



ВАСЬКОВА ВАРВАРА СЕРГЕЕВНА

**ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ ПРИ ДВИЖЕНИИ
ВДОЛЬ ЛЕЕРНОЙ СВЯЗИ**

Специальность 1.1.7.
Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре «Мехатроника и теоретическая механика» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

**Научный
руководитель:**

Родников Александр Владимирович, д.ф.-м.н.,
доцент, профессор кафедры «Мехатроника и теоре-
тическая механика» МАИ

**Официальные
оппоненты:**

Шатина Альбина Викторовна, д.ф.-м.н., доцент,
зав. кафедрой высшей математики РТУ
МИРЭА

Никонов Василий Иванович, к.ф.-м.н., доцент, веду-
щий научный сотрудник федерального исследовательского
центра «Информатика и управление» РАН

**Ведущая
организация:**

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Самарский националь-
ный исследовательский университет имени академика С.П.
Королева» (Самарский университет)

Защита состоится «22» мая 2026 года в 10 ч. 00 мин. на заседании диссер-
тационного совета 24.2.327.08 Московского авиационного института по адресу:
125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Москов-
ского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80,
ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке:
https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=187262

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по
адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет
МАИ

Ученый секретарь диссертационного
совета 24.2.327.08, д.ф.-м.н., с.н.с.



Гидасов
Владимир Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Изучение динамики орбитального и относительного движения космической системы представляет не только теоретический, но и практический интерес для планирования будущих миссий в межпланетном пространстве. Энергонезависимость относительных перемещений элементов такой системы может быть достигнута посредством использования космических аппаратов (КА) с различными типами движителей. Один из сценариев подобной транспортировки грузов предполагает исследование динамики полета КА, оснащенного солнечным парусом (СП) и способного курсировать вдоль троса, закрепленного на двух гелиоцентрических станциях, описывающих одну круговую орбиту. Управляя СП, можно создавать движущую силу, исключаящую затраты топливных ресурсов. Сложность организации движения состоит в том, что возникающее ускорение не может быть направлено в сторону Солнца, то есть без некоторого дополнительного ограничения невозможно осуществлять перемещение в заданном направлении. Для решения этой проблемы достаточно использовать трос, длина которого превышает расстояние между станциями, реализующий ограничение, которое описывается математической моделью, называемой леерной связью.

Концепции солнечного паруса и космической тросовой системы впервые появились благодаря Цандеру Ф.А. и Циолковскому К.Э. Их идеи получили развитие в различных работах, посвященных моделированию, управлению и стабилизации движений космических объектов. В частности, многочисленные исследования авторов (например, Поляхова Е.Н., Старина О.Л., Овчинников М.Ю., Шмыров А.С., Шиманчук Д.В., Чумаченко Е.Н., Федоренко А.Н., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н., Полуэктов Р.М., McInnes C.R., Wright J.L., Macdonald M., Vulpetti G., Farres A., Heiligers J.) и успешные эксперименты по эксплуатации солнечных парусов показали функциональность и эффективность данного типа движителя для межпланетных перелетов, для коррекции орбит и для стабилизации характерных движений КА. Существенный вклад в разработку космических тросовых систем внесли известные ученые (например, Арцутанов Ю.Н., Буров А.А., Косенко И.И., Асланов В.С., Садов Ю.А., Cosmo M.L., Lorenzini E.C., Misra A.K.), в том числе в монографиях Белецкого В.В., Левина Е.М., Иванова В.А., Ситарского Ю.С описываются модели разворачивания тросов, разработки космического лифта, способы обеспечения орбитальной устойчивости, управления движением космических тел, удаления космического мусора.

В некоторых научных статьях изложен синергетический подход, где трос используется для стабилизации или разворачивания солнечных парусов, либо для создания крупномасштабных космических структур. На данный момент объединение этих направлений еще не приобрело широкое распространение, однако первые шаги в сторону такой организации движения были сделаны российскими и китайскими исследователями Родниковым А.В., Gao Y.L., Wu J.L.

Для решения задачи оптимизации расхода топливных ресурсов при относительном движении КА необходимо изобретение новых методов перелета между двумя искусственными космическими объектами. В рамках данной диссертационной работы основными средствами достижения цели служат коррек-

ция положения солнечного паруса относительно солнечных лучей и использование ограничения в виде троса. При движении с постоянно ориентированным или с управляемым солнечным парусом космический аппарат может осуществлять перелет между двумя точками леерной связи разными способами. Решение подобного рода задач основано на применении методов классической и небесной механики. Предложенная конструкция обладает принципиальной новизной.

Объектом исследования являются система управления движением КА, а также алгоритмы и способы осуществления перемещения между искусственными космическими объектами. **Предметом исследования** является динамика полета космического аппарата с солнечным парусом вдоль леерной связи.

В работе поставлены следующие **цели**. Для космического аппарата с солнечным парусом, перемещающегося вдоль троса, соединяющего две тяжелые космические станции,

- 1) исследовать силы, влияющие на относительное движение и динамику полета;
- 2) получить необходимые и достаточные условия существования связного движения;
- 3) разработать методы и алгоритмы исследования динамики полета;
- 4) реализовать разработанные алгоритмы.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие **задачи**.

I. Для космического аппарата с солнечным парусом, осуществляющего перемещение вдоль троса между тяжелыми космическими станциями,

- 1) *построить* математические модели солнечного паруса и леерной связи;
- 2) *проанализировать* динамику полета космического аппарата в модельной задаче и оценить действующие силы;
- 3) *записать* уравнения движения и интеграл энергии в общем виде.

II. Для космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом, осуществляющего перемещение между произвольными точками леерной связи,

- 4) *получить* необходимые и достаточные условия существования связного движения;

- 5) *построить* множество пар точек на эллипсе, ограничивающем связное движение, между которыми возможен перелет с неизменно направленной нормалью к солнечному парусу при нулевых начальной и конечной скоростях;

III. Для космического аппарата с управляемым солнечным парусом, перемещающегося между произвольными точками леерной связи,

- 6) *вычислить* оптимальный угол наклона солнечного паруса, необходимый для создания максимального ускорения КА в каждой точке траектории;

- 7) *представить* методику вычисления точки, разделяющей участки ускорения и торможения, или точки переключения ускорения, при движении с нулевыми начальной и конечной скоростями;

IV. Для приведенных способов управления солнечным парусом

- 8) *разработать* методы и алгоритмы вычисления динамических характе-

ристик перелета космического аппарата;

9) *реализовать* разработанные методы и алгоритмы в виде программного комплекса, привести примеры работы компьютерного приложения.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются аналитические методы классической и небесной механики, а также численные методы интегрирования. В частности, метод деления отрезка пополам и метод Симпсона. При разработке алгоритмов для проведения вычислительных экспериментов применялись современные системы компьютерной математики Maple и Matlab.

Достоверность результатов обеспечивается корректным использованием методов классической и небесной механики. Подтверждение полученных теоретических результатов происходит путем сравнения численных и аналитических решений.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов состоит в разработке новых энергонезависимых способов перемещения КА с солнечным парусом вдоль троса между космическими объектами, вращающимися по одной круговой гелиоцентрической орбите. Для постоянно ориентированного солнечного паруса выведены условия существования связного движения, доказана возможность перемещения с натянутым тросом между двумя точками границы леерной связи и найдено множество пар таких точек. Для управляемого солнечного паруса рассчитан угол наклона нормали относительно солнечных лучей, позволяющий создавать максимальное ускорение в каждый момент времени, и определена точка переключения направления касательного ускорения. В рамках представленной космической тросовой системы при различных законах управления солнечным парусом получены уравнения движения и описаны методы исследования динамических характеристик перелета космического аппарата.

Практическая ценность исследования связана с возможностью применения методов управления солнечным парусом для организации бестопливного перемещения космического судна. В частности, решены задачи о движении космического аппарата с постоянно ориентированным и управляемым солнечным парусом между произвольными точкам леерной связи. Разработаны соответствующие алгоритмы исследования динамики относительного движения, внедрение которых позволит оценивать и проводить дальнейшее проектирование транспортных миссий в космическом пространстве.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих заседаниях: XLVIII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2022 г.); международные научные конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2022, 2023, 2024 гг.); Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства «Королевские чтения» (Москва, 2023, 2024 гг.); Международная научная конференция «Регулярная и хаотическая динамика» (Адлер, 2023 г.); X Международная научная конференция по механике «Поляховские чтения» (Санкт Петербург, 2024 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 работах, из которых 2 статьи входят в периодические издания, индексируемые в международных базах цитирования **Web of Science** или **Scopus** [1, 2], 3 статьи опубликованы в научных журналах из перечня ВАК [3–5], 8 тезисов докладов нашли место в материалах конференций [6–13]. Получено государственное свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [14].

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки работы, задавались научным руководителем. Соискателем проведены теоретические исследования, вычислительные эксперименты и анализ полученных данных. В частности, для космического аппарата с солнечным парусом выведены условия связного движения, разработаны способы и методы перемещения между произвольными точками леерной связи, найдены основные динамические характеристики перелета с учетом ограничивающего воздействие троса, закрепленного на космических станциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, 3 главы, заключение, список используемой литературы и приложения. Работа состоит из 96 страниц, включая 29 рисунков и 6 таблиц. В списке литературы указано 118 наименований.

Обозначения

В работе используются следующие понятия и обозначения.

1. КА – космический аппарат.

- m – масса КА.
- \mathbf{r} – радиус-вектор положения КА.
- \mathbf{v} – относительная скорость КА.
- \mathbf{w} – ускорение КА.
- ω – угловая скорость вращения КА.
- R – актуальное расстояние КА до Солнца.

2. СП – солнечный парус.

- \mathbf{F} – сила солнечной радиации.
- S – площадь СП.
- k – коэффициент отражения СП.
- \mathbf{n} – нормаль СП.
- α – угол наклона нормали СП по отношению к направлению солнечных лучей.
- α_{opt} – оптимальным углом наклона СП.

- γ – угол между вектором силы солнечной радиации и направлением солнечных лучей.
- $F(\gamma)$ – базовая калибровочная характеристика.
- F_τ – проекция силы солнечной радиации на касательную к траектории движения.
- δ – угол между касательной к траектории движения и направлением солнечных лучей.
- $F_\tau(\delta)$ – производная калибровочная характеристика.

3. Леерная связь – геометрическое ограничение, являющееся элементом математической модели космической тросовой системы, состоящей из идеальной нити, закрепленной на двух твердых телах, вдоль которой может перемещаться материальная точка.

Общепринятые обозначения для эллипса, описывающего траекторию движения КА: e – эксцентриситет, a – большая полуось, b – малая полуось, s – натуральный параметр.

- ν – внешняя нормаль к траектории.
- ψ – эксцентрическая аномалия точки эллипса, определяемого связью.
- β – угол между ветвями троса.
- F_i , $i = 1, 2$ – фокусы эллипса (космические станции).
- V_i , $i = 1, 2$ – вершины эллипса (наиболее удаленные точки леерной связи).
- A_i , $i = 1, 2$ – начальная и конечная точки перемещения.
- A – точка, где сила солнечной радиации должна быть сонаправлена с внешней нормалью к эллипсу, чтобы при постоянно ориентированном СП происходили маятниковые колебания вдоль леерной связи.
- B – точка переключения ускорения.

4. Динамические характеристики – параметры, отображающие силы и энергетические аспекты движения.

- λ – множитель Лагранжа.
- F_c – сила Кориолиса.
- F_e^n – переносная сила инерции.
- F_g – сила гравитационного притяжения Солнца.
- T – сила натяжения троса.
- t – время перелета.

Содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность исследования, осуществляемого в рамках работы, приводится обзор существующих результатов по теме исследования, формулируются задачи, решаемые в процессе достижения цели работы, описываются научная новизна и практическая значимость, излагается содержание глав диссертации.

В первой главе формулируется постановка модельной задачи о движении космического аппарата с солнечным парусом вдоль леерной связи между тяжелыми космическими станциями, расположенными на одной гелиоцентрической орбите. Для описания динамики вводятся безразмерные математические модели силы солнечной радиации

$$\mathbf{F} = \frac{2}{1+k} \left(kn_x^2 \mathbf{n} + \frac{1-k}{2} n_x \mathbf{e}_x \right), \quad 0 \leq k \leq 1, \quad (1.1)$$

учитывающие полное и частичное поглощение излучения, максимальное значение которой равно единице, и ограничения, накладываемого космической трассой системой

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, \quad (1.2)$$

где x, y, z – координаты КА в орбитальной системе отсчета $Oxyz$, причем оси Ox и Oy направлены по солнечным лучам и в сторону движения станций соответственно, \mathbf{e}_x – единичный вектор оси Ox .

Использование леерной связи помогает осуществлять перелет внутри и на границе некоторого эллипсоида вращения с фокусами в точках закрепления трасса. В частности, рассматривается перемещение в плоскости орбиты космических станций Oxy . Если нормаль солнечного паруса $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ параллельна этой плоскости, то существует интегральное многообразие движений $z = 0$.

Для упрощения вычислений вводятся понятия базовой и производной калибровочных характеристик, физический смысл которых заключается в идентификации силы, создающей поток солнечной радиации при воздействии на СП, и в отражении возможностей СП для создания ускорения при движении вдоль заданной траектории.

Базовой калибровочной характеристикой

$$F(\gamma) = \frac{1}{(1+k)\sqrt{k}} \sqrt{L \left(L + \frac{1}{2} (1-k)^2 \right)}, \quad (1.3)$$

где $L = k + \sqrt{k^2 - \sin^2 \gamma} \cos \gamma - \sin^2 \gamma$,

называется зависимость величины силы солнечной радиации от угла, который вектор этой силы составляет с направлением солнечных лучей.

Производной калибровочной характеристикой

$$F_\tau(\delta) = \begin{cases} \max_{\gamma} (F(\gamma) \cos(\delta - \gamma)), & 0 \leq \delta \leq \delta_{max} \\ 0, & \delta_{max} < \delta < \pi \end{cases} \quad (1.4)$$

является зависимость максимума проекции силы солнечной радиации на заданное направление от угла между этим направлением и линией действия солнечных лучей.

При помощи необходимого условия существования экстремума проекции силы солнечной радиации на касательную к эллипсу записывается кубическое относительно $\operatorname{tg} \alpha$ уравнение

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{4k}{1-k} \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{5k+1}{1-k} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2k}{1-k} \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1-e^2}} = 0, \quad (1.5)$$

одним из корней которого является $\operatorname{tg} \alpha_{opt}$, позволяющий найти оптимальный угол наклона СП, создающий максимальное тангенциальное ускорение в каждой точке траектории

$$\begin{aligned} \text{при } 0 \leq \psi \leq \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-e^2}}{k}, \quad -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \leq \alpha_{opt} \leq 0, \\ \text{при } \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-e^2}}{k} \leq \psi \leq \pi, \quad \alpha_{opt} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Для идеального СП уравнение (1.5) преобразуется в квадратное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{3\sqrt{1-e^2} \operatorname{ctg} \psi}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} = 0, \quad (1.6)$$

где оптимальный угол наклона СП

$$\text{при } \psi = 0, \quad \alpha_{opt} = 0,$$

$$\text{при } 0 < \psi < \pi, \quad \alpha_{opt} = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{1-e^2} \cos \psi - \sqrt{9(1-e^2) \cos^2 \psi + 8 \sin^2 \psi}}{4 \sin \psi},$$

$$\text{при } \psi = \pi, \quad \alpha_{opt} = -\frac{\pi}{2}.$$

Анализируется динамика полета КА с СП вдоль леерной связи (рис. 1).

В качестве примера изучается движение КА массы $m = 100$ кг с СП площадью $S = 1000$ м², перемещающегося с относительной скоростью v по эллиптической траектории с эксцентриситетом $e = 0,9$ вдоль троса длины $2a = 2$ км, концы которого закреплены на космических станциях F_1, F_2 , вращающихся с угловой скоростью $\omega = 2\pi/T_0 \approx 2 \cdot 10^{-7}$ рад/с, где $T_0 \approx 365 \cdot 24 \cdot 3600$ с – период вращения по круговой орбите. По теореме об изменении кинетической энергии при силе солнечной радиации, параллельной солнечным лучам, скорость КА в актуальной точке оценивается как

$$v = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}}, \quad (1.7)$$

где Δx - изменение координаты по оси Ox при нулевой начальной скорости.

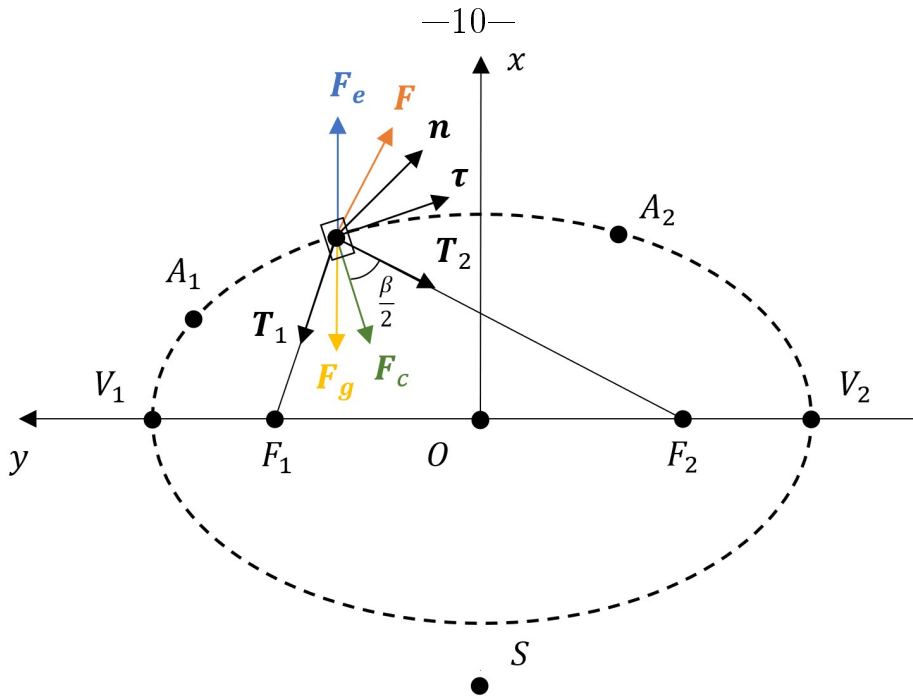


Рис. 1. Динамика полета КА с СП

Для наиболее удаленной от Солнца вершины эллипса, принадлежащей малой оси, приводятся приблизительные вычисления:

1. силы солнечной радиации

$$F = PS = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Н};$$

2. силы натяжения троса

$$T = \frac{1}{2 \cos \frac{\beta}{2}} \left(\frac{mv^2}{\rho} + F \right) \approx 1,42 \cdot 10^{-2} \text{ Н}; \quad (1.8)$$

3. силы Кориолиса

$$F_c = 2m\omega \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}} < 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ Н}; \quad (1.9)$$

4. силы гравитационного притяжения Солнца

$$F_g = \frac{m\omega^2 R^3}{(x + R)^2}; \quad (1.10)$$

5. переносной силы инерции

$$F_e^n = m\omega^2(x + R). \quad (1.11)$$

За характерную величину солнечного давления принимается $P = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$ на расстоянии $R_0 = 1 \text{ а.е.}$ от Солнца.

Если станции оказываются разнесены между собой на несколько километров при парусности, сопоставимой с реализованными миссиями, то макси-

мально возможная величина солнечной радиации превышает на 6-7 порядков абсолютное значение разности гравитационного притяжения Солнца и переносной силы инерции. В дальнейшем при решении задач учитываются только силы солнечной радиации и Кориолиса.

В рассматриваемой ситуации сила Кориолиса лежит в плоскости эллиптической орбиты, перпендикулярна относительной скорости и не влияет на движение по траектории, заданной геометрическим ограничением – леерной связью. При малых относительных скоростях ускорение Кориолиса может превышать центроостремительное, поэтому возникает необходимость компенсировать соответствующую силу и обеспечить ненулевое натяжение троса в начале и в конце движения. Результат может быть достигнут, если располагать нормаль СП относительно внутренней нормали к траектории в течение короткого промежутка времени под углом $3\pi/4$. При скорости порядка не более нескольких метров в секунду натяжение троса в основном определяется центроостремительным ускорением КА, так как сила Кориолиса оказывается на 2-3 порядка меньше, чем переносная сила инерции.

Вводятся зависимости, позволяющие пересчитать безразмерные величины силы солнечной радиации, положения КА на границе эллипса, времени перелета между точками леерной связи, в традиционные единицы измерения

$$F^* = \frac{1+k}{2} PS \frac{R_0^2}{R^2} F, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{r}^* = a\mathbf{r}, \quad (1.13)$$

$$t^* = t \sqrt{\frac{ma}{F_{max}}}, \quad (1.14)$$

где F_{max} – максимально возможная сила солнечной радиации, действующая на СП в рамках математической модели, определяемой равенством

$$F_{max} = \frac{1+k}{2} PS \frac{R_0^2}{R^2}, \quad R_0 \approx 1 \text{ а.е.}$$

С учетом предположений выписываются общие уравнения движения КА в безразной форме

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{2}{1+k} (k\mathbf{n}_x^2 \mathbf{n} + \frac{1-k}{2} \mathbf{n}_x \mathbf{e}_x) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \quad \lambda \leq 0. \quad (1.15)$$

Если направление нормали СП \mathbf{n} определяется только радиус-вектором \mathbf{r} , то уравнения движения (1.15) допускают интеграл энергии

$$\frac{1}{2} (1 - e^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2 - \int_{\psi_1}^{\psi} (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi = h, \quad (1.16)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории в точке с эксцентрической аномалией ψ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. При нулевой начальной скорости в точке V_1 и неизменно ориентированном СП, когда нормаль $\mathbf{n} = (1, 0)^T$, уравнения движения и интеграл энергии упрощаются до

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(1 + \lambda \frac{2x}{1 - e^2}, 2\lambda y \right)^T, \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2 = \sqrt{1 - e^2} \sin \psi + h, \quad h = 0. \quad (1.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В общем виде для движения КА между наиболее удаленными точками леерной связи с учетом управления, предполагающего коррекцию положения СП, вместо интеграла Якоби может быть записана теорема об изменении кинетической энергии.

Во второй главе решается задача о движении КА с постоянно ориентированным СП между произвольными точками леерной связи. При сохранении неизменным положения СП относительно солнечных лучей возникают маятниковые колебания. Как среднее арифметическое эксцентрисических аномалий начального и конечного положений КА на эллипсе

$$\psi(A) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$$

вычисляются координаты некоторой точки A , определяющей условие нахождения на связи. В виде следующих теорем формулируются и доказываются необходимые и достаточные условия существования связного движения.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для того, чтобы движение между A_i , $i = 1, 2$ происходило без схода со связи, достаточно выполнения условий*

$$(\boldsymbol{\nu}(A), \boldsymbol{\nu}_i) > 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Доказательство. Внешняя нормаль к траектории $\boldsymbol{\nu}(A)$ сонаправлена с силой солнечной радиации \mathbf{F} , при этом касательная параллельна прямой A_1A_2 .

При перемещении вдоль леерной связи по часовой стрелке между точками A и симметричной ей относительно центра O функция $g = (\boldsymbol{\nu}(A), \boldsymbol{\nu})$ сначала монотонно убывает, а затем монотонно возрастает, принимая значения от 1 до -1 . Функция g обращается в нуль ровно в двух точках эллипса, симметричных относительно центра O .

Если $g_i = (\boldsymbol{\nu}(A), \boldsymbol{\nu}_i) > 0$, $i = 1, 2$, тогда на дугах AA_i , составляющих меньше половины эллипса, функция g может менять знак не более одного раза. В точках A и A_i всегда $g > 0$, поэтому знак не меняется ни на одной из дуг.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Для идеального СП нормаль к нему совпадает с внешней нормалью к траектории в точке A , и достаточное условие существования движения вдоль леерной связи можно переписать как*

$$(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}_i) > 0, \quad i = 1, 2.$$

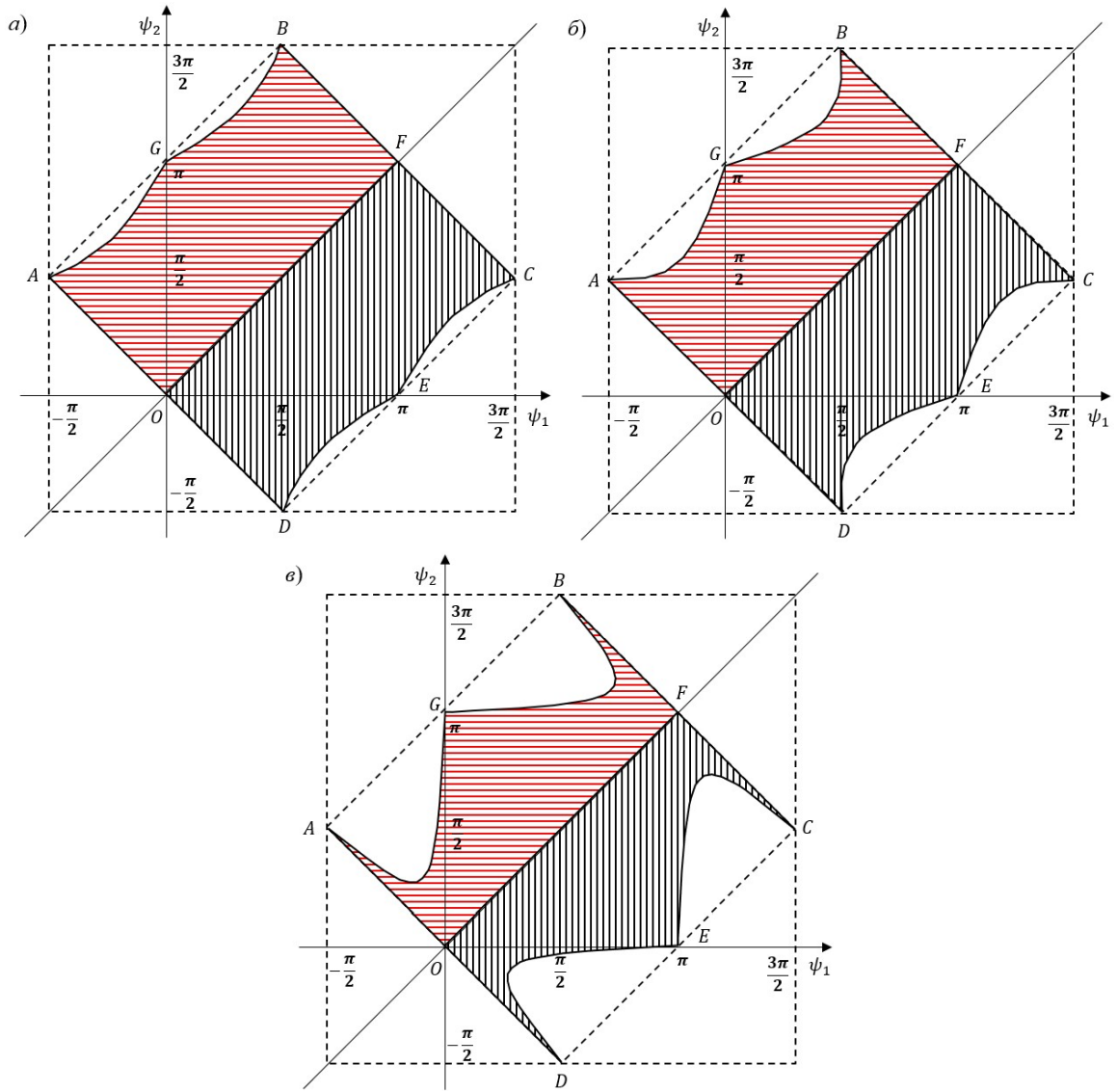


Рис. 2. Множество пар точек при а) $0 < e < \frac{1}{\sqrt{2}}$, б) $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, в) $\frac{1}{\sqrt{2}} < e < 1$

ТЕОРЕМА 2.2. *Неравенства*

$$(\nu(A), \nu_i) \geq 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.2}$$

являются необходимыми условиями связного движения между $A_i, i = 1, 2$.

Доказательство. Согласно вычислениям из главы 1 на КА с СП действуют силы солнечной радиации \mathbf{F} и натяжения троса \mathbf{T} , первая из которых сонаправлена, а вторая соответственно противоположно ориентирована внешней нормали к эллипсу $\nu(A)$. Если в точках $A_i, i = 1, 2$ скорость КА определяется как $v_i = 0, i = 1, 2$, а сумма проекций сил на направление внешней нормали к траектории $\nu_i, i = 1, 2$ будет равна нулю, то

$$(\mathbf{F}, \nu_i) + (\mathbf{T}, \nu_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Движение считается связным, в результате чего сила натяжения троса \mathbf{T} оказывается противоположна внешней нормали к эллипсу, в крайнем случае равна

нулю

$$(\mathbf{T}, \boldsymbol{\nu}_i) = -|\mathbf{T}| \leq 0, \quad i = 1, 2.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для идеального СП необходимое условие существования движения вдоль леерной связи примет вид

$$(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}_i) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Получено множество пар точек, между которыми возможно перемещение с натянутым тросом (рис. 2). Представлены случаи при различных эксцентриситетах эллипса и записаны условия существования связного движения в общем виде для КА с СП

$$e^2 \cos \psi_i (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) + \sin (\psi_1 - \psi_2) > 0, \quad i = 1, 2.$$

Для движения КА с постоянно ориентированным СП между произвольными точками леерной связи вычисляются динамические характеристики:

1. Относительная скорость в произвольной точке эллипса определяется по формуле (1.7). Если расстояние Δx между прямой A_1A_2 и актуальным положением КА равно

$$\Delta x_{max} = \frac{2\sqrt{1-e^2} \sin^2 \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{4} \right)}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi(A)}},$$

то скорость принимает максимальное значение

$$v_{max} = 2\sqrt{F} \frac{\sqrt[4]{1-e^2} \left| \sin \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{4} \right) \right|}{\sqrt[4]{1-e^2 \cos^2 \psi(A)}}.$$

2. Сила натяжения троса определяется согласно выражению (1.8) и может быть переписана как

$$T = \frac{F}{2 \cos \frac{\beta}{2}} \left(\frac{2\Delta x}{\rho} + (\boldsymbol{\nu}(A), \boldsymbol{\nu}) \right),$$

где

$$\rho = \frac{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}. \quad (2.3)$$

3. Время перелета выражается квадратурой

$$t = \frac{\sqrt[4]{1 - e^2 \cos^2 \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right)}}{2\sqrt{F} \sqrt[4]{1 - e^2}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{\sin \left(\frac{\psi - \psi_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\psi_2 - \psi}{2} \right)}} d\psi, \quad (2.4)$$

где несобственный интеграл находится численными методами.

В качестве примера рассматривается перемещение КА между наиболее удаленными точками леерной связи. При нулевых начальных и конечных скоростях находится зависимость между временем перелета с идеальным и неидеальным СП

$$t(k) = t\sqrt{\frac{2}{1+k}},$$

где

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-e^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 \psi}{\sin \psi}} d\psi$$

соответствует движению с идеальным СП.

В безразмерных единицах измерения минимальное значение времени перелета $t_{min} = 3.5575$ достигается при эксцентриситете $e_{min} = 0.7906$, когда отношение полуосей $b/a = 0.3066$ (рис. 3).

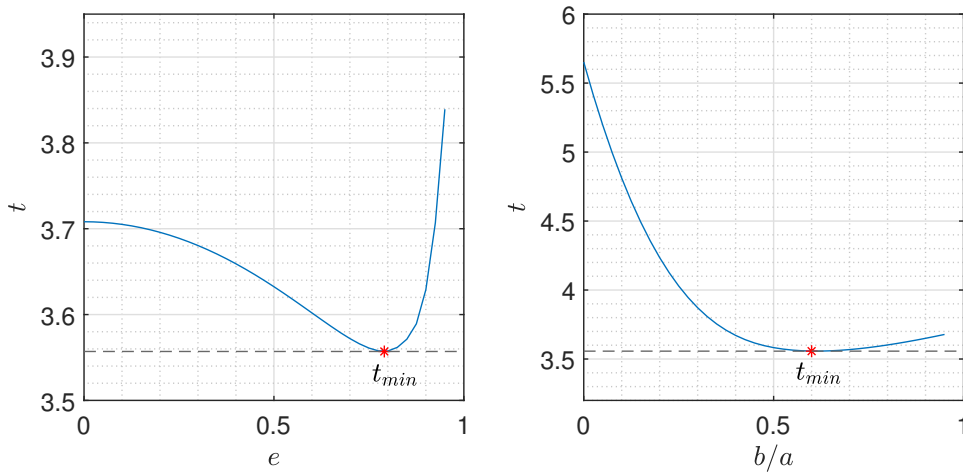


Рис. 3. Зависимость времени перелета t от эксцентриситета e и отношения полуосей b/a при нулевой начальной и конечной скоростях

Разработан алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом.

АЛГОРИТМ 2.1.

1. Проверить, что $0 \leq \gamma \leq \gamma_{max}$, где $\gamma_{max} = \frac{\pi}{2}$ – для идеального СП, $\gamma_{max} = \arcsin k$ – для неидеального СП. Если неравенство не выполнено, то завершить алгоритм и объявить введенный угол γ слишком большим.
2. Найти значение базовой калибровочной характеристики $F(\gamma)$ и определить величину силы солнечной радиации F .
3. Удостовериться, что выполняется условие нахождения на связи (2.1). Если неравенство не выполнено, то завершить алгоритм и вывести предупреждение о невозможности связного перемещения между выбранными точками.

4. Вычислить массив касательных ускорений $w_\tau[j]$.
5. Записать теорему об изменении кинетической энергии (1.18).
6. Определить массивы скоростей $v[j]$ и сил натяжения троса $T[j]$.
7. Рассчитать продолжительность перемещения t .
8. Для реальных КА выразить динамические характеристики в традиционных единицах измерения: длину троса $2a^*$, время перелета t^* , максимальные значения скорости v_{max}^* и натяжения троса T_{max}^* . Завершить алгоритм.

На основе алгоритма 2.1 рассчитываются динамические характеристики движения КА в безразмерных переменных (рис. 4), которые в дальнейшем переводятся в традиционные единицы измерения (таблица 1) для реальных КА.

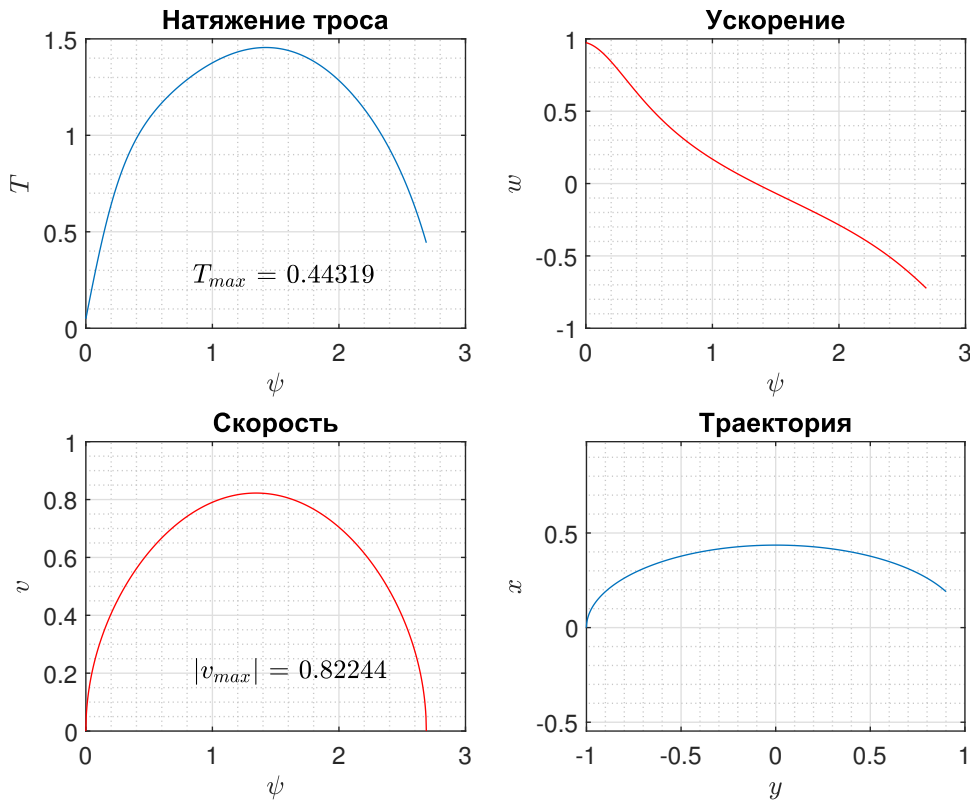


Рис. 4. Динамические характеристики перемещения КА с постоянно ориентированным СП между точками $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = \pi - \arccos(e)$ при $e = 0.9$, $k = 0.5$

Вычислительные эксперименты демонстрируют, что перемещение между заданными точками на небольшое расстояние может происходить за несколько часов с учетом отсутствия топливных затрат. Однако движение возможно только при условии нахождения КА с СП на связи.

Таблица 1. Динамические характеристики перемещения КА с постоянно ориентированным СП между точками $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = \pi - \arccos(e)$ при $2a = 2$ км, $R = 0.5$ а.е.

Космический аппарат	Продолжительность перелета t , ч	Максимальное натяжение T_{max} , гс	Максимальная скорость v_{max} , м/с
IKAROS	8.55	0.830	0.110
NanoSail	4.27	0.041	0.220
LightSail-2	2.67	0.133	0.352
Sunjammer	1.43	4.978	0.657
Helios	1.02	4.107	0.914

В третьей главе решается задача о движении КА с управляемым СП между произвольными точками леерной связи. Предлагается методика возможного способа перемещения с учетом коррекции положения СП в каждой точке траектории. Оптимальный угол α_{opt} , вычисленный в главе 1, используется для создания максимального касательного ускорения в течение всего времени перелета при условии, что начальная и конечная скорости равны нулю. Формируются участки разгона и торможения, а также определяется точка переключения ускорения $\psi(B)$.

Если уравнения относительного движения в проекциях на касательную к траектории для разгона и торможения можно записать как

$$\dot{v} = \pm F_\tau(\delta_i), \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

при

$$\delta_1 = \arccos \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}, \quad \delta_2 = \pi - \arccos \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}},$$

то существует первый интеграл

$$\frac{v^2}{2} = \int_{\psi_1}^{\psi} \tilde{F}_\tau(\delta_i) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi, \quad i = 1, 2, \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{F}_\tau(\delta_i) = \begin{cases} F_\tau(\delta_1), & \psi_1 \leq \psi \leq \psi(B), \\ -F_\tau(\delta_2), & \psi(B) \leq \psi \leq \psi_2, \end{cases}$$

причем ψ – эксцентрическая аномалия актуальной точки.

Точка $\psi(B)$ разделяет участки разгона и торможения, то есть является точкой переключения ускорения и находится с использованием численных методов интегрирования из равенства

$$\int_{\psi_1}^{\psi(B)} F_\tau(\delta_1) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi = \int_{\psi(B)}^{\psi_2} F_\tau(\delta_2) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi. \quad (3.3)$$

Для движения КА с управляемым СП между произвольными точками леерной связи вычисляются динамические характеристики:

1. Относительная скорость в произвольной точке эллипса определяется из выражения для кинетической энергии (3.2).
2. Сила натяжения троса из уравнения движения (3.1) для участков ускорения и торможения будет вычисляться по формуле

$$T = \frac{v^2}{2(1 - e^2 \cos^2 \psi)} + \frac{F(\gamma) \sin(\delta_i - \gamma)}{2\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}, \quad i = 1, 2.$$

3. Общее время перелета вычисляется как сумма продолжительностей перемещения на участках разгона и торможения

$$t = t_1 + t_2,$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_{\psi_1}^{\psi(B)} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi}{\sqrt{2 \int_{\psi_1}^{\psi} F_{\tau}(\delta_1) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi}}, \\ t_2 &= \int_{\psi(B)}^{\psi_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi}{\sqrt{v^2(B) - 2 \int_{\psi(B)}^{\psi} F_{\tau}(\delta_2) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В частном случае рассматривается перемещение КА между наиболее удаленными точками леерной связи при различных начальных условиях.

Для идеального СП только при нулевой начальной скорости выражение для времени перелета переписывается как

$$t = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{2\Phi(\alpha_{opt})}} d\psi,$$

где

$$\Phi(\alpha_{opt}) = \int_0^{\psi} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} - \operatorname{tg} \alpha_{opt} \sin \psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{opt})^{\frac{3}{2}}} d\psi,$$

так как в рассматриваемой ситуации интеграл энергии (3.2) зависит от оптимального угла наклона нормали идеального СП α_{opt} .

При нулевых начальных и конечных скоростях время перелета выглядит следующим образом

$$t = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{2\Phi(\alpha_{opt})}} d\psi,$$

поскольку точка переключения ускорения соответствует $\psi(B) = \frac{\pi}{2}$.

В безразмерных единицах измерения при нулевой начальной скорости минимальное значение времени перелета $t_{min} = 2.5691$ достигается, когда эксцентриситет $e = 0.9085$ и отношение полуосей $b/a = 0.4189$ (рис. 5), при нуле-

вых начальной и конечной скоростях минимальное значение времени перелета $t_{min} = 3.3597$ достигается, когда эксцентриситет $e = 0.9117$ и отношение полуосей $b/a = 0.4324$ (рис. 6).

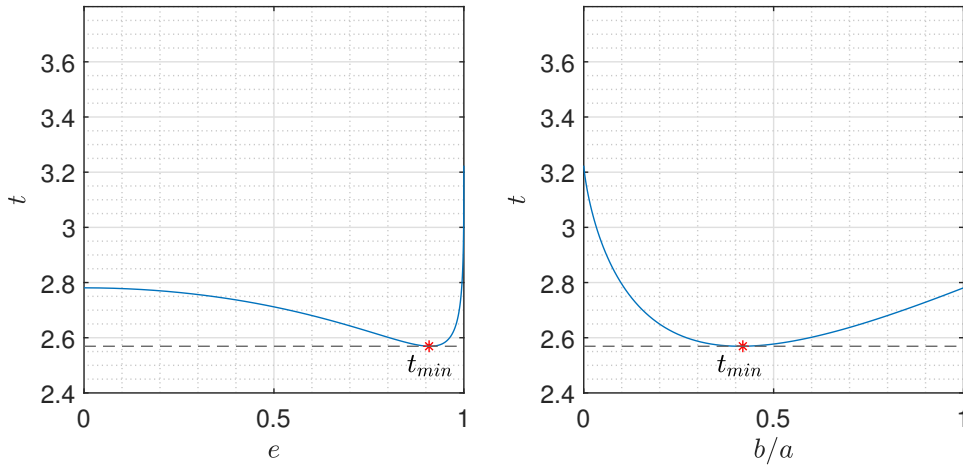


Рис. 5. Зависимость времени перемещения t от эксцентриситета e и отношения полуосей b/a только при нулевой начальной скорости

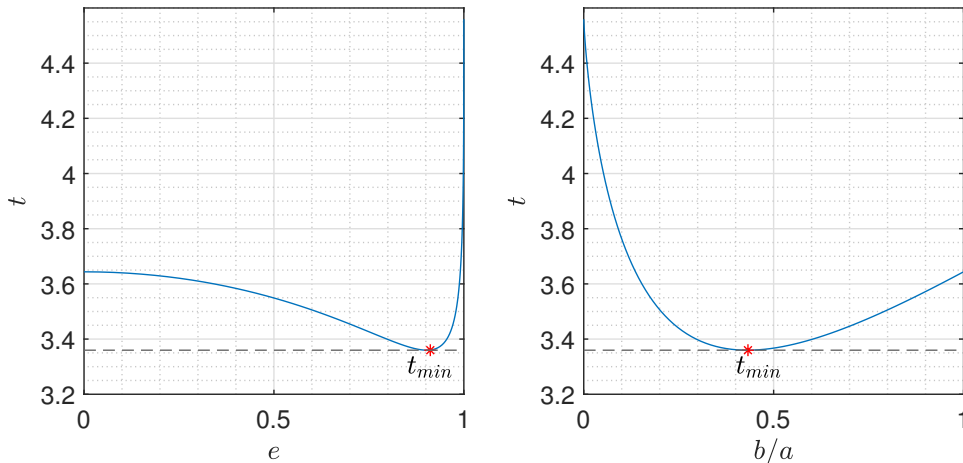


Рис. 6. Зависимость времени перемещения t от эксцентриситета e и отношения полуосей b/a при нулевой начальной и конечной скоростях

Разработан алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с управляемым солнечным парусом.

АЛГОРИТМ 3.2.

1. Найти значения базовой калибровочной характеристики $F(\gamma)$.
2. Определить значения производной калибровочной характеристики $F_\tau(\delta_i)$, $i = 1, 2$ при разгоне и торможении.
3. Записать теорему об изменении кинетической энергии при разгоне и торможении (3.2).

4. Вычислить поля скоростей при разгоне и торможении.
5. Сравнить поля скоростей по формуле (3.3) при разгоне и торможении.
6. Вычислить точку переключения ускорения $\psi(B)$, найти участки разгона и торможения.
7. Удостовериться, что точка переключения ускорения находится между начальной и конечной точками перемещения, то есть $\psi_1 < \psi(B) < \psi_2$. Если неравенство выполнено, перейти к следующему шагу, иначе завершить алгоритм и вывести, что движение недопустимо.
8. Вычислить массив касательных ускорений $w_\tau[j]$.
9. Определить массивы скоростей $v_\tau[j]$ и сил натяжения троса $T[j]$.
10. Рассчитать суммарное время перелета t .
11. Для реальных КА выразить динамические характеристики в традиционных единицах измерения: длину троса $2a^*$, время перелета t^* , максимальные значения скорости v_{max}^* и натяжения троса T_{max}^* . Завершить алгоритм.

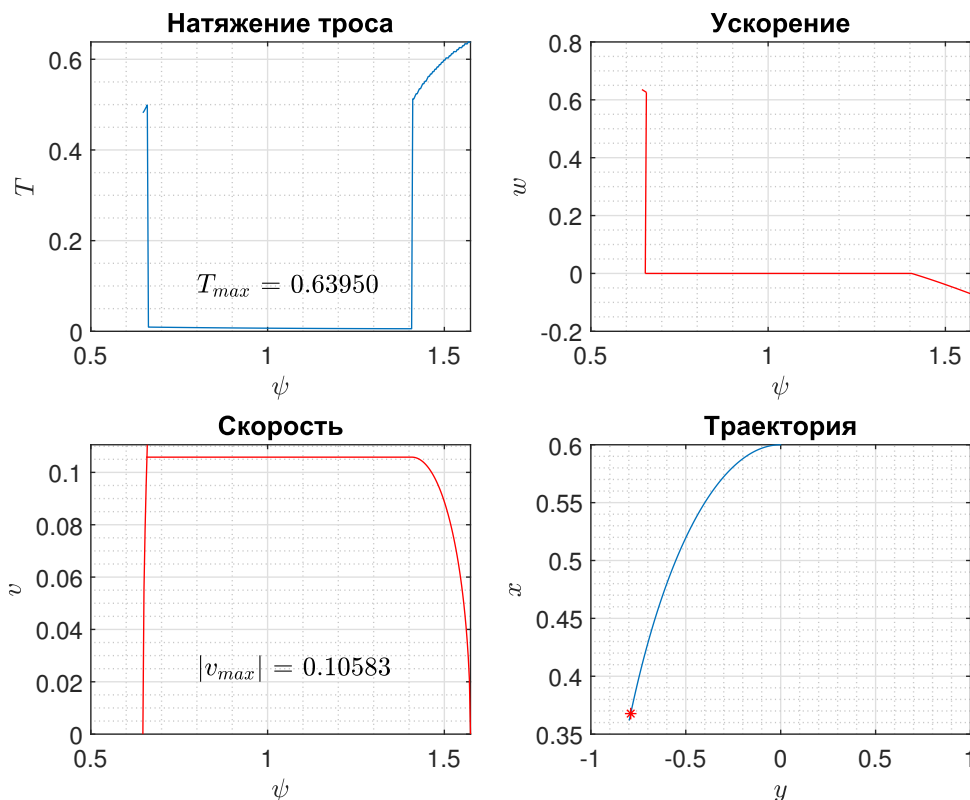


Рис. 7. Динамические характеристики перемещения КА с управляемым СП между точками $\psi_1 = \arccos e$ и $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ при $e = 0.8$, $k = 0.1$

На базе алгоритма 3.2 рассчитываются динамические характеристики движения КА в безразмерных переменных (рис. 7), которые в дальнейшем переводятся в традиционные единицы измерения (таблица 2) для реальных КА.

Таблица 2. Динамические характеристики перемещения КА с управляемым СП между точками $\psi_1 = \arccos e$ и $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ при $2a = 2$ км, $R = 0.5$ а.е.

Космический аппарат	Продолжительность перелета t , ч	Максимальное натяжение T_{max} , гс	Максимальная скорость v_{max} , м/с
IKAROS	25.08	0.2582	0.0131
NanoSail	12.53	0.0129	0.0263
LightSail-2	7.83	0.0413	0.0421
Sunjammer	4.2	1.549	0.0784
Helios	3.02	1.278	0.1092

Для всех перечисленных в работе способов перемещения КА на примере перелета между наиболее удаленными точками леерной связи проводится сравнение результатов (таблица 3).

Таблица 3. Минимальная продолжительность перемещения на расстояние 2 км между точками $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = \pi$ при различных способах управления, когда $e = e_{min}$, $R = 1$ а.е.

Космический аппарат	t_{min} , ч с парусом, ортогональным солнечным лучам, при $v_i = 0$, $i = 1, 2$	t_{min} , ч с парусом, корректируемым в процессе движения, при $v_i = 0$, $i = 1, 2$	t_{min} , ч с парусом, корректируемым в процессе движения, при $v_1 = 0$
Эталон	3.5573	3.3597	2.5691
IKAROS	18.6325	17.5975	13.4565
NanoSail	9.3163	8.7988	6.7283
LightSail-2	5.8227	5.4992	4.2052
Sunjammer	3.1248	2.9512	2.2567
Helios	2.2452	2.1205	1.6215

Наиболее быстрым оказывается перелет КА с управляемым СП, причем без остановки в конечной точке перемещение становится эффективнее, чем при нулевых начальной и конечной скоростях.

В заключении подводятся итоги работы по изучению динамики полета космического аппарата с солнечным парусом в рамках космической тросовой системы, описываются перспективы дальнейших исследований.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Математическая модель движения механической системы, состоящей из КА с солнечным парусом, перемещающегося вдоль троса, соединяющего два космических объекта, расположенных на одной круговой орбите [1, 6, 7]

2. Методика вычисления оптимального угла наклона СП относительно солнечных лучей, необходимого для создания максимального ускорения КА в каждой точке траектории [3, 9–11].

3. Анализ динамики и оценка сил в модельной задаче о движении КА с солнечным парусом вдоль леерной связи между тяжелыми гелиоцентрическими станциями [2, 8].

4. Методы управления солнечным парусом для осуществления перелета КА между произвольными точками леерной связи [4, 5, 13].

5. Необходимые и достаточные условия существования связного движения между двумя точками при постоянно ориентированном солнечном парусе [2, 9].

6. Диаграммы пар точек эллипса, ограничивающего движение КА в плоскости гелиоцентрической орбиты, между которыми возможно перемещение при нулевых начальной и конечной скоростях с натянутым тросом и неизменно ориентированным солнечным парусом [2, 9].

7. Методика вычисления точки переключения ускорения при движении с управляемым солнечным парусом [4, 12].

8. Алгоритмы исследования динамики полета КА вдоль леерной связи, предусматривающие неизменную ориентацию или коррекцию положения нормали солнечного паруса относительно солнечных лучей в каждой точке траектории [4, 5, 13].

9. Программное обеспечение, реализующее полученные методы и алгоритмы, позволяющие вычислять основные динамические характеристики движения космического аппарата между произвольными точками леерной связи [14].

Соответствие паспорту специальности

Результаты диссертационной работы соответствуют пунктам паспорта специальности 1.1.7 «Теоретическая механика и динамика машин»:

1. Классическая механика и аналитическая динамика.
2. Небесная механика, астродинамика.
3. Динамика летательных аппаратов и космических конструкций.
4. Динамика систем, состоящих из абсолютно твердых и деформируемых тел, в том числе машин, приборов и конструкций.
5. Управление движением, наблюдаемость и идентификация механических систем.

**Публикации в журналах из перечня ВАК
и международных систем цитирования**

1. *Vaskova V. S., Rodnikov A. V.* On a Sailed Spacecraft Motion along a Handrail Fixed to Two Heliocentric Space Stations. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2023. V. 19. № 3. P. 359–370 (Scopus).
2. *Васькова В.С., Родников А.В.* Модельная задача о движении по леерной связи под солнечным парусом // *Космические исследования*. 2024. Т. 62. № 3. С. 302–310 (Scopus, Web of Science).
3. *Васькова В.С.* О перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // *Труды МАИ*. 2024. № 139. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php> (Перечень ВАК РФ)
4. *Васькова В.С., Родников А.В.* Задача перемещения космического аппарата с солнечным парусом между произвольными точками леерной связи // *Труды МАИ*. 2025. № 143. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php> (Перечень ВАК РФ).
5. *Васькова В.С., Родников А.В.* О движении космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2025. Т. 165. № 9. Доступ в журн. <https://engjournal.bmstu.ru/issues/> (Перечень ВАК РФ).

Материалы конференций

6. *Васькова В.С.* Об управлении движением космического аппарата с солнечным парусом на леерной связи // *Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции XLVIII «Гагаринские чтения», 12–15 апреля 2022 г., Москва.* – М.: Перо, 2022. С. 458.
7. *Васькова В.С., Родников А.В.* О движении космического аппарата с солнечным парусом вдоль троса, закрепленного на двух гелиоцентрических космических станциях // *Сборник тезисов докладов 21-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 21–25 ноября 2022 г., Москва.* – М.: Перо, 2022. С. 379–380.
8. *Васькова В.С., Родников А.В.* Модельная задача о движении по леерной связи под солнечным парусом // *Сборник тезисов докладов XLVII академических чтений по космонавтике, посвященный памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства, 24–27 января 2023 г., Москва.* – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. С. 286–287.
9. *Васькова В.С., Родников А.В.* О перемещении вдоль леерной связи космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // *Сборник тезисов докладов 22-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 20–24 ноября 2023 г., Москва.* – М.: Перо, 2023. С. 251–252.
10. *Vaskova V.S.* Studying Dynamics of a Spacecraft Coasting along a Tether and Equipped with a Perfect or Non-Perfect Solar Sail // *Book of Abstracts ANS Conference Series: Regular and Chaotic Dynamics, 04–08 December 2023, Sirius.* – Izhevsk: Institute of Computer Science, 2023. P. 101–102.

11. *Васькова В.С., Родников А.В.* О движении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Сборник тезисов докладов XLVIII академических чтений по космонавтике, посвященный памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, 23–26 января 2024 г., Москва. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024. С. 312–313.
12. *Васькова В.С., Родников А.В.* О наискорейшем перемещении космического аппарата с солнечным парусом между произвольными точками леерной связи // Сборник тезисов докладов 23-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 18–22 ноября 2024 г., Москва. – М.: Перо, 2024. С. 234.
13. *Васькова В.С.* О наискорейшем перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Материалы X международной научной конференции по механике «Поляховские чтения», 23–27 сентября 2024 г., Санкт-Петербург. – СПб.: ВВМ, 2024. С. 201-204.

Программы для ЭВМ

14. *Васькова В.С., Родников А.В.* Программный комплекс для решения задач динамики относительного движения космического аппарата с солнечным парусом в рамках космической тросовой системы // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2025683410 от 3 ноября 2025 г.