



Научная статья

УДК 629.7.02

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188829>

EDN: <https://www.elibrary.ru/VVSSBB>

## Аналитический метод определения основной частоты колебаний трехслойной панели со стержневым пирамидальным заполнителем

Сергей Александрович Пикулин<sup>1✉</sup>, Александр Витальевич Лопатин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнева,  
Красноярский край, Железнодорожный район, Красноярск, Российская Федерация

<sup>1</sup> Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева,  
Сибирский федеральный округ, Красноярский край, Красноярск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий (ФИЦ ИВТ),  
Новосибирск, Российская Федерация

<sup>1</sup> [19pikulin@mail.ru](mailto:19pikulin@mail.ru)✉

**Аннотация.** В статье представлено аналитическое решение задачи по определению основной частоты колебаний трехслойной панели со стержневым пирамидальным заполнителем, защемленной по контуру. Решение получено на основе усредненных механических характеристик стержневого заполнителя с применением метода Галеркина для решения уравнений движения. В качестве базисных функций для аппроксимации деформированной формы панели использовались решения задачи изгиба защемленной с двух концов балки с учетом деформаций сдвига. Актуальность задачи обусловлена исследованием нового типа заполнителя для трехслойных панелей – стержневого. Данный тип заполнителя имеет высокие механические характеристики и потенциально перспективен в силовых аэрокосмических конструкциях. Основная частота колебаний служит важной характеристикой динамического поведения конструкции. С целью оценки правильности полученного решения проведена верификация при помощи конечно-элементных моделей. Согласно результатам верификации определен диапазон параметров заполнителя, в котором аналитическое решение оказывается достаточно точным. Приведены рекомендации для коррекции усредненных характеристик заполнителя с целью получения точного решения во всем диапазоне исследуемых параметров. Представленное решение может быть использовано при проектировании трехслойных панелей со стержневым заполнителем любого вида при определении соответствующих усредненных характеристик. При необходимости решение может быть легко модифицировано для применения к иным граничным условиям.

**Ключевые слова:** трехслойная панель, стержневой заполнитель, основная частота колебаний, метод Галеркина

**Для цитирования:** Пикулин С.А., Лопатин А.В. Аналитический метод определения основной частоты колебаний трехслойной панели со стержневым пирамидальным заполнителем // Вестник Московского авиационного института. 2026. Т. 33. № 3. С. 129-139. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188829>

Original article

# Analytical Method for the Vibrations Fundamental Frequency Determining of a Three-Layer Panel with a Pyramidal Truss Core

Sergei A. Pikulin<sup>1✉</sup>, Aleksandr V. Lopatin<sup>2</sup><sup>1</sup> “Information Satellite Systems” Academician M.F. Reshetnev Company,  
Krasnoyarsk region, Zheleznogorsk, Russian Federation<sup>1</sup> Reshetnev Siberian State University of Science and Technology,  
Krasnoyarsk region, Krasnoyarsk, Russian Federation<sup>2</sup> Federal Research Center for Information and Computing Technologies, Novosibirsk, Russian Federation<sup>1</sup> 19pikulin@mail.ru✉

## Abstract

This article presents an analytical solution to the problem of the fundamental frequency of vibrations determining of a three-layer panel with a pyramidal truss core. The solution was obtained for panel, which edges are fixed rigidly around the perimeter. This problem was solved based on the averaged mechanical characteristics of the truss core and by the Galerkin method for solving the equations of motion. Solutions to the classical problem of bending a beam clamped at the two ends with account for the effect of shear deformations were used as basic functions for the panel deformed shape approximation.

The problem relevance is stipulated by the need to study a new type of cores for the three-layer panels, namely, the truss core. This type of core has high mechanical characteristics, which makes it especially prospective for application in the aerospace structures where high strength and lightness are required. The fundamental oscillation frequency of the panels is a key characteristic that determines the structure dynamic behavior, which stresses the importance of this work for dynamically loaded structures, including aerospace ones.

To confirm correctness of the obtained analytical solution, verification by the finite element models was performed. The verification procedure allowed determining the range of the truss core parameters, in which the analytical solution demonstrates sufficient accuracy. The identified range is critically important for practical application, as it allows focusing on the area of parameters where analytical and numerical results agreed.

Besides, the article provides recommendations for the core average characteristics adjusting, which will allow achieving greater accuracy within the entire range of the parameters studied. The presented analytical solution can be successfully applied in the design of the three-layer panels with truss cores of any type, since its accuracy is mainly determined by the accuracy of the specified average characteristics of the core.

If necessary, this solution can be easily adapted to apply to other boundary conditions. Thus, the obtained results can serve as a basis for further research and development in the field of the multilayer structures with the truss core, which is relevant for the state-of-the-art engineering solutions in the aerospace industry.

**Keywords:** three-layer panel, truss core, fundamental frequency of vibrations, Galerkin method

**For citation:** Pikulin S.A., Lopatin A.V. Analytical Method for the Vibrations Fundamental Frequency Determining of a Three-Layer Panel with a Pyramidal Truss Core. *Aerospace MAI Journal*. 2026;33(3):129–139. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188829>

## List of Figures

Fig. 1. Three-layer plate with a pyramidal truss core

Fig. 2. Beam under uniform load

Fig. 3. Three types of FEM *a* – beam FEM; *b* – volume FEM; *c* – FEM with shell elements

Fig. 4. Comparison of calculation results for three types of FEM

Fig. 5. Comparison of an analytical solution with a discrete FEM

Fig. 6. Comparison of an analytical solution with a FEM with shell elements

## List of Tables

Table. Results for two models, frequency in Hz

## Введение

Методы определения частот колебаний трехслойных панелей достаточно хорошо изучены [1]. Однако в основном они используются для анализа панелей с сотовым заполнителем. В последнее время появляются другие виды заполнителей. Например, стержневые [2–5]. Для оценки их характеристик требуются соответствующие методики расчета либо подтверждение применимости уже существующих методик.

Стержневые заполнители в России исследовались такими авторами, как В.И. Халиулин, В.Г. Гайнутдинов, И.Н. Абдуллин и др. В работах российских авторов [6–9] преимущественно решались задачи статической прочности, устойчивости и жесткости. Динамическим задачам уделено гораздо меньше внимания, чем у зарубежных авторов. Например, в работе [10] произведен анализ собственных частот колебаний и оптимизация параметров стержневого заполнителя с использованием метода Релея–Ритца для решения уравнений. А в работе [11] изучались вибрационные характеристики панели с двумя слоями стержневого заполнителя и тремя обшивками с применением метода Лежандра–Ритца. Динамические характеристики трехслойных панелей со стержневым заполнителем также изучались в работах [12–14]. Стоит отметить, что в приведенных статьях сравнение полученных аналитических решений производится с конечно-элементными моделями с усредненными характеристиками заполнителя.

Точность конечно-элементных моделей с усредненными характеристиками не может быть выше точности дискретной модели, в которой моделируется структура заполнителя, учитывается точечный контакт стержней с обшивками и т. д. Получаемые аналитические решения для применения в процессе проектирования должны быть верифицированы по дискретной модели.

В качестве объекта исследования в настоящей работе была выбрана трехслойная панель с пирамидальным стержневым заполнителем. Такие панели описаны, например, в работах [12, 15]. В качестве

задачи выбрано определение первой собственной частоты колебаний защемленной по контуру панели. При таких граничных условиях существенное влияние оказывают деформации сдвига, что должно быть учтено в решении.

С целью создания методики проектирования панели со стержневым пирамидальным заполнителем была выведена аналитическая формула для оценки основной частоты колебаний. Для подтверждения возможности использования полученного решения произведена верификация аналитической модели с помощью подробной конечно-элементной модели.

При выводе уравнений движения пластины учитывались деформации сдвига. Теоретические основы применяемого метода были заложены в статьях [16, 17]. Следует отметить, что данный метод был использован для определения только основной (первой) частоты колебаний, что можно считать достаточным в задаче проектирования. Для решения уравнений движения использовался метод Галеркина. Для базисной функции, аппроксимирующей форму колебаний, были выбраны уравнения, учитывающие деформации сдвига. Для определения основной частоты колебаний выведена аналитическая формула.

Аналитическое решение после его верификации позволит проектировать панели со стержневым заполнителем и получать наилучшие параметры заполнителя для обеспечения минимальной массы при требуемой основной частоте колебаний.

**Разрешающие уравнения.** В качестве объекта исследования выбрана трехслойная панель с композитными обшивками и пирамидальным стержневым заполнителем (рис. 1). Построим систему координат  $XYZ$  в срединной плоскости панели согласно рис. 1:  $a$  — длина пластины,  $b$  — ширина панели,  $t$  — суммарная толщина обшивок,  $\delta$  — высота заполнителя.

Рассмотрим уравнения равновесия трехслойной пластины с учетом сил инерции при движении. В данной системе пренебрегается влиянием инерции поворота, что дает малую погрешность

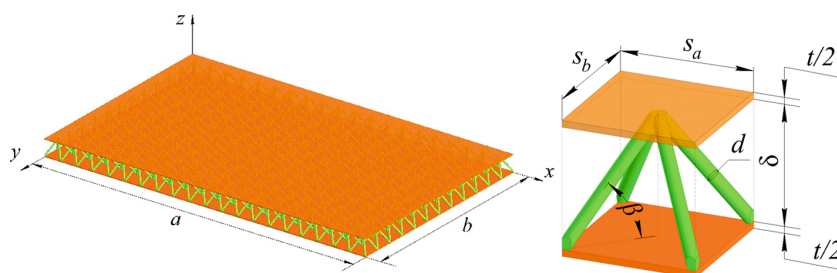


Рис. 1. Трехслойная пластина со стержневым пирамидальным заполнителем

в определении основной частоты колебаний для трехслойных панелей [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - B_p \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0; \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для решения необходимы физические

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y; \quad M_y = D_{21}\chi_x + D_{22}\chi_y; \\ M_{xy} &= D_{33}\chi_{xy}; \quad Q_y = K_y\psi_y \end{aligned} \quad (2)$$

и геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \chi_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad \chi_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \\ \psi_x &= \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \psi_y = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3)  $\tau$  – время;  $Q_x, Q_y$  – перерезывающие силы;  $M_x, M_y$  – изгибающие моменты;  $\chi_x, \chi_y$  – кривизны срединной плоскости;  $\chi_{xy}$  – кручение срединной плоскости;  $\psi_x, \psi_y$  – усредненные по толщине деформации поперечного сдвига;  $w$  – прогиб пластины;  $\theta_x, \theta_y$  – углы поворота нормали к срединной плоскости;  $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, D_{33}$  – изгибные жесткости пластины ( $D_{12} = D_{21}$ );  $B_p$  – инерциальный параметр.

Перепишем уравнения движения, используя физические и геометрические соотношения. Также представим перемещения точек пластины в виде функций времени:

$$\begin{aligned} w(x, y, \tau) &= w(x, y)e^{-i\omega\tau}; \\ \theta_x(x, y, \tau) &= \theta_x(x, y)e^{-i\omega\tau}; \\ \theta_y(x, y, \tau) &= \theta_y(x, y)e^{-i\omega\tau}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний;  $i = \sqrt{-1}$ ; функции  $w(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$  описывают форму пластины.

Перепишем систему (1) с учетом выражений (2)–(4):

$$\begin{aligned} K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + K_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_p \omega^2 w &= 0; \\ -K_x \frac{\partial w}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - K_x \theta_x + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} &= 0; \\ -K_y \frac{\partial w}{\partial y} + (D_{21} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - K_y \theta_y &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее для упрощения записи примем  $w = w(x, y), \theta_x = \theta_x(x, y), \theta_y = \theta_y(x, y)$ .

Полученная система однородных дифференциальных уравнений (5) имеет шестой порядок относительно переменных  $x, y$ . Необходимо определить по три граничных условия на краях пластины

$$\begin{aligned} \text{при } x=0, a: \quad w &= 0, \theta_x = 0, \theta_y = 0; \\ \text{при } y=0, b: \quad w &= 0, \theta_x = 0, \theta_y = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Механические свойства пластины учитываются через жесткости и плотности материалов обшивок и заполнителя. Принимается, что несущие слои являются однородными и ортотропными. Согласно работе [18], будем иметь

$$\begin{aligned} D_{mn} &= A_{mnt} \frac{t^3}{12} \xi_{mn} \quad (mn=11, 12, 22, 33); \\ K_x &= G_{xz\delta} \delta \zeta_{xz}; \quad K_y = G_{yz\delta} \delta \zeta_{yz}, \quad B_p = \rho_t t \zeta_p. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi_{mn} &= \xi + \frac{A_{mn\delta}}{A_{mnt}} \frac{\delta^3}{t^3}; \quad \xi_p = \xi + \frac{\rho_\delta}{\rho_t} \frac{\delta^3}{t^3}; \quad \xi = 1 + 3 \frac{\delta}{t} + 3 \frac{\delta^2}{t^2}; \\ \zeta_{xz} &= \frac{\left(1 + \frac{\delta}{t}\right)^2}{\frac{\delta}{t} \left(\frac{\delta}{t} + \frac{G_{xz\delta}}{G_{xz\delta}}\right)}; \quad \zeta_{yz} = \frac{\left(1 + \frac{\delta}{t}\right)^2}{\frac{\delta}{t} \left(\frac{\delta}{t} + \frac{G_{yz\delta}}{G_{yz\delta}}\right)}; \quad \zeta_p = 1 + \frac{\rho_\delta}{\rho_t} \frac{\delta}{t}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A_{mnt}, A_{mn\delta}$  ( $mn = 11, 12, 22, 33$ ) – коэффициенты жесткости несущего слоя и заполнителя;  $G_{xz\delta}, G_{yz\delta}, G_{xz\delta}, G_{yz\delta}$  – трансверсальные модули сдвига несущего слоя и заполнителя;  $\rho_t, \rho_\delta$  – плотности материалов несущего слоя и заполнителя.

Для ортотропного материала

$$A_{11s} = \bar{E}_{xs}; \quad A_{22} = \bar{E}_{ys}; \quad A_{12s} = \bar{E}_{xs} \nu_{xys}; \quad A_{33s} = G_{xys}.$$

Здесь  $s = t, \delta$ ;  $\bar{E}_{xs} = E_{xs}/(1 - \nu_{xys}\nu_{yxs})$ ;  $\bar{E}_{ys} = E_{ys}/(1 - \nu_{xys}\nu_{yxs})$ ;  $E_{xs}, E_{ys}$  – модули упругости в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;  $\nu_{xys}, \nu_{yxs}$  – коэффициенты Пуассона;  $G_{xys}$  – модуль сдвига в плоскости  $xy$ .

Для решения системы (5) с учетом граничных условий (6) необходимо выбрать аппроксимирующие функции  $w = w(x, y), \theta_x = \theta_x(x, y), \theta_y = \theta_y(x, y)$  таким образом, чтобы форма панели при колебаниях соответствовала основному тону. Такому условию удовлетворяет решение задачи об изгибе балки с жестко защемленными концами, нагруженной распределенной силой  $p$  (рис. 2).

Решение задачи об изгибе такой балки с учетом деформации поперечного сдвига приведено в работах [19, 20] и может быть записано так:

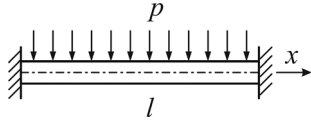


Рис. 2. Балка под действием равномерной нагрузки

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} + p &= 0; \quad \frac{dM}{dx} - Q = 0; \quad M = D\chi, \quad Q = K\psi; \\ \chi &= \frac{d\theta}{dx}; \quad \psi = \theta + \frac{dw}{dx}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $p$  – действующая нагрузка;  $M$ ,  $Q$  – изгибающий момент и поперечная сила;  $\chi$  – кривизна продольной оси балки;  $\psi$  – деформация сдвига;  $w$  – прогиб балки;  $\theta$  – угол поворота поперечного сечения;  $D$ ,  $K$  – изгибная и сдвиговая жесткости.

Из решения системы (9) получим описание формы деформированной балки через углы поворота и прогибы:

$$\begin{aligned} w &= p \frac{x^2}{2} \left( \frac{x^2}{12D} - \frac{1}{K} \right) + C_1 x \left( \frac{1}{K} - \frac{x^2}{6D} \right); \\ \theta &= \frac{1}{D} \left( -p \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right); \\ w &= p \frac{x^2}{2} \left( \frac{x^2}{12D} - \frac{1}{K} \right) + C_1 x \left( \frac{1}{K} - \frac{x^2}{6D} \right) - \\ &\quad - C_2 \frac{x^2}{2D} - C_3 \frac{x}{D} + C_4, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  – произвольные постоянные. Запишем граничные условия

$$\theta = 0; \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, l, \quad (11) \quad \text{где}$$

где  $l$  – длина балки (см. рис. 2).

Подставляя условия (11) в систему (10), найдем произвольные постоянные

$$C_1 = p \frac{l}{2}; \quad C_2 = -\frac{l^2}{12}; \quad C_3 = C_4 = 0. \quad (12)$$

С учетом постоянных (12) перепишем систему (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} R(x, y, F, T_x, T_y) &= \left( K_x \frac{d^2 U_x}{dx^2} U_y + K_y U_x \frac{d^2 U_y}{dy^2} \right) F + K_x \frac{dV_x}{dx} U_y T_x + K_y U_x \frac{dV_y}{dy} T_y + B_p \omega^2 U_x U_y F; \\ R_x(x, y, F, T_x, T_y) &= -K_x \frac{dU_x}{dx} U_y F + \left( D_{11} \frac{d^2 V_x}{dx^2} U_y + D_{33} V_x \frac{d^2 U_y}{dy^2} - K_x V_x U_y \right) T_x + (D_{12} + D_{33}) \frac{dU_x}{dx} \frac{dV_y}{dy} T_y; \\ R_y(x, y, F, T_x, T_y) &= -K_y U_x \frac{dU_y}{dy} F + (D_{21} + D_{33}) \frac{dV_x}{dx} \frac{dU_y}{dy} T_x + \left( D_{22} \frac{d^2 V_y}{dy^2} U_x + D_{33} \frac{d^2 U_x}{dx^2} V_y - K_y U_x V_y \right) T_y. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\theta = \frac{p}{12DI} V; \quad w = \frac{pl^4}{24D} U. \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} V &= \frac{x}{l} \left( 2 \frac{x^2}{l^2} - 3 \frac{x}{l} + 1 \right); \\ U &= \frac{x}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \left[ \frac{x}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) - 12\gamma \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\gamma = \frac{D}{Kl^2}. \quad (15)$$

Безразмерный параметр  $\gamma$  характеризует сдвиговую податливость балки.

**Решение уравнений движения.** С учетом полученного решения (14) для деформированной балки с защемленными концами и распределенной нагрузкой, получим выражение, аппроксимирующее форму деформированной панели

$$w = F U_x U_y; \quad \theta_x = T_x V_x U_x; \quad \theta_y = T_y V_y U_y. \quad (16)$$

Здесь  $F$ ,  $T_x$ ,  $T_y$  – неизвестные числа,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $V_x$ ,  $V_y$  – базисные функции:

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{x}{a} \left( \frac{x}{a} - 1 \right) \left[ \frac{x}{a} \left( \frac{x}{a} - 1 \right) - 12\gamma_x \right]; \\ U_y &= \frac{y}{b} \left( \frac{y}{b} - 1 \right) \left[ \frac{y}{b} \left( \frac{y}{b} - 1 \right) - 12\gamma_y \right]; \\ V_x &= \frac{x}{a} \left( 2 \frac{x^2}{a^2} - 3 \frac{x}{a} + 1 \right); \quad V_y = \frac{y}{b} \left( 2 \frac{y^2}{b^2} - 3 \frac{y}{b} + 1 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\gamma_x = \frac{D_{11}}{K_x a^2}; \quad \gamma_y = \frac{D_{22}}{K_y b^2}. \quad (18)$$

Параметры  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  являются безразмерными и описывают сдвиговые податливости пластины. Функции (16) удовлетворяют граничным условиям (6).

Подставив равенства (16) в дифференциальные уравнения (5), получим невязки для применения метода Галеркина (19).

Согласно методу Галеркина, невязки  $R$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  должны быть ортогональны к соответствующим базисным функциям, т. е.

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b R(x, y, F, T_x, T_y) U_x U_y dx dy &= 0; \\ \int_0^a \int_0^b R_x(x, y, F, T_x, T_y) V_x U_y dx dy &= 0; \\ \int_0^a \int_0^b R_y(x, y, F, T_x, T_y) U_x V_y dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставим невязки (19) в уравнения (20) и получим следующую систему:

$$\begin{aligned} & (K_x I_{2x} I_{1y} + K_y I_{1x} I_{2y}) F + K_x I_{3x} I_{1y} T_x + \\ & + K_x I_{1x} I_{3y} T_y + B_p \omega^2 I_{1x} I_{1y} F = 0; \\ & -K_x J_{3x} I_{1y} F + (D_{11} J_{2x} I_{1y} + D_{33} J_{1x} I_{2y} - K_x J_{1x} I_{1y}) T_x + \\ & + (D_{12} + D_{33}) J_{3x} I_{3y} T_y = 0 \\ & -K_y I_{1x} I_{3y} F + (D_{22} I_{1x} J_{2y} + D_{33} I_{2x} I_{1y} - K_y I_{1x} J_{1y}) T_y + \\ & + (D_{21} + D_{33}) I_{3x} J_{3y} T_x = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_{1x} &= \int_0^a U_x^2 dx; \quad I_{1y} = \int_0^b U_y^2 dy; \\ J_{1x} &= \int_0^a V_x^2 dx; \quad J_{1y} = \int_0^b V_y^2 dy; \\ I_{2x} &= \int_0^a \frac{d^2 U_x}{dx^2} U_x dx; \quad I_{2y} = \int_0^b \frac{d^2 U_y}{dy^2} U_y dy; \\ J_{2x} &= \int_0^a \frac{d^2 V_x}{dx^2} V_x dx; \quad J_{2y} = \int_0^b \frac{d^2 V_y}{dy^2} V_y dy; \\ I_{3x} &= \int_0^a \frac{dV_x}{dx} U_x dx; \quad I_{3y} = \int_0^b \frac{dV_y}{dy} U_y dy; \\ J_{3x} &= \int_0^a \frac{dU_x}{dx} V_x dx; \quad J_{3y} = \int_0^b \frac{dU_y}{dy} V_y dy. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставив  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $V_x$ ,  $V_y$  из системы (17) в соотношения (22), после интегрирования найдем

$$\begin{aligned} I_{1x} &= \frac{a \gamma_{1x}}{630}; \quad I_{1y} = \frac{b \gamma_{1y}}{630}; \quad J_{1x} = \frac{a}{210}; \quad J_{1y} = \frac{b}{210}; \\ I_{2x} &= \frac{2 \gamma_{2x}}{105a}; \quad I_{2y} = \frac{2 \gamma_{2y}}{105b}; \quad J_{2x} = -\frac{1}{5a}; \quad J_{2y} = -\frac{1}{5b}; \\ I_{3x} &= -\frac{\gamma_{3x}}{105}; \quad I_{3y} = \frac{\gamma_{3y}}{105}; \quad J_{3x} = \frac{\gamma_{3x}}{105}; \quad J_{3y} = \frac{\gamma_{3y}}{105}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_{1x} &= 1 + 108 \gamma_x + 3024 \gamma_x^2; \\ \gamma_{2x} &= 1 + 84 \gamma_x + 2520 \gamma_x^2; \\ \gamma_{3x} &= 1 + 42 \gamma_x; \\ \gamma_{1y} &= 1 + 108 \gamma_y + 3024 \gamma_y^2; \\ \gamma_{2y} &= 1 + 84 \gamma_y + 2520 \gamma_y^2; \\ \gamma_{3y} &= 1 + 42 \gamma_y. \end{aligned} \quad (24)$$

Выражения (23) подставим в уравнения (21) и затем получившиеся соотношения приведем к безразмерному виду, умножив каждое из них на величину  $ab/\sqrt{D_{11} D_{22}}$ . Полученную систему приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} a_{11} F + a_{12} F_x + a_{13} F_y - \eta b_{11} F &= 0; \\ a_{21} F + a_{22} F_x + a_{23} F_y &= 0; \\ a_{31} F + a_{32} F_x + a_{33} F_y &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь

$$F_x = a T_x; \quad F_y = b T_y. \quad (26)$$

Определим коэффициенты системы уравнений (25):

$$\begin{aligned} a_{11} &= 12 \left( \alpha \frac{\gamma_{2x}}{\gamma_x} \gamma_{1y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\gamma_{2y}}{\gamma_y} \gamma_{1x} \right); \\ a_{22} &= 3 \left( \alpha \frac{\gamma_{3x}}{\gamma_x} \gamma_{1y} + 12 \beta_2 \gamma_{2y} \right); \\ a_{33} &= 3 \left( \frac{1}{\alpha} \frac{\gamma_{3y}}{\gamma_y} \gamma_{1x} + 12 \beta_2 \gamma_{2x} \right); \\ a_{12} &= a_{21} = 6 \alpha \frac{\gamma_{3x}}{\gamma_x} \gamma_{1y}; \\ a_{13} &= a_{31} = 6 \frac{1}{\alpha} \frac{\gamma_{3y}}{\gamma_y} \gamma_{1x}; \\ a_{23} &= a_{32} = 36 (\beta_1 + \beta_2) \gamma_{3x} \gamma_{3y}; \\ b_{11} &= \gamma_{1x} \gamma_{1y}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \frac{b^2}{a^2}; \quad \beta_1 = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}; \quad \beta_2 = \frac{D_{33}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}; \quad (28)$$

$$\eta = \frac{B_p \omega^2 a^2 b^2}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}. \quad (29)$$

Из системы (25) получим выражение для  $\eta$ :

$$\eta = \frac{1}{b_{11}} \frac{a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2}{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}. \quad (30)$$

Преобразуем формулу (30) с учетом равенств (27)

$$\eta = 144 \frac{\frac{7}{2}a_{xy} + b_{xy} + 42(c_{1xy}\gamma_y + c_{2xy}\gamma_x) + 12(d_x\gamma_y + d_y\gamma_x)f_{xy}}{g_{xy} + 12(h_{1xy}\gamma_y + h_{2xy}\gamma_x) + 144\gamma_x\gamma_y f_{xy}}. \quad (31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{xy} &= \alpha\gamma_{3x}\gamma_{4x}\gamma_{1y}\gamma_{3y} + \frac{1}{\alpha}\gamma_{1x}\gamma_{3x}\gamma_{3y}\gamma_{4y}; \\ b_{xy} &= \beta_2\gamma_{2x}\gamma_{2y}(\gamma_{3x} + \gamma_{3y}) + 2(\beta_1 + \beta_2)\gamma_{3x}^2\gamma_{3y}^2; \\ c_{1xy} &= \alpha^2\beta_2\frac{\gamma_{2x}\gamma_{3x}\gamma_{4x}}{\gamma_{1x}}\gamma_{1y}; \quad c_{2xy} = \frac{1}{\alpha^2}\beta_2\frac{\gamma_{2y}\gamma_{3y}\gamma_{4y}}{\gamma_{1y}}\gamma_{1x}; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} d_x &= \alpha\frac{\gamma_{2x}}{\gamma_{1x}}; \quad d_y = \frac{1}{\alpha}\frac{\gamma_{2y}}{\gamma_{1y}}; \quad f_{xy} = \beta_2^2\gamma_{2x}\gamma_{2y} - (\beta_1 + \beta_2)^2\gamma_{3x}^2\gamma_{3y}^2; \\ g_{xy} &= \gamma_{1x}\gamma_{3x}\gamma_{1y}\gamma_{3y}; \quad h_{1xy} = \alpha\beta_2\gamma_{2x}\gamma_{3x}\gamma_{1y}; \quad h_{2xy} = \frac{1}{\alpha}\beta_2\gamma_{1x}\gamma_{2y}\gamma_{3y}; \\ \gamma_{4x} &= 1 + 60\gamma_x; \quad \gamma_{4y} = 1 + 60\gamma_y. \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение (31) определяет частотный параметр  $\eta$ . При известном  $\eta$  из формулы (29) найдем частоту колебаний

$$\omega = \frac{\lambda}{ab} \sqrt{\frac{D_{11}D_{22}}{B_p}}. \quad (34)$$

Здесь  $\lambda = \sqrt{\eta}$ .

Используя равенства (7), преобразуем формулу (34) к виду

$$\omega = \frac{1}{2}\lambda \frac{t}{ab} \sqrt{\frac{\sqrt{A_{11t}A_{22t}} \sqrt{\xi_{11}\xi_{22}}}{3\rho_t \zeta_p}}. \quad (35)$$

Выражение (35) определяет частоту колебаний основного тона закрепленной по контуру трехслойной панели.

**Определение параметров для анализа.** Для оценки усредненных характеристик стержневого пирамидального заполнителя могут быть использованы приближенные формулы [11]:

$$\begin{aligned} \rho_\delta &= \frac{\pi d^2 l \rho_s}{s_a s_b \delta}; \\ G_{xz\delta} &= \frac{E_s \pi d^2 \delta}{4l^3} \frac{s_a}{s_b}; \\ G_{yz\delta} &= \frac{E_s \pi d^2 \delta}{4l^3} \frac{s_b}{s_a}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $\rho_\delta$  — усредненная плотность заполнителя;  $G_{xz\delta}$ ,  $G_{yz\delta}$  — усредненные модули сдвига заполнителя;  $\rho_s$  — плотность материала стержней;  $d$  — диаметр стержней заполнителя;  $l$  — длина стержней запол-

нителя;  $s_a$ ,  $s_b$  — длина и ширина основания ячейки заполнителя;  $\delta$  — высота заполнителя.

Если материал заполнителя легкий, т. е. обладает малой жесткостью в направлениях  $x$  и  $y$ , то можно принять  $A_{mn\delta} = 0$  ( $mn = 11, 12, 22, 33$ ). Тогда из уравнения (9) следует, что  $\xi_{mn} = \xi$  ( $mn = 11, 12, 22, 33$ ), и равенства (18), (28) примут следующий вид:

$$\gamma_x = \frac{1}{12} \frac{A_{11t}}{G_{xz\delta}} \frac{\xi}{\zeta_{xz}} \frac{1}{\delta} \frac{1}{a^2}; \quad \gamma_y = \frac{1}{12} \frac{A_{22t}}{G_{yz\delta}} \frac{\xi}{\zeta_{yz}} \frac{1}{\delta} \frac{1}{b^2}. \quad (37)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{A_{11t}}{A_{22t}}} \frac{b^2}{a^2}; \quad \beta_1 = \frac{A_{12t}}{\sqrt{A_{11t}A_{22t}}}; \quad \beta_2 = \frac{A_{33t}}{\sqrt{A_{11t}A_{22t}}}. \quad (38)$$

Подставляя в формулу (37)  $\xi_{11} = \xi_{22} = \xi$ , получаем

$$\omega = \frac{1}{2} \lambda \frac{t}{ab} \sqrt{\frac{\sqrt{A_{11t}A_{22t}}}{3\rho_t} \frac{\xi}{\zeta_p}}. \quad (39)$$

В данной работе рассматривается трехслойная панель с композитными обшивками со схемой армирования, обеспечивающей одинаковые усредненные модули упругости в двух направлениях (направления 11 и 22). В качестве заполнителя рассматривается пирамидальный стержневой заполнитель.

Для несущего слоя примем в качестве материала углепластик со свойствами слоя:  $E_{xt} = E_{yt} = 65,6$  ГПа,  $G_{xyt} = G_{yzt} = G_{xzt} = 4$  ГПа,  $\mu_{xy} = \mu_{yz} = \mu_{xz} = 0,28$  (соответствует материалу, описанному в статье [21]). Плотность этого материала  $\rho_t = 1560$  кг/м<sup>3</sup>. Свойства материала заполнителя:  $E_s = 11,62$  ГПа,  $\rho_s = 1356$  кг/м<sup>3</sup> [15].

**Численный анализ.** Рассмотрим панель со следующими геометрическими характеристиками: длина панели  $a = 0,75$  м; ширина панели  $b = 0,5$  м. Толщина обеих обшивок равна 0,9 мм. Тогда суммарная толщина обшивок  $t = 1,8$  мм. Рассматривается заполнитель с диаметром стержней  $d = 2$  мм.

В расчетах варьируется высота заполнителя  $\delta$  в диапазоне от 20 до 60 мм с шагом 5 мм. Число ячеек  $n_b$  задается вдоль короткой стороны панели и меняется от 10 до 50 с шагом 5 мм. Число ячеек вдоль длинной стороны панели получается автоматически по следующим формулам:

$$s_b = \frac{b}{n_b}, \quad n_b = \text{round}\left(\frac{a}{s_b}\right). \quad (40)$$

Здесь “round” представляет функцию округления числа до ближайшего целого.

С целью выполнения анализа была написана программа, вычисляющая циклическую частоту

ту колебаний по входным параметрам согласно формуле:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \lambda \frac{t}{ab} \sqrt{\frac{A_{11t} A_{22t}}{3\rho_t}} \frac{\xi}{\zeta_p}, \text{ Гц.} \quad (41)$$

Ко входным параметрам относятся:

- геометрические:  $t, \delta, a, b, d$ ;
- свойства материала обшивки:  $E_{xt}, E_{yt}, \nu_{xyt}, \nu_{yxt}, G_{xyt}, \rho_s$ ;
- свойства заполнителя:  $E_s, \rho_s, d, n_b$ .

**Верификация аналитической модели.** Для оценки правильности решения все результаты сравнивались с результатами решения методом конечных элементов, реализованным в ANSYS. Было рассмотрено три вида КЭМ:

1. Дискретная, в которой заполнитель моделировался балочными элементами, а обшивки – элементами типа SHELL. Данная модель является наиболее полной и точной. Модель принята в качестве контрольной.

2. Объемная, в которой заполнитель моделировался элементами типа SOLID с усредненными характеристиками заполнителя, а обшивки – элементами типа SHELL.

3. КЭМ с поверхностными элементами, в которой панель моделируется элементами типа SHELL с заданной структурой слоев.

Три типа конечно-элементных моделей представлены на рис. 3.

**Результаты расчета.** Сравнение результатов расчета по трем видам КЭМ приведено на рис. 4.

Сравнение дискретной КЭМ и аналитического решения приведено на рис. 5.

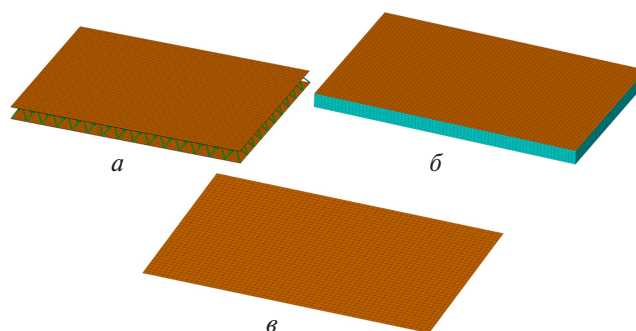


Рис. 3. Три типа КЭМ: а – балочная; б – объемная; в – КЭМ с поверхностными элементами

Сравнение аналитического решения с КЭМ с поверхностными элементами приведено на рис. 6.

Полученные результаты для сравнения аналитической модели с балочной КЭМ приведены в таблице.

**Коррекция усредненных характеристик.** С целью обеспечения возможности использования аналитической модели в процессе проектирования необходимо скорректировать усредненные характеристики заполнителя.

Для этого в дискретных точках ( $n_b, H$ ) для аналитической модели определялись модули сдвига заполнителя, обеспечивающие частоту, близкую к дискретной модели. Плотность при этом считается определенной верно.

Далее полученные результаты интерполируются на всю область поиска кубическим поверхностным сплайном. В процессе проектирования в аналитической модели берется соответствующее значение модуля сдвига.

Процесс расчета дискретной модели был автоматизирован при помощи параметрического языка

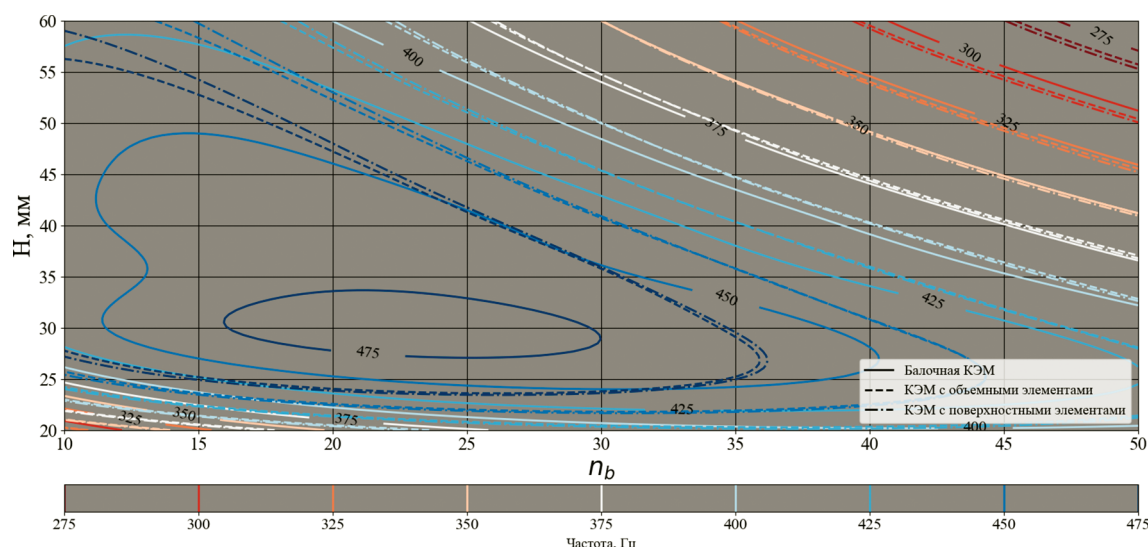


Рис. 4. Сравнение результатов расчета по трем видам КЭМ

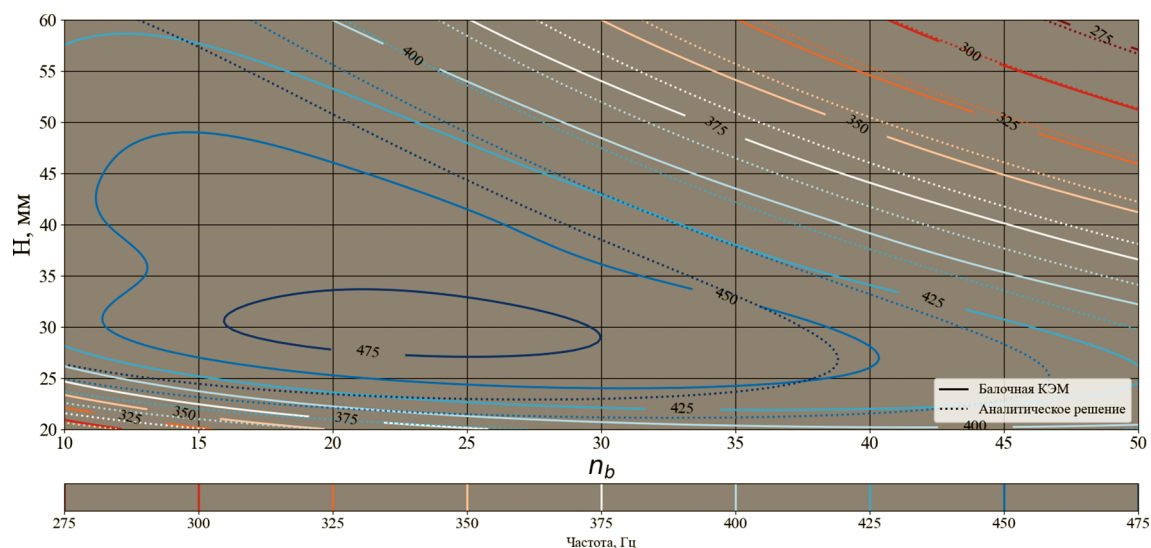


Рис. 5. Сравнение аналитического решения с дискретной КЭМ

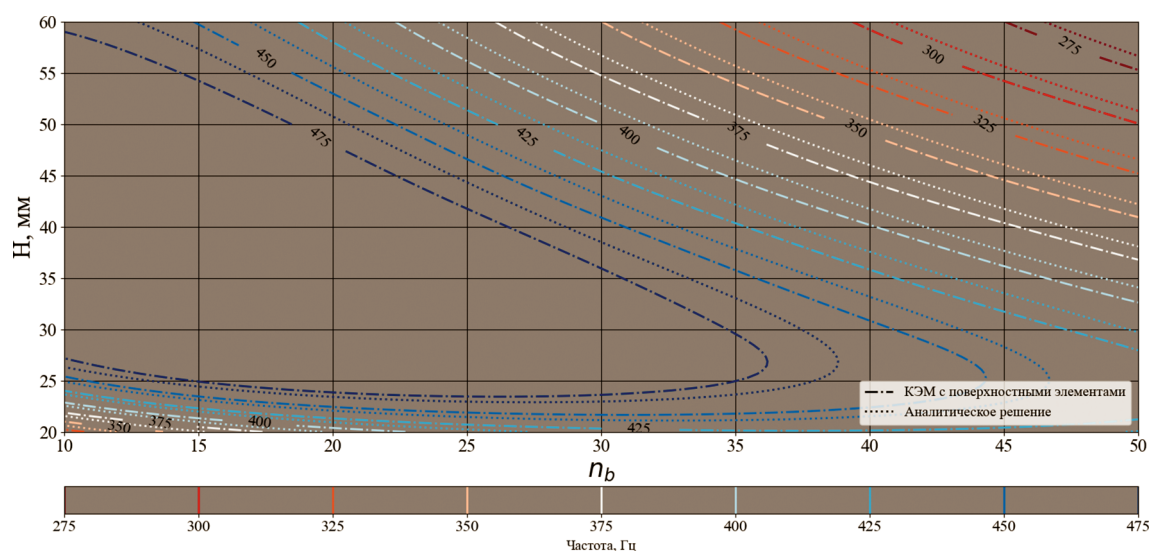


Рис. 6. Сравнение аналитического решения с КЭМ с поверхностными элементами

программирования ANSYS APDL, что позволит быстро производить расчет требуемых характеристик для исследуемой панели типа заполнителя и области изменяемых параметров. Результаты по модулям сдвига необходимо получить для ряда размеров ячеек (ширина основания – высота) и далее их можно будет применять в других моделях при различных параметрах панели.

Для максимального отклонения среди рассчитанных значений (стержни диаметром 2 мм;  $n_b = 25$ ;  $H = 10$  мм; отклонение частоты 28,5%) потребовалось уменьшение модуля сдвига до величины в 51% от начальной.

## Выводы

1. Аналитическая модель довольно точно совпадает с решением методом конечных элементов

с применением модели с поверхностными элементами. Это говорит о справедливости полученного решения. Подобная сходимость показана и в работах [10–12] с применением других методов решения.

2. КЭМ, построенные с применением объемных элементов и с применением поверхностных элементов, достаточно хорошо совпадают между собой. Это говорит о возможности использования КЭМ с поверхностными элементами в решении задач с применением крупных сборок (например, при проектировании летательных аппаратов), что существенно сократит размерность моделей.

3. КЭМ, в которых используются усредненные характеристики, а также аналитическая модель совпадают с точной дискретной КЭМ только при большом числе ячеек заполнителя (свыше 30) и

Сравнение двух расчетных моделей, частота в Гц

| H, мм                                                                                                                                | n <sub>b</sub>        |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|                                                                                                                                      | 10                    | 15                    | 20                    | 25                    | 30                    | 35                    | 40                    | 45                    | 50                    |
| 10                                                                                                                                   | <b>281,3</b><br>332,1 | <b>381,3</b><br>452,0 | <b>437,0</b><br>521,5 | <b>427,8</b><br>549,0 | <b>439,4</b><br>550,4 | <b>442,6</b><br>540,8 | <b>438,6</b><br>525,5 | <b>430,4</b><br>506,2 | <b>419,4</b><br>485,4 |
| 15                                                                                                                                   | <b>321,7</b><br>373,4 | <b>422,6</b><br>484,8 | <b>470,7</b><br>540,5 | <b>459,7</b><br>555,6 | <b>463,2</b><br>547,7 | <b>458,4</b><br>530,8 | <b>447,5</b><br>509,7 | <b>433,4</b><br>486,3 | <b>417,7</b><br>462,5 |
| 20                                                                                                                                   | <b>351,6</b><br>401,8 | <b>446,7</b><br>498,7 | <b>483,7</b><br>538,7 | <b>470,1</b><br>541,9 | <b>465,2</b><br>526,2 | <b>453,3</b><br>503,9 | <b>436,9</b><br>479,0 | <b>418,5</b><br>453,1 | <b>399,9</b><br>428,2 |
| 25                                                                                                                                   | <b>372,4</b><br>419,7 | <b>457,7</b><br>500,0 | <b>483,0</b><br>525,4 | <b>466,4</b><br>518,7 | <b>454,3</b><br>497,3 | <b>436,8</b><br>471,5 | <b>416,7</b><br>444,3 | <b>395,7</b><br>417,5 | <b>375,6</b><br>392,5 |
| 30                                                                                                                                   | <b>385,9</b><br>429,6 | <b>459,5</b><br>493,6 | <b>474,0</b><br>506,5 | <b>454,3</b><br>492,3 | <b>436,8</b><br>466,9 | <b>415,5</b><br>439,0 | <b>393,0</b><br>410,8 | <b>370,6</b><br>383,8 | <b>350,0</b><br>359,3 |
| 35                                                                                                                                   | <b>393,6</b><br>433,5 | <b>455,3</b><br>482,7 | <b>460,5</b><br>485,5 | <b>438,1</b><br>465,6 | <b>416,6</b><br>437,6 | <b>392,7</b><br>408,5 | <b>369,0</b><br>380,1 | <b>346,1</b><br>353,4 | <b>325,4</b><br>329,8 |
| 40                                                                                                                                   | <b>397,0</b><br>433,1 | <b>447,3</b><br>469,4 | <b>444,8</b><br>464,1 | <b>420,1</b><br>440,1 | <b>395,8</b><br>410,4 | <b>370,3</b><br>380,9 | <b>346,1</b><br>352,6 | <b>323,1</b><br>326,6 | <b>302,9</b><br>303,9 |
| 45                                                                                                                                   | <b>397,1</b><br>429,8 | <b>437,0</b><br>455,0 | <b>428,3</b><br>443,3 | <b>401,7</b><br>416,2 | <b>375,6</b><br>385,6 | <b>349,2</b><br>356,1 | <b>324,9</b><br>328,2 | <b>302,2</b><br>303,0 | <b>282,5</b><br>281,2 |
| 50                                                                                                                                   | <b>394,9</b><br>424,4 | <b>425,5</b><br>440,3 | <b>411,7</b><br>423,6 | <b>383,8</b><br>394,3 | <b>356,5</b><br>363,2 | <b>329,6</b><br>333,9 | <b>305,5</b><br>306,6 | <b>283,4</b><br>282,3 | <b>264,3</b><br>261,5 |
| Примечание.<br>1-е значение в ячейке – балочная КЭМ (выделено полужирным шрифтом);<br>2-е значение в ячейке – аналитическое решение. |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |

при достаточно толстых панелях (от 40 мм). Максимальное отклонение по частоте в исследуемом диапазоне не превысило 28,5%.

4. Для повышения точности аналитического решения необходима новая методика определения усредненных характеристик. Например, можно использовать дискретную КЭМ для вычисления характеристик, а результаты хранить в виде таблиц.

5. Выявлено, что основной причиной отклонения результатов для моделей с усредненными характеристиками является неточность определения усредненных модулей сдвига.

**Конфликт интересов / Conflict of Interests**  
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no relevant conflict of interests

**Список источников / References**

- Morozov EV, Lopatin AV. Fundamental Frequency of Fully Clamped Composite Sandwich Plate. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2010;12(5):591-619. DOI: 10.1177/1099636209106366
- Benedetti M, Plessis A, Ritchie RO, et al. Architected cellular materials: A review on their mechanical properties towards fatigue-tolerant design and fabrication. *Materials Science and Engineering R Reports*. 2021;144(4):100606. DOI: 10.1016/j.mser.2021.100606
- Hunt CJ, Morabito F, Grace C, et al. A review of composite lattice structures. *Composite Structures*. 2022;284(2):115120. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.115120
- Hanks B, Berthel J, Frecker M, et al. Mechanical properties of additively manufactured metal lattice structures: Data review and design interface. *Additive Manufacturing*. 2020;35:101301.
- Khan N, Riccio A. A systematic review of design for additive manufacturing of aerospace lattice structures: Current trends and future directions. *Progress in Aerospace Sciences*. 2024; 149(2):101021. DOI: 10.1016/j.paerosci.2024.10102
- Абдуллин И.Н. Расчетные и экспериментальные исследования жесткости и прочности трехслойных конструкций с заполнителем в виде повторяющихся пирамидальных ячеек // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2015. Т. 71. № 1. С. 5–12.  
Abdullin IN. Computational and experimental studies of stiffness and strength of three-layer structures with filler in the form of repeating pyramidal cells. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva*. 2015;71(1):5-12. (In Russ.).

7. Гайнутдинов В.Г. Прочностной анализ конструкций со стержневым заполнителем // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. № 1. С. 3-7.  
Gainutdinov VG. Strength analysis of structures with truss filler. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsonnaya tekhnika*. 2015(1): 3-7. (In Russ.).
8. Гайнутдинов В.Г., Сыздыков Е.К., Нуретдинов И.Н. Расчет устойчивости конструкций методом минимального множителя без определения предварительного напряженного состояния // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1993. № 3. С. 8-11.  
Gainutdinov VG, Syzdykov EK, Nuretdinov IN. Calculation of structural stability by the minimum multiplier method without determining the preliminary stress state. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsonnaya tekhnika*. 1993(3):8-11. (In Russ.).
9. Гайнутдинов В.Г., Гайнутдинова Т.Ю., Абдуллин И.Н. О построении диаграмм ограничений при определении проектных параметров жесткости и прочности ферменного заполнителя // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17. №. 4. С. 27-36. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-4-27-36  
Gainutdinov VG, Gainutdinova TYu, Abdullin IN. Construction of limitation diagrams for truss core stiffness and strength parameters. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie*. 2018;17(4):27-36. (In Russ.).
10. Chen Y, Zhong R, Wang Q, et al. Free vibration analysis and multi-objective robust optimization of three-dimensional pyramidal truss core sandwich plates with interval uncertain parameters. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2024;108(19):105401. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2024.105401
11. Meng S, Wang Q, Zhong R, et al. Legendre–Ritz solutions for vibration characteristics of three-dimensional double-layer lattice truss sandwich plates. *Thin–Walled Structures*. 2024;203:112185. DOI: 10.1016/j.tws.2024.112185
12. Ma T, Zhang W, Zhang YF, et al. Nonlinear vibrations, bifurcations and chaos piezoelectric composite lattice sandwich plate with four simply supported edges. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2024;183:114940. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114940
13. Yang X, Chen Z, Yang J, et al. Static and dynamic response of pyramidal lattice sandwich plate with composite face sheets reinforced by graphene platelets. *Engineering Structures*. 2024;310:118122. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.118122
14. Zhang C, Qiao H, Yang L, et al. Vibration characteristics of additive manufactured IWP-type TPMS lattice structures. *Composite Structures*. 2024;327(3):117642. DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.117642
15. Zhao R, Gu X, Wu T, et al. Compression behavior of direct compounded compression molded short carbon fiber reinforced thermoplastic pyramidal lattice truss core. *Composites Part B: Engineering*. 2024;284:11686. DOI: 10.1016/j.compositesb.2024.111686
16. Reissner E. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 1945;12(2):69-77. DOI: 10.1115/1.4009435
17. Mindlin RD. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 1951;18(1):31-38. DOI: 10.1115/1.4010217
18. Vasiliev VV. *Mechanics of composite structures*. Washington: Taylor & Francis; 1993. 506 p.
19. Whitney JM. *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*. Technomic: Lancaster, Pennsylvania; 1987. 360 p.
20. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.  
Korolev VI. *Layered anisotropic plates and shells made of reinforced plastics*. Moscow: Mashinostroenie; 1965. 180 p. (In Russ.).
21. Wang DW, Ma L, Wang XT, et al. Sound transmission loss of laminated composite sandwich structures with pyramidal truss cores. *Composite Structures*. 2019;220:19-30. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.03.077

Статья поступила в редакцию / Received 05.06.2026  
Одобрена после рецензирования / Revised 17.06.20  
Принята к публикации / Accepted 21.06.2026