.* Semi-quantitative risk assessment of adjacent track accidents on shared-use rail corridors // Proceedings of the ASME 2014 Joint Rail Conference (JRC2014). 2014. Vo. V001T06A007.
92. *Cordeau J.-F. Toth P., Vigo D.* A Survey of Optimization Models for Train Routing and Scheduling // Transportation Science. 1998. Vo. 32. No. 4. P. 380–404.
93. *DeGroot M.H., Schervish M.J.* Probability and Statistics (Fourth ed.). Addison-Wesley, 2012.
94. *Dempe S., Ivanov S., Naumov A.* Reduction of the bilevel stochastic optimization problem with quantile objective function to a mixed-integer problem // Applied Stochastic Models in Business & Industry. 2017. Vo. 33. No. 5. P. 544–554.
95. *Demir E., Huckle K., et. al.* Vehicle routing problem: Past and future. In: Wells P. (ed.), Contemporary Operations and Logistics. 2019. P. 97–117.
96. *Fahrmeir L., Kneib T., Lang S., Marx B.* Regression. Models, Methods and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
97. *Famurewa S.M., Xin T., Rantatalo M., Kumar U.* Optimisation of maintenance track possession time: A tamping case study // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part F: Journal of Rail and Rapid Transit. 2013. Vo. 229. No. 1. P. 12–22.
98. *Flores-Luyo L., Agra A., et. al.* Mixed integer formulations for a routing problem with information collection in wireless networks // European Journal of Operational Research. 2020. Vo. 280. No. 2. P. 621–638.

99. *Forsgren M., Aronsson M., Gestrelus S.* Maintaining tracks and traffic flow at the same time // *Journal of Rail Transport Planning & Management*. 2013. Vo. 3. No. 3. P. 111–123.
100. *Gainanov D., Mladenovic N., Rasskazova V.* Simplicial Vertex Heuristic in Solving the Railway Arrival and Departure Paths Assignment Problem. In *Mladenovic N., Sleptchenko A., et al. (eds.): Variable Neighborhood Search, 8th International Conference, ICVNS 2021, Abu Dhabi, United Arab Emirates, March 21–25, 2021*. P. 123–137.
101. *Gao Yu., Kroon L., et al.* Three-stage optimization method for the problem of scheduling additional trains on a high-speed rail corridor // *Omega*. 2018. Vo. 80. P. 175–191.
102. *Gleixner A., Hendel G., et al.* MIPLIB 2017: data-driven compilation of the 6th mixed-integer programming library // *Mathematical Programming Computation*. 2021. Vo. 13.
103. *Gustavsson E., Patriksson M., Stromberg A.-B., Wojciechowski A., Onnheim M.* Preventive maintenance scheduling of multi-component systems with interval costs // *Computers & Industrial Engineering*. 2014. Vo. 76. P. 390–400.
104. *Hansen P., Mladenovic N., et al.* Variable Neighborhood Search in *Handbook of Metaheuristics*. Eds., by Gendreau M., Potvin J.-Y.. 2010. P. 61–86.
105. *Higgins A.* Scheduling of railway track maintenance activities and crews // *The Journal of the Operational Research Society*. 1998. Vo. 49. No. 10. P. 1026–1033.
106. *Hsieh C.-C., Lin M.-H.* Reliability-oriented multi-resource allocation in a stochastic-flow network. *Reliability Engineering & System Safety*. 2003. Vo. 81. No. 2. P. 155–161.
107. <http://safetydata.fra.dot.gov/>
108. <http://www.indianrailways.gov.in/>
109. [https://github.com/al-ignatov/SolversMILP\\_comparison](https://github.com/al-ignatov/SolversMILP_comparison)

110. *Ignatov A.N.* On the resource allocation problem to increase reliability of transport systems // Lecture Notes in Computer Science. 2023. Vo. 13930. P. 169–180.
111. *Ignatov A.N.* On the scheduling problem of cargo transportation on a railway network segment and algorithms for its solution // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2021. Vo. 14. No. 3. P. 61–76.
112. *Ignatov A.N., Ivanov S.V.* Comparing the solvers for the mixed integer linear programming problems and the software environments that call them // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2024. Vo. 17. No. 3. P. 57–72.
113. *Ignatov A.N., Naumov A.V.* On time selection for track possession assignment at the railway station // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2019. Vo. 12. No. 3. P. 5–16.
114. *Ivanov S.V., Akmaeva V.N.* Two-stage stochastic facility location model with quantile criterion and choosing reliability level // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2021. Vo. 14. No. 3. P. 5–17.
115. *Johnson N.L., Kemp A.W., Kotz S.* Univariate Discrete Distributions. Wiley, 2005.
116. *Katoh, N., Ibaraki, T.* Resource Allocation Problems. In: Du, D-Z., Pardalos, P.M. (eds) Handbook of Combinatorial Optimization. 1998. P. 905–1006. Springer New York, NY.
117. *Katsman M.D., Myronenko V.K., Adamenko N.I.* Probabilistic model of ecological consequences of railroad accidents // Reliability: Theory & Applications. 2013. Vo. 8. № 1(28). P. 72–85.
118. *Knueven B., Ostrowski J., Watson J.-P.* On Mixed-Integer Programming Formulations for the Unit Commitment Problem // INFORMS Journal on Computing. Vo. 32, No. 4. 2020.

119. *Koch T., Berthold T., et. al.* Progress in mathematical programming solvers from 2001 to 2020 // EURO Journal on Computational Optimization Vo. 10. 2022.
120. *Koenker R., Hallock K.F.* Quantile Regression // Journal of Economic Perspectives. 2001. V. 15. No. 4. P. 143–156.
121. *Koenker R., Yoon J.* Parametric links for binary choice models: A Fisherian-Bayesian colloquy // Journal of Econometrics. 2009. Vo. 162. No. 2. P. 120–130.
122. *Kolowrocki K., Soszynska-Budny J.* Reliability and Safety of Complex Technical Systems and Processes. SpringerVerlag London Limited, 2011.
123. *Konur D., Golias M.M., Darks B.* A mathematical modeling approach to resource allocation for railroad-highway crossing safety upgrades // Accident Analysis & Prevention. 2013. Vo. 51. P. 192–201.
124. *Kronqvist J., Bernal Neira D., et. al.* A review and comparison of solvers for convex MINLP // Optimization and Engineering 2019. Vo. 20. No. 4.
125. *Kroon L., Maroti G. et al.* Stochastic improvement of cyclic railway timetables // Transportation Research Part B: Methodological. 2008. Vo. 42. No. 6. P. 553–570.
126. *Larson R. C., Kamien David.* Decision models for emergency response planning. The McGraw-Hill Handbook of Homeland Security. 2004.
127. *Lazarev A.A., Musatova E.G.* The problem of trains formation and scheduling: Integer statements // Automation and Remote Control. 2013. V. 74. No. 12. P. 2064–2068.
128. *Liden T.* Coordinating maintenance windows and train traffic: a case study // Public Transport. 2020. Vo. 12. P. 261–298.
129. *Liden T., Joborn M.* An optimization model for integrated planning of railway traffic and network maintenance // Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2017. No. 74. P. 327–347.
130. *Liu X., Rapik Saat M., Barkan C.P.L.* Freight-train derailment rates for railroad safety and risk analysis // Accident Analysis & Prevention. 2017. V. 98. P. 1–9.

131. *Liu X., Rapik Saat M., et al.* Analysis of U.S. freight-train derailment severity using zero-truncated negative binomial regression and quantile regression // *Accident Analysis & Prevention*. 2013. V. 59. P. 87–93.
132. *Liu X., Rapik Saat M., Barkan C.P.L.* Integrated risk reduction framework to improve railway hazardous materials transportation safety // *Journal of Hazardous Materials*. 2013. Vo. 260. P. 131–140.
133. *Lin C.-Yu, Rapik Saat M., Barkan C.P.L.* Semi-quantitative risk assessment of adjacent track accidents on shared-use rail corridors // *Journal of Rail Transport Planning & Management*. 2022. Vo. 24.
134. *MacLean L.C., Thorp E.O., Zhao Y., Ziemba W.T.* How does the fortune’s formula Kelly capital growth model perform? // *The Journal of Portfolio Management* Summer. 2011. V. 37. No. 4. P. 96–111.
135. *Meng L, Zhou X.* Simultaneous train rerouting and rescheduling on an N-track network: A model reformulation with network-based cumulative flow variables // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2014. Vo. 67. P. 208–234.
136. *Mor A., Speranza M.G.* Vehicle routing problems over time: a survey // *4OR*. 2020. V. 18. No. 2. P. 129–149.
137. *Mu S., Dessouky M.* Scheduling freight trains traveling on complex networks // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2011. Vo. 45. No. 7. P. 1103–1123.
138. *Nair, N., Paduthol, S., Balakrishnan, N.* *Quantile-Based Reliability Analysis*. Birkhauser New York, NY, 2013.
139. *Oh J., Washington S.P., Nam D.* Accident prediction model for railway-highway interfaces // *Accident Analysis & Prevention* 2006. Vo. 38. I. 2. P. 346–356.
140. *Omu A., Choudhary R., Boies A.* Distributed energy resource system optimisation using mixed integer linear programming // *Energy Policy*. 2013. Vo. 61. P. 249–266.
141. *Patriksson M.* A survey on the continuous nonlinear resource allocation problem // *European Journal of Operational Research*. 2008. Vo. 185. No. 1. P. 1–46.

142. *Peeters L.W.P.* Cyclic Railway Timetable Optimization, 2003.
143. *Petering M.E.H., Heydar M., Bergmann D.R.* Mixed-Integer Programming for Railway Capacity Analysis and Cyclic, Combined Train Timetabling and Platforming // Transportation Science. 2016. V. 50. No. 3. P. 892–909.
144. *Pita, J., Barnhart, C., Pais Antunes, A.* Integrated Flight Scheduling and Fleet Assignment Under Airport Congestion // Transportation Science. 2013. Vo. 47. P. 477–492.
145. *Powell W.B., Simao H.P., Bouzaiene-Ayari B.* Approximate dynamic programming in transportation and logistics: a unified framework // EURO Journal on Transportation and Logistics. 2012. No. 1. P. 237–284.
146. *Rahbar M., Bagheri M.* Risk Assessment Framework for the Rail Transport of Hazardous Materials // Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. 2014. Vo. 2411. P. 90–95.
147. Railroad-Highway Grade Crossing Handbook. Revised Second Edition August 2007.
148. *Ryan T.A.* Priority Programming Methodology for Rail-Highway Grade Crossings // Transportation Research Record. 1991. Vo. 1327 «Visibility, rail-highway grade crossings, and highway improvement evaluation». P. 21–26.
149. *Saccomanno F.F., El-Hage S.* Establishing Derailment Profiles by Position for Corridor Shipments of Dangerous Goods // Canadian Journal of Civil Engineering. 1991. Vo. 18. P. 67–75.
150. *Saccomanno F.F., El-Hage S.* Minimizing derailments of railcars carrying dangerous commodities through effective marshaling strategies // Transportation Research Record. 1989. V. 1245. P. 34–51.
151. *Saccomanno F., Fu L, Miranda-Moreno L.* Risk-based model for identifying highway-rail grade crossing blackspots // Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. 2004. Vo. 1862 «Traffic Control Devices, Visibility, and Rail-Highway Grade Crossings». P. 127–135.

152. *Saccomanno F.F., Park P.Y.-J., Fu L.* Estimating countermeasure effects for reducing collisions at highway-railway grade crossings // *Accident Analysis & Prevention*. 2007. Vo. 39. No. 2. P. 406–416.
153. *Sama M., D’Ariano A., et al.* A variable neighbourhood search for fast train scheduling and routing during disturbed railway traffic situations // *Computers & Operations Research*. 2017. Vo. 78. P. 480–499.
154. *Sels P., Vansteenwegen P., et al.* The Train Platforming Problem: The Infrastructure Management Company Perspective // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2014. V. 61. P. 55–72.
155. *Veintimilla-Reyes Jaime, Cattrysse D.* Mixed Integer Linear Programming (MILP) Approach to Deal with Spatio-temporal Water Allocation // *Procedia Engineering*. 2016. Vo. 162. P. 221–229.
156. *Ver Hoef J.M., Boveng P.L.* Quasi-Poisson vs. negative binomial regression: how should we model overdispersed count data? // *Ecology*. 2007. Vo. 88. No. 11. P. 2766–2772.
157. *Vidal T., Crainic T.G., et al.* A unified solution framework for multi-attribute vehicle routing problems // *European Journal of Operational Research*. 2014. V. 234. No. 3. P. 658–673.
158. *Ye Y., Liang S., Zhu Y.* A mixed-integer linear programming-based scheduling model for refined-oil shipping // *Computers & Chemical Engineering*. Vo. 99. P. 106–116.
159. *Yang X., Bostel N., Dejax P.* A MILP model and memetic algorithm for the Hub Location and Routing problem with distinct collection and delivery tours // *Computers & Industrial Engineering*. 2019. Vo. 135. P. 105–119.
160. *Ziarati K., Soumis F., et al.* Locomotive assignment with heterogeneous consists at CN North America // *European Journal of Operational Research*. 1997. No. 97. P. 281–292.
161. *Ziemba W.T., Wickson R.G.* *Stochastic Optimization Models in Finance*. World Scientific, 2006.

**Приложение. Начальные данные для решения задачи грузоперевозок на железнодорожной сети**

Таблица П.1. Список поездов.

$i$	$v_i^{\text{отпр.}}$	$v_i^{\text{приб.}}$	$t_i^{\text{отпр.}}$	$d_i$	$t_i$	$w_i$	$i$	$v_i^{\text{отпр.}}$	$v_i^{\text{приб.}}$	$t_i^{\text{отпр.}}$	$d_i$	$t_i$	$w_i$
1	2	10	840	180	1140	1	2	2	10	720	180	1245	1
3	2	10	600	180	1335	1	4	2	22	600	180	1320	1
5	2	10	480	180	1440	1	6	2	22	660	180	1200	1
7	2	10	500	180	1360	1	8	2	22	720	180	1080	1
9	2	10	660	180	1140	1	10	2	10	60	180	1680	1
11	2	10	360	180	1350	1	12	2	22	510	180	1170	1
13	2	10	410	180	1255	1	14	2	22	30	180	1530	1
15	2	22	420	180	1080	1	16	2	33	240	180	1260	1
17	2	10	420	180	1052	1	18	2	22	300	180	1080	1
19	2	10	120	180	1260	1	20	2	22	210	180	1050	1
21	5	34	240	180	1256	1	22	10	2	660	180	1260	1
23	10	2	240	180	1620	1	24	10	2	540	180	1290	1
25	10	2	450	180	1350	1	26	10	2	540	180	1230	1
27	10	2	455	180	1297	1	28	10	2	375	180	1365	1
29	10	2	390	180	1305	1	30	10	2	330	180	1365	1
31	10	2	480	180	1200	1	32	10	2	300	180	1140	1
33	10	2	180	180	1200	1	34	10	2	120	180	1260	1
35	22	2	795	180	1115	1	36	22	2	480	180	1260	1
37	22	2	720	180	960	1	38	22	2	270	180	1185	1
39	22	2	80	180	1200	1	40	22	2	60	180	1140	1
41	22	2	35	180	1125	1	42	22	2	20	180	1120	1
43	42	34	730	180	1250	1	44	34	42	1020	180	900	1
45	34	42	675	180	1215	1	46	34	33	312	180	1548	1
47	34	42	900	180	1020	1	48	34	42	720	180	1050	1
49	34	42	180	180	1560	1	50	34	33	455	180	1250	1
51	34	42	870	180	835	1	52	34	42	240	180	1020	1
53	42	34	495	180	1425	1	54	42	34	660	180	1170	1
55	42	34	540	180	1080	1	56	42	34	180	180	1410	1
57	42	34	960	180	1440	1	58	42	34	1020	180	1440	1
59	10	42	120	180	1000	1	60	42	10	300	180	1000	1
61	2	10	120	180	1440	1	62	2	10	540	180	1440	1

Таблица П.2. Параметры «подниток».

$k$	$v_k^{\text{нач.}}$	$v_k^{\text{кон.}}$	$n_k$	$t_k^{\text{нач.}}$	$t_k^{\text{кон.}}$	$w_k^{\text{макс}}$	$C_k$	$k$	$v_k^{\text{нач.}}$	$v_k^{\text{кон.}}$	$n_k$	$t_k^{\text{нач.}}$	$t_k^{\text{кон.}}$	$w_k^{\text{макс}}$	$C_k$
1	1	2	2	776	788	1	2	2	1	2	2	811	823	1	2
3	1	2	2	861	873	1	2	4	1	2	2	958	970	1	2
5	1	2	2	1038	1050	1	2	6	1	2	2	1092	1104	1	2
7	1	2	2	1215	1227	1	2	8	1	2	2	1304	1316	1	2
9	1	2	2	1326	1338	1	2	10	1	2	2	1346	1358	1	2
11	1	2	2	1376	1388	1	2	12	1	2	2	1389	1401	1	2
13	1	2	2	676	688	1	2	14	1	2	2	746	758	1	2
15	1	2	2	910	922	1	2	16	1	2	2	1256	1268	1	2
17	1	2	2	1366	1378	1	2	18	1	2	2	706	718	1	2
19	1	2	2	946	958	1	2	20	1	2	2	1066	1078	1	2
21	1	2	2	1226	1238	1	2	22	1	2	2	1271	1283	1	2
23	1	3	1	86	246	1	2	24	1	3	1	121	281	1	2
25	1	3	1	159	319	1	2	26	1	3	1	206	366	1	2
27	1	3	1	286	446	1	2	28	1	3	1	337	497	1	2
29	1	3	1	459	619	1	2	30	1	3	1	633	793	1	2
31	1	3	1	815	975	1	2	32	1	3	1	866	1026	1	2
33	1	3	1	888	1048	1	2	34	1	3	1	104	264	1	2
35	1	3	1	194	354	1	2	36	1	3	1	294	454	1	2
37	1	3	1	494	654	1	2	38	1	3	1	704	864	1	2
39	1	3	1	134	294	1	2	40	1	3	1	224	384	1	2
41	1	3	1	434	594	1	2	42	1	3	1	554	714	1	2
43	1	3	1	614	774	1	2	44	1	12	2	30	42	1	2
45	1	12	2	390	402	1	2	46	1	12	2	1110	1122	1	2
47	1	23	2	182	200	1	2	48	1	23	2	302	320	1	2
49	1	23	2	657	675	1	2	50	1	23	2	818	836	1	2
51	1	23	2	1116	1134	1	2	52	1	24	1	761	801	1	2
53	1	24	1	1255	1295	1	2	54	1	24	1	1315	1355	1	2
55	2	1	1	74	86	1	2	56	2	1	1	109	121	1	2
57	2	1	1	147	159	1	2	58	2	1	1	194	206	1	2
59	2	1	1	274	286	1	2	60	2	1	1	325	337	1	2
61	2	1	1	447	459	1	2	62	2	1	1	621	633	1	2
63	2	1	1	803	815	1	2	64	2	1	1	854	866	1	2
65	2	1	1	876	888	1	2	66	2	1	1	92	104	1	2
67	2	1	1	182	194	1	2	68	2	1	1	282	294	1	2
69	2	1	1	482	494	1	2	70	2	1	1	692	704	1	2
71	2	1	1	122	134	1	2	72	2	1	1	212	224	1	2
73	2	1	1	422	434	1	2	74	2	1	1	542	554	1	2
75	2	1	1	602	614	1	2	76	2	11	1	28	36	1	2
77	2	11	1	110	118	1	2	78	2	11	1	386	394	1	2
79	2	11	1	588	596	1	2	80	2	11	1	864	872	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

81	2	12	2	23	30	1	2	82	2	12	2	61	68	1	2
83	2	12	2	106	113	1	2	84	2	12	2	137	144	1	2
85	2	12	2	153	160	1	2	86	2	12	2	176	183	1	2
87	2	12	2	213	220	1	2	88	2	12	2	366	373	1	2
89	2	12	2	524	531	1	2	90	2	12	2	726	733	1	2
91	2	12	2	884	891	1	2	92	2	12	2	1072	1079	1	2
93	2	12	2	289	296	1	2	94	2	12	2	425	432	1	2
95	2	12	2	625	632	1	2	96	2	12	2	767	774	1	2
97	2	12	2	981	988	1	2	98	2	12	2	266	273	1	2
99	2	12	2	479	486	1	2	100	2	12	2	759	766	1	2
101	2	12	2	1086	1093	1	2	102	2	12	2	1134	1141	1	2
103	3	1	1	616	776	1	2	104	3	1	1	651	811	1	2
105	3	1	1	701	861	1	2	106	3	1	1	798	958	1	2
107	3	1	1	878	1038	1	2	108	3	1	1	932	1092	1	2
109	3	1	1	1055	1215	1	2	110	3	1	1	1144	1304	1	2
111	3	1	1	1166	1326	1	2	112	3	1	1	1186	1346	1	2
113	3	1	1	1216	1376	1	2	114	3	1	1	1229	1389	1	2
115	3	1	1	516	676	1	2	116	3	1	1	586	746	1	2
117	3	1	1	750	910	1	2	118	3	1	1	1096	1256	1	2
119	3	1	1	1206	1366	1	2	120	3	1	1	546	706	1	2
121	3	1	1	786	946	1	2	122	3	1	1	906	1066	1	2
123	3	1	1	1066	1226	1	2	124	3	1	1	1111	1271	1	2
125	3	4	1	246	338	1	2	126	3	4	1	281	373	1	2
127	3	4	1	319	411	1	2	128	3	4	1	366	458	1	2
129	3	4	1	446	538	1	2	130	3	4	1	497	589	1	2
131	3	4	1	619	711	1	2	132	3	4	1	793	885	1	2
133	3	4	1	975	1067	1	2	134	3	4	1	1026	1118	1	2
135	3	4	1	1048	1140	1	2	136	3	4	1	264	356	1	2
137	3	4	1	354	446	1	2	138	3	4	1	454	546	1	2
139	3	4	1	654	746	1	2	140	3	4	1	864	956	1	2
141	3	4	1	294	386	1	2	142	3	4	1	384	476	1	2
143	3	4	1	594	686	1	2	144	3	4	1	714	806	1	2
145	3	4	1	774	866	1	2	146	3	25	1	310	480	1	2
147	3	25	1	690	860	1	2	148	3	25	1	990	1160	1	2
149	4	3	2	524	616	1	2	150	4	3	2	559	651	1	2
151	4	3	2	609	701	1	2	152	4	3	2	706	798	1	2
153	4	3	2	786	878	1	2	154	4	3	2	840	932	1	2
155	4	3	2	963	1055	1	2	156	4	3	2	1052	1144	1	2
157	4	3	2	1074	1166	1	2	158	4	3	2	1094	1186	1	2
159	4	3	2	1124	1216	1	2	160	4	3	2	1137	1229	1	2
161	4	3	2	424	516	1	2	162	4	3	2	494	586	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

163	4	3	2	658	750	1	2	164	4	3	2	1004	1096	1	2
165	4	3	2	1114	1206	1	2	166	4	3	2	454	546	1	2
167	4	3	2	694	786	1	2	168	4	3	2	814	906	1	2
169	4	3	2	974	1066	1	2	170	4	3	2	1019	1111	1	2
171	4	5	1	338	360	1	2	172	4	5	1	373	395	1	2
173	4	5	1	411	433	1	2	174	4	5	1	458	480	1	2
175	4	5	1	538	560	1	2	176	4	5	1	589	611	1	2
177	4	5	1	711	733	1	2	178	4	5	1	885	907	1	2
179	4	5	1	1067	1089	1	2	180	4	5	1	1118	1140	1	2
181	4	5	1	1140	1162	1	2	182	4	5	1	356	378	1	2
183	4	5	1	446	468	1	2	184	4	5	1	546	568	1	2
185	4	5	1	746	768	1	2	186	4	5	1	956	978	1	2
187	4	5	1	386	408	1	2	188	4	5	1	476	498	1	2
189	4	5	1	686	708	1	2	190	4	5	1	806	828	1	2
191	4	5	1	866	888	1	2	192	5	4	2	502	524	1	2
193	5	4	2	537	559	1	2	194	5	4	2	587	609	1	2
195	5	4	2	684	706	1	2	196	5	4	2	764	786	1	2
197	5	4	2	818	840	1	2	198	5	4	2	941	963	1	2
199	5	4	2	1030	1052	1	2	200	5	4	2	1052	1074	1	2
201	5	4	2	1072	1094	1	2	202	5	4	2	1102	1124	1	2
203	5	4	2	1115	1137	1	2	204	5	4	2	402	424	1	2
205	5	4	2	472	494	1	2	206	5	4	2	636	658	1	2
207	5	4	2	982	1004	1	2	208	5	4	2	1092	1114	1	2
209	5	4	2	432	454	1	2	210	5	4	2	672	694	1	2
211	5	4	2	792	814	1	2	212	5	4	2	952	974	1	2
213	5	4	2	997	1019	1	2	214	5	6	1	360	385	1	2
215	5	6	1	395	420	1	2	216	5	6	1	433	458	1	2
217	5	6	1	480	505	1	2	218	5	6	1	560	585	1	2
219	5	6	1	611	636	1	2	220	5	6	1	733	758	1	2
221	5	6	1	907	932	1	2	222	5	6	1	1089	1114	1	2
223	5	6	1	1140	1165	1	2	224	5	6	1	1162	1187	1	2
225	5	6	1	378	403	1	2	226	5	6	1	468	493	1	2
227	5	6	1	568	593	1	2	228	5	6	1	768	793	1	2
229	5	6	1	978	1003	1	2	230	5	6	1	408	433	1	2
231	5	6	1	498	523	1	2	232	5	6	1	708	733	1	2
233	5	6	1	828	853	1	2	234	5	6	1	888	913	1	2
235	6	5	2	477	502	1	2	236	6	5	2	512	537	1	2
237	6	5	2	562	587	1	2	238	6	5	2	659	684	1	2
239	6	5	2	739	764	1	2	240	6	5	2	793	818	1	2
241	6	5	2	916	941	1	2	242	6	5	2	1005	1030	1	2
243	6	5	2	1027	1052	1	2	244	6	5	2	1047	1072	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

245	6	5	2	1077	1102	1	2	246	6	5	2	1090	1115	1	2
247	6	5	2	377	402	1	2	248	6	5	2	447	472	1	2
249	6	5	2	611	636	1	2	250	6	5	2	957	982	1	2
251	6	5	2	1067	1092	1	2	252	6	5	2	407	432	1	2
253	6	5	2	647	672	1	2	254	6	5	2	767	792	1	2
255	6	5	2	927	952	1	2	256	6	5	2	972	997	1	2
257	6	7	1	385	475	1	2	258	6	7	1	420	510	1	2
259	6	7	1	458	548	1	2	260	6	7	1	505	595	1	2
261	6	7	1	585	675	1	2	262	6	7	1	636	726	1	2
263	6	7	1	758	848	1	2	264	6	7	1	932	1022	1	2
265	6	7	1	1114	1204	1	2	266	6	7	1	1165	1255	1	2
267	6	7	1	1187	1277	1	2	268	6	7	1	403	493	1	2
269	6	7	1	493	583	1	2	270	6	7	1	593	683	1	2
271	6	7	1	793	883	1	2	272	6	7	1	1003	1093	1	2
273	6	7	1	433	523	1	2	274	6	7	1	523	613	1	2
275	6	7	1	733	823	1	2	276	6	7	1	853	943	1	2
277	6	7	1	913	1003	1	2	278	6	26	1	360	540	1	2
279	6	26	1	420	600	1	2	280	6	26	1	940	1120	1	2
281	7	6	2	387	477	1	2	282	7	6	2	422	512	1	2
283	7	6	2	472	562	1	2	284	7	6	2	569	659	1	2
285	7	6	2	649	739	1	2	286	7	6	2	703	793	1	2
287	7	6	2	826	916	1	2	288	7	6	2	915	1005	1	2
289	7	6	2	937	1027	1	2	290	7	6	2	957	1047	1	2
291	7	6	2	987	1077	1	2	292	7	6	2	1000	1090	1	2
293	7	6	2	287	377	1	2	294	7	6	2	357	447	1	2
295	7	6	2	521	611	1	2	296	7	6	2	867	957	1	2
297	7	6	2	977	1067	1	2	298	7	6	2	317	407	1	2
299	7	6	2	557	647	1	2	300	7	6	2	677	767	1	2
301	7	6	2	837	927	1	2	302	7	6	2	882	972	1	2
303	7	8	1	475	595	1	2	304	7	8	1	510	630	1	2
305	7	8	1	548	668	1	2	306	7	8	1	595	715	1	2
307	7	8	1	675	795	1	2	308	7	8	1	726	846	1	2
309	7	8	1	848	968	1	2	310	7	8	1	1022	1142	1	2
311	7	8	1	1204	1324	1	2	312	7	8	1	1255	1375	1	2
313	7	8	1	1277	1397	1	2	314	7	8	1	493	613	1	2
315	7	8	1	583	703	1	2	316	7	8	1	683	803	1	2
317	7	8	1	883	1003	1	2	318	7	8	1	1093	1213	1	2
319	7	8	1	523	643	1	2	320	7	8	1	613	733	1	2
321	7	8	1	823	943	1	2	322	7	8	1	943	1063	1	2
323	7	8	1	1003	1123	1	2	324	7	28	1	420	436	1	2
325	7	28	1	672	688	1	2	326	7	28	1	892	908	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

327	7	28	1	1043	1059	1	2	328	8	7	2	267	387	1	2
329	8	7	2	302	422	1	2	330	8	7	2	352	472	1	2
331	8	7	2	449	569	1	2	332	8	7	2	529	649	1	2
333	8	7	2	583	703	1	2	334	8	7	2	706	826	1	2
335	8	7	2	795	915	1	2	336	8	7	2	817	937	1	2
337	8	7	2	837	957	1	2	338	8	7	2	867	987	1	2
339	8	7	2	880	1000	1	2	340	8	7	2	167	287	1	2
341	8	7	2	237	357	1	2	342	8	7	2	401	521	1	2
343	8	7	2	747	867	1	2	344	8	7	2	857	977	1	2
345	8	7	2	197	317	1	2	346	8	7	2	437	557	1	2
347	8	7	2	557	677	1	2	348	8	7	2	717	837	1	2
349	8	7	2	762	882	1	2	350	8	9	1	595	606	1	2
351	8	9	1	630	641	1	2	352	8	9	1	668	679	1	2
353	8	9	1	715	726	1	2	354	8	9	1	795	806	1	2
355	8	9	1	846	857	1	2	356	8	9	1	968	979	1	2
357	8	9	1	1142	1153	1	2	358	8	9	1	1324	1335	1	2
359	8	9	1	1375	1386	1	2	360	8	9	1	1397	1408	1	2
361	8	9	1	613	624	1	2	362	8	9	1	703	714	1	2
363	8	9	1	803	814	1	2	364	8	9	1	1003	1014	1	2
365	8	9	1	1213	1224	1	2	366	8	9	1	643	654	1	2
367	8	9	1	733	744	1	2	368	8	9	1	943	954	1	2
369	8	9	1	1063	1074	1	2	370	8	9	1	1123	1134	1	2
371	9	8	2	256	267	1	2	372	9	8	2	291	302	1	2
373	9	8	2	341	352	1	2	374	9	8	2	438	449	1	2
375	9	8	2	518	529	1	2	376	9	8	2	572	583	1	2
377	9	8	2	695	706	1	2	378	9	8	2	784	795	1	2
379	9	8	2	806	817	1	2	380	9	8	2	826	837	1	2
381	9	8	2	856	867	1	2	382	9	8	2	869	880	1	2
383	9	8	2	156	167	1	2	384	9	8	2	226	237	1	2
385	9	8	2	390	401	1	2	386	9	8	2	736	747	1	2
387	9	8	2	846	857	1	2	388	9	8	2	186	197	1	2
389	9	8	2	426	437	1	2	390	9	8	2	546	557	1	2
391	9	8	2	706	717	1	2	392	9	8	2	751	762	1	2
393	9	10	1	606	612	1	2	394	9	10	1	641	647	1	2
395	9	10	1	679	685	1	2	396	9	10	1	726	732	1	2
397	9	10	1	806	812	1	2	398	9	10	1	857	863	1	2
399	9	10	1	979	985	1	2	400	9	10	1	1153	1159	1	2
401	9	10	1	1335	1341	1	2	402	9	10	1	1386	1392	1	2
403	9	10	1	1408	1414	1	2	404	9	10	1	624	630	1	2
405	9	10	1	714	720	1	2	406	9	10	1	814	820	1	2
407	9	10	1	1014	1020	1	2	408	9	10	1	1224	1230	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

409	9	10	1	654	660	1	2	410	9	10	1	744	750	1	2
411	9	10	1	954	960	1	2	412	9	10	1	1074	1080	1	2
413	9	10	1	1134	1140	1	2	414	9	30	1	192	206	1	2
415	9	30	1	318	332	1	2	416	9	30	1	445	459	1	2
417	9	30	1	924	938	1	2	418	9	30	1	972	986	1	2
419	10	9	2	250	256	1	2	420	10	9	2	285	291	1	2
421	10	9	2	335	341	1	2	422	10	9	2	432	438	1	2
423	10	9	2	512	518	1	2	424	10	9	2	566	572	1	2
425	10	9	2	689	695	1	2	426	10	9	2	778	784	1	2
427	10	9	2	800	806	1	2	428	10	9	2	820	826	1	2
429	10	9	2	850	856	1	2	430	10	9	2	863	869	1	2
431	10	9	2	150	156	1	2	432	10	9	2	220	226	1	2
433	10	9	2	384	390	1	2	434	10	9	2	730	736	1	2
435	10	9	2	840	846	1	2	436	10	9	2	180	186	1	2
437	10	9	2	420	426	1	2	438	10	9	2	540	546	1	2
439	10	9	2	700	706	1	2	440	10	9	2	745	751	1	2
441	10	30	1	192	210	1	2	442	10	30	1	327	345	1	2
443	10	30	1	451	469	1	2	444	10	30	1	672	690	1	2
445	11	2	1	274	282	1	2	446	11	2	1	884	892	1	2
447	11	2	1	1056	1064	1	2	448	11	2	1	1337	1345	1	2
449	11	2	1	1419	1427	1	2	450	11	32	1	36	188	1	2
451	11	32	1	118	270	1	2	452	11	32	1	394	546	1	2
453	11	32	1	596	748	1	2	454	11	32	1	872	1024	1	2
455	12	1	1	268	280	1	2	456	12	1	1	748	760	1	2
457	12	1	1	1228	1240	1	2	458	12	2	1	324	331	1	2
459	12	2	1	334	341	1	2	460	12	2	1	366	373	1	2
461	12	2	1	377	384	1	2	462	12	2	1	455	462	1	2
463	12	2	1	476	483	1	2	464	12	2	1	495	502	1	2
465	12	2	1	519	526	1	2	466	12	2	1	544	551	1	2
467	12	2	1	972	979	1	2	468	12	2	1	1086	1093	1	2
469	12	2	1	1275	1282	1	2	470	12	2	1	1407	1414	1	2
471	12	2	1	619	626	1	2	472	12	2	1	732	739	1	2
473	12	2	1	868	875	1	2	474	12	2	1	934	941	1	2
475	12	2	1	1166	1173	1	2	476	12	2	1	346	353	1	2
477	12	2	1	589	596	1	2	478	12	2	1	740	747	1	2
479	12	2	1	1159	1166	1	2	480	12	2	1	1344	1351	1	2
481	12	13	2	30	36	1	2	482	12	13	2	68	74	1	2
483	12	13	2	113	119	1	2	484	12	13	2	144	150	1	2
485	12	13	2	160	166	1	2	486	12	13	2	183	189	1	2
487	12	13	2	220	226	1	2	488	12	13	2	373	379	1	2
489	12	13	2	531	537	1	2	490	12	13	2	733	739	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

491	12	13	2	891	897	1	2	492	12	13	2	1079	1085	1	2
493	12	13	2	296	305	1	2	494	12	13	2	432	441	1	2
495	12	13	2	632	641	1	2	496	12	13	2	774	783	1	2
497	12	13	2	988	997	1	2	498	12	13	2	264	273	1	2
499	12	13	2	477	486	1	2	500	12	13	2	757	766	1	2
501	12	13	2	1084	1093	1	2	502	12	13	2	1132	1141	1	2
503	13	12	1	315	324	1	2	504	13	12	1	325	334	1	2
505	13	12	1	357	366	1	2	506	13	12	1	368	377	1	2
507	13	12	1	446	455	1	2	508	13	12	1	467	476	1	2
509	13	12	1	486	495	1	2	510	13	12	1	510	519	1	2
511	13	12	1	535	544	1	2	512	13	12	1	963	972	1	2
513	13	12	1	1077	1086	1	2	514	13	12	1	1266	1275	1	2
515	13	12	1	1398	1407	1	2	516	13	12	1	610	619	1	2
517	13	12	1	723	732	1	2	518	13	12	1	859	868	1	2
519	13	12	1	925	934	1	2	520	13	12	1	1157	1166	1	2
521	13	12	1	337	346	1	2	522	13	12	1	580	589	1	2
523	13	12	1	731	740	1	2	524	13	12	1	1150	1159	1	2
525	13	12	1	1335	1344	1	2	526	13	14	2	30	36	1	2
527	13	14	2	68	74	1	2	528	13	14	2	113	119	1	2
529	13	14	2	144	150	1	2	530	13	14	2	160	166	1	2
531	13	14	2	183	189	1	2	532	13	14	2	220	226	1	2
533	13	14	2	373	379	1	2	534	13	14	2	531	537	1	2
535	13	14	2	733	739	1	2	536	13	14	2	891	897	1	2
537	13	14	2	1079	1085	1	2	538	13	14	2	305	311	1	2
539	13	14	2	441	447	1	2	540	13	14	2	641	647	1	2
541	13	14	2	783	789	1	2	542	13	14	2	997	1003	1	2
543	13	14	2	267	273	1	2	544	13	14	2	480	486	1	2
545	13	14	2	760	766	1	2	546	13	14	2	1087	1093	1	2
547	13	14	2	1135	1141	1	2	548	13	23	1	377	385	1	2
549	13	23	1	557	565	1	2	550	13	23	1	997	1005	1	2
551	14	13	1	309	315	1	2	552	14	13	1	319	325	1	2
553	14	13	1	351	357	1	2	554	14	13	1	362	368	1	2
555	14	13	1	440	446	1	2	556	14	13	1	461	467	1	2
557	14	13	1	480	486	1	2	558	14	13	1	504	510	1	2
559	14	13	1	529	535	1	2	560	14	13	1	957	963	1	2
561	14	13	1	1071	1077	1	2	562	14	13	1	1260	1266	1	2
563	14	13	1	1392	1398	1	2	564	14	13	1	604	610	1	2
565	14	13	1	717	723	1	2	566	14	13	1	853	859	1	2
567	14	13	1	919	925	1	2	568	14	13	1	1151	1157	1	2
569	14	13	1	331	337	1	2	570	14	13	1	574	580	1	2
571	14	13	1	725	731	1	2	572	14	13	1	1144	1150	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

573	14	13	1	1329	1335	1	2	574	14	15	2	36	145	1	2
575	14	15	2	74	183	1	2	576	14	15	2	119	228	1	2
577	14	15	2	150	259	1	2	578	14	15	2	166	275	1	2
579	14	15	2	189	298	1	2	580	14	15	2	226	335	1	2
581	14	15	2	379	488	1	2	582	14	15	2	537	646	1	2
583	14	15	2	739	848	1	2	584	14	15	2	897	1006	1	2
585	14	15	2	1085	1194	1	2	586	14	15	2	311	420	1	2
587	14	15	2	447	556	1	2	588	14	15	2	647	756	1	2
589	14	15	2	789	898	1	2	590	14	15	2	1003	1112	1	2
591	14	15	2	273	382	1	2	592	14	15	2	486	595	1	2
593	14	15	2	766	875	1	2	594	14	15	2	1093	1202	1	2
595	14	15	2	1141	1250	1	2	596	14	23	1	798	805	1	2
597	14	23	1	938	945	1	2	598	14	23	1	1325	1332	1	2
599	15	14	1	200	309	1	2	600	15	14	1	210	319	1	2
601	15	14	1	242	351	1	2	602	15	14	1	253	362	1	2
603	15	14	1	331	440	1	2	604	15	14	1	352	461	1	2
605	15	14	1	371	480	1	2	606	15	14	1	395	504	1	2
607	15	14	1	420	529	1	2	608	15	14	1	848	957	1	2
609	15	14	1	962	1071	1	2	610	15	14	1	1151	1260	1	2
611	15	14	1	1283	1392	1	2	612	15	14	1	495	604	1	2
613	15	14	1	608	717	1	2	614	15	14	1	744	853	1	2
615	15	14	1	810	919	1	2	616	15	14	1	1042	1151	1	2
617	15	14	1	222	331	1	2	618	15	14	1	465	574	1	2
619	15	14	1	616	725	1	2	620	15	14	1	1035	1144	1	2
621	15	14	1	1220	1329	1	2	622	15	16	2	139	145	1	2
623	15	16	2	177	183	1	2	624	15	16	2	222	228	1	2
625	15	16	2	253	259	1	2	626	15	16	2	269	275	1	2
627	15	16	2	292	298	1	2	628	15	16	2	329	335	1	2
629	15	16	2	482	488	1	2	630	15	16	2	640	646	1	2
631	15	16	2	842	848	1	2	632	15	16	2	1000	1006	1	2
633	15	16	2	1188	1194	1	2	634	15	16	2	420	427	1	2
635	15	16	2	556	563	1	2	636	15	16	2	756	763	1	2
637	15	16	2	898	905	1	2	638	15	16	2	1112	1119	1	2
639	15	16	2	382	389	1	2	640	15	16	2	595	602	1	2
641	15	16	2	875	882	1	2	642	15	16	2	1202	1209	1	2
643	15	16	2	1250	1257	1	2	644	15	25	1	419	510	1	2
645	15	25	1	729	820	1	2	646	15	25	1	1179	1270	1	2
647	16	15	1	193	200	1	2	648	16	15	1	203	210	1	2
649	16	15	1	235	242	1	2	650	16	15	1	246	253	1	2
651	16	15	1	324	331	1	2	652	16	15	1	345	352	1	2
653	16	15	1	364	371	1	2	654	16	15	1	388	395	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

655	16	15	1	413	420	1	2	656	16	15	1	841	848	1	2
657	16	15	1	955	962	1	2	658	16	15	1	1144	1151	1	2
659	16	15	1	1276	1283	1	2	660	16	15	1	488	495	1	2
661	16	15	1	601	608	1	2	662	16	15	1	737	744	1	2
663	16	15	1	803	810	1	2	664	16	15	1	1035	1042	1	2
665	16	15	1	215	222	1	2	666	16	15	1	458	465	1	2
667	16	15	1	609	616	1	2	668	16	15	1	1028	1035	1	2
669	16	15	1	1213	1220	1	2	670	16	17	2	145	210	1	2
671	16	17	2	183	248	1	2	672	16	17	2	228	293	1	2
673	16	17	2	259	324	1	2	674	16	17	2	275	340	1	2
675	16	17	2	298	363	1	2	676	16	17	2	335	400	1	2
677	16	17	2	488	553	1	2	678	16	17	2	646	711	1	2
679	16	17	2	848	913	1	2	680	16	17	2	1006	1071	1	2
681	16	17	2	1194	1259	1	2	682	16	17	2	427	492	1	2
683	16	17	2	563	628	1	2	684	16	17	2	763	828	1	2
685	16	17	2	905	970	1	2	686	16	17	2	1119	1184	1	2
687	16	17	2	389	454	1	2	688	16	17	2	602	667	1	2
689	16	17	2	882	947	1	2	690	16	17	2	1209	1274	1	2
691	16	17	2	1257	1322	1	2	692	16	26	1	565	660	1	2
693	16	26	1	595	690	1	2	694	16	26	1	915	1010	1	2
695	16	26	1	950	1045	1	2	696	16	35	1	183	383	1	2
697	16	35	1	694	894	1	2	698	16	35	1	965	1165	1	2
699	17	16	1	128	193	1	2	700	17	16	1	138	203	1	2
701	17	16	1	170	235	1	2	702	17	16	1	181	246	1	2
703	17	16	1	259	324	1	2	704	17	16	1	280	345	1	2
705	17	16	1	299	364	1	2	706	17	16	1	323	388	1	2
707	17	16	1	348	413	1	2	708	17	16	1	776	841	1	2
709	17	16	1	890	955	1	2	710	17	16	1	1079	1144	1	2
711	17	16	1	1211	1276	1	2	712	17	16	1	423	488	1	2
713	17	16	1	536	601	1	2	714	17	16	1	672	737	1	2
715	17	16	1	738	803	1	2	716	17	16	1	970	1035	1	2
717	17	16	1	150	215	1	2	718	17	16	1	393	458	1	2
719	17	16	1	544	609	1	2	720	17	16	1	963	1028	1	2
721	17	16	1	1148	1213	1	2	722	17	18	1	314	331	1	2
723	17	18	1	402	419	1	2	724	17	18	1	923	940	1	2
725	17	20	2	210	240	1	2	726	17	20	2	248	278	1	2
727	17	20	2	293	323	1	2	728	17	20	2	324	354	1	2
729	17	20	2	340	370	1	2	730	17	20	2	363	393	1	2
731	17	20	2	400	430	1	2	732	17	20	2	553	583	1	2
733	17	20	2	711	741	1	2	734	17	20	2	913	943	1	2
735	17	20	2	1071	1101	1	2	736	17	20	2	1259	1289	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

737	17	20	2	462	492	1	2	738	17	20	2	598	628	1	2
739	17	20	2	798	828	1	2	740	17	20	2	940	970	1	2
741	17	20	2	1154	1184	1	2	742	17	20	2	454	484	1	2
743	17	20	2	667	697	1	2	744	17	20	2	947	977	1	2
745	17	20	2	1274	1304	1	2	746	17	20	2	1322	1352	1	2
747	18	17	1	643	660	1	2	748	18	17	1	823	840	1	2
749	18	17	1	1123	1140	1	2	750	18	19	1	300	317	1	2
751	18	19	1	360	377	1	2	752	18	19	1	600	617	1	2
753	18	19	1	660	677	1	2	754	18	19	1	900	917	1	2
755	18	19	1	960	977	1	2	756	18	19	1	1320	1337	1	2
757	18	20	2	172	192	1	2	758	18	20	2	374	394	1	2
759	18	20	2	435	455	1	2	760	18	20	2	652	672	1	2
761	18	20	2	914	934	1	2	762	18	20	2	1132	1152	1	2
763	18	27	1	233	240	1	2	764	18	27	1	533	540	1	2
765	18	27	1	923	930	1	2	766	18	27	1	1268	1275	1	2
767	19	35	1	140	295	1	2	768	19	35	1	222	377	1	2
769	19	35	1	992	1147	1	2	770	19	35	1	1130	1285	1	2
771	19	18	2	253	270	1	2	772	19	18	2	455	472	1	2
773	19	18	2	655	672	1	2	774	19	18	2	906	923	1	2
775	19	18	2	986	1003	1	2	776	19	18	2	1137	1154	1	2
777	19	18	2	1268	1285	1	2	778	20	17	2	98	128	1	2
779	20	17	1	108	138	1	2	780	20	17	1	140	170	1	2
781	20	17	1	151	181	1	2	782	20	17	1	229	259	1	2
783	20	17	1	250	280	1	2	784	20	17	1	269	299	1	2
785	20	17	1	293	323	1	2	786	20	17	1	318	348	1	2
787	20	17	1	746	776	1	2	788	20	17	1	860	890	1	2
789	20	17	1	1049	1079	1	2	790	20	17	1	1181	1211	1	2
791	20	17	1	393	423	1	2	792	20	17	1	506	536	1	2
793	20	17	1	642	672	1	2	794	20	17	1	708	738	1	2
795	20	17	1	940	970	1	2	796	20	17	1	120	150	1	2
797	20	17	1	363	393	1	2	798	20	17	1	514	544	1	2
799	20	17	1	933	963	1	2	800	20	17	1	1118	1148	1	2
801	20	18	1	255	275	1	2	802	20	18	1	432	452	1	2
803	20	18	1	645	665	1	2	804	20	18	1	805	825	1	2
805	20	18	1	979	999	1	2	806	20	18	1	1374	1394	1	2
807	20	21	2	240	302	1	2	808	20	21	2	278	340	1	2
809	20	21	2	323	385	1	2	810	20	21	2	354	416	1	2
811	20	21	2	370	432	1	2	812	20	21	2	393	455	1	2
813	20	21	2	430	492	1	2	814	20	21	2	583	645	1	2
815	20	21	2	741	803	1	2	816	20	21	2	943	1005	1	2
817	20	21	2	1101	1163	1	2	818	20	21	2	1289	1351	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

819	20	21	2	492	554	1	2	820	20	21	2	628	690	1	2
821	20	21	2	828	890	1	2	822	20	21	2	970	1032	1	2
823	20	21	2	1184	1246	1	2	824	20	21	2	484	546	1	2
825	20	21	2	697	759	1	2	826	20	21	2	977	1039	1	2
827	20	21	2	1304	1366	1	2	828	20	21	2	1352	1414	1	2
829	20	27	1	520	540	1	2	830	20	27	1	760	780	1	2
831	20	27	1	1060	1080	1	2	832	20	27	1	1300	1320	1	2
833	21	20	1	36	98	1	2	834	21	20	1	46	108	1	2
835	21	20	1	78	140	1	2	836	21	20	1	89	151	1	2
837	21	20	1	167	229	1	2	838	21	20	1	188	250	1	2
839	21	20	1	207	269	1	2	840	21	20	1	231	293	1	2
841	21	20	1	256	318	1	2	842	21	20	1	684	746	1	2
843	21	20	1	798	860	1	2	844	21	20	1	987	1049	1	2
845	21	20	1	1119	1181	1	2	846	21	20	1	331	393	1	2
847	21	20	1	444	506	1	2	848	21	20	1	580	642	1	2
849	21	20	1	646	708	1	2	850	21	20	1	878	940	1	2
851	21	20	1	58	120	1	2	852	21	20	1	301	363	1	2
853	21	20	1	452	514	1	2	854	21	20	1	871	933	1	2
855	21	20	1	1056	1118	1	2	856	21	22	2	302	308	1	2
857	21	22	2	340	346	1	2	858	21	22	2	385	391	1	2
859	21	22	2	416	422	1	2	860	21	22	2	432	438	1	2
861	21	22	2	455	461	1	2	862	21	22	2	492	498	1	2
863	21	22	2	645	651	1	2	864	21	22	2	803	809	1	2
865	21	22	2	1005	1011	1	2	866	21	22	2	1163	1169	1	2
867	21	22	2	1351	1357	1	2	868	21	22	2	554	560	1	2
869	21	22	2	690	696	1	2	870	21	22	2	890	896	1	2
871	21	22	2	1032	1038	1	2	872	21	22	2	1246	1252	1	2
873	21	22	2	546	552	1	2	874	21	22	2	759	765	1	2
875	21	22	2	1039	1045	1	2	876	21	22	2	1366	1372	1	2
877	21	22	2	1414	1420	1	2	878	21	29	1	410	420	1	2
879	21	29	1	650	660	1	2	880	21	29	1	890	900	1	2
881	22	21	1	30	36	1	2	882	22	21	1	40	46	1	2
883	22	21	1	72	78	1	2	884	22	21	1	83	89	1	2
885	22	21	1	161	167	1	2	886	22	21	1	182	188	1	2
887	22	21	1	201	207	1	2	888	22	21	1	225	231	1	2
889	22	21	1	250	256	1	2	890	22	21	1	678	684	1	2
891	22	21	1	792	798	1	2	892	22	21	1	981	987	1	2
893	22	21	1	1113	1119	1	2	894	22	21	1	325	331	1	2
895	22	21	1	438	444	1	2	896	22	21	1	574	580	1	2
897	22	21	1	640	646	1	2	898	22	21	1	872	878	1	2
899	22	21	1	52	58	1	2	900	22	21	1	295	301	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

901	22	21	1	446	452	1	2	902	22	21	1	865	871	1	2
903	22	21	1	1050	1056	1	2	904	22	29	2	460	468	1	2
905	22	29	2	520	528	1	2	906	22	29	2	580	588	1	2
907	22	29	2	640	648	1	2	908	22	29	2	1000	1008	1	2
909	22	31	2	196	201	1	2	910	22	31	2	258	263	1	2
911	22	31	2	440	445	1	2	912	22	31	2	607	612	1	2
913	22	31	2	817	822	1	2	914	22	31	2	974	979	1	2
915	22	31	2	1147	1152	1	2	916	22	31	2	1420	1425	1	2
917	23	1	1	255	273	1	2	918	23	1	1	385	403	1	2
919	23	1	1	572	590	1	2	920	23	1	1	705	723	1	2
921	23	1	1	1065	1083	1	2	922	23	13	1	805	813	1	2
923	23	13	1	1005	1013	1	2	924	23	13	1	1210	1218	1	2
925	23	14	1	72	79	1	2	926	23	14	1	293	300	1	2
927	23	14	1	476	483	1	2	928	23	24	1	479	485	1	2
929	23	24	1	539	545	1	2	930	23	24	1	1139	1145	1	2
931	23	24	1	1199	1205	1	2	932	24	1	1	204	244	1	2
933	24	1	1	534	574	1	2	934	24	1	1	975	1015	1	2
935	24	23	1	185	191	1	2	936	24	23	1	305	311	1	2
937	24	23	1	905	911	1	2	938	24	23	1	1025	1031	1	2
939	24	25	1	491	600	1	2	940	24	25	1	551	660	1	2
941	24	25	1	851	960	1	2	942	25	3	1	134	304	1	2
943	25	3	1	494	664	1	2	944	25	3	1	1215	1385	1	2
945	25	15	1	292	383	1	2	946	25	15	1	523	614	1	2
947	25	15	1	1032	1123	1	2	948	25	24	1	180	289	1	2
949	25	24	1	240	349	1	2	950	25	24	1	1140	1249	1	2
951	25	26	1	352	390	1	2	952	25	26	1	412	450	1	2
953	25	26	1	787	825	1	2	954	25	26	1	918	956	1	2
955	26	6	1	420	600	1	2	956	26	6	1	960	1140	1	2
957	26	6	1	1020	1200	1	2	958	26	16	1	202	297	1	2
959	26	16	1	425	520	1	2	960	26	16	1	683	778	1	2
961	26	16	1	1185	1280	1	2	962	26	25	1	170	208	1	2
963	26	25	1	275	313	1	2	964	26	25	1	660	698	1	2
965	26	25	1	1045	1083	1	2	966	26	28	1	314	450	1	2
967	26	28	1	704	840	1	2	968	26	28	1	1124	1260	1	2
969	27	18	1	120	127	1	2	970	27	18	1	330	337	1	2
971	27	18	1	660	667	1	2	972	27	18	1	1140	1147	1	2
973	27	20	1	205	225	1	2	974	27	20	1	445	465	1	2
975	27	20	1	685	705	1	2	976	27	20	1	925	945	1	2
977	27	28	1	450	642	1	2	978	27	28	1	870	1062	1	2
979	27	28	1	1230	1422	1	2	980	28	7	2	479	495	1	2
981	28	7	2	539	555	1	2	982	28	7	2	1016	1032	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

983	28	7	2	1118	1134	1	2	984	28	26	1	480	616	1	2
985	28	26	1	510	646	1	2	986	28	26	1	900	1036	1	2
987	28	27	1	240	432	1	2	988	28	27	1	660	852	1	2
989	28	27	1	1080	1272	1	2	990	29	21	1	360	370	1	2
991	29	21	1	720	730	1	2	992	29	21	1	1080	1090	1	2
993	29	22	1	372	380	1	2	994	29	22	1	402	410	1	2
995	29	22	1	457	465	1	2	996	29	22	1	717	725	1	2
997	29	22	1	732	740	1	2	998	29	30	2	468	480	1	2
999	29	30	2	528	540	1	2	1000	29	30	2	588	600	1	2
1001	29	30	2	648	660	1	2	1002	29	30	2	1008	1020	1	2
1003	29	31	1	272	287	1	2	1004	29	31	1	458	473	1	2
1005	29	31	1	720	735	1	2	1006	29	31	1	883	898	1	2
1007	29	31	1	1016	1031	1	2	1008	29	31	1	1152	1167	1	2
1009	29	31	1	1272	1287	1	2	1010	30	9	2	418	432	1	2
1011	30	9	2	549	563	1	2	1012	30	9	2	691	705	1	2
1013	30	9	2	789	803	1	2	1014	30	9	2	918	932	1	2
1015	30	9	2	988	1002	1	2	1016	30	10	1	243	261	1	2
1017	30	10	1	485	503	1	2	1018	30	10	1	854	872	1	2
1019	30	10	1	1014	1032	1	2	1020	30	29	2	360	372	1	2
1021	30	29	2	390	402	1	2	1022	30	29	2	445	457	1	2
1023	30	29	2	705	717	1	2	1024	30	29	2	720	732	1	2
1025	31	22	1	265	270	1	2	1026	31	22	1	433	438	1	2
1027	31	22	1	594	599	1	2	1028	31	22	1	771	776	1	2
1029	31	22	1	848	853	1	2	1030	31	22	1	1043	1048	1	2
1031	31	22	1	1152	1157	1	2	1032	31	22	1	1303	1308	1	2
1033	31	29	2	308	323	1	2	1034	31	29	2	390	405	1	2
1035	31	29	2	573	588	1	2	1036	31	29	2	657	672	1	2
1037	31	29	2	810	825	1	2	1038	31	29	2	941	956	1	2
1039	31	29	2	1318	1333	1	2	1040	31	38	2	201	246	1	2
1041	31	38	2	263	308	1	2	1042	31	38	2	445	490	1	2
1043	31	38	2	612	657	1	2	1044	31	38	2	822	867	1	2
1045	31	38	2	979	1024	1	2	1046	31	38	2	1152	1197	1	2
1047	31	38	2	1294	1339	1	2	1048	32	11	1	122	274	1	2
1049	32	11	1	732	884	1	2	1050	32	11	1	904	1056	1	2
1051	32	11	1	1185	1337	1	2	1052	32	11	1	1267	1419	1	2
1053	32	33	1	188	210	1	2	1054	32	33	1	270	292	1	2
1055	32	33	1	546	568	1	2	1056	32	33	1	748	770	1	2
1057	32	33	1	1024	1046	1	2	1058	33	32	1	100	122	1	2
1059	33	32	1	710	732	1	2	1060	33	32	1	882	904	1	2
1061	33	32	1	1163	1185	1	2	1062	33	32	1	1245	1267	1	2
1063	33	34	2	200	321	1	2	1064	33	34	2	265	386	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

1065	33	34	2	302	423	1	2	1066	33	34	2	342	463	1	2
1067	33	34	2	375	496	1	2	1068	33	34	2	425	546	1	2
1069	33	34	2	550	671	1	2	1070	33	34	2	615	736	1	2
1071	33	34	2	722	843	1	2	1072	33	34	2	812	933	1	2
1073	33	34	2	884	1005	1	2	1074	33	34	2	925	1046	1	2
1075	33	34	2	1033	1154	1	2	1076	33	34	2	1082	1203	1	2
1077	33	34	2	1115	1236	1	2	1078	34	33	2	214	335	1	2
1079	34	33	1	259	380	1	2	1080	34	33	1	399	520	1	2
1081	34	33	1	504	625	1	2	1082	34	33	1	579	700	1	2
1083	34	33	1	632	753	1	2	1084	34	33	1	740	861	1	2
1085	34	33	1	839	960	1	2	1086	34	33	1	994	1115	1	2
1087	34	33	1	1059	1180	1	2	1088	34	33	1	1079	1200	1	2
1089	34	33	1	1101	1222	1	2	1090	34	33	1	1119	1240	1	2
1091	34	33	1	1149	1270	1	2	1092	34	33	1	1161	1282	1	2
1093	34	35	2	275	285	1	2	1094	34	35	2	430	440	1	2
1095	34	35	2	613	623	1	2	1096	34	35	2	886	896	1	2
1097	34	35	2	1230	1240	1	2	1098	34	37	2	321	424	1	2
1099	34	37	2	386	489	1	2	1100	34	37	2	423	526	1	2
1101	34	37	2	463	566	1	2	1102	34	37	2	496	599	1	2
1103	34	37	2	546	649	1	2	1104	34	37	2	671	774	1	2
1105	34	37	2	736	839	1	2	1106	34	37	2	843	946	1	2
1107	34	37	2	933	1036	1	2	1108	34	37	2	1005	1108	1	2
1109	34	37	2	1046	1149	1	2	1110	34	37	2	1154	1257	1	2
1111	34	37	2	1203	1306	1	2	1112	34	37	2	1236	1339	1	2
1113	35	16	1	575	775	1	2	1114	35	16	1	834	1034	1	2
1115	35	16	1	1112	1312	1	2	1116	35	19	1	235	390	1	2
1117	35	19	1	295	450	1	2	1118	35	19	1	625	780	1	2
1119	35	19	1	655	810	1	2	1120	35	34	1	206	216	1	2
1121	35	34	1	476	486	1	2	1122	35	34	1	612	622	1	2
1123	35	34	1	885	895	1	2	1124	35	34	1	1182	1192	1	2
1125	37	34	1	111	214	1	2	1126	37	34	1	156	259	1	2
1127	37	34	1	296	399	1	2	1128	37	34	1	401	504	1	2
1129	37	34	1	476	579	1	2	1130	37	34	1	529	632	1	2
1131	37	34	1	637	740	1	2	1132	37	34	1	736	839	1	2
1133	37	34	1	891	994	1	2	1134	37	34	1	956	1059	1	2
1135	37	34	1	976	1079	1	2	1136	37	34	1	998	1101	1	2
1137	37	34	1	1016	1119	1	2	1138	37	34	1	1046	1149	1	2
1139	37	34	1	1058	1161	1	2	1140	37	40	2	424	432	1	2
1141	37	40	2	489	497	1	2	1142	37	40	2	526	534	1	2
1143	37	40	2	566	574	1	2	1144	37	40	2	599	607	1	2
1145	37	40	2	649	657	1	2	1146	37	40	2	774	782	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (продолжение).

1147	37	40	2	839	847	1	2	1148	37	40	2	946	954	1	2
1149	37	40	2	1036	1044	1	2	1150	37	40	2	1108	1116	1	2
1151	37	40	2	1149	1157	1	2	1152	37	40	2	1257	1265	1	2
1153	37	40	2	1306	1314	1	2	1154	37	40	2	1339	1347	1	2
1155	38	31	1	87	132	1	2	1156	38	31	1	297	342	1	2
1157	38	31	1	527	572	1	2	1158	38	31	1	717	762	1	2
1159	38	31	1	957	1002	1	2	1160	38	31	1	1060	1105	1	2
1161	38	31	1	1167	1212	1	2	1162	38	31	1	1320	1365	1	2
1163	38	41	1	246	258	1	2	1164	38	41	1	308	320	1	2
1165	38	41	1	490	502	1	2	1166	38	41	1	657	669	1	2
1167	38	41	1	867	879	1	2	1168	38	41	1	1175	1187	1	2
1169	40	37	1	103	111	1	2	1170	40	37	1	148	156	1	2
1171	40	37	1	288	296	1	2	1172	40	37	1	393	401	1	2
1173	40	37	1	468	476	1	2	1174	40	37	1	521	529	1	2
1175	40	37	1	629	637	1	2	1176	40	37	1	728	736	1	2
1177	40	37	1	883	891	1	2	1178	40	37	1	948	956	1	2
1179	40	37	1	968	976	1	2	1180	40	37	1	990	998	1	2
1181	40	37	1	1008	1016	1	2	1182	40	37	1	1038	1046	1	2
1183	40	37	1	1050	1058	1	2	1184	40	41	2	432	442	1	2
1185	40	41	2	497	507	1	2	1186	40	41	2	534	544	1	2
1187	40	41	2	574	584	1	2	1188	40	41	2	607	617	1	2
1189	40	41	2	657	667	1	2	1190	40	41	2	782	792	1	2
1191	40	41	2	847	857	1	2	1192	40	41	2	954	964	1	2
1193	40	41	2	1044	1054	1	2	1194	40	41	2	1116	1126	1	2
1195	40	41	2	1157	1167	1	2	1196	40	41	2	1265	1275	1	2
1197	40	41	2	1314	1324	1	2	1198	40	41	2	1347	1357	1	2
1199	41	38	2	433	445	1	2	1200	41	38	2	588	600	1	2
1201	41	38	2	768	780	1	2	1202	41	38	2	948	960	1	2
1203	41	38	2	1128	1140	1	2	1204	41	38	2	1308	1320	1	2
1205	41	40	1	93	103	1	2	1206	41	40	1	138	148	1	2
1207	41	40	1	278	288	1	2	1208	41	40	1	383	393	1	2
1209	41	40	1	458	468	1	2	1210	41	40	1	511	521	1	2
1211	41	40	1	619	629	1	2	1212	41	40	1	718	728	1	2
1213	41	40	1	873	883	1	2	1214	41	40	1	938	948	1	2
1215	41	40	1	958	968	1	2	1216	41	40	1	980	990	1	2
1217	41	40	1	998	1008	1	2	1218	41	40	1	1028	1038	1	2
1219	41	40	1	1040	1050	1	2	1220	41	42	2	442	450	1	2
1221	41	42	2	507	515	1	2	1222	41	42	2	544	552	1	2
1223	41	42	2	584	592	1	2	1224	41	42	2	617	625	1	2
1225	41	42	2	667	675	1	2	1226	41	42	2	792	800	1	2
1227	41	42	2	857	865	1	2	1228	41	42	2	964	972	1	2

Таблица П.2. Параметры «подниток» (*продолжение*).

1229	41	42	2	1054	1062	1	2	1230	41	42	2	1126	1134	1	2
1231	41	42	2	1167	1175	1	2	1232	41	42	2	1275	1283	1	2
1233	41	42	2	1324	1332	1	2	1234	41	42	2	1357	1365	1	2
1235	42	41	1	85	93	1	2	1236	42	41	1	130	138	1	2
1237	42	41	1	270	278	1	2	1238	42	41	1	375	383	1	2
1239	42	41	1	450	458	1	2	1240	42	41	1	503	511	1	2
1241	42	41	1	611	619	1	2	1242	42	41	1	710	718	1	2
1243	42	41	1	865	873	1	2	1244	42	41	1	930	938	1	2
1245	42	41	1	950	958	1	2	1246	42	41	1	972	980	1	2
1247	42	41	1	990	998	1	2	1248	42	41	1	1020	1028	1	2
1249	42	41	1	1032	1040	1	2								