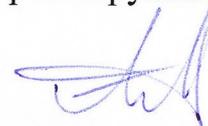


ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ им. А.А. БЛАГОНПРАВОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Абдуллин Марат Равильевич

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

01.02.04- механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой  
степени кандидата технических наук

Научный руководитель:  
Доктор физико-математических наук  
профессор Березин А.В.

Москва  
2014 г.

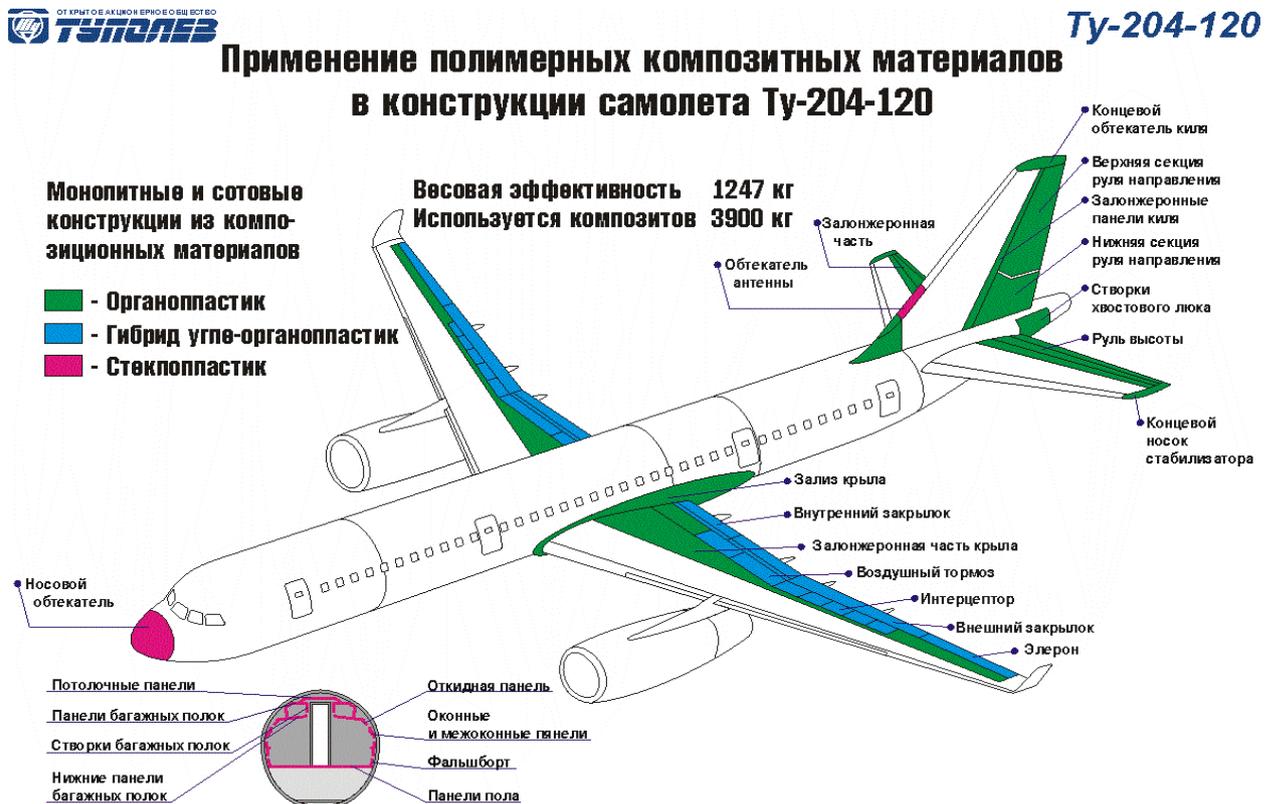
## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>3</b>
<b>ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ.....</b>	<b>15</b>
1.1. Методика анализа при наличии разброса между партиями.....	34
1.2. Методика анализа для совокупности, описываемой нормальным законом распределения .....	36
1.3. Логнормальная процедура .....	37
1.4. Методика расчета с помощью двухпараметрического распределения Вейбулла .....	38
1.5. Практическое использование распределения Вейбулла.....	39
1.6. Определение базисных значений прочности с помощью распределения Вейбулла .....	41
1.7. Методика дискретного анализа для одной совокупности.....	43
1.8. Обработка экспериментальных данных .....	46
<b>ГЛАВА 2. ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТНОСТИ НА ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА.....</b>	<b>52</b>
<b>ГЛАВА 3. АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАТИЧЕСКОЙ И УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ.....</b>	<b>60</b>
3.1. Получение $K_{1c}$ и $K_c$ (средние значения) .....	61
3.2. Пересчет $K_{1c}$ и $K_c$ с одной ширины на другую .....	66
3.3. Определение расчетных характеристик $K_{1c}$ и $K_c$ .....	67
3.4. Определение $K_c$ при отсутствии экспериментальных данных.....	68
3.5. Алгоритм расчета параметров Периса, Формана, Коллиприста .....	70
<b>ВЫВОДЫ.....</b>	<b>83</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>84</b>

## ВВЕДЕНИЕ

В результате работ, выполненных в предыдущие десятилетия научно-исследовательскими институтами ЦАГИ, ВИАМ, НИАТ и др. а также конструкторскими бюро и заводами авиапромышленности, композиционные материалы (КМ) используются во всех отечественных самолетах и вертолетах последнего поколения (Ту-204, Ту-334, Ил-96, Ил-114, Ка-50, Ан-70, Ан-148, RRJ-95 и др.). Главным образом они применяются при изготовлении органов управления и агрегатов механизации крыла и оперения, лопастей, обтекателей, створок, а также конструкции воздухозаборников и капотов двигательных установок. Успешно эксплуатируются самые крупногабаритные изделия из КМ в отечественном авиастроении - воздухозаборник центрального двигателя самолета Як-42 длиной 7,5 м и створки грузового люка Ан-124 длиной 12 м, оба изделия сотовой конструкции.

На ниже приведенной схеме приведен пример применения различных видов пластиков в конструкции самолета Ту-204-120.



Агрегаты произведенные из композиционных материалов включают следующие элементы механизации: внутренний закрылок, внешний закрылок, интерцептор, воздушный тормоз, элерон, руль направления, руль высоты. Так же широко представлено применение композиционных материалов в несилевых деталях планера и интерьера, такие как: обтекатели, залонжеронные части крыла, зализы, створки люков и шасси, потолочные панели, багажные полки, панели пола и т.д.

В последнее десятилетие оформился и реализуется новый этап внедрения КМ в авиастроении. Характерные основные его черты следующие:

- создание крупногабаритных ответственных композитных конструкций крыла и фюзеляжа с использованием накопленного опыта и переходом к преимущественно композиционному планеру самолета в целом;

- формирование новых оптимальных для КМ решений, наиболее полно учитывающих в каждом конкретном случае особенности композитов, весовые, ресурсные, экономические и эксплуатационные показатели их эффективности;

- использование усовершенствованных композиционных материалов, в первую очередь высокопрочных, ударостойких углепластиков нового поколения с элементами интеллектуальности и нанотехнологий, а также принципиально новых автоматизированных технологий производства конструкций (пултрузия, инфузионные технологии, пространственное армирование и т.д.).

Потенциальный объем применения КМ в планере пассажирских самолетов после 2020 г. ожидается на отметке 60-70% при снижении массы композитной части конструкции и ее стоимости на 20-25% по сравнению с металлической, изготовленной на современном уровне. В то же время прогресс в области металлических конструкций по указанным показателям прогнозируется на уровне не выше 10%. По оценкам экспертов развитие композитных технологий наряду с прогрессом в двигателестроении и в

аэродинамике внесет наибольший вклад в повышение летно-технических, экономических и эксплуатационных характеристик ЛА будущего [59].

Композиционные структуры могут быть разделены на две группы

1. волокнистые и слоистые.
2. дисперсно-упрочненные.

Волокнистые композиции состоят из гомогенной матрицы кристаллического или аморфного строения, содержащие упрочняющие одномерные элементы в виде волокон, проволоки, нитевидных кристаллов и т.п.

К наиболее перспективным конструкционным материалам можно отнести волокнистые слоистые композиты на основе высокомодульных и высокопрочных волокон. Их особенность заключается в том, что материал и конструкция создаются одновременно. На современном уровне технологий в процессе производства КМ неизбежно возникают дефекты: микротрещины, расслоения, поверхностные вздутия, коробления, избыточная пористость и т.д. Наличие дефектов приводит к изменению физико-механических свойств, по статистическому характеру и масштабному эффекту прочности. Например, пористость проявляется при оценке прочности полимерной матрицы на сдвиг. Искривления волокон оказывают влияние при определении характеристик прочности в направлении армирования. Микротрещины и коробления представляют собой концентраторы напряжений, способствующие развитию магистральной трещины. Невозможность заранее предусмотреть количество и типы технологических дефектов и в связи с этим сделать поправку на ресурс изделия выдвигает на первое место задачу диагностики дефектности КМ, как при изготовлении, так и в процессе эксплуатации.

Характер разрушения композиционных материалов, в связи с неоднородностью структуры и свойств, качественно отличается от характера разрушения металлов и сплавов. На начальной стадии накопления

повреждений происходит зарождение микродефектов различной физической природы, которые не взаимодействуют или слабо влияют друг на друга. Однако, начиная с некоторого момента их взаимодействие, усиливается и начинает оказывать существенное влияние на распределение напряжений в микрообъемах материала. Степень взаимодействия дефектов и, следовательно, характер разрушения существенно зависит от жесткости и прочности связи между структурными составляющими КМ. При сильной адгезионной связи составляющих проявляется тенденция к локализации повреждений.

При рассмотрении волокнистых композитов выделяют четыре основных типа разрушения: разрушение волокон, потеря устойчивости волокон, разрушение матрицы в направлении параллельном направлению волокон, расслоение по границе раздела волокно-матрица. Различным типам разрушения соответствуют различные значения прочности. Если исключить из рассмотрения те виды разрушения, которые возникают из-за нарушения связи между волокнами и матрицей, то в однонаправленном армированном слое прочность и механизм разрушения будут определяться характером приложенной нагрузки:

- а). при растяжении вдоль волокон - это накопление разрывов волокон, так как нагрузка в основном воспринимается волокнами, и прочность КМ будет определяться их прочностными свойствами;
- б). при растяжении поперек волокон - это образование продольных матричных трещин, и прочность определяется свойствами матрицы на растяжение;
- в). при сжатии вдоль волокон - это потеря устойчивости волокон;
- г). при сжатии поперек волокон прочность определяется прочностью матрицы на сжатие;
- д). при сдвиге - зависит от прочности матрицы на сдвиг [44, 52, 53, 54].

Анализ прочности всего пакета слоев КМ проводится при последовательном рассмотрении разрушения в отдельных слоях, для которых

находят все составляющие напряжений и относят их к соответствующим прочностям монослоя. Таким образом, возможны два подхода к определению критерия разрушения: микромеханический и феноменологический. Первый основан на вычислении микронапряжений в компонентах материала и осредненных характеристик прочности композита в целом, например податливостей. При втором модель разрушения строится на основе экспериментально полученных данных без объяснения механизмов, определяющих механическое поведение КМ.

Поскольку КМ характеризуются не одним параметром структурной гетерогенности и многообразием качественно различных механизмов разрушения на уровне структурных элементов, возможности применения классической механики разрушения к этим материалам ограничены. Поэтому, к анализу накопления повреждений и разрушения КМ широко применяются вероятностные модели на основе структурного подхода. Вероятностные модели разрушения и применение развитого математического аппарата, позволяют выделить отдельные стадии процесса разрушения на структурном уровне, качественно, а иногда и количественно, оценить изменение свойств отдельных компонент, влияние взаимодействия между компонентами и некоторых дополнительных факторов на прочностные характеристики композитной системы.

Большинство современных высокопрочных КМ имеют волокнистую или слоисто-волокнистую структуру. В этом случае образец КМ представляется дискретным набором элементов, прочность каждого из которых является независимой случайной величиной. В связи с этим можно выделить три основные вероятностные модели разрушения, для которых функция распределения прочности известна: модель слабейшего звена, модель классического пучка, или их комбинация. Первая строится на гипотезе о том, что прочность тела в целом определяется прочностью его слабейшего элемента и отождествляется с неустойчивым развитием наиболее опасной трещины. Во второй образец заменяется пучком большого числа

параллельных волокон, прочность которых является случайной величиной. Разрушение пучка происходит в виде последовательного разрушения волокон, но в отличие от предыдущей модели, распространение трещины не обязательно. Согласно третьей модели, образец представляется в виде  $n$  последовательно соединенных пучков. Разрушение произойдет, как только разрушится слабейший из пучков. Прочность пучков - независимые случайные величины. Представление предела прочности в виде случайной функции координат позволяет перейти к континуальным моделям в рамках механики сплошной среды.

Однако в отношении применения вероятностных моделей к анализу прочности композиционного материала необходимо подчеркнуть неоднозначность характера разрушения и, соответственно, определения эффективного уровня напряжений. Характер разрушения существенно зависит от объемной доли волокон  $v_f^*$ . При  $v_f < v_f^*$  ( $v_f$ -объемная доля связующего) разрушение идет путем накопления разрывов волокон. При  $v_f > v_f^*$  разрушение происходит немедленно вслед за разрушением единичного волокна. Таким образом, при растяжении вдоль волокон можно выделить, по крайней мере, три вида разрушения однонаправленного КМ:

- распространением продольной трещины вдоль границы волокно-матрица;
- распространением поперечной трещины после разрыва одного волокна;
- накоплением разрывов.

Первый вариант реализуется, если величина касательных напряжений на границе волокно-матрица при разрыве волокна превосходит прочность связи. Тогда весь образец ведет себя как пучок волокон.

Второй тип разрушения происходит в соответствии с моделью слабейшего звена. Такое разрушение, как показано многими исследователями, возможно при достаточно больших объемных долях волокон ( $v_f \approx 0,85$ ).

Третий вид разрушения описывается моделью накопления разрывов, согласно которой композит представляется в виде цепи, состоящей из пучков

волокон критической (неэффективной длины). Такой тип разрушения наиболее типичен для волокнистых композитов и является результатом взаимодействия волокна и матрицы.

Поскольку в КМ достаточно сильно выражен масштабный эффект, учет этого фактора составляет часть общего статистического подхода к описанию накопления повреждений в композитах. Ожидаемая функциональная связь между вероятностью достижения критической поврежденности в некотором элементе объема тела  $v$  и величиной всего объема  $V$  строится на следующих допущениях:

- а). элементарные очаги повреждения распределены равномерно по объему тела и вероятность появления  $k$  дефектов в области  $v$  зависит только от размера этой области и не зависит от её формы и положения (свойство стационарности);
- б). моменты появления  $k_1$  дефектов в области  $v_1$  и  $k_2$  дефектов в области  $v_2$  являются независимыми случайными величинами;
- в). вероятность появления более, чем одного дефекта в малой области пренебрежительно мала.

Поскольку волокна содержат произвольно расположенные дефекты, то их прочность также определяется статистически с помощью функции распределения экстремальных значений. Это означает, что распределение локальной прочности по элементам объема связано с распределением по этим элементам наибольших повреждений, а не всех вообще повреждений по всему объему.

Для прочности волокон наиболее применимо распределение Вейбулла, которое имеет связь с пуассоновским процессом накопления повреждений.

Справедливость использования параметров Вейбулла подтверждена работами отечественных и зарубежных исследователей [14, 16, 35, 42, 49, 62]. Однако трудности, связанные с определением параметров распределения нередко дают существенное отклонение фактических результатов от теоретически предсказанных. Тем не менее, введение представления о

повреждениях и распределения прочности по волокну дает возможность построения вероятностных моделей разрушения для однонаправленного слоя. Вероятностные модели позволяют определить ту нагрузку на образец, при которой его разрушение произойдет с вероятностью  $p$ . Это условие имеет вид [44]:

$$P\{F_{\text{пр}} < F\} = p,$$

где  $F_{\text{пр}}$  - предел прочности образца;  $P$  - функция распределения прочности.

Вероятностные критерии, используемые для расчета традиционных материалов и конструкций, обычно применимы и к композитам. Возникающие различия носят больше количественный характер. Они особенно заметны в современный период ускоренного развития композиционных материалов, когда еще не достигнута полная стандартизация их изготовления, переработки и способов испытания. Трудности появляются из-за некоторых характерных свойств композитов, в особенности из-за различного, в общем случае, характера разрушения материала в каждом из главных направлений его симметрии и отсутствия текучести. Последний факт является в значительной степени причиной, порождающей необходимость рассмотрения несущей способности конструкции с вероятностных позиций.

Установление критериев прочности при проектировании конструкций из композитов связано с преодолением несоответствий не только с опытными данными, полученными на металлах, но и с результатами, полученными на различных композиционных материалах. Обычно предельные нагрузки выбирают так, чтобы ни в одном из слоев композита напряжение не превосходило определенного уровня, устанавливаемого зачастую лишь безоговорочной ссылкой на основные характеристики слоя. Таким образом, начальное разрушение в некотором критическом слое кладется в основу определения расчетных характеристик, уровень которых определяется условиями работы и ответственностью конструкции.

Расчетные значения следует выбирать таким образом, чтобы уменьшить вероятность разрушений конструкций из-за непостоянства свойств материалов.

Для определения новых статистических методов и определения характеристик трещиностойкости была проведена данная работа.

**Цель работы:** Разработка и внедрение программного обеспечения для получения расчетных характеристик материалов используемых в авиационной технике.

**Основные задачи исследования:**

Для достижения цели решены следующие задачи

1. Автоматизация методик статистического анализа механических свойств композиционных материалов.
2. Анализ накопленных данных по результатам испытаний на растяжение и сжатие образцов-свидетелей изготовленных из композиционных материалов.
3. Статистический анализ результатов испытаний металлических сплавов на статическую трещиностойкость и сравнение их с композиционными материалами.
4. Применение статистических методик для анализа зависимости прочностных свойств от распределения дефектов в металлах, на примере сплава ВТ-5.

**Научная новизна**

1. Проведен анализ результатов испытаний на прочность композитных материалов, используемых в авиационных конструкциях. Выявлены зависимости параметров распределений статической прочности для различных вариантов укладки, вида испытаний, наполнителя и связующего. Применены методики расчета базисных значений характеристик прочности для композиционных материалов.

2. Получены значения параметра формы распределения Вейбулла для различных вариантов укладки. Оценка параметра формы для различных вариантов укладки имеют близкие значения равные примерно 10.

3. Разработана база данных по результатам испытаний композиционных материалов, методики расчета базисных значений были встроены в базу данных, что позволило значительно облегчить процесс обработки испытаний.

**Практическая ценность** диссертации определяется постоянным повышением требований к надежности и эксплуатационному ресурсу, которые необходимо удовлетворить в условиях увеличения доли композиционных деталей в машинах и механизмах авиакосмического, железнодорожного и автомобильного машиностроения. Результаты работы использованы для определения базисных значений характеристик прочности композиционных материалов и трещиностойкости сплавов на основе алюминия и титана.

#### **Достоверность результатов.**

Обоснованность и достоверность результатов обусловлено применением апробированных методов испытаний стандартных образцов. Результаты применялись в расчетах базисных характеристик деталей агрегатов, изготовленных из композиционных материалов, применяемых в конструкции самолетов Ту-204 и Ту-334.

**Апробация результатов диссертации.** Общие результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: Научно-техническая конференция «Материалы и технологии для авиационно-космической техники – 2005» (г. Москва ФГУП «ВИАМ» 2005 г.), 4-я международная конференция – «Авиация и космонавтика – 2005» (г. Москва 2005 г.), всероссийская юбилейная научно-техническая конференция, посвященная 70-летию со дня основания СибНИА (г. Новосибирск 2011 г.). Результаты работы докладывались на семинарах в институте машиноведения им. Благодирова РАН и в институте механики МГУ имени Ломоносова.

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в 3-х статьях и в 3-х материалах конференций.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, выводов и списка использованных источников. Общий объем диссертации 90 страницы и список использованных источников из 73 наименований.

**В первой главе** предоставлены методики расчета базисных характеристик материалов. Так как закон распределения характеристик прочности заранее неизвестен, для описания полученных выборок результатов испытаний образцов используются несколько видов распределений. Наиболее часто используются параметрические распределения: распределение Вейбулла, нормальное или логнормальное распределение. Выбор используемой функции распределения производится по результатам проверки статистических гипотез о соответствии выборки определенному закону распределения. Так же в первой главе представлен метод обозначенный как ANOVA (ANalysis Of Variance)-метод или метод дисперсионного анализа, для вычисления базисных значений, когда имеется значительный разброс свойств от партии к партии.

**Во второй главе** для оценки влияния дефектности на деформационные характеристики материалов в качестве примера был взят материал ВТ5. Учет дефектности дает возможность выяснить влияние её на деформационные характеристики материала. В главе теоретически оценено влияние дефектности на прочностные характеристики. При теоретической оценке применялись следующие допущения:

1). Простейшая схема, принятая Батдорфом - Будянским состоит в том, что для каждого зерна предполагается существование одной только системы скольжения. Здесь была сделана гипотеза о том, что напряженное состояние однородно и не меняется от зерна к зерну.

2). Вторая гипотеза состоит в том, что деформация зерен с системой скольжения  $n\beta$  вызывает такую же общую деформацию тела, пропорциональную относительноному объему соответствующих зерен.

**В третьей главе** представлен алгоритм получения характеристик статической трещиностойкости для всех видов металлических материалов.

По полученному алгоритму составлена программа расчета, также представлен алгоритм получения характеристик параметров различных аппроксимационных зависимостей скорости роста трещины усталости от размаха коэффициента интенсивности напряжения. В данном случае представлены параметры уравнений Периса, Формана и Коллиприста.

## ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Вероятностные модели прочности были разработаны первоначально в целях описания результатов испытаний на усталость и предсказания с помощью статистических методов прочности элементов машин, находящихся под действием переменных нагрузок. Здесь мы заметим, что результаты испытаний обнаруживают большой разброс, и поэтому современная точка зрения на расчет прочности изделий состоит в том, что мы не можем с абсолютной достоверностью гарантировать прочность изделия, а можем лишь утверждать, что вероятность его разрушения достаточно мала. В основе одной из таких статистических теорий лежит гипотеза слабого звена. Существо этой гипотезы состоит в следующем. Тело мыслится составленным из большого числа структурных элементов, каждый из которых имеет свою локальную прочность. Разрушение всего тела в целом происходит тогда, когда выходит из строя хотя бы один структурный элемент. Для моноволокна гипотеза слабого звена правильно отражает существо дела. Прямое микроскопическое обследование поверхности волокна борного, угольного или иного – показывает, что на волокне всегда имеются разного рода дефекты – мелкие и крупные. Эти дефекты расположены случайным образом. Прочность образца волокна длины  $l$  определяется прочностью его наиболее слабого дефектного места и, таким образом, является случайной величиной. Результаты испытаний партии из некоторого достаточно большого числа волокон  $n$  представляются при помощи диаграмм. Число волокон, разорвавшихся при напряжении, лежащем между  $\sigma_i$  и  $\sigma_{i+1}$ , есть  $n_i$ , соответствующий прямоугольник, заштрихованный на рисунке, имеет стороны  $\sigma_{i+1} - \sigma_i$  и  $n_i$ . Изменим, масштаб диаграммы, будем откладывать по оси ординат вместо  $n_i$  величину  $\frac{n_i}{n(\sigma_{i+1} - \sigma_i)}$ , тогда суммарная площадь фигуры, ограниченная ломаной и осью абсцисс, будет равна единице. Уменьшая интервалы по оси абсцисс, мы получим в пределе

плавную кривую рис. 1.1 плотности  $p(\sigma)$  распределения прочности волокон длины  $l$ , подчиненную условию нормирования

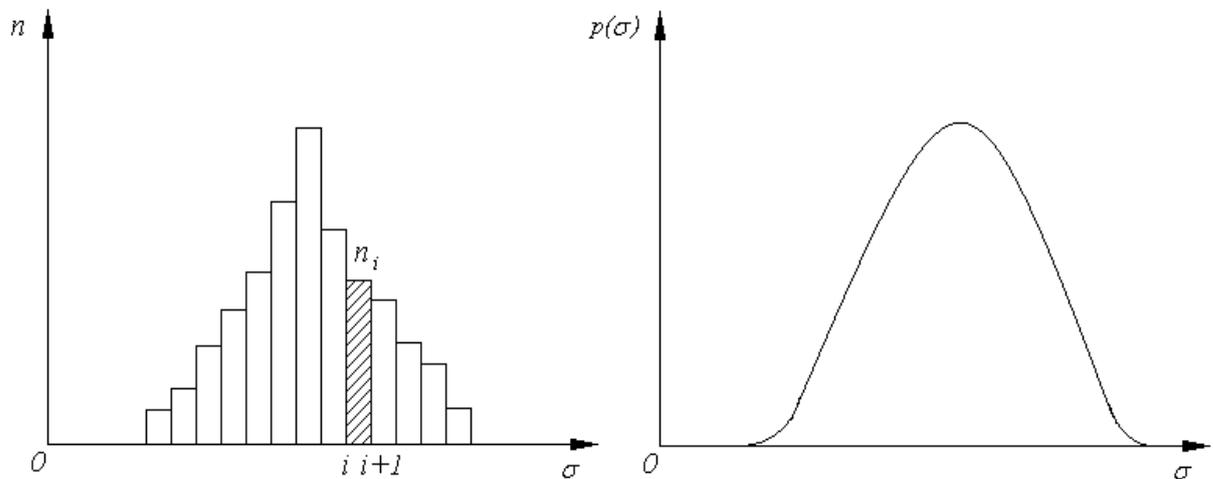


Рис. 1.1.

$$P(\sigma) = \int_{-\infty}^{\sigma} p(\sigma) d\sigma$$

представляет собою относительное количество волокон, прочность которых не больше  $\sigma$ .

Аппроксимируя непосредственно установленное из опыта дискретное распределение прочности непрерывным, мы можем определить;

1). Среднюю величину прочности волокна

$$\langle \sigma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma p(\sigma) d\sigma \quad (1.1)$$

2). Дисперсию прочности  $D$  или среднее квадратичное отклонение

$$D^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma - \langle \sigma \rangle)^2 d\sigma$$

Из этой формулы следует

$$D^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 p(\sigma) d\sigma - \langle \sigma \rangle^2 \quad (1.2)$$

Отношение  $W=D/\langle \sigma \rangle$

называется коэффициентом вариации.

Характер зависимости прочности от длины волокна можно установить, не делая каких-то специальных предположений о механизме разрушения и о статистике распределения дефектов. Если  $F(l)$  – вероятность отсутствия на участке длины  $l$  таких дефектов, которые соответствуют разрушающему напряжению, меньшему чем  $\sigma$ , так что  $F=1-P(\sigma)$  при фиксированном  $\sigma$ , то для участка длины  $l'$  та же вероятность будет  $F(l')$ . Предположим теперь, что участки  $l$  и  $l'$  соединены последовательно. По теореме об умножении вероятностей вероятность неразрушения участка длины  $l+l'$  равна

$$F(l+l')=F(l)F(l') \quad (1.3)$$

Возьмем логарифмические производные от обеих частей равенства. Получим

$$\frac{d \ln F(l+l')}{dl} = \frac{d \ln F(l)}{dl} = -c \quad (1.4)$$

Величина  $c$  должна быть постоянной, поскольку она не меняется от прибавления к длине  $l$  произвольной длины  $l'$ . Интегрируя, получим

$$F(l)=\exp(-cl) \quad (1.5)$$

При этом учтено, что  $F(0)=1$  и соответственно  $F(\infty)=0$ . Отсюда следует  $P(l,\sigma)=1-\exp(-cl)$

Величина  $c$  должна быть функцией действующего напряжения. Делая некоторые дополнительные гипотезы, ряд авторов получали для функции  $c(\sigma)$  следующее выражение

$$c(\sigma) = (\sigma - \sigma_0)^\alpha \times const \text{ при } \sigma > \sigma_0, c=0 \text{ при } \sigma \leq \sigma_0$$

Соответствующее распределение обычно записывается в следующем виде:

$$P = 1 - \exp \left[ - \frac{L}{L_0} \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_*} \right)^\alpha \right] \quad (1.6)$$

Формула обычно называется распределением Вейбулла [16].

Фактически эта формула содержит три константы, выделение характерной длины  $L_0$  удобно для приложений, это может быть, например, длина стандартного образца для испытаний. Напряжение  $\sigma_0$  представляет собой пороговое напряжение, при  $\sigma < \sigma_0$  разрушение невозможно. В действительности определение трех констант по данным эксперимента приводит к неустойчивым результатам и величину  $\sigma_0$  часто полагают равной нулю, так будем поступать и мы. Дифференцируя находим плотность распределения

$$p(\sigma) = \frac{L\alpha}{L_0\sigma_*} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{\alpha-1} \exp \left[ - \frac{L}{L_0} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^\alpha \right] \quad (1.7)$$

Здесь принято  $\sigma_0=0$ . Вычислим по формуле (1.1) среднюю прочность

$$\langle \sigma \rangle = \alpha \int_0^\infty \frac{L}{L_0} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^\alpha \exp \left[ - \frac{L}{L_0} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^\alpha \right] d\sigma$$

Сделав замену переменной

$$\frac{L}{L_0} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^\alpha = z$$

мы приходим к интегралу, определяющему гамма - функцию

$$\int_0^\infty z^{1/\alpha} \exp(-z) dz = \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

и получаем следующую формулу для средней прочности [44]:

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_* \left( \frac{L_0}{L} \right)^{1/\alpha} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (1.8)$$

В процессе серийного производства необходимо систематически проверять механические свойства применяемых материалов. Этим самым обеспечивается выполнение двух задач:

- возможность подтверждения и корректировки характеристик, принятых при проектировании;
- надежный контроль за стабильностью производства.

Такой контроль в серийном производстве может быть обеспечен только при наличии достаточной статистики.

Основным руководящим документом при проектировании воздушного судна являются авиационные правила (АП-25). В пункте 25.613 данных авиационных правил сказано:

а). Прочностные характеристики материалов должны определяться на основании достаточного количества испытаний с тем, чтобы расчетные значения можно было устанавливать на основе статистики.

б). Расчетные значения следует выбирать таким образом, чтобы уменьшить вероятность разрушений конструкций из-за непостоянства свойств материала. Соответственно данному параграфу должно быть показано на основе выбора расчетных значений, которые обеспечивают прочность материала со следующей вероятностью:

1). 99% - с 95% - ным доверительным интервалом, когда приложенные нагрузки передаются через единичный элемент агрегата, разрушение которого приводит к потере конструктивной целостности агрегата.

2). 90% - с 95% - ным доверительным интервалом для статически неопределимой конструкции, в которой разрушение любого отдельного элемента приводит к тому, что приложенные нагрузки безопасно распределяются по другим несущим элементам.

- с). Влияние температуры на допустимые напряжения, применяемые при расчете ответственных элементов или узлов конструкции, должно учитываться, если значительный тепловой эффект имеет место при нормальных эксплуатационных условиях.
- d). Прочность, проектирование и технология конструкции должны свести к минимуму вероятность опасного усталостного разрушения, особенно в местах концентрации напряжений.
- e). Более высокие расчетные значения могут быть использованы, если производится "дополнительный отбор" материала, при котором образец каждого отдельного полуфабриката подвергается испытаниям перед его использованием, чтобы убедиться, что его фактическая прочность равна или выше расчетной [1].

В соответствии с этим все основные силовые элементы из композитных материалов (КМ) в самолетах Ту-334 и Ту-204, в соответствии с классификацией АП25 п.п. 613 отнесены к группе (b)(2) или базису «В». Контроль за их характеристиками осуществляется с помощью образцов. Эти образцы вырезаются либо из припуска, каждой ответственной детали (образец-свидетель), либо из изготовленной вместе с деталью под одной вакуумной системой, из тех же материалов и соответствующей ей же по укладке, дополнительные карточки (образец-спутник). Этим обеспечивается 100% контроль за качеством изготовленных деталей и за расчетными характеристиками материала деталей.

Ниже будут приведены методики получения данных базисов. Основные статистические термины.

**Генеральная совокупность.** Множество измерений, относительно которых следует сделать вывод; совокупность возможных измерений, которые могут быть получены при заданных условиях испытаний. Например, все возможные измерения максимальной прочности на растяжение для композиционного материала, при комнатной температуре и 95%

относительной влажности. Для оценки генеральной совокупности часто необходимо сделать предположение о её законе распределения. На предполагаемую форму распределения также можно ссылаться как на генеральную совокупность [18, 19].

**Выборка.** Набор измерений или наблюдений, взятых из определенной совокупности.

### **Определение допустимых значений**

Предположим, что  $n$  конструктивных элементов испытаны для получения какой-либо характеристики (такой, как прочность, модуль упругости и т.д.) и требуется определить ее допустимое значение, соответствующее данной вероятности и уровню достоверности. Процедура такого определения состоит в следующем. Из анализа экспериментальных данных определяется среднее и среднеквадратическое отклонение выборки. Для того чтобы убедиться, можно ли распределение выборки аппроксимировать нормальным законом, необходимо провести проверку по критерию  $\chi_{\text{н}}$  - квадрат. Если распределение близко к нормальному то допустимая характеристика  $X_q$  может быть определена следующим образом:

$$X_q = \bar{X}_s - k\sigma_s$$

где  $k$  - коэффициент одностороннего допуска при нормальном распределении, соответствующий некоторому заданному уровню достоверности и вероятности [30].

### **Расчет допустимых значений при недостаточности данных для их прямого определения**

Допустимые значения при недостаточности данных можно определить, если справедливо предположение о пропорциональности между рассматриваемой характеристикой и другой, ранее исследованной, для которой уже определены допустимые значения. Если имеется пара взаимосвязанных величин (например, данные о растяжении при  $\pm 45^\circ$  и  $\pm 60^\circ$ ), то вначале вычисляют их отношение. Несколько таких отношений усредняют и для этого усредненного отношения определяют нижний уровень

доверительного интервала. Если число отношений двух характеристик обозначить  $n$ , среднее значение этого отношения  $\bar{R}$  и среднеквадратическое отклонение этого отношения  $s$ , то нижняя граница доверительного интервала для среднего отношения может быть определена следующим образом.

$$R = \bar{R} - ts / \sqrt{n}$$

где  $t$  - есть квантиль  $t$  - распределения, соответствующая заданному уровню достоверности и  $n-1$  степеням свободы. Значение  $R$  затем используют как отношение между двумя допустимыми значениями характеристик, одно из которых известно, а другое нуждается в определении.

Необходимо отметить, что допустимые значения, определенные таким образом, имеют то же экспериментальное основание, что и значения, к которым они отнесены [30].

### **Исследование формы распределения**

Применяемый метод вычисления базисных значений по одной выборке зависит от предполагаемой формы распределения. Наиболее часто используют параметрические распределения, как-то двухпараметрическое распределение Вейбулла, нормальное или логнормальное распределение. Для проверки согласия выборки с гипотезой о предполагаемом распределении применяется так называемый тест Андерсона-Дарлинга. Смысл теста заключается в том, что для каждого распределения вычисляется наблюдаемый уровень значимости, его величина есть мера качества приближения экспериментальных данных к данному распределению [55].

Если уровень значимости меньше либо равен 0,05 тогда можно сделать вывод, (при 5% риска ошибиться), что совокупность, из которой взята выборка, не согласуется с проверенной гипотезой. В противном случае, при уровне значимости большем 0,05 гипотеза о принадлежности выборки данному распределению не отвергается [62].

Для получения базисных величин по условиям приведенным выше требовался определенный программный продукт для хранения, обработки и

получения расчетных характеристик. Порядок обработки данных представлен на блок-схеме (см. рис. 1.2) [2].

На рис. 1.2 представлен алгоритм обработки результатов испытаний образцов. Таким образом обработка данных проводится в следующей последовательности:

1. Проводится проверка данных на соответствие данных одной группе.
2. Проводится тест на наличие партии на выбросы и удаление из выборки при необходимости этих выбросов.
3. Далее проводится тест на различие между внутривыборочными дисперсиями. Если дисперсии одинаковы то можно применять метод ANOVA (параграф 1.1).
4. Далее все данные независимо от партий замешиваются в одну выборку и проводится проверка на наличие выбросов во всей совокупности.
5. При наличии выбросов они удаляются из выборки и заново выборка проходит тест, если выбросы более не обнаружены, далее с помощью теста Андерсена-Дарлинга выборка проверяется на соответствие различным распределениям.
6. Рассматриваются распределения Вейбулла, нормальное распределение и логнормальное распределение.
7. Если выборка не удовлетворяет не одному из перечисленных распределений применяется непараметрический метод.

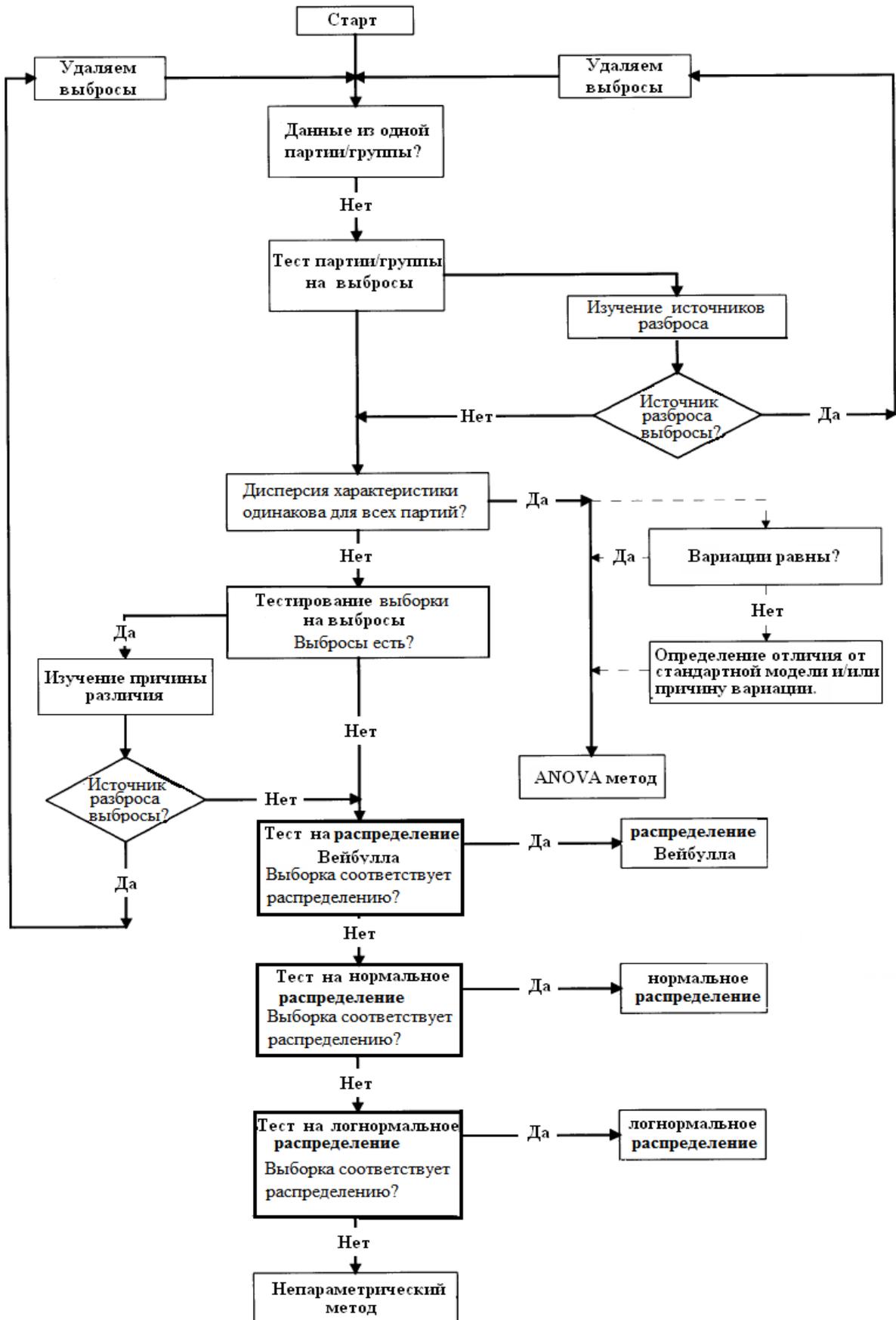


Рис. 1.2. Блок-схема подготовки выборки и выбор распределения описывающего данную выборку

### **Описание базы данных результатов испытаний образцов**

Для максимального упрощения хранения, поиска и обработки экспериментальных данных была сформирована база данных на основе протоколов испытаний образцов, полученных от заводов-изготовителей.

В данном случае рассматриваются результаты испытаний на растяжение и сжатие композитных образцов-свидетелей деталей агрегатов самолетов Ту-334 и Ту-204.

Указанная процедура подтверждает надежность принятых в расчетах на прочность характеристик и позволяет надежно обнаруживать основные силовые элементы с характеристиками прочности ниже принятых и принимать решение о пропуске детали на сборку (при достаточных избытках прочности) или ее браковке.

Расчет базисных характеристик проводился и раньше по программе, разработанной в ЦАГИ. На сегодняшний день эта программа устарела, поскольку она работает только в системе DOS и не позволяет формировать произвольные выборки в автоматическом режиме.

Основными достоинствами базы данных и встроенной программы (описание которой приведено ниже) по сравнению с программой ЦАГИ являются:

- 1). Возможность комплектации выборки не только поддетально, но и объединение результатов испытания деталей с одинаковой укладкой, что значительно увеличивает объем обрабатываемой выборки.
- 2). Возможность корректирования выборки с учетом значений указанных в технических условиях.
- 3). Мгновенный вывод отчета с экспериментальными данными и рассчитанными значениями А и В базиса.
- 4). Возможность работы с выборками неограниченного объема.

- 5). Возможность получать так называемые теоретические значения, то есть, например предел прочности материала пересчитанный на расчетную толщину монослоя композита.
- 6). Удобный ввод значений с возможностью просмотра данных на вводимую деталь.
- 7). Удобный интерфейс позволяет легко ориентироваться в базе данных и быстро получать требуемую информацию.

Основываясь на статистических методиках приведенных ниже, была создана программа “композит”, выполняющая вычисление А и В базиса выборки экспериментальных значений предела прочности по четырем видам распределений: нормальному, логнормальному, Вейбулла и ANOVA методу. Также производится проверка выборки на соответствие данному распределению, вывод максимального и минимального значений выборки, расчет среднеквадратичного отклонения. В программе предусматривается расчет значений А и В базиса предела прочности деталей агрегатов из композитов, как по отдельным деталям, так и по совокупности деталей с идентичной укладкой слоев в композиционном материале.

Процедура использования программой максимально упрощена, так как база данных и программа обработки данных выполнена в одной оболочке Microsoft Access 2000.

При отработке экспериментальных данных, полученных на образцах свидетелях, появилась необходимость создания различных выборок значений предела прочности деталей из агрегатов из композиционных материалов. Выборка может комплектоваться по следующим критериям:

1. Укладка
2. Вид испытания (например растяжение или сжатие)
3. Вид наполнителя
4. Номер детали

## 5. Технические условия

и так далее.

Комплектация выборки вручную очень трудоемкий процесс, так как выбор нужных данных из представленных к обработке нескольких тысяч актов может занять не один месяц, а то и год, плюс проверка на наличие ошибок неизбежных при работе с такими массивами информации, которая также займет продолжительный отрезок времени.

Для решения, задач по формированию различных выборок значений предела прочности материала деталей агрегатов из композитов, определение А и В базиса этих выборок, нужно было создать структуру базы данных в оболочке Microsoft Access.

Такая структура была разработана и база данных “композит” наполнено экспериментальными значениями. Структурная схема базы данных приведена на рисунке 1.3. Как видно из схемы, база представляет собой несколько связанных между собой таблиц с данными.

В базу данных встроена программа расчета значений А и Б базиса выборок экспериментальных данных, причем программа позволяет обрабатывать выборки неограниченного размера. Методика расчета, использованная при написании данной программы, приведена ниже.

Ввод данных происходит в форме указанной на рисунке 1.4. По каждому акту испытаний вводится вся информация, а конкретно:

1. Общие сведения из акта испытаний по партии испытанных образцов
  - 1.1. Номер свидетельства.
  - 1.2. Дата испытаний.
  - 1.3. Дата изготовления.
  - 1.4. Чертежный номер детали.
  - 1.5. Номер машины.
  - 1.6. Связующее.
  - 1.7. Наполнитель.

- 1.8. Тип испытаний (растяжение или сжатие).
2. Экспериментальные данные по каждому испытанному образцу
  - 2.1. Длина.
  - 2.2. Ширина.
  - 2.3. Толщина.
  - 2.4. Разрушающая нагрузка.
  - 2.5. Предел прочности.

Для получения информации по определенной детали есть возможность выдавать полную информацию по результатам испытаний. Пример вывода результатов представлен на рис.1.5.

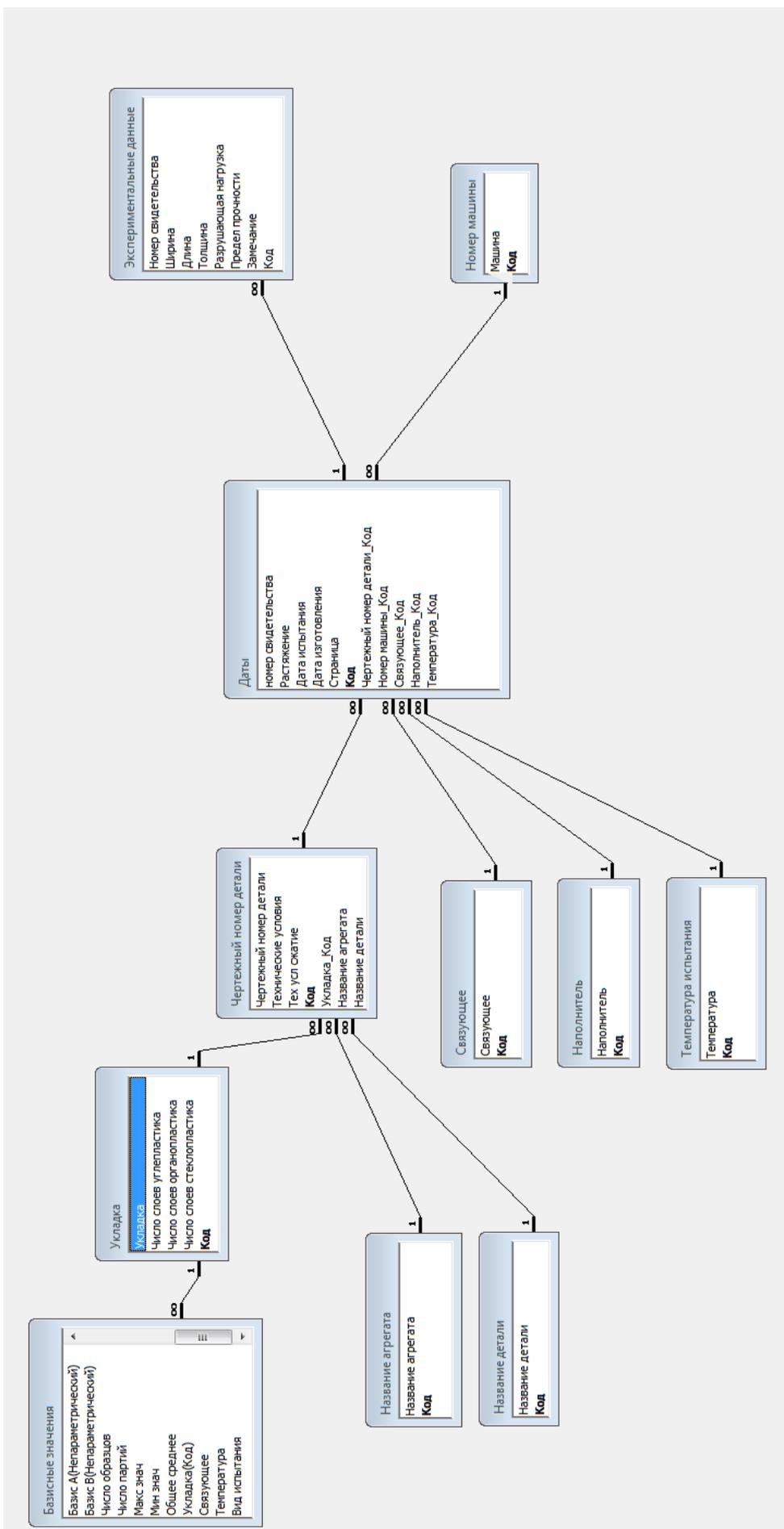


Рис. 1.3. Структурная схема базы данных прочностных характеристик композиционных материалов

**Ввод данных.**

Номер свидетельства: 78с  
 Дата испытания: 20.12.02  
 Дата изготовления: 25.11.02  
 Страница: 89  
 Код: 2  
 Чертежный номер детали: 84.00.3500.051.002

Номер машины: 5  
 Связующее: ЭДП-69н  
 Наименование: ЭЛУР п-0,1 п.126/3 СВМ арт.56313  
 Растяжение:

Температура испытаний:  20  80

Вывод данных для данной детали.

Возврат в общую форму.

Кнопка для вывода отчета о уже имеющихся данных по этой детали.

Кнопка закрывающая данную форму и открывающая общую форму доступа.

Результаты эксперимента вводятся в данную таблицу.

Если испытание проводится на растяжение тогда в это окошко ставим галочку, если нет оставляем его пустым.

Общая информация об образцах свидетелх вводится в данные поля.

Экспериментальные данные

Длина	Ширина	Толщина	Разрушающая нагрузка	Предел прочности	Замечание	Код
▶ 120,4	15	1,50	570	25,33		2
120,4	15	1,60	600	25,00		2
120,3	15	1,60	650	27,08		2
120,3	15	1,70	590	23,14		2
120,3	15	1,70	600	23,53		2
*		0	0,00	0,00		2

Запись: 1 | [Назад] [Вперед] [Сброс] [Печать] [Выход] из 6102

Рис. 1.4. Интерфейс ввода данных в базу



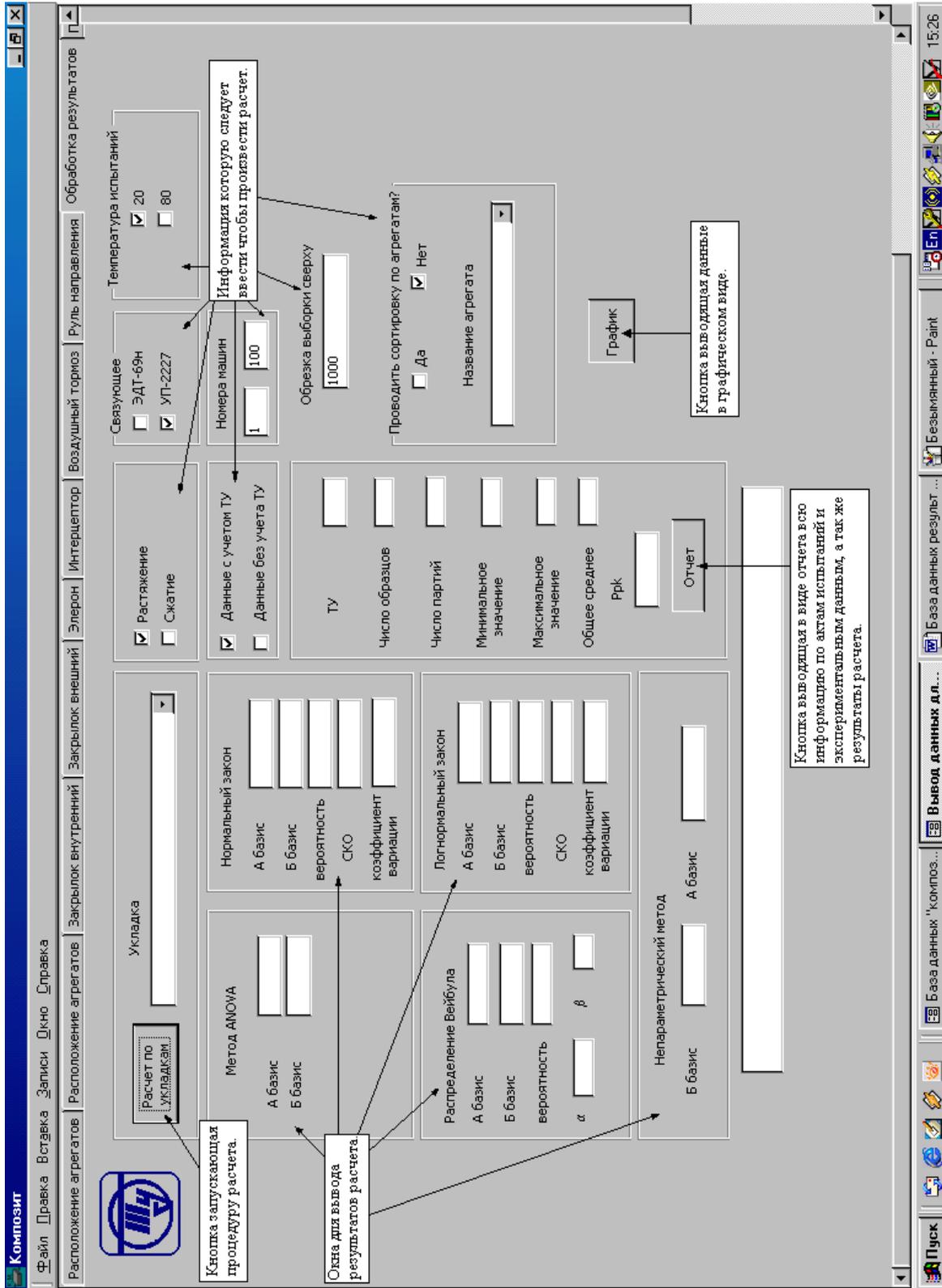


Рис. 1.6. Интерфейс задания исходных условий на выборку и получения результатов расчета

Для задания параметров для расчета базисов и соответственно расчета используется интерфейс представленный на рис.1.6.

В окне укладка, выбирается соответствующая укладка по которой требуется провести расчет, потом задается тип испытаний, вид связующего, температура испытаний. Если в выборку не должны попасть данные ниже указанных в технических условиях можно провести сортировку поставив галочку напротив надписи "Данные с учетом ТУ". Так же можно удалить из выборки данные превышающие какое-либо значение, это можно произвести вводом значения в окошко "Обрезка выборки сверху". Так же можно отсортировать выборку по агрегатам. В окне "название агрегата" в выпадающем списке выбираем название агрегата и выборка сортируется по данному названию.

После проведения расчета в окнах различных распределений появятся значения А и В базиса, с указанием критериев согласия.

После проведения расчета можно просмотреть график (см. рис. 1.8.1) на котором будут указаны значения предела прочности образца в зависимости от номера машины, а так же будет доступен (рис. 1.5) отчет в котором будет вся информация по выборке образцов и результаты расчета.

### 1.1. Методика анализа при наличии разброса между партиями

При анализе данных по разрушению из различных партий возможно наличие существенного изменения дисперсии от партии к партии. Это препятствует объединению данных для вычисления базисных значений по одной выборке. Этот раздел содержит метод, обозначенный как ANOVA (ANalysis of VAriance) – метод, для вычисления базисных значений, когда имеется значительный разброс от партии к партии.

Предположено, что;

- 1). в пределах партии материала исследуемая характеристика распределена нормально;
- 2). дисперсия характеристики материала одинаковая для всех партий;
- 3). среднее значение характеристики для партий распределено нормально.

Первое предположение, по-видимому, не всегда возможно проверить. Модельные исследования, однако, показывают, что умеренное нарушение этого предположения не оказывают существенного влияния на свойства оценок ANOVA метода.

Второе предположение следует подтвердить следующим путем. Обозначим выборочную дисперсию для  $i$ -ой выборки из  $k$  независимых случайных выборок,  $S_i^2$  и  $\gamma_i = n_i - 1$  – число степеней свободы, где  $n_i$  есть размер выборки.

Пусть  $Z_i = \ln(S_i^2)$  тогда статистика теста вычисляется на основе соотношения

$$EV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \gamma_i Z_i^2 - \frac{(n-k) \bar{Z}^2}{2} \quad \text{где} \quad \bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^k \gamma_i Z_i^2}{(N-k)}$$

есть взвешенное значение  $Z_i$  и  $N$  – размер объединенной выборки. Эта статистика сравнивается с 0,95 – квантилем  $\chi^2$  – распределения с  $k-1$  степенями свободы. Если статистика теста больше или равна табулированному значению, тогда делается вывод, что дисперсии

различаются существенно. Если же величина статистики меньше табулированного значения, тогда подтверждается гипотеза о равенстве вариаций [48, 62].

Для проверки третьего предположения необходим большой объем испытаний (больше 20 партий).

При анализе, все партии предполагаются одинаковыми и между партиями, от различных поставщиков, не делается различий. По этой причине требования к объему выборки предполагают, что в выборку должны быть включены данные, по меньшей мере, для трех партий от каждого изготовителя (поставщика). Тогда гарантируется, что любой разброс характеристик материалов от разных изготовителей, не будучи точно определен (оценен), будет учтен в анализе путем его вклада в разброс от партии к партии.

Вычисление базисных значений проводится по следующей формуле:

$$B = \bar{X} - T \sqrt{S_b^2 + S_e^2}$$

где

$\bar{X}$  - общее среднее (среднее по всем измерениям);

$T$  – коэффициент для определения границы одностороннего толерантного интервала, определяемый в соответствии с таблицами указанными в [62];

$S_b^2$  - дисперсия между партиями;

$S_e^2$  - дисперсия внутри партии;

$$B_A = \bar{X} - T_A \sqrt{S_b^2 + S_e^2} \text{ - расчет для А-базиса}$$

$$B_B = \bar{X} - T_B \sqrt{S_b^2 + S_e^2} \text{ - расчет для В-базиса}$$

$B$  – значение А или В базиса.

## 1.2. Методика анализа для совокупности, описываемой нормальным законом распределения

Чтобы вычислить базисное значение для нормальной совокупности, сначала необходимо получить оценки для среднего и стандартного отклонения совокупности. Среднее значение и стандартное отклонение для выборки, вычисляются по уравнениям представленным ниже

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.2.1)$$

$$s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.2.2)$$

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \quad (1.2.3)$$

где  $i=1, \dots, n$

$x_i$ -значения механической характеристики, расположенной в порядке возрастания величины  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n$

Тест Андерсона - Дарлинга проводится по следующей формуле [55,62]

$$AD = \sum_{i=1}^n \frac{1-2i}{n} [\ln[F_0(z_i)] - \ln[1 - F_0(z_{n+1-i})]] - n \quad (1.2.4)$$

где  $F_0$  стандартная функция нормального распределения

$$AD^* = \left(1 + \frac{0,2}{\sqrt{n}}\right) AD \quad (1.2.5)$$

$$OSL = \frac{1}{1 + \exp[-0,48 + 0,78 \ln(AD^*) + 4,58 AD^*]} \quad (1.2.6)$$

Если значение  $OSL \geq 0,05$  (5% риск допустить ошибку) то данные могут быть описаны нормальным распределением.

Базисные значения определяют на основе следующей формулы:

$$B_B = \bar{X} - k_B S \quad \text{- расчет для В-базиса} \quad (1.2.7)$$

$$B_A = \bar{X} - k_A S \quad \text{- расчет для А-базиса} \quad (1.2.8)$$

$\bar{X}$  - среднее значение выборки;

$S$  – среднеквадратическое отклонение;

$n$  - число значений в выборке;

$k$  - коэффициент для определения границы одностороннего толерантного интервала определяемой по таблицам указанным в [62].

### 1.3. Логнормальная процедура

Если предполагается, что выборка взята из совокупности с логнормальным распределением, то для определения базисных значений следует использовать методику вычислений, приведенную для нормального распределения. Однако в этом случае вычисления проводятся на базе логарифмов экспериментальных значений. При этом можно использовать как натуральные, так и десятичные логарифмы. Вычисленное базисное значение пересчитывается путем применения преобразования, обратного логарифмированию.

Если, например, исходные данные обработаны с использованием натурального логарифмирования, тогда базисные – значения для исходных данных следует вычислять как:

$$B_B = \exp(\bar{X}_L - k_B S_L) - \text{расчет для В-базиса} \quad (1.3.1)$$

$$B_A = \exp(\bar{X}_L - k_A S_L) - \text{расчет для А-базиса} \quad (1.3.2)$$

где

$$\bar{X}_L = \left[ \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \right] / n \quad (1.3.3)$$

$$S_L = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (\ln(X_i) - \bar{X}_L)^2 \right] / (n-1)} \quad (1.3.4)$$

где  $k$  есть коэффициент для определения одностороннего толерантного интервала [62].

## 1.4. Методика расчета с помощью двухпараметрического распределения Вейбулла

### 1.4.1. Сравнение нормального распределения и распределения Вейбулла

При исследовании прочности композиционных материалов обычно используют два основных типа распределения: нормальное и Вейбулла. Основные различия между двумя распределениями и зависимости между основными параметрами каждого из них приведены в таблице 1.4.1.1.

Таблица 1.4.1.1.

Распределение	Функция	Диапазон	Расположение моды	Параметр формы
Нормальное	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$	$(-\infty, \infty)$	а	σ
Вейбулла	$1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]$	$(0, \infty)$	β	α

Вейбулл предположил, что вероятность разрушения в единичном объеме является следующей функцией напряжений:

$$F_0(\sigma) = 1 - \exp\left[-(\sigma/\beta)^\alpha\right] \quad (1.4.1)$$

где α и β- параметры, определяемые из испытаний материала. Это распределение нашло широкое применение при описании прочности композитов [28].

Часто распределение Вейбулла критикуют за то, что оно не имеет физического смысла, в то время как нормальное считается присущим самой природе. Имеющихся в данный момент знаний недостаточно для утверждения, что в качестве априорного распределение Вейбулла менее пригодно, чем нормальное. Распределение Вейбулла неявно использует гипотезу о том, что прочность определяется слабейшим звеном. В обоих

распределениях легко подсчитать моду или наиболее вероятное значение в распределении прочности выборки объемом  $n$ .

#### **1.4.2. Устойчивость параметров $\alpha$ и $\beta$**

Технические факторы, влияющие на репрезентативные значения  $\alpha$  и  $\beta$ , могут перекрываться и взаимодействовать друг с другом. В качестве руководящих положений в этом отношении можно использовать следующее:

- а). на параметр  $\alpha$  оказывают сильное влияние качество контроля технологического процесса изготовления материала, характер первичного разрушения, размеры образца и метод испытания; менее сильно сказываются ориентация слоев (при условии, что не изменяется характер первичного разрушения), условия испытания и надрезы;
- б). на параметр  $\beta$  оказывают сильное влияние свойства компонент (матрицы и волокон), ориентация слоев и изменение условий испытания (в широких пределах) и менее сильное влияние - способ переработки материала и метод испытания.

Приведенные выше рассуждения характеризуют лишь общую тенденцию, всегда возможны исключения из них. Кроме того, заметное влияние на  $\alpha$  и  $\beta$  могут оказывать и другие неотмеченные факторы, поэтому при любом анализе необходимо тщательно устанавливать все вероятные и существенные причины изменения измеряемых свойств.

#### **1.5. Практическое использование распределения Вейбулла**

Распределение Вейбулла определяется параметрами сдвига, масштаба и формы, хотя параметр сдвига обычно считается равным нулю или приводится к нулю соответствующим преобразованием данных. Применительно к анализу разрушения это означает, что оно может происходить с некоторой вероятностью при любых напряжениях или времени, больших нуля.

Так, если случайная величина  $x > 0$  характеризует напряжение разрушения или время до разрушения, то функция вероятности равна

$$p[X \leq x] = F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(x/\beta)^\alpha\right] & \text{если } x \geq 0 \\ 0 & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad (1.5.1)$$

соответственно плотность вероятности равна

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right] & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x \leq 0 \end{cases} \quad (1.5.2)$$

коэффициент вариации соответственно равен

$$\gamma(x) = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \quad (1.5.3)$$

Параметр положения  $\beta$  в уравнении (1.5.1) называется характерным временем или напряжением, является положительным и определяет точку на распределении, соответствующую квантилю уровня  $P=1-1/e=0,632$ . Параметр  $\alpha$  также положительный, определяет форму кривой. При возрастании  $\alpha$  мода распределения стремится к  $\beta$ , а при  $1/\alpha \rightarrow 0$  распределение вырождается. Практически это означает, что чем больше разброс, тем меньше величина  $\alpha$  в соответствующем распределении (см. формулу 1.5.3).

При определении долговечности или прочности целью обычно является оценка функции надежности  $R(x)$ , определяющей долю образцов из генеральной совокупности, которые могут выдержать время до разрушения или напряжение  $x$ . Таким образом,  $R(x)$  равно  $p[X > x] = 1 - F(x)$  или  $R(x) = \exp[-(x/\beta)^\alpha]$ .

Во многих случаях устанавливается требуемый срок службы или несущая способность по напряжениям  $x$  и требуется определить точечную или интервальную оценку  $R(x_0)$ , т.е. надежность при  $x_0$ . В других случаях задается надежность (или вероятность безотказной работы) и требуется дать оценку времени, при котором  $R$  % изделий из генеральной совокупности сохранят работоспособность. Величина  $x_R$  может быть найдена из формулы  $x_R = \beta [\ln(1/R)]^{1/\alpha}$  [28]

## 1.6 Определение базисных значений прочности с помощью распределения Вейбулла

Разрушение слоистых композитов при одноосном растяжении может быть хорошо описано распределением Вейбулла в форме

$$P(\sigma) = 1 - \exp\left[-(\sigma/\beta)^\alpha\right]$$

где  $\sigma$  - разрушающие напряжения;

$\beta$  - параметр положения,

$\alpha$  - параметр формы,

$P(\sigma)$  - вероятность разрушения.

Очень существенным было показать то, что, в соответствии с ожиданиями, параметр формы в уравнении распределения Вейбулла остается примерно постоянным при изменении условий нагружения, температур и старения материала [24].

Вычисление  $\beta$  – значения для случайной выборки из двухпараметрического распределения Вейбулла требует оценки формы и масштаба. Оценка параметра формы обозначается  $\beta$  и параметра масштаба  $\alpha$ . Оценки получаются путем решения пары уравнений максимального правдоподобия для  $\beta$  и  $\alpha$  [62].

$$\alpha\beta n - (\alpha \sum_{i=1}^n X_i^\alpha) / (\beta)^{\alpha-1} = 0 \quad (1.6.1)$$

$$\frac{n}{\alpha} - n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln X_i - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{X_i}{\beta} \right] (\ln X_i - \ln \beta) = 0 \quad (1.6.2)$$

уравнение (1.6.2) можно переписать в виде

$$\beta = \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} \quad (1.6.3)$$

Подставляя данное значение в уравнение (1.6.1).

$$\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^\alpha} \sum_{i=1}^n X_i^\alpha \ln X_i = 0 \quad (1.6.4)$$

$$z_i = \left[ \frac{x_i}{\beta} \right]^\alpha \quad \text{где } i=1, \dots, n \quad (1.6.5)$$

Тест Андерсона - Дарлинга проводится по следующей формуле [55]

$$AD = \sum_{i=1}^n \frac{1-2i}{n} [\ln[1 - \exp(-z_i)] - z_{n+1-i}] - n \quad (1.6.6)$$

$$AD^* = \left( 1 + \frac{0,2}{\sqrt{n}} \right) AD \quad (1.6.7)$$

$$OSL = \frac{1}{1 + \exp[-0,1 + 1,24 \ln(AD^*) + 4,48 AD^*]} \quad (1.6.8)$$

Если значение  $OSL \geq 0,05$  (5% риск допустить ошибку) то данные могут быть описаны двухпараметрическим распределением Вейбулла.

Так как все переменные в уравнении (1.6.4) известны, за исключением  $\alpha$ , это уравнение можно решить численно и полученное значение  $\alpha$  использовать для вычисления  $\beta$ .

Для полученных оценок параметров  $\alpha$  и  $\beta$  В – значение базиса равно:

$$B = Q \exp\left(\frac{-V}{\alpha \sqrt{n}}\right)$$

где значение Q при определении В-базиса выполняется по следующей формуле

$$Q = \beta(0,10536)^{1/\alpha} \quad (1.6.9)$$

а при расчете А-базиса по данной

$$Q = \beta(0,01005)^{1/\alpha} \quad (1.6.10)$$

V параметр, зависящий от объема выборки [48, 62].

## 1.7. Методика дискретного анализа для одной совокупности

1.7.1. Непараметрический метод определения базиса В при размере выборки больше 28 образцов

Сначала экспериментальные значения упорядочим по возрастанию. Тогда определим значение  $r$ , соответствующее размеру выборки  $n$ .

Значение  $r$  для произвольного размера выборки  $n$  можно вычислить непосредственно следующим образом. Если  $q_{0.1}$  есть 10% квантиль исследуемого распределения совокупности, тогда число наблюдений в выборке, меньших, чем  $q_{0.1}$ , есть биномиальная случайная переменная с  $n$  попытками и вероятностью успеха  $p=0.1$ . Пусть  $X_r$  обозначает  $r$ -е упорядоченное значение в выборке. Соотношение  $X_r \leq q_{0.1}$  верно тогда и только тогда, если имеется  $r$  или более значений в выборке, которые меньше или равны  $q_{0.1}$ . Отсюда получаем, что В – значение есть  $r$ -е упорядоченное значение выборки, где  $r \geq 1$  – есть максимальное (наибольшее) целое решение уравнения

$$\sum_{w=r}^n C_n^w (0,1)^w (0,9)^{n-w} \geq 0,95 \quad \text{где}$$

$$C_n^w = \frac{n!}{w!(n-w)!}$$

В – значение есть  $r$ -е минимальное наблюдение в упорядоченной выборке. Для размеров выборки меньше 29 значений В – значение не может быть вычислено по этой процедуре; методика Хэнсона - Кумпанса позволяет определить В – значение для этих малых объемов выборки [62].

1.7.2. Метод Хэнсона - Кумпанса

Методика расчета основана на предположении, что наблюдения являются случайной выборкой из совокупности с плотностью распределения, абсолютное значение логарифма от функции распределения является вогнутой функцией. Это предположение удовлетворяется для большого

класса распределений вероятности, однако, строго говоря, непараметрических. Имеется большое число эмпирических данных по прочности композитных материалов, подтверждающих предположение Хенсона - Кумпанса, и, следовательно, этот метод можно рекомендовать для использования при  $n < 29$ . Однако, с точки зрения требуемого предположения, эта рекомендация не является безусловной.

В-значения вычисляются следующим образом. Упорядочим наблюдения по возрастанию от минимального к максимальному. Пусть  $X_1$  – наименьшее наблюдение,  $X_2$  – второе наименьшее и так далее. В общем случае, обозначим  $r$ -е наименьшее значение через  $X_r$ . Тогда В – значение определяется соотношением  $V = X_r [X_1 / X_r]^k$  где  $r$  и  $k$  зависят от  $n$  (см. таб. 1.7.2.1) [62].

Таблица 1.7.2.1.

n	r	k
2	2	35.177
3	3	7.859
4	4	4.505
5	4	4.101
6	5	3.064
7	5	2.858
8	6	2.382
9	6	2.253
10	6	2.137
11	7	1.897
12	7	1.814
13	7	1.738
14	8	1.599
15	8	1.54
16	8	1.485

17	8	1.434
18	9	1.354
19	9	1.311
20	10	1.253
21	10	1.218
22	10	1.184
23	11	1.143
24	11	1.114
25	11	1.087
26	11	1.060
27	11	1.035
28	12	1.01

Ниже приведены результаты расчета по данным методикам на примере выборки результатов испытаний образцов-свидетелей агрегатов, выполненных из композиционных материалов [62].

## 1.8. Обработка экспериментальных данных

За годы эксплуатации самолетов Ту-204 был накоплен большой объем экспериментальных данных по испытаниям композиционных материалов. Такой объем данных был получен благодаря тому что для композиционных деталей существует 100% контроль, т.е. все детали, которые устанавливаются на самолет проходят контроль на соответствие техническим условиям. Основным критерием качества изготовления является прочностные свойства на растяжение и сжатие. Данные свойства проверяются на так называемых образцах-свидетелях. Это образцы, вырезаемые из припуска детали. Общий объем данных более 15000 испытанных образцов. Для систематизации и обработки этой информации была создана база данных, в которую были внесены все результаты испытаний.

В базу данных были встроены все приведенные выше алгоритмы, что позволяло производить расчет для различных видов образцов.

Был проведен расчет по всем имеющимся в базе значениям для типовых укладок таких как

1.8.1).  $\pm 45$ .

1.8.2).  $\pm 45-0$ .

1.8.3).  $\pm 45-0-90$ .

1.8.4).  $\pm 45-90$ .

Определялся параметр формы распределения Вейбулла, результаты приведены в таблицах 1.8.1, 1.8.2.

Параметр  $\beta$  не указан потому что, в общую выборку были замешаны результаты испытаний образцов с разной толщиной и соответственно разными значениями моды распределения по пределу прочности.

## Растяжение

Таблица 1.8.1

Укладка	Параметр формы распределения Вейбулла $\alpha$	Наполнитель	Коэффициент вариации	Количество образцов
±45	2	Органит	54,23%	105
	2,3	Углепластик	46,72%	300
±45-0	10,9*	Гибрид	<15%	1784
	10	Органит	11%	1820
	8,8	Углепластик	12%	135
±45-0-90	9,8*	Гибрид	<15%	2540
	9,3	Органит	13%	180
±45-90	9,2	Органит	12,73	115

## Сжатие

Таблица 1.8.2

Укладка	Параметр формы распределения Вейбулла $\alpha$	Наполнитель	Коэффициент вариации	Количество образцов
±45	12	Органит	7,58%	220
±45-0	10,02*	Гибрид	<15%	1209
	10,02*	Органит	<15%	2655
	12	Углепластик	6,7%	145
±45-0-90	9,65*	Гибрид	<15%	2870
	9,1*	Органит	<15%	450
±45-90	9,95*	Органит	<15%	185

\* - средние значения по разным укладкам

Изменение предела прочности образцов свидетелей от машины к машине  
(укладка [0, 45-2, 0]-3 связующее ЭДТ-69Н, число образцов 1820)

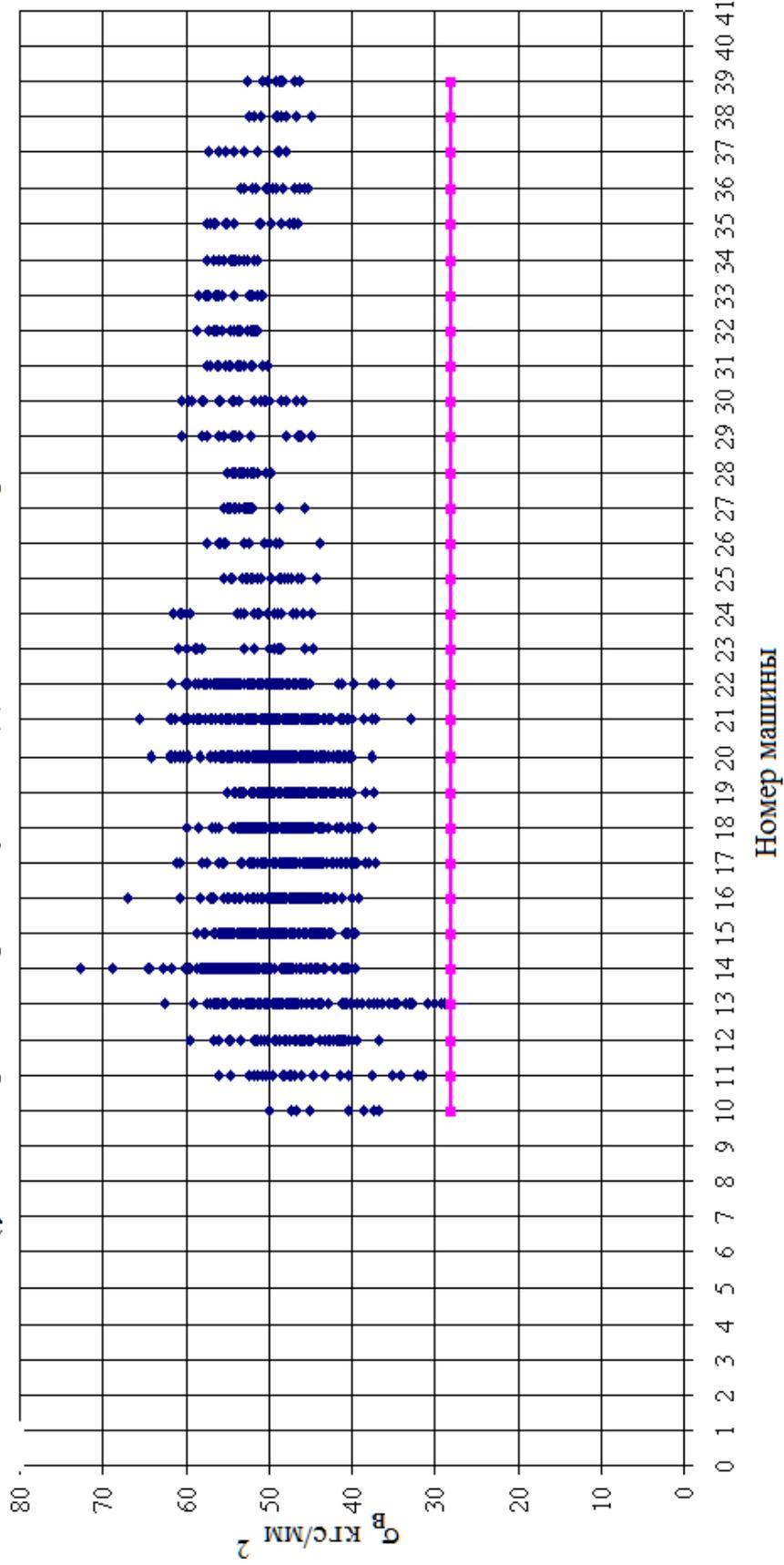


Рис. 1.8.1.1. Изменение предела прочности образцов от агрегата к агрегату.

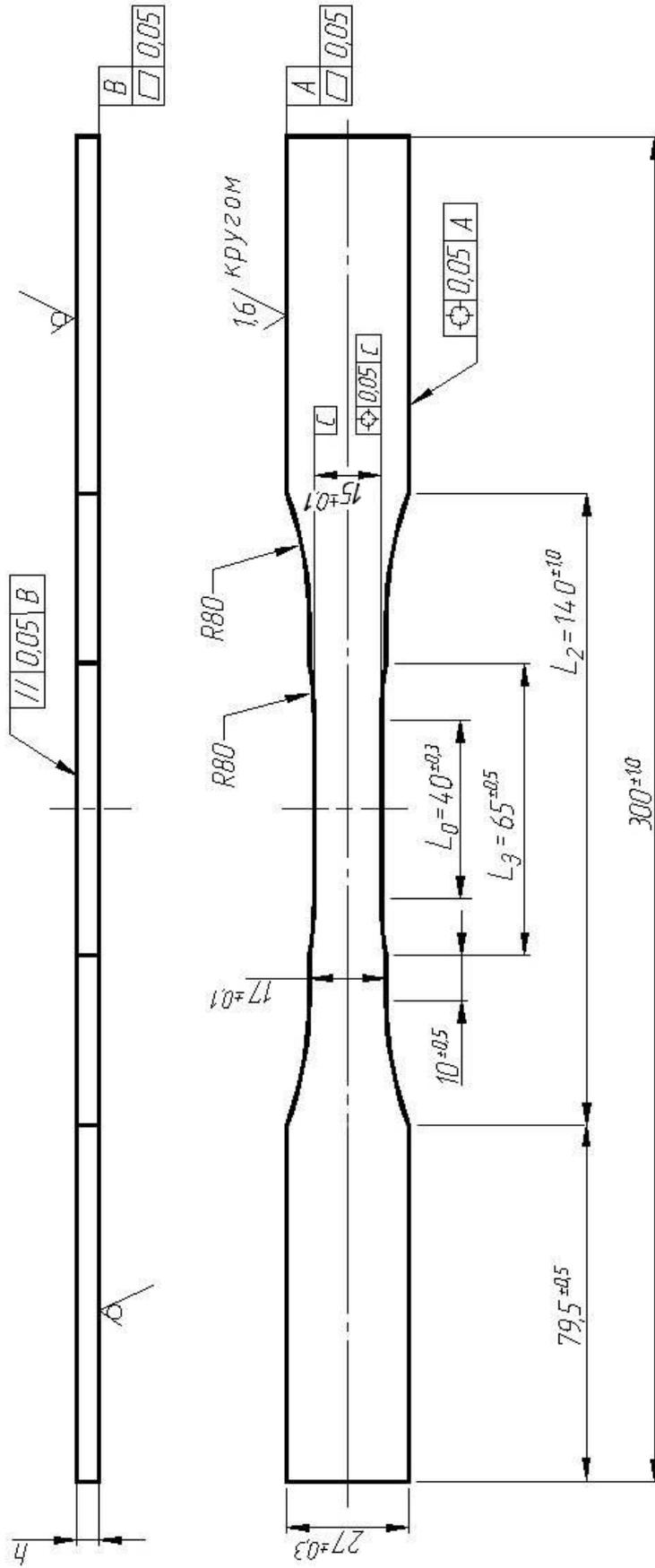


Рис 1.8.2. Образец для испытаний на растяжение.

## *Результаты испытаний образцов-свидетелей.*

Укладка детали [0,±45,0]-3

$\delta$  расч = 0,14\*12 = 1,68 мм

растяжение по ГОСТ 25.601-80

ТУ 28 кгс/мм<sup>2</sup>

Таблица 1.8.3

Машина	$\sigma_B$ (кгс/мм <sup>2</sup> )	$\sigma_B$ расч (кгс/мм <sup>2</sup> )	$P_{разр}$ (кгс)	Ширина (мм)	Толщина фактическая (мм)	Толщина теор. (мм)
Интерцептор. Секция 4 обшивка верхняя 74.00.3524.001.002						
10	38,50	27,06	540,6	11,9	1,18	1,68
10	49,90	36,23	720,2	11,83	1,22	1,68
10	37,40	26,03	520,3	11,89	1,17	1,68
10	36,80	25,21	500,7	11,83	1,15	1,68
10	40,40	27,17	540,1	11,83	1,13	1,68

$\sigma_B$  - предел прочности определенный из расчета фактической толщины

$\sigma_B$  расч - предел прочности определенный из расчета теоретической толщины

На данной странице представлен пример акта по которым формировалась выборка.

1. Тип образца представлен на рисунке 1.8.2.
2. Образец прессовался под давлением 5 атмосфер в автоклаве с вакуумным мешком при температуре 125 °С.
3. Наименование агрегатов, которые использовались для выреза образцов-свидетелей: интерцептор секция 1, 2, 3, 4, 5; элерон; воздушный тормоз. Детали, из которых вырезались образцы, представляют собой верхнюю и нижнюю обшивку конструктивного элемента.
4. Испытания проводились по ГОСТ 25.601-80 на испытательной машине фирмы INSTRON.

Используя вышеприведенные методики, был произведен расчет базисных значений для выборки испытаний образцов свидетелей (укладка типа  $\pm 45-0$ ). На рис. 1.8.1 приведен график изменения предела прочности образцов от порядкового номера машины, красной линией показано значение предела прочности указанное в технических условиях на данную укладку.

Получили следующие данные.

Базисный предел прочности, полученный использованием приведенных выше методик приведен в таблице 1.8.4.

Таблица 1.8.4

	$\sigma_b$ (А базис) (кгс/мм <sup>2</sup> )	$\sigma_b$ (В базис) (кгс/мм <sup>2</sup> )
Метод ANOVA	36,6	42,1
Нормальный закон	36,8	42,4
Распределение Вейбулла	40,7	41
Логнормальный закон	37,7	42,4
Непараметрический метод	33	42,6

Общие сведения

Число образцов 1820

Число партий 364

Минимальное значение 26,9 кгс/мм<sup>2</sup>

Максимальное значение 72,6 кгс/мм<sup>2</sup>

Среднее 49,45 кгс/мм<sup>2</sup>

ТУ 28 кгс/мм<sup>2</sup> (значение предела прочности для данных образцов установленное в технических условиях).

Сравнивая значение, указанное в технических условиях и полученное с помощью статистического анализа получаем, что базисное значение выше указанного в ТУ на данную деталь. Изменяя значение ТУ можно получить выигрыш в весе, что в агрегатах очень важно.

## ГЛАВА 2. ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТНОСТИ НА ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА

Поведение тел с имеющимися и образующимися под действием нагрузок и воздействием внешней среды дефектами в настоящее время является предметом пристального изучения, так как такой подход позволяет объяснить многие эффекты в частности существенное снижение прочности реальных тел по сравнению с идеальными бездефектными. Исследование дефектности дает возможность выяснить влияние ее на деформационные характеристики материала. Важность этого явления нашла отражение, например, при оценке срока службы композиционных материалов в условиях циклических нагрузок, когда условием разрушения является определенное снижение упругих характеристик композиционного материала.

Простейшая схема, принятая Батдорфом и Будянским [3], состоит в том, что для каждого зерна предполагается существование одной только системы скольжения. Зафиксируем произвольно два взаимно перпендикулярных направления  $n$  и  $\beta$ , определяющих предположительную систему скольжения. Если число зерен в объеме тела велико, то всегда найдется некоторое число зерен, для которых нормаль к плоскости возможного скольжения – по предположению единственная – будет находиться внутри конуса с осью  $n$  и телесным углом при вершине  $d\Omega$ . В системе скольжения  $n \beta$  действует касательное напряжение  $\tau_{n\beta}$ , соответствующие зерна претерпевают деформацию чистого сдвига  $\gamma_{n\beta}^p = F(\tau_{n\beta})$ . Была принята гипотеза о том, что напряженное состояние однородно и не меняется от зерна к зерну. Вторая гипотеза состоит в том, что деформация зерен с системой скольжения  $n\beta$  вызывает такую же общую деформацию тела, пропорциональную отношению соответствующих зерен, а именно:

$$\gamma_{n\beta}^p = F(\tau_{n\beta}) d\Omega d\beta.$$

Итак, деформация тела в целом представляет собою результат наложения бесконечно большого числа чистых сдвигов для всех возможных систем скольжения  $n\beta$ . Чтобы вычислить эту деформацию, перейдем к составляющим тензора деформации относительно фиксированных осей  $x_i$  по формулам преобразования компонент тензора второго ранга. Принимая направления  $n$  и  $\beta$  за направления 1 и 2 новой системы координат, мы должны принять все  $e_{ij}$  равными нулю, кроме  $e_{12}=\gamma_{n\beta}/2$ . Тогда

$$de_{ij}^p = (\beta_{1i}\beta_{2j} + \beta_{2i}\beta_{1j})de_{12}$$

Но  $\beta_{1i}=n_i$ ,  $\beta_{2i}=\beta_i$ , следовательно,

$$de_{ij}^p = \frac{1}{2}(n_i\beta_j + n_j\beta_i)F(\tau_{n\beta})d\Omega d\beta$$

Интегрируя, получим формулы для пластических деформаций

$$e_{ij}^p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (n_i\beta_j + n_j\beta_i)F(\tau_{n\beta})d\Omega d\beta$$

Здесь  $\Omega$ -поверхность единичной сферы. Касательное напряжение  $\tau_{n\beta}$  вычисляется по формуле

$$\tau_{n\beta} = \sigma_{ij}n_i\beta_j$$

Рассмотрим пластическое тело, при деформировании которого происходит образование и изменение размеров микротрещин. Аналогично примем, что:

- 1). При достижении напряженно-деформированным состоянием условий зарождения микротрещин в системе скольжения образуется  $k_0$  дефектов размера  $R_0$  на единицу площади;
- 2). При дальнейшем деформировании оставшаяся не разрушенной часть плоскости скольжения деформируется сдвигом, величина которого зависит только от эффективного касательного напряжения, большего своих предыдущих значений;
- 3). Изменение размеров микротрещин определяются условием их роста.

Для установления зависимостей деформационных характеристик от вида функции роста микротрещин отвлечемся от наличия изменения объема материала, т.е. предположим тело несжимаемым. В этом случае можно воспользоваться моделью плоского тела для вывода соотношений между девиаторами напряжений и деформаций при сложном напряженном состоянии. Компонентами девиаторов напряжений и деформаций будут

$$S_x=(\sigma_x-\sigma_y)/2, \quad S_y=(\sigma_y-\sigma_x)/2, \quad S_{xy}=S_{yx}=\sigma_{xy},$$

$$e_x=(\varepsilon_x-\varepsilon_y)/2, \quad e_y=(\varepsilon_y-\varepsilon_x)/2, \quad e_{xy}=e_{yx}=\varepsilon_{xy}/2,$$

$$S_x+S_y=0,$$

$$e_x+e_y=0,$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ -компоненты тензора напряжений в плоскости приложения нагрузки;  $\varepsilon_y, \varepsilon_x, \varepsilon_{xy}$  –компоненты тензора деформаций;  $S_x, S_y, S_{xy}$  и  $e_x, e_y, e_{xy}$ -соответствующие компоненты девиаторов. Если тело находится в однородном деформированном состоянии, то под углом  $\theta$  к оси OX происходит сдвиг [4, 7, 8].

$$\gamma=(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin(2\theta)/2+\varepsilon_{xy}\cos(2\theta)/2 \quad (2.1)$$

Тогда, если касательное напряжение  $\tau$  не превышает условия зарождения микротрещин, то

$$\sigma_x=\sigma_0+\tau \sin(2\theta), \quad \sigma_{xy}=\tau \cos(2\theta), \quad \sigma_y=\sigma_0-\tau \sin(2\theta)$$

$$S_x=\tau \sin(2\theta), \quad S_{xy}=\tau \cos(2\theta), \quad S_y=-S_x,$$

где  $\sigma_0$ -гидростатическая составляющая тензора напряжений.

Если от деформационной формулировки теории скольжения в модели плоского тела перейти к формулировке в напряжениях, то девиатор тензора напряжений найдем суммированием по всем углам:

$$\bar{s} = \sqrt{2} \int \tau (\bar{i} \sin(2\theta) + \bar{j} \cos(2\theta)) d\theta \quad (2.2)$$

$\bar{i}, \bar{j}$  – векторы ортонормированного базиса плоскости девиаторов, и интегрирование распространяется по области  $\Omega$ , где превышает условие текучести, и  $\tau=F(\gamma)$ ,  $\gamma$ -определяется выражением (2.1).

В случае, когда касательное напряжение  $\tau$  превосходит условие зарождения микротрещин, согласно предположению 2,

$$\begin{aligned}
S_x &= \tau_1 (1-R/a) \sin(2\theta), \\
S_{xy} &= \tau_1 (1-R/a) \cos(2\theta), \\
S_y &= -S_x,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где  $\tau_1$ -эффективное касательное напряжение,  $R$ -размер микротрещин в данной системе скольжения,  $a$ -среднее расстояние между двумя соседними микротрещинами в этой плоскости скольжения,  $\tau_1 = \tau(1-R/a)^{-1}$ .

Тогда в этом случае

$$\bar{s} = \sqrt{2} \int_{\Omega_1} \tau_1 (1-R/a) (i \sin 2\theta + j \cos 2\theta) d\theta + \sqrt{2} \int_{\Omega-\Omega_1} \tau (i \sin 2\theta + j \cos 2\theta) d\theta \tag{2.4}$$

где  $\Omega_1$ -область, в которой превышает условие зарождения микротрещин;  $\tau_1 = F(\gamma)$ . Для случая пропорционального деформирования под углом  $\beta$  к оси  $e_x$ , если перейти к координатам, связанным с путем деформирования, получим

$$\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Omega_1} F_1(\gamma) (1-R/a) (\bar{\rho} \cos \lambda - \bar{q} \sin \lambda) d\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Omega-\Omega_1} F(\gamma) (\bar{\rho} \cos \lambda - \bar{q} \sin \lambda) d\lambda \tag{2.5}$$

или если предположить, что  $F_1(\gamma)$ -экстраполяция  $F(\gamma)$  на область значений  $\tau$  и  $\gamma$ , превышающих условие зарождения микротрещин, то

$$\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Omega_1} F(\gamma) (\bar{\rho} \cos \lambda - \bar{q} \sin \lambda) d\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Omega_1} F(\gamma) (\bar{\rho} \cos \lambda - \bar{q} \sin \lambda) \frac{R}{a} d\lambda \tag{2.6}$$

В предположении чисто пластического роста микротрещин

$$\frac{R}{a} = \frac{R_0}{a} \exp \left[ \frac{\gamma - \gamma_0}{2(1-n)} sh \frac{(1-n)\sigma_0}{\sigma_i} \right] = \frac{R(\gamma, u)}{a}, \quad u = \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \tag{2.7}$$

$\sigma_i$ -интенсивность напряжений.

В этом случае (2.6) можно записать в виде

$$\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Omega} F(\gamma) (\bar{\rho} \cos \lambda - \bar{q} \sin \lambda) d\lambda - \frac{1}{a\sqrt{2}} \int_{\Omega_1} F(\gamma) R(\gamma, u) (\bar{\rho} \cos \lambda - \bar{q} \sin \lambda) d\lambda \tag{2.8}$$

Таким образом, учитывая, что  $\gamma = e \cos(\lambda/2)^{1/2}$ ,  $u = \sigma_0/\sigma_i = \text{const}$  при пропорциональном деформировании, и предполагая, что условием образования микротрещин является механизм Стрo, связь между девиатором напряжений и деформаций будет иметь вид

$$S = \left[ 1 - \frac{1}{a} f(e, u) \right] \psi(e) \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что наряду с изменением касательного модуля при образовании и росте микротрещин приобретает также и зависимость деформационных характеристик от вида напряженного состояния. Вывод о зависимости деформационных характеристик от вида напряженного состояния сохранится и в том случае, если отказаться от предположения, что  $F_1(\gamma)$ -экстраполяция  $F(\gamma)$  на область значений  $\tau$ ,  $\gamma$ , превышающих условие зарождения микротрещин [7].

Для характеристической функции

$$\frac{\tau}{\tau_L} = 1 + \frac{\gamma}{c_1} \quad (2.10)$$

и условия изменения размеров микротрещин

$$\frac{R}{a} = \frac{R_o}{a} [1 + (\gamma - \gamma_o) f(u)] \quad (2.11)$$

выражение (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{s} = \frac{2\bar{\rho}}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 2 \sin \varphi_o + \left( \varphi_o + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_o \right) \frac{e}{\sqrt{2c_1}} \right] - \frac{2R_o}{\sqrt{2a}} [1 - \gamma_o f(u)] \sin \varphi_1 - \right. \\ \left. - \frac{R_o e}{2a} \left[ \frac{f(u)}{c_1} + \frac{1}{c_1} (1 - \gamma_o f(u)) \right] \left( \varphi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 \right) - \frac{R_o}{\sqrt{2a}} \frac{f(u) e^2}{4c_1^2} \left( \frac{1}{3} \sin 3\varphi_1 + 3 \sin \varphi_1 \right) \right\} \quad (2.12) \end{aligned}$$

где  $\cos \varphi_o = e_o/e$ ,  $\cos \varphi_1 = e_1/e$ .

Таким образом, при пропорциональном нагружении связь между девиаторами напряжений и деформаций (2.9) при условиях (2.10) и (2.11) имеет вид при  $e > e_1$  [7]

$$\begin{aligned} s = \frac{2\tau_L}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 2 \sin \varphi_o + \left( \varphi_o + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_o \right) \frac{e}{\sqrt{2c_1}} \right] - \frac{2R_o}{\sqrt{2a}} [1 - \gamma_o f(u)] \sin \varphi_1 - \right. \\ \left. - \frac{R_o e}{2a} \left[ \frac{f(u)}{c_1} + \frac{1}{c_1} (1 - \gamma_o f(u)) \right] \left( \varphi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 \right) - \frac{R_o}{\sqrt{2a}} \frac{f(u) e^2}{4c_1^2} \left( \frac{1}{3} \sin 3\varphi_1 + 3 \sin \varphi_1 \right) \right\} \quad (2.13) \end{aligned}$$

При  $e_o < e < e_1$

$$s = \frac{2\tau_L}{\sqrt{2}} \left[ 2 \sin \varphi_0 + \left( \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right) \frac{e}{\sqrt{2}c_1} \right]$$

Для плоского нагружения  $s = \sigma_1$ . Так как зависимость девиатора от отношения размера дефекта к расстоянию между дефектами исходя из выше приведенной формулы линейное, значит и функция распределения для девиатора будет такой же по форме, как и для размеров дефекта [4, 5, 7].

Рассмотрим случай пропорциональной догрузки. При превышении напряженно-деформированным состоянием условия зарождения микротрещин с увеличением напряжения придем в состояние, когда

$$\delta\tau = \left\{ 1 - \frac{R}{a} \left[ 1 + \frac{R'_\gamma(\gamma, u)}{R} F_1' \left[ \frac{\sigma \cos \lambda}{\sqrt{2} \left( 1 - \frac{R}{a} \right)} \right] \frac{\sigma \cos \lambda}{\sqrt{2} \left( 1 - \frac{R}{a} \right)} \right] \right\} \delta\tau_1 = \delta\sigma \sin(\alpha - \lambda) = 0$$

Таким образом, происходит потеря устойчивости пластического деформирования, возникает локальный сдвиг в плоскости  $\lambda=0$  и условие неустойчивости при пропорциональном нагружении можно записать в виде

$$1 - \frac{R}{a} \left\{ 1 + \frac{R'_\gamma(\gamma, u)}{R} F_1' \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{2} \left( 1 - \frac{R}{a} \right)} \right] \frac{\sigma}{\sqrt{2} \left( 1 - \frac{R}{a} \right)} \right\} = 0$$

Выразим из полученного выражения напряжения при котором происходит потеря устойчивости пластического деформирования

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}(a - R)^2}{a R'_\gamma(\gamma, u) F_1' \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{2} \left( 1 - \frac{R}{a} \right)} \right]}$$

$$R'_\gamma[\gamma, u] = \left( R_0 \exp \left[ \frac{\gamma - \gamma_0}{2(1-n)} \operatorname{sh} \frac{(1-n)\sigma_0}{\sigma_i} \right] \right)' = R_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{(1-n)\sigma_0}{\sigma_i}}{2(1-n)} \exp \left[ \frac{\gamma - \gamma_0}{2(1-n)} \operatorname{sh} \frac{(1-n)\sigma_0}{\sigma_i} \right]$$

$$F_1 = c_1 \left[ \frac{\sigma}{\tau_L \left(1 - \frac{R}{a}\right)} - 1 \right]$$

$$F'_\sigma = \frac{c_1}{\tau_L \left(1 - \frac{R}{a}\right)}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}(a-R)^2}{aR_0 \frac{\sigma_0}{2(1-n)} \exp \left[ \frac{\gamma - \gamma_0}{2(1-n)} \operatorname{sh} \frac{(1-n)\sigma_0}{\sigma_i} \right] \frac{c_1}{\tau_L \left(1 - \frac{R}{a}\right)}} \quad (2.14)$$

$R$  - размеры дефекта;

$a$  - среднее расстояние между двумя микротрещинами;

$\sigma$  - напряжение потери устойчивости пластического деформирования;

$\tau_L$  - напряжение сдвига при пластичности

$R'_\gamma(\gamma, u)$  - скорость роста микродефектов

$n$  - показатель степени в уравнении Рамберга-Осгуда для материала ВТ-5 описывающего кривую деформирования

Для материала ВТ-5 были взяты следующие значения констант:

$$c_1 = 0,1$$

$$a = 0,05 \text{ мм}$$

$$\tau_L = 32 \text{ кгс/мм}^2$$

$$R_0 = 0,017 \text{ мм}$$

$$n = 23$$

$$\sigma_0 / \sigma_i = 1/3$$

$$\Delta = \gamma - \gamma_0$$

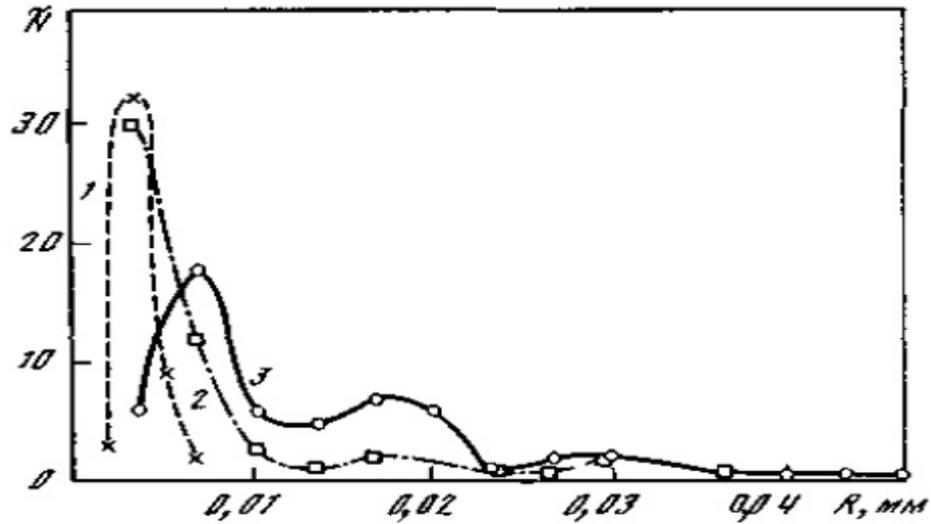


Рис. 2.1. Распределение дефектов по размерам при различных уровнях остаточной деформации сплава ВТ-5 (1-11%, 2-21%, 3-42%).

Используя графики приведенные на рис.2.1 были построены экспериментальные кривые распределения размеров дефектов при различной остаточной деформации. С помощью данных кривых были определены базисные значения размеров дефектов ( $R_B$ ) для различных величин остаточной деформации и с помощью формулы 2.14 были рассчитаны значения напряжения потери устойчивости пластического деформирования для различных размеров дефектов. Результаты расчета сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1.

Остаточная деформация, %	$R_B$ мм	$\Delta$	$\sigma$ кгс/мм <sup>2</sup>
11	0,005222	0	61,8
22	0,018444	0,075	6,8
42	0,028111	0,2325	0,2

### ГЛАВА 3. АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАТИЧЕСКОЙ И УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ

Введенные обозначения.

N-количество циклов

n-число точек в выборке

$C_p, m_p, r$ -параметры уравнения Периса

$C_f, m_f, r$ -параметры уравнения Формана

$C_k, m_k, r$ -параметры уравнения Коллиприста

$l$ -длина трещины

$\frac{dl}{dN}$  - скорость роста трещины усталости

W-ширина образца

$\sigma$ - напряжения в сечении брутто

$\Delta K$ -коэффициент интенсивности напряжения (КИН) для данной длины трещины

R-коэффициент асимметрии

d-диаметр отверстия

$K_c$ -критический КИН при статическом нагружении

$K_{th}$ -КИН при котором скорость роста трещины усталости равна  $0,5 \cdot 10^{-7}$  мм/цикл

$$\Delta K_{\phi\phi} = \frac{\Delta K}{(1-R)^p}$$

$Z_k$ -«вес» образца, то есть коэффициент вводимый для усиления влияния на параметры кривой образцов с малым количеством точек

$S_{lg(dl/dN)}$ -рассеяние

quntil-квантиль, параметр для определения выбросов в выборке

### 3.1. Получение $K_{Ic}$ и $K_c$ (средние значения)

Ниже представлены типовые образцы для определения параметров трещиностойкости металлических материалов, с указанием формул для определения вязкости разрушения.

#### 3.1.1. Образец с центральной трещиной

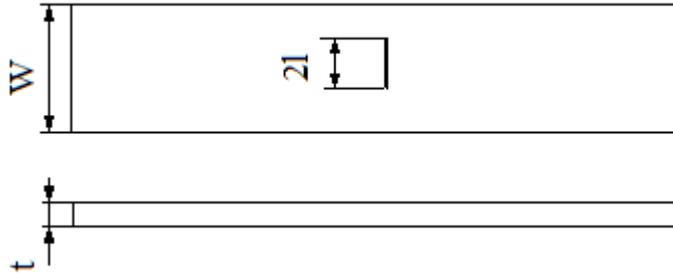


Рис.3.1. Образец с центральной трещиной

$$x = \frac{2l}{W}$$

$$K_c = \sigma \sqrt{\pi l} (1 - 0,025x^2 + 0,06x^4) \sqrt{\frac{1}{\cos(0,5\pi x)}} \quad [40]$$

где  $\sigma$ -нагрузка прикладываемая к образцу,  $l$ -длина трещины,  $W$ -ширина образца.

#### 3.1.2. Образец с одним боковым надрезом

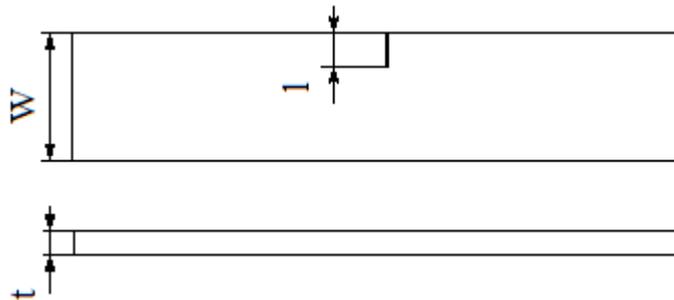


Рис.3.2 Образец с одним боковым надрезом

$$x = \frac{2l}{W}$$

$$K_c = \sigma \sqrt{\pi l} \left( 0,265(1-x)^4 + \frac{0,857 + 0,265x}{\sqrt{(1-x)^3}} \right)$$

### 3.1.3. Образец с двумя боковыми надрезами

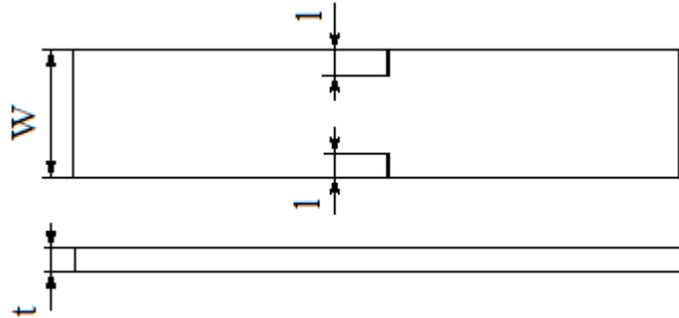


Рис.3.3. Образец с двумя боковыми надрезами

$$x = \frac{\pi l}{W}$$

$$K_c = \sigma \sqrt{\pi l} \left( 1 + 0,122 \cos^2(x) \right) \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}} \quad [40]$$

### 3.1.4. Образец полоса с отверстием с одним надрезом

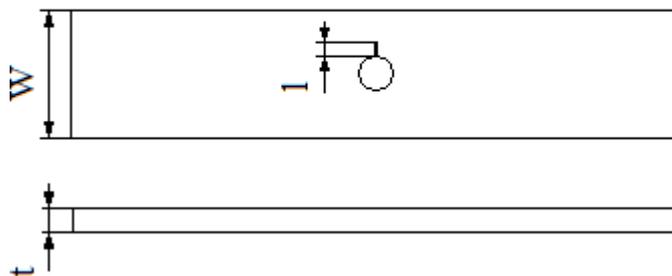


Рис.3.4. Образец полоса с отверстием с одним надрезом

$$x = \frac{1}{\left( 1 + \frac{2l}{d} \right)}$$

$$K_c = \sigma \sqrt{\pi l} \left( 0,707 - 0,18x + 6,55x^2 - 10,54x^3 + 6,85x^4 \right) \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi(l+d)}{2W}\right)}} \quad [40]$$

### 3.1.5. Образец полоса с отверстием с двумя надрезами

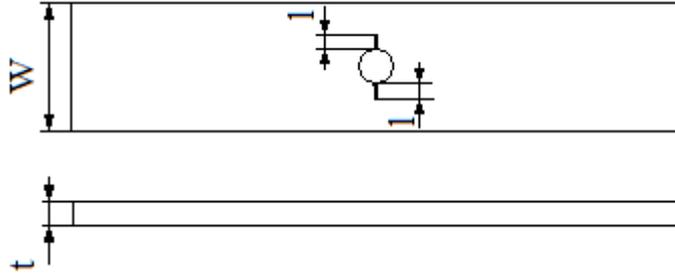


Рис.3.5. Образец полоса с отверстием с двумя надрезами

$$x = \frac{1}{\left(1 + \frac{2l}{d}\right)}$$

$$K_c = \sigma \sqrt{\pi d} \left( 1 - 0,15x + 3,46x^2 - 4,47x^3 + 3,52x^4 \right) \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi(2l+d)}{2W}\right)}}$$

### 3.1.6. Образец на внецентренное растяжение

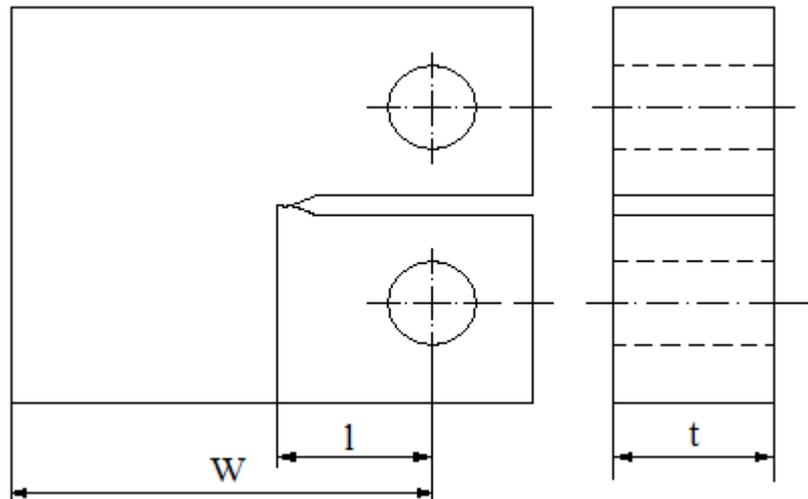


Рис.3.6. Образец на внецентренное растяжение

$$x = \frac{l}{W}$$

$$K_c = P\sqrt{\pi l} \left( \frac{(0,886 + 4,64x - 13,3x^2 + 14,72x^3 - 5,6x^4)\sqrt{W}(2+x)}{\sqrt{\pi l}(1-x)^3} \right) [40]$$

Расчетные значения  $K_{1c}$ ,  $K_c$  (ниже в формулах обе характеристики обозначаются как  $K_c^p$ ) определяются в случае удовлетворения требуемому объему данных как

$$K_c^p = \frac{\sum_{i=1}^n K_{ci}}{n},$$

при  $S_{\text{сум}}/K_c \leq 0,05$  и при испытанных 3-х и более полуфабрикатах где

$$S_{\text{сум}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (K_c^p - K_{ci})^2}{n-1}} - \text{ суммарное рассеяние,}$$

$n$  - количество экспериментальных точек.

Для материалов АКбчТ1 и ВТбч был набран экспериментальный материал, который был обработан по приведенным выше методикам и построены экспериментальные вероятностные кривые (см. рис. 3.7 и рис. 3.8). Показано, что в отличие от композиционных материалов распределение характеристик трещиностойкости хорошо описывается логнормальным законом (см. таблицы 3.1.1 и 3.1.2).

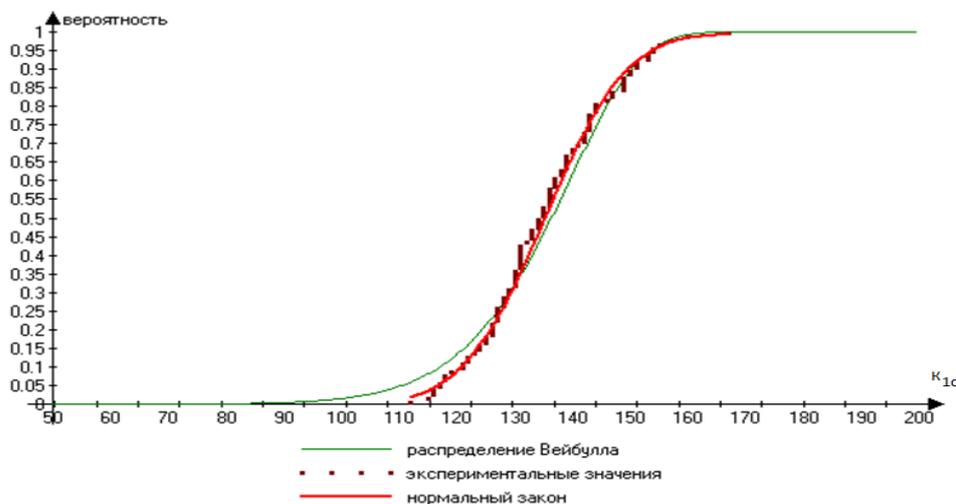


Рис. 3.7. График эмпирической функции распределения вязкости разрушения материала АКбчТ1

Таблица 3.1.1

	$K_{1c}$ (А базис) (кгс/мм <sup>3/2</sup> )	$K_{1c}$ (В базис) (кгс/мм <sup>3/2</sup> )	Критерий значимости
Нормальный закон	105,1	118,1	0,455
Распределение Вейбулла	109,9	113	0,002
Логнормальный закон	107,96	118,8	0,665
Непараметрический метод	99	117	

Общие сведения

Число образцов 100

Число партий 50

Минимальное значение 112 кгс/мм<sup>3/2</sup>

Максимальное значение 167 кгс/мм<sup>3/2</sup>

Среднее 135,22 кгс/мм<sup>3/2</sup>

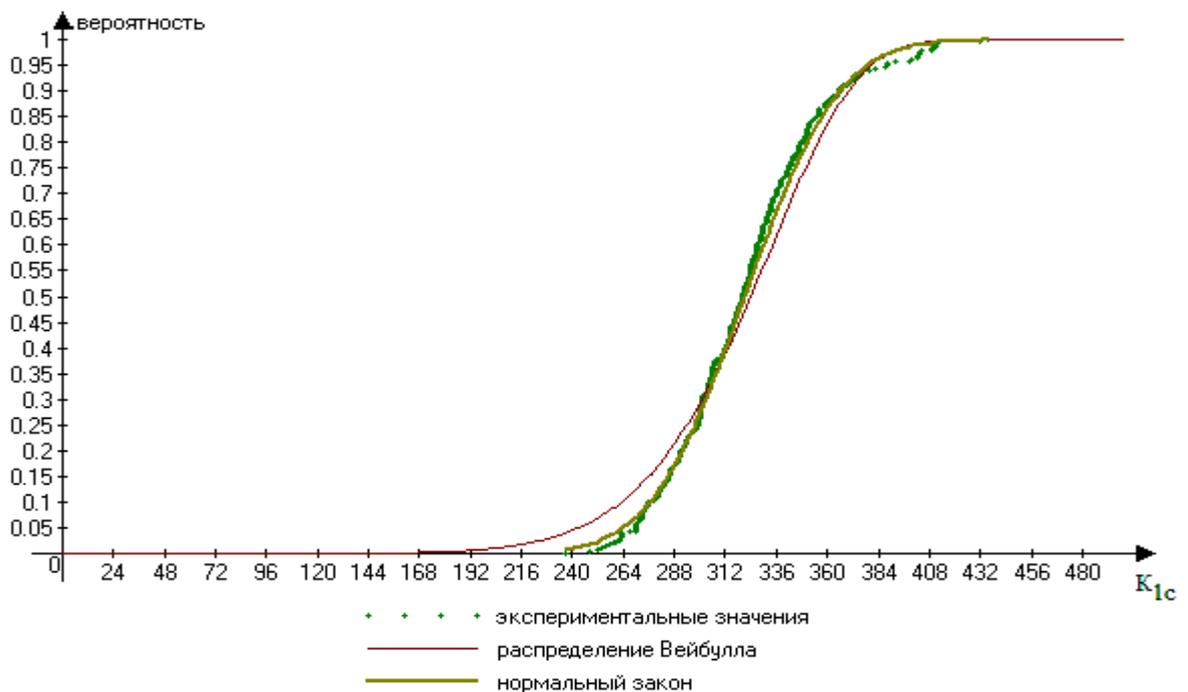


Рис. 3.8. График эмпирической функции распределения вязкости разрушения материала ВТ6ч

Таблица 3.1.2

	$K_{Ic}$ (А базис) (кгс/мм <sup>3/2</sup> )	$K_{Ic}$ (В базис) (кгс/мм <sup>3/2</sup> )	Критерий значимости
Нормальный закон	233,5	272	0,009
Распределение Вейбулла	251,6	256,5	0
Логнормальный закон	243,8	274,5	0,39
Непараметрический метод	237	273	

Общие сведения

Число образцов 326

Число партий 163

Минимальное значение 237 кгс/мм<sup>3/2</sup>

Максимальное значение 436 кгс/мм<sup>3/2</sup>

Среднее 321,4 кгс/мм<sup>3/2</sup>

### 3.2. Пересчет $K_{Ic}$ и $K_{Ic}$ с одной ширины на другую

Для обшивочных материалов в качестве базовой ширины принимается ширина образца  $W = 750$  мм или  $W = 1200$  мм. Для штамповок и прессованных полуфабрикатов допускаются следующие ширины образцов:  $W = 50, 100, 140, 200, 500$  и  $750$  мм.

При необходимости пересчета экспериментальных данных (интерполяция) с одной ширины на другую можно использовать следующее соотношение:

$$K_{Ic}(W_1) = K_{Ic}(W_2) \left( \frac{W_1}{W_2} \right)^\alpha$$

где

$\alpha$  - показатель степени, определяемый экспериментально на достаточном количестве экспериментальных данных. Показатель степени  $\alpha$  определяется по следующей процедуре [20].

$$\alpha = \frac{\left( \sum_{i=1}^n \ln K_{ci} \ln W_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^n W_i \sum_{i=1}^n K_{ci} \right)}{n} \right)}{\left( \sum_{i=1}^n \ln W_i \ln W_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^n \ln W_i \sum_{i=1}^n \ln W_i \right)}{n} \right)}$$

В качестве величины  $\alpha$  для алюминиевых сплавов может быть использован показатель степени R-кривой, построенной по стандартной методике (ОСТ1 92122-88).

### 3.3. Определение расчетных характеристик $K_{1c}$ и $K_c$

В качестве расчетных характеристик  $K_{1c}$  и  $K_c$  принимаются средние значения, в случае удовлетворения требований к объему и представительности экспериментальных данных и не превышения типичного значения рассеяния. Типичным значением рассеяния является коэффициент вариации  $\gamma = S_{\text{сум}} / K_c (K_{1c}) = 0,05$ . При превышении типичного значения рассеяния и (или) недостаточном объеме данных, расчетное значение характеристик  $K_{1c}$  и  $K_c$  определяется как среднее значение деленное на коэффициент  $k_{\Sigma}$ .

Величина коэффициента  $k_{\Sigma}$  определяется как

$$k_{\Sigma} = k_s * k_v$$

где

$k_s$  – запас на рассеяние

$k_v$  – запас на недостаточность объема данных.

Значения величин  $k_v$  в зависимости от числа испытанных полуфабрикатов сведены в таблицу 3.3.1.

Таблица 3.3.1.

Характеристика	Величина $k_V$ для числа испытанных полуфабрикатов		
	1	2	$\geq 3$
$K_{1c}$ и $K_c$	1,3	1,1	1

Значение поправочного коэффициента в зависимости от коэффициента вариации приведено в нижеследующей таблице [48].

Таблица 3.3.2.

$\gamma$	$\leq 0,05$	0,08	0,12	0,15	0,2	0,25	0,3	$> 0,3$
$k_S$	1	1,1	1,2	1,3	1,5	1,8	2,3	4,5

Для промежуточных точек принимается линейная интерполяция.

### 3.4. Определение $K_c$ при отсутствии экспериментальных данных

При определении величины  $K_c$  в области значений ширины образцов, выходящих за пределы экспериментальных значений, может быть проведена экстраполяция данных следующим образом (для испытаний с устранением выпучивания)

$$K_c = K_\delta \left( \frac{W}{W_\delta} \right)^{0.6} \quad \text{при } W < W_{\min}$$

$$K_c = K_\delta \left( \frac{W}{W_\delta} \right)^{0.3} \quad \text{при } W > W_{\max} \text{ и отсутствии выпучивания}$$

$$K_c = K_\delta \quad \text{при } W > W_{\max} \text{ и наличии выпучивания}$$

где

$K_\delta$  - базовое значение  $K_c$  соответствующее базовой ширине  $W_\delta$ , т.е. ширине образца, с которого производится пересчет (как правило, ширина наиболее близкая к рассчитываемой)

$W_{\min}$  ( $W_{\max}$ ) – минимальная, максимальная ширина образцов в эксперименте

$W$  – ширина образца, на которую проводится пересчет.

Для учета влияния выпучивания на величину  $K_c$  возможно использование следующего выражения

$$K_c^{(B)} = K_c (1 - 0,001 (2l/t)), \text{ где}$$

$K_c^{(B)}$  - вязкость разрушения при ограничении выпучивания ;

$K_c$  - вязкость разрушения без ограничения выпучивания;

$t$  - толщина листа,

$2l$  - длина трещины.

### 3.5. Алгоритм расчета параметров Периса, Формана, Коллиприста

#### 3.5.1. Ввод данных по образцу.

Расшифруем данный файл.

- ① *Количество образцов:2*
- ② *Тип образца (введите цифру) (ЦТ-1, БН1-2, БН2-3, ПО1-4, ПО2-5, WR-6):5*
- ③ *Нагрузка (дельта сигма):10*
- ④ *Асимметрия R:0,3*
- ⑤ *Ширина W (для полосы с отверстием ПО1 и ПО2 W,d):100 ; 2*
- ⑥ *Kс для данного образца:193,05*
- ⑦ *Kth для данного образца:7*
- ⑧ *Частота нагружения (Гц):5*
- ⑨ *Количество точек L-N:13*

*L(мм) N(цикл):*

3,1 0  
 3,2 66500  
 4,5 103000  
 5,6 115000  
 7,6 130000  
 8,15 133000  
 8,9 137000  
 9,6 141000  
 10,6 146200  
 11,6 149600  
 12,9 151900  
 13,9 157600  
 15 160600

⑩

*Тип образца (введите цифру) (ЦТ-1, БН1-2, БН2-3, ПО1-4, ПО2-5, WR-6):5*

*Нагрузка (дельта сигма):8*

*Асимметрия R:0*

*Ширина W (для полосы с отверстием ПО1 и ПО2 W,d):100 ; 2*

*Kс для данного образца:191,8*

*Kth для данного образца:7*

*Частота нагружения (Гц):5*

*Количество точек L-N:15*

*L(мм) N(цикл):*

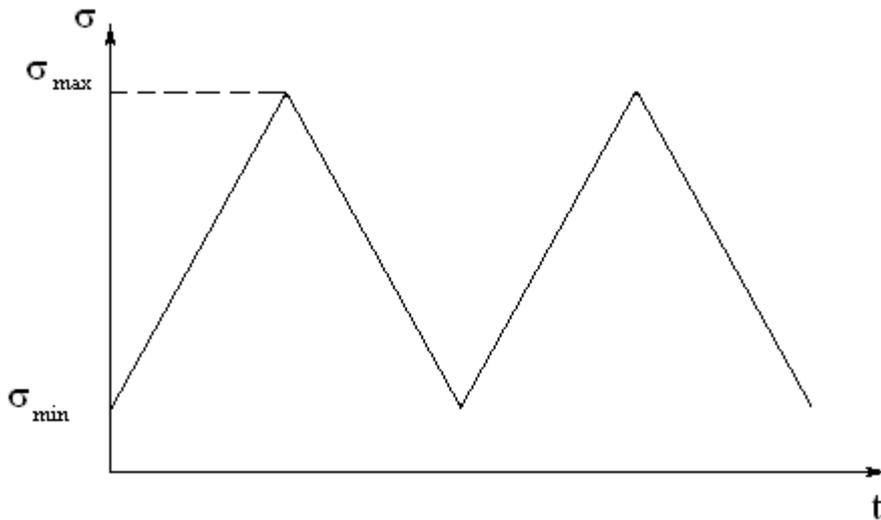
3,3 0  
 3,65 80700  
 4,1 101000  
 4,4 109700  
 5,5 129300  
 6,5 145500  
 7,2 157900  
 8,25 173000  
 9,95 189700  
 11 200100  
 14 221300  
 15,7 229000  
 20,9 248800  
 22,3 252300  
 24 255600

## Пункты

1. После двоеточия вводится количество образцов участвующих в анализе.
2. Данный пункт определяет, какой тип образца испытывался. Всего шесть типов образцов данная программа может проанализировать.

Это следующие образцы

- 2.1. ЦТ-образец с центральной трещиной (рис. 3.1).
  - 2.2. БН1-образец с одним боковым надрезом (рис. 3.2).
  - 2.3. БН2-образец с двумя боковыми надрезами (рис. 3.3).
  - 2.4. ПО1-полоса с отверстием с одним надрезом (рис. 3.4).
  - 2.5. ПО2-полоса с отверстием с двумя надрезами (рис. 3.5).
  - 2.6. WR-образец на внецентренное растяжение (рис. 3.6).
3. Нагрузка, прикладываемая к образцу. Для всех образцов, кроме образца на внецентренное растяжение нагрузка указывается в бруттовских напряжениях, то есть рассчитанная как отношение силы прикладываемой к образцу на сечение не ослабленное трещиной или отверстием. Для образца на внецентренное растяжение берется просто сила, прикладываемая к образцу.
  4. Асимметрия нагружения равна отношению минимальной нагрузки к максимальной  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ .



Примерный график нагружения образца в зависимости от времени.

5. В этом пункте указывается ширина образца и если это образец полоса с отверстием то и диаметр отверстия.
6. Указывается  $K_c$  для данного образца.  $K_c$ -критический коэффициент интенсивности напряжений при статическом нагружении.
7. Указывается  $K_{th}$  для данного образца.  $K_{th}$ -коэффициент интенсивности напряжений при котором начинается рост трещины. Для алюминиевых сплавов обычно берется равным  $7 \text{ кгс/мм}^{3/2}$  (но могут быть и другие значения).
8. Указывается частота нагружения образца.
9. Указывается количество точек для данного образца. Данные точки могут иметь вид  $L-N$  то есть длина трещины от количества циклов или  $dl/dN-\Delta K$  то есть скорость роста трещины от коэффициента интенсивности напряжений.
10. Вводятся сами данные по этому образцу.

*Если в исходном файле, приведенном выше, указаны данные вида  $L-N$ , то надо пересчитать эти данные и привести их к виду  $dl/dN-\Delta K$ .*

### 3.5.2 Расчет $dl/dN$ и $\Delta K$

Данный расчет проводится по следующей схеме, сначала рассчитывается скорость роста трещины по формуле

$$\frac{dl_i}{dN_i} = \frac{(l_i - l_{i-1}) * (N_{i+1} - N_i)}{(N_i - N_{i-1}) * (N_{i+1} - N_{i-1})} + \frac{(l_{i+1} - l_i) * (N_i - N_{i-1})}{(N_{i+1} - N_i) * (N_{i+1} - N_{i-1})}$$

где  $l_i$ -длина трещины,  $N_i$ -количество циклов, которые простоял образец пока не развилась трещина длиной  $l_i$ .

Как видно из формулы для расчета скорости роста трещины берутся три точки ( $l_{i-1}$ ,  $N_{i-1}$ ,  $l_i - N_i$  и  $l_{i+1} - N_{i+1}$ ) следовательно,  $\frac{dl_i}{dN_i}$ .-определяется, начиная со второй точки зависимости  $l(N)$  для образца и заканчивается на предпоследней, то есть в файле вида  $L-N$  будет на 2 точки больше чем в пересчитанном файле вида  $dl/dN-\Delta K$ .

Для расчета  $\Delta K$  в зависимости от вида образца применяются формулы приведенные в 3.1.1-3.1.6.

### 3.5.3. Расчет параметров уравнения Периса

Приступаем к расчету параметров уравнения Периса. Оно имеет следующий вид [15]

$$\frac{dl}{dN} = C_n \left( \frac{\Delta K}{(1-R)^p} \right)^{m_n}$$

где  $C_n$ ,  $m_n$ ,  $p$  – параметры уравнения, которые нужно определить

3.5.3.1. Определяем разницу в асимметриях между образцами. Если разница более 0,04 то параметр  $p$  нужно рассчитывать, если нет то значение  $p$  принимаем равным 0,5.

3.5.3.2. Теперь для каждого образца проводим выброс точек, не удовлетворяющие условию

$$\frac{K_c}{2} > \frac{\Delta K}{\sqrt{1-R}} > 2,5K_{th}$$

Данная сортировка нужна потому что уравнение Периса описывает эксперимент только в промежутке от  $2,5K_{th}$  до  $K_c/2$ .

### 3.5.3.3. Определяем «вес» каждого образца

$$Z_k = (K_{\max k} - K_{\min k}) / (2n_k - 1)$$

Где  $K_{\max k}$  - максимальное значение КИН для k-го образца,  $K_{\min k}$  - минимальное значение КИН для k-го образца,  $n_k$  - количество точек для k-го образца.

3.5.3.4. После того как точки были отсортированы для получения параметров уравнения, применим метод наименьших квадратов. Для данных с разными асимметриями уравнения расчетов параметров будут выглядеть следующим образом.

$$\frac{dl}{dN} = C_n \left( \frac{\Delta K}{(1-R)^p} \right)^{m_n} \text{ обозначим } q = mp, \text{ тогда уравнение можно переписать}$$

в следующем виде

$$\frac{dl}{dN} = C_n \Delta K^{m_n} (1-R)^{-q}$$

Для того чтобы привести данное уравнение к линейному виду прологарифмируем левую и правую часть уравнения и получим следующее выражение

$$\ln \left( \frac{dl}{dN} \right) = \ln(C_n) + m_n \ln(\Delta K) - q \ln(1-R) \text{ Пусть имеется функция}$$

$$S(\ln(C_n), m_n, p) = \sum_{i=1}^n \left( -\ln \left( \frac{dl}{dN} \right)_i + \lg(C_n) + m_n \ln(\Delta K_i) - q \ln(1-R_i) \right)^2$$

где n - общее количество точек по всем образцам, удовлетворяющих условию п.3.5.3.2.

Для того чтобы кривая была равноудалена от всех точек кривой, следует от данной функции взять частные производные по всем трем переменным и приравнять их к нулю и из полученной системы уравнений получить параметры.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \ln(C_n)} = 2 \sum_{i=1}^n \left( \ln(C_n) + m_n \ln(\Delta K_i) - q \ln(1 - R_i) - \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i \right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial m_n} = 2 \sum_{i=1}^n \ln(\Delta K_i) \left( \ln(C_n) + m_n \ln(\Delta K_i) - q \ln(1 - R_i) - \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i \right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial q} = 2 \sum_{i=1}^n \ln(1 - R_i) \left( \ln(C_n) + m_n \ln(\Delta K_i) - q \ln(1 - R_i) - \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \ln(C_n) + \sum_{i=1}^n (m_n \ln(\Delta K_i)) - \sum_{i=1}^n q \ln(1 - R_i) - \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i = 0 \\ \ln(C_n) \sum_{i=1}^n \ln(\Delta K_i) + \sum_{i=1}^n (m_n \ln^2(\Delta K_i)) - \sum_{i=1}^n q \ln(1 - R_i) \ln(\Delta K_i) - \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i \ln(\Delta K_i) = 0 \\ \ln(C_n) \sum_{i=1}^n \ln(1 - R_i) + \sum_{i=1}^n m_n \ln(\Delta K_i) \ln(1 - R_i) - \sum_{i=1}^n q \ln^2(1 - R_i) - \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i \ln(1 - R_i) = 0 \end{cases}$$

Уравнение имеет вид

$$\begin{cases} a_1 \ln(C_n) + a_2 m_n + a_3 q = f_1 \\ b_1 \ln(C_n) + b_2 m_n + b_3 q = f_2 \\ c_1 \ln(C_n) + c_2 m_n + c_3 q = f_3 \end{cases}$$

где учитывая веса каждого образца

$$\begin{aligned} a_1 &= n + \sum_{k=1}^j Z_k & b_1 &= a_2 \\ a_2 &= \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n \ln(\Delta K_i) Z_k & b_2 &= \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n \ln^2(\Delta K_i) Z_k \\ a_3 &= - \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n \ln(1 - R_i) Z_k & b_3 &= - \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n \ln(1 - R_i) \ln(\Delta K_i) Z_k \\ c_1 &= a_3 & f_1 &= \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i Z_k \\ c_2 &= b_3 & f_2 &= \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i \ln(\Delta K_i) Z_k \\ c_3 &= - \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n \ln^2(1 - R_i) Z_k & f_3 &= \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n \ln(1 - R_i) \ln\left(\frac{dl}{dN}\right)_i Z_k \end{aligned}$$

Используя метод Крамера определим корни данной системы уравнений [60].

$$\Delta = a_1 * b_2 * c_3 - a_1 * b_3 * c_2 + b_1 * c_2 * a_3 - b_1 * c_3 * a_2 + c_1 * a_2 * b_3 - c_1 * a_3 * b_2$$

$$\Delta_{\ln C} = f_1 * b_2 * c_3 - f_1 * b_3 * c_2 + b_1 * c_2 * f_3 - b_1 * c_3 * f_2 + c_1 * f_2 * b_3 - c_1 * f_3 * b_2$$

$$\Delta_m = a_1 * f_2 * c_3 - a_1 * f_3 * c_2 + f_1 * c_2 * a_3 - f_1 * c_3 * a_2 + c_1 * a_2 * f_3 - c_1 * a_3 * f_2$$

$$\Delta_q = a_1 * b_2 * f_3 - a_1 * b_3 * f_2 + b_1 * f_2 * a_3 - b_1 * f_3 * a_2 + f_1 * a_2 * b_3 - f_1 * a_3 * b_2$$

$$\text{Ln}(C_n) = \Delta_{\ln C} / \Delta \quad m_n = \Delta_m / \Delta \quad q = \Delta_q / \Delta \quad p = q/m$$

Теперь для получения более корректных параметров уравнения Периса нужно произвести статистическую отбраковку выбросов. Относительно полученной кривой. Для этого из всей выборки удовлетворяющей условию  $\frac{K_c}{2} > \frac{\Delta K}{\sqrt{1-R}} > 2,5K_h$  выбираем точку, которая максимально удалена от кривой и проверяем ее по следующему критерию.

$$K_{\max} = \left| \lg \left( \frac{dl}{dN} \right) - \lg(C_n) - m_n \lg \left( \frac{\Delta K}{(1-R)^p} \right) \right|$$

$$S_{\lg(dl/dN)} = \sqrt{\frac{\left( \sum_{i=1}^n \left( \lg \left( \frac{dl_i}{dN_i} \right) - \lg(C_n) - m_n \lg \left( \frac{\Delta K_i}{(1-R)^p} \right) \right)^2 \right)}{n-1}}$$

$$x = 1 - (1/40n)$$

$$t = \begin{cases} x \\ \text{если } x > 0,5, \text{ то } 1-x \end{cases}$$

$$t1 = \sqrt{-2 \ln(t)}$$

$$q1 = t1 - \frac{2,515517 + t1 \cdot (0,802853 + t1 \cdot 0,010328)}{1 + t1 \cdot (1,432788 + t1 \cdot (0,189269 + t1 \cdot 0,001308))}$$

$$q2 = \begin{cases} q1 \\ \text{если } x < 0,5, \text{ то } -q1 \end{cases}$$

$$q_3 = 2n - 5 + (q_2)^2 + \frac{(3 + (q_2)^2(1 + 2(q_2)^2))}{12n - 30}$$

$$q_{\text{antil}}(n) = q_2 \sqrt{\frac{2n - 2}{q_3}}$$

если количество точек меньше 9, то значение квантиля берется из таблицы 3.5.3.4.1.

Таблица 3.5.3.4.1.

n (кол-во точек)	qantil (n)
9	2,349
8	2,273
7	2,182
6	2,067
5	1,917
4	1,71
3	1,414
<3	2

$\frac{K_{\text{max}}}{S_{\text{lg } v}} > q_{\text{antil}}(n)$  если точка удовлетворяет данному условию, её следует

исключить из выборки и пересчитать параметры уравнения [9].

### 3.5.4. Расчет параметров Формана и Коллиприста через параметры Периса.

#### 3.5.4.1. Определение параметров Периса, по экспериментальных значениям.

Определение m и C.

$$\frac{dl}{dN} = C_n (\Delta K_{\text{эфф}})^{m_n}$$

$$V = dl/dN$$

$$R = 0$$

3.5.4.2. Предположим, что в двух точках значения СРТУ рассчитанное по Перису, Форману и Коллипристу совпадают. Возьмем следующие точки.

$$\lg(\Delta K_1) = \lg(2,5 \times K_{th}) + 0,25 \times \lg\left(\frac{K_c}{5 \times K_{th}}\right) \rightarrow \lg(V_1) = \lg(C_n) + m_n \times \lg(\Delta K_1)$$

$$\lg(\Delta K_2) = \lg(K_c / 2) - 0,25 \times \lg\left(\frac{K_c}{5 \times K_{th}}\right) \rightarrow \lg(V_2) = \lg(C_n) + m_n \times \lg(\Delta K_2)$$

3.5.4.3. Прологарифмируем уравнение Формана.

$$\lg(V) = \lg\left(C_\phi \frac{\Delta K^{m_\phi}}{(1-R)K_c - \Delta K}\right)$$

$$R=0$$

$$\lg(V) = \lg(C_\phi) + m_\phi \lg(\Delta K) - \lg(K_c - \Delta K)$$

$$\lg(V) = \lg(C_\phi) + m_\phi \lg(\Delta K) - \lg(K_c - \Delta K)$$

3.5.4.4. Подставим значения КИН и скорости роста трещины посчитанные через уравнение Периса в уравнение Формана и найдем параметры уравнения для данного уравнения.

$$\begin{cases} \lg(V_1) = \lg(C_\phi) + m_\phi \lg(\Delta K_1) - \lg(K_c - \Delta K_1) \\ \lg(V_2) = \lg(C_\phi) + m_\phi \lg(\Delta K_2) - \lg(K_c - \Delta K_2) \end{cases}$$

вычтем из одного уравнения другое и найдем параметр  $m_\phi$ .

$$\lg(V_1) - \lg(V_2) = m_\phi \times (\lg(\Delta K_1) - \lg(\Delta K_2)) - \lg(K_c - \Delta K_1) + \lg(K_c - \Delta K_2)$$

$$m_\phi = \frac{\lg(V_1) - \lg(V_2) + \lg(K_c - \Delta K_1) - \lg(K_c - \Delta K_2)}{(\lg(\Delta K_1) - \lg(\Delta K_2))}$$

С помощью полученного значения  $m_\phi$  получим  $C_\phi$ .

$$\lg(C_\phi) = \lg(V_1) - m_\phi \lg(\Delta K_1) + \lg(K_c - \Delta K_1)$$

$$C_\phi = 10^{(\lg(V_1) - m_\phi \lg(\Delta K_1) + \lg(K_c - \Delta K_1))}$$

3.5.4.5. Расчет параметров Коллиприста производится по той же схеме. Точки пересечения с кривой Периса берутся такие же, как и для расчета параметров уравнения Формана.

$$V = C_k \left[ \frac{\lg \Delta K - \lg K_{th}}{\lg K_c - \lg \Delta K} \right]^{m_k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = C_k \left[ \frac{\lg \Delta K_1 - \lg K_{th}}{\lg K_c - \lg \Delta K_1} \right]^{m_k} \rightarrow [1] = \left[ \frac{\lg \Delta K_1 - \lg K_{th}}{\lg K_c - \lg \Delta K_1} \right] \\ V_2 = C_k \left[ \frac{\lg \Delta K_2 - \lg K_{th}}{\lg K_c - \lg \Delta K_2} \right]^{m_k} \rightarrow [2] = \left[ \frac{\lg \Delta K_2 - \lg K_{th}}{\lg K_c - \lg \Delta K_2} \right] \end{array} \right.$$

Разделим первое уравнение на второе, прологарифмируем и выразим параметр  $m_k$ .

$$\frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{[1]}{[2]} \right)^{m_k}$$

$$m_k = \frac{\lg \left( \frac{V_1}{V_2} \right)}{\lg \left( \frac{[1]}{[2]} \right)}$$

С помощью полученного параметра  $m_k$  найдем параметр  $C_k$ .

$$C_k = \frac{V_1}{[1]^{m_k}}$$

### 3.5.5. Расчетные характеристики СРТУ.

В качестве расчетных характеристик СРТУ принимаются средние значения (средние параметры кинетической диаграммы разрушения КДР, т.е. зависимости  $dl/dN - \Delta K$ ) в случае удовлетворения требований к объему и представительности экспериментальных данных и не превышения типичного

значения рассеяния. Типичным значением СКО логарифмов СРТУ является  $S_{\lg(dl/dN)} = 0,1$ .

### 3.5.5.1. Запас на рассеяние.

При рассеянии СРТУ, превышающем типичное значение СКО, расчетное значение характеристики СРТУ (скорости роста трещины  $dl/dN$ ) определяется как среднее значение, умноженное на коэффициент  $k_S$ . Значение поправочного коэффициента в зависимости от СКО приведено в нижеследующей таблице.

$$S_{\lg(dl/dN)} = \sqrt{\frac{\left( \sum_{i=1}^n \left( \lg(\Delta K_i) - \lg(C_n) - m_n \lg\left( \frac{\Delta K}{(1-R)^p} \right) \right)^2 \right)}{n-1}}$$

Таблица 3.5.5.1.1.

$S_{\lg(dl/dN)}$	$\leq 0,1$	0,15	0,2	0,25	0,3
$k_S$	1	1,5	2,1	3,0	4,3

Для промежуточных точек принимается линейная интерполяция.

### 3.5.5.2. Запас на недостаточность объема экспериментальных данных $k_V$ .

Значения величин  $k_V$  в зависимости от числа испытанных полуфабрикатов сведены в таблицу 3.5.5.2.1.

Таблица 3.5.5.2.1.

Характеристика	Величина $k_V$ для числа испытанных полуфабрикатов		
	1	2	$\geq 3$
<b>СРТУ</b>	1,50	1,20	1,00

### 3.5.5.3. Запас на представительность испытаний $k_d$ .

В тех случаях когда экспериментальные точки  $dl/dN - \Delta K$  не охватывают весь диапазон значений  $\Delta K$  среднего прямолинейного участка КДР, вводится коэффициент запаса  $k_d$ , определяемый как:

$$k_d = 0,95 + \frac{\lg K_c - \lg K_{th} - 0,7}{20(\lg K_{\max} - \lg K_{\min})},$$

или согласно таблицы 3.5.5.3.1.

Таблица 3.5.5.3.1

$D_{\text{Э}}/D_{\text{П}}$	1	0,8	0,6	0,5	0,3	0,2	$\leq 0,1$
$k_d$	1	1,01	1,03	1,05	1,1	1,2	1,5

Где

$D_{\text{Э}} = \lg \Delta K_{\max} - \lg \Delta K_{\min}$  – экспериментальный диапазон  $\Delta K$

$D_{\text{П}} = \lg(K_c/2) - \lg(2,5K_{th})$  – диапазон линейного участка КДР

$\Delta K_{\min}$  и  $\Delta K_{\max}$  - минимальное и максимальное значение  $\Delta K$  по всей совокупности экспериментальных данных.

В случае отсутствия данных по  $K_c$  или (и)  $K_{th}$ , их для определения параметров СРТУ можно принимать согласно таблицы 3.5.5.3.2.

Таблица 3.5.5.3.2.

	Al-сплавы		Сталь		Титан
	Пластичные (типа В95пчТ2, Д16чТ)	Хрупкие (типа В95Т1)	высокопр очная	низкопроч ная	
$K_c$ , кгс/мм <sup>3/2</sup> (при ширине 750 мм)	400	300	600	400	500
$K_{th}$	7	7	14	14	14

#### 3.5.5.4. Обобщенный коэффициент запаса.

Обобщенный коэффициент запаса рассчитывается как произведение трех предыдущих коэффициентов

$$k_{\Sigma} = k_d k_v k_s$$

При невозможности или затруднении в определении  $k_{\Sigma}$  в случае недостаточности объема и представительности экспериментальных данных можно приближенно его принять как  $k_{\Sigma} = 2,5$  для характеристик СРТУ.

*Для получения расчетной кривой данный коэффициент умножается на параметр  $C$  для каждого уравнения.*

## ВЫВОДЫ

1. Создана база данных результатов испытания композиционных материалов, с встроенным статистическим анализом. Наличие общей базы данных по материалам с прикладным математическим обеспечением, позволяет производить контроль качества производства композиционных материалов, легкий и удобный способ доступа к результатам испытаний, получать объективную оценку расчетных значений характеристик прочности (базисных значений).
2. Проведен статистический анализ результатов испытаний образцов-свидетелей, испытанных на заводе изготовителе. При анализе результатов испытаний более 15000 образцов-свидетелей, с различными вариантами укладок, был получен важный результат, параметр формы распределения Вейбулла при небольшом разбросе имеет значение, равное 10.
3. Создана программа оценки параметров кинетических диаграмм разрушения. Проанализированы результаты испытаний на статическую трещиностойкость материалов АК6чТ1 (штамповка) и ВТ6ч (плита). Построены вероятностные кривые. Показана хорошая сходимость логнормального закона с экспериментальными данными в отличие от композиционных материалов хорошо описываемых распределением Вейбулла.
4. Дан теоретический расчет зависимости предела устойчивости пластического деформирования от относительного количества дефектов при различной остаточной деформации в материале ВТ-5, с применением статистических методик.
5. Результаты работы применены при рабочем проектировании в ОАО "Туполев" и составлении справочника ОАО "ОАК" широко используемого в отрасли.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Авиационные правила. Часть 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. 1994. стр. 100.
2. Абдуллин М.Р. "Статистическое обоснование прочности расчетных значений композиционных материалов" // Аэродинамика прочность конструкции летательных аппаратов. Труды всероссийской юбилейной научно-технической конференции, посвященной 70 - летию со дня основания СибНИА 2011 г. стр. 327-330
3. Абдуллин М.Р. Березин А.В. Прогнозирование базисных значений прочности металлических материалов по распределению микродефектов, образующихся в процессе пластической деформации //Проблемы машиностроения и автоматизации, 2006, №3, с. 40-44.
4. Батдорф С.Б., Будянский Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения. //Сб. переводов. Механика. - 1961. - №1.
5. Беран М. Применение статистических теорий. Сборник Механика композиционных материалов т.2 КМ с. 142-286.
6. Беран М. "Применение статистических теорий для определения тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов".
7. Березин А.В. Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. - М.: Наука, 1990.
8. Березин А.В. Деформирование дефектных материалов. //Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1982. - №6. - С. 124-130.
9. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. Москва "Наука" стр.60, 262.
- 10.Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. 1990 г. «Машиностроение».

- 11.Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.:Машиностроение, 1980. – 375 с.
- 12.Болотин В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композиционных материалов // Механика композиционных материалов. – 1984. - №2. – С.239-255.
- 13.Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теория надежности в расчетах сооружений. 1971.
- 14.Болотин В.В. Статистическая теория накопления повреждений в композиционных материалах и масштабный эффект надежности. //Механика полимеров. - 1976. - №2. - С. 247-255.
- 15.Брок Д. Основы механики разрушения /Д.Брок // М.: Высшая школа. - 1980
16. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов; Пер. с англ. Под ред. С.В. Серенсена. М.: Машиностроение, 1964.
- 17.Викарио А., Толанд Р. Критерий прочности и анализ разрушения конструкции из композиционных материалов // В кн. Композиционные материалы. – М.: Наука, 1978. – т.7. – С.62-107.
- 18.Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. - М.Высшая школа, 1966.
19. Гнеденко Б.В. «Курс теории вероятностей». Москва, изд. Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1988 г.
- 20.Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. Пер. с англ. - М.: Финансы и статистика, 1986 - 366 с.
21. Дудченко А.А. Прочность и проектирование элементов авиационных конструкций из композиционного материала. – М.: Издательство МАИ, 2007. 200с.
22. Зиновьев П.А., Тараканов А.И. О нелинейном деформировании слоистых композиционных материалов. // Применение пластмасс в машиностроении. М..МВТУ. 1978. с. 72-80.

23. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. - М.:Наука, 1974.
24. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. – М.: Мир, 1984. 624 с.
25. Композиционные материалы в конструкциях летательных аппаратов / Под ред. А.Л. Абибова М.: Машиностроение, 1975. – 272 с.
26. Когаев В.П. «Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени.» 1993 г. «Машиностроение».
27. Композиционные материалы. Т.2./Под ред. Л.Браутмана и Р.Крока//Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978..
28. Композиционные материалы. Т.3./Под ред. Л.Браутмана и Р.Крока//Применение композиционных материалов в технике – М.: Машиностроение, 1978 .
29. Композиционные материалы. Т.7./Под ред. Л.Браутмана и Р.Крока//Анализ и проектирование конструкций – М.: Машиностроение, 1978
30. Композиционные материалы. Т.8. Часть 2./Под ред. Л.Браутмана и Р.Крока//Анализ и проектирование конструкций (редактор тома К.Чамис). – М.: Машиностроение, 1978
31. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
32. Ключников В.Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория. – ПММ, 1959 г., т. 23, вып. 3, с. 722-731.
33. Ломакин В.А. «Статистические задачи механики твердых деформируемых тел.» «Наука». 1970 г.
34. Ломакин В.А. Проблемы механики структурно-неоднородных твердых деформируемых тел, Вестник МГУ, сер. матем. и мех., №2 (1970).
35. Ломакин В.А., Тунгускова З.Г., Статистические методы в механике полимеров ( состояние и перспективы), Мех. полим., №3 (1977).

36. Лурье С.А., Юсефи Шахрам. Об определении эффективных характеристик неоднородных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т.3. - №4. – С.76-92.
37. Лурье С.А., Дудченко А.А., Кадарман, Халим, Семернин А.В. О моделировании деградации механических характеристик композиционных материалов вследствие накопления повреждений /Сб. трудов конф. «Современные проблемы механики гетерогенных сред», Москва Изд-во РАН, 2005. Стр. 202-219.
38. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композиционных материалов. – Рига: Зинатне, 1980.
39. Мураками С. Радаев Ю.Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности. // Механика твердого тела. 1996. - № 4. - С.93-110.
40. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Москва "Мир" 1990.
41. Неупругие свойства композиционных материалов / Под ред. Тарнопольского Ю.М. – М.: Мир, 1978.
42. Овчинский А.С. Процессы разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1988.
43. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. - М.: Наука, 1974.
44. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: МГУ, 1984 – 336 с.
45. Прикладная механика композитов, Сборник статей / Под редакцией Тарнопольского М. – М.: Мир, 1989.
46. Прочность, ресурс и безопасность машин и конструкций. /Под ред. Махутова Н.А., Гаденина М.М. - М.: ИМАШ РАН, 2000.
47. Плювинаж Г. Механика упругопластического разрушения. / Пер. с франц. - М.: Мир, 1993. - 450 с.

48. Расчетные значения характеристик авиационных металлических конструкционных материалов. Авиационный справочник. вып. 4. ОАО "ОАК", ФГУП "ЦАГИ", 2012.
49. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – Москва, "Наука." 1979.
50. Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. -
51. Разрушение конструкций из композиционных материалов / Под ред. В.П. Тамужа и В.Д. Протасова. – Рига: Зинатне, 1986. – 264 с.
52. Рейфснейдер К. - В сб.: Прикладная механика композитов. Сер. Механика / Пер. с англ. - М.: Мир, 1989.
53. Розен Б.У., Дау Н.Ф. Механика разрушения волокнистых композитов// В кн. Разрушение. - Т.7. - Ч. 1. - М.: Мир, 1976.
54. Скудра А.М., Булавс Ф.Я. Прочность армированных пластиков. – М.: Химия, 1982. – 214 с.
55. Степнов М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. М. Машиностроение, 1985 г
56. Тетерс Г.А. Пластины и оболочки из полимерных и композитных материалов. Обзор // Механика полимеров. – 1977. - №4.
57. Хан Х. Цай С., Анализ разрушения композитов // В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов. М.: Мир, 1978
58. Чамис Л. Микромеханические теории прочности. / Разрушение и усталость. Под ред. Л.Браутмана. Т.5. - М.: Мир, 1983.
59. Чернышев С.Л. Новый этап применения композиционных материалов в авиастроении. Материалы конференции: "Живучесть конструкционных материалов". ИМАШ 2012
60. Шафаревич И.Р., Ремизов А. О. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Физматлит, 2009

61. Crossman F.W., Wang A.S.D. The dependence of transverse cracking and delamination of ply thickness in graphite-epoxy laminates. // *Damage in composite materials*. ASTM STP 775. – 1982.
62. *Composite materials handbook*. Volume 1. Polymer matrix composites guidelines for characterization of structural materials. MIL-HDBK-17.
63. Chaboche J.-L. Fracture mechanics and damage mechanics: complementary of approaches. *Numer. Meth. Fract. Mech. Proc.* 4<sup>th</sup> Int. Conf. San Antonio, Tex., 23-27 March., 1987, Swansea, 1987,
64. Hahn H.T. On approximation for strength of random fiber composites. // *J. Composite Materials*. - 1975. - V.9.
65. Lauraitis K.N. Fatigue of fibrous composite materials. ASTM STP 723. – 1981.
66. Lurie S.A. On the entropy damage accumulation model of composite materials// *Proc. Of workshop on computer synthesis or structure and properties of advanced composites – Russia – US, 1994. – Inst. of Appl Mech – p.6-18.*
67. Mori T.K. Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Inclusion. *Acta Metallurg*, 1973, T. 21, pp 571-574.
68. Myra T. *Micromechanics of Defects in Solid*. Martinus, 1982.
69. Maria Kashtalyan and Costas Soutis. A Analysis of local delamination in composite laminates with angel-ply matrix cracks. // *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002).
70. Murakami S. Mechanical modeling of material damage// *J. Applied Mechanics*. - 1988. - V.55.
71. Reifsnider K.L. Fatigue behavior of composite materials//*International journal of fracture*. – vol. 16. – №6. – 1980.
72. Wevers M., Verpoest I. And De Meester P. Identification of Fatigue Failure Modes in Carbon Fibre Reinforced Composites// *Non-Destruct. Testing. Proc. 12<sup>th</sup> World Conference, April 23-28, 1989, Amsterdam. Printed in Netherlands*. - V.1.

73. Yang J.N., Yang S.N., Jones D.L. «A Stiffness-Based Statistical Model for Predicting Fatigue Life of graphite/Epoxy Laminated», in Probabilistic Methods in Civil Engineering, P.D. Spano, ed., pp. 120-123, Proc. Of 5<sup>th</sup> ASCE Speciality Conference, May 25-27, 1988 Blacksburg, VA; Journal of Composite Technology and Research, ASTM, (Winter 1989).