

**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(национальный исследовательский университет)**

На правах рукописи

**Коновалова Анна Александровна**

**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ  
УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ  
АВТОМАТНОГО ТИПА**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации  
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., доцент  
Бортаковский Александр Сергеевич

Москва 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Достаточные условия оптимальности дискретных систем автоматного типа при однократных переключениях .....	20
1.1. Постановки задач .....	20
1.2. Достаточные условия оптимальности .....	26
1.3. Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления .....	40
1.4. Примеры оптимального синтеза при однократных переключениях.....	50
1.5. Синтез следящей системы автоматного типа .....	61
1.6. Связь достаточных условий с необходимыми .....	70
1.7. Выводы .....	75
2. Достаточные условия оптимальности дискретных систем автоматного типа при мгновенных многократных переключениях .....	77
2.1. Процессы с мгновенными многократными переключениями .....	77
2.2. Постановки задач .....	84
2.3. Достаточные условия оптимальности .....	89
2.4. Алгоритм синтеза субоптимального позиционного управления.....	98
2.5. Примеры оптимального синтеза при мгновенных многократных переключениях .....	108
2.6. Выводы .....	119
3. Оптимальный вывод спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя.....	120
3.1. Схема вывода спутника на геостационарную орбиту с использованием разгонного блока "Бриз-М" .....	120
3.2. Постановка задачи.....	122
3.3. Применение условий оптимальности.....	125
3.4. Алгоритм приближенного решения задачи .....	127
3.5. Результаты расчетов.....	132
3.6. Выводы .....	136
Заключение.....	137
Список использованных источников.....	138

## ВВЕДЕНИЕ

Современные системы автоматического управления летательными аппаратами (ЛА) являются иерархическими. Цель управления, как правило, достигается в результате многоэтапного процесса при использовании разных режимов функционирования. Управление ЛА в каждом режиме выполняется системой нижнего уровня иерархии, а переход от одного этапа к другому – системой более высокого уровня. На высшем уровне иерархии управление фактически состоит в переключении режимов. Такая организация процесса управления характерна для переключаемых систем. В современной теории управления и ее приложениях подобные системы образуют отдельный класс. Их исследование и применение идет с нарастающей интенсивностью.

Системы с переключениями привлекали внимание исследователей еще в 50-е годы прошлого столетия. Прообразом таких систем считаются обычные релейные системы [97,100] и системы с переменной структурой [44]. Оптимальность релейных систем обнаружилась уже в первых задачах синтеза систем, оптимальных по быстродействию, – в примерах А.А. Фельдбаума [4,91] и Д. Бушоу [4,107]. После доказательства принципа максимума [79] стало ясно, что оптимальность релейного управления свойственна тем задачам, в которых гамильтониан является аффинной функцией управления. Таких задач в области авиационной и космической техники очень много. Дело в том, что управляющие воздействия, обычно применяемые в ЛА, входят в уравнения движения, а, значит, и в гамильтониан линейно. Например, тяга реактивного двигателя, технически ограниченная максимальным значением, ограниченные по модулю отклонения аэродинамических рулей самолетов, ограниченные моменты гироскопов, применяемые для угловой стабилизации космических аппаратов (КА), и т.п. Особое место в теории оптимального управления занимают задачи с эффектом Фуллера [50,93] и скользящие режимы [34,38,60,88], в которых оптимальные релейные управления имеют неограниченное (счетное) множество переключений. Заметим, что эти режимы представляют не только теоретический интерес. Они встречаются во многих прикладных задачах управления движением ЛА [60,89].

Рассмотрим основные классы систем, в которых применяется управление с переключениями.

Различают системы [32], в которых переключения производятся под влиянием внешней среды, сбоев, отказов элементов, подсистем (скачкообразное изменение параметров структуры как объекта, так и обратной связи) – такие системы называют системами со структурными изменениями (возмущениями или управлениями). Системы, для которых структурные изменения (переключения управления) имеются только в контуре обратной связи – называют

системами с переменной структурой (СПС). В монографии Е.А. Барбашина [9] системами с переменной структурой называются системы, работа которых основана на принципе скачкообразного изменения параметров обратной связи (регулятора). На ряд преимуществ, которыми обладают системы с изменяемыми коэффициентами усиления, обращал внимание А.М. Летов [64]. А в 60-е годы в разрабатываемой С.В.Емельяновым и его учениками теории систем автоматического управления с переменной структурой [44,45] делается акцент на использование скользящих режимов. Именно в таком варианте достигается полная независимость (инвариантность) уравнений движения от факторов неопределенности (возмущений параметров и внешних сил). В теории систем с переменной структурой эффективно решались следующие актуальные задачи теории управления: основные задачи теории инвариантности, задачи управления при различного рода ограничениях, задачи стабилизации сильно неопределенной системы, задачи идентификации параметров динамических систем и другие.

Импульсные системы представляют собой динамические системы, в которых вектор состояния изменяется непрерывно, а в некоторые моменты времени – скачком. Для описания динамических систем с импульсными воздействиями применяются дифференциальные уравнения с мерами [43,49,71,98,99,123]. Они задают универсальную форму описания траекторий как при непрерывном изменении, так и при скачках. Наиболее полное отражение работ в этом направлении представлено в [43,71], где рассмотрены необходимые условия оптимальности, а также существование решений и их устойчивости. Частным случаем импульсных систем служат дискретно-непрерывные системы (ДНС). Монография [71] содержит изложение теории данных систем. ДНС, если "удалить" в них непрерывную составляющую, будут очень близкими к системам автоматного типа (САТ), которые рассматриваются в диссертации. Конечно, эти системы отличаются формами описания: в моделях ДНС используются дифференциальные уравнения, а в САТ – рекуррентные уравнения или включения. Но это "внешнее" отличие. По существу, системы различаются определением траектории. Это "внутреннее", содержательное отличие разбирается ниже во введении. Нужно заметить, что в [71] получены условия регулярности, а также необходимые условия оптимальности ДНС. В диссертации речь идет о достаточных условиях оптимальности. Поэтому, даже в тех случаях, когда уравнения дают один и тот же класс траекторий, результаты диссертации не пересекаются с результатами [71].

Системы с переменной структурой и импульсные системы относятся к классу гибридных систем, поскольку их эволюция происходит в непрерывно-дискретном времени, а динамика состояния характеризуется интервалами непрерывности и скачкообразным изменением в некоторые (дискретные) моменты времени.

Гибридную систему, в которой правило переключения задается в логической форме, а вектор состояния наряду с обычными переменными содержит логические переменные, описываемые логическим автоматом, или алгоритмом логического вывода, – называют логико-динамической [10,14,15,46,47,66,84,85,121]. Логическая часть системы представляет собой автомат с памятью, управляющий динамической частью. Многие работы, относящиеся к гибридным системам, посвящены разработке именно «логической составляющей» автомата: представление знаний, системы вывода теорем и т.п., вплоть до создания интеллектуальных компонентов системы управления [31,111,112,113,121]. Например, разработанная в [14] математическая модель логико-динамической системы (ЛДС) применима для описания широкого круга многорежимных систем автоматического управления техническими комплексами, технологическими и экономическими процессами, а также для описания бортовых оперативносоветующих систем управления движением летательных аппаратов [31,57,63,67,68,101]. Поведение динамической части ЛДС описывается дифференциальными уравнениями, а работа логической части, моделирующей автомат с памятью, – рекуррентными включениями или уравнениями. Логическая (автоматная) часть ЛДС характеризует операционную ситуацию, в которой происходит управляемое движение динамической части ЛДС, и может меняться дискретным образом в рамках одной операционной ситуации, либо изменять саму операционную ситуацию. Такими соотношениями описывается движение летательных аппаратов, управляемых с помощью бортовых вычислительных комплексов [90]. В работах [17] получены достаточные условия оптимальности ЛДС, а в [16] – необходимые. Модель ЛДС здесь "расширена": переменные, описывающие состояние автоматной части, необязательно булевы. Рассматриваются случаи, когда эти переменные целочисленные, либо действительные.

Частным случаем ЛДС являются динамические системы с автоматной частью [15,31]. В этих системах управление динамикой осуществляется только автоматом. Других управляющих воздействий нет, в отличие от ЛДС, где имеется управление, формируемое в самой динамической части системы. Несмотря на это упрощение, модель динамической системы с автоматной частью охватывает широкий круг прикладных задач. В [15] получены достаточные условия оптимальности позиционной конструкции автомата, выведены уравнения для ее нахождения.

В монографии [79] была поставлена задача оптимального управления непрерывными системами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, и получен основной классический результат этой теории – принцип максимума Понтрягина. Наряду с непрерывными системами [1,3,6,7,30] аналогичные задачи были сформулированы и решены для дискретных систем управления [13,51,80], движение в которых задается рекуррентными (разностными) уравнениями. Эти постановки "объединяются" в задаче оптималь-

ного управления непрерывно-дискретными системами [25], в которых поведение объекта управления описывается как непрерывными, так и дискретными переменными. В непрерывно-дискретных системах (НДС) изменение состояния непрерывной части происходит непрерывно, согласно дифференциальным уравнениям, а изменение состояния дискретной части происходит дискретно, согласно рекуррентным (разностным) уравнениям. В [25] сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности, а также выведены уравнения для нахождения функции цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана). Эти системы являются частным случаем НДС потому, что *тактовые* моменты времени, в которые происходят изменения состояния дискретной части, заданы заранее.

Наиболее востребованной на практике является задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) Летова – Калмана. Это задача синтеза оптимального позиционного управления, т.е. управления с обратной связью, для линейной системы с квадратичным критерием качества. Для непрерывных систем, описываемых дифференциальными уравнениями, решение проблемы АКОР приводится в [65], для дискретных – в [55]. Среди многочисленных обобщений проблемы АКОР выделим ее непосредственный перенос в классы НДС, НДС и НДС с мгновенными многократными переключениями дискретной части [19]. В последних двух классах оптимальные регуляторы получаются кусочно-линейными, а функция цены – кусочно-квадратичная. Напомним, что решением проблемы АКОР в первоначальной постановке [65] и в большинстве обобщений [8] служат линейные регуляторы, а функция цены – квадратичная.

Важным подклассом гибридных систем являются переключаемые системы. Под переключаемой понимают многорежимную динамическую систему, состоящую из семейства непрерывных (или дискретных) по времени подсистем и устройства, которое управляет переключениями режимов. Работа устройства задается с помощью условий в виде ограничений по времени, по состоянию, в виде последовательности событий в логической форме с применением условия переключения на основе логического вывода. Процессы в таких системах имеют два уровня описания. На нижнем уровне они представляются дифференциальными или разностными уравнениями (в каждом режиме), на верхнем уровне – дискретным процессом переключения режимов. В работах [102,117,118] рассматриваются разные задачи стабилизации таких систем. Движение динамической части задается системой линейных дифференциальных уравнений, матрица коэффициентов которой зависит от дискретного параметра. Придавая различные значения этому параметру, в зависимости от текущего состояния объекта управления, получаем разные системы уравнений и, следовательно, разные траектории движения объекта. Более общие модели переключаемых систем описываются системами дифференциальных или разностных уравнений с переключениями правых частей. Статья

[84], видимо, была первой работой, в которой рассматривалась задача оптимального управления переключаемой системой. Объект управления описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, а логическая часть определяет ее правую часть, причем правая часть выбирается из некоторого конечного множества. Другими словами, автомат управляет движением объекта, выбирая ту или иную траекторию из конечного множества допустимых типовых траекторий. При этом оптимальная траектория составляется по кусочкам из набора типовых траекторий. В работах [104,105] получены необходимые условия оптимальности переключаемых систем. Для вычисления градиента функционала применялась вариация конечного числа моментов переключения, а затраты на переключение состояния не учитывались. В [91] написано "уравнение Беллмана для гибридных систем". Фактически, это уравнение представляет собой достаточные условия оптимальности переключаемой системы, которая имеет конечное множество допустимых состояний автоматной части.

Управляемые процессы с переключениями встречаются и в стохастических системах, которые меняют свои свойства скачкообразно в случайные моменты времени. Такие системы относятся к системам со случайной структурой. Исследованию таких систем посвящено большое количество работ, в частности [5,29,53,72,74,82,87]. В диссертации стохастические процессы не рассматриваются.

Все описанные выше классы детерминированных динамических систем относятся к гибридным системам [31,40,69,70,81,83,103-106,108-113,119-122]. Под гибридной системой понимается система [32], в которой процессы имеют несколько уровней разнородного описания, а состояние содержит непрерывные и дискретные компоненты. Такие системы встречаются в прикладных задачах управления механическими, электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях и во многих других областях. Структурные изменения в процессе функционирования, многорежимность, разнородность описания процессов – особенности многих технических систем. Основанные на событиях и логических правилах организации переключений между различными управляющими устройствами методы интеллектуального, интеллектуального управления интенсивно развиваются и применяются в различных областях благодаря достижениям в информатике и компьютерной технике [31]. Кроме того, существует большой класс систем, которые могут быть стабилизированы, с помощью переключения законов управления, но не могут быть стабилизированы никаким (т.е. одним непрерывным) статическим законом управления с обратной связью по состоянию. Именно этим и объясняется возрастающий интерес к исследованию таких систем специалистов разного профиля. Поэтому гибридные системы стали областью исследований, относящейся к математике, теории управления, информатике и области, именуемой искусственным интеллектом.

В диссертации рассматриваются дискретные системы автоматного типа, которые служат математическими моделями устройств управления в форме автомата с памятью. САТ моделирует управление переключениями режимов работы сложных динамических систем и является одной из составляющих гибридных [32,106,108,110,120,122,124] и логико-динамических [10,14,46,47,84,85,121] систем, динамических систем с автоматной частью [15,31]. Состояние САТ определяет тип и параметры функционирования динамической системы. Изменения состояния САТ соответствуют смене режима работы сложной системы. Хотя работа САТ протекает в непрерывном времени, изменения ее состояний (*переключения*) происходят в некоторые дискретные (тактовые) моменты времени. Эти тактовые моменты не заданы заранее и определяются в процессе управления. На рис.В.1 схематически изображены системы управления с переключениями.



Рис.В.1

В левой части рисунка перечислены системы, состояние которых меняется и непрерывно, и дискретно (скачкообразно); в правой части – системы с дискретным (скачкообразным) изменением состояния. Все системы функционируют в непрерывном времени, за исключе-

нием дискретных, которые выделены штриховой рамкой. Вертикальные стрелки, связывающие блоки, отражают отношение включения: системы нижнего уровня являются частным случаем систем верхнего уровня. Горизонтальные стрелки показывают, какие системы содержат в своей структуре системы автоматного типа.

Кратко сформулируем математическую постановку задачи синтеза САТ [21] и проведем сравнение с известными задачами оптимального управления динамическими системами.

Траектория дискретной САТ представляется непрерывной справа кусочно-постоянной функцией  $y : T \rightarrow \mathbb{R}^m$ , определенной на промежутке  $T = [t_0, t_1]$ . Точки разрыва функции  $y(\cdot)$  образуют конечную возрастающую последовательность  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(y(\cdot))$  тактовых моментов времени,  $\mathcal{F}^1 \subset T$ . В каждый тактовый момент времени состояние САТ изменяется, происходит переключение состояния, а функция  $y(\cdot)$  имеет скачок. Такие траектории САТ будем называть траекториями с *однократными* переключениями. Типовая траектория САТ с однократными переключениями в четырех тактовых моментах времени  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  изображена на рис.В.2.

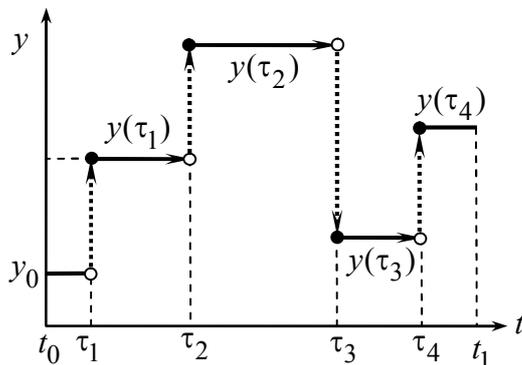


Рис.В.2

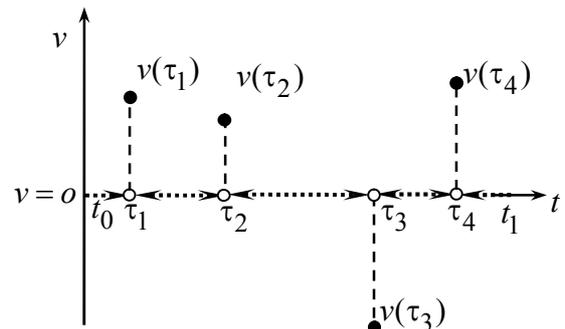


Рис.В.3

Пусть поведение модели объекта управления описывается соотношениями

$$y(t) = g(t, y(t-0), v(t)), \quad (\text{B.1})$$

$$v(t) \in V(t, y(t-0)), \quad (\text{B.2})$$

где  $y$  – вектор состояния системы,  $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ ;  $v$  – вектор управления,  $v \in V \subset \mathbb{R}^q$ ;  $t$  – время,  $t \in T = [t_0, t_1]$  – промежуток времени функционирования системы. Для краткости изложения ограничения, накладываемые на функции и множества в (B.1), (B.2), а также некоторые дополнительные предположения во введении опускаются. Отметим только, что  $g(t, y, o) = y$ , где  $o$  – некоторый *нейтральный элемент*  $o \in V(t, y)$ . При нейтральном управлении состояние системы сохраняется. На рис.В.3 пунктирными стрелками и полужирными точками изо-

бражен график типового управления  $v(t)$  с нулевым нейтральным элементом, которое отличается от нуля только в четырех точках  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ .

Рекуррентное уравнение (В.1) описывает систему в форме автомата с памятью [31,84]. Состояние  $y(t)$  формируется в зависимости от ее предшествующего состояния  $y(t-0)$  и управляющего воздействия  $v(t)$ . При  $v(t) = 0$  уравнение (В.1) принимает вид  $y(t) = y(t-0)$ , реализуя условие непрерывности слева траектории  $y(\cdot)$  системы. Включение (В.2) ограничивает допустимые значения управления, причем нейтральное управление допустимо при всех  $t$  и  $y$ . Допустимыми траекториями считаются непрерывные справа кусочно-постоянные функции, точки разрыва которой образуют конечное множество  $\mathcal{F}^1$  тактовых моментов времени, и удовлетворяющие начальному условию

$$y(t_0 - 0) = y_0. \quad (\text{В.3})$$

На траекториях системы задан функционал качества процесса управления

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}^1} g^0(\tau, y(\tau - 0), v(\tau)) + F(y(t_1)). \quad (\text{В.4})$$

Суммирование в (В.4) ведется по всем точкам  $\tau \in \mathcal{F}^1$  разрывов функции  $y(\cdot)$  (множество  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(y(\cdot))$  конечно для каждого допустимого процесса). Функция  $g^0$  характеризует затраты на переключение состояния системы (или, что то же самое, штраф за переключение). Предполагаем, что затраты положительные

$$g^0(t, y, v) \geq \lambda_+ > 0 \text{ при } v \neq 0. \quad (\text{В.5})$$

Требуется найти минимальное значение функционала (В.4) и оптимальный допустимый процесс  $d^1 = (y(\cdot), v(\cdot))$ , на котором это значение достигается

$$I(d^1) = \min I. \quad (\text{В.6})$$

Если наименьшее значение (В.6) не существует, то ставится задача нахождения минимизирующей последовательности  $d_i, i = 1, 2, \dots$ , допустимых процессов [39,60]

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I(d_i) = \inf I.$$

Для описания САТ ранее использовались рекуррентные включения [26,76]

$$y(t) \in Y(t, y(t-0)), \quad (\text{В.7})$$

где  $Y(t, y)$  – множество состояний, в которые возможен переход из состояния  $y$  в момент времени  $t$ . Управления в (В.7) нет. В диссертации принята другая модель [21,24]. Движение САТ задается рекуррентным уравнением (В.1), включающим управление. Поэтому работа

системы отождествляется с процессом управления, т.е. траекторией и программным управлением. Отличия в формах описания здесь аналогичны отличиям в описании непрерывных динамических систем управления дифференциальными уравнениями [79] или дифференциальными включениями [92]. Задачи поиска наилучшей траектории или наилучшего процесса управления, разумеется, не эквивалентны. Известны примеры, в которых минимизирующая последовательность траекторий сходится, а последовательность соответствующих управлений – нет. От рекуррентных уравнений можно перейти к включениям, объединив все допустимые управляющие воздействия

$$Y(t, y) = g(t, y, V(t, y)) = \bigcup_{v \in V(t, y)} g(t, y, v).$$

Возможность обратного перехода от включения к уравнению легко устанавливается в "регулярных" случаях, простых модельных примерах. В общем случае этот вопрос требует дополнительного изучения. Несмотря на разницу в формах описания, теоретические построения, методы и алгоритмы оптимизации САТ, разработанные для разных моделей, похожи, а используемые идеи и понятия – одинаковые.

Классическая модель дискретной системы [12,60,80] описывается рекуррентными соотношениями

$$x(t+1) = g(t, x(t), v(t+1)), \quad (B.8)$$

$$v(t+1) \in V(t, y(t)), \quad (B.9)$$

где  $t$  – дискретное время,  $t = 0, 1, \dots, N-1$ . Эта модель получается из (B.1),(B.2), если зафиксировать тактовые моменты времени  $\mathcal{F} = \{0, 1, \dots, N\}$ , в которые дискретная система меняет состояние. Между тактовыми моментами состояние дискретной системы постоянно.

В отличие от классических моделей (B.8),(B.9) дискретных систем [12,60,80], изменения состояний (переключения) которых происходят в заданные (тактовые) моменты времени, переключения САТ могут совершаться в произвольные, заранее не заданные моменты времени [26,76]. Такой вариант дискретной системы является частным случаем САТ, который получается при задании одного и того же множества  $\mathcal{F}$  для всех допустимых процессов управления. Выбор тактовых моментов является одним из ресурсов управления САТ и подлежит оптимизации. Как правило, в дискретной системе количество тактовых моментов времени, а значит, и переключений, задано. Задача оптимизации при этом становится конечномерной. В задаче оптимизации САТ количество переключений тоже конечное, но эта величина не задана и может быть сколь угодно большой. Поэтому задачу оптимизации САТ следует отнести к задачам минимизации в функциональном пространстве, т.е. к вариационным задачам.

Исследования ЛДС [15–17,19] показали, что в оптимальных конструкциях автомата с памятью реализуются режимы с многократными переключениями в фиксированный момент

времени. Количество переключений автоматной части может быть даже счетным при неизменном состоянии динамической части. Эти режимы являются новыми в теории управления и малоисследованными. Как показывают примеры, они не являются исключениями, встречающимися только в специальных системах. Наоборот, они появляются в совершенно обычных задачах, в частности, в задаче управления линейными ЛДС с квадратичным критерием качества. Отметим, что это важная с практической точки зрения задача аналогична проблеме аналитического конструирования оптимальных регуляторов Летова А.М. [65].

Поскольку САТ служит автоматной частью ЛДС, то в ее работе необходимо учитывать возможность мгновенных многократных переключений. Конечно, такие режимы являются абстрактными, физически нереализуемыми. Однако оптимальность таких процессов предъявляет существенные требования к быстродействию системы управления, которые должны учитываться конструкторами. В противном случае, результаты работы САТ будут значительно хуже оптимальных.

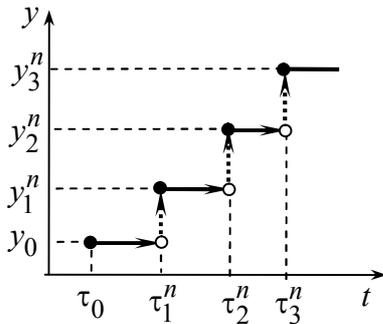


Рис.В.4

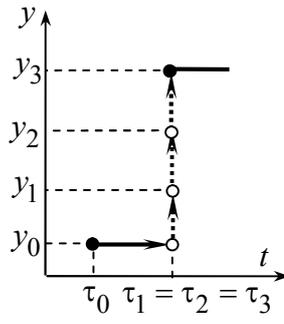


Рис.В.5

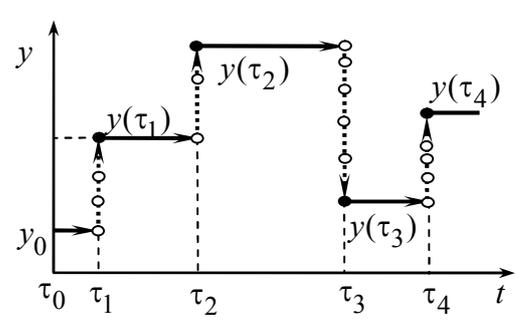


Рис.В.6

Процессы с мгновенными многократными переключениями возникают как пределы последовательностей допустимых процессов. Например, на рис.В.4 показана функция  $y^n(\cdot)$  с тремя скачками в точках  $\tau_1^n, \tau_2^n, \tau_3^n$  и значениями  $y_0 = y^n(\tau_0)$ ,  $y_1^n = y^n(\tau_1^n)$ ,  $y_2^n = y^n(\tau_2^n)$ ,  $y_3^n = y^n(\tau_3^n)$ . Если  $y_i^n \rightarrow y_i$ ,  $\tau_i^n \rightarrow \tau_i$ ,  $i=1,2,3$ , при  $n \rightarrow \infty$ , причем последовательные значения предельной функции разные  $y_0 \neq y_1$ ,  $y_1 \neq y_2$ ,  $y_2 \neq y_3$ , а пределы трех точек разрыва совпадают  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ , то предельная функция  $y(\cdot)$  (рис.В.5) имеет в этой точке трехзначный разрыв. На рис.В.6 изображена функция, имеющая четыре точки многозначного разрыва:  $\tau_1$  – точка трехзначного разрыва,  $\tau_2$  – двузначного,  $\tau_3$  – пятизначного,  $\tau_4$  – четырехзначного разрыва. Эта функция имеет 14 скачков и может быть получена как предел последовательности кусочно-постоянных функций с  $N = 14$  точками разрывов.

Аналогичные траектории могут возникать в импульсных [43,49,62] и дискретно-непрерывных [71] системах при мгновенных многократных воздействиях. Траектории этих

систем описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями (все обозначения как в [71])

$$\dot{X}(t) = F(X(t), t) + \sum_{\tau_i \leq t} \Psi(X(\tau_i^-), \tau_i, w_i) \delta(t - \tau_i), \quad X(0) = x_0, \quad (\text{B.10})$$

где  $\delta(t - \tau)$  есть стандартная дельта-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

для любой непрерывной функции  $f(t)$ . Решение задачи Коши (B.10) определяется формулой

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(X(s), s) ds + \sum_{\tau_i \leq t} \Psi(X(\tau_i^-), \tau_i, w_i). \quad (\text{B.11})$$

Если "убрать" непрерывную составляющую, положив  $F(X, t) \equiv 0$ , получим решение (B.11) в виде

$$X(t) = x_0 + \sum_{\tau_i \leq t} \Psi(X(\tau_i^-), \tau_i, w_i).$$

Такая траектория кусочно-постоянная, так как тактовые моменты удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_N \leq T.$$

Определяя решение такого дифференциального уравнения, многократные импульсные воздействия в один и тот же момент времени заменяются одним "суммарным" импульсом, интенсивность которого равна сумме воздействий всех импульсов. Совсем по-другому определяются траектории САТ в случае мгновенных многократных переключений в один и тот же момент времени. Отличия в определениях решения, видимо, связаны с тем, что используемые математические модели соответствуют объектам разной природы. Поясним это важное обстоятельство. Импульсные и дискретно-непрерывные системы часто применяются для описания динамики механических систем с ударами. С точки зрения механики, два равных по интенсивности и противоположных по направлению импульсных воздействия на объект управления (например, два противоположных удара по твердому телу), произведенные последовательно практически в один и тот же момент времени (с бесконечно малой задержкой), полностью компенсируют друг друга. Механическая система "не заметит" такого двойного воздействия, поскольку ее траектория не изменится по сравнению с траекторией без этих ударов. Этому примеру в САТ соответствует процесс с двойным переключением: скачок из некоторого состояния в новое и обратно. Однако САТ применяется для описания информационных процессов, происходящих в контуре управления. С информационной точки

зрения, траектория с таким мгновенным двойным переключением состояния существенно отличается от траектории без переключений, так как было изменение сигнала. Например, включение и выключение сигнализации на охраняемом объекте вызывает определенную реакцию охраны, отличную от штатного режима работы, когда сигнализация не включалась. Другими словами, скачок САТ из данного состояния в другое состояние и обратно нельзя заменить сохранением данного состояния, как это происходит в механических системах. Поэтому, в отличие от импульсных и дискретно-непрерывных систем, в САТ исследуются траектории с мгновенными многократными переключениями. Для процессов с однократными переключениями в [71] получены необходимые условия оптимальности, которые можно использовать и для САТ. Синтез оптимального позиционного управления и достаточные условия в [71] не рассматриваются.

Задача синтеза оптимальных процессов с однократными или мгновенными многократными переключениями при фиксированном заранее заданном количестве переключений может быть сведена к классической задаче оптимального управления дискретной системой [60]. Для этого, как указал проф. М.М. Хрусталеv, длительность паузы между тактовыми моментами времени нужно считать дополнительным управлением. К полученной при этом задаче применимы условия оптимальности Кротова [60]. Оказалось, что условия оптимальности, доказанные в диссертации, менее общие, чем условия Кротова. А именно, если существует конечная последовательность условных функций цены, указанная в теоремах 1.3, 2.3 диссертации, то будет существовать и функция Кротова [60]. Использовать условия Кротова для оптимизации количества переключений нецелесообразно, так как они для этого и не предназначены. Интересно, что при сведении задачи синтеза САТ (с фиксированным числом переключений) к задаче оптимального управления дискретной системой отличия между процессами с однократными или мгновенными многократными переключениями полностью исчезают.

Ряд задач управления космическими аппаратами требует для адекватного описания сложной мультизадачной схемы его функционирования использовать ЛДС, включающие рекуррентные уравнения или включения, моделирующие работу управляющего комплекса. В частности, в ЛДС учитываются затраты на релейные переключения управления, что необходимо с практической точки зрения [27,75]. Без учета этих затрат во многих задачах оптимального управления космическими аппаратами появляются минимизирующие последовательности [36,37], приводящие к бесконечному (счетному) множеству переключений релейного управления (например, включений реактивного двигателя), что на практике нереализуемо. Поэтому задачи с оптимальными релейными законами управления (в том числе и классическую задачу быстрогодействия) необходимо рассматривать в классе логико-

динамических систем, "штрафуя" переключения. При этом процессы, имеющие бесконечное число переключений, отбрасываются как неоптимальные, а получаемые решения будут более практичными. Кроме того, в прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Например, для перевода спутника с низкой круговой орбиты на высокую (геостационарную) используется разгонный блок "Бриз-М". Допустимое количество запусков маршевого двигателя разгонного блока – не более 10. Поэтому если состояние двигателя (включен/выключен) описывается дискретной системой, то общее количество переключений системы будет, естественно, ограничено. Такие ограничения можно учесть при синтезе САТ [22].

Исследования САТ в диссертации построены по следующей схеме. Решение задач синтеза САТ проводилось на основе достаточных условий оптимальности. Для получения достаточных условий оптимальности управления САТ использовался подход, развитый в работах Кротова В.Ф., Гурмана В.И. (например, [39,60]). Сначала сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности для процесса управления (траектории и программного управления), при этом применялся принцип расширения (принцип оптимальности Кротова В.Ф.). Условия оптимальности процесса управления использовались для доказательства достаточных условий оптимальности позиционного управления, т.е. управления с обратной связью. На основе этих условий выведены уравнения для нахождения оптимального позиционного управления. Для решения уравнений разработан алгоритм синтеза оптимальной САТ. Составлена программа, численно реализующая разработанный алгоритм.

Построение достаточных условий на основе принципа расширения применялось для разных систем [10,14,15,17,20,21,24,25,38,39,60,66,81,95,96]. Условия на оптимальное управление формулируются с использованием функции цены или ее обобщения – функции Кротова. В диссертации принцип расширения применяется для семейства (последовательности) вспомогательных функций, называемых условными функциями цены. Если значение функции цены определяется величиной функционала, вычисленного на оптимальном процессе, то значение условной функции цены определяется величиной функционала, вычисленного на оптимальном процессе, имеющем не более заданного количества переключений. Конечно, имеются варианты достаточных условий [39], в формулировках которых вместо одной функции цены присутствует последовательность функций. Но эти функции, как правило, являются последовательными приближениями функции цены и сходятся к ней. Условные функции цены связаны с функцией цены по-другому. Вместо предельного перехода применяется операция минимизации, а именно, функция цены строится как нижняя огибающая семейства условных функций цены. Построение функции цены по образующим ранее использовалось в

алгоритмах синтеза [17,20]. В [23] и диссертации такая конструкция впервые применяется не в алгоритме, а в формулировке условий оптимальности.

Подчеркнем, что введение условных функций цены вполне оправдано, поскольку доказано их существование. Это следует из обоснования компактности класса процессов, имеющих не более заданного количества переключений. Существование самой функции цены обеспечивается вполне естественным условием (В.5) положительности штрафа за переключение (при ограниченности снизу интегрального и терминального членов функционала (В.4)). Из существования условных функций цены следует существование оптимальных условных позиционных управлений, т.е. существование решения задачи синтеза оптимальных САТ.

Изучение режимов с мгновенными многократными переключениями связано с определением понятия соответствующей траектории дискретной САТ. Вводя новое определение понятия многозначного разрыва кусочно-постоянной функции, удается определить предельный переход, приводящий к мгновенным многократным переключениям. Относительно этого перехода оказываются замкнутыми классы допустимых процессов с ограниченным количеством переключений. Достаточные условия оптимальности предлагается строить именно в данных классах, находя при этом вспомогательные функции – условные функции цены, а "настоящая" функция цены (аналог функции Беллмана) составляется как нижняя огибающая этих вспомогательных функций. Такие достаточные условия представляются более конструктивными, чем достаточные условия оптимальности ЛДС. Разработка методов приближенного решения задачи оптимального управления САТ, использующая новые достаточные условия, оказалась вполне перспективной. Ранее для синтеза оптимальных ЛДС применялась методика сведения задачи к проблеме управления непрерывно-дискретными системами с мгновенными многократными переключениями дискретной части в фиксированные, заранее заданные тактовые моменты времени. Новая методика сводит задачу синтеза оптимальных САТ к последовательности задач синтеза САТ с ограниченным, заранее заданным, количеством переключений. Различия в таких подходах весьма существенны (они в чем-то аналогичны различиям в определении интеграла Римана и Лебега).

Таким образом, в диссертационной работе решена новая проблема оптимального управления САТ, имеющая важное теоретическое значение в области оптимального управления. Полученные теоретические результаты имеют практическую направленность и могут быть использованы при создании систем автоматического управления.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1) достаточные условия оптимальности управления САТ при однократных или мгновенных многократных переключениях;

2) алгоритм синтеза оптимального позиционного управления САТ с однократными или мгновенными многократными переключениями;

3) решение задачи оптимального вывода спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя.

Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов основной части, заключения, списка использованных источников.

Во введении дано обоснование актуальности исследования изучаемой проблемы. Приведен обзор работ в данной области. Дана краткая характеристика применяемых в диссертации методов исследования и полученных результатов.

В первом разделе основной части рассматриваются задачи оптимального программного и оптимального позиционного управления дискретными САТ, кусочно-постоянные траектории которых имеют произвольное конечное или заданное максимальное количество точек разрыва. Для этих задач на основе принципа расширения [39] доказаны достаточные условия оптимальности. Показано, что функция цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана) может быть построена из вспомогательных функций – образующих функции цены. Выведены уравнения для нахождения этих образующих. Разработан алгоритм синтеза оптимального позиционного управления. Применение этого алгоритма демонстрируется на примерах. В разд.1.5 поставлена задача синтеза оптимальной следящей дискретной САТ, выполняющей оптимальную кусочно-постоянную аппроксимацию заданной непрерывной траектории, численное решение которой получено при помощи того же алгоритма в одномерном случае. В разд.1.6 устанавливается связь достаточных условий с необходимыми, которые выводятся из необходимых условий оптимальности динамических систем с автоматной частью. Последние условия применяются в главе 3 при решении прикладной задачи.

Во втором разделе, вводится понятие точки многозначного разрыва и определяются кусочно-постоянные траектории дискретных САТ с мгновенными многократными переключениями. Показана замкнутость класса таких траекторий при фиксированном максимальном количестве скачков. Выясняется отличие этих траекторий от траекторий дискретно-непрерывных систем [71] при импульсных воздействиях. Формулируются задачи оптимального программного и оптимального позиционного управления дискретными САТ с мгновенными многократными переключениями. Достаточные условия оптимальности этих управлений обосновываются при помощи предельного перехода на основе теорем, доказанных в главе 1. Оказывается, что предельный переход не изменяет форму уравнений для нахождения условных функций цены и позиционных управлений. Поэтому алгоритм, разработанный для синтеза оптимальных САТ при однократных переключениях (см. разд.1.3), можно применять и в случае процессов с мгновенными многократными переключениями. Это важное обстоя-

тельство иллюстрирует модельный пример, в котором оптимальная САТ при мгновенных многократных переключениях синтезируется тем же алгоритмом, что и при однократных переключениях. Разработана модификация алгоритма [76] субоптимального синтеза САТ, описываемых рекуррентными уравнениями. Проведено сравнение этих двух алгоритмов.

В третьем разделе рассматривается задача оптимального вывода спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя, которая формулируется как задача оптимального управления динамической системой с автоматной частью. Применение необходимых условий оптимальности сводит эту задачу к конечномерной минимизации. Учитывая реализуемую точность исполнения команд включения и выключения маршевого двигателя, решаемая задача условной минимизации становится дискретной. Исследуются различные схемы полета, удовлетворяющие ограничению: не более девяти включений маршевого двигателя в течение суток. Выполнена оптимизация каждой схемы, найдены минимальный расход топлива, оптимальные моменты включения и выключения двигателя, рассчитаны параметры переходных орбит, отклонения конечной орбиты от геостационарной. Проведен сравнительный анализ полученных результатов со штатной схемой, применяемой на практике.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

Научным руководителем поставлены задачи и примеры, исследуемые в диссертации, определены процессы с мгновенными многократными переключениями. Теоретические результаты получены для САТ, описываемых рекуррентными уравнениями, на основе предложенных А.С. Бортаковским достаточных условий оптимальности САТ, описываемых рекуррентными включениями. Алгоритмы синтеза оптимальных и субоптимальных САТ разработаны совместно.

**Общие методы исследования.** Для решения поставленных в диссертации задач использовались математическая теория управления, вариационное исчисление, теория дифференциальных уравнений, системный анализ, теория оптимизации, негладкий анализ, численные методы. Приближенное решение задач управления движением спутника найдено с использованием результатов В.И.Гурмана.

**Научная новизна.** Полученные в диссертационной работе основные результаты являются новыми, а именно: доказаны достаточные условия оптимальности систем автоматного типа, описываемых рекуррентными уравнениями, с однократными или мгновенными многократными переключениями; выведены уравнения для нахождения условных функций цены и условных позиционных управлений, из которых строится оптимальное управление; разработан алгоритм синтеза оптимальных систем автоматного типа с однократными или многократными переключениями; получено приближенное решение прикладной задачи оптималь-

ного вывода спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя.

**Практическая значимость** диссертационной работы состоит в том, что был разработан алгоритм оптимального синтеза систем автоматного типа, который применим в областях авиационной и ракетно-космической техники, в робототехнике и экономике. Создано программно-алгоритмическое обеспечение для решения прикладной задачи оптимального вывода спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя.

**Достоверность результатов** представленных в диссертационной работе, подтверждена строгими математическими доказательствами. Диссертация содержит приближенные и аналитические решения примеров, подтверждающие теоретические результаты. Получено приближенное решение прикладной задачи, полностью отвечающее физическим представлениям.

Работа выполнялась на кафедре "Вычислительная математика и программирование" Московского авиационного института (национального исследовательского университета) при финансовой поддержке РФФИ и Министерства образования и науки РФ:

грант РФФИ № 12-08-00464-а: "Перспективные методы оценивания и управления дискретными и логико-динамическими системами с ограниченными ресурсами (2012-2014);

задание Минобрнауки № 1.1191.2014К: "Конструктивные методы оценивания и управления непрерывно-дискретными гибридными системами в условиях неопределенности".

По теме диссертации опубликовано 7 печатных работ [21-24,59,114-116], в том числе 4 статьи [21-24] в журналах, входящих в перечень ведущих рецензируемых изданий ВАК РФ. Основные результаты докладывались на 5 международных конференциях [59,114-116].

# 1. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТНОГО ТИПА ПРИ ОДНОКРАТНЫХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯХ

Рассматриваются задачи оптимального программного и оптимального позиционного управления дискретными САТ, кусочно-постоянные траектории которых имеют произвольное конечное или заданное максимальное количество точек разрыва. Для этих задач на основе принципа расширения [39] доказаны достаточные условия оптимальности. Показано, что функция цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана) может быть построена из вспомогательных функций – образующих функции цены. Выведены уравнения для нахождения этих образующих. Разработан алгоритм синтеза оптимального позиционного управления. Применение этого алгоритма демонстрируется на примерах. Поставлена модельная задача синтеза оптимальной одномерной следящей дискретной САТ, численное решение которой получено при помощи того же алгоритма.

## 1.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Траектория дискретной САТ представляется непрерывной справа кусочно-постоянной функцией  $y : T \rightarrow \mathbb{R}^m$ , определенной на промежутке  $T = [t_0, t_1]$ . Точки разрыва функции  $y(\cdot)$  образуют конечную возрастающую последовательность  $\mathcal{G}^1 = \mathcal{G}^1(y(\cdot))$  **тактовых** моментов времени,  $\mathcal{G}^1 \subset T$ . В каждый тактовый момент времени состояние САТ изменяется, происходит **переключение** состояния, а функция  $y(\cdot)$  имеет скачок. Такие траектории САТ будем называть траекториями с **однократными** переключениями в тактовые моменты времени. Типовая траектория САТ с однократными переключениями в четырех тактовых моментах времени  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  изображена на рис.1.1.

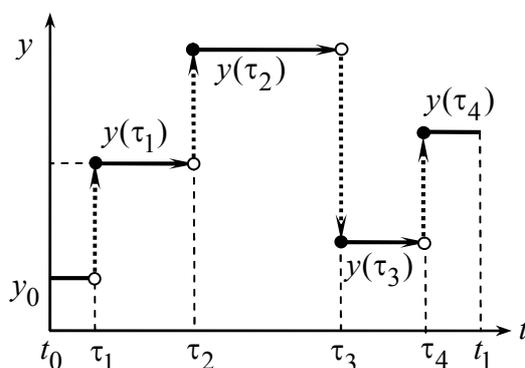


Рис.1.1

В классической задаче [13,60,80] оптимального управления дискретной системой переключения происходят в заранее заданные тактовые моменты времени. Такой вариант дискретной системы является частным случаем САТ, который получается при задании одного и того же множества  $\mathcal{F}$  для всех допустимых процессов управления.

Для описания математической модели САТ можно использовать рекуррентные уравнения или рекуррентные включения [26]. Оба способа применимы для большинства прикладных задач. Однако, с теоретической точки зрения, задачи с разными формами описания не эквивалентны. В диссертации для описания САТ используются рекуррентные уравнения.

### Задача оптимального программного управления

Пусть поведение модели объекта управления описывается соотношениями

$$y(t) = g(t, y(t-0), v(t)), \quad (1.1)$$

$$v(t) \in V(t, y(t-0)), \quad (1.2)$$

где  $y$  – вектор состояния системы,  $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ ;  $v$  – вектор управления,  $v \in V \subset \mathbb{R}^q$ ;  $t$  – время,  $t \in T = [t_0, t_1]$  – промежуток времени функционирования системы,  $t_0, t_1$  – заданные моменты начала и окончания процесса управления. Непрерывная функция  $g : T \times Y \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$  удовлетворяет при всех  $t, y$  условию

$$g(t, y, v) = y \Leftrightarrow v = o, \quad (1.3)$$

где  $o$  – некоторый *нейтральный элемент*,  $o \in V(t, y)$ . Нейтральный элемент можно определить как решение  $v = o$  уравнения  $g(t, y, v) = y$ , которое существует и единственно, согласно предположению (1.3).

Рекуррентное уравнение (1.1) описывает систему в форме автомата с памятью [31,84]. Состояние  $y(t)$  формируется в зависимости от ее предшествующего состояния  $y(t-0)$  и управляющего воздействия  $v(t)$ . Из (1.3) следует, что при  $v(t) = o$  уравнение (1.1) принимает вид  $y(t) = y(t-0)$ , реализуя условие непрерывности слева траектории  $y(\cdot)$  системы. Включение (1.2) ограничивает допустимые значения управления, причем нейтральное управление допустимо при всех  $t$  и  $y$ , так как  $o \in V(t, y)$ . Предполагаем, что многозначное отображение  $t \rightarrow V(t, y)$  непрерывно справа по включению при всех  $t \in [t_0, t_1]$  и всех  $y \in Y$ .

Начальное состояние САТ задано

$$y(t_0 - 0) = y_0. \quad (1.4)$$

Здесь предполагается, что либо функция  $y(t)$  доопределена левым пределом  $y(t_0 - 0)$ , либо равенство (1.4) считается эквивалентной формой записи условия  $y(t_0) = g(t_0, y_0, v(t_0))$ .

Множество  $\mathcal{D}^1(t_0, y_0)$  допустимых процессов с однократными переключениями образуют пары функций  $(y(\cdot), v(\cdot))$ , где  $y(\cdot)$  – непрерывная справа кусочно-постоянная функция  $y: T \rightarrow Y$ , точки разрыва которой составляют конечную возрастающую последовательность  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(y(\cdot))$  тактовых моментов времени,  $\mathcal{F}^1 \subset T$ ;  $v(\cdot)$  – функция  $v: T \rightarrow V$ , всюду на  $T \setminus \mathcal{F}^1$  равная нейтральному элементу ( $v(t) = o$ ) и отличная от него только на  $\mathcal{F}^1$ ; причем пара функций  $(y(\cdot), v(\cdot))$  всюду на  $T$  удовлетворяет рекуррентному уравнению (1.1), включению (1.2) и начальному условию (1.4).

На множестве  $\mathcal{D}^1(t_0, y_0)$  задан функционал качества процесса управления

$$I_{t_0} = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}^1} g^0(\tau, y(\tau - 0), v(\tau)) + F(y(t_1)), \quad (1.5)$$

где функции  $F: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: T \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывны по совокупности аргументов, а функция  $g^0: T \times Y \times V \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывна вместе со своей частной производной по времени  $g_t^0(t, y, v)$ . Суммирование в (1.5) ведется по всем точкам  $\tau \in \mathcal{F}^1$  разрывов функции  $y(\cdot)$  (множество  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(y(\cdot))$  конечно для каждого допустимого процесса).

Требуется найти минимальное значение функционала (1.5) и оптимальный допустимый процесс  $d^1 = (y(\cdot), v(\cdot))$ , на котором это значение достигается

$$I_{t_0}(d^1) = \min_{d \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)} I(d). \quad (1.6)$$

Если наименьшее значение (1.6) не существует, то ставится задача нахождения минимизирующей последовательности  $d_j \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , допустимых процессов [39,60]

$$I_{t_0}(d_j) \rightarrow \inf_{d \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)} I(d) \quad \text{при } j \rightarrow +\infty.$$

Предполагаем, что функционал (1.5) ограничен снизу на множестве допустимых процессов. Условия

$$g^0(\tau, y, v) \geq 0, \quad g^0(\tau, y, o) = 0 \quad (1.7)$$

позволяют рассматривать каждое слагаемое  $g^0(\tau, y(\tau - 0), v(\tau))$  в (1.5) как затраты (или "штраф") при переключении  $y(\tau - 0) \rightarrow y(\tau)$  состояния системы. Бесконечное количество

переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие неотрицательности в (1.7)

$$g^0(t, y, v) \geq \lambda_+ > 0 \quad \text{при } \forall v \neq o. \quad (1.8)$$

Применение таких "штрафов" в критерии качества необходимо в тех прикладных задачах, где решением служит минимизирующая последовательность релейных законов управления, приводящая к неограниченному росту числа переключений. Условие (1.8) отбрасывает такие последовательности, как неоптимальные.

Чтобы исключить многократные переключения системы в фиксированный момент времени, достаточно предположить, что

$$g(t, y, V) \supset g(t, g(t, y, V), V), \quad (1.9)$$

$$g^0(t, y, v'') < g^0(t, y, v) + g^0(t, y', v'), \quad v \neq o, \quad v' \neq o, \quad v'' \neq o, \quad (1.10)$$

где  $y' = g(t, y, v)$ ,  $g(t, y', v') = g(t, y, v')$ . Условие (1.9) означает, что любое двукратное переключение:  $y \rightarrow y' \rightarrow y''$  (сначала из  $y$  в  $y' = g(t, y, v)$  под действием управления  $v$ , а затем из  $y'$  в  $y'' = g(t, y', v')$  – под действием  $v'$ ) можно заменить однократным переключением  $y \rightarrow y''$  из состояния  $y$  в состояние  $y'' = g(t, y, v'')$  под действием управления  $v''$  (такое управление  $v''$  существует благодаря включению (1.9)). Другими словами, множество состояний, в которые можно попасть за одно переключение, содержит множество состояний, достижимых за два переключения. Условие (1.10) означает, что "штраф" за однократное переключение  $y \rightarrow y''$  меньше, чем "штраф" за двукратное переключение  $y \rightarrow y' \rightarrow y''$ . Оба условия не исключают появления режима (точнее, минимизирующей последовательности) с бесконечным множеством переключений, которые происходят в разные моменты времени. В случае, когда условия (1.9), (1.10) не выполняются, возможны оптимальные процессы с мгновенными многократными переключениями в фиксированный момент времени.

Поставленная задача (1.6) представляет собой, так называемую задачу со свободным правым концом траектории и фиксированным временем. В более общей постановке [39,60] на правый конец траектории может быть наложено ограничение

$$y(t_1) \in \Gamma \quad (1.11)$$

попадание траектории на терминальную поверхность  $\Gamma = \{y \in Y \mid \Gamma(y) = 0\}$ , где  $\Gamma : Y \rightarrow \mathbb{R}^l$  – непрерывная вектор-функция.

В постановке задачи не исключается случай, когда компоненты векторов  $y \in Y$  и  $v \in V$  являются двузначными логическими (булевыми) переменными, принимающими значения 0 или 1, либо многозначными логическими переменными. Эти условия можно учесть, ограничивая множества  $Y$  и  $V$ , например,

$$y \in Y \subset \mathbb{Z}^m, \quad v \in V \subset \mathbb{Z}^q, \quad (1.12)$$

где  $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел. Условия вида (1.12) можно использовать для объектов, совершающих типовые движения (разгон, поворот, торможение и т.п.). В этом случае состояние  $y(t)$  САТ соответствует "номеру" типовой траектории движения. Такое предположение отвечает переключаемым системам [40,84,85,104,117,118,124].

### **Задача синтеза оптимального позиционного управления**

Вместе с задачей (1.6) поиска оптимального процесса будем рассматривать задачу синтеза оптимального позиционного управления (т.е. управления с обратной связью), которая формулируется следующим образом. Пусть множество  $\mathcal{V}$  допустимых управлений с обратной связью состоит из функций  $v(t, y)$ , каждая из которых для любых начальных условий

$$y(\theta - 0) = y_\theta, \quad t_0 \leq \theta \leq t_1, \quad y_\theta \in Y, \quad (1.13)$$

порождает допустимый процесс  $d = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}^1(\theta, y_\theta)$  с программным управлением  $v(\cdot)$ , находящимся по закону

$$v(\tau) = v(\tau, y(\tau - 0)), \quad \tau \in \mathcal{F}_\theta^1,$$

где  $\mathcal{F}_\theta^1 = \{\tau \in \mathcal{F}^1 \mid \theta \leq \tau \leq t_1\}$  – множество тактовых моментов времени на отрезке  $[\theta, t_1]$ ,  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(y(\cdot))$ . В точках  $t \in [\theta, t_1] \setminus \mathcal{F}_\theta^1$  непрерывности траектории  $y(\cdot)$  управление равно нейтральному элементу  $v(t, y(t - 0)) = o$ .

Требуется найти оптимальное управление  $v(t, y)$  с обратной связью, которое для каждого начального условия (1.13) порождает оптимальный процесс  $d_\theta^1 \in \mathcal{D}(\theta, y_\theta)$ , минимизирующий функционал оставшихся потерь

$$I_\theta = \int_\theta^{t_1} f(t, y(t)) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}_\theta^1} g^0(\tau, y(\tau - 0), v(\tau)) + F(y(t_1)). \quad (1.14)$$

Суммирование в (1.14) проводится по всем тактовым моментам времени  $\tau$  на отрезке  $[\theta, t_1]$ .

### **Задачи оптимального управления с ограниченным количеством переключений**

В прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Например, для перевода спутника с низкой круговой орбиты на высокую (геостационарную) используется разгонный блок "Бриз-М". Допустимое количество запусков маршевого двига-

теля разгонного блока не более 10. Поэтому, если состояние двигателя (включен/выключен) описывается дискретной системой, то общее количество ее переключений будет, естественно, ограничено [22].

Поставим задачу минимизации функционала (1.5) на множестве допустимых процессов с ограниченным числом переключений. Обозначим через  $\mathcal{D}_N^1(t_0, y_0)$  – множество допустимых процессов с не более чем  $N$  однократными переключениями. Требуется найти минимальное значение функционала (1.5) на множестве  $\mathcal{D}_N^1(t_0, y_0)$  и оптимальный допустимый процесс  $d_N^1$  с не более чем  $N$  переключениями, на котором это значение достигается

$$I(d_N^1) = \min_{d \in \mathcal{D}_N^1(t_0, y_0)} I(d). \quad (1.15)$$

Эта задача отличается от (1.6) дополнительным ограничением на количество переключений. В силу включения  $\mathcal{D}_N^1(t_0, y_0) \subset \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$  решения  $d^1$  и  $d_N^1$  задач (1.6) и (1.15) удовлетворяют неравенству  $I(d^1) \leq I(d_N^1)$ .

Отметим еще одно важное обстоятельство. Допустимые процессы с не более чем  $N$  переключениями являются, очевидно, допустимыми процессами с не более чем  $N+1$  переключениями. Поэтому справедливы включения

$$\mathcal{D}_0^1(t_0, y_0) \subset \mathcal{D}_1^1(t_0, y_0) \subset \mathcal{D}_2^1(t_0, y_0) \dots,$$

из которых следуют неравенства

$$I(d_0^1) \geq I(d_1^1) \geq I(d_2^1) \geq \dots, \quad (1.16)$$

т.е. последовательность (1.16) решений задач (1.15) не возрастает с ростом допустимого числа  $N$  переключений. При условии (1.8) количество переключений у любого оптимального процесса ограничено, поэтому последовательность (1.16) ограничена снизу. Следовательно, справедливо равенство

$$I(d^1) = \min_{N \in \mathbb{Z}_+} I(d_N^1),$$

где  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  – множество неотрицательных целых чисел. Таким образом, для решения задачи (1.6) можно использовать последовательность (1.16) решений задач (1.15). Именно такой подход будет использован в достаточных условиях оптимальности.

В классической задаче оптимального управления дискретной системой [13,60,80] множество тактовых моментов времени задано  $\mathcal{F}^1 = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ , причем в каждый тактовый момент времени система совершает одно переключение. Как правило, дискретное время выби-

рается целочисленным, т.е.  $\mathcal{S}^1 = \{1, \dots, N\}$ . Ясно, что классическая дискретная система является частным случаем САТ, в которой фиксированы количество переключений и сами тактовые моменты времени. Использовать методы решения классических задач оптимального управления дискретными системами для синтеза оптимальных САТ нельзя, поскольку фиксация тактовых моментов времени сразу же сужает класс допустимых процессов, что, в свою очередь, приводит к субоптимальности САТ. Разумеется, такие методы применимы для приближенного, обычно численного, решения задачи.

## 1.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Как правило, формулировка и доказательство достаточных условий оптимальности управления динамическими системами связаны с функцией цены (функцией Гамильтона – Якоби – Беллмана, функцией Кротова [60], функцией Айзекса [2,86]). В рассматриваемой задаче управления САТ эта функция строится при помощи последовательности вспомогательных функций. Прежде чем формулировать условия оптимальности, поясним смысл этих вспомогательных функций и их связь с функцией цены.

### Условная функция цены

Пару  $(t, y)$  – время  $t$  и состояние  $y$ ,  $t \in T$ ,  $y \in Y$ , будем называть *позицией* САТ, а множество  $\Pi = T \times Y$  – *пространством позиций* САТ. Функция цены  $\varphi(t, y)$  для САТ определяется следующим образом. Предельное значение  $\varphi(\theta - 0, y)$  функции цены равно минимальному значению функционала (1.14) на множестве  $\mathcal{D}^1(\theta, y_\theta)$ . Другими словами, предел  $\varphi(\theta - 0, y)$  равен значению функционала  $I_\theta$  оставшихся потерь, вычисленному на оптимальной траектории, исходящей из позиции  $(\theta, y_\theta)$ , т.е. при начальном условии  $y(\theta - 0) = y_\theta$ . Для задачи со свободным правым концом траектории функция цены определена на всем пространстве  $\Pi$  позиций системы. При терминальных ограничениях (1.11) область определения  $\varphi$  включает только допустимые исходные позиции  $(\theta, y_\theta)$ , для которых существует допустимый процесс, удовлетворяющий терминальным условиям.

Обозначим через  $\pi^0$  множество исходных позиций  $(\theta, y_\theta) \in \Pi$ , для каждой из которых существует допустимый процесс  $d_0 = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}_0(\theta, y_\theta)$  без переключений. Траектория этого процесса постоянна  $y(t) = y_\theta$ , а управление нейтральное  $v(t) = o$ ,  $\theta \leq t \leq t_1$ . Например, для задачи со свободным правым концом траектории имеем  $\pi^0 = \Pi$ , так как все постоянные

траектории допустимы. Если в задаче с терминальным ограничением (1.11) допустимо конечное состояние  $y_1$  – решение уравнения  $\Gamma(y_1) = 0$ , то множество  $\pi^0$  содержит позиции  $T \times \{y_1\}$ .

Обозначим через  $\pi^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , множество исходных позиций  $(\theta, y_\theta) \in \Pi$ , для каждой из которых существует допустимый процесс  $d_k = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}_k^1(\theta, y_\theta)$  с не более чем  $k$  переключениями. Траектория этого процесса до первой точки разрыва  $\tau$  постоянна  $y(t) = y_\theta$  и управление нейтральное  $v(t) = o$ ,  $\theta \leq t < \tau$ , а в момент времени  $\tau$  происходит изменение состояния системы, и она оказывается в позиции  $(\tau, y(\tau))$ , принадлежащей множеству  $\pi^{k-1}$ . В случае  $\tau = \theta$  система сразу же в момент  $\theta$  изменяет свое состояние, совершая переключение из состояния  $y_\theta = y(\theta - 0)$  в состояние  $y(\theta)$ , причем  $(\theta, y(\theta)) \in \pi^{k-1}$ . Заметим, что множество  $\pi^k$  вместе с позицией  $(\theta, y)$  содержит и все предшествующие позиции  $(t, y)$ ,  $t_0 \leq t < \theta$ .

Позиции из множества  $\pi^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , будем называть *допустимыми исходными позициями* для процессов с не более чем  $k$  переключениями. Переключение из позиции  $(t, y) \in \pi^{k+1}$  в позицию  $(t, z) \in \pi^k$  происходит согласно уравнению (1.1)

$$z = g(t, y, v).$$

Множество допустимых управлений, позволяющих выполнить такое переключение обозначим через

$$V^{k+1}(t, y) = \{v \in V(t, y) \mid (t, g(t, y, v)) \in \pi^k\}. \quad (1.17)$$

Полагаем, что  $V^0(t, y) = \{o\}$ , поскольку у процессов без переключений только нейтральное управление допустимо.

Допустимые процессы с не более чем  $k$  переключениями являются, очевидно, допустимыми процессами с не более чем  $k + 1$  переключениями, поэтому справедливы включения

$$\mathcal{D}_0^1(\theta, y_\theta) \subset \mathcal{D}_1^1(\theta, y_\theta) \subset \mathcal{D}_2^1(\theta, y_\theta) \dots, \quad (1.18)$$

$$\pi^0 \subset \pi^1 \subset \pi^2 \subset \dots \quad (1.19)$$

В задаче со свободным правым концом траектории включения (1.19) превращаются в равенства  $\Pi = \pi^0 = \pi^1 = \pi^2 = \dots$ , а множество (1.17) при всех  $k \in \mathbb{Z}_+$  совпадает с  $V(t, y)$ .

Обозначим через  $\varphi^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , скалярную функцию  $\varphi^k : \pi^k \rightarrow \mathbb{R}$ , левый предел  $\varphi^k(\theta - 0, y_\theta)$  которой равен минимальному значению функционала (1.14) на множестве  $\mathcal{D}_k^1(\theta, y_\theta)$  допустимых процессов с не более чем  $k$  переключениями

$$\varphi^k(\theta - 0, y_\theta) = \min_{d \in \mathcal{D}_k^1(\theta, y_\theta)} I_\theta(d). \quad (1.20)$$

Множество  $\mathcal{D}_0^1(\theta, y_\theta)$  содержит один процесс  $d_0$  с постоянной траекторией и нейтральным управлением. Поэтому минимизация в (1.20) при  $k = 0$  фактически отсутствует, а функция  $\varphi^0(\theta, y_\theta)$  равна значению функционала (1.14) на этом процессе

$$\varphi^0(\theta - 0, y_\theta) = \int_{\theta}^{t_1} f^0(t, y_\theta) dt + F(y_\theta).$$

Функцию  $\varphi^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , будем называть *условной функцией цены*, поскольку она определяется как минимальное значение функционала оставшихся потерь на оптимальном процессе с не более чем  $k$  переключениями. Из вложений (1.18) следуют неравенства

$$\varphi^0(\theta - 0, y_\theta) \geq \varphi^1(\theta - 0, y_\theta) \geq \varphi^2(\theta - 0, y_\theta) \geq \dots,$$

т.е. значения условных функций цены образуют невозрастающую последовательность. Заметим, что функция цены  $\varphi(t, y)$  связана с условными функциями цены  $\varphi^k$  равенством

$$\varphi(t - 0, y) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t - 0, y).$$

### Достаточные условия оптимальности процесса управления

Достаточные условия оптимальности строятся на основе принципа расширения [39,60], который заключается в замене исходной экстремальной задачи другой задачей, в каком-то смысле более простой, решающей одновременно и исходную задачу. Будем использовать следующий частный случай принципа расширения.

**Лемма 1.1** Пусть имеются элемент  $d^* \in \mathcal{D}$ , функционал  $I : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , множество  $\mathcal{E}$ , число  $l$  и функционал  $L : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , такие, что:

- а)  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ ,
- б)  $I(d) = L(d)$  при всех  $d \in \mathcal{D}$ ,
- в)  $L(d) \geq l$  при всех  $d \in \mathcal{E}$ ,
- г)  $L(d^*) = l$ .

Тогда элемент  $d^*$  минимизирует  $I$  на  $\mathcal{D}$

$$I(d^*) = l = \min_{d \in \mathcal{D}} I(d).$$

Действительно, из условий а) – г) следует цепочка соотношений

$$I(d^*) = L(d^*) = l = \min_{d \in \mathcal{E}} L(d) \leq \min_{d \in \mathcal{D}} L(d) = \min_{d \in \mathcal{D}} I(d),$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства достаточных условий оптимальности потребуется следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.2** Если функция  $q(v)$  непрерывна на компактном множестве  $V$ , а функция  $p(t, v)$  непрерывна по совокупности аргументов при всех  $t \geq 0$  и всех  $v \in V$ , то

$$\min_{v \in V} \left\{ q(v) + \int_0^t p(\tau, v) d\tau \right\} \geq \min_{v \in V} q(v) + t \min_{v \in V^*} p(0, v) - t \omega(t),$$

где  $\omega(t)$  – некоторая бесконечно малая,  $\omega(t) \rightarrow +0$  при  $t \rightarrow +0$ . Здесь  $V^* = \text{Arg min}_{v \in V} q(v)$  –

множество точек глобального минимума функции  $q(v)$ .

Действительно, рассмотрим функцию

$$\gamma(t, v) = q(v) + \int_0^t p(\tau, v) d\tau.$$

Она непрерывна и имеет непрерывную частную производную  $\gamma_t(t, v) = p(t, v)$ . Поэтому для функции  $\varphi(t) = \min_{v \in V} \gamma(t, v)$  существует правая производная [41,42,52,56,78]

$$\varphi_t(0) = \min_{v \in V^*} \gamma_t(0, v) = \min_{v \in V^*} p(0, v),$$

т.е. при малых  $t \geq 0$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} - \varphi_t(0) \right| < \omega(t),$$

где  $\omega(t) \rightarrow +0$  при  $t \rightarrow +0$ . Отсюда следует, что

$$\varphi(t) > \varphi(0) + t \varphi_t(0) - t \omega(t),$$

или, что то же самое,

$$\min_{v \in V} \gamma(t, v) > \min_{v \in V} \gamma(0, v) + t \min_{v \in V^*} \gamma_t(0, v) - t \omega(t).$$

Подставляя

$$\gamma(t, v) = q(v) + \int_0^t p(\tau, v) d\tau$$

и  $\gamma_t(0, v) = p(0, v)$ , получаем доказываемое неравенство. Лемма 1.2 доказана.

Обозначим через  $\Phi$  – множество функций  $\varphi : T \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , каждая из которых при любом фиксированном  $y$  имеет по  $t$  конечное число точек разрыва, в которых она имеет конечный предел слева и непрерывна справа, а в остальных точках области определения функция  $\varphi$  непрерывна вместе со своей правой частной производной  $\varphi_t$ . Считаем, что функции  $\varphi$  из множества  $\Phi$  доопределены в точке  $t_0$  левым пределом  $\varphi(t_0 - 0, y)$ . Правая производная  $\varphi_t(t, y)$  определена и равномерна по параметру  $y$  [42] на всей области определения, за исключением конечного момента времени  $t_1$ .

Для последовательности функций  $\varphi^k \in \Phi$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , запишем выражения

$$\begin{aligned} P^k(t, y) &= \varphi_t^k(t, y) + f(t, y), \\ Q^k(t, y, v) &= \varphi^k(t, g(t, y, v)) - \varphi^{k+1}(t - 0, y) + g^0(t, y, v), \\ R(y) &= F(y) - \varphi^0(t_1, y). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Поскольку правые частные производные  $\varphi_t^k(t, y)$  не определены при  $t = t_1$ , считаем, что  $P^k(t_1, y) = 0$  при всех  $y \in Y$ . Предполагаем, что функции (1.21) достигают своих наименьших значений, равных нулю

$$\min_{y \in Y} \min_{v \in V_*^{k+1}(t, y)} P^k(t, g(t, y, v)) = 0, \tag{1.22}$$

$$\min_{y \in Y} \min_{v \in V(t, y)} Q^k(t, y, v) = 0, \tag{1.23}$$

$$\min_{y \in Y} R(y) = 0. \tag{1.24}$$

Здесь  $V_*^{k+1}(t, y) = \text{Arg} \min_{v \in V^k(t, y)} Q^k(t, y, v)$  – множество точек глобального минимума функции

$Q^k(t, y, v)$  по аргументу  $v$  на множестве (1.17). Для задачи со свободным правым концом траектории  $V_*^{k+1}(t, y) = \text{Arg} \min_{v \in V(t, y)} Q^k(t, y, v)$ , поскольку в этом случае  $V^k(t, y) = V(t, y)$ , так

как  $\pi^k = \Pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . При дополнительном условии целочисленности (1.12) формулировка достаточных условий не меняется.

**Теорема 1.1 (достаточные условия оптимальности процесса управления).** Для того чтобы допустимый процесс  $d^* = (y^*(\cdot), v^*(\cdot)) \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$  был оптимальным, достаточно существования такой невозрастающей последовательности  $\varphi^k \in \Phi$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющей условиям (1.22) – (1.24), что

$$\text{а) } P^{N^*-k}(t, y^*(t)) = 0 \text{ при всех } t \in [\tau_k^*, \tau_{k+1}^*), k = 0, 1, \dots, N^* ;$$

$$\text{б) } Q^{N^*-k}(\tau_k^*, y^*(\tau_k^* - 0), v^*(\tau_k^*)) = 0 \text{ при всех } k = 1, \dots, N^* ;$$

$$\text{в) } R(y^*(t_1)) = 0 ;$$

$$\text{г) } N^* = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \text{Arg} \min \varphi^k(t_0 - 0, y_0),$$

где  $\tau_1^*, \dots, \tau_{N^*}^*$  – возрастающая последовательность моментов переключения траектории  $y^*(\cdot)$ ,  $t_0 = \tau_0^* < \tau_1^* < \dots < \tau_{N^*}^* < \tau_{N^*+1}^* = t_1$ , а  $N^*$  – наименьшее целое неотрицательное число, начиная с которого все члены последовательности  $\varphi^k(t_0 - 0, y_0)$  оказываются равными.

**Доказательство теоремы 1.1** Пусть  $d^*$  – допустимый процесс с однократными переключениями, т.е.  $d^* \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$ . В этом случае тактовые моменты времени  $\tau_1^*, \dots, \tau_{N^*}^*$ , в которые происходят переключения, образуют возрастающую последовательность  $t_0 = \tau_0^* \leq \tau_1^* < \dots < \tau_{N^*}^* \leq \tau_{N^*+1}^* = t_1$ . Введем множество  $\mathcal{E}^1$  пар  $d = (y(\cdot), v(\cdot))$  функций, которые, в отличие от допустимых процессов из  $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$ , не связаны уравнением (1.1), но удовлетворяют ограничениям (1.2) и начальным условиям (1.4). На множестве  $\mathcal{E}^1$  определим вспомогательный функционал  $L$ . Для процесса  $d = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{E}^1$ , траектория  $y(\cdot)$  которого имеет конечное множество  $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  точек разрыва  $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_N \leq \tau_{N+1} = t_1$ , полагаем, что

$$L(d) = R(y(\tau_{N+1})) + \sum_{k=0}^N \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j(t, g(t, y(t-0), v(t))) dt + \\ + \sum_{k=1}^N Q^j(\tau_k, y(\tau_k - 0), v(\tau_k)) + \varphi^N(\tau_0 - 0, y(\tau_0 - 0)) =$$

$$= R[\tau_{N+1}] + \sum_{k=0}^N \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j[t] dt + \sum_{k=1}^N Q^j[\tau_k] + \varphi^N[\tau_0 - 0], \quad (1.25)$$

где  $j = N - k$ . Здесь и далее аргумент в квадратных скобках соответствует значению сложной функции, вычисленной на процессе  $d$  в указанный момент времени, а именно:  $R[\tau_{N+1}] = R(y(\tau_{N+1}))$ ,  $P^j[t] = P^j(t, g(t, y(t-0), v(t)))$ ,  $Q^j[\tau_k] = Q^j(\tau_k, y(\tau_k - 0), v(\tau_k))$ ,  $\varphi^N[\tau_0 - 0] = \varphi^N(\tau_0 - 0, y(\tau_0 - 0))$ . Если в начальный или конечный моменты времени траектория  $y(\cdot)$  имеет разрыв, то  $\tau_1 = \tau_0$  или  $\tau_N = \tau_{N+1}$ , при этом в (1.25) интеграл на промежутке  $[\tau_0, \tau_1)$  или  $[\tau_N, \tau_{N+1})$  равен 0 соответственно.

Проверим для функционала (1.25) условия а) – г) леммы 1.1.

1. Очевидно, что  $\mathcal{D}^1 \subset \mathcal{E}^1$  (выполняется условие а) леммы 1.1).

2. Покажем, что на любом допустимом процессе  $d = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}^1$  верно равенство  $I(d) = L(d)$  (функционал  $I$  определен формулой (1.5), индекс  $t_0$  опущен). Действительно, в каждой точке разрыва  $y(\tau_k) = g(\tau_k, y(\tau_k - 0), v(\tau_k))$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Поэтому

$$\begin{aligned} Q^j[\tau_k] &= Q^j(\tau_k, y(\tau_k - 0), v(\tau_k)) = \\ &= \varphi^j(\tau_k, g(\tau_k, y(\tau_k - 0), v(\tau_k))) - \varphi^{j+1}(\tau_k - 0, y(\tau_k - 0)) + g^0(\tau_k, y(\tau_k - 0), v(\tau_k)) = \\ &= \varphi^j(\tau_k, y(\tau_k)) - \varphi^{j+1}(\tau_k - 0, y(\tau_k - 0)) + g^0(\tau_k, y(\tau_k - 0), v(\tau_k)) = \\ &= \varphi^j[\tau_k] - \varphi^{j+1}[\tau_k - 0] + g^0[\tau_k]. \end{aligned}$$

На каждом промежутке  $[\tau_k, \tau_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , функция  $y(\cdot)$  постоянна  $y(t) = y(\tau_k) = g(t, y(t-0), v(t))$ , а управление – нейтральное  $v(t) = 0$  при  $\tau_k < t < \tau_{k+1}$ . Значит

$$P^j[t] = \varphi_t^j(t, y(t)) + f(t, y(t)) = \frac{d}{dt} \varphi^j[t] + f[t], \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}).$$

Тогда

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j[t] dt = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f[t] dt + \varphi^j[\tau_{k+1} - 0] - \varphi^j[\tau_k],$$

так как  $\varphi^j[\tau_{k+1} - 0] = \varphi^j(\tau_{k+1} - 0, y(\tau_{k+1} - 0)) = \varphi^j(\tau_{k+1} - 0, y(\tau_k))$ ,  $\varphi^j[\tau_k] = \varphi^j(\tau_k, y(\tau_k))$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j[t] dt + Q^j[\tau_k] &= \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f[t] dt + \varphi^j[\tau_{k+1} - 0] - \varphi^j[\tau_k] + \varphi^j[\tau_k] - \varphi^{j+1}[\tau_k - 0] + g^0[\tau_k] = \\
&= \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f[t] dt + g^0[\tau_k] + \varphi^j[\tau_{k+1} - 0] - \varphi^{j+1}[\tau_k - 0].
\end{aligned}$$

Подставим это выражение в функционал (1.25), который предварительно запишем в виде

$$\begin{aligned}
L = \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j[t] dt + \sum_{k=1}^N Q^j[\tau_k] \right\} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} P^N[t] dt + \int_{\tau_N}^{\tau_{N+1}} P^0[t] dt + \\
+ R[\tau_{N+1}] + Q^0[\tau_N] + \varphi^N[\tau_0 - 0].
\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
L(d) &= \underbrace{F[\tau_{N+1}] + \int_{\tau_0}^{\tau_{N+1}} f[t] dt + \sum_{k=1}^N g^0[\tau_k]}_{=I} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{dt} \varphi^N[t] dt + \int_{\tau_N}^{\tau_{N+1}} \frac{d}{dt} \varphi^0[t] dt + \\
&+ \sum_{k=1}^N \left\{ \varphi^j[\tau_{k+1} - 0] - \varphi^{j+1}[\tau_k - 0] \right\} - \varphi^0[\tau_{N+1}] + \varphi^0[\tau_N] - \varphi^1[\tau_N - 0] + \varphi^N[\tau_0 - 0] = \\
&= I + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{dt} \varphi^N[t] dt + \int_{\tau_N}^{\tau_{N+1}} \frac{d}{dt} \varphi^0[t] dt - \varphi^N[\tau_1 - 0] - \varphi^0[\tau_{N+1}] + \varphi^0[\tau_N] + \varphi^N[\tau_0 - 0]. \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Рассмотрим четыре случая. В первом случае при  $\tau_0 \neq \tau_1$  и  $\tau_N \neq \tau_{N+1}$ , взяв интегралы в (1.26), получаем

$$\begin{aligned}
L &= I + \varphi^N[\tau_1 - 0] - \varphi^N[\tau_0] + \varphi^0[\tau_{N+1} - 0] - \varphi^0[\tau_N] - \\
&- \varphi^N[\tau_1 - 0] - \varphi^0[\tau_{N+1}] + \varphi^0[\tau_N] + \varphi^N[\tau_0 - 0] = I,
\end{aligned}$$

так как  $\varphi^N[\tau_0 - 0] = \varphi^N[\tau_0]$  и  $\varphi^0[\tau_{N+1} - 0] = \varphi^0[\tau_{N+1}]$  в силу непрерывности траектории в точках  $\tau_0$  и  $\tau_{N+1}$ . Во втором случае при  $\tau_0 = \tau_1$  и  $\tau_N \neq \tau_{N+1}$  в (1.26) интеграл на промежутке  $[\tau_0, \tau_1)$  равен 0. Тогда

$$L = I + \varphi^0[\tau_{N+1} - 0] - \varphi^0[\tau_N] - \varphi^N[\tau_1 - 0] - \varphi^0[\tau_{N+1}] + \varphi^0[\tau_N] + \varphi^N[\tau_0 - 0] = I,$$

так как  $\varphi^0[\tau_{N+1} - 0] = \varphi^0[\tau_{N+1}]$  в силу непрерывности траектории в точке  $\tau_{N+1}$ , а  $\varphi^N[\tau_1 - 0] = \varphi^N[\tau_0 - 0]$  из-за  $\tau_0 = \tau_1$ . В третьем случае при  $\tau_0 \neq \tau_1$  и  $\tau_N = \tau_{N+1}$  в (1.26) интеграл на промежутке  $[\tau_N, \tau_{N+1})$  равен 0. Тогда

$$L = I + \varphi^N[\tau_1 - 0] - \varphi^N[\tau_0] - \varphi^N[\tau_1 - 0] - \varphi^0[\tau_{N+1}] + \varphi^0[\tau_N] + \varphi^N[\tau_0 - 0] = I,$$

так как  $\varphi^N[\tau_0 - 0] = \varphi^N[\tau_0]$  в силу непрерывности траектории в точке  $\tau_0$ , а  $\varphi^0[\tau_{N+1}] = \varphi^0[\tau_N]$  из-за  $\tau_N = \tau_{N+1}$ . Наконец, в четвертом случае при  $\tau_0 = \tau_1$  и  $\tau_N = \tau_{N+1}$ , оба интеграла в правой части (1.26) равны 0. Тогда

$$L = I - \varphi^N[\tau_1 - 0] - \varphi^0[\tau_{N+1}] + \varphi^0[\tau_N] + \varphi^N[\tau_0 - 0] = I,$$

так как  $\tau_0 = \tau_1$  и  $\tau_N = \tau_{N+1}$ . Таким образом, функционалы (1.5) и (1.25) совпадают на множестве  $\mathcal{D}^1$  допустимых процессов, т.е. условие б) леммы 1.1 выполняется.

3. Покажем, что для любого процесса  $d = (y(\cdot), v(\cdot))$  из множества  $\mathcal{E}^1$  верно неравенство  $L(d) \geq l$ , где  $l = \varphi^{N*}[t_0 - 0]$  (условие в) леммы 1.1). Предположим, что множество  $\mathcal{J} = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  точек разрыва  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < \tau_{N+1} = t_1$  функции  $y(\cdot)$  разбивает промежутки  $T$  на полуинтервалы  $[\tau_k, \tau_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , длина  $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$  каждого из которых меньше  $\varepsilon$ :  $\Delta\tau = \max_{k=0,1,\dots,N} \Delta\tau_k < \varepsilon$ . Малость величины  $\varepsilon > 0$  можно всегда обеспечить, добавляя к точкам разрыва некоторое количество точек  $\tau$  непрерывности функций  $y(\cdot)$ , полагая при этом, что управление в этих точках нейтральное  $v(\tau) = o$ , а затраты на переключение состояния – нулевые  $g^0[\tau] = 0$ . Функционал (1.25) не меняется от добавления таких "фиктивных" точек разрыва.

Оценим в функционале (1.25) слагаемые, зависящие от одного значения управления. Чтобы не получить грубую оценку, нужно эти слагаемые оценивать совместно, а не по отдельности. Применяя лемму 1.2 для функций  $q(v) = Q^j(\tau_k, y(\tau_k - 0), v)$ ,  $p(t, v) = P^j(t, g(t, y(t - 0), v))$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = N - k$ , и учитывая (1.22), (1.23), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j(t, g(t, y(t - 0), v(t))) dt + Q^j(\tau_k, y(\tau_k - 0), v(\tau_k)) \geq \\ & \geq \min_{v \in V^{j+1}} \left\{ \underbrace{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j(t, g(t, y(t - 0), v)) dt}_{p(t, v)} + \underbrace{Q^j(\tau_k, y(\tau_k - 0), v)}_{q(v)} \right\} \geq \\ & \geq \min_{v \in V^{j+1}} Q^j(\tau_k, y(\tau_k - 0), v) + \min_{v \in V_*^{j+1}} P^j(\tau_k, g(\tau_k, y(\tau_k - 0), v)) \cdot \Delta\tau_k - \Delta\tau_k \cdot \omega(\Delta\tau_k) \geq \\ & \geq \min_{y \in Y} \min_{v \in V^{j+1}} Q^j(\tau_k, y, v) + \min_{y \in Y} \min_{v \in V_*^{j+1}} P^j(\tau_k, g(\tau_k, y, v)) \cdot \Delta\tau_k - \Delta\tau_k \cdot \omega(\Delta\tau_k) \geq -\Delta\tau \cdot \omega(\Delta\tau), \end{aligned}$$

где  $V^{j+1} = V^{j+1}(\tau_k, y(\tau_k - 0))$ ,  $V_*^{j+1} = V_*^{j+1}(\tau_k, y(\tau_k - 0))$ ,  $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ ,  
 $\Delta\tau = \max_{k=0,1,\dots,N} \Delta\tau_k < \varepsilon$ , а  $\omega(\Delta\tau) \rightarrow +0$  при  $\Delta\tau \rightarrow +0$ . На промежутке  $[\tau_0, \tau_1)$  система сохраняет

начальное состояние и функция  $P^N(t, g(t, y, v)) \geq 0$ , согласно (1.22).

Теперь оцениваем функционал (1.25), учитывая, что минимум суммы не меньше суммы минимумов, получаем

$$L \geq \sum_{k=1}^N \{-\Delta\tau \cdot \omega(\Delta\tau)\} + \min_{y \in Y} R(y) + \varphi^N[\tau_0 - 0] \geq \varphi^N[\tau_0 - 0] - \omega(\Delta\tau).$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$  (следовательно,  $\Delta\tau \rightarrow +0$ , поскольку  $\Delta\tau < \varepsilon$ ), приходим к неравенству  $L \geq \varphi^N[t_0 - 0]$ . Согласно условию г) теоремы 1.1,  $\varphi^N[t_0 - 0] \geq \varphi^{N^*}[t_0 - 0] = l$ . Поэтому  $L \geq l$ . Неравенство в) леммы 1.1 доказано.

4. Осталось доказать, что условие г) леммы 1.1 тоже верно. Для процесса  $d^*$ , удовлетворяющего условиям а)-в) теоремы 1.1, имеем  $R[t_1] = 0$ ;  $P^j[t] = 0$  при всех  $t \in [\tau_k^*, \tau_{k+1}^*)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N^*$ ;  $Q^{j+1}[\tau_k] = 0$  при всех  $k = 1, \dots, N^*$ , где  $j = N^* - k$ . Поэтому  $L(d^*) = \varphi^{N^*}[t_0 - 0] = l$ . Следовательно, условие г) леммы 1.1 тоже выполняется.

Все условия леммы 1.1 справедливы для процесса  $d^* \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$ . Значит, этот процесс оптимальный. Теорема 1.1 доказана.

Заметим, что используемая в теореме функция  $\varphi^{N^*}(t, y)$  представляет собой условную функцию цены, что следует из доказанного в п.4 равенства  $\varphi^{N^*}[t_0 - 0] = I(d^*)$ .

### Достаточные условия оптимальности позиционного управления

Для формулировки и доказательства достаточных условий оптимальности процесса управления САТ (теорема 1.1) вместо функции цены использовались вспомогательные функции, которые определялись как условные функции цены. Аналогичное построение применяется для достаточных условий оптимальности позиционного управления, т.е. управления с обратной связью. Вводятся вспомогательные функции – условные позиционные управления, из которых затем получается оптимальное управление с обратной связью.

Условным позиционным управлением (т.е. условным управлением с обратной связью) будем называть замкнутое управление  $v^k(t, y)$  процессом при условии, что осталось не более  $k$  переключений состояния САТ. На области  $\pi^k$  своего определения функция  $v^k(t, y)$  может

принимать либо нейтральное значение  $\mathbf{v}^k(t, y) = o$  (при этом система сохраняет свое состояние), либо – отличное от нейтрального. В последнем случае система совершает мгновенное переключение из позиции  $(t, y) \in \pi^k$  в позицию  $(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)))$ , которая входит в область определения  $\pi^{k-1}$  предыдущего условного управления  $\mathbf{v}^{k-1}(t, y)$ . Таким образом, условные управления образуют последовательность, которая обеспечивает позиционное управление САТ.

Последовательность  $\mathbf{v}^0(t, y), \mathbf{v}^1(t, y), \mathbf{v}^2(t, y) \dots$  условных управлений с обратной связью будем называть *допустимой*, если для каждого начального состояния  $(\theta, y_\theta) \in \pi^N$  существует допустимый процесс  $d_N = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}_N^1(\theta, y_\theta)$  с не более чем  $N$  переключениями, удовлетворяющий условиям

$$y_i = g(\tau_i, y_{i-1}, v_i), \quad y_0 = y_\theta,$$

$$v_i = \mathbf{v}^{N-i+1}(\tau_i, y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $y_i = y(\tau_i)$ , а  $\tau_1, \dots, \tau_N$  – возрастающая последовательность моментов переключений  $\theta \leq \tau_1 < \dots < \tau_N \leq t_1$ . Будем говорить, что допустимая последовательность условных управлений *порождает* для каждого начального состояния допустимый процесс. Так как одна и та же позиция может принадлежать разным подмножествам  $\pi^k$ , то и порождаемые процессы могут быть разные. Они будут отличаться, в первую очередь, количеством переключений. Если порождаемые процессы оказываются оптимальными, то и условные управления назовем *оптимальными*. Из последовательности  $\mathbf{v}^k(t, y)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , оптимальных условных управлений с обратной связью можно построить оптимальное позиционное управление  $\mathbf{v}(t, y)$ . Для этого достаточно знать оптимальное количество  $\mathbf{k}(t, y)$  переключений для процесса, исходящего из заданной позиции  $(t, y)$ . Например, для получения оптимального процесса для заданных начальных условий (1.3) нужно сначала определить оптимальное число  $N = \mathbf{k}(t_0, y_0)$  переключений, а затем, применяя последовательно оптимальные условные управления  $v(\tau_i) = \mathbf{v}^{N-i+1}(\tau_i, y(\tau_i - 0))$ ,  $i = 1, \dots, N$ , найти оптимальный процесс.

На основе достаточных условий оптимальности процесса управления (см. теорему 1.1) получим уравнения для нахождения оптимального позиционного управления, т.е. оптимального управления с обратной связью, а также функции цены.

**Теорема 1.2 (достаточные условия оптимальности позиционного управления).** Если существуют невозрастающая последовательность функций  $\varphi^k \in \Phi$  и допустимая последовательность условных позиционных управлений  $\mathbf{v}^k \in \mathcal{V}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющие условиям

$$\varphi^0(t_1, y) = F(y), \quad (1.27)$$

$$\varphi^{k+1}(t-0, y) = \varphi^k(t, g(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y))) + g^0(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y)), \quad (1.28)$$

$$\varphi_t^k(t, g(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y))) + f(t, g(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y))) = 0, \quad (1.29)$$

$$\mathbf{v}^{k+1}(t, y) \in \text{Arg} \min_{v \in V_*^{k+1}(t, y)} [\varphi_t^k(t, g(t, y, v)) + f(t, g(t, y, v))], \quad (1.30)$$

$$\mathbf{k}(t, y) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \text{Arg} \min \varphi^k(t-0, y), \quad (1.31)$$

где  $t \in T$ ,  $y \in Y$ , то оптимальное управление с обратной связью имеет вид

$$\mathbf{v}(t, y) = \mathbf{v}^{\mathbf{k}(t, y)}(t, y), \quad (1.32)$$

а функция цены  $\varphi \in \Phi$  вычисляется по формуле

$$\varphi(\theta-0, y_\theta) = \varphi^{\mathbf{k}(\theta, y_\theta)}(\theta-0, y_\theta) = \min_{d \in \mathcal{D}^1(\theta, y_\theta)} I_\theta(d), \quad (1.33)$$

т.е. предел слева условной функции цены равен минимальному значению функционала оставшихся потерь (1.14).

Здесь  $\mathbf{k}(t, y)$  – наименьшее целое неотрицательное число, начиная с которого все члены невозрастающей последовательности  $\varphi^k(t-0, y)$  оказываются равными;

$$V_*^{k+1}(t, y) = \text{Arg} \min_{v \in V^{k+1}(t, y)} [\varphi^k(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)] \quad (1.34)$$

– множество точек глобального минимума функции  $\varphi^k(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)$  по аргументу  $v$  на множестве (1.17). Поскольку правая производная  $\varphi_t^k(t, y)$  не определена при  $t = t_1$ , то полагаем, как и ранее, что  $P^k(t_1, y) = \varphi_t^k(t_1, y) + f(t_1, y) = 0$  при всех  $y \in Y$ . В этом случае условие (1.30) равносильно включению  $\mathbf{v}^{k+1}(t_1, y) \in V_*^{k+1}(t_1, y)$ , т.е.

$$\mathbf{v}^{k+1}(t_1, y) \in \text{Arg} \min_{v \in V^{k+1}(t_1, y)} [\varphi^k(t_1, g(t_1, y, v)) + g^0(t_1, y, v)]. \quad (1.35)$$

Доказательство теоремы 1.2 Сначала проверим выполнение условий (1.22)–(1.24). Из (1.29) получаем, что  $P^k(t, g(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y))) + f(t, g(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y))) = 0$  при всех  $y \in Y$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Отсюда следует (1.22). Перепишем условие (1.28) равносильным образом

$$\min_{v \in V^{k+1}(t,y)} [\varphi^k(t, g(t, y, v)) - \varphi^{k+1}(t-0, y) + g^0(t, y, v)] = 0 \Leftrightarrow \min_{v \in V^{k+1}(t,y)} Q^k(t, y, v) = 0$$

при всех  $y \in Y$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Отсюда следует (1.23). Согласно (1.27), функция

$R(y) = F(y) - \varphi^0(t_1, y)$  тождественно равна нулю. Поэтому условие (1.24) выполняется.

Проверим теперь условия а)-г) теоремы 1.1. Пусть допустимый процесс  $d^* = (y^*(\cdot), v^*(\cdot))$  с  $N^*$  переключениями в точках  $\tau_1^*, \dots, \tau_{N^*}^*$ , образующих возрастающую последовательность

$t_0 = \tau_0^* \leq \tau_1^* < \dots < \tau_{N^*}^* \leq \tau_{N^*+1}^* = t_1$ , порожден условными управлениями  $v^k(t, y)$ ,  $k = 1, \dots, N^*$ ,

с обратной связью

$$y_k^* = g(\tau_k, y_{k-1}^*, v_k^*), \quad v_k^* = v^{N-k}(\tau_k, y_{k-1}^*), \quad k = 1, \dots, N^*,$$

где  $y_k^* = y(\tau_k^*)$ ,  $v_k^* = v(\tau_k^*)$ ,  $y_0^* = y_0$ .

Условие в) выполняется для любого процесса, так как  $R(y) = 0$  при всех  $y \in Y$ , согласно

(1.27). Для любого допустимого процесса из равенства (1.29) следует, что  $P^k(t, y) = 0$ , т.е.

условие а) также выполняется. Проверим условие б). Для этого, учитывая (1.28), (1.30) и

(1.34), вычисляем значение функции  $Q^{N^*-k}(\tau_k^*, y_{k-1}^*, v_k^*)$  на процессе  $d^*$

$$Q^j(\tau_k^*, y_{k-1}^*, v_k^*) = Q^j(\tau_k^*, y_{k-1}^*, v^{j+1}(\tau_k^*, y_{k-1}^*)) = \min_{v \in V^{j+1}(\tau_k^*, y_{k-1}^*)} Q^j(\tau_k^*, y_{k-1}^*, v) = 0,$$

где  $j = N^* - k$ . Значит, условие б) тоже верно. Из (1.31) следует справедливость условия г).

Итак, для процесса  $d^*$  выполняются все условия теоремы 1.1. Следовательно, этот процесс оптимальный. Таким образом, позиционное управление (1.32) порождает оптимальные процессы. Значит, это управление оптимальное, а функция цены имеет вид (1.33). Теорема 1.2 доказана.

Задача нахождения условных функций цены и оптимальных условных управлений с обратной связью сводится к решению рекуррентного (1.28) и дифференциального (1.29) уравнений с терминальным условием (1.27). Эти уравнения можно записать следующим образом

$$\varphi^{k+1}(t, y) = \min_{v \in V^{k+1}(t,y)} [\varphi^k(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)], \quad (1.36)$$

$$\min_{v \in V_*^{k+1}(t,y)} [\varphi_t^k(t, g(t, y, v)) + f(t, g(t, y, v))] = 0. \quad (1.37)$$

Как видим, система уравнений усложнена операциями конечномерной минимизации по вектору управления, причем в результате минимизации в (1.37) определяется условное оптимальное позиционное управление (1.30). Окончательный выбор применяемого условного

управления выполняется в результате целочисленной минимизации (1.31). Рекуррентное уравнение (1.36) аналогично уравнению Беллмана для дискретных систем, в котором, однако, время  $t$  меняется непрерывно. Дифференциальное уравнение (1.37) аналогично уравнению Беллмана для непрерывных систем. В рассматриваемом случае оно простейшее, так как траектории системы постоянны, т.е.  $\dot{y}(t) = 0$  почти всюду на  $T$ . Его решение на промежутках постоянства состояния получается просто – интегрированием по  $t$  функции  $f(t, y)$ . Минимизация (1.30), в некотором смысле, "объединяет" аналогичные операции нахождения управления в уравнениях Беллмана для дискретных и непрерывных систем. Она проводится в два этапа. На первом этапе минимизируется скачок функции цены и определяется множество (1.34). На втором этапе в множестве (1.34) ищется управление, которое минимизирует изменение функции цены вдоль траекторий движения ( $\dot{y}(t) = 0$ ). Здесь тоже прослеживаются действия, применяемые для оптимизации непрерывных или дискретных систем. Однако эти действия взаимосвязаны и выполняются для условных позиционных управлений и условных функций цены.

### **Достаточные условия оптимальности при ограниченном количестве переключений**

Доказанные условия оптимальности (теорема 1.2) фактически решают задачу оптимального управления процессами с ограниченным количеством переключений. В самом деле, если число переключений допустимых процессов ограничено, то, в отличие от случая без ограничений, достаточно найти конечные последовательности условных позиционных управлений  $\mathbf{v}^k$  и условных функций цены  $\varphi^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , где  $N$  – максимальное допустимое число переключений. При этом формулировка условий оптимальности изменится незначительно.

**Теорема 1.3 (достаточные условия оптимальности позиционного управления при ограниченном количестве переключений).** *Если существуют невозрастающая конечная последовательность функций  $\varphi^k \in \Phi$  и конечная последовательность допустимых условных управлений  $\mathbf{v}^k \in \mathcal{V}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , удовлетворяющие соотношениям (1.27) – (1.30), то оптимальное управление с обратной связью для процессов с не более чем  $N$  переключений имеет вид (1.32)*

$$\mathbf{v}(t, y) = \mathbf{v}^{\mathbf{k}(t, y)}(t, y), \quad (1.38)$$

где  $\mathbf{k}(t, y)$  – наименьшее целое неотрицательное число, не превосходящее  $N$ , начиная с которого все члены невозрастающей последовательности  $\varphi^k(t - 0, y)$  оказываются равными

$$k(t, y) = \min \operatorname{Arg} \min_{k=0,1,\dots,N} \varphi^k(t - 0, y), \quad (1.39)$$

а функция цены  $\varphi \in \Phi$  вычисляется по формуле

$$\varphi(\theta - 0, y_\theta) = \varphi^{k(\theta, y_\theta)}(\theta - 0, y_\theta) = \min_{d \in \mathcal{D}_N(\theta, y_\theta)} I_\theta(d), \quad (1.40)$$

т.е. предел слева условной функции цены равен минимальному значению функционала оставшихся потерь (1.14) на множестве допустимых процессов с ограниченным количеством переключений.

Доказательство теоремы 1.3 следует из утверждения теоремы 1.2, если наложить ограничение на количество переключений допустимых процессов.

### 1.3. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Полученные в теореме 1.2 уравнения (1.27)–(1.32) для нахождения условных функций цены  $\varphi^k$  и оптимальных условных позиционных управлений  $\nu^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , представляют собой систему дифференциального и рекуррентного уравнений, осложненную операциями конечномерной и целочисленной минимизации. Будем использовать для решения этой системы методику, аналогичную предложенной в [21,23,24]. Идея состоит в том, что условная функция цены составляется из вспомогательных функций, называемых *образующими* функции цены. Образующие определяются на некоторых подмножествах области определения функции цены и на этих подмножествах совпадают с ней. Чтобы сформулировать определение образующих, нужно детализировать область определения  $\pi^k$  функций  $\varphi^k$  и  $\nu^k$ .

#### Образующие условной функции цены

Согласно определению, условная функция цены  $\varphi^k(t, y)$  равна значению функционала оставшихся потерь (1.14), вычисленному на оптимальном процессе  $d_k \in \mathcal{D}_k^1(t, y)$  с не более чем  $k$  переключениями, исходящим из позиции  $(t, y) \in \pi^k$ . Фактическое число  $j$  переключений у оптимального процесса  $d_k \in \mathcal{D}_k^1(t, y)$  может быть меньше, чем  $k$ . Поэтому область  $\pi^k$  можно представить в виде

$$\pi^k = \pi_0^k \cup \pi_1^k \cup \dots \cup \pi_k^k, \quad (1.41)$$

где  $\pi_j^k$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , множество таких позиций  $(t, y) \in \pi^k$ , исходя из которых, оптимальный процесс  $d_k \in \mathcal{D}_k^1(t, y)$  имеет ровно  $j$  переключений из  $k$  допустимых. В обозначении  $\pi_j^k$  верхний индекс – это максимально допустимое количество переключений, а нижний индекс – фактическое число переключений.

Детализируем множество  $\pi_k^k$ . Исходящий из позиции  $(t, y) \in \pi_k^k$  оптимальный процесс  $d_k \in \mathcal{D}_k(t, y)$  имеет максимально допустимое число переключений. Можно сказать, что для этого процесса ограничение на количество переключений является активным. Управление  $\mathbf{v}^k(t, y)$  на подмножестве  $\pi_k^k$  своей области определения  $\pi^k$  либо равно нейтральному элементу, либо отлично от него. Обозначим через  $\pi_k$  множество

$$\pi_k = \{(t, y) \in \pi_k^k \mid \varphi^k(t, y) \neq \varphi^{k-1}(t, y), \mathbf{v}^k(t, y) \neq o\} \quad (1.42)$$

таких позиций  $(t, y) \in \pi_k$ , исходя из которых, оптимальный процесс имеет ровно  $k$  переключений, при условии, что первое из них происходит именно в исходной позиции  $(t, y)$ .

Кроме процессов, исходящих из позиций  $(t, y) \in \pi_k$ , ровно  $k$  переключений имеют также процессы, которые некоторое время протекают с нейтральным управлением  $\mathbf{v}^k(t, y) = o$ , сохраняя при этом состояние системы, а затем, достигая позиции  $(t, y) \in \pi_k$ , совершают первое из  $k$  переключений. Будем называть *поверхностью переключения* левую границу  $\partial \pi_k$  множества  $\pi_k$ , т.е. множество таких точек  $(t, y) \in \pi_k$ , что  $(t - \varepsilon, y) \notin \pi_k$  для любого малого  $\varepsilon > 0$ . Когда пространство состояний системы одномерное ( $m = 1$ ), вместо поверхности переключения будем говорить о *линии* переключения. Обозначим через

$$\pi_{0k} = \{(t, y) \in \pi_k^k \mid \exists \tau \in (t, t_1] : (\tau, y) \in \partial \pi_k\} \quad (1.43)$$

множество позиций  $(t, y) \in \pi_k$ , предшествующих позициям на поверхности переключения  $\partial \pi_k$ . На этом множестве оптимальное позиционное управление нейтральное  $\mathbf{v}^k(t, y) = o$ , что и отмечается добавлением нулевого индекса. Таким образом, множество  $\pi_k^k$  можно представить как объединение двух непересекающихся подмножеств (1.42), (1.43)

$$\pi_k^k = \pi_{0k} \cup \pi_k. \quad (1.44)$$

*Образующей* функции цены будем называть функцию  $\varphi_k^k : \pi_k^k \rightarrow \mathbb{R}$ , которая на множестве  $\pi_k^k$  совпадает с функцией цены  $\varphi^k$ , т.е.  $\varphi^k(t, y) = \varphi_k^k(t, y)$  при  $(t, y) \in \pi_k^k$ . Другими слова-

ми, образующая  $\varphi_k^k(t, y)$  – это условная функция цены  $\varphi^k(t, y)$ , вычисленная на оптимальном процессе  $d_k \in \mathcal{D}_k^1(t, y)$ , имеющем ровно  $k$  переключений, т.е. на процессе с максимально допустимым в классе  $\mathcal{D}_k^1(t, y)$  количеством переключений. Согласно (1.44), образующую  $\varphi_k^k(t, y)$  можно представить в виде

$$\varphi_k^k(t, y) = \begin{cases} \varphi_k(t, y), & (t, y) \in \pi_k, \\ \varphi_{0k}(t, y), & (t, y) \in \pi_{0k}. \end{cases} \quad (1.45)$$

Функции  $\varphi_k$  и  $\varphi_{0k}$  будем тоже называть образующими функции цены.

Учитывая представление (1.41) и (1.45), запишем последовательность для условных функций цены

$$\varphi^0 = \varphi_0^0 \text{ на } \pi^0 = \pi_0^0; \quad \varphi^1 = \begin{cases} \varphi_1^1 \text{ на } \pi_1^1, \\ \varphi^0 \text{ на } \pi^1 \setminus \pi_1^1, \end{cases} \dots, \quad \varphi^k = \begin{cases} \varphi_k^k \text{ на } \pi_k^k, \\ \varphi^{k-1} \text{ на } \pi^k \setminus \pi_k^k, \end{cases} \dots \quad (1.46)$$

Видно, что условная функция цены  $\varphi^k$  выражается через образующую  $\varphi_k^k$  и предшествующую условную функцию цены  $\varphi^{k-1}$ . Поэтому рекуррентная последовательность (1.46) позволяет найти все функции  $\varphi^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Нужно только составить алгоритм поиска образующей  $\varphi_k^k$  по известной функции  $\varphi^{k-1}$ . На области  $\pi_k$ , где изменяется состояние системы (переключение), согласно рекуррентному уравнению (1.28)

$$\varphi_k(t, y) = \varphi^{k-1}(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y))) + g^0(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)), \quad (1.47)$$

где оптимальное управление (1.30)

$$\mathbf{v}^k(t, y) \in \text{Arg} \min_{v \in V_*^k(t, y)} [\varphi_t^{k-1}(t, g(t, y, v)) + f(t, g(t, y, v))] \quad (1.48)$$

отлично от нейтрального элемента  $\mathbf{v}^k(t, y) \neq o$ . Значит, в области  $\pi_k$  управление (1.48) лучше нейтрального, т.е.

$$\varphi_k(t, y) < \varphi^{k-1}(t, y). \quad (1.49)$$

Кроме того, поскольку нейтральное управление  $v = o$ , при котором состояние системы сохраняется  $g(t, y, o) = y$ , в области  $\pi_k$  не является оптимальным, то согласно уравнению (1.37)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_k(t, y) + f(t, y) \geq 0. \quad (1.50)$$

Правая производная по времени функции (1.47) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_k(t, y) = \varphi_t^{k-1}(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y))) + g_t^0(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)).$$

Согласно (1.29), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_k(t, y) = -f(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y))) + g_t^0(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)).$$

Подставляя выражение для производной в (1.50), приходим к неравенству

$$-f(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y))) + g_t^0(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)) + f(t, y) \geq 0,$$

которое запишем в виде

$$f(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y))) - g_t^0(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)) \leq f(t, y). \quad (1.51)$$

Таким образом, область  $\pi_k$  определяется системой двух неравенств (1.49), (1.51)

$$\begin{cases} \varphi_k(t, y) < \varphi^{k-1}(t, y), \\ f(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y))) - g_t^0(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)) \leq f(t, y), \end{cases} \quad (1.52)$$

оптимальное условное позиционное управление находится в результате минимизации (1.48) по множеству (1.34)

$$V_*^k(t, y) = \text{Arg} \min_{v \in V^k(t, y)} [\varphi^{k-1}(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)],$$

а образующая  $\varphi_k$  функции цены на  $\pi_k$  определяется формулой (1.47). При  $t = t_1$  второе неравенство в (1.52) не учитывается, поскольку условие (1.48) заменяется на (1.35).

### Описание синтеза

Условные функции цены

$$\varphi^0(t, y), \varphi^1(t, y), \varphi^2(t, y), \dots$$

и оптимальные условные позиционные управления

$$\mathbf{v}^1(t, y), \mathbf{v}^2(t, y), \dots$$

строятся при помощи образующих функции цены

$$\varphi_0(t, y), \varphi_1(t, y), \varphi_{01}(t, y), \varphi_2(t, y), \varphi_{02}(t, y), \varphi_3(t, y), \varphi_{03}(t, y), \dots \quad (1.53)$$

и образующих позиционных управлений

$$\mathbf{v}_1(t, y), \mathbf{v}_2(t, y), \dots$$

Напомним, что значения функций (1.53) равны соответствующим значениям функционала  $I_t$  оставшихся потерь (1.14), вычисленным на траекториях, исходящих из начального состояния  $y(t-0) = y$ , причем величина  $\varphi_0(t, y)$  вычислена на траектории без переключений;  $\varphi_1(t, y)$ ,  $\varphi_{01}(t, y)$  – на оптимальных траекториях с одним переключением в момент времени  $t$  или по-

сле него соответственно;  $\varphi_2(t, y)$ ,  $\varphi_{02}(t, y)$  – на оптимальных траекториях с двумя переключениями, первое из которых происходит в момент времени  $t$  или после него соответственно, и т.д. Области определения  $\pi_0, \pi_1, \pi_{01}, \pi_2, \pi_{02}, \pi_3, \pi_{03}, \dots$  образующих (1.53) являются подмножествами множества позиций  $\Pi = T \times Y$ . Поскольку все функции (1.53) непрерывны справа по  $t$ , то область определения каждой из них включает левую границу. Значение условной функции цены  $\varphi^k(t, y)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , равно значению функционала  $I_t$  оставшихся потерь (1.14), вычисленному на оптимальной траектории, исходящей из состояния  $y(t-0) = y$ , и имеющей не более  $k$  скачков. Управление  $v^k(t, y)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , является оптимальным позиционным управлением для процессов с не более чем  $k$  переключениями. Области определения  $\pi^k$  условных функций цены и управления образуют цепочку (1.19). Для задачи со свободным правым концом траектории эти области совпадают с пространством позиций  $\Pi = \pi^0 = \pi^1 = \pi^2 = \dots$

Построение заканчивается, если обрывается последовательность образующих (1.53). Однако в задачах с неограниченным пространством состояний САТ число членов последовательности (1.53) может быть бесконечным. В этом случае необходимо, исходя из практических соображений, либо ограничить множество допустимых состояний САТ, либо задать максимально допустимое количество переключений САТ.

Синтезированное управление позволяет найти оптимальную траекторию для любых начальных условий (1.13). Для этого, выполняя целочисленную оптимизацию (1.39), определяется количество переключений у оптимального процесса, исходящего из данной начальной позиции. Тем самым осуществляется выбор (1.38) оптимального для данной позиции управления среди условных оптимальных управлений. Этот же выбор определяет значение функции цены (1.40).

Рис.1.2 иллюстрирует этапы синтеза управления процессами, имеющими не более двух переключений. Условные функции цены  $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2$  строятся из образующих  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{01}, \varphi_2, \varphi_{02}$ . Их области определения  $\pi_0, \pi_1, \pi_{01}, \pi_2, \pi_{02}$  отмечены на рис.1.2 полужирными цифрами **0, 1, 01, 2, 02** соответственно: область  $\pi_0$  совпадает со всем пространством позиций (квадрат **0** на рис.1.2,а); области  $\pi_1, \pi_{01}$  отмечены на рис.1.2,б цифрами **1** и **01**; области  $\pi_2, \pi_{02}$  – на рис.1.2,в – цифрами **2** и **02**. Левые границы  $\partial\pi_1$  и  $\partial\pi_2$  областей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  изображены двойными линиями. Они разделяют области **1** и **01** на рис.1.2,б и области **2** и **02** на рис.1.2,в. Эти линии определяют линии переключений оптимальных процессов. На рис.1.2 полужирными стрелками изображена оптимальная траектория (с двумя скачками).

Движение САТ начинается из состояния, отмеченного на рис.1.2,в черным кружком на оси  $y$ , и проходит по области **02** до линии переключения, где САТ совершает первое переключение (вертикальная стрелка). Продолжение траектории изображено на рис.1.2,б. Система сохраняет свое состояние в области **01**, а на ее границе (на линии переключения) совершает второе переключение. Последний участок траектории изображен на рис.1.2,а. Состояние системы в области **0** сохраняется до окончания процесса управления. Заметим, что границы между областями **0** и **1**, **1** и **2** не являются линиями переключения, поскольку попасть на такую границу слева (при нейтральном управлении, сохраняя состояние) система не может.

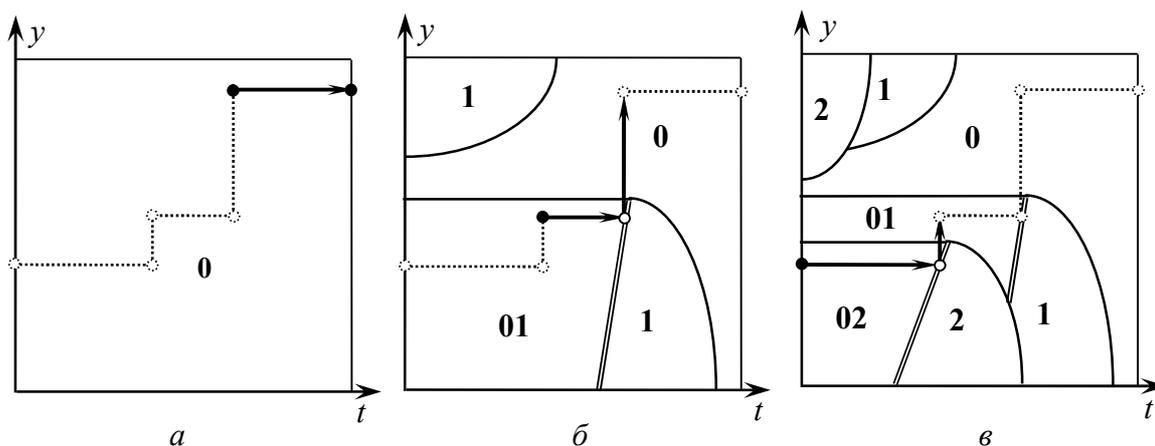


Рис.1.2

### Алгоритм синтеза

Шаг 0. Находим функцию  $\varphi_0$ , интегрируя на области  $\pi^0$  дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_0(t, y) + f(t, y) = 0 \quad (1.54)$$

с терминальным условием

$$\varphi_0(t_1, y) = F(y). \quad (1.55)$$

Полагаем, что  $\varphi^0(t, y) = \varphi_0(t, y)$  и  $v^0(t, y) = 0$  для всех  $(t, y) \in \pi^0$ . Задаем номер  $k = 1$  следующих искомых условных функций цены и управления.

Шаг  $1^k$ . На области  $\pi^k$  находим образующую функции цены

$$\varphi_k(t, y) = \min_{v \in V^k(t, y)} [\varphi^{k-1}(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)] \quad (1.56)$$

и образующую позиционного управления

$$v_k(t, y) = \arg \min_{v \in V^k(t, y)} [\varphi^{k-1}(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)]. \quad (1.57)$$

Решая систему неравенств (при  $t < t_1$ )

$$\begin{cases} \varphi_k(t, y) < \varphi^{k-1}(t, y), \\ f(t, g(t, y, \mathbf{v}_k(t, y)) - g_t^0(t, y, \mathbf{v}_k(t, y))) \leq f(t, y), \end{cases} \quad (1.58)$$

определяем множество позиций  $\pi_k$ , в которых происходит переключение. При  $t = t_1$  второе неравенство в (1.58) не учитывается. Если данная система не имеет решений ( $\pi_k = \emptyset$ ), то процесс построения условных функций цены и управления заканчивается. Если левая граница  $\partial\pi_k$  совпадает с левой границей  $\partial\Pi$  всего пространства позиций, то пропускаем шаг 2, полагая  $\pi_{0k} = \emptyset$ .

Шаг 2<sup>k</sup>. Если система (1.58) совместна ( $\pi_k \neq \emptyset$ ), то находим образующую  $\varphi_{0k}(t, y)$ , интегрируя на области  $\pi_{0k}$  ( $\pi_{0k}$  – множество позиций, предшествующих  $\pi_k$ ) уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{0k}(t, y) + f(t, y) = 0 \quad (1.59)$$

с терминальным условием на левой границе  $\partial\pi_k$  области  $\pi_k$

$$\varphi_{0k}(t - 0, y) = \varphi_k(t, y). \quad (1.60)$$

Шаг 3<sup>k</sup>. Составляем условную функцию цены

$$\varphi^k(t, y) = \begin{cases} \varphi_{0k}(t, y), & (t, y) \in \pi_{0k}, \\ \varphi_k(t, y), & (t, y) \in \pi_k, \\ \varphi^{k-1}(t, y), & (t, y) \in \pi^k \setminus (\pi_{0k} \cup \pi_k), \end{cases} \quad (1.61)$$

и условное позиционное управление

$$\mathbf{v}^k(t, y) = \begin{cases} o, & (t, y) \in \pi_{0k}, \\ \mathbf{v}_k(t, y), & (t, y) \in \pi_k, \\ \mathbf{v}^{k-1}(t, y), & (t, y) \in \pi^k \setminus (\pi_{0k} \cup \pi_k). \end{cases}$$

Процесс заканчивается, если  $\pi_k = \emptyset$ . Дополнительным условием окончания может служить ограничение допустимого количества переключений, например, натуральным числом  $N$ .

В этом случае, если  $k < N$  и  $\pi_k \neq \emptyset$ , то продолжаем построение образующих с шага 1<sup>k</sup>, полагая  $k := k + 1$ , иначе процесс заканчивается.

Синтезированное позиционное управление позволяет находить оптимальные процессы для любых начальных условий. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Для заданной позиции  $(t, y) \in \Pi$  определяем оптимальное число переключений

$$\mathbf{k}(t, y) = \min \text{Arg} \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t - 0, y). \quad (1.62)$$

Минимум ищется по всем условным функциям цены  $\varphi^k$ , которые определены в заданной позиции  $(t, y) \in \pi^k$ .

2. Находим оптимальное управление

$$\mathbf{v}(t, y) = \mathbf{v}^{k(t, y)}(t, y)$$

и минимальное значение функционала  $I_t$  оставшихся потерь (1.14)

$$\min_{d \in \mathcal{D}^1(t, y)} I_t(d) = \varphi^{k(t, y)}(t - 0, y). \quad (1.63)$$

Формулы (1.62) и (1.63), соответственно, изменятся, если количество переключений ограничено числом  $N$

$$\mathbf{k}(t, y) = \min \text{Arg} \min_{k=0, 1, \dots, N} \varphi^k(t - 0, y), \quad \min_{d \in \mathcal{D}_N^1(t, y)} I_t(d) = \varphi^{k(t, y)}(t - 0, y).$$

Таким образом, можно найти оптимальное управление для любой позиции. Однако для получения оптимального программного управления необязательно выполнять минимизацию (1.62) в каждой текущей позиции  $(t, y(t))$ . Достаточно определить оптимальное количество переключений  $N = \mathbf{k}(t_0, y_0)$  для начальной позиции  $(t_0, y_0)$ , а затем использовать условные управления для получения оптимального процесса

$$\begin{aligned} y_i &= g(\tau_i, y_{i-1}, v_i), \\ v_i &= \mathbf{v}^{N-i+1}(\tau_i, y_{i-1}), \\ (\tau_i, y_{i-1}) &\in \partial \pi_{N-i+1}, \end{aligned}$$

где  $i = 1, \dots, N$ ,  $y_i = y(\tau_i)$ ,  $v_i = v(\tau_i)$ , а  $\tau_1, \dots, \tau_N$  – возрастающая последовательность моментов переключений  $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_N \leq t_1$ . Момент  $\tau_i$   $i$ -го переключения определяется достижением левой границы  $\partial \pi_{N-i+1}$  области  $\pi_{N-i+1}$ . Например, для начального состояния  $y_0$  первое переключение происходит в момент  $\tau_1$ , когда прямая  $y = y_0$  пересекает левую границу  $\partial \pi_N$  области  $\pi_N$ . В этот момент система переключается в состояние  $y_1 = g(\tau_1, y_0, v_1)$  под действием управления  $v_1 = \mathbf{v}^N(\tau_1, y_0)$ . Момент  $\tau_2$  второго переключения определяется пересечением прямой  $y = y_1$  с левой границей  $\partial \pi_{N-1}$  области  $\pi_{N-1}$ . Система переходит в состояние  $y_2 = g(\tau_2, y_1, v_2)$  под действием управления  $v_2 = \mathbf{v}^{N-1}(\tau_2, y_1)$  и т.д. Последнее переключение происходит в момент  $\tau_N$  пересечения прямой  $y = y_{N-1}$  с левой границей  $\partial \pi_1$  области  $\pi_1$ .

## Численная реализация алгоритма (анализ погрешностей)

Алгоритмы построения функции цены как нижней огибающей последовательности вспомогательных функций (образующих) были разработаны ранее для логико-динамических систем [17] и для дискретных САТ [76], описываемых рекуррентным включением. В этих алгоритмах образующие строятся путем решения рекуррентного уравнения в тактовые моменты времени и интегрирования дифференциального – между ними. Целочисленная минимизация выполняется после интегрирования, когда построены все образующие. Такой алгоритм является приближенным. Он имеет методическую ошибку, поскольку сужает множество допустимых процессов, допуская переключения только в заранее заданных тактовых моментах времени. Поэтому синтезированное управление будет субоптимальным. В отличие от алгоритма [76], предлагаемый в диссертации алгоритм не имеет методической ошибки. Если все описанные в нем математические операции выполнить без погрешностей, то получим точное решение – оптимальное позиционное управление. Конечно, без вычислительных погрешностей обойтись нельзя. Кроме погрешностей округлений и вычислений, алгоритм включает две операции, которые, как правило, выполняются приближенно. Это операции интегрирования и минимизации функций. Реализация этих операций при помощи соответствующих численных методов [54,77,78] приводит, разумеется, к появлению методических погрешностей. Однако, эти численные методы хорошо изучены. Поэтому возникающие при их применении погрешности можно оценить и снизить до приемлемого уровня. Важно, что новый алгоритм точный (не имеет методической ошибки).

Обсудим применяемые операции интегрирования и минимизации. Решение уравнения (1.59) с терминальным условием (1.60) находится интегрированием

$$\varphi_{0k}(t, y) = \varphi_{0k}(\tau(y), y) + \int_t^{\tau(y)} f(s, y) ds$$

от текущего момента времени  $t$  до конечного момента  $\tau(y)$ , в который  $(\tau(y), y) \in \partial \pi_k$ , т.е. до левой границы области  $\pi_k$ . Эту операцию легко выполнить любым методом численного интегрирования [54,77].

Конечномерную минимизацию нужно выполнять при решении рекуррентного уравнения (1.57)

$$v_k(t, y) = \arg \min_{v \in V^k(t, y)} [\varphi^{k-1}(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)].$$

Сложность минимизации зависит от свойств минимизируемой функции и от множества, на котором этот минимум ищется. Общие характеристики здесь трудно дать, поскольку в моделях систем управления используются очень разные по сложности уравнения движения и ограничения на управление. Отметим только, что в задачах управления количество координат вектора  $v$  – невелико. Это облегчает решение. Нередко, анализируя задачу минимизации, удается существенно сузить множество допустимых значений управления, отбросив неподходящие точки, которые заведомо не могут быть точками минимума. Тогда численное решение становится проще.

При нахождении оптимального процесса с использованием позиционного управления нужно решать задачу целочисленной минимизации (1.62). Поскольку задача одномерная, то ее решение можно найти простым перебором. Учитывая, что последовательность значений  $\varphi^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  не возрастающая, нужно искать значение  $k$ , при котором значения перестают убывать (когда будет приближенное равенство двух последовательных значений  $\varphi^k = \varphi^{k+1}$ ). Так это и делалось при решении примеров. Нетрудно предложить и другие способы, использующие известные идеи методов одномерной минимизации.

При численной реализации алгоритма синтеза оптимального управления САТ пространство позиций  $\Pi = T \times Y$  ограничивается и заменяется сеткой с узлами  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N$  с шагом  $\Delta\tau$  по времени и "шагом"  $\Delta y = (\Delta y_1, \dots, \Delta y_m)$  по состоянию. Если по каждой координате вектора состояния выбрано  $M$  узлов, то сетка в пространстве позиций будет содержать  $(N+1)M^m$  узлов. Уравнение движения (1.1) и управление (1.2) аппроксимируются так, чтобы допустимые траектории проходили "по сетке".

Ограничив количество скачков величиной  $K$ , в результате работы программы, реализующий алгоритм, получим образующие  $\varphi^k(\tau, y)$  и условные позиционные управления  $v^k(\tau, y)$  для  $k = 0, 1, \dots, K$ . Количество значений этих образующих  $\varphi^k$  на сетке равно

$$(K+1)(N+1)M^m,$$

а количество значений управлений  $v^k$  в  $m$  раз больше. Заметим, что функция  $\varphi^k$  (функция  $v^k$ ) определяется через предыдущую функции  $\varphi^{k-1}$  (соответственно,  $v^{k-1}$ ) и совпадает с ней в части области определения (1.62). Поэтому возможно существенное уменьшение количества вычислений и объема требуемой памяти. Оценить эту экономию, более-менее, точно, нельзя, поскольку разбиение пространства позиций на области определения образующих, как правило, сложное, и для разных задач очень разное.

## 1.4. ПРИМЕРЫ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ПРИ ОДНОКРАТНЫХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯХ

Рассматриваются два модельных примера синтеза оптимального позиционного управления дискретными САТ. Для аналитического решения этих примеров применяется алгоритм, описанный в разд.1.3. Заметим, что в первом (очень простом) примере оптимальные процессы имеют не более одного переключения. Поэтому его решение можно найти (для сравнения) и без применения рассматриваемых условий оптимальности. Во втором примере без условий оптимальности уже не обойтись. Применение алгоритма для численного решения задачи синтеза приводится в разд.1.5.

**Пример 1.1** Даны модель САТ и функционал

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t-0) + v(t), \\ v(t) &\in [-y(t-0), +\infty), \\ I &= \int_0^1 y(t)dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-\tau)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.64)$$

где  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y \geq 0$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot))$  – множество точек разрыва кусочно-постоянной функции  $y(\cdot)$ . Требуется найти оптимальное управление с обратной связью, а также оптимальные процессы с начальными условиями: а)  $y(-0) = 0.25$ ; б)  $y(-0) = 0.75$ ; в)  $y(-0) = 1.25$ .

По сравнению с общей постановкой задачи (1.1),(1.2),(1.5), имеем:  $T = [0,1]$ ,  $Y = [0,+\infty)$ ,  $V(t, y) = [-y, +\infty)$ ,  $g(t, y, v) = y + v$ ,  $g^0(t, y, v) = g^0(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2$ ,  $f(t, y) = y$ ,  $F(y) = 0$ . Нейтральное значение управления совпадает с нулевым, т.е.  $o = 0$ . Смысл задачи: найти неотрицательную кусочно-постоянную функцию, минимизирующую функционал  $I$ . Чтобы минимизировать интегральную часть функционала, нужно уменьшить значение  $y(t)$ . Поэтому скачок лучше делать в нулевое состояние. Отметим, что затраты  $g^0(t, y, v) = g^0(t)$  не зависят от  $y$  и  $v$ . Делать такое переключение в начальный момент времени может быть не выгодно, так как при  $t = 0$  затраты максимальные (см. график функции  $g^0(t)$  на рис.1.3,а). Возможно, лучше подождать некоторое время, а затем сделать переключение. Таким образом, оптимальная траектория имеет не более одного переключения (см. рис.1.3,б), которое происходит в некоторый момент времени  $\tau$ ,  $0 \leq \tau < 1$ .

Будем синтезировать оптимальное позиционное управление, применяя предлагаемый алгоритм. Учитывая, что оптимальные траектории имеют не более одного переключения, синтез должен закончиться построением образующих  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_{01}$ , из которых составляются

условные функции цены  $\varphi^0 = \varphi_0$ ,  $\varphi^1$ . Поскольку решается задача со свободным правым концом траектории, то  $\pi^0 = \pi^1 = \Pi = T \times Y = [0,1] \times [0,+\infty)$ .

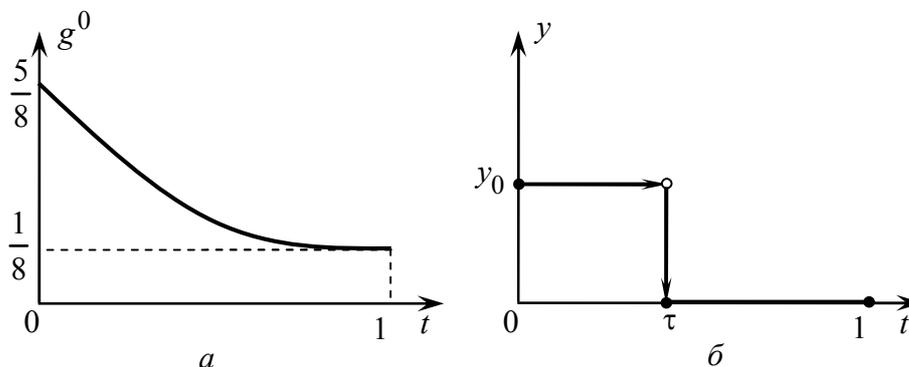


Рис.1.3

Шаг 0. На области  $\pi^0$  интегрируем дифференциальное уравнение (1.54) с терминальным условием (1.55)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_0(t, y) + y = 0, \quad \varphi_0(1, y) = 0.$$

Получаем  $\varphi_0(t, y) = (1-t)y$ . Следовательно,  $\varphi^0(t, y) = \varphi_0(t, y) = (1-t)y$  и  $v^0(t, y) = 0$ .

Шаг 1<sup>1</sup>. На области  $\pi^1$  находим образующую  $\varphi_1(t, y)$  по формуле (1.56) при  $k = 1$

$$\varphi_1(t, y) = \min_{v \in [-y, +\infty)} \left[ (1-t)(y+v) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2$$

и позиционное управление (1.57)

$$v_1(t, y) = -y.$$

Решая систему неравенств (1.58)

$$\begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 < (1-t)y, \\ y - y + (1-t) \leq y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{8(1-t)} + \frac{1-t}{2}, \\ y \geq 1-t, \end{cases}$$

определяем область  $\pi_1$ . На рис.1.4,а изображены гипербола и прямая, ограничивающие область  $\pi_1$ , отмеченную на рисунке полужирной цифрой **1**.

Шаг 2<sup>1</sup>. Так как  $\pi_1 \neq \emptyset$  и левая граница  $\partial\pi_1$  области  $\pi_1$  – отрезок  $y = 1-t$ ,  $0 \leq t \leq 0.5$ , не совпадает с осью ординат – левой границей пространства позиций  $\Pi$ , то, интегрируя уравнение (1.59) с терминальным условием (1.60)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{01}(t, y) + y = 0, \quad \varphi_{01}(t-0, y) = \varphi_1(t, y) \text{ при } y = 1-t, \quad 0 \leq t \leq 0.5,$$

получаем  $\varphi_{01}(t, y) = (1-t)y + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}y^2$ . Область  $\pi_{01}$  позиций, предшествующих  $\partial\pi_1$ , представляет собой треугольник, отмеченный на рис.1.4,б цифрами **01**.

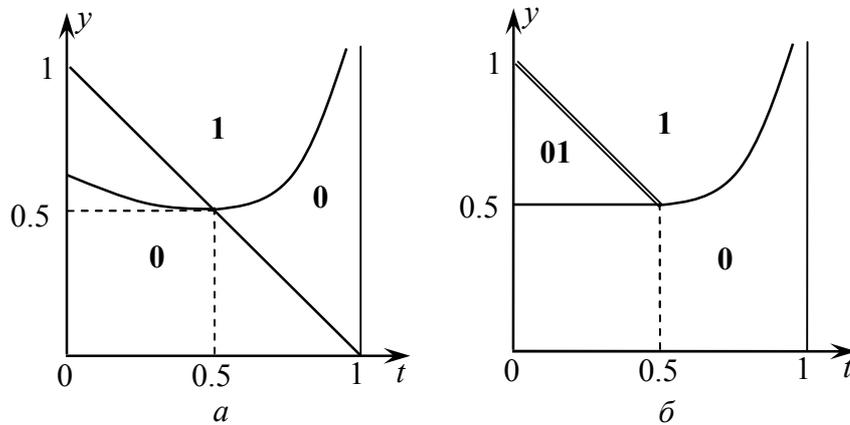


Рис.1.4

Шаг 3<sup>1</sup>. Составляем условную функцию цены (1.61)

$$\varphi^1(t, y) = \begin{cases} (1-t)y + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}y^2, & (t, y) \in \pi_{01}, \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2, & (t, y) \in \pi_1, \\ (1-t)y, & (t, y) \in \pi^1 \setminus (\pi_{01} \cup \pi_1) \end{cases} \quad (1.65)$$

и условную функцию управления

$$\mathbf{v}^1(t, y) = \begin{cases} 0, & (t, y) \in \pi_{01}, \\ \mathbf{v}_1(t, y), & (t, y) \in \pi_1, \\ \mathbf{v}^0(t, y), & (t, y) \in \pi^1 \setminus (\pi_{01} \cup \pi_1) \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{v}^1(t, y) = \begin{cases} 0, & (t, y) \notin \pi_1, \\ -y, & (t, y) \in \pi_1. \end{cases} \quad (1.66)$$

Полагая  $k = 2$ , продолжаем с шага 1.

Шаг 1<sup>2</sup>. На области  $\pi^2$  находим образующую  $\varphi_2(t, y)$  по формуле (1.56) при  $k = 2$

$$\varphi_2(t, y) = \min_{v \in V^2(t, y)} \left[ \varphi^1(t, y + v) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \right].$$

Здесь  $V^2(t, y) = \{v \geq -y \mid y + v \in \pi_{01} \cup \pi_1\}$  – множество допустимых значений управления, при которых система совершает первое переключение, попадая в позицию из  $\pi_{01} \cup \pi_1$  с последующим вторым переключением. Графики функции  $\varphi^1(t, y)$  при фиксированных  $t$  изображены на рис.1.5 (при  $t = 0.25$  на рис.1.5,а; при  $t = 0.75$  на рис.1.5,б). Полу жирными цифрами **0**, **01**, **1** обозначены промежутки, входящие в области  $\pi_0, \pi_{01}, \pi_1$ , соответственно. На об-

ласти  $\pi_{01}$  функция  $\varphi^1 = \varphi_{01}$  достигает наименьшего значения по аргументу  $y$  при  $y = \frac{1}{2}$ . На области  $\pi_1$  функция  $\varphi^1 = \varphi_1$  не зависит от  $y$ :  $\varphi_1(t, y) = g^0(t)$ . Поэтому образующая имеет вид

$$\varphi_2(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-t) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} + (1-t)^2, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases}$$

а позиционное управление (1.57)

$$v_2(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} - y, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \neq 0, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

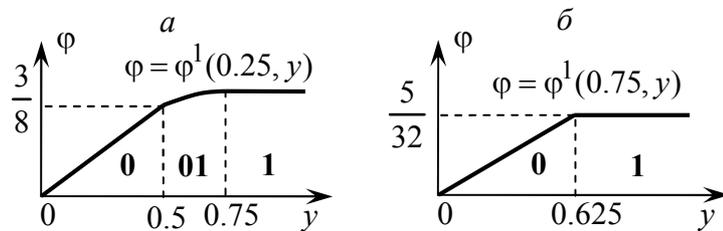


Рис.1.5

При  $t \geq \frac{1}{2}$  управление может быть любым, отличным от нулевого. Запишем первое неравенство в (1.58):  $\varphi_2 \leq \varphi^1$ . Покажем, что это неравенство не имеет решений, т.е.  $\pi_2 = \emptyset$ . Действительно, на области  $\pi_{01} = \left\{ \frac{1}{2} \leq y < 1-t, 0 \leq t < \frac{1}{2} \right\}$  оно равносильно неравенству  $\varphi_2 \leq \varphi_{01}$ :

$$\frac{1}{2}(1-t) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \leq (1-t)y + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}y^2.$$

Переносим все слагаемые в левую часть и выделяя полный квадрат, получаем неравенство

$$\frac{1}{2}(1-t) + \frac{1}{2}(1-t-y)^2 \leq 0,$$

которое не имеет решений, поскольку  $t < \frac{1}{2}$ . Значит, неравенство  $\varphi_2 \leq \varphi_{01}$  неверно. На об-

ласти  $\pi_1$  неравенство  $\varphi_2 \leq \varphi^1$  равносильно неравенству  $\varphi_2 \leq \varphi_1$ . При  $0 \leq t < \frac{1}{2}$  имеем

$$\varphi_2 \leq \varphi_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-t) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-t) \leq 0,$$

что, разумеется, неверно при  $t < 1$ . При  $\frac{1}{2} \leq t < 1$  имеем

$$\varphi_2 \leq \varphi_1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + (1-t)^2 \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \leq 0,$$

что невозможно. Поэтому неравенство  $\varphi_2 \leq \varphi_1$  не имеет решений. Наконец, на области

$\pi^0 \setminus (\pi_{01} \cup \pi_1)$  неравенство  $\varphi_2 \leq \varphi^1$  равносильно неравенству  $\varphi_2 \leq \varphi_0$ . При  $0 \leq t < \frac{1}{2}$  и

$0 \leq y \leq \frac{1}{2}$  имеем

$$\varphi_2 \leq \varphi_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-t) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \leq (1-t)y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - y\right)(1-t) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \leq 0,$$

что неверно, поскольку все слагаемые в левой части положительные. При  $\frac{1}{2} \leq t < 1$  и

$0 \leq y \leq \frac{1}{8(1-t)} + \frac{1-t}{2}$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2 \leq \varphi_0 &\Leftrightarrow \frac{1}{4} + (1-t)^2 \leq (1-t)y \Rightarrow \frac{1}{4} + (1-t)^2 \leq (1-t)\left[\frac{1}{8(1-t)} + \frac{1-t}{2}\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} + (1-t)^2 \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

что неверно. Таким образом, неравенство  $\varphi_2 \leq \varphi^1$  не имеет решений, следовательно, область  $\pi_2$  пуста. Синтез завершен. Найдены условная функция цены (1.65) и условное позиционное управление (1.66).

Найдем теперь оптимальные траектории для заданных начальных условий.

В случае а) начальная позиция  $(0, y(-0)) = (0, 0.25)$  системы принадлежит области  $\pi_0^1 = \pi^1 \setminus (\pi_{01} \cup \pi_1)$ . Значит, оптимальная траектория (пунктирная прямая  $a$  на рис.1.6) не имеет переключений  $y(t) = 0.25$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , а минимальное значение функционала (1.64) находим по условной функции цены (1.65):  $\min I = \varphi^1(0, 0.25) = 0.25$ .

В случае б) начальная позиция  $(0, y(-0)) = (0, 0.75)$  системы принадлежит области  $\pi_{01}$ . Следовательно, оптимальная траектория (штриховые стрелки  $\bar{b}$  на рис.1.6) сначала

постоянна  $y(t) = 0.25$ ,  $0 \leq t < 0.25$ , затем, на линии переключения  $y = 1 - t$  в момент  $t = 0.25$ , траектория совершает скачок в нулевое состояние, которое сохраняет  $y(t) = 0$ ,  $0.25 \leq t \leq 1$ .

Оптимальное управление (1.65) только в момент переключения отлично от нулевого

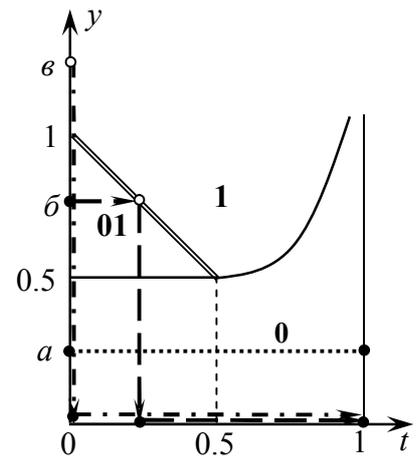


Рис.1.6

$v(0.25) = -0.75$ . Минимальное значение функционала (1.64) определяем по функции (1.65):

$$\min I = \varphi^1(0, 0.75) = 0.59375.$$

В случае в) начальная позиция  $(0, y(-0)) = (0, 1.25)$  системы принадлежит области  $\pi_1$ . Следовательно, оптимальная траектория (штрихпунктирные стрелки  $v$  на рис.1.6) в начальный момент времени совершает скачок в нулевое состояние, которое сохраняет до конечного момента времени  $y(t) = 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Оптимальное управление (1.65) только в начальный момент времени отлично от нулевого  $v(0) = -1.25$ . Минимальное значение функционала (1.64) определяем по функции (1.65):  $\min I = \varphi^1(0, 1.25) = 0.625$ .

**Пример 1.2** Даны модель САТ и функционал

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t-0) + v(t), \\ v(t) &\in [-y(t-0), 1 - y(t-0)], \\ I &= \int_0^1 |y(t) - t| dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \lambda, \end{aligned} \quad (1.67)$$

где  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(t) \in [0, 1]$ ,  $v(t) \in [-1, 1]$ ,  $\lambda = \frac{1}{16}$ ;  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot))$  – множество точек разрыва кусочно-постоянной функции  $y(\cdot)$ . Требуется найти оптимальное позиционное управление САТ и оптимальные траектории с начальными условиями: а)  $y(-0) = 0$ ; б)  $y(-0) = 0.8$ .

По сравнению с общей постановкой задачи, имеем:  $T = [0, 1]$ ;  $Y = [0, 1]$ ;  $V = [-1, 1]$ ;  $V(t, y) = [-y, 1 - y]$ ;  $f(t, y) = |y - t|$ ;  $g^0(t, y, v) = \lambda$ ;  $F(y) = 0$ . Нейтральное значение управления совпадает с нулевым, т.е.  $o = 0$ . Смысловое содержание задачи: найти оптимальную кусочно-постоянную аппроксимацию  $y = y(t)$  линейной функции  $y = t$ . Оптимальность понимается как минимизация интеграла от модуля отклонения при одновременном уменьшении количества разрывов аппроксимирующей функции. Количество точек разрывов пропорционально (с коэффициентом  $\lambda$ ) входящей в функционал (1.67) сумме по  $\tau$ . Если не учитывать разрывы функции  $y(\cdot)$ , положив  $\lambda = 0$ , то решением задачи будет минимизирующая последовательность, например,  $y_j(t) = [2^j t] 2^{-j}$ , где  $[\alpha]$  – целая часть числа  $\alpha$ . Значение функционала  $I(y_j(\cdot)) = 2^{-j}$  – стремится к нулю при  $j \rightarrow +\infty$ . Если же штраф  $\lambda > 0$ , то оптимальная траектория имеет конечное число точек разрыва. Функцию цены при произвольном допустимом числе переключений будем искать согласно методике, описанной в разделе 1.3.

Шаг 0. На области  $\pi^0 = \Pi = T \times Y = [0,1] \times [0,1]$  интегрируем дифференциальное уравнение (1.54) с терминальным условием (1.55)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_0(t, y) + |y - t| = 0, \quad \varphi_0(1, y) = 0.$$

Получаем

$$\varphi^0(t, y) = \varphi_0(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-y)^2 + \frac{1}{2}(y-t)^2, & t \leq y, \\ \frac{1}{2}(1-y)^2 - \frac{1}{2}(y-t)^2, & t > y, \end{cases} \quad v^0(t, y) = 0.$$

Шаг 1<sup>1</sup>. На области  $\pi^1 = \Pi$  находим образующую  $\varphi_1(t, y)$  по формуле (1.56) при  $k = 1$

$$\varphi_1(t, y) = \min_{v \in [-y, 1-y]} [\varphi^0(t, y+v) + \lambda] = \frac{1}{4}(1-t)^2 + \lambda$$

и позиционное управление (1.57)

$$v_1(t, y) = \arg \min_{[-y, 1-y]} [\varphi^0(t, y+v) + \lambda] = \frac{1}{2}(1+t) - y.$$

Решая систему неравенств (1.58)

$$\begin{cases} \lambda + \frac{1}{4}(1-t)^2 \leq \frac{1}{2}(1-y)^2 + \frac{1}{2}(y-t)^2, & t \leq y, \\ \lambda + \frac{1}{4}(1-t)^2 \leq \frac{1}{2}(1-y)^2 - \frac{1}{2}(y-t)^2, & t > y, \\ \left| y + \frac{1}{2}(1+t) - y - t \right| \leq |y - t|, \end{cases}$$

получаем две области, обозначенные на рис.1.7 цифрой **1**: треугольник, ограниченный прямой (1)  $y = \frac{1+t}{2}$ , и криволинейный треугольник, ограниченный гиперболой (2)

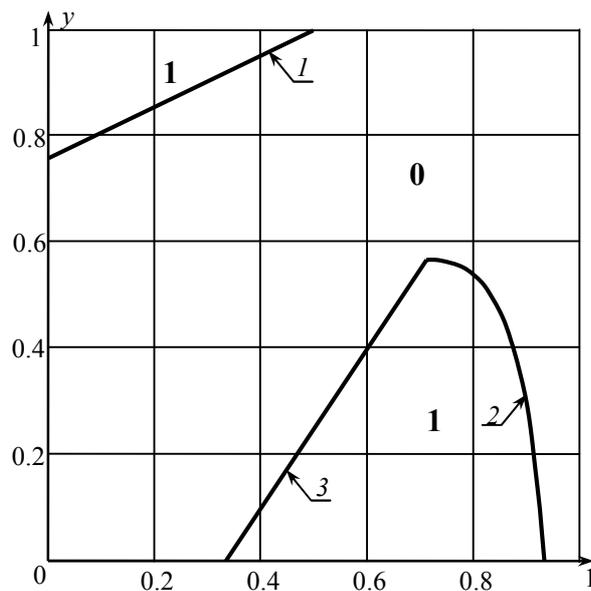


Рис.1.7

$y = \frac{1+3t}{4} - \frac{\lambda}{2(1-t)}$  и прямой (3)  $y = \frac{3t-1}{2}$ . Заметим, что каждая из областей включает свои левые границы, но не включает правые, поскольку функция цены непрерывна справа по  $t$ .

Шаг 2<sup>1</sup>. Поскольку  $\pi_1 \neq \emptyset$  и левая граница  $\partial\pi_1$  (отрезок 3) одной из областей  $\pi_1$  не принадлежит левой границе  $\partial\pi^0 = \partial\Pi = \{(0,y) | y \in [0,1]\}$ , находим образующую  $\varphi_{01}$ , интегрируя уравнение (1.59) с терминальным условием (1.60)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{01}(t,y) + 2|y-t| = 0, \quad \varphi_{01}(t-0,y) = \varphi_1(t,y) \text{ при } y = \frac{3t-1}{2}, \frac{1}{3} \leq t \leq 1 - \sqrt{\frac{2\lambda}{3}}.$$

Получаем

$$\varphi_{01}(t,y) = \begin{cases} \lambda + \frac{1}{6}(1-y)^2 + \frac{1}{2}(y-t)^2, & t \leq y, \\ \lambda + \frac{1}{6}(1-y)^2 - \frac{1}{2}(y-t)^2, & t > y. \end{cases}$$

Область  $\pi_{01}$  определения этой функции на рис.1.8 обозначена цифрами **01**. Прямая 4 задается уравнением  $y = \sqrt{\frac{3}{2}\lambda}$ .

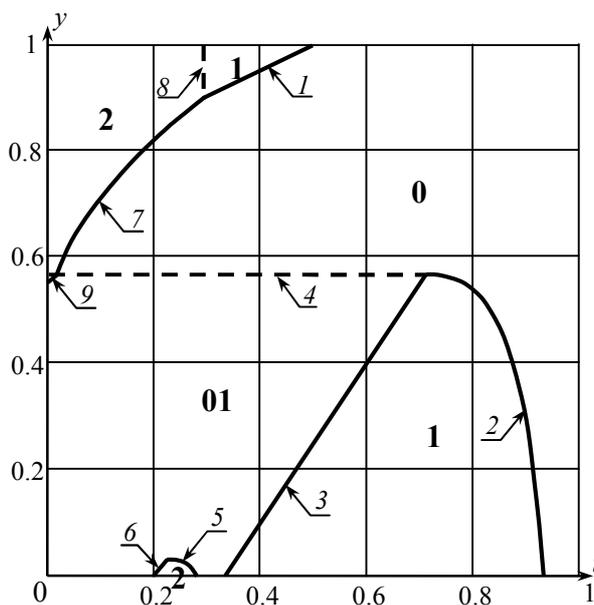


Рис.1.8

Шаг 3<sup>1</sup>. Составляем условную функцию цены (1.61)

$$\varphi^1(t,y) = \begin{cases} \varphi_{01}(t,y), & (t,y) \in \pi_{01}, \\ \varphi_1(t,y), & (t,y) \in \pi_1, \\ \varphi^0(t,y), & (t,y) \in \Pi \setminus (\pi_{01} \cup \pi_1) \end{cases}$$

и условную функцию управления

$$v^1(t, y) = \begin{cases} 0, & (t, y) \in \Pi \setminus \pi_1, \\ v_1(t, y), & (t, y) \in \pi_1. \end{cases}$$

Полагая  $k = 2$ , продолжаем с шага 1.

Шаг 1<sup>2</sup>. На области  $\pi^2 = \Pi$  находим образующую  $\varphi_2(t, y)$  по формуле (1.56) при  $k = 2$

$$\varphi_2(t, y) = \min_{v \in [-y, 1-y]} [\varphi^1(t, y+v) + \lambda] = 2\lambda + \frac{1}{8}(1-t)^2$$

и позиционное управление (1.57)

$$v_2(t, y) = \arg \min_{[-y, 1-y]} [\varphi^1(t, y+v) + \lambda] = \frac{3t+1}{4} - y.$$

Множество  $\pi_2$  находим, решая систему (1.58)

$$\begin{cases} \varphi_2(t, y) < \varphi_{01}(t, y), & (t, y) \in \pi_{01}, \\ \varphi_2(t, y) < \varphi_1(t, y), & (t, y) \in \pi_1, \\ \varphi_2(t, y) < \varphi^0(t, y), & (t, y) \in \Pi \setminus (\pi_{01} \cup \pi_1), \\ \left| y + \frac{1+3t}{4} - y - t \right| \leq |y - t|. \end{cases}$$

Получаем две области, обозначенные на рис.1.8 цифрой **2**: криволинейный треугольник, ог-

раниченный гиперболой (5)  $y = \frac{3t-1}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}(1-t)^2 - \frac{3}{2}\lambda}$  и прямой (6)  $y = \frac{5t-1}{4}$ , а также

криволинейный пятиугольник, ограниченный эллипсом (7)  $y = \frac{1+t}{2} - \sqrt{\lambda - \frac{1}{8}(1-t)^2}$ , прямой

(8)  $t = 1 - 2\sqrt{\lambda}$  и прямой (9)  $y = \frac{3t+1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda}$ .

Шаг 2<sup>2</sup>. Поскольку левая граница области  $\pi_2$  не совпадает с левой границей области  $\pi_0$  находим образующую  $\varphi_{02}$ , интегрируя уравнение (1.59) с терминальным условием (1.60)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{02}(t, y) + |y(t) - t| = 0, \quad \varphi_{02}(t-0, y) = \varphi_2(t, y) \text{ при } y = \frac{5t-1}{4}, \frac{1}{5} \leq t \leq 1 - \sqrt{\frac{24\lambda}{5}}.$$

Получаем

$$\varphi_{02}(t, y) = \begin{cases} 2\lambda + \frac{1}{10}(1-y)^2 + \frac{1}{2}(y-t)^2, & t \leq y, \\ 2\lambda + \frac{1}{10}(1-y)^2 - \frac{1}{2}(y-t)^2, & t > y. \end{cases}$$

Область  $\pi_{02}$  определения этой функции на рис.1.9 обозначена цифрой **02**. Прямая 10 зада-

ется уравнением  $y = 1 - \sqrt{\frac{15}{2}\lambda}$ .

Шаг 3<sup>2</sup>. Составляем условную функцию цены (1.61)

$$\varphi^2(t, y) = \begin{cases} \varphi_{02}(t, y), & (t, y) \in \pi_{02}, \\ \varphi_2(t, y), & (t, y) \in \pi_2, \\ \varphi^1(t, y), & (t, y) \in \Pi \setminus (\pi_{02} \cup \pi_2), \end{cases}$$

и условную функцию управления

$$\mathbf{v}^2(t, y) = \begin{cases} 0, & (t, y) \in \pi_{02}, \\ \mathbf{v}_2(t, y), & (t, y) \in \pi_2, \\ \mathbf{v}^1(t, y), & (t, y) \in \Pi \setminus (\pi_{02} \cup \pi_2). \end{cases}$$

Полагая  $k = 3$ , продолжаем с шага 1.

Шаг 1<sup>3</sup>. На области  $\pi^3 = \Pi$  находим образующую  $\varphi_3(t, y)$  по формуле (1.56) при  $k = 3$

$$\varphi_3(t, y) = \min_{v \in [-y, 1-y]} [\varphi^2(t, y + v) + \lambda] = 3\lambda + \frac{1}{12}(1-t)^2$$

и позиционное управление (1.57)

$$\mathbf{v}_3(t, y) = \arg \min_{[-y, 1-y]} [\varphi^2(t, y + v) + \lambda] = \frac{5t+1}{6} - y.$$

Множество  $\pi_3$  находим, решая систему (1.58)

$$\begin{cases} \varphi_3(t, y) < \varphi^2(t, y), \\ \left| y + \frac{1+5t}{6} - y - t \right| \leq |y - t|. \end{cases}$$

Неравенство  $\varphi_3(t, y) \leq \varphi_2(t, y)$  имеет решение  $t \leq 1 - \sqrt{24\lambda}$ , т.е.  $t < 0$  для заданного значения  $\lambda = \frac{1}{16}$ . Таким образом, множество  $\pi_3$  пусто. Следовательно, процесс построения функции цены завершен.

На рис.1.9 обозначены области **0**, **1**, **01**, **2**, **02**, в каждой из которых функция цены  $\varphi(t-0, y)$  совпадает с соответствующей образующей  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{01}, \varphi_2, \varphi_{02}$ . Оптимальное позиционное управление задается равенствами:  $\mathbf{v}(t, y) = 0$  в областях **0**, **01**, **02**;  $\mathbf{v}(t, y) = \mathbf{v}_1(t, y) = \frac{t+1}{2} - y$  в области **1**;  $\mathbf{v}_2(t, y) = \frac{3t+1}{4} - y$  в области **2**. Задача синтеза решена.

Найдем оптимальные траектории для заданных начальных условий. В случае а) начальное состояние  $y(-0) = 0$  принадлежит области **02** (рис.1.9). Поэтому оптимальная траектория будет иметь два переключения. Первое переключение происходит в момент времени  $t = 0.2$  на границе  $b$  области **2**. Система переходит из состояния  $y(0.2-0) = 0$  в состояние  $y(0.2) = 0 + \mathbf{v}_2(0.2, 0) = \frac{3 \cdot 0.2 + 1}{4} = 0.4$ , которое сохраняется до момента времени  $t = 0.6$  попадания на границу  $3$  области **1**. В этот момент система совершает переключение из состоя-

ния  $y(0.6-0) = 0.4$  в состояние  $y(0.6) = 0.4 + v_1(0.6, 0.4) = \frac{0.6+1}{2} = 0.8$ . Далее траектория проходит по области **0**, в которой переключений нет. Оптимальная траектория изображена рис.1.9 пунктирными стрелками (а). Минимальное значение функционала находим по функции цены

$$\min I = \varphi(-0, 0) = \varphi_{02}(0, 0) = 0.45.$$

Аналогично строится оптимальная траектория в случае б) для начального условия  $y(-0) = 0.8$ . Так как начальное состояние лежит в области **2**, то оптимальная траектория имеет два переключения, причем первое – в начальный момент времени  $t = 0$  из начального состояния  $y(-0) = 0.8$  в состояние  $y(0) = 0.8 + v_2(0, 0.8) = \frac{3 \cdot 0 + 1}{4} = 0.25$ . Это состояние система сохраняет до момента времени  $t = 0.5$ , когда попадает на границу  $3$  области **1**. В этот момент система совершает переключение из состояния  $y(0.5-0) = 0.25$  в состояние  $y(0.5) = 0.25 + v_1(0.5, 0.25) = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$ . Далее траектория проходит по области **0**, в которой переключений нет.

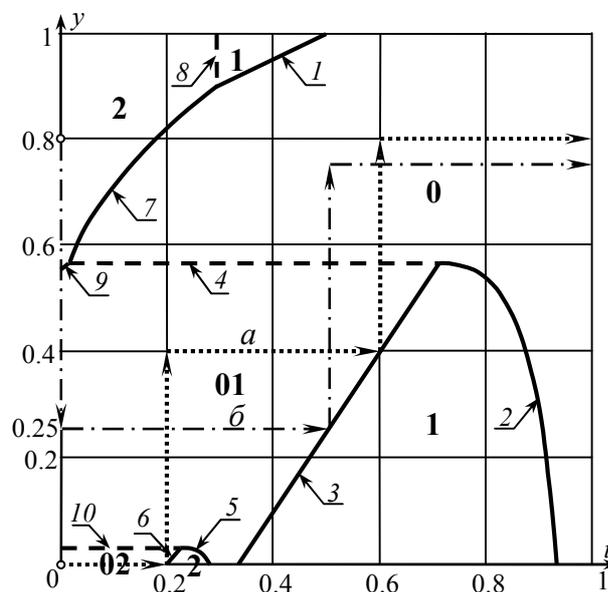


Рис.1.9

Оптимальная траектория изображена на рис.1.9 штрихпунктирными стрелками (б). Минимальное значение функционала находим по функции цены

$$\min I = \varphi(-0, 0.8) = \varphi_2(0, 0.8) = 0.5.$$

## 1.5. СИНТЕЗ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТНОГО ТИПА

Рассматривается задача синтеза САТ, которая отслеживает произвольную заданную непрерывную траекторию. Напомним, что траектории САТ являются кусочно-постоянными функциями. Разумеется, график кусочно-постоянной функции не может в общем случае совпадать с непрерывной кривой. Поэтому ставится задача поиска кусочно-постоянной траектории, которая наилучшим образом приближает произвольную заданную непрерывную кривую. Другими словами, речь идет о кусочно-постоянной аппроксимации заданной функции. Однако, в отличие от классической задачи аппроксимации, в которой минимизируется отклонение кусочно-постоянной функции от заданной аппроксимируемой функции, здесь учитывается также и количество скачков аппроксимирующей функции. Каждое переключение состояния следящей САТ требует определенных затрат, которые суммируются в функционале качества.

### Постановка задачи

Пусть поведение САТ описывается соотношениями

$$y(t) = y(t-0) + v(t), \quad (1.68)$$

$$v(t) \in V, \quad (1.69)$$

где  $y$  – вектор состояния системы,  $y \in Y = \mathbb{R}^m$ ;  $v$  – вектор управления,  $v \in V = \mathbb{R}^m$ ;  $t$  – время,  $t \in T = [t_0, t_1]$  – промежуток времени функционирования системы,  $t_0, t_1$  – заданные моменты начала и окончания процесса управления. Качество управления оценивается функционалом

$$I = \int_{t_0}^{t_1} |x(t) - y(t)|^l dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \lambda. \quad (1.70)$$

Здесь  $x(t)$  – заданная непрерывная функция,  $x: T \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $l$  – фиксированный натуральный показатель степени;  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot))$  – множество точек разрыва кусочно-постоянной функции  $y(\cdot)$ ;  $\lambda$  – положительный коэффициент затрат на переключение состояния. Требуется найти:

- а) оптимальное позиционное управление САТ;
- б) оптимальный процесс, минимизирующий функционал (1.70) при наилучшем выборе начального состояния  $y_0$ .

По сравнению с общей постановкой задачи, имеем:  $f(t, y) = |x(t) - y|$ ,  $g(t, y, v) = y + v$ ,  $g^0(t, y, v) = \lambda$ ,  $F(y) = 0$ . Нейтральное значение управления – нулевое ( $\mathbf{o}$  – нулевой элемент

пространства  $\mathbb{R}^m$ ). Управление (1.69) обеспечивает в любой момент времени  $t \in T$  возможность переключения системы в любое состояние в  $\mathbb{R}^m$ . Поэтому пространство позиций САТ

представляет собой прямое произведение  $\Pi = T \times \mathbb{R}^m$ . На рис.1.10. изображен одномерный случай ( $m = 1$ ): полоса  $\Pi = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}$ , график заданной функции  $x(\cdot)$  (сплошная линия) и график кусочно-постоянной функции  $y(\cdot)$  (пунктирная ломаная). Оптимальность процесса управления понимается как минимизация отклонения искомой кусочно-постоянной траектории  $y(\cdot)$  от заданной непрерывной кривой  $x(\cdot)$  при одновременном уменьшении количества разрывов искомой траектории. Отклонение оце-

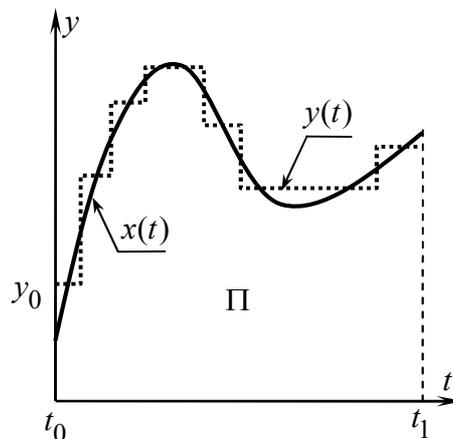


Рис.1.10

нивается интегральным членом функционала (1.70), вид которого определяется метрикой в пространстве  $L_l[t_0, t_1]$  функций, суммируемых со степенью  $l$

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_l = \left( \int_{t_0}^{t_1} |x(t) - y(t)|^l dt \right)^{\frac{1}{l}}.$$

Заметим, что в постановке задачи предполагается, что заданная функция  $x(\cdot)$  непрерывная. Безусловно, это предположение можно ослабить, допустив кусочную непрерывность или только суммируемость  $x(\cdot) \in L_l[t_0, t_1]$ .

Кроме интегрального члена в функционал (1.70) входит сумма по  $\tau$ , которая пропорциональна (с коэффициентом  $\lambda$ ) количеству точек разрыва искомой функции  $y(\cdot)$ . Если в функционале (1.70) оставить только интегральный член, положив  $\lambda = 0$ , то решением будет служить минимизирующая последовательность, например,  $y_j(t) = [2^j x(t)] 2^{-j}$ , где  $[\alpha]$  – целая часть числа  $\alpha$ . Значение функционала  $I(y_j(\cdot)) = 2^{-j}$  стремится к нулю при  $j \rightarrow +\infty$ . Если же штраф  $\lambda > 0$ , то оптимальная траектория имеет конечное число точек разрыва.

Поставленная задача синтеза оптимального позиционного управления (п."а") обобщает пример 1.2 и совпадает с ним в частном случае, когда  $x(t) = t$  и  $\lambda = 0.0625$ . Поиск наилучшего начального состояния  $y_0$  (п."б") является дополнительной задачей минимизации, которая решается после задачи синтеза. Заметим, что п."б" поставленной задачи можно сформулировать следующим образом: найти наилучшую в смысле функционала (1.70) кусочно-постоянную аппроксимацию  $y(\cdot)$  заданной непрерывной функции  $x(\cdot)$ . Эта задача отличает-

ся от классической задачи аппроксимации функции учетом количества точек разрыва у аппроксимирующей функции.

### Алгоритм решения

Для решения задачи применяется алгоритм синтеза оптимальной САТ (см. разд.1.3). Учитывая, что заданная функция  $x(\cdot)$  непрерывна на замкнутом промежутке  $T$ , то она ограничена. Поэтому множество  $Y$  допустимых состояний САТ можно ограничить. Например, взять прямоугольный параллелепипед в  $\mathbb{R}^m$ , содержащий график аппроксимируемой функции  $x(\cdot)$ . Так как затраты на переключение положительны ( $\lambda > 0$ ), то любая оптимальная траектория не может иметь неограниченное количество переключений. В этом случае поиск условных функций цены  $\varphi^k$  заканчивается на некотором шаге  $N$ . Можно оценить значение  $N$  следующим образом. Для постоянной траектории  $y(t) \equiv y_0$  функционал (1.70) равен

$$I^0 = \int_{t_0}^{t_1} |x(t) - y_0|^l dt.$$

Для оптимальной траектории значение функционала (1.70) не больше, чем  $I^0$ , т.е.

$$\int_{t_0}^{t_1} |x(t) - y(t)|^l dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \lambda \leq I^0.$$

Следовательно, количество  $N$  точек разрыва оптимальной траектории удовлетворяет неравенству  $\lambda N \leq I^0$ . Значит,  $N \leq \left[ \frac{I^0}{\lambda} \right] + 1$ . (Здесь  $[a]$  – целая часть числа  $a$ .)

Таким образом, применяя алгоритм, описанный в разд.1.3, за конечное число шагов (не более  $N$ ), получим решение задачи (1.68)–(1.70) синтеза следящей САТ (см. п."а" постановки задачи). Синтезированное оптимальное позиционное управление позволяет получить оптимальные траектории для любых начальных состояний  $y_0 = y(t_0 - 0)$ . Поэтому для нахождения оптимальной траектории (п."б") достаточно найти наилучшее начальное состояние, минимизируя функцию цены

$$y_0 = \arg \min_{y \in Y} \varphi(t_0 - 0, y), \quad (1.71)$$

а затем для этого состояния построить обычным образом (см. алгоритм в разд.1.3) оптимальную траекторию.

**Пример 1.3.** Пусть поведение САТ описывается соотношениями

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t-0) + v(t), \\ v(t) &\in [-y(t-0), 1 - y(t-0)], \end{aligned} \quad (1.72)$$

где  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(t) \in [0, 1]$ ,  $v(t) \in [-1, 1]$ , а функционал качества управления имеет вид

$$I = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^l dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \lambda. \quad (1.73)$$

Здесь  $x(t)$  – заданная непрерывная функция,  $x: [0,1] \rightarrow [0,1]$ ;  $l$  – фиксированный натуральный показатель степени;  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot))$  – множество точек разрыва кусочно-постоянной функции  $y(\cdot)$ ;  $\lambda$  – положительный коэффициент затрат на переключение состояния. Требуется найти:

а) оптимальное позиционное управление САТ;

б) оптимальный процесс, минимизирующий функционал (1.73) при наилучшем выборе начального состояния  $y_0$ .

По сравнению с общей постановкой задачи, имеем:  $T = [0, 1]$ ;  $Y = [0, 1]$ ;  $V = [-1, 1]$ ;  $V(t, y) = [-y, 1 - y]$ ;  $f(t, y) = |x(t) - y|$ ;  $g^0(t, y, v) = \lambda$ ;  $F(y) = 0$ . Нейтральное значение управления – нулевое ( $\sigma = 0$ ). Управление (1.72) обеспечивает в любой момент времени  $t \in [0, 1]$  возможность переключения системы в любое состояние на промежутке  $[0, 1]$ . Поэтому пространство позиций САТ представляет собой квадрат  $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Для численного решения поставленной задачи была разработана программа, реализующая алгоритм синтеза оптимального управления САТ с дополнительной операцией (1.71) поиска наилучшего начального состояния. Тестирование работы программы проводилось многократно на разных примерах, отличающихся заданными аппроксимируемыми функциями  $x(\cdot)$ , коэффициентами затрат  $\lambda$  и показателем  $l$ . Пространство позиций  $\Pi = \{(t, y) | 0 \leq t \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  разбивалось с шагом  $\Delta t$  по времени и  $\Delta y$  – по состоянию. Как показали расчеты, при  $\Delta t = \Delta y = 0.005$ , т.е. на сетке с  $4 \cdot 10^4$  узлами, результаты оказались вполне приемлемыми (не только в представленных ниже примерах). Интегрирование уравнения (1.54) проводилось методом Рунге–Кутты второго порядка [54,77], минимизация (1.56), (1.71) – перебором всех состояний  $y$  в узлах сетки.

Приведем результаты численного решения поставленной задачи в следующих случаях:

а) для  $x(t) = t$ ,  $\lambda = 0,0625$ ;

б) для  $x(t) = t$ ,  $\lambda = 0,0095$ ;

в) для  $x(t) = 1 - |2t - 1|$ ,  $\lambda = 0,01$ ;

г) для  $x(t) = \sin \pi t$ ,  $\lambda = 0,01$ .

Вычисления проводились при  $l=1$  или  $l=2$ , что соответствует разным метрикам: в пространствах  $L_1[0,1]$  или  $L_2[0,1]$ .

Оптимальную траекторию в первых трех примерах "а"–"в" нетрудно найти аналитически, решая ряд задач конечномерной минимизации и учитывая геометрические соображения (симметрию и т.п.). Такой же подход можно использовать и в примере "г", но это будет гораздо труднее. Аналитическое решение задачи синтеза оптимального управления может быть получено только в самом простом случае "а", хотя и тогда решение довольно трудное (см. решение примера 1.2). Другие примеры синтеза оптимальных САУ аналитически не решаются.

Сначала приведем результаты при  $l=1$ , когда минимизируемый функционал имеет вид

$$I = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \lambda. \quad (1.74)$$

На рис.1.11 показано решение примера для случая "а", где пунктирной линией изображена прямая  $x(t) = t$  (аппроксимируемая функция), а штрихпунктирной – оптимальная траектория (аппроксимирующая функция). Пространство позиций разбито на области: **0**, **1**, **01**, **2**, **02**, в каждой из которых функция цены  $\varphi(t-0, y)$  совпадает с соответствующей образующей  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{01}, \varphi_2, \varphi_{02}$ . Внутри областей **0**, **01**, **02** состояние  $y(t)$  не меняется, а оптимальное управление – нулевое. В областях **1**, **2** (включая их левые границы) состояние оптимальной системы изменяется. Это приближенное решение практически совпадает с точным, найденным в примере 1.2. Наилучшее начальное состояние  $y_0 = 0.245$  находится в результате минимизации функции  $\varphi(-0, y)$  по переменной  $y$ . Оптимальная траектория  $(0; 0.245) \rightarrow (0.5; 0.75)$  имеет один скачок. Наименьшее значение функционала (1.74) вычисляется по функции цены  $I_{\min} = \varphi(-0; 0.245) = \varphi_{01}(0; 0.245) = 0.1875$ .

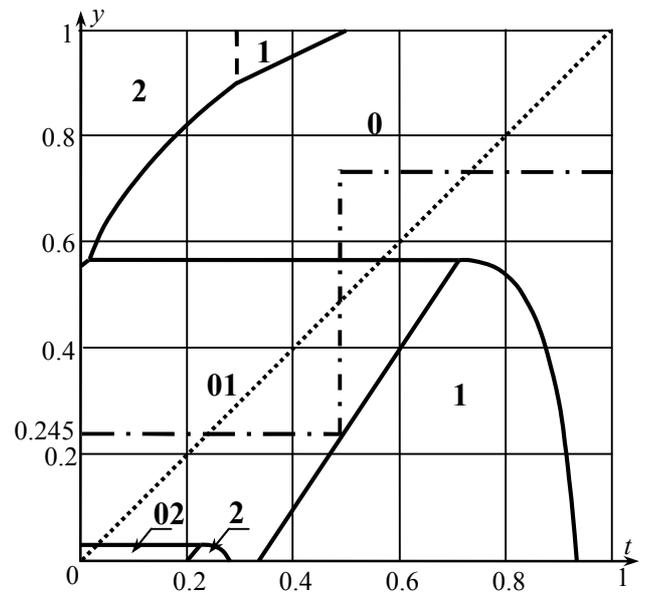
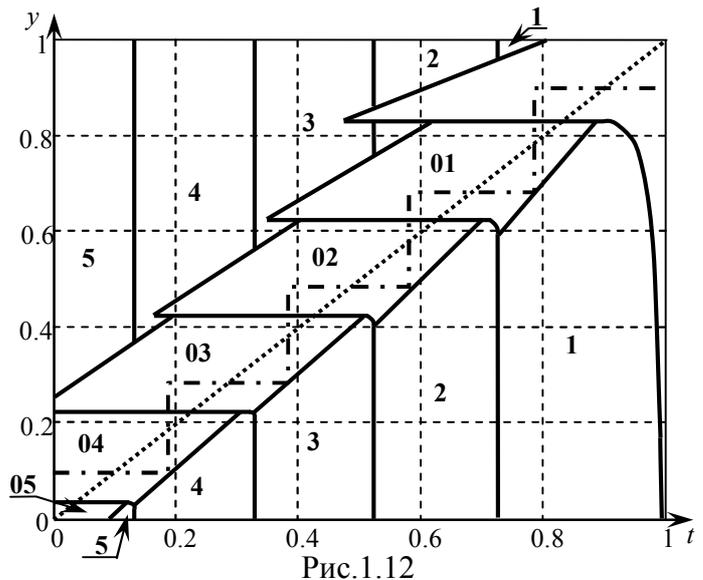


Рис.1.11

В областях **1**, **2** (включая их левые границы) состояние оптимальной системы изменяется. Это приближенное решение практически совпадает с точным, найденным в примере 1.2. Наилучшее начальное состояние  $y_0 = 0.245$  находится в результате минимизации функции  $\varphi(-0, y)$  по переменной  $y$ . Оптимальная траектория  $(0; 0.245) \rightarrow (0.5; 0.75)$  имеет один скачок. Наименьшее значение функционала (1.74) вычисляется по функции цены  $I_{\min} = \varphi(-0; 0.245) = \varphi_{01}(0; 0.245) = 0.1875$ . Точное решение дает такое же значение функционала (т.е. погрешность меньше  $10^{-4}$ ), а наилучшее начальное состояние  $y_0 = 0.25$ . Отклонение составляет один шаг сетки.

Случай "б" отличается от "а" меньшим значением коэффициента затрат  $\lambda$  на переключение состояния. Поэтому у оптимальных траекторий будет больше точек разрыва, чем в случае "а". На рис.1.12 показано решение примера для случая "б", где пунктирной линией изображена прямая  $x(t) = t$  (аппроксимируемая функция), а штрихпунктирной – оптимальная траектория (аппроксимирующая функция).

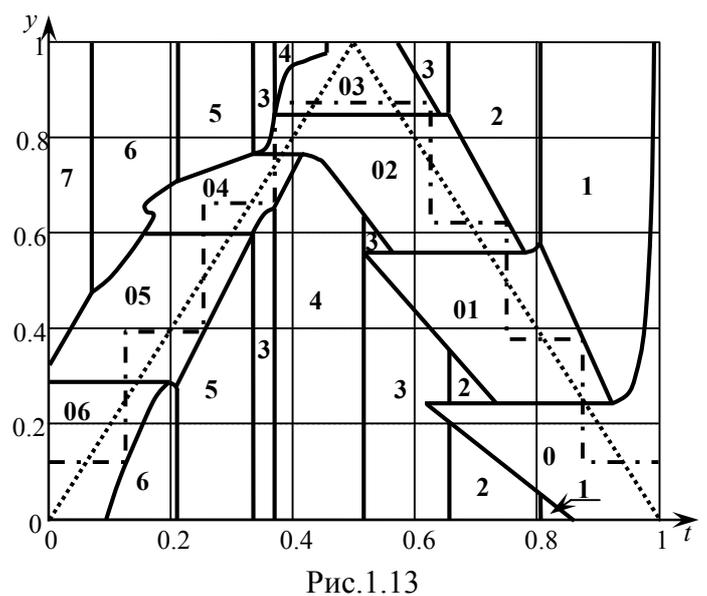


Пространство позиций разбито на области: **0, 1, 01, 2, 02, ..., 5, 05**, в каждой из которых функция цены  $\varphi(t - 0, y)$  совпадает с соответствующей образующей  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{01}, \varphi_2, \varphi_{02}, \dots, \varphi_5, \varphi_{05}$ . Внутри областей **0, 01, 02, ..., 05** состояние  $y(t)$  не меняется, а оптимальное управление – нулевое. В областях **1, 2, ..., 5** (включая их левые границы) состояние оптимальной системы изменяется. Наилучшее начальное состояние  $y_0 = 0,09$  находится в результате минимизации функции  $\varphi(-0, y)$  по переменной  $y$ . Оптимальная траектория  $(0; 0,09) \rightarrow (0,19; 0,28) \rightarrow (0,385; 0,48) \rightarrow (0,585; 0,68) \rightarrow (0,79; 0,895)$  имеет четыре скачка. Наименьшее значение функционала (1.74) вычисляется по функции цены

$$I_{\min} = \varphi(-0; 0,09) = \varphi_{04}(0; 0,09) = 0,088\ 075.$$

Точное аналитическое решение дает значение  $I_{\min} = 0,088$ . Следовательно, относительная погрешность менее 0,1 %.

Для случая "в" решение показано на рис.1.13, где пунктирной линией изображена ломаная  $x(t) = 1 - |2t - 1|$  (аппроксимируемая функция), а штрихпунктирной – оптимальная траектория (аппроксимирующая функция). Наилучшее начальное условие  $y_0 = 0,12$ . Оптимальная



траектория  $(0; 0.12) \rightarrow (0.13; 0.39) \rightarrow (0.26; 0.66) \rightarrow (0.375; 0.87) \rightarrow (0.63; 0.62) \rightarrow (0.755; 0.375) \rightarrow (0.88; 0.12)$  имеет 6 скачков. Наименьшее значение функционала

$$I_{\min} = \varphi(-0; 0,12) = \varphi_{06}(0; 0,12) = 0.1233.$$

Точное аналитическое решение дает значение  $I_{\min} = 0,1225$ . Следовательно, относительная погрешность – менее 0,7 %.

Заметим, что подынтегральная функция  $f(t, y) = |x(t) - y|$  в каждом из примеров "а"–"в" либо линейная, либо кусочно-линейная при фиксированном  $y$ . Поэтому интегрирование методом Рунге–Кутты (второго порядка) дает точный результат. Другими словами, методической погрешности при интегрировании нет. Погрешность операции минимизации по аргументу  $y$  не превосходит шага  $\Delta y = 0.005$  сетки, а погрешности вычислений и округлений незначительны.

Решение примера "г" показано на рис.1.14, где пунктирной линией изображена синусоида  $x(t) = \sin \pi t$  (аппроксимируемая функция), а штрихпунктирной – оптимальная траектория (аппроксимирующая функция). Наилучшее начальное условие  $y_0 = 0.14$ . Оптимальная траектория  $(0; 0.14) \rightarrow (0.095; 0.425) \rightarrow (0.195; 0.705) \rightarrow (0.315; 0.96) \rightarrow (0.68; 0.74) \rightarrow (0.795; 0.475) \rightarrow (0.9; 0.155)$  имеет 6 скачков. Наименьшее значение функционала

$$I_{\min} = \varphi(-0; 0,14) = \varphi_{06}(0; 0,14) = 0.1192.$$

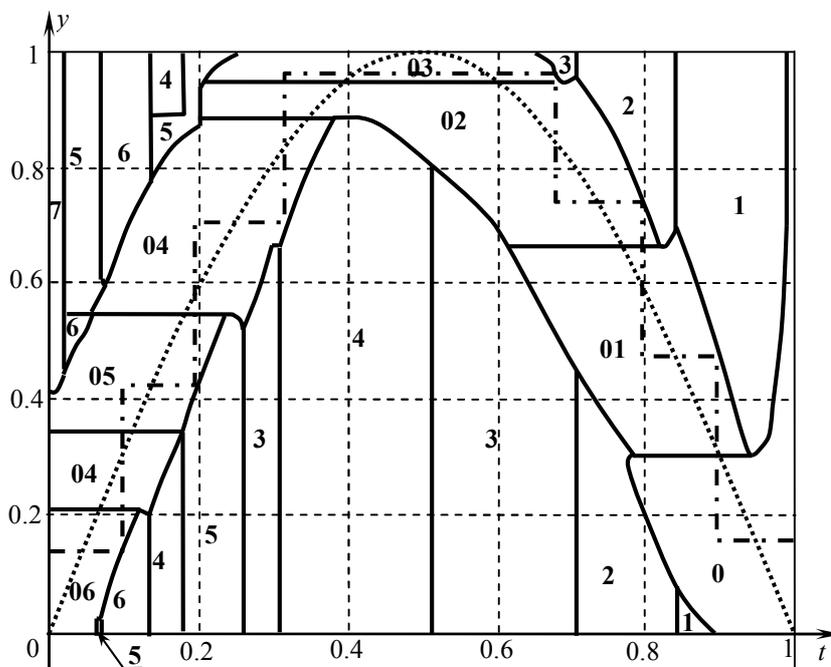


Рис.1.14

В примерах "в" и "г" оптимальная траектория при четном числе скачков должна быть симметричной относительно прямой  $t = 0.5$ , так как аппроксимируемая функция имеет эту

ось симметрии. Однако у численно полученных траекторий такой симметрии нет. В частности, рассогласование  $\delta y = |y(0) - y(1)|$ , которое в случае симметрии равно нулю, в примере "Г" составляет  $\delta y_{\Gamma} = |0.14 - 0.155| = 0.015$ . Эта ошибка была исследована. Оказалось, что рассогласование пропорционально шагу сетки, а именно: при уменьшении шагов  $\Delta t$  и  $\Delta y$  в 10 раз рассогласование  $\delta y$  тоже уменьшается в 10 раз. Поэтому к симметрии можно приближаться, уменьшая шаг сетки. Другими словами, причина асимметрии в неточности численного метода, а не вследствие ошибочности алгоритма.

Теперь приведем результаты, когда отклонение оценивалось в метрике пространства  $L_2[0,1]$ , т.е. при  $l = 2$ , а минимизируемый функционал (1.70) имел вид

$$I = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \lambda. \quad (1.75)$$

Оказалось, что такое отклонение меньше, чем в метрике пространства  $L_1[0,1]$ . Значит, затраты  $\lambda$  за скачок траектории стали больше относительно интегрального члена функционала (1.75). Поэтому при  $l = 2$  состав образующих функции цены сократился, а оптимальные траектории стали иметь меньше скачков, чем при  $l = 1$ .

На рис.1.15 показано решение примера для случая "а", где пунктирной линией изображена прямая  $x(t) = t$  (аппроксимируемая функция), а штрихпунктирной – оптимальная траектория (аппроксимирующая функция). Пространство позиций разбито на области: **0**, **1**, **01**. По сравнению с решением задачи для функционала (1.74) (см. рис.1.11), областей стало

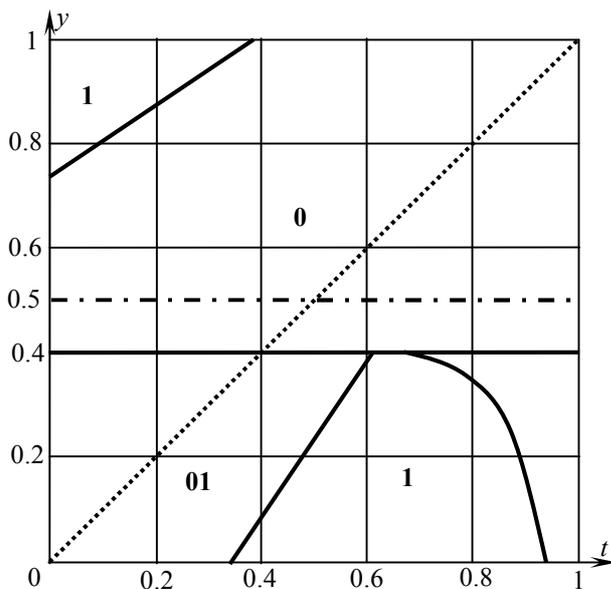


Рис.1.15

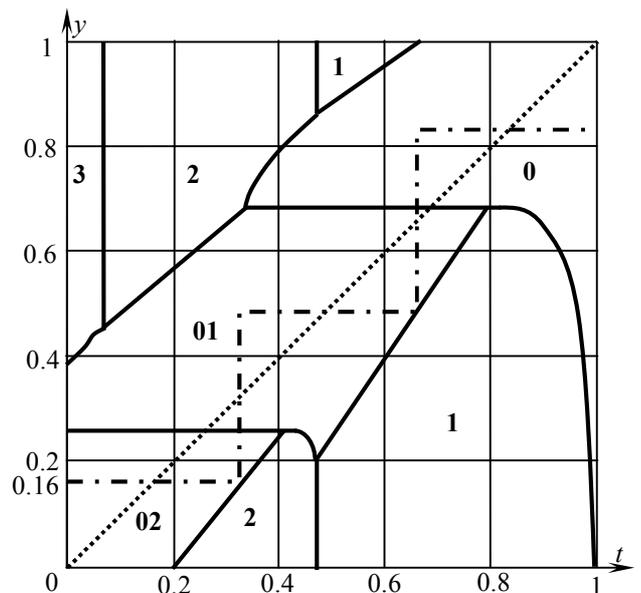


Рис.1.16

меньше. Наилучшее начальное состояние  $y_0 = 0.5$  находится в результате минимизации

функции  $\varphi(-0, y)$  по переменной  $y$ . Оптимальная траектория  $y(t) = 0.5, 0 \leq t \leq 1$ , не имеет скачков. Наименьшее значение функционала (1.75) вычисляется по функции цены

$$I_{\min} = \varphi(-0, 0.5) = \varphi_0(0, 0.5) = 0.083337.$$

Точное решение дает примерно такое же значение функционала  $I_{\min} = \frac{1}{12} \approx 0.083333$ .

По сравнению с решением задачи для функционала (1.74), т.е. при  $l = 1$ , количество образующих функции цены сократилось с пяти до трех (см. рис.1.11), а точек разрыва у оптимальной траектории вообще нет. Минимальное значение функционала (1.75) меньше, чем функционала (1.74).

На рис.1.16 показано решение примера для случая "б" (можно сравнить с рис.1.12). Пространство позиций разбито на области: **0, 1, 01, 2, 02, 3**. Оптимальная траектория  $(0; 0.16) \rightarrow (0.325; 0.485) \rightarrow (0.66; 0.83)$  имеет два скачка. Наименьшее значение функционала

$$I_{\min} = \varphi(-0; 0.16) = \varphi_{02}(0; 0.16) = 0.028277.$$

Решение примера в случае "в" показано на рис.1.17. Аппроксимируемая функция  $x(t) = 1 - |2t - 1|$  изображена пунктирной линией. Пространство позиций разбито на области: **0, 1, 01, 2, 02, 3, 03**. Оптимальная траектория  $(0; 0.245) \rightarrow (0.21; 0.72) \rightarrow (0.765; 0.235)$  имеет два скачка. Наименьшее значение функционала

$$I_{\min} = \varphi(-0; 0.245) = \varphi_{02}(0; 0.245) = 0.042441.$$

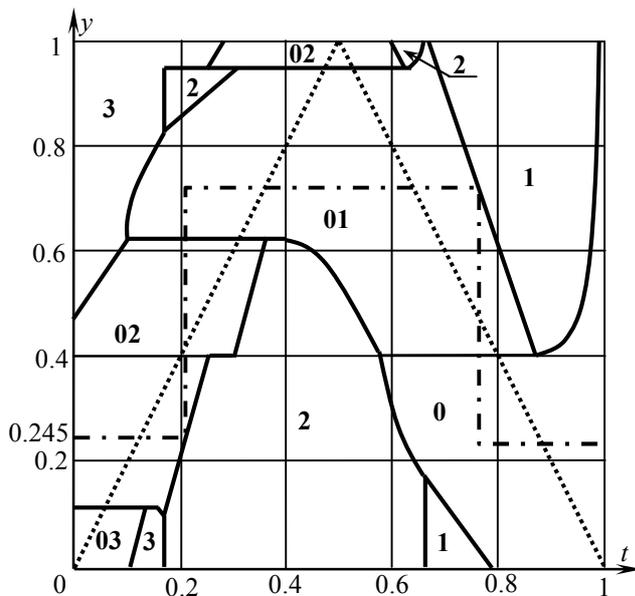


Рис.1.17

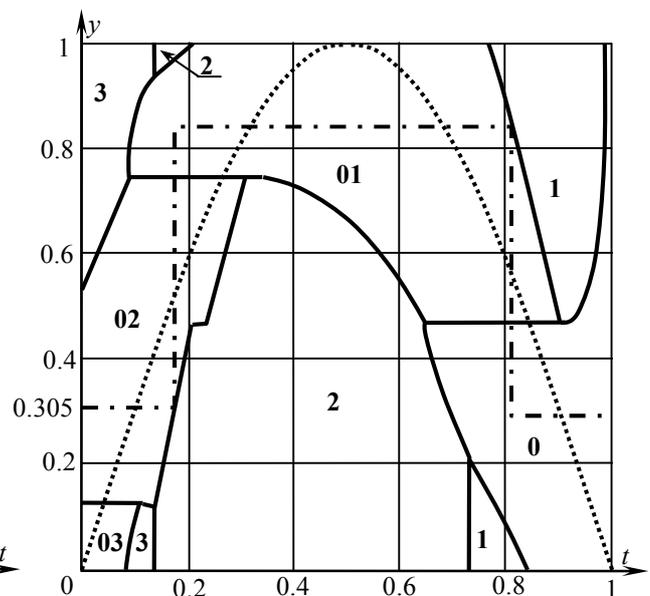


Рис.1.18

Решение примера "г" показано на рис.1.18, где пунктирной линией изображена синусоида  $x(t) = \sin \pi t$  (аппроксимируемая функция). Оптимальная траектория  $(0; 0.305) \rightarrow (0.175; 0.84) \rightarrow (0.81; 0.29)$  имеет два скачка. Наименьшее значение функционала

$$I_{\min} = \varphi(-0; 0.305) = \varphi_{02}(0; 0.305) = 0.041973.$$

## 1.6. СВЯЗЬ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ С НЕОБХОДИМЫМИ

Приводятся необходимые условия оптимальности динамических систем с автоматной частью для процессов с однократными переключениями. Исключая в этих условиях динамическую часть, выводятся необходимые условия оптимальности САТ. Одним из полученных условий является уравнение, которому удовлетворяют моменты переключения оптимальных траекторий. Показано, что это уравнение следует из уравнения для поверхности переключения, т.е. из достаточных условий оптимальности. Необходимые условия оптимальности динамических систем с автоматной частью используются для решения задачи оптимального вывода спутника на геостационарную орбиту (глава 3).

### Задача оптимального управления динамической системой с автоматной частью

Пусть поведение динамической системы с автоматной частью (частный случай ЛДС) описывается соотношениями

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t)), \quad (1.76)$$

$$y(t) \in Y(t, x(t), y(t-0)), \quad (1.77)$$

где  $x, y$  – векторы состояния динамической и автоматной частей системы,  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ ;  $t$  – время,  $t \in T = [t_0; t_1]$  – промежуток времени функционирования системы,  $t_0, t_1$  – моменты начала и окончания процесса управления заданы; функция  $f: T \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывна по совокупности аргументов вместе с частными производными первого порядка по  $x$  и по  $y$ . Множество  $Y(t, x, y)$  задает совокупность тех состояний автоматной части системы, в которые возможен переход из состояния  $y$  при заданном в момент времени  $t$  состоянии  $x$  динамической части. Предполагаем, что для любой абсолютно непрерывной функции  $x(\cdot)$  и каждого  $y \in Y$  отображение  $t \rightarrow Y(t, x(t), y)$  непрерывно справа, т.е.

$$Y(t+0, x(t+0), y) = Y(t, x(t), y)$$

при всех  $t \in T$ , и кусочно-постоянно, т.е. существует разбиение  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t_1$  промежутка  $T$  на конечное число непересекающихся полуинтервалов  $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , на каждом из которых многозначное отображение  $t \rightarrow Y(t, x(t), y)$  постоянно.

Начальное состояние системы задано начальными условиями

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0 - 0) = y_0. \quad (1.78)$$

Дифференциальное уравнение (1.76) описывает динамическую часть системы. Управление динамической частью осуществляется только выбором того или иного состояния автоматной части системы. Можно считать, что при этом определяется тот или иной тип траектории движения динамической части системы. Включение (1.77) описывает автоматную часть как САТ – в форме автомата с памятью [31].

Допустимыми процессами считаются пары функций  $(x(\cdot), y(\cdot))$ , где  $x(\cdot)$  – абсолютно непрерывная функция  $x: T \rightarrow X$ ,  $y(\cdot)$  – непрерывная справа кусочно-постоянная функция  $y: T \rightarrow Y$ , точки разрыва которой образуют конечное множество  $\mathcal{F}$  (*такты моментов времени*); причем пара функций  $(x(\cdot), y(\cdot))$  удовлетворяет начальным условиям (1.78), почти всюду на  $T$  – уравнению (1.76) и при всех  $t \in T$  – рекуррентному включению (1.77). Функции  $x(\cdot)$  и  $y(\cdot)$  определяют траектории движения динамической и автоматной частей соответственно. Множество допустимых процессов обозначим через  $\mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$ .

На множестве  $\mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$  допустимых процессов задан функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), y(t)) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} g^+(\tau, x(\tau), y(\tau - 0), y(\tau)) + F(x(t_1), y(t_1)), \quad (1.79)$$

где функции  $F: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^0: T \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывны по совокупности аргументов вместе со своими частными производными по  $x$  и  $y$ , а функция  $g^+: T \times X \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируема по всем аргументам. Суммирование в выражении (1.79) производится по всем точкам  $\tau \in \mathcal{F}$  разрыва функции  $y(\cdot)$  (множество  $\mathcal{F}$  конечное для каждого допустимого процесса).

Требуется найти минимальное значение функционала (1.79) и оптимальный процесс  $d^* = (x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ , на котором это значение достигается

$$I(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)} I(d).$$

В [16] приводятся также другие варианты постановки задачи.

## Необходимые условия оптимальности динамической системы с автоматной частью

Обозначим для системы (1.76), (1.77) с функционалом качества (1.79) гамильтониан (функцию Гамильтона)

$$H(t, \psi, x, y) = \sum_{j=1}^n \psi_j \cdot f_j(t, x, y) - f^0(t, x, y), \quad (1.80)$$

где  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$  – вектор вспомогательных переменных.

**Утверждение (необходимые условия оптимальности при однократных переключениях автоматной части).** Пусть  $(x(\cdot), y(\cdot))$  – оптимальный процесс, минимизирующий функционал (1.79), траектория  $y(\cdot)$  автоматной части которого имеет точки разрыва  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N: t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < t_1$ . Тогда существует такая непрерывная справа функция  $\psi(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^n$  – абсолютно непрерывная на  $T$ , за исключением, быть может, точек разрыва функции  $y(\cdot)$ , в которых  $\psi(\cdot)$  непрерывна справа и имеет предел слева, что:

1) в каждой точке  $\tau = \tau_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) разрыва функции  $y(\cdot)$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} &g_t^+(\tau, x(\tau), y(\tau-0), y(\tau)) + g_x^+(\tau, x(\tau), y(\tau-0), y(\tau)) \cdot f(\tau, x(\tau), y(\tau-0), u) + \\ &+ H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau)) - H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau-0)) = 0; \end{aligned} \quad (1.81)$$

2) функция  $\psi(\cdot)$  почти всюду на  $T$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, \psi(t), x(t), y(t)), \quad (1.82)$$

в конечный момент времени  $t_1$  – краевому условию

$$\psi(t_1) = -F_x(x(t_1), y(t_1)) \quad (1.83)$$

и в каждой точке  $\tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , – условию скачка

$$\psi(\tau_k - 0) = \psi(\tau_k) - g_x^+(\tau_k, x(\tau_k), y(\tau_k - 0), y(\tau_k)). \quad (1.84)$$

Если для оптимального процесса  $(x(\cdot), y(\cdot))$  допустимы малые кусочно-постоянные вариации  $\delta y(\cdot)$  функции  $y(\cdot)$ , то для любых допустимых вариаций  $\delta y(\cdot)$  выполняются неравенства

$$\left[ g_y^+(\tau_1, x(\tau_1), y, y(\tau_1)) \right]_{y=y(\tau_1-0)} - \int_{t_0}^{\tau_1} H_y(\psi(t), t, x(t), y(t)) dt \cdot \delta y(t_0) \geq 0; \quad (1.85)$$

$$\left[ g_z^+(\tau_{k-1}, x(\tau_{k-1}), y(\tau_{k-1} - 0), z) \right]_{z=y(\tau_{k-1})} + g_y^+(\tau_k, x(\tau_k), y, y(\tau_k)) \Big|_{y=y(\tau_k-0)} -$$

$$- \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} H_y(\psi(t), t, x(t), y(t)) dt \Big] \cdot \delta y(\tau_{k-1}) \geq 0, \quad k = 2, \dots, N; \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} & \left[ g_z^+(\tau_N, x(\tau_N), y(\tau_N - 0), z) \Big|_{z=y(\tau_N)} + F_y(x(t_1), y(t_1)) - \right. \\ & \left. - \int_{\tau_N}^{t_1} H_y(\psi(t), t, x(t), y(t)) dt \right] \cdot \delta y(\tau_N) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Уравнение (1.81) получается из условия равенства нулю вариации функционала при малых вариациях моментов переключения автоматной части. Вторая часть теоремы (неравенства (1.85)–(1.87)) применяется не всегда, так как малые вариации состояния  $y$  автоматной части могут быть недопустимыми. Например, у переключаемых систем, совершающих типовые движения, состояние САТ, задает тип (номер) траектории, т.е. является натуральным числом  $y \in \mathbb{N}$ . В этом случае, малых вариаций состояния  $y$  нет.

### Необходимые условия оптимальности САТ

Чтобы удалить динамическую часть ЛДС в задаче (1.76)–(1.79), полагаем, что  $f(t, x, y) = 0$  и исключаем аргумент  $x$  у всех функций. Получим задачу минимизации

$$y(t) \in Y(t, y(t-0)), \quad y(t_0 - 0) = y_0, \quad (1.88)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, y(t)) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} g^+(\tau, y(\tau-0), y(\tau)) + F(y(t_1)). \quad (1.89)$$

Гамильтониан (1.80) принимает вид  $H(t, \psi, x, y) = -f^0(t, y)$ , тогда, в силу уравнений (1.82)–(1.83), получаем  $\psi(t) \equiv 0$ . Учитывая это, перепишем формулировку теоремы 1.4.

**Следствие (необходимые условия оптимальности САТ при однократных переключениях).** Пусть  $y(\cdot)$  – оптимальная траектория САТ (1.88), минимизирующая функционал (1.89), которая имеет точки разрыва  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N: t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < t_1$ . Тогда в каждой точке  $\tau = \tau_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) разрыва функции  $y(\cdot)$  для любых вариаций  $\delta \tau_k$  выполняется равенство

$$g_t^+(\tau, y(\tau-0), y(\tau)) - f^0(\tau, y(\tau)) + f^0(\tau, y(\tau-0)) = 0. \quad (1.90)$$

Если для оптимальной траектории  $y(\cdot)$  допустимы малые кусочно-постоянные вариации  $\delta y(\cdot)$ , то для любых допустимых вариаций  $\delta y(\cdot)$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
& \left[ g_y^+(\tau_1, y, y(\tau_1)) \Big|_{y=y(\tau_1-0)} + \int_{t_0}^{\tau_1} f_y^0(t, y(t)) dt \right] \cdot \delta y(t_0) \geq 0, \\
& \left[ g_z^+(\tau_{k-1}, y(\tau_{k-1}-0), z) \Big|_{z=y(\tau_{k-1})} + g_y^+(\tau_k, y, y(\tau_k)) \Big|_{y=y(\tau_k-0)} + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f_y^0(t, y(t)) dt \right] \cdot \delta y(\tau_{k-1}) \geq 0, \quad k = 2, \dots, N; \tag{1.91}
\end{aligned}$$

$$\left[ g_z^+(\tau_N, y(\tau_N-0), z) \Big|_{z=y(\tau_N)} + F_y(y(t_1)) + \int_{\tau_N}^{t_1} f_y^0(t, y(t)) dt \right] \cdot \delta y(\tau_N) \geq 0.$$

### Поверхность переключения

Покажем связь достаточных условий с необходимыми. Уравнение (1.90), полученное при вариации моментов переключения, определяет поверхность переключения. Аналогичное соотношение было выведено из достаточных условий оптимальности и применяется в алгоритме синтеза в разд. 1.3. Действительно, нестрогое неравенство (1.54)

$$f(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y))) - g_t^0(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)) \leq f(t, y)$$

справедливо в области  $\pi_k$ , где САТ совершает переключение. Следовательно, граница этой области определяется равенством

$$f(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y))) - g_t^0(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)) = f(t, y).$$

Запишем это условие для оптимального процесса  $(y(\cdot), v(\cdot))$

$$f(t, y(t)) - g_t^0(t, y(t-0), v(t)) = f(t, y(t-0)), \tag{1.92}$$

так как  $v(t) = \mathbf{v}^k(t, y(t-0))$ ,  $y(t) = g(t, y(t-0), v(t))$ . Выразим  $g^0$  через  $g^+$

$$g^0(t, y(t-0), v(t)) = g^+(t, y(t-0), g(t, y(t-0), v(t))) = g^+(t, y(t-0), y(t)),$$

и подставим в (1.92)

$$f(t, y(t)) - g_t^+(t, y(t-0), y(t)) = f(t, y(t-0)).$$

Изменяя обозначения подынтегральной функции  $f = f^0$  и момента переключения  $t = \tau$ , приходим к уравнению

$$f(\tau, y(\tau)) - g_t^0(\tau, y(\tau-0), y(\tau)) = f(\tau, y(\tau-0)),$$

которое равносильно (1.90). Таким образом, уравнения для поверхности переключения, полученные из необходимых или достаточных условий, равносильны.

Сделаем несколько замечаний, касающихся полученных условий. Во-первых, необходимые условия оптимальности траектории САТ можно получить из условий оптимальности ДНС [71], если "удалить" непрерывную составляющую. Отметим, что в формулировке необходимых условий (в [71] или в теореме 1.5) используется предположение о количестве  $N$  точек разрыва. Эта величина фактически определяет количество параметров в задаче минимизации, т.е. число аргументов минимизируемой функции. Никаких дополнительных условий, позволяющих определить наилучшее значение  $N$ , теоремы не содержат. Поэтому для поиска оптимального числа точек разрыва нужно применять другие процедуры, например, перебор с последовательным увеличением параметра  $N = 0, 1, \dots$

Во-вторых, применение необходимых условий позволяет найти оптимальную траекторию САТ для одного начального условия. Эта задача является хорошо изученной задачей конечномерной минимизации, т.е. минимизации функции нескольких переменных. Теория и методы решения задач на условный экстремум функций нескольких переменных разработаны вполне досконально. Поэтому оптимальную траекторию можно найти, применяя известные методы минимизации. Это обстоятельство снижает интерес к необходимым условиям оптимальности САТ. Напротив, достаточные условия остаются актуальными. Действительно, они позволяют находить все оптимальные траектории, исходящие из любых стартовых позиций (не только в начальный момент времени). Такую задачу нельзя решить, находя при помощи необходимых условий оптимальные траектории для каждой позиции, поскольку перебор всех стартовых позиций выполнить невозможно.

В-третьих, необходимые условия оптимальности САТ (и ДНС) не сводят решение задачи к пошаговой процедуре. Нельзя, например, у оптимальной траектории найти сначала последнюю точку разрыва, затем предпоследнюю и т.д. Нужно записывать систему соотношений для всех точек разрыва и решать эту систему. Напротив, достаточные условия реализуются в пошаговом процессе последовательного построения образующих функции цены. Но количество  $N$  точек разрыва – это неединственный параметр, который монотонно меняется, "шагая" в одном направлении. Построение условной функции цены можно также организовать в пошаговой форме, монотонно меняя время  $t$  от конечного момента  $t_1$  к начальному  $t_0$ , как это обычно делается при численном решении уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана.

## 1.7. ВЫВОДЫ

1. Поставлены задачи оптимального программного и оптимального позиционного управления дискретной САТ, кусочно-постоянные траектории которых имеют произвольное ко-

нечное или заданное максимальное количество точек разрыва. Качество управления оценивается функционалом, учитывающим затраты на переключения системы.

2. Сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности процесса управления и оптимальности позиционного управления, т.е. управления с обратной связью. В формулировках применяются новые понятия – условная функция цены и условное позиционное управление. Эти функции играют вспомогательную роль и используются для построения функции цены и оптимального позиционного управления. На основе достаточных условий выведены уравнения для нахождения этих функций.

3. Разработан алгоритм синтеза оптимального позиционного управления, который заключается в построении последовательностей: условных функций цены и оптимальных условных позиционных управлений. Предлагаемый алгоритм является точным, т.е. не имеет методических ошибок. Указаны численные методы, необходимые для программной реализации алгоритма. Проведен анализ возникающих при этом погрешностей.

4. Эффективность применения разработанного алгоритма и программного обеспечения демонстрируется на двух примерах. Сравнительный анализ численного и аналитического решения показал, что относительная погрешность минимального значения функционала составляет менее 0,7 %.

5. Поставлена задача синтеза следящей САТ, выполняющей оптимальную кусочно-постоянную аппроксимацию заданной непрерывной траектории. Эта задача отличается от классической задачи аппроксимации тем, что качество аппроксимирующей кусочно-постоянной функции оценивается не только ее отклонением от непрерывной аппроксимируемой, но и количеством точек разрыва. Показано, что эта задача может быть решена при помощи разработанного алгоритма синтеза оптимальной САТ, приведена оценка сверху необходимого числа шагов. Разработана программа численного решения модельной задачи синтеза одномерной следящей САТ. Получены численные решения задач аппроксимации для трех разных непрерывных функций. Сравнение с точным аналитическим решением (для двух функций) показывает достоверность работы алгоритма.

6. Из необходимых условий оптимальности динамических систем с автоматной частью (частный случай ЛДС) выведены необходимые условия оптимальности САТ. Одним из условий является уравнение, которому удовлетворяют моменты переключения оптимальных траекторий САТ. Это уравнение может быть получено из уравнения для поверхности переключения, которое следует из достаточных условий оптимальности. Таким образом, установлена связь необходимых условий с достаточными.

## 2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТНОГО ТИПА ПРИ МГНОВЕННЫХ МНОГОКРАТНЫХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯХ

В ходе исследования пределов последовательностей кусочно-постоянных функций, вводится понятие точки многозначного разрыва и определяются кусочно-постоянные траектории дискретных САТ с мгновенными многократными переключениями. Показана замкнутость класса таких траекторий при фиксированном максимальном количестве скачков. Выясняется отличие этих траекторий от траекторий дискретно-непрерывных систем [71] при импульсных воздействиях. Формулируются задачи оптимального программного и оптимального позиционного управления дискретными САТ с мгновенными многократными переключениями. Достаточные условия оптимальности этих управлений обосновываются при помощи предельного перехода на основе теорем, доказанных в главе 1. Оказывается, предельный переход не изменяет форму уравнений для нахождения условных функций цены и позиционных управлений. Поэтому алгоритм, разработанный для синтеза оптимальных САТ при однократных переключениях (см. разд.1.3), можно применять и в случае процессов с мгновенными многократными переключениями. Это важное обстоятельство иллюстрирует модельный пример, в котором оптимальная САТ при мгновенных многократных переключениях синтезируется тем же алгоритмом, что и при однократных переключениях. Разработана модификация алгоритма [76] субоптимального синтеза САТ, описываемой рекуррентными уравнениями. Проведено сравнение этих двух алгоритмов.

### 2.1. ПРОЦЕССЫ С МГНОВЕННЫМИ МНОГОКРАТНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Если условия (1.9), (1.10) не выполняются, то возможно появление оптимальных процессов с мгновенными многократными переключениями. Для описания траекторий с мгновенными многократными переключениями нужно доопределить понятие точки разрыва для кусочно-постоянной функции.

Рассмотрим непрерывные справа кусочно-постоянные функции  $y: [\tau_0, \tau_{N+1}] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , имеющие  $N$  скачков и удовлетворяющие "начальному" условию  $y(\tau_0) = y_0$ . Любая такая функция однозначно определяется своими точками разрыва  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и значениями  $y_i = y(\tau_i)$  в этих точках, так как между точками разрыва функция постоянна:  $y(t) = y_i$ ,  $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Это взаимно однозначное соответствие обозначим

$y(\cdot) \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$ . Из определения кусочно-постоянной функции следует, что ее точки разрыва образуют конечную возрастающую последовательность, а любые два последовательных значения функции различны

$$\tau_{i-1} < \tau_i, \quad y_{i-1} \neq y_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Рассмотрим теперь последовательность  $y^n(\cdot) \leftrightarrow \{(\tau_i^n, y_i^n), i = 1, \dots, N\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , кусочно-постоянных функций с фиксированным числом скачков, т.е. имеющих одно и то же число  $N$  точек разрыва. Для каждой функции  $y^n(\cdot)$  этой последовательности выполняются условия (2.1), а именно

$$\tau_{i-1}^n < \tau_i^n, \quad y_{i-1}^n \neq y_i^n, \quad i = 1, \dots, N.$$

Введем понятие сходимости кусочно-постоянных функций  $y^n(\cdot) \xrightarrow{\text{кс}} y(\cdot)$ . Аббревиатура "кс" означает, что количество скачков у всех функций  $y^n(\cdot)$  одно и то же. Пусть последовательности  $\tau_i^n$  и  $y_i^n$  сходятся (обычная сходимость в пространствах  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^m$  соответственно)

$$\tau_i^n \rightarrow \tau_i, \quad y_i^n \rightarrow y_i, \quad (2.2)$$

где  $i = 1, \dots, N$ . Предельным элементам  $\tau_i$  и  $y_i$  поставим в соответствие предельную функцию  $y(\cdot) \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$  следующим образом. Рассмотрим три возможных варианта:

1) если предельные элементы (2.2) удовлетворяют неравенствам (2.1), то им соответствует непрерывная справа кусочно-постоянная функция  $y(\cdot) \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$  с  $N$  точками разрыва (здесь соответствие  $\leftrightarrow$ , как и ранее, обозначает, что  $y(t) = y_i$ ,  $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ).

2) если нарушаются строгие неравенства  $\tau_{i-1} < \tau_i$  в (2.1)

$$\tau_{i-1} \leq \tau_i, \quad y_{i-1} \neq y_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

то у предельной функции  $y(\cdot) \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$  будут совпадать некоторые точки разрыва. Такие точки будем называть *точками многозначного* разрыва, точнее, точку  $\tau_i$  будем называть *точкой  $k$ -значного* разрыва, если  $\tau_{i-1} < \tau_i = \dots = \tau_{i+k-1} < \tau_{i+k}$ . В этой точке функция принимает  $k$  значений  $y_i, \dots, y_{i+k-1}$ . Подчеркивая, что эти значения упорядочены, будем говорить, что в точке  $\tau_i$  функция *последовательно принимает  $k$  значений*  $y_i, \dots, y_{i+k-1}$ . Заметим, что при выполнении условий (2.3) количество скачков функции сохраняется, а количе-

ство точек разрыва уменьшается. Например, на рис.2.1 показана функция  $y^n(\cdot)$  с тремя скачками в точках  $\tau_1^n, \tau_2^n, \tau_3^n$  и значениями  $y_0 = y^n(\tau_0), y_1^n = y^n(\tau_1^n), y_2^n = y^n(\tau_2^n), y_3^n = y^n(\tau_3^n)$ .

Если  $y_i^n \rightarrow y_i, \tau_i^n \rightarrow \tau_i, i = 1, 2, 3$ , при  $n \rightarrow \infty$ , причем последовательные значения предельной функции разные  $y_0 \neq y_1, y_1 \neq y_2, y_2 \neq y_3$ , а пределы трех точек разрыва совпадают  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ , то предельная функция  $y(\cdot)$  (рис.2.2) имеет в этой точке трехзначный разрыв.

На рис.2.3 изображена функция, имеющая четыре точки многозначного разрыва:  $\tau_1$  – точка трехзначного разрыва,  $\tau_2$  – двузначного,  $\tau_3$  – пятизначного,  $\tau_4$  – четырехзначного разрыва. Эта функция имеет 14 скачков и может быть получена как предел последовательности кусочно-постоянных функций с  $N = 14$  точками разрыва.

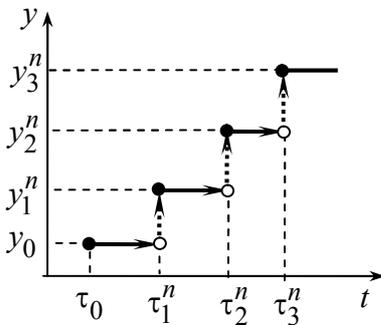


Рис.2.1

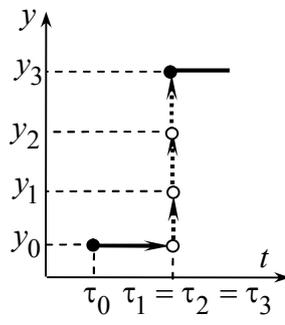


Рис.2.2

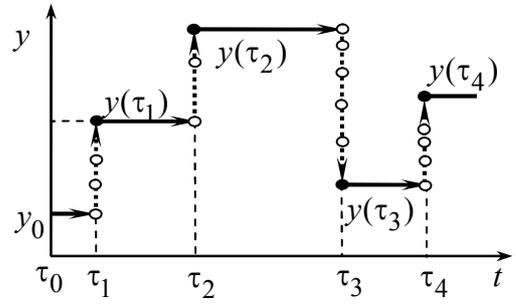


Рис.2.3

3) если неравенство  $y_{i-1}^n \neq y_i^n$  в пределе (при  $n \rightarrow \infty$ ) превращается в равенство  $y_{i-1} = y_i$ , то у предельной функции  $y(\cdot) \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$  исчезает скачок в точке  $\tau_i$ . Если при этом  $\tau_{i-1} < \tau_i < \tau_{i+1}$ , то исчезает и точка разрыва  $\tau_i$ , так как

$$y(\tau_i - 0) = y_{i-1} = y_i = y(\tau_i) = y(\tau_i + 0).$$

Последнее равенство следует из непрерывности справа.

Таким образом, в каждом из трех случаев (других вариантов нет) предельным элементам (2.2) ставится в соответствие функция  $y(\cdot) \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$ , которую будем называть пределом последовательности кусочно-постоянных функций  $y^n(\cdot) \leftrightarrow \{(\tau_i^n, y_i^n), i = 1, \dots, N\}$  и обозначать этот предельный переход:  $y^n(\cdot) \xrightarrow{\text{КС}} y(\cdot)$ . Аббревиатура "КС" означает, что это конечномерная сходимость функций. Предельная функция  $y(\cdot)$  является непрерывной справа кусочно-постоянной, имеющей конечное число точек однозначного или многозначного разрыва. Из конечномерной сходимости следует сходимость почти всюду

$$y^n(\cdot) \xrightarrow{\text{КС}} y(\cdot) \Rightarrow y^n(\cdot) \xrightarrow{\text{ПВ}} y(\cdot),$$

так как за исключением точек разрыва сходимость функций поточечная

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^n(t) \quad \forall t \in [\tau_0, \tau_{N+1}] \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_N\}.$$

В первых двух вариантах в предельном переходе  $y^n(\cdot) \xrightarrow{\text{КС}} y(\cdot)$  сохраняется количество скачков, в третьем – оно, к сожалению, меняется. Заметим, однако, что и в третьем варианте имеется благоприятное обстоятельство, а именно: число скачков в пределе может уменьшиться, но не может увеличиться. Это означает, что класс кусочно-постоянных функций, каждая из которых имеет не более чем  $N$  скачков, замкнут [58,73] относительно рассматриваемого предельного перехода.

Аналогичным образом определим предельный переход с фиксированным числом переключений для последовательности допустимых процессов. Каждому допустимому процессу  $d = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$  (см. разд.1.1), имеющему  $N$  однократных переключений в точках  $\tau_i, i = 1, \dots, N$ , поставим в соответствие совокупность состояний  $y_i = y(\tau_i)$  и управлений  $v_i = v(\tau_i)$  в точках разрыва траектории. Это взаимно однозначное соответствие обозначим  $d \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i, v_i), i = 1, \dots, N\}$ . Отметим, что количество параметров, соответствующее процессу, равно  $N + mN + qN$ . Конечная последовательность  $\{(\tau_i, y_i, v_i), i = 1, \dots, N\}$ , соответствующая допустимому процессу  $d \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$ , удовлетворяет условиям

$$\tau_{i-1} < \tau_i, \quad y_{i-1} \neq y_i, \quad v_i \neq 0, \quad y_i = g(\tau_i, y_{i-1}, v_i), \quad (2.4)$$

где  $i = 1, \dots, N, \tau_0 = t_0$ . В (2.4) учитываются определение кусочно-постоянной функции, уравнение движения (1.1) и условие (1.3).

Рассмотрим последовательность  $d^n \leftrightarrow \{(\tau_i^n, y_i^n, v_i^n), i = 1, \dots, N\}, n \in \mathbb{N}$ , допустимых процессов  $d^n \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$  с фиксированным числом однократных переключений. Для каждого процесса  $d^n$  этой последовательности выполняются условия (2.4), а именно

$$\tau_{i-1}^n < \tau_i^n, \quad y_{i-1}^n \neq y_i^n, \quad v_i^n \neq 0, \quad y_i^n = g(\tau_i^n, y_{i-1}^n, v_i^n). \quad (2.5)$$

Введем понятие сходимости  $d^n \xrightarrow{\text{КС}} d$  процессов с фиксированным числом однократных переключений. Используем такое же обозначение, как и для кусочно-постоянных функций, имея в виду сходимость  $y^n(\cdot) \xrightarrow{\text{КС}} y(\cdot)$  траекторий этих процессов. Количество скачков траектории  $y^n(\cdot)$  процесса  $d^n$  фактически определяет число его переключений. Пусть последовательности  $\tau_i^n, y_i^n, v_i^n$  сходятся (обычная сходимость в пространствах  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^q$  соответственно)

$$\tau_i^n \rightarrow \tau_i, \quad y_i^n \rightarrow y_i, \quad v_i^n \rightarrow v_i, \quad (2.6)$$

где  $i = 1, \dots, N$ . Для предельных элементов (2.6), в силу непрерывности функции  $g(t, y, v)$  по совокупности аргументов, равенство  $y_i = g(\tau_i, y_{i-1}, v_i)$  выполняется. Предельным элементам  $\tau_i, y_i, v_i$  поставим в соответствие процесс  $d \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i, v_i), i = 1, \dots, N\}$  следующим образом. Рассмотрим три возможных варианта:

1) если предельные элементы (2.6) удовлетворяют условиям (2.4), то процесс  $d$  оказывается допустимым процессом с однократными переключениями, т.е.  $d \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$ .

2) если в (2.4) нарушаются строгие неравенства  $\tau_{i-1} < \tau_i$

$$\tau_{i-1} \leq \tau_i, \quad y_{i-1} \neq y_i, \quad v_i \neq o, \quad y_i = g(\tau_i, y_{i-1}, v_i),$$

то у предельного процесса  $d$  может быть совпадение некоторых точек переключений. Такой процесс будем называть процессом с мгновенными многократными переключениями. Точку  $\tau_i$ , с которой совпадает  $k$  точек переключения  $\tau_{i-1} < \tau_i = \dots = \tau_{i+k-1} < \tau_{i+k}$ , будем называть точкой  $k$  мгновенных переключений. Будем говорить, что в таких точках САТ совершает мгновенные многократные переключения. Например, в точках разрыва  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  и  $\tau_4$  траектории движения, изображенной на рис.2.3, система совершает три, два, пять и четыре мгновенных переключения соответственно. У процесса с мгновенными многократными переключениями траектория  $y(\cdot)$  и управление  $v(\cdot)$  имеют точки многозначного разрыва. Многозначный разрыв траектории иллюстрирует рис.2.2. Поясним многозначный разрыв управле-

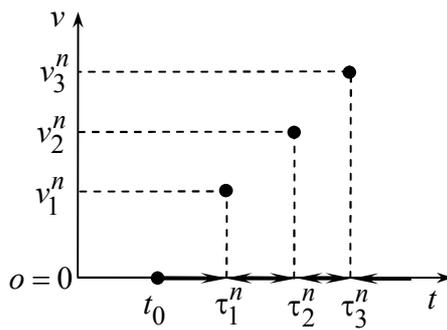


Рис.2.4

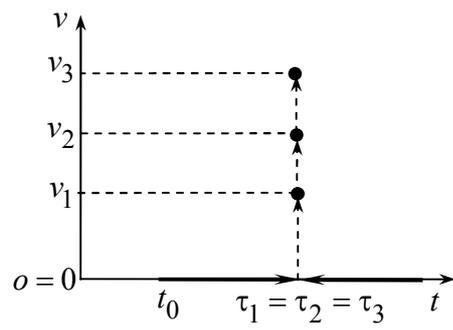


Рис.2.5

ния. На рис.2.4 показано управление  $v^n(\cdot)$  с тремя разрывами в точках  $\tau_1^n, \tau_2^n, \tau_3^n$  и значениями  $v_1^n = v^n(\tau_1^n), v_2^n = v^n(\tau_2^n), v_3^n = v^n(\tau_3^n)$ , отличными от нейтрального управления, равного нулю ( $o = 0$ ). Если  $v_i^n \rightarrow v_i, \tau_i^n \rightarrow \tau_i, i = 1, 2, 3$ , при  $n \rightarrow \infty$ , причем значения предельной функции отличаются от нейтрального  $v_i \neq o$ , а пределы трех точек разрыва совпадают  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ , то предельная функция  $v(\cdot)$  (рис.2.5) имеет в этой точке трехзначный разрыв.

Сходимость последовательности управлений будем обозначать так же, как сходимость траекторий:  $v^n(\cdot) \xrightarrow{\text{КС}} v(\cdot)$ .

3) если в (2.5) при  $n \rightarrow \infty$  оба неравенства  $y_{i-1}^n \neq y_i^n$  и  $v_i^n \neq o$  превращаются в равенства  $y_{i-1} = y_i$  и  $v_i = o$  соответственно, то у предельной траектории  $y(\cdot)$  исчезает скачок в точке  $\tau_i$ . Если при этом  $\tau_{i-1} < \tau_i < \tau_{i+1}$ , то исчезает и точка разрыва  $\tau_i$ , так как  $y(\tau_i - 0) = y_{i-1} = y_i = y(\tau_i) = y(\tau_i + 0)$ . Последнее равенство следует из непрерывности траектории справа. В результате получаем допустимый процесс, у которого количество переключений меньше, чем  $N$ .

Других вариантов нет. Случаи, когда  $y_{i-1} = y_i$ , а  $v_i \neq o$ , или, наоборот,  $y_{i-1} \neq y_i$ , но  $v_i = o$ , невозможны из-за условия (1.3) единственности нейтрального элемента и непрерывности функции  $g(t, y, v)$ . Таким образом, в каждом из трех случаев предельным элементам (2.6) ставится в соответствие процесс  $d \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i, v_i), i=1, \dots, N\}$ , который будем называть пределом последовательности процессов с фиксированным числом однократных переключений и обозначать этот предельный переход:  $d^n \xrightarrow{\text{КС}} d$ . Предельный процесс является процессом с многократными (в частности, с однократными) переключениями.

Дополним множество  $\mathcal{D}^1(t_0, y_0)$  пределами всех таких сходящихся последовательностей. Полученное множество обозначим через  $\mathcal{D}(t_0, y_0)$  и будем называть *множеством допустимых процессов с мгновенными многократными переключениями*. Подчеркнем, что для любого процесса  $d_N \in \mathcal{D}(t_0, y_0)$ , имеющего  $N$  переключений (однократных или многократных) существует сходящаяся к нему последовательность  $d_N^n \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , процессов с  $N$  однократными переключениями.

### Процессы с ограниченным числом переключений

В результате описанного выше предельного перехода  $d^n \xrightarrow{\text{КС}} d$  количество переключений может уменьшиться, но не может увеличиться. Учитывая это обстоятельство, определим класс  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  – множество допустимых процессов из  $\mathcal{D}(t_0, y_0)$ , имеющих не более чем  $N$  переключений. Предел любой "кс"-сходящейся последовательности процессов из  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  будет иметь не более чем  $N$  переключений. Поэтому для замкнутости класса  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  достаточно, чтобы множества  $Y$  и  $V$  допустимых состояний и управлений были

замкнуты. Отметим, что замкнутость класса  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  благоприятна для оптимизационных задач, поскольку связана с существованием их решения.

### **Сравнение траекторий с мгновенными многократными переключениями с траекториями импульсных и дискретно-непрерывных систем**

Мгновенные многократные воздействия необходимо учитывать в импульсных [43,49,61,62,71,98,99] и дискретно-непрерывных [71] системах, в которых траектории описываются дифференциальными уравнениями с мерой. Определяя решение такого дифференциального уравнения, многократные импульсные воздействия в один и тот же момент времени заменяются одним "суммарным" импульсом, интенсивность которого равна сумме воздействий всех импульсов. Совсем по-другому определяются траектории САТ в случае мгновенных многократных переключений в один и тот же момент времени. Отличия в определениях решений, видимо, связаны с тем, что используемые математические модели соответствуют объектам разной природы. Поясним это важное обстоятельство. Импульсные и дискретно-непрерывные системы часто применяются для описания динамики механических систем с ударами. С точки зрения механики, два равных по интенсивности и противоположных по направлению импульсных воздействия на объект управления (например, два противоположных удара по твердому телу), произведенные последовательно практически в один и тот же момент времени (с бесконечно малой задержкой), полностью компенсируют друг друга. Механическая система "не заметит" такого двойного воздействия, поскольку ее траектория не изменится по сравнению с траекторией без этих ударов. Этому примеру в САТ соответствует процесс с двойным переключением: скачок из некоторого состояния в новое и обратно. Однако САТ применяется для описания информационных процессов, происходящих в контуре управления. С информационной точки зрения, траектория с таким мгновенным двойным переключением состояния существенно отличается от траектории без переключений, поскольку было изменение сигнала. Например, включение и выключение сигнализации на охраняемом объекте вызывает определенную реакцию охраны, отличную от штатного режима работы, когда сигнализация не включалась. Иными словами, скачок САТ из данного состояния в другое состояние и обратно нельзя заменить сохранением данного состояния, как это происходит в механических системах. Поэтому, в отличие от импульсных и дискретно-непрерывных систем, в САТ рассматриваются траектории с мгновенными многократными переключениями.

## 2.2. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Рассмотрим постановки задач оптимального программного управления и оптимального позиционного управления САТ при мгновенных многократных переключениях, общее количество которых либо произвольное конечное, либо ограниченное сверху заданной величиной.

### Задача оптимального программного управления

Траектория дискретной САТ при мгновенных многократных переключениях представляется непрерывной справа кусочно-постоянной функцией  $y: T \rightarrow \mathbb{R}^m$ , имеющей на промежутке  $T = [t_0, t_1]$  конечное число скачков в точках  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , образующих неубывающую последовательность  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot)) = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  тактовых моментов времени

$$t_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_N \leq t_1. \quad (2.7)$$

Поскольку тактовые моменты времени образуют неубывающую последовательность (2.7), то у траектории  $y(\cdot)$  допускаются точки многозначного разрыва.

Изменения состояния системы описываются соотношениями

$$y_i = g(\tau_i, y_{i-1}, v_i), \quad (2.8)$$

$$v_i \in V(\tau_i, y_{i-1}), \quad (2.9)$$

где  $y_i = y(t)$  – состояние системы на промежутке  $\tau_{i-1} \leq t < \tau_i$ ;  $v_i = v(\tau_i)$  – управление в тактовый момент времени  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $y_0$  – начальное состояние

$$y(t_0 - 0) = y_0. \quad (2.10)$$

Всюду на  $T$ , за исключением тактовых моментов времени  $\mathcal{F}$ , траектория  $y(t)$  системы непрерывна, а управление нейтрально  $v(t) = o$ ,  $t \in T \setminus \mathcal{F}$ . Остальные предположения относительно функции  $g$  и многозначного отображения  $V(t, y)$  такие же, как в разд. 1.1.

Множество  $\mathcal{D}(t_0, y_0)$  допустимых процессов с мгновенными многократными переключениями образуют пары функций  $(y(\cdot), v(\cdot))$ , где  $y(\cdot)$  – непрерывная справа кусочно-постоянная функция  $y: T \rightarrow Y$ , имеющая на промежутке  $T = [t_0, t_1]$  конечное число скачков в точках  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , образующих неубывающую последовательность  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot)) = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ ;  $v(\cdot)$  – функция  $v: T \rightarrow V$ , всюду на  $T \setminus \mathcal{F}$  равная нейтральному элементу ( $v(t) = o$ ) и отличная от него только на  $\mathcal{F}$ ; причем значения  $y_i = y(\tau_i)$  и  $v_i = v(\tau_i)$  этих функций  $y_i = y(\tau_i)$

удовлетворяют рекуррентному уравнению (2.8), включению (2.9) и начальному условию (2.10).

На множестве  $\mathcal{D}(t_0, y_0)$  задан функционал качества процесса управления

$$I_{t_0} = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} g^0(\tau, y(\tau-0), v(\tau)) + F(y(t_1)), \quad (2.11)$$

где функции  $f$ ,  $g^0$  и  $F$  удовлетворяют условиям, перечисленным в разд. 1.1. Суммирование в (2.11) ведется по всем точкам  $\tau \in \mathcal{F}$ , т.е. по все скачкам  $y(\cdot)$  (множество  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot))$  конечно для каждого допустимого процесса).

Требуется найти минимальное значение функционала (2.11) и оптимальный допустимый процесс  $d^* = (y(\cdot), v(\cdot))$ , на котором это значение достигается

$$I_{t_0}(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, y_0)} I_{t_0}(d). \quad (2.12)$$

Имея в виду взаимно однозначное соответствие  $(y(\cdot), v(\cdot)) \leftrightarrow \{(\tau_i, y_i, v_i), i = 1, \dots, N\}$  для допустимого процесса  $(y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}(t_0, y_0)$ , функционал (2.11) можно представить в виде

$$I_{t_0} = \sum_{i=0}^N \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t, y_i) dt + \sum_{i=1}^N g^0(\tau_i, y_{i-1}, v_i) + F(y_{N+1}), \quad (2.13)$$

где  $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_N \leq \tau_{N+1} = t_1$ . При совпадении  $\tau_i = \tau_{i+1}$  тактовых моментов времени соответствующий интеграл, естественно, равен нулю. Представление (2.13) показывает явную зависимость показателя качества управления от конечного числа  $(N + mN + qN)$  параметров  $\tau_i, y_i, v_i, i = 1, \dots, N$ . Однако, количество  $N$  переключений процесса управления заранее не ограничено, поэтому поставленная задача относится к задачам оптимизации в функциональном пространстве.

Задача (2.12) обобщает поставленную ранее задачу (1.5), допуская процессы с мгновенными многократными переключениями. Из включения  $\mathcal{D}^1(t_0, y_0) \subset \mathcal{D}(t_0, y_0)$  следует неравенство

$$I_{t_0}(d^1) = \min_{d \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)} I_{t_0}(d) \geq \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, y_0)} I_{t_0}(d) = I_{t_0}(d^*).$$

Требования (1.9), (1.10), при которых у оптимальных процессов исключаются мгновенные многократные переключения, в задаче (2.12) не оговариваются, их можно отбросить. Если они все же выполняются, то решением (2.12) будет оптимальный процесс с однократными переключениями.

Как и в разд.1.1, поставленную задачу (2.12) можно дополнить терминальными ограничениями (1.11) или условиями (1.12) целочисленности компонент векторов состояния и управления.

### Задача синтеза оптимального позиционного управления

Вместе с задачей (2.12) поиска оптимального процесса будем рассматривать задачу синтеза оптимального позиционного управления (т.е. управления с обратной связью), которая формулируется следующим образом. Пусть множество  $\mathcal{V}$  допустимых управлений с обратной связью состоит из функций  $v(t, y)$ , каждая из которых для любых начальных условий

$$y(\theta - 0) = y_\theta, \quad t_0 \leq \theta \leq t_1, \quad y_\theta \in Y, \quad (2.14)$$

порождает допустимый процесс  $d = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}(\theta, y_\theta)$  с программным управлением  $v(\cdot)$

$$v(\tau) = v(\tau, y(\tau - 0)), \quad \tau \in \mathcal{F}_\theta,$$

где  $\mathcal{F}_\theta = \{\tau \in \mathcal{F} \mid \theta \leq \tau \leq t_1\}$  – множество тактовых моментов времени на отрезке  $[\theta, t_1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot))$ . В точках  $t \in [\theta, t_1] \setminus \mathcal{F}_\theta$  непрерывности траектории  $y(\cdot)$  управление равно нейтральному элементу  $v(t, y(t - 0)) = o$ .

Требуется найти оптимальное управление  $v(t, y)$  с обратной связью, которое для каждого начального условия (2.14) порождало бы оптимальный процесс  $d_\theta^* \in \mathcal{D}(\theta, y_\theta)$ , минимизирующий функционал оставшихся потерь

$$I_\theta = \int_{\theta}^{t_1} f(t, y(t)) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}_\theta} g^0(\tau, y(\tau - 0), v(\tau)) + F(y(t_1)), \quad (2.15)$$

где  $\theta = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_N \leq \tau_{N+1} = t_1$ . Суммирование в (2.15) проводится по всем тактовым моментам времени  $\tau$  на отрезке  $[\theta, t_1]$ .

### Задачи оптимального управления с ограниченным количеством переключений

Ранее в разд.1.1 отмечалось, что в прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Поставим задачу минимизации функционала (2.11) (или, что то же самое, (1.15)) на множестве допустимых процессов с ограниченным числом переключений. Обозначим через  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  множество допустимых процессов из  $\mathcal{D}(t_0, y_0)$ , имеющих не более чем  $N$  переключений (см. разд.2.1). Требуется найти минимальное значение

функционала (2.11) (или (1.15)) на множестве  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  и оптимальный допустимый процесс  $d_N^*$  с не более чем  $N$  переключениями, на котором это значение достигается

$$I(d_N^*) = \min_{d \in \mathcal{D}_N(t_0, y_0)} I(d). \quad (2.16)$$

Эта задача отличается от (2.12) дополнительным ограничением на количество переключений. В силу включения  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0) \subset \mathcal{D}(t_0, y_0)$ , решения  $d^*$  и  $d_N^*$  задач (2.12) и (2.16) удовлетворяют неравенству  $I(d^*) \leq I(d_N^*)$ .

Каждый процесс  $d_N \in \mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  может быть представлен (см. разд.2.1) как предел последовательности процессов из множества  $\mathcal{D}_N^1(t_0, y_0)$ , поскольку количество переключений в результате предельного перехода не увеличивается. Поэтому класс  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  является замыканием множества  $\mathcal{D}_N^1(t_0, y_0)$ . Значит, решения задач

$$I(d_N^*) = \min_{d \in \mathcal{D}_N(t_0, y_0)} I(d), \quad I(d_N^1) = \inf_{d \in \mathcal{D}_N^1(t_0, y_0)} I(d)$$

совпадают:  $I(d_N^*) = I(d_N^1)$ . Другими словами, вместо поиска оптимального процесса с мгновенными многократными переключениями в  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  можно строить минимизирующую последовательность в классе  $\mathcal{D}_N^1(t_0, y_0)$ . Оба подхода эквивалентны. Однако искать элемент множества, как правило, проще, чем сходящуюся к нему последовательность. Эта разница особенно заметна, если решается задача синтеза оптимального позиционного управления.

### Существование решений задач оптимального управления САТ

Функционал (2.13) непрерывен по аргументам  $\tau_i, y_i, v_i, i = 1, \dots, N$ , что следует из непрерывности функций  $f, g^0, F$ . Поэтому, чтобы гарантировать существование решения задачи (2.16), достаточно компактности класса  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  допустимых процессов с не более чем  $N$  переключениями. В разд.2.1 была отмечена замкнутость этого множества, если замкнуты множества  $Y$  и  $V$  допустимых состояний и управлений. Если же эти множества ограничены, то будет ограниченным и класс  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$ . Замкнутость и ограниченность обеспечивают компактность  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$ , так как это множество изометрично подмножеству конечномерного евклидова пространства  $(\mathbb{R}^{m+1})^N$ . Следовательно, из компактности множеств  $Y$  и  $V$  вытекает существование решения задачи (2.16). Заметим, что ограниченность простран-

ства состояний и допустимых значений управления не является чем-то особенным для прикладных задач. В любой такой задаче инженер может без труда указать границы изменения параметров технического устройства.

Компактность  $\mathcal{D}_N(t_0, y_0)$  является достаточным условием существования решения задачи. Можно предложить и другие достаточные условия, в которых не требуется компактность. Например, условия, связанные с выпуклостью минимизируемого функционала.

Допустимые процессы с не более чем  $N$  переключениями являются, очевидно, допустимыми процессами с не более чем  $N + 1$  переключениями. Поэтому справедливы включения

$$\mathcal{D}_0(t_0, y_0) \subset \mathcal{D}_1(t_0, y_0) \subset \mathcal{D}_2(t_0, y_0) \dots,$$

из которых следуют неравенства

$$I(d_0^*) \geq I(d_1^*) \geq I(d_2^*) \geq \dots, \quad (2.17)$$

т.е. последовательность (2.17) решений задач (2.16) не возрастает с ростом допустимого числа  $N$  переключений. При условии (1.8) количество переключений у оптимального процесса ограничено, поэтому последовательность (2.17) ограничена снизу. Следовательно, справедливо равенство

$$\min_{d \in \mathcal{D}(t_0, y_0)} I(d) = \min_{N \in \mathbb{Z}_+} I(d_N^*), \quad (2.18)$$

где  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  – множество неотрицательных целых чисел. Таким образом, для решения задачи (2.12)

$$I(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, y_0)} I(d)$$

можно использовать последовательность (2.17) решений задач (2.16). Именно такой подход будет использован в достаточных условиях оптимальности.

Если неравенство (1.8) нарушается хотя бы в один момент времени (например,  $\tau$ )

$$g^0(\tau, y, v) = 0 \quad \forall v \neq o,$$

то решение задачи (2.12) может отсутствовать, поскольку класс  $\mathcal{D}(t_0, y_0)$  не замкнут. Нетрудно построить пример, в котором траектории минимизирующей последовательности будут иметь в пределе в точке  $\tau$  бесконечно много скачков. В этом случае минимумы в обеих частях равенства (2.18) не достигаются, поэтому вместо (2.18) имеем

$$\inf_{d \in \mathcal{D}(t_0, y_0)} I(d) = \lim_{N \rightarrow \infty} I(d_N^*).$$

Заметим, что и в этом случае решение дает последовательность (2.17).

### 2.3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Достаточные условия оптимальности процессов с мгновенными многократными переключениями будут строиться на основе достаточных условий оптимальности процессов с однократными переключениями (см. разд.1.2). Уточним понятия условной функции цены для процессов с мгновенными многократными переключениями.

Обозначим через  $\pi^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , множество исходных позиций  $(\theta, y_\theta) \in \Pi$ , для каждой из которых существует допустимый процесс  $d_k = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}_k(\theta, y_\theta)$  с не более чем  $k$  переключениями. В разд.1.2 множество  $\pi^k$  вводилось для процессов с однократными переключениями. Позиции из множества  $\pi^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , будем теперь называть *допустимыми исходными позициями* для процессов с не более чем  $k$  переключениями (в общем случае многократными). Переключение из позиции  $(t, y) \in \pi^{k+1}$  в позицию  $(t, z) \in \pi^k$  происходит согласно уравнению (2.8)

$$z = g(t, y, v).$$

Множество допустимых управлений, позволяющих выполнить такое переключение обозначим через

$$V^{k+1}(t, y) = \{v \in V(t, y) \mid (t, g(t, y, v)) \in \pi^k\}. \quad (2.19)$$

Полагаем, что  $V^0(t, y) = \{o\}$ , поскольку у процессов без переключений допустимо только нейтральное управление.

Допустимые процессы с не более чем  $k$  переключениями являются, очевидно, допустимыми процессами с не более чем  $k + 1$  переключениями, поэтому справедливы включения

$$\mathcal{D}_0(\theta, y_\theta) \subset \mathcal{D}_1(\theta, y_\theta) \subset \mathcal{D}_2(\theta, y_\theta) \dots, \quad (2.20)$$

$$\pi^0 \subset \pi^1 \subset \pi^2 \subset \dots \quad (2.21)$$

В задаче со свободным правым концом траектории включения (2.21) превращаются в равенства  $\Pi = \pi^0 = \pi^1 = \pi^2 = \dots$ , а множество (2.19) при всех  $k \in \mathbb{Z}_+$  совпадает с  $V(t, y)$ .

Обозначим через  $\varphi^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , скалярную функцию  $\varphi^k : \pi^k \rightarrow \mathbb{R}$ , левый предел  $\varphi^k(\theta - 0, y_\theta)$  которой равен минимальному значению функционала (2.15) на множестве  $\mathcal{D}_k(\theta, y_\theta)$  допустимых процессов с не более чем  $k$  переключениями

$$\varphi^k(\theta - 0, y_\theta) = \min_{d \in \mathcal{D}_k(\theta, y_\theta)} I_\theta(d). \quad (2.22)$$

Множество  $\mathcal{D}_0(\theta, y_\theta)$  содержит один процесс  $d_0$  с постоянной траекторией и нейтральным управлением. Поэтому минимизация в (2.22) при  $k = 0$  фактически отсутствует, а функция  $\varphi^0(\theta, y_\theta)$  равна значению функционала (2.15) на этом процессе

$$\varphi^0(\theta - 0, y_\theta) = \int_{\theta}^{t_1} f^0(t, y_\theta) dt + F(y_\theta).$$

Функцию  $\varphi^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , будем называть *условной функцией цены*, поскольку она определяется как минимальное значение функционала оставшихся потерь на оптимальном процессе с не более чем  $k$  мгновенными многократными переключениями. Из включений (2.20) следуют неравенства

$$\varphi^0(\theta - 0, y_\theta) \geq \varphi^1(\theta - 0, y_\theta) \geq \varphi^2(\theta - 0, y_\theta) \geq \dots,$$

т.е. значения условных функций цены образуют невозрастающую последовательность. Заметим, что функция цены  $\varphi(t, y)$  связана с условными функциями цены  $\varphi^k$  равенством

$$\varphi(t - 0, y) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t - 0, y). \quad (2.23)$$

### Достаточные условия оптимальности процесса управления

Переформулируем достаточные условия, доказанные в разд.1.2, для случая процессов с мгновенными многократными переключениями.

Обозначим через  $\Phi$  – множество функций  $\varphi : T \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , каждая из которых при любом фиксированном  $y$  имеет по  $t$  конечное число точек разрыва, в которых она имеет конечный предел слева и непрерывна справа, а в остальных точках области определения функция  $\varphi$  непрерывна вместе со своей правой частной производной  $\varphi_t$ . Считаем, что функции  $\varphi$  из множества  $\Phi$  доопределены в точке  $t_0$  левым пределом  $\varphi(t_0 - 0, y)$ . Правая производная  $\varphi_t$  определена на всей области определения, за исключением конечного момента времени  $t_1$ .

Для последовательности функций  $\varphi^k \in \Phi$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , запишем выражения

$$\begin{aligned} P^k(t, y) &= \varphi_t^k(t, y) + f(t, y), \\ Q^k(t, y, v) &= \varphi^k(t, g(t, y, v)) - \varphi^{k+1}(t - 0, y) + g^0(t, y, v), \\ R(y) &= F(y) - \varphi^0(t_1, y). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Поскольку правые частные производные  $\phi_t^k(t, y)$  не определены при  $t = t_1$ , считаем, что  $P^k(t_1, y) = 0$  при всех  $y \in Y$ . Предполагаем, что функции (2.24) достигают своих наименьших значений, равных нулю

$$\min_{y \in Y} \min_{v \in V_*^{k+1}(t, y)} P^k(t, g(t, y, v)) = 0, \quad (2.25)$$

$$\min_{y \in Y} \min_{v \in V(t, y)} Q^k(t, y, v) = 0, \quad (2.26)$$

$$\min_{y \in Y} R(y) = 0. \quad (2.27)$$

Здесь  $V_*^{k+1}(t, y) = \text{Arg} \min_{v \in V^k(t, y)} Q^k(t, y, v)$  – множество точек глобального минимума функции

$Q^k(t, y, v)$  по аргументу  $v$  на множестве (2.19). Для задачи со свободным правым концом траектории  $V_*^{k+1}(t, y) = \text{Arg} \min_{v \in V(t, y)} Q^k(t, y, v)$ , поскольку в этом случае  $V^k(t, y) = V(t, y)$ , так

как  $\pi^k = \Pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . При дополнительном условии целочисленности (1.12) формулировка достаточных условий не меняется.

**Теорема 2.1 (достаточные условия оптимальности процесса управления).** *Для того чтобы допустимый процесс  $d^* \leftrightarrow \{(\tau_k^*, y_k^*, v_k^*), k = 1, \dots, N\}$  был оптимальным в классе  $\mathcal{D}(t_0, y_0)$ , достаточно существования такой невозрастающей последовательности  $\phi^k \in \Phi$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющей условиям (2.25) – (2.27), что*

а)  $P^{N^*-k}(t, y_k^*) = 0$  при всех  $t \in [\tau_k^*, \tau_{k+1}^*)$ ,  $\tau_k^* < \tau_{k+1}^*$ ,  $k = 0, 1, \dots, N^*$ ;

б)  $Q^{N^*-k}(\tau_k^*, y_{k-1}^*, y_k^*) = 0$  при всех  $k = 1, \dots, N^*$ ;

в)  $R(y_{N^*+1}^*) = 0$ ;

г)  $N^* = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \text{Arg} \min \phi^k(t_0 - 0, y_0)$ ,

где  $\tau_1^*, \dots, \tau_{N^*}^*$  – неубывающая последовательность моментов переключения траектории  $y^*(\cdot)$ ,  $t_0 = \tau_0^* \leq \tau_1^* \leq \dots \leq \tau_{N^*}^* \leq \tau_{N^*+1}^* = t_1$ , а  $N^*$  – наименьшее целое неотрицательное число, начиная с которого все члены последовательности  $\phi^k(t_0 - 0, y_0)$  оказываются равными.

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим теперь процессы с мгновенными многократными переключениями. Введем множество  $\mathcal{E}$  пар  $d = (y(\cdot), v(\cdot))$  функций, которые, в отличие от допустимых процессов из  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\tau_0, y_0)$ , не связаны уравнением (2.8), но удовлетворяют начальным условиям (2.10). Тактовые моменты времени  $\tau_1, \dots, \tau_N$  любого процесса  $d \in \mathcal{E}$  образуют неубывающую последовательность  $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_N \leq \tau_{N+1} = t_1$ . На множестве  $\mathcal{E}$  определим вспомогательный функционал  $L$ , как и ранее, равенством (1.25)

$$\begin{aligned} L(d) &= R(y(\tau_{N+1})) + \sum_{k=0}^N \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j(t, g(t, y(t-0), v(t))) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^N Q^j(\tau_k, y_{k-1}, v_k) + \varphi^N(\tau_0 - 0, y(\tau_0 - 0)) = \\ &= R[\tau_{N+1}] + \sum_{k=0}^N \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j[t] dt + \sum_{k=1}^N Q^j[\tau_k] + \varphi^N[\tau_0 - 0], \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $j = N - k$ . Интегралы по промежуткам  $[\tau_k, \tau_{k+1})$  при  $\tau_k = \tau_{k+1}$  из суммы по  $k = 0, 1, \dots, N$  можно исключить, поскольку они равны нулю.

Процесс  $d$  с мгновенными многократными переключениями, согласно определению, (см. разд.2.1) получается в результате предельного перехода  $d^n \xrightarrow{\kappa c} d$  из последовательности процессов  $d^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , с однократными переключениями  $d^n \in \mathcal{D}^1(t_0, y_0)$ . Тактовые моменты  $\tau_1^n, \tau_2^n, \dots, \tau_N^n$  процесса  $d^n$  образуют возрастающую последовательность  $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1^n < \dots < \tau_N^n \leq \tau_{N+1}^n = t_1$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$  и при  $n \rightarrow \infty$  сходятся соответственно к  $\tau_1, \dots, \tau_N$ . Докажем непрерывность функционала (2.28) для таких последовательностей процессов, а именно покажем, что  $L(d^n) \rightarrow L(d)$ , если  $d^n \xrightarrow{\kappa c} d$ .

Действительно, в силу непрерывности по  $t$  функций  $Q^j[t]$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , имеем равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^j[\tau_k^n] = Q^j[\tau_k]$ . Если, например, совпадают тактовые моменты

$\tau_i = \tau_{i+1} = \dots = \tau_{i+m+1}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=i}^{i+m} \int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n} P^j[t] dt = \sum_{k=i}^{i+m} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} P^j[t] dt = 0.$$

Величины  $R[\tau_{N+1}]$  и  $\varphi^N[\tau_0 - 0]$  для процессов  $d$  и  $d^n$  совпадают. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(d^n) = L(d).$$

Для процесса  $d^*$ , удовлетворяющего условиям а)-г) теоремы 1.1, имеем  $R[t_1] = 0$ ;  $P^j[t] = 0$  при всех  $t \in [\tau_k^*, \tau_{k+1}^*)$ ,  $\tau_k^* < \tau_{k+1}^*$ ,  $k = 0, 1, \dots, N^*$ ;  $Q^{j+1}[\tau_k] = 0$  при всех  $k = 1, \dots, N^*$ , где  $j = N^* - k$ . Поэтому  $L(d^*) = \varphi^{N^*}[t_0 - 0] = l$ . Для любого другого процесса  $d \in \mathcal{D}$  с мгновенными многократными переключениями существует последовательность  $\{d^n\} \subset \mathcal{D}^1$  процессов с однократными переключениями, сходящаяся к  $d$ . Для любого процесса  $d^n$  справедливо неравенство  $L(d^n) \geq l$  (см. п.4 части I доказательства). Следовательно, это же неравенство справедливо и для предельного процесса  $L(d) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(d^n) \geq l$ . Значит, на множестве

$\mathcal{D}$  выполняется неравенство  $L(d) \geq l = L(d^*)$ , что означает оптимальность процесса  $d^*$ .

Теорема 2.1 доказана.

Отметим, что описанный в разд.2.1 предельный переход с сохранением числа скачков, который применяется при доказательстве, естественным образом приводит однократные переключения к мгновенным многократным. При этом отличия оптимальных процессов с мгновенными многократными переключениями от оптимальных процессов с однократными переключениями фактически не отражаются на условных функциях цены. Действительно, в определении условных функций цены говорится лишь о количестве переключений, а их "кратность" (т.е. многократные они или однократные) не обсуждается. Отсюда следует, что для построения условных функций цены для мгновенных многократных переключений можно использовать алгоритм, применяемый для однократных переключений.

### **Достаточные условия оптимальности позиционного управления**

Как и ранее в разд.1.2, определим условные позиционные управления, учитывая, что порождаемые ими процессы будут с мгновенными многократными переключениями. Определения будут отличаться формально только тем, что в разд.1.2 моменты переключения  $\tau_1, \dots, \tau_N$  образовывали возрастающую последовательность, а теперь они образуют неубывающую последовательность. Это же отличие будет единственным в достаточных условиях. Повторим необходимые формулировки из разд.1.2, учитывая указанное отличие.

Условным позиционным управлением (т.е. *условным* управлением с обратной связью) будем называть замкнутое управление  $\mathbf{v}^k(t, y)$  процессом при условии, что процесс имеет не более  $k$  переключений состояний САТ. На области  $\pi^k$  своего определения функция  $\mathbf{v}^k(t, y)$  может принимать либо нейтральное значение  $\mathbf{v}^k(t, y) = o$ , при этом система сохраняет свое состояние, либо – отличное от нейтрального. В последнем случае система совершает мгновенное переключение из позиции  $(t, y) \in \pi^k$  в позицию  $(t, g(t, y, \mathbf{v}^k(t, y)))$ , которая входит в область определения  $\pi^{k-1}$  предыдущего условного управления  $\mathbf{v}^{k-1}(t, y)$ . Таким образом, условные управления образуют последовательность, которая обеспечивает позиционное управление САТ.

Последовательность  $\mathbf{v}^0(t, y), \mathbf{v}^1(t, y), \mathbf{v}^2(t, y) \dots$  условных управлений с обратной связью будем называть допустимой, если для каждого начального состояния  $(\theta, y_\theta) \in \pi^N$  существует допустимый процесс  $d_N = (y(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{D}_N(\theta, y_\theta)$  с не более чем  $N$  переключениями, удовлетворяющий условиям

$$y_i = g(\tau_i, y_{i-1}, v_i), \quad (2.29)$$

$$v_i = \mathbf{v}^{N-i+1}(\tau_i, y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.30)$$

где  $y_i = y(\tau_i)$ ,  $y_0 = y_\theta$ , а  $\tau_1, \dots, \tau_N$  – неубывающая последовательность моментов переключений  $\theta \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_N \leq t_1$ . В уравнении (2.29), которое совпадает с уравнением движения (2.8), применяется программное управление  $v_i$ , полученное при помощи условного позиционного управления  $\mathbf{v}^k(t, y)$ . Заметим, что условное позиционное управление имеет обратную нумерацию по сравнению с порождаемым программным управлением (2.30). Будем говорить, что допустимая последовательность условных управлений *порождает* для каждого начального состояния допустимый процесс. Поскольку одна и та же позиция может принадлежать разным подмножествам  $\pi^k$ , то и порождаемые процессы могут быть разные. Они будут отличаться, в первую очередь, количеством переключений. Если порождаемые процессы оказываются оптимальными, то и условные управления назовем *оптимальными*. Из последовательности  $\mathbf{v}^k(t, y)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , оптимальных условных управлений с обратной связью можно построить оптимальное позиционное управление  $\mathbf{v}(t, y)$ . Для этого достаточно знать оптимальное количество  $k(t, y)$  переключений для процесса, исходящего из заданной позиции  $(t, y)$ . Например, для получения оптимального процесса для заданных начальных условий

(1.3) нужно сначала определить оптимальное число  $N = \mathbf{k}(t_0, y_0)$  переключений, а затем, применяя последовательно оптимальные условные управления  $v(\tau_i) = \mathbf{v}^{N-i+1}(\tau_i, y(\tau_i - 0))$ ,  $i = 1, \dots, N$ , найти оптимальный процесс.

**Теорема 2.2 (достаточные условия оптимальности позиционного управления).** *Если существуют невозрастающая последовательность функций  $\varphi^k \in \Phi$  и допустимая последовательность условных позиционных управлений  $\mathbf{v}^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющие условиям*

$$\varphi^0(t_1, y) = F(y), \quad (2.31)$$

$$\varphi^{k+1}(t-0, y) = \varphi^k(t, g(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y))) + g^0(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y)), \quad (2.32)$$

$$\varphi_t^k(t, g(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y))) + f(t, g(t, y, \mathbf{v}^{k+1}(t, y))) = 0, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{v}^{k+1}(t, y) \in \text{Arg} \min_{v \in V_*^{k+1}(t, y)} [\varphi_t^k(t, g(t, y, v)) + f(t, g(t, y, v))], \quad (2.34)$$

$$\mathbf{k}(t, y) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \text{Arg} \min \varphi^k(t-0, y), \quad (2.35)$$

где  $t \in T$ ,  $y \in Y$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , то оптимальное управление с обратной связью имеет вид

$$\mathbf{v}(t, y) = \mathbf{v}^{\mathbf{k}(t, y)}(t, y), \quad (2.36)$$

а функция цены  $\varphi \in \Phi$  вычисляется по формуле

$$\varphi(\theta-0, y_\theta) = \varphi^{\mathbf{k}(\theta, y_\theta)}(\theta-0, y_\theta) = \min_{d \in \mathcal{D}(\theta, y_\theta)} I_\theta(d), \quad (2.37)$$

т.е. предел слева условной функции цены равен минимальному значению функционала оставшихся потерь (2.15).

Здесь  $\mathbf{k}(t, y)$  – наименьшее целое неотрицательное число, начиная с которого все члены невозрастающей последовательности  $\varphi^k(t-0, y)$  оказываются равными

$$V_*^{k+1}(t, y) = \text{Arg} \min_{v \in V^{k+1}(t, y)} [\varphi^k(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)] \quad (2.38)$$

– множество точек глобального минимума функции  $\varphi^k(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)$  по аргументу  $v$  на множестве (2.1). Поскольку правая производная  $\varphi_t^k(t, y)$  не определена при  $t = t_1$ , то полагаем, как и ранее, что  $P^k(t_1, y) = \varphi_t^k(t_1, y) + f(t_1, y) = 0$  при всех  $y \in Y$ . В этом случае условие (2.34) равносильно включению  $\mathbf{v}^{k+1}(t_1, y) \in V_*^{k+1}(t_1, y)$ , т.е.

$$\mathbf{v}^{k+1}(t_1, y) \in \text{Arg} \min_{v \in V^{k+1}(t_1, y)} [\varphi^k(t_1, g(t_1, y, v)) + g^0(t_1, y, v)].$$

Доказательство теоремы 2.2. Сначала проверим выполнение условий (2.25)-(2.27). Из (2.33) получаем, что  $P^k(t, g(t, y, v^{k+1}(t, y))) + f(t, g(t, y, v^{k+1}(t, y))) = 0$  при всех  $y \in Y$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Отсюда следует (2.25). Перепишем условие (2.32) равносильным образом

$$\min_{v \in V^{k+1}(t, y)} [\varphi^k(t, g(t, y, v)) - \varphi^{k+1}(t - 0, y) + g^0(t, y, v)] = 0 \Leftrightarrow \min_{v \in V^{k+1}(t, y)} Q^k(t, y, v) = 0$$

при всех  $y \in Y$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Отсюда следует (2.26). Согласно (2.31), функция  $R(y) = F(y) - \varphi^0(t_1, y)$  тождественно равна нулю. Поэтому условие (2.27) выполняется.

Проверим теперь условия а)-г) теоремы 2.1. Пусть допустимый процесс  $d^* = (y^*(\cdot), v^*(\cdot))$  с  $N^*$  переключениями в точках  $\tau_1^*, \dots, \tau_{N^*}^*$ , образующих неубывающую последовательность  $t_0 = \tau_0^* \leq \tau_1^* \leq \dots \leq \tau_{N^*}^* \leq \tau_{N^*+1}^* = t_1$ , порожден условными управлениями  $v^k(t, y)$ ,  $k = 1, \dots, N^*$ , с обратной связью

$$y_k^* = g(\tau_k, y_{k-1}^*, v_k^*), \quad v_k^* = v^{N^*-k}(\tau_k, y_{k-1}^*), \quad k = 1, \dots, N^*,$$

где  $y_k^* = y(\tau_k^*)$ ,  $v_k^* = v(\tau_k^*)$ ,  $y_0^* = y_0$ .

Условие в) выполняется для любого процесса, так как  $R(y) = 0$  при всех  $y \in Y$ , согласно (2.31). Для любого допустимого процесса из равенства (2.33) следует, что  $P^k(t, y) = 0$ , т.е. условие а) также выполняется. Проверим условие б). Для этого, учитывая (2.32), (2.34) и (2.36), вычисляем значение функции  $Q^{N^*-k}(\tau_k^*, y_{k-1}^*, v_k^*)$  на процессе  $d^*$

$$Q^j(\tau_k^*, y_{k-1}^*, v_k^*) = Q^j(\tau_k^*, y_{k-1}^*, v^{j+1}(\tau_k^*, y_{k-1}^*)) = \min_{v \in V^{j+1}(\tau_k^*, y_{k-1}^*)} Q^j(\tau_k^*, y_{k-1}^*, v) = 0,$$

где  $j = N^* - k$ . Значит, условие б) тоже верно. Из (2.35) следует справедливость условия г).

Итак, для процесса  $d^*$  выполняются все условия теоремы 2.1. Следовательно, этот процесс оптимальный. Таким образом, позиционное управление (2.36) порождает оптимальные процессы. Значит, это управление оптимальное, а функция цены имеет вид (2.37).

Теорема 2.2 доказана.

Сравнивая (2.23) и (2.35), (2.36), заключаем, что используемые в теореме 2.2 функции  $\varphi^k$  являются условными функциями цены (см. разд.1.2). Согласно теореме, задача нахождения условных функций цены и оптимальных условных управлений с обратной связью сводится к решению рекуррентного (2.32) и дифференциального (2.33) уравнений с терминальным условием (2.31). Эти уравнения можно записать следующим образом

$$\varphi^{k+1}(t, y) = \min_{v \in V^{k+1}(t, y)} [\varphi^k(t, g(t, y, v)) + g^0(t, y, v)], \quad (2.39)$$

$$\min_{v \in V_*^{k+1}(t, y)} [\varphi_t^k(t, g(t, y, v)) + f(t, g(t, y, v))] = 0. \quad (2.40)$$

Как видим, система уравнений усложнена операциями конечномерной минимизации по вектору управления, причем в результате минимизации в (2.40) определяется условное оптимальное позиционное управление (2.34). Окончательный выбор применяемого условного управления выполняется в результате целочисленной минимизации (2.35). Рекуррентное уравнение (2.39) аналогично уравнению Беллмана для дискретных систем, в котором, однако, время  $t$  является непрерывным параметром. Дифференциальное уравнение (2.40) аналогично уравнению Беллмана для непрерывных систем. В рассматриваемом случае оно простейшее, так как траектории системы постоянны, т.е.  $\dot{y}(t) = 0$  почти всюду на  $T$ . Его решение на промежутках постоянства состояния получается просто интегрированием по  $t$  функции  $f(t, y)$ . Минимизация (2.34) в некотором смысле "объединяет" аналогичные операции нахождения управления в уравнениях Беллмана для дискретных и непрерывных систем. Она проводится в два этапа. На первом этапе минимизируется скачок функции цены и определяется множество (2.38). На втором этапе в множестве (2.38) ищется управление, которое минимизирует изменение функции цены вдоль траекторий движения ( $\dot{y}(t) = 0$ ). Как видим, здесь тоже прослеживаются действия, применяемые для оптимизации непрерывных или дискретных систем. Однако эти действия взаимосвязаны и выполняются для условных позиционных управлений и условных функций цены.

### **Достаточные условия оптимальности при ограниченном количестве переключений**

Доказанные условия оптимальности (теорема 2.2) фактически решают задачу оптимального управления процессами с ограниченным количеством переключений, поставленную в разд.2.2. В самом деле, если число переключений допустимых процессов ограничено, то, в отличие от случая без ограничений, достаточно найти конечные последовательности условных позиционных управлений  $v^k$  и условных функций цены  $\varphi^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , где  $N$  – максимальное допустимое число переключений. Поэтому формулировка условий оптимальности меняется незначительно.

**Теорема 2.3 (достаточные условия оптимальности позиционного управления при ограниченном количестве переключений).** *Если существуют невозрастающая конечная последовательность функций  $\varphi^k \in \Phi$  и конечная последовательность допустимых условных управлений  $v^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , удовлетворяющие соотношениям (2.31) – (2.34), то оптималь-*

ное управление с обратной связью для процессов с не более чем  $N$  переключениями имеет вид (2.39)

$$v(t, y) = v^{k(t, y)}(t, y),$$

где  $k(t, y)$  – наименьшее целое неотрицательное число, не превосходящее  $N$ , начиная с которого все члены невозрастающей последовательности  $\varphi^k(t - 0, y)$  оказываются равными

$$k(t, y) = \min \operatorname{Arg} \min_{k=0, 1, \dots, N} \varphi^k(t - 0, y),$$

а функция цены  $\varphi \in \Phi$  вычисляется по формуле

$$\varphi(\theta - 0, y_\theta) = \varphi^{k(\theta, y_\theta)}(\theta - 0, y_\theta) = \min_{d \in \mathcal{D}_N(\theta, y_\theta)} I_\theta(d),$$

т.е. предел слева условной функции цены равен минимальному значению функционала оставшихся потерь (2.15) на множестве допустимых процессов с ограниченным количеством переключений.

Доказательство теоремы 2.3 следует из утверждения теоремы 2.2, если наложить ограничение на количество переключений допустимых процессов.

## 2.4. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА СУБОПТИМАЛЬНОГО ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления (разд.1.4), разработанный для синтеза оптимальных САТ при однократных переключениях, можно применять и в случае мгновенных многократных переключений. Никаких изменений или модификаций для этого не требуется. Дело в том, что условное позиционное управление  $v^k(t, y)$  всегда применяется для одного переключения, совершив которое система уже использует предшествующее управление  $v^{k-1}(t, y)$ . Это второе переключение системы может произойти в тот же самый момент времени, но для управления  $v^{k-1}(t, y)$  оно будет первым (и единственным).

Напомним (см. разд.1.4), что основная идея состоит в последовательном построении образующих функции цены с пошаговым увеличением количества допустимых переключений. Ключевым звеном каждого шага является поиск множества  $\pi_k$  позиций, в которых нужно делать переключение (первое из  $k$  максимально допустимых). Важно, что разработанный алгоритм не имеет методических погрешностей и точное его выполнение приводит к оптимальному управлению. Конечно, реализация алгоритма без применения численных методов невозможна. Поэтому решение будет приближенным даже в несложных методических при-

мерах, не говоря уже о прикладных задачах. Однако точность приближенного решения будет определяться погрешностями применяемых численных методов и ошибками вычислений, которые нетрудно оценить и использовать для контроля.

Другой подход к построению образующих функции цены использовался в алгоритмах, разработанных для приближенного синтеза оптимальных ЛДС [17]. Идея заключается в том, что на промежутке времени работы системы фиксируются тактовые моменты, в которые допускаются мгновенные многократные переключения. Тем самым задача синтеза ЛДС сводится к задаче синтеза НДС с мгновенными многократными переключениями дискретной части [18]. Такой подход имеет методическую ошибку и поэтому приводит к субоптимальному управлению.

Эта идея была использована при разработке алгоритма приближенного решения задачи синтеза к дискретными САТ, описываемыми рекуррентными включениями [76]. Адаптируем этот алгоритм для дискретных САТ, описываемых рекуррентными уравнениями. Если в задаче синтеза САТ зафиксировать тактовые моменты времени, то получим задачу синтеза оптимальной дискретной системы. Полученная задача отличается от классической задачи управления дискретными системами тем, что допускаются мгновенные многократные переключения в каждый тактовый момент времени. Оптимальное управление для этой дискретной системы будет субоптимальным для САТ.

Перейдем к детальному описанию алгоритма. Пусть задано разбиение  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t_1$  промежутка времени  $[t_0, t_1]$  функционирования системы на  $N$  промежутков тактовыми моментами времени  $\tau_i, i = 1, \dots, N$ . Считаем, что переключения САТ, причем мгновенные многократные, происходят только в эти фиксированные моменты времени  $\tau_i, i = 0, 1, \dots, N$ . Чтобы избежать путаницы обозначений, функцию цены  $\phi$ , управление  $v$  и количество переключений  $k$  для САТ с фиксированными тактовыми моментами времени будем обозначать через  $\phi, v$  и  $k$  соответственно, чтобы отличать от общего случая. Пусть в тактовый момент времени  $\tau_i$  система совершает  $k_i$  переключений

$$y(\tau_i - 0) = y_i^0 \rightarrow y_i^1 \rightarrow \dots \rightarrow y_i^{k_i}$$

под действием управлений  $v_i^1, \dots, v_i^{k_i}$  согласно соотношениям

$$y_i^k = g(\tau_i, y_i^{k-1}, v_i^k), \quad (2.41)$$

$$v_i^k \in Y(\tau_i, y_i^{k-1}), \quad (2.42)$$

где  $k = 1, \dots, k_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Между тактовыми моментами времени система сохраняет свое состояние  $y(t) = y_i^{k_i}$ ,  $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , а управление нейтральное  $v(t) = 0$ . Начальное условие (2.10) остается  $y(\tau_0 - 0) = y_0$ , а функционал качества (2.13) принимает вид

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t, y_i^{k_i}) dt + \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^{k_i} g^0(\tau_i, y_i^{k-1}, v_i^k) + F(y_N^{k_N}), \quad (2.43)$$

где  $y_0^0 = y_0$ , что соответствует начальному условию  $y(\tau_0 - 0) = y_0$ . Запишем для рассматриваемого случая функционал оставшихся потерь (2.15)

$$I_\theta = \int_{\theta}^{\tau_N} f(t, y(t)) dt + \sum_{i=j}^N \sum_{k=1}^{k_i} g^0(\tau_i, y_i^{k-1}, v_i^k) + F(y_N^{k_N}), \quad (2.44)$$

где  $\tau_0 \leq \theta \leq \tau_{N+1}$ , а суммирование по индексу  $i$  распространяется на все тактовые моменты времени, принадлежащие промежутку  $[\theta, \tau_N]$ .

Функция цены строится по образующим, как и в точном алгоритме (разд.1.3), но образующие имеют здесь другой смысл. Будем предполагать, что все позиции  $\Pi = T \times Y$  являются допустимыми исходными позициями для процессов с любым количеством переключений (см. разд.1.2). Напомним, что это предположение выполняется, например, для задачи со свободным правым концом траектории. В этом случае областью определения для каждой образующей будет служить все пространство позиций  $\Pi$ , а множества (2.19) совпадают со всем множеством допустимых управлений  $V(t, y)$ .

Определим образующие функции цены как значения функционала (2.44) оставшихся потерь, вычисленного на оптимальных траекториях специального типа:

– образующая  $\phi^{(0 \dots 0 k_N)}(t, y)$ ,  $k_N \in \mathbb{Z}_+$ , равна значению функционала (2.44) оставшихся потерь, вычисленному на оптимальной траектории, исходящей из позиции  $(t, y)$ ,  $\tau_{N-1} \leq t < \tau_N$ , и имеющей  $k_N$  переключений состояния в конечный момент времени  $\tau_N$ ;

– образующая  $\phi^{(0 \dots 0 k_{N-1} k_N)}(t, y)$ ,  $k_{N-1}, k_N \in \mathbb{Z}_+$ , равна значению функционала (2.44) оставшихся потерь, вычисленному на оптимальной траектории, исходящей из позиции  $(t, y)$ ,  $\tau_{N-2} \leq t < \tau_{N-1}$ , и имеющей  $k_{N-1}$  переключений в момент времени  $k_{N-1}$  и  $k_N$  переключений состояния в конечный момент времени  $\tau_N$ ;

и т.д.

– образующая  $\phi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y)$ ,  $k_0, k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}_+$ , равна значению функционала (2.44) оставшихся потерь, вычисленному на оптимальной траектории, исходящей из позиции  $(\tau_0 - 0, y)$  и имеющей  $k_0$  переключений в момент времени  $\tau_0$ ,  $k_1$  переключений – в момент  $\tau_1$ , ...,  $k_N$  переключений – в конечный момент времени  $\tau_N$ .

Синтез субоптимальной САТ состоит в построении двух последовательностей: последовательности образующих функции цены  $\phi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(t, y)$  и последовательности условных позиционных управлений  $v^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(t, y)$ ,  $k_0, k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}_+$ . Синтезированное управление позволяет найти субоптимальный процесс для любых начальных условий

$$y(\tau_0 - 0) = y_0.$$

Для этого, выполняя целочисленную оптимизацию

$$(\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_N) = \arg \min_{k_0 \in \mathbb{Z}_+} \min_{k_1 \in \mathbb{Z}_+} \dots \min_{k_N \in \mathbb{Z}_+} \phi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y_0), \quad (2.45)$$

определяем состав переключений (количество переключений в каждый тактовый момент времени) у субоптимального процесса, исходящего из данной начальной позиции. Тем самым осуществляется выбор позиционного управления, которое нужно использовать для получения субоптимального программного управления и субоптимальной траектории

$$y_i^k = g(\tau_i, y_i^{k-1}, v_i^k), \quad (2.46)$$

$$v_i^j = v^{(\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{i-1} k_i \mathbf{k}_{i+1} \dots \mathbf{k}_N)}(\tau_i, y_i^{j-1}), \quad (2.47)$$

где  $k_i = 1, \dots, \mathbf{k}_i$ , а  $j = \mathbf{k}_i - k_i + 1$ . Выбор (2.45) определяет также минимальное значение функционала (2.43), которое равно значению функции цены и вычисляется по ее образующей

$$\min I_{\tau_0} = \phi^{(\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_N)}(\tau_0, y_0). \quad (2.48)$$

### Алгоритм синтеза

Пусть задано разбиение  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t_1$  промежутка времени  $[t_0, t_1]$  функционирования системы на  $N$  промежутков тактовыми моментами времени  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Шаг 1. В конечный момент времени  $\tau_N$  находим последовательность функций  $\phi^{(0 \dots 0 k_N)}(\tau_N, y)$ ,  $k_N \in \mathbb{N}$ , решая рекуррентное уравнение

$$\phi^{(0 \dots 0 k_N)}(\tau_N, y) = \min_{v \in V(\tau_N, y)} [\phi^{(0 \dots 0 k_N - 1)}(\tau_N, g(\tau_N, y, v)) + g^0(\tau_N, y, v)]$$

с начальным условием

$$\phi^{(0\dots 00)}(\tau_N, y) = F(y),$$

при этом определяется позиционное управление

$$\mathbf{v}^{(0\dots 0k_N)}(\tau_N, y) = \arg \min_{v \in V(\tau_N, y)} [\phi^{(0\dots 0k_N-1)}(\tau_N, g(\tau_N, y, v)) + g^0(\tau_N, y, v)].$$

На промежутке времени  $[\tau_{N-1}, \tau_N)$  решаем дифференциальное уравнение

$$\phi_t^{(0\dots 0k_N)}(t, y) + f^0(t, y) = 0$$

для функций  $\phi^{(0\dots 0k_N)}(t, y)$ ,  $k_N \in \mathbb{Z}_+$ , с терминальными условиями

$$\phi^{(0\dots 0k_N)}(\tau_N - 0, y) = \phi^{(0\dots 0k_N)}(\tau_N, y).$$

Шаг 2. В тактовый момент времени  $\tau_{N-1}$  находим последовательность функций

$\phi^{(0\dots 0k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1}, y)$ ,  $k_{N-1} \in \mathbb{N}$ ,  $k_N \in \mathbb{Z}_+$ , решая рекуррентное уравнение

$$\phi^{(0\dots 0k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1}, y) = \min_{v \in V(\tau_{N-1}, y)} [\phi^{(0\dots 0k_{N-1}-1k_N)}(\tau_{N-1}, g(\tau_{N-1}, y, v)) + g^0(\tau_{N-1}, y, v)]$$

с начальным условием

$$\phi^{(0\dots 0k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1}, y) \Big|_{k_{N-1}=0} = \phi^{(0\dots 00k_N)}(\tau_{N-1}, y),$$

при этом определяется позиционное управление

$$\mathbf{v}^{(0\dots 0k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1}, y) = \arg \min_{v \in V(\tau_{N-1}, y)} [\phi^{(0\dots 0k_{N-1}-1k_N)}(\tau_{N-1}, g(\tau_{N-1}, y, v)) + g^0(\tau_{N-1}, y, v)].$$

На промежутке времени  $[\tau_{N-2}, \tau_{N-1})$  решаем дифференциальное уравнение

$$\phi_t^{(0\dots 0k_{N-1}k_N)}(t, y) + f^0(t, y) = 0$$

для функций  $\phi^{(0\dots 0k_{N-1}k_N)}(t, y)$ ,  $k_{N-1}, k_N \in \mathbb{Z}_+$ , с терминальными условиями

$$\phi^{(0\dots 0k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1} - 0, y) = \phi^{(0\dots 0k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1}, y)$$

и т.д.

Шаг  $N$ . В тактовый момент времени  $\tau_1$  находим последовательность функций

$\phi^{(0k_1\dots k_N)}(\tau_1, y)$ ,  $k_1 \in \mathbb{N}$ ,  $k_2, \dots, k_N \in \mathbb{Z}_+$ , решая рекуррентное уравнение

$$\phi^{(0k_1\dots k_N)}(\tau_1, y) = \min_{v \in V(\tau_1, y)} [\phi^{(0k_1-1k_2\dots k_N)}(\tau_1, g(\tau_1, y, v)) + g^0(\tau_1, y, v)]$$

с начальным условием

$$\phi^{(0k_1 k_2 \dots k_N)}(\tau_1, y) \Big|_{k_1=0} = \phi^{(00k_2 \dots k_N)}(\tau_1, y),$$

при этом определяется позиционное управление

$$\mathbf{v}^{(0k_1 \dots k_N)}(\tau_{N-1}, y) = \arg \min_{v \in V(\tau_1, y)} [\phi^{(0k_1-1k_2 \dots k_N)}(\tau_1, g(\tau_1, y, v)) + g^0(\tau_1, y, v)].$$

На промежутке времени  $[\tau_0, \tau_1)$  решаем дифференциальное уравнение

$$\phi_t^{(0k_1 \dots k_N)}(t, y) + f^0(t, y) = 0$$

для функций  $\phi^{(0k_1 \dots k_N)}(t, y)$ ,  $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}_+$ , с терминальными условиями

$$\phi^{(0k_1 \dots k_N)}(\tau_1 - 0, y) = \phi^{(0k_1 \dots k_N)}(\tau_1, y).$$

Шаг  $N+1$ . В начальный момент времени  $\tau_0$  находим последовательность функций  $\phi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y)$ ,  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}_+$ , решая рекуррентное уравнение

$$\phi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y) = \min_{v \in V(\tau_0, y)} [\phi^{(k_0-1 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, g(\tau_0, y, v)) + g^0(\tau_0, y, v)]$$

с начальным условием

$$\phi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y) \Big|_{k_0=0} = \phi^{(0k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y),$$

при этом определяется позиционное управление

$$\mathbf{v}^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y) = \arg \min_{v \in V(\tau_0, y)} [\phi^{(k_0-1 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, g(\tau_0, y, v)) + g^0(\tau_0, y, v)].$$

Образующие и позиционные управления построены. Синтез завершен.

Синтезированное позиционное управление позволяет находить субоптимальные процессы для любых начальных условий  $y(\tau_i - 0) = y$ . Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Для заданной исходной позиции  $(\tau_i, y) \in \Pi$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , определяем оптимальный состав  $(0 \dots 0 \mathbf{k}_i \dots \mathbf{k}_N)$  переключений, решая задачу целочисленной оптимизации

$$(0 \dots 0 \mathbf{k}_i \dots \mathbf{k}_N) = \arg \min_{k_i \in \mathbb{Z}_+} \dots \min_{k_N \in \mathbb{Z}_+} \phi^{(0 \dots 0 k_i \dots k_N)}(\tau_i, y), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.49)$$

Здесь  $\mathbf{k}_i, \dots, \mathbf{k}_N$  – оптимальные количества переключений в тактовые моменты времени  $\tau_i, \dots, \tau_N$  соответственно. Поскольку момент  $\tau_i$  считается исходным, то количества пере-

ключений в предыдущие тактовые моменты времени не учитываем, полагая, что  $k_1 = \dots = k_{i-1} = 0$ .

2. Субоптимальное управление в момент времени  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , принимает последовательно значения  $v_i^1, \dots, v_i^{k_i}$ , которые находятся по формуле

$$v_i^j = v^{(0 \dots 0 k_i k_{i+1} \dots k_N)}(\tau_i, y),$$

где  $k_i = 1, \dots, k_i$ , а  $j = k_i - k_i + 1$ . Минимальное значение функционала оставшихся потерь (2.44), равное значению функции цены, вычисляется по ее образующей

$$\min I_{\tau_i} = \phi^{(0 \dots 0 k_i \dots k_N)}(\tau_i, y).$$

Таким образом, можно найти оптимальное управление для любой позиции. Однако для получения оптимального программного управления необязательно выполнять минимизацию (2.49) в каждой текущей позиции  $(\tau_i, y(\tau_i))$ . Достаточно определить оптимальный состав  $(k_0 k_1 \dots k_N)$  переключений для начальной позиции  $(\tau_0, y_0)$ , выполняя оптимизацию (2.45), а затем использовать позиционные управления для нахождения субоптимального процесса по формулам (2.46), (2.47). Минимальное значение функционала (2.43) вычисляется по формуле (2.48).

### Численная реализация алгоритма (анализ погрешностей)

В алгоритме синтеза субоптимального управления САТ имеются три операции, которые нужно выполнять с использованием численных методов: интегрирование дифференциального уравнения, конечномерная минимизация при решении рекуррентного уравнения и целочисленная минимизация. Обсудим эти операции.

Дифференциальное уравнение и терминальное условие имеют вид

$$\phi_t(t, y) + f^0(t, y) = 0, \quad \phi(\tau - 0, y) = \phi(\tau, y),$$

где  $y$  – параметр. Эта задача Коши решается простым интегрированием

$$\phi(t, y) = \phi(\tau, y) + \int_t^\tau f^0(s, y) ds,$$

для  $t < \tau$ . Здесь можно использовать любой метод численного интегрирования [54,77]. При решении примеров использовался метод трапеций.

Рекуррентные уравнения имеют вид

$$\phi^{(k)}(\tau, y) = \min_{v \in V(\tau, y)} [\phi^{(k-1)}(\tau, g(\tau, y, v)) + g^0(\tau, y, v)],$$

где  $y$  – параметр. Сложность решения этого уравнения определяется задачей минимизации. В разных моделях систем управления используются очень разные по сложности ограничения [35]. От управления без ограничений  $v \in \mathbb{R}^q$  или управления, ограниченного по модулю  $|v| \leq 1$ , до управления с ограничениями типа равенств или управления с логическими (целочисленными) координатами. Однако в задачах управления количество координат вектора  $v$  – невелико. Это облегчает решение. Нередко, анализируя задачу минимизации, удается существенно сузить множество  $V(t, y)$ , отбросив неподходящие точки, которые заведомо не могут быть точками минимума. Тогда численное решение становится проще.

Для нахождения субоптимального процесса нужно решать задачу целочисленной минимизации (2.45)

$$\min_{k_0 \in \mathbb{Z}_+} \min_{k_1 \in \mathbb{Z}_+} \dots \min_{k_N \in \mathbb{Z}_+} \varphi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y_0), \quad (2.50)$$

где  $\tau_0$  и  $y_0$  – заданные параметры. Зависимость образующих от количества переключений пока не изучена. В примерах с квадратичным функционалом качества функция

$$(k_0 k_1 \dots k_N) \rightarrow \varphi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau_0, y_0)$$

оказывалась выпуклой, но не квадратичной, если считать аргументы  $k_i$  непрерывными. В этих примерах минимум находился достаточно просто. Использовался покоординатный спуск: перебор значений одной переменной  $k_i = 0, 1, \dots$  (при фиксированных значениях других переменных) до нахождения минимума по  $k_i$ , затем поиск минимума по другой переменной и т.д. В общем случае, если количество переключений ограничить, то задача (2.50) станет конечной. Ее решение можно найти полным перебором, хотя такой подход нельзя считать эффективным.

При численной реализации алгоритма синтеза субоптимального управления САТ пространство позиций  $\Pi = T \times Y$  ограничивается и заменяется сеткой с узлами  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N$  с шагом  $\Delta t$  по времени и "шагом"  $\Delta y = (\Delta y_1, \dots, \Delta y_m)$  по состоянию. Если по каждой координате вектора состояния выбрано  $M$  узлов, то сетка в пространстве позиций будет содержать  $(N+1)M^m$  узлов. Уравнение движения (2.41) и управление (2.42) аппроксимируются так, чтобы состояния  $y_i^k$  системы попадали в узлы сетки. Другими словами, допустимые траектории должны проходить "по сетке". Количество переключений нужно ограничить: либо в каждый тактовый момент времени

$$k_i \leq K_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.51)$$

либо в совокупности

$$k_0 + k_1 + \dots + k_N \leq K. \quad (2.52)$$

В результате работы программы, реализующей алгоритм, будут получены значения образующих  $\varphi^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau, y)$  и условные позиционные управления  $\mathbf{v}^{(k_0 k_1 \dots k_N)}(\tau, y)$ . Количество значений образующих при ограничениях (2.51) равно

$$(K_0 + 1)(K_1 + 1) \cdot \dots \cdot (K_N + 1)(N + 1)M^m, \quad (2.53)$$

а при ограничении (2.52)

$$C_{K+N+1}^K (N + 1)M^m = \frac{(K + N + 1)!}{K!N!} (N + 1)M^m. \quad (2.54)$$

Количество значений управлений в  $m$  раз больше. Это основные требования по объему памяти, необходимой для численной реализации алгоритма. Количество арифметических операций оценить затруднительно, поскольку алгоритм включает многократную конечномерную минимизацию, в том числе и целочисленную.

### Сравнение алгоритмов синтеза оптимальных и субоптимальных САТ

В общем случае *первый* алгоритм (см. разд.1.4) лучше *второго* (см. настоящий разд.2.4): он не имеет методической ошибки и для его реализации требуется меньше арифметических операций и компьютерной памяти. Оба указанных преимущества спорные. Действительно, методическая точность первого алгоритма сразу же утрачивается, как только для численного решения пространство позиций заменяется сеткой. Реализация первого алгоритма на этой сетке даст приближенный субоптимальный синтез. Конечно, для повышения точности нужно все внимание сосредоточить на уменьшении погрешностей отдельных операций, предписанных первым алгоритмом. Чем меньше будет погрешность этих операций, тем лучше. Более сложная ситуация возникает, когда реализуется алгоритм приближенного решения (второй алгоритм). Так как его методическую погрешность оценить трудно, сложно выбрать допустимые погрешности отдельных операций, составляющих алгоритм. Стремиться же к высокой точности выполнения этих операций бесполезно, если методическая погрешность велика.

Разница в количестве вычислений и в объемах требуемой памяти определяется главным образом тем, что во втором алгоритме задаются ограничения (2.51) или (2.52) на количество переключений. Эти ограничения нужно задавать до решения задачи. Если сильно ограничить количество переключений, то можно потерять оптимальные решения. Если же допустить большое количество переключений, то возрастет количество арифметических операций и

объем требуемой памяти. В первом же алгоритме количество переключений ограничивать не надо. Эта величина выясняется при синтезе. Если на каком-либо шаге алгоритма в каждой позиции  $(t, y)$  количество переключений не увеличилось по сравнению с предыдущим шагом, то искать следующие условную функцию цены и управление уже не надо. Они будут совпадать с найденными на предыдущем шаге. Во втором алгоритме в каждой позиции строятся все образующие и все управления до максимально допустимого количества переключений. Поэтому количество вычислений во втором алгоритме, вообще говоря, больше.

Получим для сравнения асимптотические оценки. Формулы (2.53) и (2.54) дают представление о росте вычислительных ресурсов при увеличении количества переключений и других параметров алгоритмов. Рассмотрим, например, ограничение (2.52) в случае, когда  $K = N$  (число переключений не больше количества тактовых моментов времени). Применяя асимптотическую оценку (при  $N \rightarrow \infty$ ) для биномиального коэффициента в (2.54), получаем

$$C_{K+N+1}^K (N+1)M^m \sim \frac{4^N}{\sqrt{2\pi N}} (N+1)M^m. \quad (2.55)$$

Следовательно, вычислительные затраты растут как показательная функция. В случае ограничения (2.51) рост тоже показательный. Напомним, что аналогичная характеристика вычислительных затрат, полученная для первого алгоритма (см. разд.1.4) при  $K = N$ , имеет вид

$$(K+1)(N+1)M^m = (N+1)^2 M^m. \quad (2.56)$$

Здесь скорость возрастания квадратичная. Оценки (2.55) и (2.56) показывают принципиальную разницу сравниваемых алгоритмов по вычислительным затратам. Первый алгоритм с ростом допустимого числа переключений становится гораздо эффективнее первого.

Сравнение, однако, не будет полным, если не учитывать следующее. В первом алгоритме есть операция, которая отсутствует во втором алгоритме. Это решение системы неравенств (1.58), которое повторяется на каждом шаге. Пока никакие свойства этой системы неизвестны, поскольку ее исследование не проводилось. Поэтому предлагается ее решать простым перебором всех узлов сетки. Это, несомненно, увеличивает вычислительную работу. С другой стороны, во втором алгоритме задача целочисленной минимизации, решаемая при нахождении субоптимального процесса, гораздо сложнее, чем аналогичная задача в первом алгоритме. Напомним, что в первом алгоритме эта задача с одной переменной, а во втором — с  $N$  переменными, причем величина  $N$ , обычно, немаленькая (равная количеству узлов на промежутке времени).

Таким образом, преимущество первого алгоритма нельзя считать абсолютным. Возможно, есть задачи, в которых второй алгоритм будет эффективнее первого. Отметим, что способы построения образующих у этих алгоритмов разные. В первом алгоритме последовательно

задается количество переключений, и ищутся те позиции, в которых это количество переключений будет у оптимальной траектории, исходящей из этой позиции. Во втором алгоритме промежуток времени разбивается узлами, в которых решается рекуррентное уравнение, а между узлами – дифференциальное. Можно сказать, что эти способы отличаются так же существенно, как отличаются между собой интегралы Лебега и Римана. Поэтому их сравнение не может быть однозначным.

## 2.5. ПРИМЕРЫ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ПРИ МГНОВЕННЫХ МНОГОКРАТНЫХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯХ

Рассматриваются модельные примеры синтеза оптимального позиционного управления дискретными САТ. Применяется первый алгоритм (см. разд.1.4). Пример 2.1 решается аналитически. Его условие отличается от примера 1.1 дополнительным ограничением на величину скачка. В примере 2.2 первая условная функция цены и первое условное позиционное управление строятся аналитически, чтобы продемонстрировать методику решения, а следующие образующие находятся численно, поскольку аналитически это сделать трудно. Эта же задача (пример 2.2) решается также при помощи второго алгоритма (см. разд.2.4). Проводится сравнительный анализ результатов расчетов, указываются объем требуемой памяти и время работы каждого из алгоритмов.

**Пример 2.1** Даны модель САТ и функционал

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t-0) + v(t), \\ v(t) &\in [\max\{-y(t-0), -1\}, 1], \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$I = \int_0^1 y(t) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-\tau)^2 \right],$$

где  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y \geq 0$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot))$  – множество точек разрыва кусочно-постоянной функции  $y(\cdot)$ . Требуется найти оптимальное управление с обратной связью, а также оптимальные процессы с начальными условиями: а)  $y(-0) = 2.25$ ; б)  $y(0.75-0) = 2.25$ .

Поставленная задача отличается от примера 1.1 условием (2.57), которое обеспечивает неотрицательность значения  $y(t)$  при ограниченности управления

$$\begin{cases} -1 \leq v \leq 1, \\ -y \leq v. \end{cases} \quad (2.58)$$

Напомним, что в примере 1.1 ненулевое оптимальное управление  $v(t) = -y(t-0)$  переводило систему из состояния  $y(t-0) \neq 0$  в нулевое состояние  $y(t) = 0$ . При ограничениях (2.58) та-

кой скачок возможен не всегда. Для состояний  $y \in [0,1]$  оптимальное управление  $v = -y$  допустимо. Поэтому для позиций  $(t, y) \in [0,1] \times [0,1]$  оптимальное управление будет совпадать с оптимальным управлением, найденным в примере 1.1. Для состояний  $y(t-0) > 1$  скачок в нулевое состояние невозможен из-за первого ограничения в (2.58). Поэтому, чтобы уменьшить значение  $y(t)$  при  $y(t-0) > 1$ , может потребоваться не один, а несколько скачков, причем в один и тот же момент времени. Другими словами, оптимальные процессы в рассматриваемой задаче могут иметь мгновенные многократные переключения.

По сравнению с общей постановкой задачи (1.1),(1.2),(1.5), имеем:  $T = [0,1]$ ,  $Y = [0,+\infty)$ ,  $V(t, y) = [\max\{-y, -1\}, 1]$ ,  $g(t, y, v) = y + v$ ,  $g^0(t, y, v) = g^0(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2$ ,  $f(t, y) = y$ ,  $F(y) = 0$ . Нейтральное значение управления совпадает с нулевым, т.е.  $o = 0$ .

Будем синтезировать оптимальное позиционное управление, применяя алгоритм, описанный в разд.1.3. Поскольку решается задача со свободным правым концом траектории, то области определения условных функций цены совпадают со всем пространством позиций:  $\Pi = \pi^0 = \pi^1 = \dots$ , где  $\Pi = T \times Y = [0,1] \times [0,+\infty)$ .

Шаг 0. На области  $\pi^0$  интегрируем дифференциальное уравнение (1.54) с терминальным условием (1.55)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_0(t, y) + y = 0, \quad \varphi_0(1, y) = 0.$$

Получаем  $\varphi_0(t, y) = (1-t)y$ . Следовательно,  $\varphi^0(t, y) = \varphi_0(t, y) = (1-t)y$  и  $v^0(t, y) = o$ .

Шаг 1<sup>1</sup>. На области  $\pi^1$  находим образующую  $\varphi_1(t, y)$  по формуле (1.56) при  $k = 1$

$$\varphi_1(t, y) = \min_{v \in [\max\{-y, -1\}, 1]} [(1-t)(y+v) + g^0(t)] = \begin{cases} g^0(t), & 0 \leq y \leq 1, \\ (1-t)(y-1) + g^0(t), & y > 1 \end{cases}$$

и позиционное управление (1.57)

$$v_1(t, y) = \max\{-y, -1\}.$$

Запишем систему неравенств (1.58) для  $0 \leq y \leq 1$  или  $y > 1$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 < (1-t)y, \\ y + (-y) + (1-t) \leq y, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y > 1, \\ (1-t)(y-1) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(1-t)^2 < (1-t)y, \\ y + (-1) + (1-t) \leq y. \end{cases}$$

Объединяя решения

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1, \\ y > \frac{1}{8(1-t)} + \frac{1}{2}(1-t), \\ y \geq 1-t, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} y > 1, \\ t < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -t \leq 0 \end{array} \right.$$

двух систем, получаем область  $\pi_1$ . На рис.2.6 изображены дуга гиперболы  $\gamma(t) = \frac{1}{8(1-t)} + \frac{1-t}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; отрезок  $y = 1-t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ; и луч  $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $y > 1$ , ограничивающие область  $\pi_1$ , отмеченную на рис.2.6 полужирной цифрой **1**.

Шаг 2<sup>1</sup>. Так как  $\pi_1 \neq \emptyset$  и левая граница  $\partial\pi_1$  области  $\pi_1$  – отрезок  $y = 1-t$ ,  $0 \leq t \leq 0.5$ , не совпадает с осью ординат – левой границей пространства позиций  $\Pi$ , то, интегрируя уравнение (1.59) с терминальным условием (1.60)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{01}(t, y) + y = 0, \quad \varphi_{01}(t-0, y) = \varphi_1(t, y) \text{ при } y = 1-t, \quad 0 \leq t \leq 0.5,$$

получаем  $\varphi_{01}(t, y) = (1-t)y + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}y^2$ . Область  $\pi_{01}$  позиций, предшествующих  $\partial\pi_1$ , представляет собой треугольник, отмеченный на рис.2.6 цифрами **01**. Отрезок, изображенный на рис.2.6 двойной линией, является линией переключения. Остальные позиции, в которых состояние системы не меняется, образуют область  $\pi_0$ , которая отмечена полужирной цифрой **0**. Эта область ограничена сверху линией

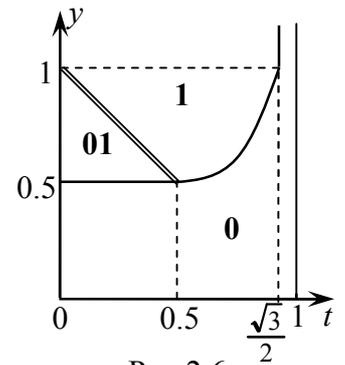


Рис.2.6

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq t \leq 0.5, \\ \gamma(t), & 0.5 \leq t \leq 0.5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Переходим к шагу 1, полагая  $k = 2$ .

Шаг 3<sup>1</sup>. Составляем первую функцию цены (1.61)

$$\varphi^1(t, y) = \begin{cases} \varphi_{01}(t, y), & (t, y) \in \pi_{01}, \\ g^0(t), & (t, y) \in \pi_1, y \leq 1, \\ \varphi_0(t, y-1) + g^0(t), & (t, y) \in \pi_1, y > 1, \\ \varphi^0(t, y), & (t, y) \in \pi_0 \end{cases}$$

и первое позиционное управление

$$v^1(t, y) = \begin{cases} \max\{-y, -1\}, & (t, y) \in \pi_1, \\ 0, & (t, y) \in \Pi \setminus \pi_1. \end{cases}$$

Полагая  $k = 2$ , продолжаем с шага 1.

Шаг 1<sup>2</sup>. На области  $\pi^2$  находим образующую  $\varphi_2(t, y)$  по формуле (1.56) при  $k = 2$

$$\varphi_2(t, y) = \min_{v \in [\max\{-y, -1\}, 1]} [\varphi^1(t, y + v) + g^0(t)]. \quad (2.59)$$

Функция  $\varphi^1(t, y)$  неубывающая по  $y$ . Поэтому минимум в (2.59) по  $v$  достигается при наименьшем значении  $v = \max\{-y, -1\}$ . Если под воздействием этого управления в момент времени  $t$  система окажется в позиции  $(t, y + v) \in \pi_0$ , то больше переключений не будет. Значит, при таком движении траектория будет иметь только одно переключение, т.е. позиция  $(t, y)$  не будет принадлежать области  $\pi_2$ . Следовательно, все позиции множества  $\pi_2$  удовлетворяют неравенствам

$$\gamma_0(t) + 1 < y, \quad t < 0.5\sqrt{3}. \quad (2.60)$$

При ограничениях (2.60)  $y > 1$  и минимум в (2.59) достигается при  $v = -1$ . Поэтому

$$\varphi_2(t, y) = \varphi^1(t, y - 1) + g^0(t), \quad v_2(t, y) = -1.$$

Для уточнения области  $\pi_2$  запишем систему (1.58)

$$\begin{cases} \varphi_2(t, y) < \varphi^1(t, y), \\ y + (-1) + (1 - t) \leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi^1(t, y - 1) + g^0(t) < \varphi^1(t, y), \\ -t \leq 0. \end{cases}$$

Второе неравенство выполняется всегда, а первое при условии  $y > 1$  оказывается равносильным второму неравенству  $t < 0.5\sqrt{3}$

$$\varphi_0(t, y - 2) + 2g^0(t) < \varphi_0(t, y - 1) + g^0(t) \Leftrightarrow g^0(t) < 1 - t \Leftrightarrow t < 0.5\sqrt{3}.$$

Таким образом, область  $\pi_2$  совпадает с множеством решений неравенств (2.60). На рис.2.7 эта область отмечена полужирной цифрой **2**.

Так как левая граница области  $\pi_2$  совпадает с левой границей  $t = 0$  пространства  $\Pi$ , то шаг 2<sup>2</sup> пропускаем.

Шаг 3<sup>2</sup>. Составляем вторую функцию цены (1.61) и второе позиционное управление

$$\varphi^2(t, y) = \begin{cases} \varphi^1(t, y - 1) + g^0(t), & (t, y) \in \pi_2, \\ \varphi^1(t, y), & (t, y) \in \Pi \setminus \pi_2, \end{cases}$$

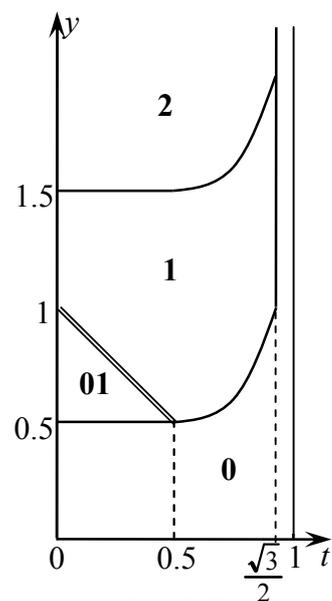


Рис.2.7

$$v^2(t, y) = \begin{cases} -1, & (t, y) \in \pi_2, \\ v^1(t, y), & (t, y) \in \Pi \setminus \pi_2. \end{cases}$$

Продолжая синтез для  $k = 3, 4, \dots$ , получаем

$$\varphi^k(t, y) = \begin{cases} \varphi^{k-1}(t, y-1) + g^0(t), & (t, y) \in \pi_k, \\ \varphi^1(t, y), & (t, y) \in \Pi \setminus \pi_k, \end{cases} \quad v^k(t, y) = \begin{cases} -1, & (t, y) \in \pi_k, \\ v^{k-1}(t, y), & (t, y) \in \Pi \setminus \pi_k, \end{cases}$$

где область  $\pi_k$  определяется системой неравенств

$$\gamma_0(t) + k - 1 < y \leq \gamma_0(t) + k, \quad t < 0.5\sqrt{3}.$$

На рис.2.8 области  $\pi_3, \pi_4$  обозначены полужирными цифрами **3** и **4** соответственно.

Найдем теперь оптимальные траектории для заданных начальных условий.

В случае а) начальная позиция  $(0, y(-0)) = (0, 2.75)$  системы принадлежит области  $\pi_3$ .

Следовательно, в этой позиции происходит скачок из состояния  $y = 2.75$  в состояние  $y = 1.75$  под управлением  $v = -1$ . В позиции  $(0, 1.75) \in \pi_2$  происходит еще один скачок под управлением  $v = -1$  в состояние  $y = 0.75$ . Позиция  $(0, 0.75) \in \pi_{01}$  следовательно, система сохраняет свое состояние до момента времени  $t = 1 - 0.75 = 0.25$  пока не попадет на линию переключения, а затем под управлением  $v = -0.75$  переходит в нулевое состояние, которое уже не меняется. Оптимальная траектория изображена на рис.2.8 штрихпунктирной линией *a*. Минимальное значение функционала находим по условной функции цены:  $\min I = \varphi^3(0, 2.75) = 1.84375$ .

В случае б) начальная позиция  $(0.75, y(-0)) = (0.75, 2.25)$  системы принадлежит области  $\pi_2$ . Следовательно, в этой позиции происходит скачок из состояния  $y = 2.25$  в состояние  $y = 1.25$  под управлением  $v = -1$ . В позиции  $(0, 1.25) \in \pi_1$  происходит еще один скачок под управлением  $v = -1$  в состояние  $y = 0.25$ . Позиция  $(0, 0.25) \in \pi_0$ , следовательно, состояние  $y = 0.25$  система сохраняет до конечного момента времени. Оптимальная траектория изо-

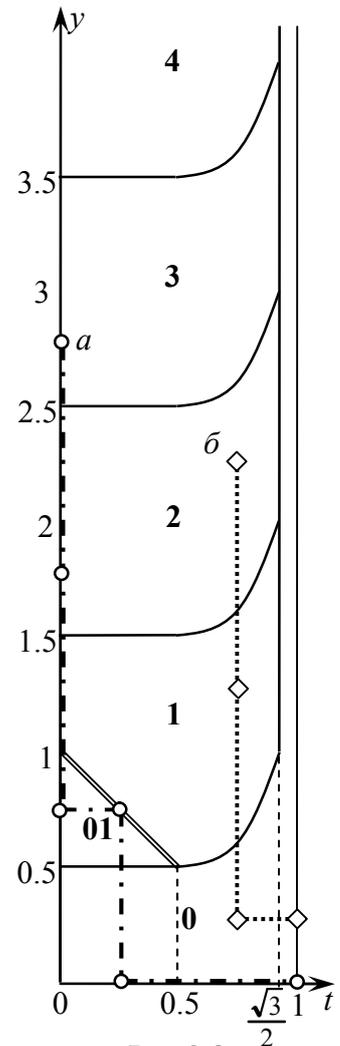


Рис.2.8

бражена на рис.2.8 пунктирной линией  $\bar{b}$ . Минимальное значение функционала находим по условной функции цены:  $\min I = \varphi^2(0, 2.25) = 0.375$ .

**Пример 2.2.** Даны модель САТ и функционал

$$y(t) = y(t-0) + v(t),$$

$$v(t) \in [-y(t-0), +\infty),$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} y^2(t) dt + \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \left\{ \lambda + \frac{1}{2} v^2(\tau) \right\} + \frac{1}{2} [y(1) - 1]^2,$$

где  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y \geq 0$ ,  $\lambda = 0.02$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y(\cdot))$  – множество точек разрыва функции  $y(\cdot)$ . Требуется найти оптимальное управление с обратной связью, а также оптимальные траектории с начальными условиями: а)  $y(-0) = 2$ ; б)  $y(0.25-0) = 0.65$ ; в)  $y(0.3-0) = 0.9$ ; г)  $y(0.75-0) = 1.6$ .

По сравнению с общей постановкой задачи (1.1),(1.2),(1.5), имеем:  $T = [0, 1]$ ,  $Y = \mathbb{R}_+$  (здесь и далее  $\mathbb{R}_+$  – множество неотрицательных действительных чисел),  $V(t, y) = [-y, +\infty)$ ,  $g(t, y, v) = y + v$ ,  $g^0(t, y, v) = \lambda + 0.5v^2$ ,  $f(t, y) = 0.5y^2$ ,  $F(y) = 0.5(y-1)^2$ . Нейтральное значение управления совпадает с нулевым, т.е.  $o = 0$ . Смысл задачи: найти кусочно-постоянную функцию, минимизирующую функционал  $I$ . Чтобы минимизировать интегральную часть функционала, нужно уменьшить абсолютное значение  $y(t)$ . Поскольку затраты на переключение состояния не зависят от времени, то скачок лучше делать как можно раньше. В конечный момент времени нужно уменьшить отклонение  $y(1)$  от единицы. Для этого, возможно, понадобится дополнительное переключение. Значит, типовая оптимальная траектория будет иметь разрывы в начальный и конечный моменты времени. Заметим, что затраты на переключение состояния зависят от квадрата управления ( $v^2$ ). Поэтому один большой скачок под воздействием управления  $2v$  может оказаться хуже по затратам, чем два маленьких скачка под управлением  $v$ . Это означает, что у оптимального процесса в начальный и конечный моменты времени могут быть мгновенные многократные переключения.

Будем синтезировать оптимальное позиционное управление, применяя предлагаемый алгоритм (см. разд.1.4). Поскольку решается задача со свободным правым концом траектории, то  $\Pi = \pi^0 = \pi^1 = \dots$ , где  $\Pi = T \times Y = [0, 1] \times \mathbb{R}_+$  – пространство позиций.

**Шаг 0.** На области  $\pi^0$  интегрируем дифференциальное уравнение (1.54) с терминальным условием (1.55)

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_0(t,y) + \frac{1}{2}y^2 = 0, \quad \varphi_0(1,y) = \frac{1}{2}(y-1)^2.$$

Получаем  $\varphi_0(t,y) = 0.5(2-t)y^2 - y + 0.5$ . Следовательно,  $\varphi^0(t,y) = \varphi_0(t,y)$  и  $v^0(t,y) = 0$ .

Шаг 1<sup>1</sup>. На области  $\pi^1$  находим образующую  $\varphi_1(t,y)$  по формуле (1.56) при  $k=1$

$$\varphi_1(t,y) = \min_{v \in [-y, +\infty)} \left[ \frac{2-t}{2}(y+v)^2 - (y+v) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}v^2 \right] = \frac{2-t}{2(3-t)}y^2 - \frac{1}{3-t}y + \frac{2-t}{2(3-t)} + \frac{1}{8}$$

и позиционное управление (1.57)

$$v_1(t,y) = \frac{1-(2-t)y}{3-t}.$$

Решая систему неравенств (1.58)

$$\begin{cases} \frac{2-t}{2(3-t)}y^2 - \frac{1}{3-t}y + \frac{2-t}{2(3-t)} + \frac{1}{8} < \frac{2-t}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}\left(y + \frac{1-(2-t)y}{3-t}\right)^2 \leq \frac{1}{2}y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(2-t)y-1| > 0.5\sqrt{3-t}, \\ y \geq \frac{1}{2-t}, \end{cases}$$

определяем область  $\pi_1$  при  $t < 1$ . Подставляя  $t=1$  в первое неравенство системы, имеем  $|y-1| > 0.5\sqrt{2}$ , а второе неравенство при  $t=1$  не учитываем. Следовательно, при  $t=1$  множество  $\pi_1$  состоит из двух промежутков  $[0, 1-0.5\sqrt{2})$  и  $(1+0.5\sqrt{2}, +\infty)$ , а при  $0 \leq t < 1$  представляет собой область  $y > (1+0.5\sqrt{3-t})/(2-t)$ . На рис.2.9 множество  $\pi_1$  отмечено полужирной цифрой **1**, а промежутки на прямой  $t=1$  изображены двойной линией.

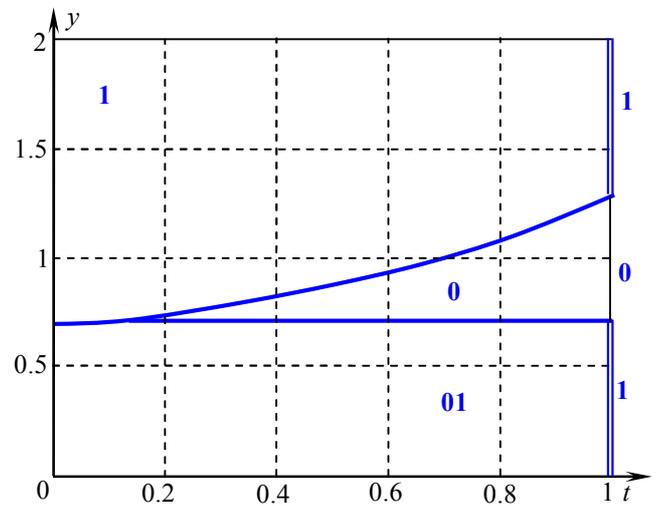


Рис.2.9

Шаг 2<sup>1</sup>. Часть левой границы  $\partial\pi_1$  множества  $\pi_1$  принадлежит прямой  $t=0$  и не порождает области  $\pi_{01}$ . Другая часть – это промежуток прямой  $t=1$  с ординатами  $y < 1-0.5\sqrt{2}$ . Эта часть границы не совпадает с осью ординат – левой границей пространства позиций  $\Pi$ . Поэтому, интегрируя уравнение (1.59) с терминальным условием (1.60)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{01}(t, y) + \frac{1}{2} y^2 = 0, \quad \varphi_{01}(1-0, y) = \varphi_1(1, y) \text{ при } y < 1 - 0.5\sqrt{2},$$

получаем  $\varphi_{01}(t, y) = 0.5(1.5 - t)y^2 - 0.5y + 0.375$ . Область  $\pi_{01}$  позиций, предшествующих  $\partial\pi_1$ , представляет собой полосу, отмеченную на рис.2.9 цифрами **01**.

Шаг 3<sup>1</sup>. Составляем условную функцию цены (2.54)

$$\varphi^1(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - t)y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}, (t, y) \in \pi_{01}, \\ \frac{2-t}{2(3-t)}y^2 - \frac{1}{3-t}y + \frac{2-t}{2(3-t)} + \frac{1}{8}, (t, y) \in \pi_1, \\ \frac{2-t}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}, (t, y) \in \pi^1 \setminus (\pi_{01} \cup \pi_1) \end{cases}$$

и условную функцию управления

$$v^1(t, y) = \begin{cases} 0, (t, y) \notin \pi_1, \\ \frac{1 - (2-t)y}{3-t}, (t, y) \in \pi_1. \end{cases}$$

Следующие шаги алгоритма синтеза выполняются численно, поскольку аналитическое решение систем неравенств затруднительно. Для приближенного решения множество допустимых состояний  $y$  было ограничено промежутком  $Y = [0, 2]$ , т.е.  $\Pi = [0, 1] \times [0, 2]$ . Последовательное построение условных функций цены  $\varphi^1, \dots, \varphi^{10}$  показано на рис.2.10–2.15. Можно проследить за изменением областей определения  $\pi_0, \pi_1, \pi_{01}, \pi_2, \pi_{02}, \dots$ , образующих функции цены с ростом допустимого числа переключений. Эти области обозначены полужирными цифрами **0, 1, 01, 2, 02, ...** соответственно. После шага 10, когда построена функция  $\varphi^{10}$ , состав образующих и разбиение пространства  $\Pi$  (см. рис.2.18) уже не меняет-

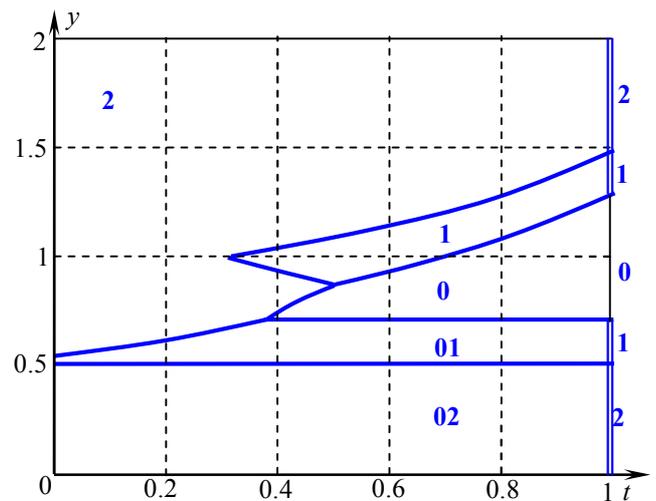


Рис.2.10

ся. Функции  $\varphi^{11}, \varphi^{12}, \dots$  совпадают с функцией  $\varphi^{10}$  на выбранном ограниченном множестве позиций  $\Pi = [0,1] \times [0,2]$ . Поскольку улучшение функции  $\varphi^{10}$  не происходит, синтез на этом заканчивается.

Расчеты проводились на сетке с шагом  $\Delta t = 0.02$  по времени и  $\Delta y = 0.02$  по состоянию, т.е.  $N = 50$  и  $M = 100$ , а количество узлов сетки  $(N + 1)(M + 1) = 5151$ . Время работы 2 минуты и 23 секунды.

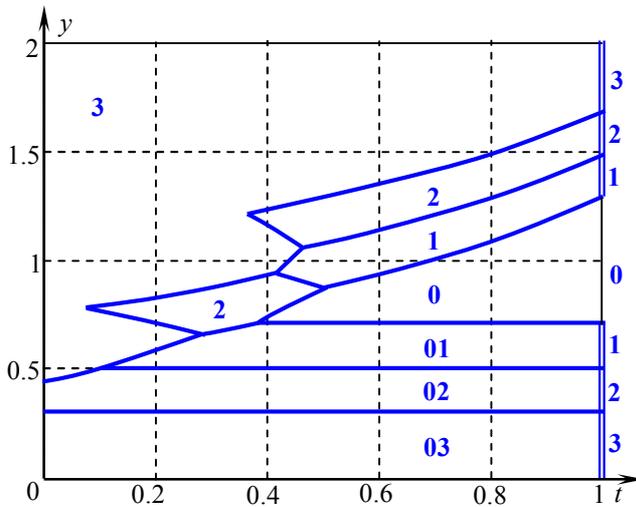


Рис.2.11

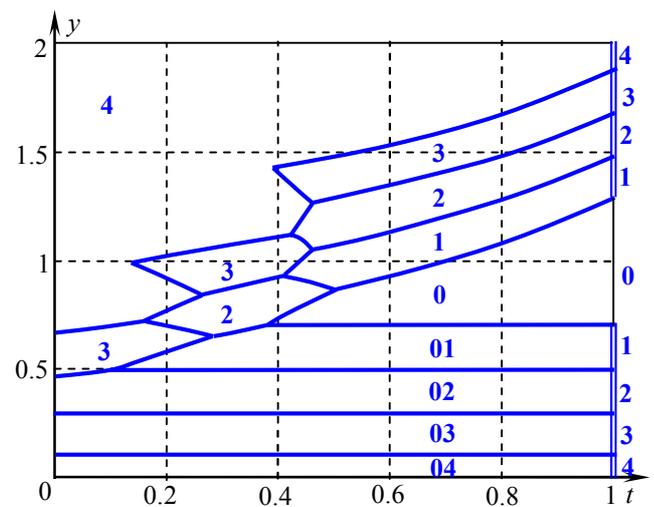


Рис.2.12

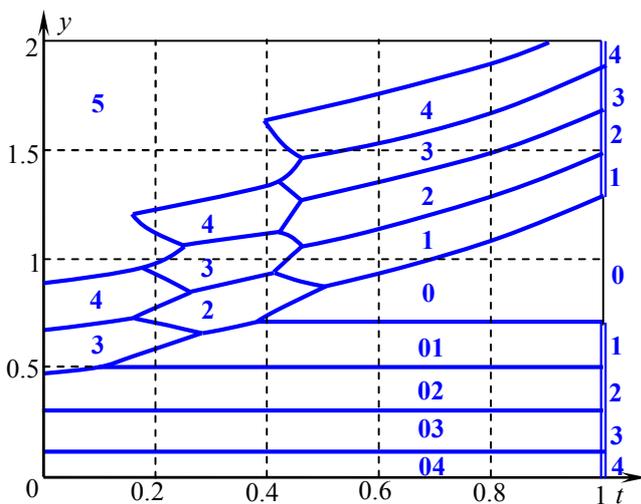


Рис.2.13

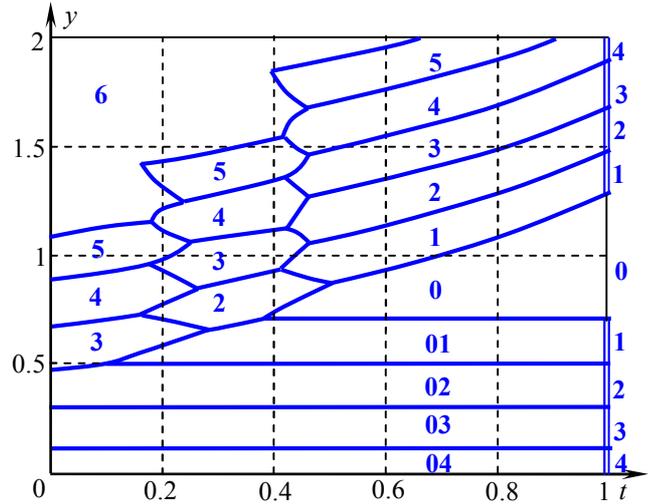


Рис.2.14

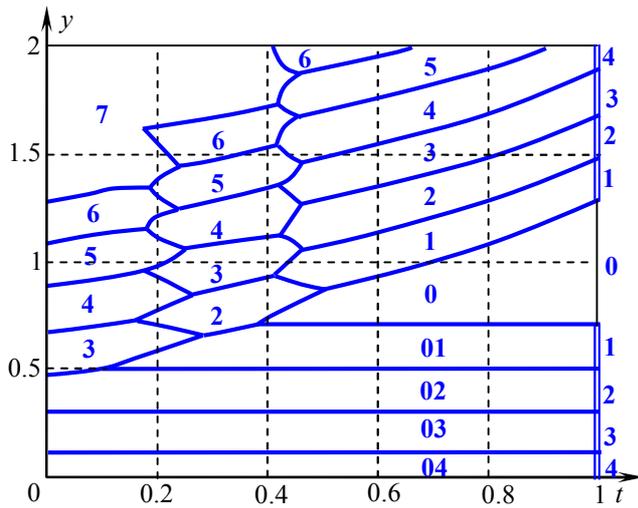


Рис.2.15

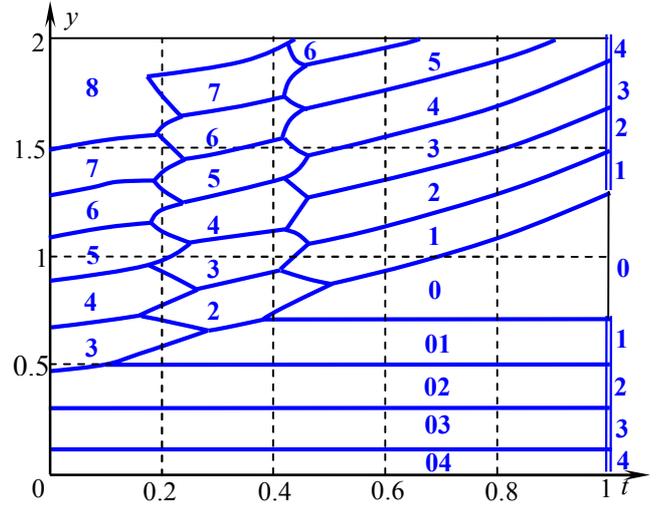


Рис.2.16

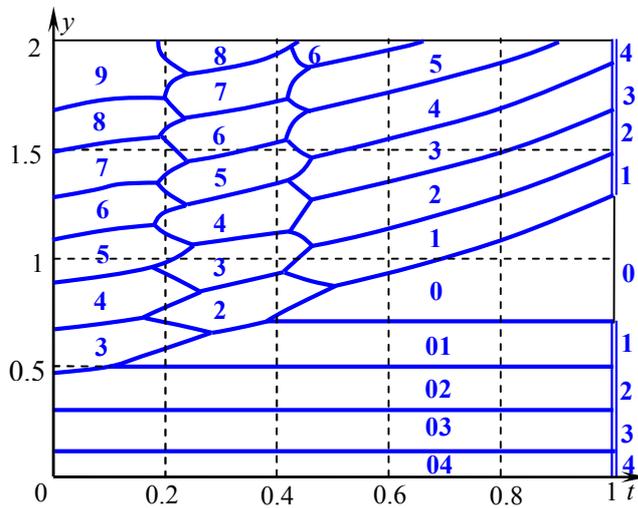


Рис.2.17

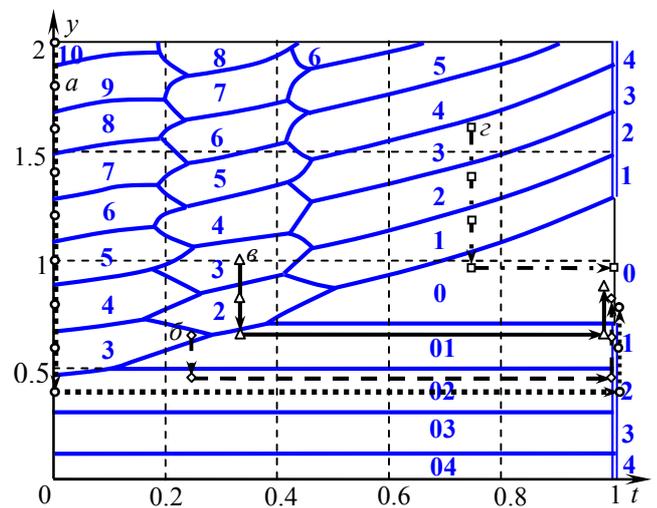


Рис.2.18

На рис.2.18 изображены оптимальные траектории для начальных условий:

а)  $y(-0) = 2$  – пунктирная линия с кружками, которыми отмечены последовательные состояния системы:  $(0;2) \rightarrow (0;1.8) \rightarrow (0;1.6) \rightarrow (0;1.4) \rightarrow (0;1.2) \rightarrow (0;1) \rightarrow (0;0.8) \rightarrow (0;0.6) \rightarrow (0;0.4) \rightarrow (1;0.4) \rightarrow (1;0.6) \rightarrow (1;0.8)$ . Траектория имеет 8 скачков в начальный момент времени (при  $t = 0$ ) и два скачка – в конечный момент времени (при  $t = 1$ ). Минимальное значение функционала равно 0.5;

б)  $y(0.25 - 0) = 0.65$  – штриховая линия с ромбами:  $(0.25;0.65) \rightarrow (0.25;0.46) \rightarrow (1;0.46) \rightarrow (1;0.64) \rightarrow (1;0.82)$ . Траектория имеет один скачок в начале (при  $t = 0.25$ ) и два скачка в конце (при  $t = 1$ ). Минимальное значение функционала равно 0.20521;

в)  $y(0.3 - 0) = 0.9$  – сплошная линия с треугольниками:  $(0.3; 0.9) \rightarrow (0.3; 0.72) \rightarrow (0.3; 0.56) \rightarrow (1; 0.56) \rightarrow (1; 0.78)$ . Траектория имеет два скачка в начале (при  $t = 0.25$ ) и один скачок в конце (при  $t = 1$ ). Минимальное значение функционала равно 0.24716;

г)  $y(0.75 - 0) = 1.6$  – штрихпунктирная линия с квадратами:  $(0.75; 1.6) \rightarrow (0.75; 1.38) \rightarrow (0.75; 1.18) \rightarrow (0.75; 0.96) \rightarrow (1; 0.96)$ . Траектория имеет три скачка в начале (при  $t = 0.75$ ). Минимальное значение функционала равно 0.24716.

Отметим, что последние три траектории имеют одинаковое количество переключений (по три), но выполняются они по-разному. К сожалению, по номеру условной функции цены нельзя установить, какая будет последовательность скачков, можно только судить об их количестве. Только применяя синтезированные условные управления, последовательно выясняем, когда система совершает скачки, а когда сохраняет свое состояние.

Решение примера с помощью второго алгоритма с тем же шагом  $\Delta t = 0.02$  по времени и  $\Delta y = 0.02$  по состоянию не представляется возможным. Действительно, при такой сетке  $N = 50$  и  $M = 100$ . Чтобы не "потерять" оптимальную траекторию, в случае "а" нужно задать количество переключений не менее  $K = 10$ . Тогда количество памяти, требуемой для хранения значений образующих функции цены, будет, согласно (2.54), равно

$$C_{K+N+1}^K (N+1)M^m = \frac{61!}{10!50!} \cdot 51 \cdot 100.$$

Приближенная оценка (2.55) дает величину

$$C_{K+N+1}^K (N+1)M^m \sim \frac{4^N}{\sqrt{2\pi N}} (N+1)M^m = \frac{4^{50}}{\sqrt{100\pi}} \cdot 51 \cdot 100 \approx 3.65 \cdot 10^{32},$$

что недоступно для имеющейся компьютерной техники.

Однако если учесть, что у оптимальной траектории всего лишь два тактовых момента – начальный  $\tau_0$  и конечный  $\tau_1$ , то можно взять  $N = 1$ . При этом предположении задача "а" решалась вторым алгоритмом. Были найдены оптимальная траектория и минимальное значение функционала, которые совпали, разумеется, с результатами, полученными первым алгоритмом. Время, затраченное на решение задачи при использовании второго алгоритма оказалось в 60 раз меньше, чем при использовании первого. Ясно, что такой хороший результат был получен, опираясь на уже известное решение. Поэтому он не может служить объективной характеристикой второго алгоритма, но его можно использовать для проверки работы первого алгоритма, что и было сделано.

## 2.6. ВЫВОДЫ

1. Исследованы пределы последовательностей кусочно-постоянных функций, введено понятие точки многозначного разрыва. Определены кусочно-постоянные траектории дискретных САТ с мгновенными многократными переключениями. Показана замкнутость класса таких траекторий при фиксированном максимальном количестве скачков. Выяснено отличие этих траекторий от траекторий дискретно-непрерывных систем [71] при импульсных воздействиях.

2. Поставлены задачи оптимального программного и оптимального позиционного управления дискретными САТ при мгновенных многократных переключениях, кусочно-постоянные траектории которых имеют произвольное конечное или заданное максимальное количество скачков. Качество управления оценивается функционалом, учитывающим затраты на переключения системы. Обосновано существование решения поставленных задач в случае заданного максимального числа переключений.

3. Сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности процесса управления и оптимальности позиционного управления при мгновенных многократных переключениях. Понятия условной функции цены и условного позиционного управления, введенные в главе 1, обобщаются на случай мгновенных многократных переключений. На основе достаточных условий выведены уравнения для нахождения этих функций.

4. Показано, что алгоритм синтеза оптимального позиционного управления, разработанный в главе 1 для однократных переключений, применим и в случае мгновенных многократных переключений. Разработана модификация алгоритма [79] субоптимального синтеза САТ, описываемых рекуррентными уравнениями. Проведено сравнение этих двух алгоритмов.

5. Указаны численные методы, необходимые для программной реализации алгоритма субоптимального синтеза. Проведен анализ возникающих при этом погрешностей. Получена оценка объема требуемой компьютерной памяти. Разработана программа численного решения модельной задачи синтеза субоптимальной САТ с мгновенными многократными переключениями.

6. Эффективность применения алгоритма синтеза оптимальной САТ, разработанного в главе 1, демонстрируется на примере синтеза модельной САТ с мгновенными многократными переключениями. Эта же задача при существенных упрощающих предположениях решена алгоритмом субоптимального синтеза. Найденные двумя алгоритмами оптимальные траектории совпадают.

### **3. ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫВОД СПУТНИКА НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ КОЛИЧЕСТВЕ ВКЛЮЧЕНИЙ ДВИГАТЕЛЯ**

Рассматривается задача оптимального вывода спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя. Она формулируется как задача оптимального управления динамической системой с автоматной частью. Применение необходимых условий оптимальности сводит эту задачу к конечномерной минимизации. Учитывая реализуемую точность исполнения команд включения и выключения маршевого двигателя, решаемая задача условной минимизации становится дискретной. Исследуются различные схемы полета, удовлетворяющие ограничению: не более девяти включений маршевого двигателя в течение суток. Выполнена оптимизация каждой схемы, найдены минимальный расход топлива, оптимальные моменты включения и выключения двигателя, рассчитаны параметры переходных орбит, отклонения конечной орбиты от геостационарной. Проведен сравнительный анализ полученных результатов со штатной схемой, применяемой на практике.

#### **3.1. СХЕМА ВЫВОДА СПУТНИКА НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗГОННОГО БЛОКА "БРИЗ-М"**

Вывод искусственного спутника Земли (ИСЗ) на геостационарную орбиту (ГСО) является важной практической задачей. ГСО – это круговая, экваториальная орбита с периодом обращения 24 ч и движением спутника в восточном направлении. Эта орбита обладает существенными преимуществами, поскольку ИСЗ остается неподвижным относительно поверхности планеты, при этом упрощается наведение на спутник антенн земных станций, исключаются перерывы радиосвязи и др.

Выведение космических аппаратов (КА) на ГСО осуществляется, например, разгонным блоком "Бриз-М", разработанным в Государственном космическом научно-производственном центре им. М. В. Хруничева, в составе ракеты-носителя "Протон-М". Штатное выведение на ГСО выполняется по четырехимпульсной схеме [48]. После отделения головного блока (разгонного блока и КА) от ракеты-носителя запускается маршевый двигатель разгонного блока на 354 с для выхода на низкую (опорную) орбиту высотой 160 км. После примерно 52 мин полета по опорной орбите двигатель запускается во второй раз на 972 с. Головной блок при этом переводится на первую переходную орбиту с полуосями 250 и 5000 км. Еще через примерно 124 мин при прохождении перигея проводится третье

включение маршевого двигателя на 967 с. Головной блок выходит на вторую, переходную орбиту с полуосями 400 и 35786 км. После сброса дополнительного топливного бака примерно через 306 мин выполняется четвертое включение маршевого двигателя в окрестности апоцентра на 720 с, которое выводит головной блок на ГСО. Радиус орбиты составляет примерно 42000 км. Затем производится отделение КА от центрального блока "Бриз-М". Эта схема вывода спутника на ГСО применялась при первом запуске комплекса "Протон-М" – "Бриз-М", который состоялся 7 апреля 2001 г.

Рассматривается задача перевода ИСЗ с низкой круговой орбиты на ГСО. Задача перевода КА с одной орбиты на другую с наименьшими затратами топлива была поставлена и решена в [36,37]. Минимизирующая последовательность состоит из включений двигателя с максимальной тягой в перицентре или в апоцентре. Чем короче промежутки работы двигателя при каждом включении, тем больше таких включений необходимо сделать для вывода спутника на заданную высоту. Однако общие затраты топлива при этом уменьшаются. В пределе получаем бесконечную последовательность импульсных включений (на бесконечно малое время) двигателя с максимальной тягой, при этом общее время перехода на заданную орбиту неограниченно возрастает. Разумеется, что это управление, практически нереализуемое, является абстрактным, идеальным решением, показывающим предельные возможности (экономии топлива) данной математической модели.

Чтобы исключить минимизирующие последовательности, было предложено учитывать неэффективные затраты топлива [27,75]. Часть топлива используется турбонасосным агрегатом, который обеспечивает работу маршевого двигателя. Каждое включение реактивного двигателя от его запуска до достижения максимальной тяги представляет собой немгновенный переходный процесс и сопровождается расходом топлива. При выключении двигательной установки (ДУ) часть не вступивших в реакцию компонентов топлива теряется. Добавляя в критерий качества соответствующие штрафные слагаемые за включение (и выключение) двигателя, получаем задачу, в которой определяется оптимальное (конечное) количество запусков двигателя, а процессы, требующие бесконечного числа включений, отбрасываются как неоптимальные. Такая постановка задачи ближе к практике, чем классический вариант, но и она не в полной мере учитывает технические особенности. Дело в том, что количество запусков любого реактивного двигателя ограничено. Например, конструкция разгонного блока "Бриз-М" позволяет выполнить до 10 включений маршевого двигателя в ходе активного полета (в течение 24 ч). Это ограничение необходимо учитывать при решении оптимизационной задачи.

Задача вывода спутника на ГСО с минимальным расходом топлива при ограниченном количестве включений двигателя формулируется как задача оптимального управления дина-

мической системой с автоматной частью [22]. Ограничение на количество включений двигателя сводит эту задачу к конечномерной минимизации, т.е. условной минимизации функции нескольких переменных. Важным обстоятельством, которое нужно учитывать при решении, является технически реализуемая точность, с которой выполняются включение и выключение реактивного двигателя, т.е. выдерживается заданная продолжительность активного участка полета. Реализуемая точность исполнения команд является фактически шагом дискретности для автоматной части системы, а задача условной минимизации становится дискретной.

Для описания поведения непрерывной части системы была выбрана простая модель движения тела переменной массы в центральном поле [11] без учета неопределенных факторов, случайных и активных помех [57]. В рамках этой модели рассмотрен перевод КА с опорной орбиты высотой 160 км на ГСО, т.е. первый участок (доразгон) в стандартной схеме не учитывался. Исследованы различные по количеству активных участков схемы вывода на ГСО. Количество включений двигателя при любой схеме не превосходит девяти (еще одно (десятое) допустимое для "Бриз-М" включение используется для доразгона). Выполнена оптимизация каждой схемы, найдены минимальный расход топлива, оптимальные моменты включения и выключения двигателя, рассчитаны параметры переходных орбит, отклонения конечной орбиты от ГСО. Проведен сравнительный анализ полученных результатов со штатной схемой, применяемой на практике.

### 3.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать перевод спутника с опорной орбиты на ГСО. Опорная орбита – это низкая круговая околоземная орбита радиуса  $r_{\text{ОО}} = 6578137$  м, ГСО – высокая круговая орбита радиуса  $r_{\text{ГСО}} = 42164137$  м. Для реализации такого перехода используются переходные эллиптические орбиты. Траектория полета спутника состоит из чередующихся участков активного и пассивного движений. На пассивном участке, когда маршевый двигатель разгонного блока выключен, движение происходит по эллиптической орбите под воздействием гравитационных сил Земли. На активном участке (при включенном двигателе) происходит увеличение скорости движения, что приводит к изменению параметров орбиты. Таким образом, траектория вывода спутника на ГСО состоит из переходных эллиптических орбит пассивных участков, соединенных траекториями активных участков. Требуется найти оптимальную траекторию перехода спутника с опорной орбиты на ГСО с минимальным расходом топлива при ограниченном количестве  $K \leq 9$  включений двигателя.

Рассмотрим математическую модель [75,94] плоского движения КА в гравитационном поле Земли (рис.3.1). На активных участках тяга двигателя направлена вдоль скорости движения, что обеспечивается системой угловой ориентации КА. Уравнения движения в полярных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{v} &= r\omega^2 - \frac{\chi^2}{r^2} + \frac{uv}{m\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}}, \\ \dot{\omega} &= -\frac{2v\omega}{r} + \frac{u\omega}{m\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}}, \\ \dot{m} &= -\mu u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $r$  – полярный радиус;  $\varphi$  – полярный угол (истинная аномалия);  $v$  – радиальная составляющая скорости движения спутника;  $\omega$  – угловая скорость вращения спутника;  $u \in [0, U_{\max}]$  – величина тяги двигателя, ограниченная максимальным значением  $U_{\max} = 20\,000$  Н;  $m$  – масса спутника (с топливом);  $\chi^2 = GM = 3.986748 \cdot 10^{12}$  м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup> – положительная постоянная,  $M$  – масса Земли;  $G$  – гравитационная постоянная;  $\mu = 3.07 \cdot 10^{-4}$  с/м – коэффициент, обусловленный техническими характеристиками двигателя;  $\mu U_{\max} = 6.14$  кг/с – максимальный секундный расход топлива.

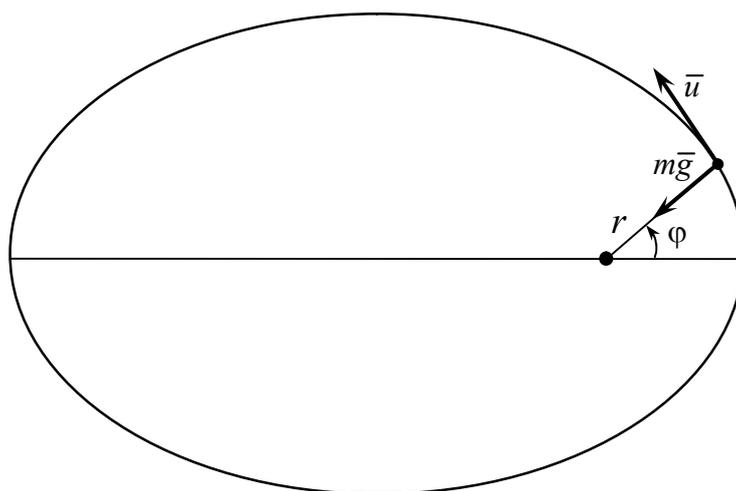


Рис.3.1.

В начальный момент времени  $t_0 = 0$  состояние системы задано:

$$r(t_0) = 6\,578\,137 \text{ м}, \quad \varphi(t_0) = 0 \text{ рад}, \quad v(t_0) = 0 \text{ м/с},$$

$$\omega(t_0) = 1.1835 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \quad m(t_0) = 22170 \text{ кг.} \quad (3.2)$$

Время  $t_{\text{ГСО}}$  окончания процесса управления определяется параметрами ГСО

$$r(t_{\text{ГСО}}) = 42\,164\,137 \text{ м}, \quad v(t_{\text{ГСО}}) = 0 \text{ м/с}, \quad \omega(t_{\text{ГСО}}) = 2.306 \cdot 10^{-8} \text{ рад/с.} \quad (3.3)$$

Качество управления характеризуется массой топлива, израсходованного при выводе спутника на ГСО

$$I = \int_{t_0}^{t_{\text{ГСО}}} \mu u(t) dt. \quad (3.4)$$

Задача минимизации функционала (3.4) при условиях (3.1)–(3.3) является задачей оптимального управления [79].

Для учета количества включений двигателя предполагаем, что тяга задается соотношением

$$u(t) = U_{\max} y(t), \quad (3.5)$$

где  $y(t)$  – кусочно-постоянная на  $[t_0, t_{\text{ГСО}}]$  функция, принимающая значения

$$y(t) \in [0, 1]. \quad (3.6)$$

Эти значения определяют состояние двигателя: либо  $y(t) > 0$  – двигатель включен (при  $y(t) = 1$  тяга максимальная), либо  $y(t) = 0$  – двигатель выключен. Точки разрыва функции  $y(\cdot)$  соответствуют изменению состояния двигательной установки. Множество точек разрыва функции  $y(\cdot)$  обозначим через  $\mathcal{F}$ , а их количество – через  $|\mathcal{F}|$ . Ограничение на количество активных участков задается неравенством

$$|\mathcal{F}| \leq 2K, \quad (3.7)$$

где  $K$  – максимальное допустимое число запусков реактивного двигателя. Для используемой модели маршевого двигателя  $K = 9$ . Функция  $y(\cdot)$  играет в модели (3.1)–(3.6) роль управления.

Требуется найти оптимальный процесс вывода спутника на ГСО, минимизирующий расход топлива (3.4) при ограниченном количестве включений двигателя. Заметим, что соотношения (3.5)–(3.7) отличают рассматриваемую задачу от классической задачи (3.1)–(3.4) оптимального управления. Эти соотношения характерны для дискретной системы автоматного типа [21]. В целом, задачу (3.1)–(3.7) следует отнести к задачам управления динамическими системами с автоматной частью [16,31].

### 3.3. ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Используем необходимые условия оптимальности динамических систем с автоматной частью (разд.1.6). Составим гамильтониан

$$H = \psi_1 v + \psi_2 \omega + \psi_3 \left( r\omega^2 - \frac{\chi^2}{r^2} + \frac{uv}{m\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}} \right) + \psi_4 \left( -\frac{2v\omega}{r} + \frac{u\omega}{m\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}} \right) - \psi_5 \mu u - \mu u, \quad (3.8)$$

где  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$  – вспомогательные переменные, удовлетворяющие сопряженной системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\psi_3 \omega^2 - 2\psi_3 \frac{\chi^2}{r^3} - 2\psi_4 \frac{v\omega}{r^2} + \frac{ur\omega^2 v \psi_3 + ur\omega^3 \psi_4}{m(v^2 + r^2\omega^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= -\psi_1 + \frac{2\omega\psi_4}{r} - \frac{ur^2\omega^2\psi_3 - uv\omega\psi_4}{m(v^2 + r^2\omega^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \dot{\psi}_4 &= -\psi_2 - 2\psi_3 r\omega + \frac{uv\omega r^2\psi_3 - uv^2\psi_4}{m(v^2 + r^2\omega^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2v\psi_4}{r}, \\ \dot{\psi}_5 &= \frac{uv\psi_3 + u\omega\psi_4}{m^2\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Учитывая терминальные условия (3.3), запишем для гамильтониана (3.8) и вспомогательных переменных (3.9) дополнительные соотношения в конечный момент времени

$$H|_{t_{\text{ГСО}}} = 0, \quad \psi_2(t_{\text{ГСО}}) = 0, \quad \psi_5(t_{\text{ГСО}}) = 0.$$

Обозначим

$$\hbar = \frac{v\psi_3 + \omega\psi_4}{\mu m \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}} - \psi_5, \quad \tilde{\lambda} = \psi_1 v + \psi_2 \omega + \psi_3 \left( r\omega^2 - \frac{\chi^2}{r^2} \right) + \psi_4 \left( -\frac{2v\omega}{r} \right),$$

тогда, учитывая (3.5), гамильтониан будет иметь вид

$$H = \mu[\hbar(t) - 1]u + \tilde{\lambda}(t) \quad (3.10)$$

или, учитывая (3.5)

$$H = U_{\max} \mu[\hbar(t) - 1]y + \tilde{\lambda}(t). \quad (3.11)$$

Сравнивая функционал (3.4) с (1.79), заключаем, что в рассматриваемой задаче функция  $g^+$  тождественно равна нулю. Подставляя  $g^+ \equiv 0$  в условие (1.84), заключаем, что вспомо-

гательная функция  $\psi(\cdot)$  не имеет разрывов, т.е. она абсолютно непрерывна на  $[t_0, t_{\text{ГСО}}]$ . Отсюда следует, что функция  $\hbar$  непрерывна на том же промежутке. Преобразуем условие (1.81) для гамильтониана (3.11)

$$U_{\max} \mu[\hbar(\tau) - 1]y(\tau) + \lambda(\tau) - U_{\max} \mu[\hbar(\tau) - 1]y(\tau - 0) - \lambda(\tau) = 0 \Leftrightarrow \\ U_{\max} \mu[\hbar(\tau) - 1] \cdot [y(\tau) - y(\tau - 0)] = 0.$$

Здесь  $y(\tau) \neq y(\tau - 0)$ , так как  $\tau$  – точка разрыва функции  $y(\cdot)$ . Учитывая положительность параметров  $U_{\max}$ ,  $\mu$  приходим к равенству

$$\hbar(\tau) = 1. \quad (3.12)$$

Пусть  $\tau_{k-1}$ ,  $\tau_k$  – две последовательные точки разрыва функции  $y(\cdot)$ . Преобразуем неравенство (1.86) для гамильтониана (3.11)

$$- \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} H_y(\psi(t), t, x(t), y(t)) dt \cdot \delta y(\tau_{k-1}) \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [\hbar(t) - 1] dt \cdot \delta y(\tau_{k-1}) \leq 0. \quad (3.13)$$

В силу условия (3.12) непрерывная функция  $\hbar(t) - 1$  сохраняет знак на промежутке  $(\tau_{k-1}, \tau_k)$ . Поэтому неравенство (3.13) не может выполняться для вариаций  $\delta y(\tau_{k-1})$  разных знаков. Значит, у оптимального процесса таких вариаций нет. Другими словами, либо  $y(\tau_{k-1}) = 0$ , тогда допустимы только неотрицательные вариации  $\delta y(\tau_{k-1}) \geq 0$ , а из (3.13) следует, что  $\hbar(t) < 1$ ; либо  $y(\tau_{k-1}) = 1$ , тогда  $\delta y(\tau_{k-1}) \leq 0$ , а из (3.13) следует, что  $\hbar(t) \geq 1$ . Таким образом, оптимальная автоматная часть имеет вид

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \hbar(t) \geq 1, \\ 0, & \hbar(t) < 1. \end{cases}$$

Применение принципа максимума [74] приводит к тем же выводам. Действительно, найдем наибольшее значение гамильтониана (3.10) по переменной  $u$  на промежутке  $[0, U_{\max}]$ . Учитывая линейность гамильтониана (3.10) по переменной  $u$ , заключаем, что гамильтониан достигает своего наибольшего значения на концах промежутка

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max}, & \hbar(t) \geq 1, \\ 0, & \hbar(t) < 1. \end{cases}$$

Значит, оптимальное движение КА состоит из чередующихся участков активного и пассивного движений, т.е. двигатель включается с максимальной тягой на промежутках, где  $k(t) \geq 1$  (активный участок), и выключается при  $k(t) < 1$  (пассивный участок). В [37] показано, что активные участки траектории находятся в окрестности перицентра и апоцентра. На

этих участках двигатель включается с максимальной тягой, в остальное время двигатель выключен.

Таким образом, применение необходимых условий оптимальности сводит задачу (3.1)–(3.7) оптимального управления динамической системой с автоматной частью к задаче минимизации функции не более чем  $2K - 1$  переменных и может быть решена соответствующими методами.

В заключение заметим, что применение необходимых условий оптимальности ЛДС и принципа максимума приводит к одинаковым выводам. Но классы, в которых ищутся оптимальные процессы, разные. Оптимальная траектория  $y(\cdot)$  является кусочно-постоянной, а оптимальное управление  $u(\cdot)$  – кусочно-непрерывным (или даже просто измеримым). Другими словами, принцип максимума эффективнее, так как позволяет выделить оптимальное управление в более широком классе.

### 3.4. АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Уравнения движения (3.1) необходимо интегрировать только на активных участках (при  $u \neq 0$ ). Предполагаем, что во время пассивного полета спутника, когда его реактивные двигатели выключены (при  $u = 0$ ), движение происходит в центральном поле только под воздействием силы притяжения Земли. В этом случае орбита имеет форму эллипса

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (3.14)$$

где  $p$  – фокальный параметр,  $e$  – эксцентриситет,  $\theta = \varphi - \varphi_{\Pi}$  – истинная аномалия (угол, отсчитываемый от направления  $\varphi_{\Pi}$  на перицентр в сторону движения).

Для формирования траектории движения будем использовать следующую процедуру. В результате интегрирования системы (3.1) получаем траекторию активного участка, по которой аппарат переходит с одной (старой) эллиптической траектории (3.14) на другую (новую). На рис.3.2 активный участок в окрестности перицентра обозначен полужирной стрелкой 1–2. Он соединяет старую 1 и новую 2 эллиптические орбиты. Пусть  $\Delta T$  – продолжительность активного участка (время работы двигателя);  $p_1, e_1$  – фокальный параметр и эксцентриситет старой орбиты;  $p_2, e_2$  – новой.

Чтобы уменьшить угол  $\varphi_{\Pi}$  поворота оси новой эллиптической орбиты, активный участок заданной продолжительности  $\Delta T$  будем располагать "симметрично" относительно перицентра старой орбиты. Обозначим через  $\Delta t = -0.5 \Delta T$  момент включения двигателя (за время  $\Delta T / 2$  до прохождения перицентра).

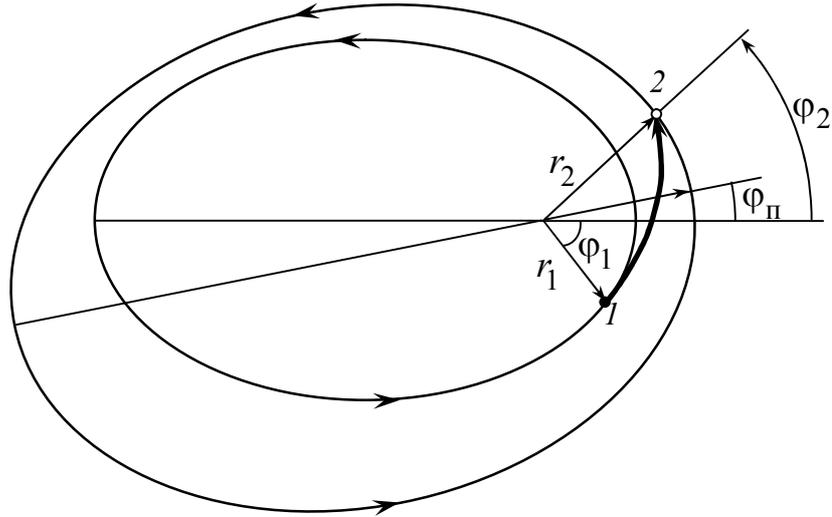


Рис.3.2

На первом шаге по заданным параметрам  $p_1$ ,  $e_1$  эллиптической орбиты ( $I$ ) и продолжительности  $\Delta T$  времени работы двигателя находим состояние  $r_1$ ,  $v_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $m_1$  спутника в начале активного участка (в точке  $1$  на рис.3.2). Масса  $m_1$  совпадает с массой КА в конце предыдущего активного участка или равна начальной массе аппарата. По заданному времени  $\Delta t$  определяем эксцентрисическую аномалию  $E$  [94]. Для этого нужно решить уравнение

$$\chi \Delta t \sqrt{a_1^3} = E - e_1 \sin E,$$

где  $a_1 = p_1 / (1 - e_1^2)$ ,  $p_1$  и  $e_1$  – большая полуось, фокальный параметр и эксцентриситет эллипса  $I$  соответственно. Применяем метод простых итераций

$$E_{i+1} = \chi \Delta t \sqrt{a_1^3} + e_1 \sin E_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.15)$$

с нулевым начальным приближением  $E_0 = 0$ . Итерации (3.15) сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $e_1$ ,  $0 \leq e_1 < 1$ . Поэтому для достижения хорошей точности достаточно выполнить 5–7 итераций. Получив  $E \approx E_N$ , находим состояние КА в начале активного участка

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1(1 - e_1 \cos E), & \varphi_1 &= E + 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E}, \\ \omega_1 &= \frac{\chi \sqrt{p_1}}{r_1^2}, & v_1 &= \frac{r_1^2 \omega_1 e_1 \sin \varphi_1}{p}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $\beta = e_1 / (1 + \sqrt{1 - e_1^2})$ . Для активного участка в окрестности апоцентра в (3.15) следует положить  $\Delta t = (T_1 - \Delta T) / 2$ , где  $T_1 = 2\pi\sqrt{a_1^3} / \chi$  – период обращения на орбите 1.

На втором шаге выполняем интегрирование уравнений (3.1) с начальными условиями (3.16) в момент времени  $t_1 = \Delta t$  (в точке 1 на рис.3.2). В конце активного участка (в точке 2 на рис.3.2) в момент времени  $t_2 = \Delta t + \Delta T$  получаем состояние  $r_2, v_2, \varphi_2, \omega_2, m_2$ .

На третьем шаге по заданному состоянию  $r_2, v_2, \varphi_2, \omega_2$  в конце активного участка определяем параметры новой эллиптической орбиты. Вычисляем интегралы площадей  $c$  и энергии  $h$

$$c = r_2^2 \omega_2, \quad h = \frac{1}{2} \left( v_2^2 + r_2^2 \omega_2^2 - \frac{2\chi^2}{r_2} \right),$$

затем фокальный параметр  $p_2$ , большую полуось  $a_2$ , эксцентриситет  $e_2$  и период обращения  $T_2$

$$p_2 = \frac{c^2}{\chi^2}, \quad a_2 = -\frac{\chi^2}{2h}, \quad e_2 = \sqrt{1 - \frac{p_2}{a_2}}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\chi} \sqrt{a_2^3}.$$

Время  $t_2 - t_{\Pi}$  перелета по новой эллиптической орбите от перицентра до положения 2 находим по формуле

$$t_2 - t_{\Pi} = \frac{2\sqrt{a_2^3}}{\chi} \arctg \left( \sqrt{\frac{1-e_2}{1+e_2}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e_2 a_2 \sqrt{p_2} \sin \theta}{\chi(1+e_2 \cos \theta)}, \quad (3.17)$$

где  $\theta = \varphi_2 - \varphi_{\Pi}$  – истинная аномалия точки 2

$$\theta = \arctg \frac{p_2 v_2}{r_2 \omega_2 (p_2 - r_2)}.$$

Отклонение  $\varphi_{\Pi}$  оси новой орбиты от оси старой орбиты определяем согласно [94]:  $\varphi_{\Pi} = \varphi_2 - \theta$ . Для активного участка в окрестности апогея в формулу (3.17) нужно подставить угол  $\theta' = 2\pi - \theta$ .

На этом процедура перевода спутника с одной эллиптической орбиты на другую при одном активном участке закончена. Эта трехшаговая процедура повторяется для каждого активного участка.

Отметим важные обстоятельства, влияющие на методику численного решения. Во-первых, схема полета определяется количеством и продолжительностью активных участков. Активный участок в окрестности перицентра (перицентрический участок) увеличивает экс-

центриситет орбиты, т.е. большая полуось эллипса растет быстрее, чем малая. Активный участок в окрестности апоцентра (апоцентрический участок), наоборот, уменьшает эксцентриситет, поскольку большая полуось растет медленнее, чем малая. Действительно, согласно уравнениям (3.1) движения на активном участке, коэффициент сжатия  $\kappa = b/a$  эллиптической орбиты следующего пассивного участка удовлетворяет уравнению

$$\dot{\kappa} = \frac{2\kappa u}{m\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}} \left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

В окрестности перицентра полярный радиус  $r \approx b < a$ . Значит,  $\dot{\kappa} < 0$ . Следовательно, коэффициент сжатия  $\kappa$  убывает, а эксцентриситет  $e = \sqrt{1 - \kappa^2}$  растет. В окрестности апоцентра, наоборот, полярный радиус  $r > a$ . Значит,  $\dot{\kappa} > 0$ . Следовательно, коэффициент сжатия  $\kappa$  возрастает, а эксцентриситет убывает. Поэтому вывод на ГСО состоит из последовательности перицентрических и апоцентрических участков.

Будем обозначать схему полета символами  $m+n$ , если КА сначала выполняет  $m$  перицентрических активных участков, а затем –  $n$  апоцентрических. В этом случае сначала обеспечивается поднятие апоцентра на высоту, близкую к ГСО. При этом эксцентриситет сначала увеличивается от нуля ( $e_0 = 0$ ) на опорной (круговой) орбите до максимального значения  $e_m$  на промежуточной орбите после  $m$  перицентрических участков. После  $n$  апоцентрических участков, эксцентриситет уменьшается до нулевого значения ( $e_{m+n} = 0$ ) на ГСО. Таким образом, возможны следующие 36 схем полета:

$$1+1, 2+1, 3+1, \dots, 8+1, 1+2, 2+2, \dots, 7+2, \dots, 1+8, \quad (3.18)$$

поскольку количество активных участков ограничено (не более девяти). Каждую схему в (3.18) приходится исследовать отдельно.

Во-вторых, погрешность исполнения команд включения и отключения маршевого двигателя не может быть бесконечно малой, она ограничена снизу. Будем предполагать, что эти команды выполняются с точностью до секунды. Это предположение означает, что момент включения двигателя и продолжительность его работы выражаются целыми числами. Значит, управление в задаче (3.1)–(3.7) определяется целочисленными параметрами. Тогда и задача минимизации функционала (3.4) становится задачей целочисленной оптимизации. Как правило, задачи минимизации функции целочисленных аргументов оказываются труднее, чем минимизация той же функции действительных аргументов. В исследуемой проблеме это обстоятельство проявилось в полной мере.

Третьим фактором, затрудняющим решение, является наличие в постановке задачи терминальных условий (3.3). Конечно, эти ограничения можно снять, добавляя к минимизируемому функционалу (3.4) штрафные слагаемые

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \mu u(t) dt + \lambda (r_{\text{ГСО}} - a_{m+n})^2 + \lambda (r_{\text{ГСО}} - b_{m+n})^2, \quad (3.19)$$

где  $a_{m+n}$ ,  $b_{m+n}$  – полуоси терминальной эллиптической орбиты, полученной по схеме  $m+n$ , т.е. после  $m$  перицентрических и  $n$  апоцентрических активных участков,  $\lambda$  – коэффициент штрафа,  $\lambda = 10^{-6}$ . Несмотря на малую величину  $\lambda$ , штраф оказывается значительным. Например, отличие полуоси полученной орбиты от радиуса ГСО на 0.1% (абсолютная ошибка – примерно 42 км) приводит к штрафу величиной 1764, что составляет примерно 10% от абсолютного минимума функционала (3.19). Применение штрафных слагаемых приводит к тому, что минимизируемая функция становится исключительно овражной. Любая локальная вариация управления (даже неоптимального), например, изменение продолжительности работы двигателя на 1 с, приводит к резкому увеличению функционала (3.19) за счет штрафных слагаемых. Поэтому создается ошибочное впечатление о локальной оптимальности этого управления. Учитывая это обстоятельство, только на первых шагах минимизации использовался функционал (3.19). Затем, когда значение функционала (3.19) уже нельзя было улучшить локальными вариациями управления, переходили к минимизации функционала (3.4), а терминальные ограничения

$$a_{m+n} = r_{\text{ГСО}}, \quad b_{m+n} = r_{\text{ГСО}} \quad (3.20)$$

обеспечивались следующим образом. При схеме  $m+n$  вывода спутника на ГСО время  $T_m$  работы двигателя на последнем перицентрическом участке (т.е. на участке  $m$ ), а также продолжительность  $T_{m+n}$  последнего апоцентрического участка (т.е. участка  $m+n$ ) выбирались так, чтобы равенства (3.20) выполнялись с минимальной ошибкой. Точно систему уравнений (3.20) решить невозможно, поскольку время работы маршевого двигателя задается с точностью до 1 с, т.е. параметры  $T_m$  и  $T_{m+n}$  целочисленные.

Учитывая перечисленные выше обстоятельства, расчет схемы  $m+n$  вывода спутника на ГСО проводится в два этапа.

На первом этапе задается начальное приближение продолжительностей  $T_1^0, \dots, T_m^0, \dots, T_{m+n}^0$  активных участков, а также максимальная величина  $\Delta T_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m+n$ , шага изменения параметра  $T_i$  – продолжительности работы двигателя на  $i$ -м активном участке. Методом покоординатного спуска решаем задачу минимизации функционала (3.19). Изменение параметра  $T_i$  начинается со значения  $T_i^0$  с максимальным шагом  $\Delta T_i = \Delta T_i^0$ , а заканчивается при минимальном единичном шаге  $\Delta T_i = 1$ . В результате первого этапа получаем значения парамет-

ров  $T_1^1, \dots, T_m^1, \dots, T_{m+n}^1$ , которые служат начальным приближением для второго этапа минимизации.

На втором этапе минимизируем функционал (3.4), выполняя целочисленный перебор значений параметров  $T_1, \dots, T_{m-1}, T_{m+1}, \dots, T_{m+n-1}$  с шагом 1 с. Диапазоны изменения этих параметров задаются исходя из начального приближения их значений, полученных на первом этапе. Параметры  $T_m$  и  $T_{m+n}$  исключаются из этого перебора, поскольку они на каждом шаге находятся как целочисленное приближение к решению системы (3.20). В качестве начального приближения служат значения  $T_m^1$  и  $T_{m+n}^1$  соответственно. Для схемы 1+1 второй этап состоит в однократном решении системы (3.20) с начальным приближением  $T_1 = T_1^1$  и  $T_2 = T_2^1$ . Целочисленного перебора других параметров нет из-за их отсутствия.

### 3.5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Конструкция и условия эксплуатации разгонного блока "Бриз-М" позволяют выполнить до 10 включений маршевого двигателя в ходе активного полета (в течение 24 ч). Один запуск двигателя (доразгон) используется после отстыковки головного блока от ракеты-носителя для выхода на опорную орбиту. Поэтому для вывода КА на ГСО остается не более девяти включений маршевого двигателя в течение суток.

Каждая схема полета оптимизировалась отдельно. Интегрирование уравнений движения (3.1) выполнялось методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом 1 с. Абсолютная погрешность при вычислении эксцентрической аномалии не превышала  $\varepsilon = 0.001$ . Минимальная вариация времени работы двигателя равна 1 с.

Для сравнительного анализа оптимальные результаты для 10 различных схем приведены в табл.3.1. Ограничению по количеству включений двигателя (не более девяти) отвечают 36 возможных схем полета, перечисленных в (3.18). Суточному ограничению активного полета не удовлетворяют все схемы с семью и более включениями двигателя, а также все схемы с тремя и более активными апоцентрическими участками. Из схем с двумя апоцентрическими участками по продолжительности активного полета подходят только две схемы 1+2 и 2+2. Следовательно, временное ограничение оказывается более жестким, чем ограничение по количеству запусков двигателя.

По расходу топлива оптимальными оказались схемы 4+1, 5+1, 6+1 причем схема 4+1 лучше по точности: эксцентриситет орбиты, получаемой по схеме 4+1 меньше, чем по схемам 5+1 или 6+1. Наиболее близкая к ГСО оказывается окончательная орбита, на которую

выводится КА по схеме 3+2 (эксцентриситет равен 0.00102). Однако время активного полета по этой схеме более суток (24.32 ч).

Таблица 3.1. Характеристики схем полета

Схема полета	Расход топлива, кг	Параметры окончательной орбиты		Время полета, ч
		фокальный параметр, км	эксцентриситет	
1+1	16289	42159	0.00210	5.48
1+2	16296	42160	0.00162	18.54
1+3	16302	42160	0.00160	31.82
2+1	16087	42164	0.00176	7.73
2+2	16099	42165	0.00140	19.01
3+1	16044	42164	0.00212	10.55
3+2	16050	42164	0.00102	24.32
4+1	16038	42164	0.00208	13.06
5+1	16038	42164	0.00240	15.49
6+1	16038	42164	0.00222	19.22

Обратим внимание на схему 2+1, которая применяется на практике. Расход топлива по этой схеме оказывается всего на 49 кг больше оптимального, достигаемого по схеме 4+1. Эта величина составляет 0.3% от всей массы израсходованного топлива. Заметим, что каждое включение и выключение реактивного двигателя сопровождается неэффективными затратами топлива [27,75]. Часть топлива используется турбонасосным агрегатом, который обеспечивает работу маршевого двигателя. Каждое включение реактивного двигателя от его запуска до достижения максимальной тяги представляет собой немгновенный переходный процесс и сопровождается расходом топлива. При выключении двигателя часть не вступивших в реакцию компонентов топлива теряется. Кроме того, работа маршевого двигателя на активном участке сопровождается интенсивной работой систем ориентации и угловой стабилизации. Управление угловым движением вокруг центра масс КА осуществляется, как правило, рулевыми двигателями малой тяги, которые тоже потребляют топливо. Таким образом, с учетом неэффективных затрат топлива схема 2+1 с тремя активными участками на практике окажется экономнее, чем схема 4+1 с пятью включениями маршевого двигателя.

Траектории полета по схемам 2+1 и 4+1 изображены на рис.3.3 и рис.3.4 соответственно (в прямоугольной системе координат в плоскости орбиты с началом в центре масс Земли). Параметры промежуточных и окончательных орбит, а также оптимальные продолжительности

сти активных участков при использовании этих схем полетов приведены в табл.3.2 и табл.3.3. Буквы "П" или "А" в столбце "Место включения ДУ" означают, что двигатель включается в окрестности перицентра или апоцентра соответственно.

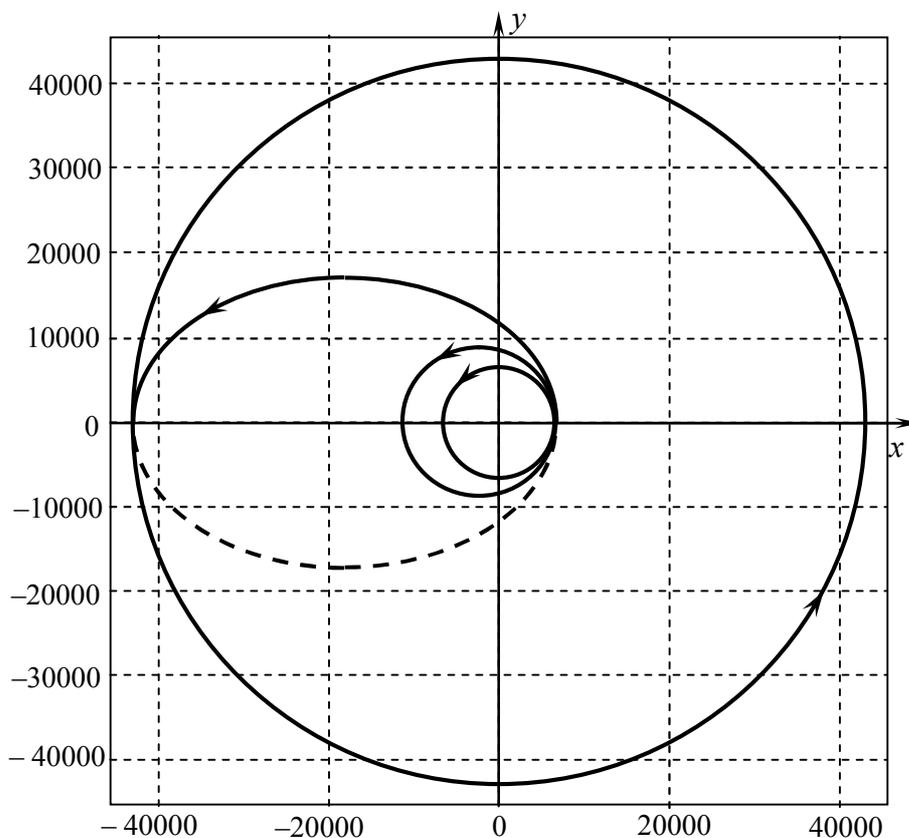


Рис.3.3

Таблица 3.2. Схема 2+1 вывода спутника на ГСО

№ орбиты	Параметры орбиты			Активный участок	
	фокальный параметр, км	эксцентриситет	период обращения, ч	место включения ДУ	время работы ДУ, с
0	6578.1	0	1.47	П	975
1	8382.3	0.25811	2.35	П	1026
2	11684.5	0.72290	10.58	А	619
3	42164.0	0.00176	23.93	Всего:	2620

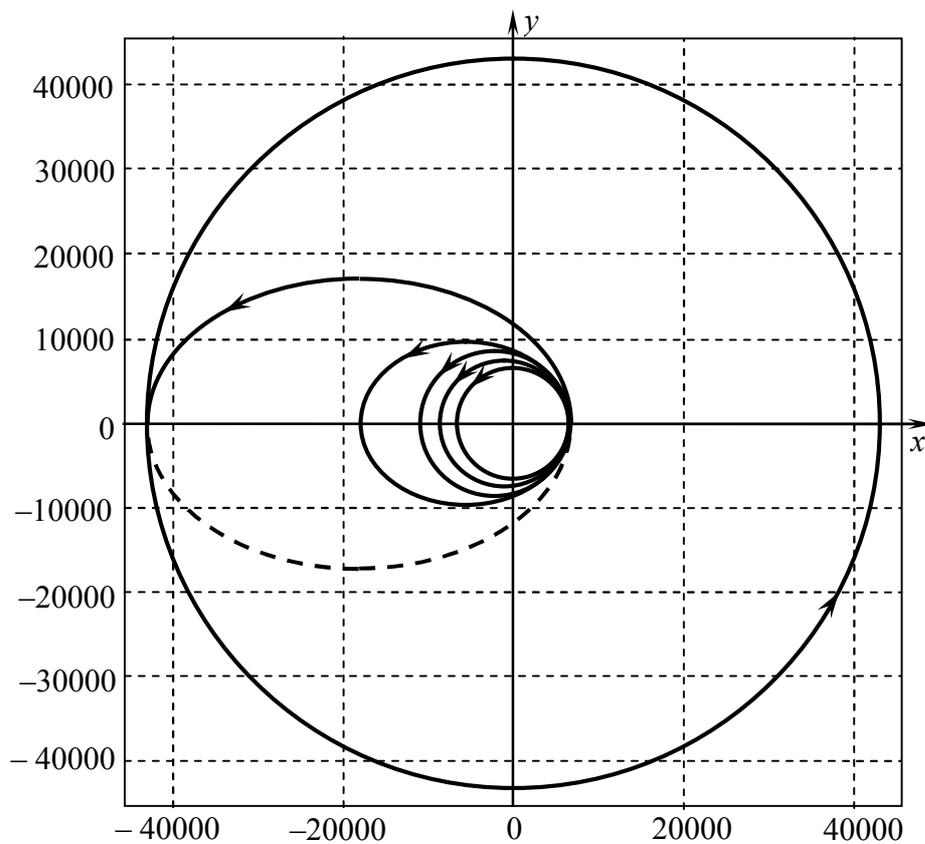


Рис.3.4

Таблица 3.3. Схема 4+1 вывода спутника на ГСО

№ орбиты	Параметры орбиты			Активный участок	
	фокальный параметр, км	эксцентриситет	период обращения, ч	место включения ДУ	время работы ДУ, с
0	6578.1	0	1.47	П	478
1	7357.9	0.11689	1.78	П	479
2	8322.0	0.26119	2.33	П	481
3	9557.2	0.44576	3.60	П	540
4	11456.6	0.72800	10.52	А	634
5	42164.0	0.00208	23.93	Всего:	2612

### 3.6. ВЫВОДЫ

1. Поставлена задача вывода спутника на ГСО с минимальным расходом топлива при ограниченном количестве включений двигателя, которая формулируется как задача оптимального управления динамической системой с автоматной частью. Используя необходимые условия оптимальности (см. разд.1.6), задача сводится к задаче конечномерной минимизации. Реализуемая точность исполнения команд включения и выключения реактивного двигателя ограничена, что делает поставленную задачу условной минимизации дискретной.

2. Для математической модели разгонного блока "Бриз-М" [48], разработанного в Государственном космическом научно-производственном центре им. М. В. Хруничева, исследован переход с опорной круговой орбиты на ГСО. Рассмотрены различные схемы полета, удовлетворяющие ограничению: не более девяти включений маршевого двигателя в течение суток. Выполнена оптимизация каждой схемы, найдены минимальный расход топлива, оптимальные моменты включения и выключения двигателя, рассчитаны параметры переходных орбит, отклонения конечной орбиты от ГСО. Расчеты показали, что оптимальной является схема 4+1 (четыре перицентрических и один апоцентрический участки). Однако, по сравнению со схемой 2+1, применяемой на практике, выигрыш по затратам топлива составляет всего 0.3% от массы всего израсходованного топлива. Фактические затраты топлива на пяти активных участках (по схеме 4+1) будут даже больше, чем на трех (по схеме 2+1), поскольку каждое включение и выключение ДУ сопровождается неэффективными затратами топлива, что не учитывается рассматриваемой математической моделью.

3. Показано, что применение схем с двумя и более апоцентрическими участками не приводит, вопреки теории [36,37], к уменьшению затрат топлива. Это происходит из-за дискретности продолжительность работы двигателя на активном участке. Увеличение количества апоцентрических участков приводит к уменьшению отклонения итоговой орбиты КА от ГСО. Однако расход топлива при этом увеличивается. Недостатком схем с несколькими апоцентрическими участками является также значительное увеличение продолжительности полета, что приводит к увеличению времени активного существования разгонного блока.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным итогом диссертационной работы являются достаточные условия оптимальности дискретных систем автоматного типа и их применение в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники, выразившиеся в следующих научных результатах:

1. Доказаны достаточные условия оптимальности систем автоматного типа, кусочно-постоянные траектории которых имеют произвольное конечное или заданное максимально допустимое количество однократных переключений.

2. Доказаны достаточные условия оптимальности систем автоматного типа, кусочно-постоянные траектории которых имеют произвольное конечное или заданное максимально допустимое количество мгновенных многократных переключений.

3. Выведены уравнения для нахождения условных функций цены и условных позиционных управлений, из которых строятся функция цены и оптимальное позиционное управление при однократных или мгновенных многократных переключениях.

4. Разработан алгоритм синтеза оптимальных систем автоматного типа с однократными или мгновенными многократными переключениями. Алгоритм проверен на модельных примерах с однократными и мгновенными многократными переключениями. Показана эффективность разработанного алгоритма по сравнению с известным алгоритмом субоптимального синтеза систем автоматного типа.

5. Обоснована применимость разработанного алгоритма для синтеза следящей САТ, выполняющей оптимальную кусочно-постоянную аппроксимацию заданной непрерывной траектории. Получена оценка сверху необходимого числа шагов. Разработана программа численного решения задачи синтеза одномерной следящей САТ.

6. Получено приближенное решение задачи оптимального вывода спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя и заданной продолжительности активной фазы полета.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 392 с.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. – 480 с.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. – 432 с.
4. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С. и др. Оптимальное управление движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 376 с.
5. Артемьев В. М. Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. Минск: Высшая школа, 1979.
6. Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. – 254 с.
7. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина: Доказательство и приложения. М.: Факториал, 2006. – 144 с.
8. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
9. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. – 223 с.
10. Батурин В.А., Гончарова Е.В., Малтугуева Н.С. Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами // Известия РАН. Теория и системы управления, 2010. - №5. – С.53-61.
11. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1975. – 416 с.
12. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. – 408 с.
13. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. – 448 с.
14. Бортаковский А.С. Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами // Информатика. Сер. Автоматизация проектирования. М.: ВНИИМИ, 1992. – Вып. 2-3. – С.72-79.
15. Бортаковский А.С. Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Известия РАН. Теория и системы управления, 2006. - №6. – С.77–92.
16. Бортаковский А.С. Необходимые условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Тр. МИАН, 2008. – Т.262. – С.50–63.

17. Бортаковский А.С. Синтез логико-динамических систем на основе достаточных условий оптимальности // Известия РАН. Теория и системы управления, 2010. - №2. - С.41-55.
18. Бортаковский А.С. Необходимые условия оптимальности непрерывно-дискретных систем с мгновенными многократными переключениями дискретной части // Известия РАН. Теория и системы управления, 2011. - №4. - С.73-85.
19. Бортаковский А.С. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в классе логико-динамических (гибридных) систем // Автоматика и телемеханика, 2011. - № 12. – С.3-23.
20. Бортаковский А.С. Достаточные условия оптимальности непрерывно-дискретных систем с мгновенными многократными переключениями дискретной части // Известия РАН. Теория и системы управления, 2012. - №2. - С.17-48.
21. Бортаковский А.С., Коновалова А.А. Достаточные условия оптимальности дискретных систем автоматного типа // Известия РАН. Теория и системы управления, 2013. - №1. - С.18-44.
22. Бортаковский А.С., Коновалова А.А. Оптимальный вывод спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя // Известия РАН. Теория и системы управления, 2013. - №6. - С.93-103.
23. Бортаковский А.С., Коновалова А.А. Вычислительная технология синтеза оптимальных дискретных систем автоматного типа // Вестник компьютерных и информационных технологий, 2013. - №11. - С.3-8.
24. Бортаковский А.С., Коновалова А.А. Синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа при мгновенных многократных переключениях // Известия РАН. Теория и системы управления, 2014. - №5. - С.69-101.
25. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // Автоматика и телемеханика. – 1987. – №7. – С.57-66.
26. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез оптимальных детерминированных систем автоматного типа // Межвуз. сб. науч. тр. "Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения". М.: Изд-во МИРЭА, 2008. С.102–107.
27. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез управления активной стабилизацией спутника на основе необходимых условий оптимальности логико-динамических систем // Вестник Московского авиационного института, 2008. – Т.15. – № 2. – С.28–35.
28. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Оптимальный переход спутника на геостационарную орбиту с учетом неэффективных затрат топлива // Тез. докл. Междунар. конф. "Управле-

- ние и оптимизация неголономных систем". Переславль-Залесский: Изд-во "Университет города Переславля", 2011. С.11-13.
29. Бухалев В. А. Анализ точности автоматических систем со случайной структурой, имеющей два возможных состояния // Автоматика и телемеханика, 1975. – № 4.
  30. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. – 624 с.
  31. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. Интеллектуальное управление динамическими системами. М.: Физматлит, 2000. – 352 с.
  32. Васильев С.Н., Маликов А.И. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: Фолиант, 2011. – Т.1, 2. С. 23-81.
  33. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. – 400 с.
  34. Гамкрелидзе Р.В. О скользящих оптимальных режимах. Докл. АН СССР, 1962, т. 134, No 6, с. 1243—1245.
  35. Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г. Библиотека программ для решения задач оптимального управления // Ж-л вычислит. математика и матем. Физики. 1979. – Т.10. – №2. – С.367-387.
  36. Гурман В.И. Об оптимальных траекториях реактивного аппарата в центральном поле. // Космические исследования. 1965. – Т.III. – Вып.3. – С.368-373.
  37. Гурман В.И. Об оптимальных переходах между компланарными эллиптическими орбитами в центральном поле // Космические исследования. 1966. – Т.IV. – Вып.1. – С.26-39.
  38. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. – 304 с.
  39. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. – 288 с.
  40. Гурман В.И. Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004.–№4.– С.70–75.
  41. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. – 384 с.
  42. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. – 432 с.
  43. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. – 256 с.
  44. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967. – 336 с.
  45. Емельянов С.В., Уткин В.И. Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

46. Жук К.Д., Тимченко А.А., Даленко Т.И. Исследование структур и моделирование логико-динамических систем. – Киев: Наукова думка, 1975. – 199 с.
47. Жук К.Д., Тимченко А.А. Автоматизированное проектирование логико-динамических систем. Киев, Наукова думка, 1981. – 319 с.
48. Журавин Ю. Разгонный блок "Бриз-М" // Новости космонавтики. 2000. Т.10. №8(211). С.52-55.
49. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. – 256 с.
50. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2002. – т.90. – С.5-189.
51. Иванов В.А., Ющенко А.С. Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Наука, 1983. – 336 с.
52. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. – 480 с.
53. Казаков И.Е., Артемьев В. М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. – 272 с.
54. Калиткин Н.Н. Численные методы. М. Наука, 1978. – 512 с.
55. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. – 650 с.
56. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. – 280 с.
57. Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Кружков Д.М., Сыпало К.И. Интегрированная навигационная система космического аппарата на геостационарной и высокоэллиптической орбитах, функционирующая в условиях активных помех // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. – №3. – С.143–154.
58. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. – 496 с.
59. Коновалова А.А. Оптимальное управление дискретными системами автоматного типа // 11-я Международная конференция «Авиация и космонавтика-2012», Тезисы докладов, Москва, 2012, С. 380-381.
60. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. – 446 с.
61. Куржанский А.Б. Оптимальные системы с импульсными управлениями // Дифференциальные игры и задачи управления. УНЦ АН СССР, 1975. – С.131-156.
62. Куржанский А.Б., Точилин П.А. Импульсное управление в моделях гибридных систем // Дифференц. уравнения. 2009. - Т.45. - №3. - С.716–727.

63. Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.В. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974. – 292 с.
64. Летов А.М. Условно устойчивые регулируемые системы (об одном классе оптимальных регулируемых систем) // Автоматика и телемеханика. 1957. - Т.18. - № 7. – С.601-604.
65. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1973. – 390 с.
66. Малтугуева Н.С. Достаточные условия оптимальности для задач оптимального управления логико-динамическими системами // Программные системы: теория и приложения. 2011. - Т.2. - №1. – С. 63-70. URL: [http://psta.psiras.ru/read/psta2011\\_1\\_63-70.pdf](http://psta.psiras.ru/read/psta2011_1_63-70.pdf)
67. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987. – 304 с.
68. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И. Оптимизация наблюдений и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989. – 311 с.
69. Марченко В.М. ГДР управляемые системы и их приложения // Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина: Тезисы докладов. М.: Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова, 2008. – С.367-368.
70. Марченко В.М., Борковская И.М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. Физико-математические науки и информатика, 2012. - № 6. - С.7-10
71. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М. Наука, 2004. – 493 с.
72. Мишулина О.А. Исследование точности линейных систем автоматического управления со случайными изменениями структуры // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970. – № 1.
73. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехтеориздат, 1957. – 552 с.
74. Пакшин П.В. Устойчивость дискретных систем со случайной структурой при постоянно действующих возмущениях // Автоматики и телемеханика, 1983. – № 6.
75. Пегачкова Е.А. Оптимальный вывод спутника на геостационарную орбиту с учётом неэффективных затрат топлива при включении и выключении двигателя // Электронный журнал “Труды МАИ”, 2011. №47. (20.10.2011) – <http://mai.ru/science/trudy/published.php>
76. Пегачкова Е.А. Приближенный синтез оптимальных систем автоматного типа // Электронный журнал “Труды МАИ”, 2012. №49. – <http://mai.ru/science/trudy/published.php>
77. Пирумов У.Г. Численные методы. М.: Изд-во МАИ, 1998. – 188 с.
78. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. – 384 с.

79. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
80. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных систем. М.: Наука, 1973. – 256 с.
81. Расина И.В. Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов // Программные системы: теория и приложения, 2012. – №5 (9). – С.49-72.
82. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Оптимальное управление нелинейными стохастическими системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния // Автоматика и телемеханика, 2006. – № 7. – С.62-75.
83. Седова Н.О. Синтез цифровых стабилизирующих регуляторов для непрерывных систем на основе метода функций Ляпунова // Проблемы управления, 2011. - № 6. - С.7-13.
84. Семенов В.В. Динамическое программирование в синтезе логико-динамических систем // Приборостроение, 1984. - №9. – С.71-77.
85. Семенов В.В., Репин В.М., Журина Н.Э. Алгоритмизация процессов управления летательными аппаратами в классе логико-динамических систем. М.: МАИ, 1987. – 50 с.
86. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. – 288 с.
87. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. – 480 с.
88. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. – 367 с.
89. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. – 488 с.
90. Федунев Б.Е. Проблемы разработки бортовых оперативно-советующих систем для антропоцентрических объектов // Известия РАН. Теория и системы управления, 1996. – №5. – С.147-160.
91. Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, 1953. – Т.14. – № 6. – С.712-728.
92. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. – 223 с.
93. Фуллер А.Т. Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Труды I Международного конгресса IFAC. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С.584-605.
94. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел: Учебное пособие. СПб: Изд-во СПбГУ, 2007. – 180 с.

95. Хрусталеv М.М., Савастюк С.В. Условия оптимальности стохастических систем диффузионного типа в задачах с ограничениями на процесс управления–наблюдения // Доклады АН СССР. 1990. – Т.311. – №2. – С.291-295.
96. Хрусталеv М.М., Румянцев Д.С. Оптимизация квазилинейных динамических стохастических систем со сложной структурой // Автоматика и телемеханика, 2011. - № 10. – С.154-169.
97. Цыпкин Я.З. Теория релейных систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1955. - 456 с.
98. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958. - 724 с.
99. Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. – 414 с.
100. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. – 575 с.
101. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. – 384 с.
102. Agrachev A.A, Liberzon D. Lie-algebraic stability criteria for switched systems // SIAM J. Control Optim, 2001. – v.40. – p.253-269.
103. Alur R., Henzinger T.A., Lafferriere G. et al. Discrete abstractions of hybrid systems // Proceedings of the IEEE, 2000, Vol. 88, No. 7, p. 971-984
104. Axelsson H., Boccadoro M., Egerstedt M., Valigi P., Wardi Y. Optimal Mode-Switching for Hybrid Systems with Varying Initial States // Journal of Nonlinear Analysis: Hybrid Systems and Applications, 2008. – Vol.2. – No.3. pp.765-772.
105. Axelsson H., Wardi Y., Egerstedt M., Verriest E. Gradient Descent Approach to Optimal Mode Scheduling in Hybrid Dynamical Systems // Journal of Optimization Theory and Applications, 2008. – Vol.136. – No.2. pp.167-186.
106. Brockett R.W. Hybrid models for motion control systems // Perspectives in the Theory and its Applications. – Boston, Birkhäuser, 1993. – p.29-53.
107. Bushaw D.W. Experimental towing tank // Stevens Inst. of Technology. Reprint 169. – N.Y.: Hoboken, 1953.
108. Cassandras C.G., Pepyne D.L., Wardi Y. Optimal control of a class of hybrid systems // IEEE Trans. Aut. Con, 2001. v.46. –N 3, P. 398-415.
109. Engell S., Frehse G., Schnieder E. Modeling, analysis and design of hybrid systems. Springer, 2002. – 504 p.
110. Hedlund S., Rantzer A. Optimal control of hybrid systems // Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Phoenix, AZ), 1999. – p.3972-3977.

111. Hybrid Systems / Ed. by R.L.Grossman, A.Nerode, A.P.Ravn, H.Rischel., Berlin, Springer, 1993. (Lect. Notes in Computer Science. – v.736).
112. Hybrid Systems. III. / Ed. by R.Alur, T.A.Henzinger, E.D.Sontag. – Berlin, Springer, 1996. (Lect. Notes in Computer Science. – v.1066).
113. Hybrid Systems. V. / Ed. by P.Ahtsaklis, W.Kohn, M.Lemmon, A.Nerode, S.Sastry. – Berlin, Springer, 1999. (Lect. Notes in Computer Science. – v.1567).
114. Konovalova A.A. Synthesis of optimal determined discrete systems of automatic type, International conference on differential equations and dynamical systems, Abstracts of the reports, Syzdal, 2012 (M.:MIAN, 2012, p.: 209-210)
115. Konovalova A.A. Principles of synthesis of optimal determined discrete systems of automatic type, International conference on mathematical control theory and mechanics, Abstracts of the reports, Syzdal, 2013 (M.:MIAN, 2013, p.: 261)
116. Konovalova A.A. Optimal injection of a satellite into geostationary orbit using the minimum possible amount of fuel and a limited number of thruster firings – International conference on differential equations and dynamical systems, Abstracts of the reports, Syzdal, 2014 (M.:MIAN, 2014, p.: 212)
117. Li Z., Soh Y., Wen C. Switched and impulsive systems: Analysis, design and applications. Berlin: Springer, 2005. – 271 p.
118. Liberzon D. Switching in Systems and Control. Berlin: Springer, 2003. – 252 p.
119. Lygeros J., Johansson K.H., Slobodan N.S. et al. Dynamical properties of hybrid automata // IEEE Transactions on automatic control, 2003, Vol. 48, No. 1, p. 2-17
120. Matveev A.S., Savkin A.V. Qualitative theory of hybrid dynamical systems. Boston: Birkhäuser, 2000. – 364 p.
121. Modelling and Analysis of Logic Controlled Dynamic Systems: IFAC Workshop. – Irkutsk: Inst. Syst. Dyn. and Control Theory. Sib. Branch RAS, 2003.
122. Savkin A.V., Evans R.J. Hybrid dynamical systems: Controller and sensor switching problems. – Boston: Birkhäuser, 2002. – 364 p.
123. Silva G.N., Vinter R.V. Necessary conditions for optimal impulsive control problems // SIAM. J. Control and Optim, 1997. – v.35. – No. 6. – p.1829-1846.
124. Xu X., Antsaklis P.J. On time optimal control of integrator switched systems with state constrains // J. of Nonlinear Analysis Special Issue on Hybrid Systems, 2005. – v.62. – p.1453-1465.