



Научная статья

УДК: 539.37

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189134>

EDN: <https://www.elibrary.ru/CRBWWI>

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ УТОЧНЁННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОРЕБРЁННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Л.И. Миронова , В.В. Балабанов , Л.Е. Киселёв 

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва, Россия

✉ mironova_lub@mail.ru

Цитирование: Миронова Л.И., Балабанов В.В., Киселёв Л.Е. Методика построения уточнённой математической модели исследования устойчивости деформированных оребрённых тонкостенных конструкций // Труды МАИ: электрон. журнал. № 149.
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189134>

Аннотация. В статье изложена методика построения уточненной математической модели исследования устойчивости оболочки, подкреплённой кольцевыми ребрами. Рассматривая такую конструкцию как составную из тонкостенной обшивки кругового очертания и поперечных кольцевых ребер, соединенных между собой жёстко, и принимая её ортотропной, предложено провести исследование напряжённо-деформированного состояния системы в рамках трёхмерной линейной теории упругости на основе вариационного энергетического метода. Сформулирована постановка задачи, решение которой предложено искать в перемещениях, допуская их асимптотическое разложение в виде полиномов по нормальной к срединной поверхности координате. При построении расчётной модели учитывалось, что напряжённо-деформированное состояние подкреплённой оболочечной конструкции состоит из основного, обусловленного воздействием внешних нагрузок, и дополнительного внутреннего напряжённо-деформированного состояния, локализованного вблизи краёв оболочек и возможных линий искажения в местах сочленения кольцевых рёбер с образующей

обшивки. В рассмотрении вводится пограничный слой поперечных сечений, что дает возможность определить распределение внутренних усилий в зонах сочленения упругих подкреплений с образующей оболочки и исследовать влияние подкреплений на величину критических нагрузок ребрѐнных оболочек. Такой подход в исследовании устойчивости конструкции позволяет более точно определить величину малых докритических деформаций и уровни критической нагрузки.

Ключевые слова: устойчивость деформируемых систем; ребрѐнная оболочка; перемещения; потенциальная энергия упругой деформации; краевой эффект.

PROCEDURE FOR CONSTRUCTING A REFINED MATHEMATICAL MODEL FOR STABILITY ANALYSIS OF DEFORMED STIFFENED THIN-WALLED STRUCTURES

L.I. Mironova , V.V. Balabanov , L.E. Kiselev 

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

✉ mironova_lub@mail.ru

Citation: Mironova L.I., Balabanov V.V., Kiselev L.E. Procedure for constructing a refined mathematical model for stability analysis of deformed stiffened thin-walled structures // Trudy MAI. 2026. No. 149. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189134>

Abstract. The paper presents a procedure for constructing a refined mathematical model for the stability analysis of a shell reinforced with ring ribs. The structure is considered as a composite system consisting of a thin-walled circular cylindrical skin and transverse ring ribs rigidly connected to it and modeled as an orthotropic body. The stress-strain state (SSS) of the system is investigated within the framework of the three-dimensional linear theory of elasticity using a variational energy method. The problem formulation is presented, and the solution is sought in terms of displacements represented as an asymptotic expansion in polynomials with respect to the coordinate normal to the midsurface. In constructing the computational model, it is assumed that the stress-strain state of the rib-stiffened shell structure consists of a primary SSS caused by external loading and an additional internal SSS localized in the vicinity of shell edges and possible distortion lines at the junctions of the ring ribs with the shell generatrix. A boundary layer in the transverse sections is introduced, which makes it

possible to determine the distribution of internal forces in the regions where the elastic ribs are connected to the shell generatrix and to investigate the influence of ring ribs on the critical loads of rib-stiffened shells. This approach to structural stability analysis enables a more accurate evaluation of small subcritical deformations and critical load levels.

Keywords: stability of deformable systems; rib-stiffened shell; displacements; elastic strain energy potential; edge effect.

Введение

Одной из форм типовых элементов летательных аппаратов является тонкостенная цилиндрическая оболочка с подкреплениями. К такой модели, например, можно отнести фюзеляж самолёта или корпусные детали двигателей и силовых установок. Данные конструкции характеризуются оптимальным сочетанием высокой прочности, жёсткости и минимальной массой, что является необходимыми условиями в достижении требуемых высоких эксплуатационных показателей [1, 2].

Выделяя конструктивные особенности фюзеляжа самолёта, следует отметить, что во многих случаях форма фюзеляжа представляет собой монокок в виде удлиненной цилиндрической оболочки, усиленной продольными и поперечными элементами (стрингерами, шпангоутами), образующими силовой набор. Добавление к цилиндру двух групп элементов жёсткости преобразует его в жёсткую конструкцию. Однако резкие изменения геометрической формы в поперечном сечении оболочки при изготовлении способствуют формированию зон концентраций напряжений и деформаций [3], существенно снижая устойчивость конструкции в процессе эксплуатации. Учитывая, что выпучивание оболочек, как правило, сопровождается появлением не только напряжений изгиба, но и дополнительных напряжений в срединной поверхности [4], возникает необходимость в изучении влияния подкреплений на напряжённо-деформированное состояние (НДС) системы в целом, а также условий её нагружения, приводящих к критическим деформациям в изменении конструктивной формы.

В связи с этим, разработка методов для точного определения НДС подкреплённых цилиндрических оболочек является актуальной и востребованной задачей в исследовании устойчивости современных тонкостенных конструкций авиационной техники под действием нагрузок, максимально приближенных к условиям эксплуатации летательных аппаратов (ЛА).

Отметим, что методология теории устойчивости упругих систем в настоящее время постоянно совершенствуется [4, 5]. Это связано не только с применением в исследованиях современных программно-аппаратных комплексов, позволяющих виртуально моделировать поведение объектов [6, 7], но и приводит к необходимости постановки и решения новых практических задач в обеспечении прочностной надёжности сложных технических конструкций авиационно-ракетной техники, судостроительной, нефтегазовой и других отраслей народного хозяйства. Применение новых перспективных материалов, а также разработка технологий получения из них заготовок, требует тщательной математической формализации проходящих процессов и построения уточнённых математических моделей в исследовании напряжённо-деформированного состояния, обусловленного силовыми воздействиями различного характера.

Целью настоящего исследования является поиск подходов и методов в построении уточнённой математической модели устойчивости тонкостенной оболочки с подкреплёнными упругими элементами, испытывающими локальное напряжённое состояние.

С точки зрения практического применения решаемой задачи следует отметить особенности некоторых расчётных случаев, которые рассматриваются на этапах проектирования авиационной техники. Так, например, основными действующими нагрузками на фюзеляж, являются силы, передающие усилия от прикреплённых к нему агрегатов самолета (крыла, оперения, силовой установки, шасси). Этот случай соответствует максимальной перегрузке в полёте по вертикальной координате. Возникающие при этом максимальные напряжения в конструкции определяются зачастую из условий статической прочности [1, 2]. В

обосновании прочности фюзеляжа проектировщики проводят прочностные расчеты на все случаи нагружения, определяемые нормами прочности для каждой из частей самолета, передающих на фюзеляж свои нагрузки [2].

С точки зрения механики такие условия силового воздействия могут быть рассмотрены как локальное быстро меняющееся во времени нагружение. Специалисты-механики отмечают, что тела при локальном нагружении испытывают быстроменяющееся напряжённое состояние [4, 8], которое может быть опасным и приводит к потере устойчивости объекта.

Следует отметить, что многие подходы и методы определения НДС ребристых оболочек базируются на общей теории пластин и оболочек в двумерной постановке задачи, основанной на гипотезах Киргофа-Лява и теории стержней Киргофа-Клебша [9-14]. Принятые допущения к свойствам тонкой оболочки приводят к упрощению расчетов. Так, например, сведение трёхмерных краевых задач теории упругости к двумерным задачам теории оболочек решается методом асимптотического интегрирования [15, 16]. При этом значения точных решений, особенно, в решении краевых задач в значительной степени обесценено погрешностями, содержащимися в их формулировке [11]. Такой подход требует обоснования применимости гипотез теории оболочек, оценки степени погрешности и поиск уточненных решений [11].

Исходя из этого, для исследования устойчивости деформированных оребренных тонкостенных оболочечных конструкций предлагаем искать решения краевой задачи, где в качестве исходных общих уравнений целесообразно рассмотреть уравнения пространственной задачи теории упругости. Сформулируем следующую постановку задачи.

Постановка задачи

Пусть цилиндрическая тонкостенная оболочка подкреплена в радиальном направлении упругими элементами (ребрами) с некоторым шагом по образующей. Таковую конструктивную форму будем рассматривать как систему, состоящую из тонкостенной обшивки кругового очертания и поперечных кольцевых ребер, которые соединены с ней жёстко. Взаимодействия ребер и обшивки на поверхности контакта принимаются упругими и предполагают

одинаковые перемещения. Упругая оребренная цилиндрическая оболочка находится под действием некоторой нагрузки q , которую пока уточнять не будем. Исследуем локальное напряжённо-деформированное состояние тонкостенной оребренной оболочки на защемленных краях и в местах крепления ребер.

Поместим рассматриваемую оболочку в триортогональную криволинейную систему координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, что координатные оси α_1, α_2 совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности цилиндрической оболочки, обозначив их через r_1 и r_2 . Направление оси α_3 совпадает с направлением нормали, проведённой снаружи к срединной поверхности. Расчётная схема модели приведена на рисунке 1.

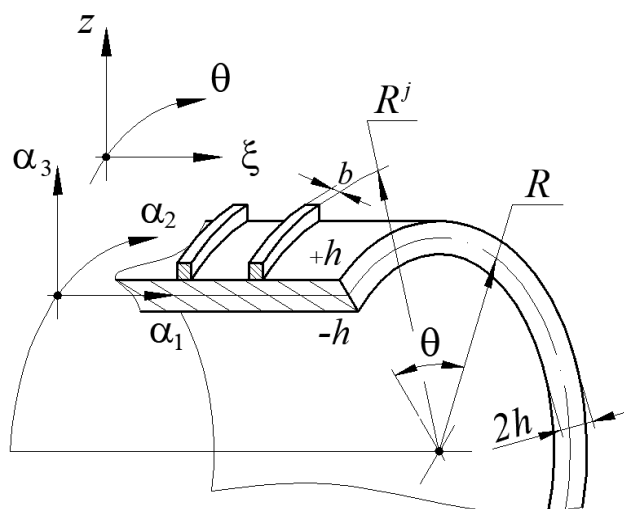


Рисунок 1 - Расчётная схема. Координатные оси подкрепленной оболочки

Путем надлежащего выбора криволинейных координат α_1 и α_2 приведём цилиндрическую поверхность оболочки к форме с коэффициентами первой квадратичной формы $A_i, i = 1, 2$, так, что $A_1 = A_2 = \text{const}$, и

$$A_1 = A_2 = R; r_1 = 0; r_2 = 1/R, \quad (1)$$

принимая величину толщины оболочки $2h$ малой, для которой соблюдается соотношение $2h \ll R$.

Для круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой кольцевыми рёбрами, удобно принять новую систему координат ξ, θ, z , для которой выполняются соотношения [13]

$$\alpha_1 = R \cdot \xi; \alpha_2 = R \cdot \theta; \alpha_3 = z + R, \quad (2)$$

где R – радиус оболочки; ξ – относительные (измеренные в долях радиуса R) расстояния по образующей; θ – относительное расстояние по направляющему кругу, т.е. центральный угол, рис.1.

В триортогональной системе координат коэффициенты Ламе H_1 , H_2 и H_3 связаны соотношениями

$$H_i = A_i \alpha_i; \alpha_i = 1 + r_i; i = 1, 2; H_3 = 1. \quad (3)$$

С учетом (1) и (2) в новой системе координат имеем

$$H_1 = R; H_2 = \frac{1 + rz}{r}; H_3 = 1; r = r_2 = \frac{1}{R}. \quad (4)$$

Исследуем локальное напряжённое состояние оболочки на краю и в местах креплений рёбер. Учитываем следующие допущения. Исходная форма оболочки – идеальная (начальные прогибы отсутствуют), нагружение является статическим, вследствие чего напряжённое состояние оболочки считаем безмоментным.

Отметим, что переход от общей теории оболочек к безмоментной сопровождается понижением порядка уравнений [11]. С точки зрения исследования устойчивости подкреплённых оболочек такой подход в определении критических нагрузок приводит к необходимости разработки уточнённой математической модели с учётом уравнений трехмерной теории упругости.

Построение уточнённой математической модели

При построении уточнённой математической модели будем исходить из того, что НДС подкреплённой оболочечной конструкции состоит из основного напряжённо-деформированного состояния, обусловленного воздействием внешних нагрузок, и дополнительного внутреннего напряжённо-деформированного состояния, локализуемого вблизи краёв оболочек или возможных линий искажения в местах сочленения кольцевых ребер с образующей обшивки.

Следуя классической теории упругих тонких оболочек, запишем геометрические и физические соотношения в матричной форме

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}; \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_\xi \ \varepsilon_\theta \ \varepsilon_z \ \gamma_{\xi\theta} \ \gamma_{\theta z} \ \gamma_{\xi z}]^T, \mathbf{u} = [u \ v \ w]^T, \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_\xi \ \sigma_\theta \ \sigma_z \ \tau_{\xi\theta} \ \tau_{\theta z} \ \tau_{\xi z}]^T, \quad (6)$$

где ε , u , σ – векторы-столбцы компонент деформаций, перемещений, напряжений, соответственно; L – матричный дифференциальный оператор; χ – матрица жесткости. Для изотропного тела матрица жёсткости определяется известным набором упругих коэффициентов $\chi = (A_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, 6$.

Поскольку в случае приложения локальной нагрузки в местах сочленения оболочки и рёбер возникает быстроменяющееся напряжённое состояние, то решение целесообразно искать в перемещениях, допуская их асимптотическое разложение в виде полиномов по нормальной координате к срединной поверхности. Такой подход был изложен в работах [17-20].

В соответствии с этим выражения для искомых перемещений принимают следующий вид

$$u(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K u_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}; \quad v(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K v_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}; \quad w(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K w_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}. \quad (7)$$

Здесь u , v , w – перемещения вдоль координатных линий ξ , θ и по нормали z .

В отличие от работы [17], где в разложении (7) были рассмотрены два члена ряда, $K=2$, для нашего случая принимаем $K=3$. Это позволит повысить степени полиномов на два порядка в сравнении с классической теорией оболочек.

При максимальной степени полинома $k=3$ асимптотическое представление перемещений оболочки представим в виде

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + u_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}; \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + v_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}; \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + w_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Перемещение кольцевых рёбер рассматриваем в предположении, что их влияние на обшивку происходит через две компоненты перемещений – по окружному и нормальному направлениям (θ, z) . При этом перемещения по продольному направлению считаем равными нулю, $u = 0$. Полагая в (7) $k=1$, получим выражения для перемещений кольцевых рёбер в виде

$$v^j(\theta, z) = v_0^j(\theta) + v_1^j(\theta)z, \quad j=1 \dots N; \quad w^j(\theta, z) = w_0^j(\theta), \quad j=1 \dots N, \quad (9)$$

Здесь индекс j – определяет порядковый номер кольцевого ребра.

Такой подход хорошо согласуется с вариационным методом исследования устойчивости тонкостенных конструкций, основанным на принципе Лагранжа, в котором минимум возможных перемещений реализуется минимумом полной энергии упругой системы в целом.

Для нашего случая справедливы следующие соотношения

$$E = U + \sum_{j=1}^N U^j - A - \sum_{j=1}^N A^j ; \quad (10)$$

$$\delta U + \delta \sum_{j=1}^N U^j - \delta A - \delta \sum_{j=1}^N A^j = 0. \quad (11)$$

Здесь E – полная энергия упругой системы; U, U^j – потенциальная энергия упругой деформации обшивки и кольцевых ребер; A, A^j – работа внешних сил, приложенных к обшивке и ребрам; N – количество кольцевых ребер.

Следуя работе [17] и в силу краткости изложения приведем соотношения только для потенциальной энергии упругой деформации обшивки (12) и ребер (13), ограничиваясь общим выражением работы внешних сил системы (14), полагая при этом, что действие объёмных сил отсутствует. Учитывая, что операции варьирования и дифференцирования перестановочны, и, что из (8) и (9) вытекает не только связь между перемещениями обшивки и ребер, но и связь между их вариациями, имеем

$$\delta U = \iiint P(1+rz) R^2 d\xi d\theta dz ,$$

$$P = \sigma_{\xi} \varepsilon_{\xi} + \sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{\xi z} \delta \gamma_{\xi z} + \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} + \tau_{\xi \theta} \delta \gamma_{\xi \theta} ; \quad (12)$$

$$\delta U^j = \iiint P^j (1+r_j z) R_j^2 d\xi_j d\theta dz ,$$

$$P^j = \sigma_{\xi}^j \varepsilon_{\xi}^j + \sigma_{\theta}^j \varepsilon_{\theta}^j + \sigma_z^j \varepsilon_z^j + \tau_{\xi z}^j \delta \gamma_{\xi z}^j + \tau_{\theta z}^j \delta \gamma_{\theta z}^j + \tau_{\xi \theta}^j \delta \gamma_{\xi \theta}^j ; \quad (13)$$

$$A = \iint_s (Xu + Yv + Zw) ds . \quad (14)$$

Здесь X, Y, Z – компоненты поверхностной нагрузки, ds – линейный элемент поверхности.

Равенство нулю левой части уравнения (11), соответствует тому, что система находится в равновесии. Отсюда получаем уравнения равновесия оболочки, подкреплённой кольцевыми ребрами.

Следует отметить, что соотношения между деформациями и перемещениями в (5) рассматриваются в рамках сведения трёхмерной линейной задачи теории оболочек к двумерной и определяются известными формулами, которые здесь не приводятся. С учетом разложения (7) получим соотношения для всех шести компонент деформации обшивки (6). Так, например, нормальная компонента деформации обшивки в направлении координаты ξ определяется выражением

$$\varepsilon_{\xi} = r \left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + r \frac{\partial u_1}{\partial \xi} z + r^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{z^2}{2} + r^3 \frac{\partial u_3}{\partial \xi} \frac{z^3}{6} \right), \quad (15)$$

Выражения для других компонент деформации оболочки в силу громоздкого вида здесь не приводятся. Для изотропного материала физические уравнения теории упругости принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= A_{11} \cdot \varepsilon_{\xi} + A_{12} \cdot \varepsilon_0 + A_{13} \cdot \varepsilon_z; \quad \sigma_0 = A_{21} \cdot \varepsilon_{\xi} + A_{22} \cdot \varepsilon_0 + A_{23} \cdot \varepsilon_z; \quad \sigma_z = A_{31} \cdot \varepsilon_{\xi} + A_{32} \cdot \varepsilon_0 + A_{33} \cdot \varepsilon_z; \\ \tau_{\xi 0} &= A_{44} \cdot \gamma_{\xi 0}; \quad \tau_{\xi z} = A_{55} \cdot \gamma_{\xi z}; \quad \tau_{0z} = A_{66} \cdot \gamma_{0z}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь A_{ij} – упругие постоянные материала оболочки.

По соотношениям найденных компонент деформаций с учетом (16) из выражения (5) определяются все шесть компонент напряжений обшивки. Так, например, выражение для $\tau_{\xi z}$ принимает вид

$$\tau_{\xi z} = A_{55} \cdot \left[\left(u_1 + r \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) + \left(u_2 + r \cdot \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) \cdot z + \left(\frac{u_3}{2} + \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right) \cdot z^2 \right]. \quad (17)$$

Подставляя эти значения в (12) получим выражения для потенциальной энергии обшивки в напряжениях и перемещениях.

Известно, что приближённое сведение трёхмерной краевой задачи теории тонких оболочек к некоторой двумерной краевой задаче заключается в упрощении формул линейной теории упругости и пренебрежении нормальной компоненты напряжений σ_z (σ_{33} в обозначениях работы [11] в направлении координаты α_3). В рамках теории Киргофа-Лява компоненты напряжений σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} в уравнениях теории упругости не учитываются или в других случаях, как например, в работе [11] определяются приближёнными формулами в осреднённых уравнениях равновесия.

В построении уточнённой математической модели исходим из того, что под действием поверхностных сил на цилиндрическую оболочку нормальное напряжение σ_z и компоненты напряжений $\sigma_{\xi z}$, $\sigma_{\theta z}$ в координатных плоскостях ξz , θz при определённых обстоятельствах могут оказаться существенными. Особенно это касается исследования устойчивости подкреплённой оболочки при определении минимальных критических нагрузок. Также в обшивке кроме напряжённого состояния могут возникать краевые эффекты, обусловленные местным напряжённым состоянием, локализуемым вблизи некоторых линий искажения, которые в нашем предположении могут проявляться в местах сочленения кольцевых ребер с образующей поверхностью оболочки. Такой подход требует рассмотрения краевой задачи.

Выделим фрагмент цилиндрической оболочки, ограниченный нормальными сечениями вдоль линий кривизны ξ и θ , рисунок 2.

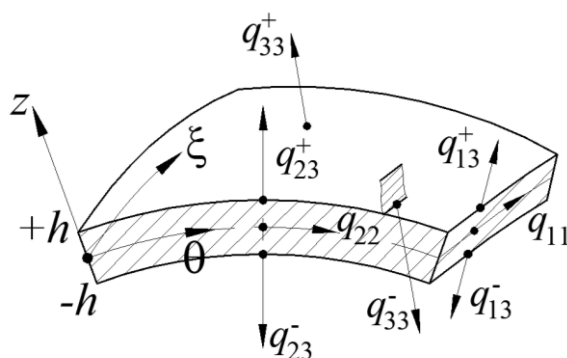


Рисунок 2 - Условия нагружения обшивки

Для круговой цилиндрической оболочки имеем два поперечных (криволинейных) края $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$ и два продольных (прямолинейных) края $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$.

В рамках рассмотрения трёхмерных уравнений теории упругости, следуя работе [11], дополним компоненты внутренних самоуравновешенных напряжений дополнительными членами – несимметричными напряжениями, которые применяются, как более удобные величины для вывода уравнений равновесия и состояния оболочки. При этом, по мнению А.Л. Гольденвейзера, наглядного физического содержания они не имеют [11]. Соотношения напряжений в поперечных сечениях представляются в виде [11]

$$\tau_i = \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{ij}; \tau_{ij} = \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{ij}; \tau_{iz} = \tau_{zi} = \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{iz}; \tau_z = \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 \sigma_z. i, j = \xi, \theta, i \neq j. \quad (18)$$

Применяя данный прием, предложенный А.Л. Гольденвейзером, исходим из того, что, общее напряжённое состояние трёхмерного тела оболочки рассматривается в суммарном определении внутреннего напряжённого состояния и пограничных слоев. Последние локализуются вблизи краёв оболочек и других линий искажения. При этом внутреннее напряжённое состояние, захватывающее все области тела оболочки, не обладает свойством затухания.

Такой подход позволяет исследовать дополнительное напряжённое состояние на участках поперечных сечений, обусловленное действием статически неуравновешенных сил и моментов, приложенных к краям оболочки, определить зоны медленно и быстро затухающих напряжённо-деформированных состояний вблизи сочленения кольцевых подкреплений оболочки.

Принимаем, что нагружению обшивки отвечают следующие граничные условия:

на лицевых и боковых поверхностях в направлении координаты z

$$\sigma_z(\pm h) = q_{33}^{\pm}; \tau_{\xi z}(\pm h) = q_{13}^{\pm}; \tau_{\theta z}(\pm h) = q_{23}^{\pm}; \quad (19)$$

вдоль краёв координатных линий ξ и θ

$$\sigma_{\xi} = q_{11}; \sigma_{\theta} = q_{22}; \tau_{\xi\theta} = q_{12}; \tau_{\theta\xi} = q_{21} \quad (20)$$

Здесь q_{ij} – поверхностные силы, приложенные к лицевым и боковым поверхностям обшивки, $i, j = 1, 2, 3$; q^+ и q^- – поверхностные силы, приложенные к внешней и внутренней поверхностям.

Подставляя (19) и (20) в (14) получим полное выражение для работы внешних и внутренних сил, действующих на обшивку и рёбра

$$\delta A = \iint q_{ij} (\delta w_0 - h \delta w_1) (1 - rh) R^2 d\xi d\theta. \quad (21)$$

С учетом соотношений (12), (13), (21) выражение (11) определяется полностью и справедливо для любой ортогональной системы координат [3]. Таким образом, в совокупности выражения (12), (13), (21) с учётом (7) и (9) составляем систему уравнений равновесия уточнённой теории оболочек в частных производных при удовлетворении заданных граничных условий (19), (20) на лицевых и торцевых поверхностях подкреплённой оболочки.

Для получения аналитического решения краевой задачи используем известный прием, который заключается в приведении системы полученных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью метода разложения компонентов НДС и нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате θ . Формулы преобразования в силу краткости изложения здесь не приводятся. Получим новую систему уравнений, решение которой представим в общем виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_j, \quad (22)$$

где Φ_0 – общее решение однородной системы, Φ_1 – частное решение, соответствующее внешней нагрузке, Φ_j – частные решения, соответствующие j -тому ребру.

Алгоритмы решения системы уравнений (22) с учётом граничных условий приведены в работе [17] для $k=2$ применительно к обшивке и $k=1$ для ребер.

В случае, когда в (7) для обшивки принимается $k=3$ и для ребра $k=1$, однородная система уравнений имеет 12 неизвестных и решение находится приближёнными численными методами. Частные решения Φ_1 и Φ_j могут быть получены операционным методом.

Заключение

Предложенная методика построения уточнённой математической модели определения напряжённо-деформированного состояния оребрённых оболочек связана с вопросами исследования устойчивости реальных авиационных конструкций, в качестве которых, например, могут рассматриваться конструктивные формы фюзеляжа самолета.

Сформулирована постановка задачи, где тонкостенная конструкция рассматривается в триортогональной криволинейной системе координат как составное тело из обшивки и поперечных кольцевых ребер, соединенных между собой жестко.

Предложенный энергетический метод исследования напряжённо-деформированного состояния конструкции в целом с учетом ряда дополнительных факторов, допускающих асимптотическое разложение искомых перемещений в полиномы по нормальной координате к срединной поверхности

оболочки, является статическим критерием теории устойчивости. Данный подход позволил свести задачу к решению систем дифференциальных уравнений нейтрального равновесия на основе аппроксимации перемещений, неопределённые коэффициенты которых рассматриваются как варьируемые параметры. Из решения вариационной задачи нахождения минимума полной энергии получены уточнённые уравнения равновесия оболочки и соотношения между деформациями и перемещениями обшивки и кольцевых ребер.

Построение уточнённой математической модели проведено с учетом итерационной теории оболочек, в предположении, что НДС подкреплённой оболочечной конструкции состоит из основного НДС, обусловленного воздействием внешних нагрузок, и дополнительного внутреннего напряжённо-деформированного состояния, локализуемого вблизи краёв оболочек или возможных линий искажения в местах сочленения кольцевых ребер с образующей обшивки.

В терминах линейной теории упругости определение дополнительного напряжённо-деформированного состояния обшивки сведено к решению трёхмерной краевой задачи, состоящей в интегрировании системы уравнений равновесия с учётом условий нагружения на лицевых поверхностях и некоторых граничных условий на боковых поверхностях.

Предложенная методика построения уточнённой математической модели и получение решений задач устойчивости тонкостенных авиационных конструкций имеет практическое значение в выборе конструктивных форм и значений прочностных параметров на этапах разработки изделий аэрокосмической техники.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Проектирование самолетов / под ред. М.А. Погосяна. – 5-е изд., перераб. и доп. М.: Инновационное машиностроение, 2018. 864 с.
2. Житомирский Г.И. Конструкция самолетов: учебник для студентов вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М: Инновационное машиностроение, 2018. 416с.
3. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. М.: Наука, 1981. 141 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Анисимов С.А., Павлов В.Ф., Сазанов В.П. Численный анализ устойчивости при осевом сжатии вафельных цилиндрических оболочек в рамках линейного бифуркационного подхода в сопоставлении с экспериментом // Труды МАИ. 2025. № 141. <https://trudymai.ru/published.php?ID=184492>.
6. Миронова Л.И., Коваль С.М. Моделирование напряженно-деформированного состояния несущих конструкций в программных комплексах Abaqus и MeshFree на этапе проектирования изделий авиационной техники // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2025. № 2. С. 4-13.
7. Хоа В.Д., Миронова Л.И. Оценка эффективности применения одного аналитического решения задачи теории упругости в исследовании термонапряженного состояния тонкостенной конструкции из слоистого материала // Труды МАИ. 2025. № 140. <https://trudymai.ru/published.php?ID=184054>.
8. Зверев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 95. DOI: [10.13140/RG.2.2.21968.00000](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21968.00000).
9. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. К.: Наукова думка, 1973. 248 с.
10. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 380 с.
11. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

13. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. 475 с.
14. Дмитриев В.Г., Коровайцева Е.А., Попова А.Р. Особенности построения математических моделей для исследования процессов деформирования оболочек вращения из нелинейно упругих материалов // Электронный журнал «Труды МАИ». 2024. - №. 137. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181875>.
15. Зверяев Е. М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 33. 25 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33>.
16. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833. DOI: [10.1134/S0032823519050126](https://doi.org/10.1134/S0032823519050126).
17. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ, 2018, № 102. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=98866>.
18. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104174>.
19. Фирсанов В.В., Во А.Х., Доан Ч.Н. Исследование напряженного состояния подкрепленных оболочек по уточненной теории с учетом влияния упругости ребер и защемленного края // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=102130>
20. Ахмедов Н.К., Акперова С.Б. Асимптотический анализ трехмерной задачи теории упругости для радиально-неоднородного трнсверсально-изотропного полого цилиндра // Механика твердого тела. 2011. №4. С. 170-180.

References

1. *Aircraft design*. Ed. M.A. Pogosyan. Moskow: Innovacionnoe mashinostroenie, 2018. 864 p.

2. ZHitomirskij G.I. *Konstrukciya samoletov: uchebnik dlya studentov vuzov* (Aircraft Design: A Textbook for University Students Moscow: Innovacionnoe mashinostroenie, 2018. 416p.
3. Mavlyutov R.R. *Koncentraciya napryazhenij v elementah aviacionnyh konstrukcij* (Stress concentrators in aircraft structural elements). Moscow: Nauka Publ., 1981. 141 p.
4. Vol'mir A.S. *Ustojchivost' deformiruemyh sistem* (Stability of deformable systems). Moscow: Nauka Publ., 1967. 984 p.
5. Anisimov S.A., Pavlov V.F., Sazanov V.P. Numerical analysis of buckling of orthogrid-stiffened cylindrical shells under axial compression within the framework of a linear bifurcation approach in comparison with experiment // *Trudy MAI*. 2025. No. 141 (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184492>.
6. Mironova L.I., Koval' S.M. Modeling of the stress-strain state of load-bearing structures in Abaqus and MeshFree software systems at the stage of design of aviation equipment products // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaya tekhnika*. 2025. No 2. P 4-14. (In Russ.).
7. Hoa Van D., Mironova Lyubov I. Efficiency evaluation of one analytical solution of the elasticity theory problem in the study of thermal stress state of a thin-walled structure made of layered material // *Trudy MAI*. 2025. No. 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184054>.
8. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. Reduction of three-dimensional equations of the VAT of a composite plate to two-dimensional ones based on the principle of compressed maps. *Preprinty IPM im. M.V.Keldysha*. 2014. No. 95. 29 p. (In Russ.). DOI: [10.13140/RG.2.2.21968.00000](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21968.00000).
9. Amiro I.YA., Zaruckij V.A., Polyakov P.S. *Rebristye cilindricheskie obolochki* (Ribbed cylindrical shells). Kiev: Naukova dumka, 1973, 248 p.
10. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkih obolochek* (Thin shell theory). SPb: Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2010, 380 p.
11. Gol'denvejzer A.L. *Teoriya uprugih tonkih obolochek* (Theory of elastic thin shells). Moscow: Nauka Publ., 1976. 512 p.

13. Vlasov V.Z. Obshchaya teoriya obolochek (General theory of shells). Moscow: Gostekhizdat, 1949. 475 p.
14. Dmitriev V.G., Korovaytseva E.A., Popova A.R. Features of mathematical models construction for processes of hyperelastic shells of revolution deforming investigation // *Trudy MAI*. 2024. No. 137. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181875>.
15. Zveryaev E.M. Constructive theory of thin elastic shell // *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. 2016. No. 33. 25 p. (In Russ.). URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33>.
16. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2019. Vol. 83. No. 5–6, pp. 823–833. (In Russ.). DOI: [10.1134/S0032823519050126](https://doi.org/10.1134/S0032823519050126).
17. Firsanov V.V., Vo A.H. The study of the longitudinally stiffened cylindrical shells under action of local load by the refined theory // *Trudy MAI*. 2018. No. 102. (In Russ.). URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=98866>.
18. Firsanov V., Pham V.T. Stress-strain state of the spherical shell based on the refined theory // *Trudy MAI*. 2019. No. 105. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104174>.
19. Firsanov V.V., Vo A.H., Doan T.N. Studying stiffened shells stress state by the refined theory with account for ribs elasticity and clamped edge // *Trudy MAI*. 2019. No. 104. (In Russ.). URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=102130>.
20. Ahmedov N.K., Akperova S.B. Asimptoticheskij analiz trekhmernoj zadachi teorii uprugosti dlya radial'no-neodnorodnogo transversal'no-izotropnogo pologo cilindra (Asymptotic analysis of a 3d elasticity problem for a radially inhomogeneous transversally isotropic hollow cylinder) // *Mechanics of Solids*. 2011. T. 46. No. 4. P. 635–644. (In Russ.).

Информация об авторах

Любовь Ивановна Миронова, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры 902, МАИ, г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0927-4679>; e-mail: mironova_lub@mail.ru

Виктор Владимирович Балабанов, аспирант кафедры 902, МАИ, г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6464-9372>;
e-mail: v.v.balabanov98@gmail.com

Лев Евгеньевич Киселёв, ассистент кафедры 902, студент магистратуры, 902, МАИ, г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-1613-0149>;
e-mail: kiselev02lev@gmail.com

Information about the authors

Lyubov' I. Mironova, DSc, Associate Professor, Professor of Department 902, MAI, Moscow, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0927-4679>;
e-mail: mironova_lub@mail.ru

Victor V. Balabanov, graduate student, MAI, Moscow, Russia;
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6464-9372>; e-mail: v.v.balabanov98@gmail.com

Lev E. Kiselev, assistant, master's student, MAI, Moscow, Russia;
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-1613-0149>; e-mail: kiselev02lev@gmail.com

Получено 13 марта 2026 ● Принято к публикации 12 августа 2026 ● Опубликовано 31 августа 2026
Received 13 March 2026 ● Accepted 12 August 2026 ● Published 31 August 2026
