

Научная статья

УДК 534.11

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185100>

EDN: <https://www.elibrary.ru/FXKSBX>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВИБРОАКТИВНОСТИ УПРУГОИЗГИБАЕМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС

Владимир Иванович Соболев¹, Евгений Вячеславович Зеньков^{2✉},

Татьяна Николаевна Черниговская³, Наталия Александровна Марчук⁴

^{1,2,4}Иркутский национальный исследовательский технический университет,

Иркутск, Россия

^{2,3}Иркутский государственный университет путей сообщения,

Иркутск, Россия

¹sobolevvi@ex.istu.edu

²jovanny1@yandex.ru ✉

³tannikch@gmail.com

⁴fts07@mail.ru

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена вопросам формирования и вибрационного анализа моделей динамических систем, содержащих упругоизгибаемые элементы с распределенными и сосредоточенными инерционными и жесткостными параметрами на основе метода гармонического элемента. Моделирование динамических процессов, протекающих в системах с нерегулярным распределением границ областей и нерегулярными граничными

условиями - конструкций различного назначения осуществляется, как правило, на основе дискретизации масс. Использование таких методов связано с известными трудностями — дискретные модели являются априорно приближенными с ограниченными возможностями оценки погрешности; динамические параметры модели зависят от ее размерности, а также от методов преобразования; численные результаты с массивами и матрицами большой размерности затрудняют возможность анализа и оценки результатов расчета. Расчеты сооружений на стационарные динамические воздействия, основанные на использовании элементов с распределенными и сосредоточенными массами, позволяют избежать перечисленных последствий полной дискретизации. Однако такие дискретно-континуальные (гибридные) динамические модели связаны с необходимостью сшивки разнородных элементов на этапе формирования и неизбежными трудностями решения таких «комбинированных» систем, содержащих обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Перечисленные проблемы разрешаются при использовании авторского метода гармонического элемента, осуществляющего узловую сшивку разнородных элементов, а также позволяющего получать решения в виде амплитуд колебаний узлов комбинированной модели по определенным необходимым направлениям. При этом сохраняются все свойства метода конечных элементов, позволяющего осуществлять решение при разнообразных граничных условиях и нерегулярности распределения физических и геометрических параметров и границ расчетных областей. Узловая сшивка элементов модели напоминает подход, используемый в формировании

конечно-элементных моделей, но в отличие от метода конечных элементов предназначенных для решения задач динамики и содержащих в уравнениях частотные и инерционные параметры. Указанные особенности позволяют выделить предложенный метод в отдельный класс с названием метода гармонических элементов.

Ключевые слова: изгибаемые элементы, сосредоточенные массы, уравнения Эйлера-Бернулли, вычислительное моделирование, уравнения динамики

Для цитирования: Соболев В.И., Зеньков Е.В., Черниговская Т.Н., Марчук Н.А.

Определение параметров виброактивности упругоизгибаемых стержневых систем с дискретно-непрерывным распределением масс // Труды МАИ. 2025. № 142. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185100>

Original article

DETERMINATION OF VIBRATION ACTIVITY PARAMETERS OF ELASTIC BENDING ROD SYSTEMS WITH DISCRETE-CONTINUOUS MASS DISTRIBUTION

Vladimir I. Sobolev¹, Evgeniy V. Zenkov^{2✉}, Tatiana N. Chernigovskay³, Natalia A. Marhuk⁴

^{1,2,4}Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

^{2,3}Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

¹sobolevvi@ex.istu.edu

²jovanny1@yandex.ru✉

³tannikch@gmail.com

⁴fts07@mail.ru

Abstract. The proposed work is devoted to the issues of formation and vibration analysis of dynamic system models containing elastically bending elements with distributed and concentrated inertial and rigidity parameters based on the harmonic element method. Modeling of dynamic processes occurring in systems with irregular distribution of region boundaries and irregular boundary conditions - structures of various purposes is carried out, as a rule, on the basis of mass discretization. The use of such methods is associated with known difficulties - discrete models are a priori approximate with limited capabilities for error estimation; dynamic parameters of the model depend on its dimension, as well as on the transformation methods; numerical results with arrays and matrices of large dimension complicate the possibility of analysis and evaluation of the calculation results. Calculations of structures for stationary dynamic effects based on the use of elements with distributed and concentrated masses make it possible to avoid the listed consequences of full discretization. However, such discrete-continuous (hybrid) dynamic models are associated with the need to stitch together heterogeneous elements at the formation stage and the inevitable difficulties of solving such "combined" systems containing ordinary differential equations and partial differential equations. The listed problems are resolved using the author's harmonic element method, which performs nodal stitching of heterogeneous elements and allows obtaining solutions in the form of oscillation amplitudes of the nodes of the combined model in certain required directions. In this case, all the properties of the finite element method are preserved, allowing the solution to be implemented under various boundary conditions and irregular distribution of physical and geometric parameters and boundaries of the computational domains. Nodal stitching of

model elements resembles the approach used in the formation of finite element models, but unlike the finite element method intended for solving dynamics problems and containing frequency and inertial parameters in the equations. These features allow us to distinguish the proposed method into a separate class called the harmonic element method.

Keywords: bending elements, concentrated masses, Euler-Bernoulli equations, computational modeling, dynamic equations

For citation: Sobolev V.I., Zenkov E.V., Chernigovskaya T.N., Marhuk N.A. Determination of vibration activity parameters of elastic bending rod systems with discrete-continuous mass distribution. *Trudy MAI*. 2025. No. 142. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185100>

Введение

Несущие конструкции летательных аппаратов представляют собой сложные деформируемые системы, состоящие из множества элементов различной геометрии и свойств. Эти элементы, как правило – изгибаемые, соединяются разнообразными способами, формируя нерегулярные расчетные области с криволинейными границами и разрывами производных в точках соединения. Классический пример – фюзеляж самолета, состоящий из сотен отдельных шпангоутов, стрингеров и обшивки, соединенных клепкой, сваркой или другими методами. В данной работе под "системой" мы понимаем совокупность взаимосвязанных элементов, образующих единое целое и обладающих определенной целью. Ключевым является наличие взаимодействия между элементами. Это взаимодействие может быть

механическим (силы и моменты), термическим (теплопередача), или аэродинамическим (давление потока воздуха). В случае несущих конструкций, это, прежде всего, механическое взаимодействие, определяющее распределение напряжений и деформаций под нагрузкой. Именно поэтому так важен учет всех соединений и их свойств при моделировании таких систем.

Разнообразие типов элементов (балки, пластины, оболочки) и способов их соединения делает несущие конструкции сложными системами в полном смысле слова. Это понятие подчиняется принципам системного анализа, сформулированным в работах [1, 2] и включающим:

1) Принцип конечной цели: система создана для достижения определенной цели, в случае несущей конструкции – обеспечение прочности, жесткости и устойчивости летательного аппарата;

2) Принцип единства: система представляет собой целостное образование, свойства которого не сводятся к сумме свойств отдельных элементов. Взаимодействие элементов критично для общей работоспособности;

3) Принцип связанности: элементы системы взаимосвязаны, изменение состояния одного элемента влияет на состояние других. Это проявляется в передаче нагрузок через соединения. Разрушение одного элемента может привести к катастрофическим последствиям;

4) Принцип модульного построения: система может быть разделена на подсистемы (модули) с более простыми взаимодействиями, что упрощает процесс анализа и проектирования.

Для численного анализа таких сложных систем используется понятие "динамической системы", представляющее собой математическую модель, отображающую поведение физической системы во времени [3, 4]. Такая модель позволяет предсказывать реакцию конструкции на различные воздействия, такие как аэродинамические нагрузки, вибрации и температурные изменения. Важно отметить, что динамическая система может быть описана как дискретно, так и непрерывно.

Дискретное моделирование основано на представлении конструкции как совокупности отдельных конечных элементов (КЭ). Каждый элемент характеризуется своими геометрическими и механическими свойствами, а взаимодействие между элементами задается узловыми связями. Метод конечных элементов (МКЭ) является наиболее распространенным подходом к дискретному моделированию. Преимущества МКЭ – относительная простота реализации, возможность учета сложной геометрии и разнородности материалов. Однако, дискретизация может вводить погрешности, зависящие от размера элементов и выбранной сетки. Для повышения точности необходимо уменьшать размер элементов, что приводит к увеличению вычислительных затрат.

Непрерывное моделирование основано на использовании уравнений математической физики, таких как уравнения теории упругости или пластичности. В этом случае конструкция рассматривается как сплошная среда, без явной дискретизации. Этот подход позволяет получить более точные результаты, но требует решения сложных дифференциальных уравнений, что значительно сложнее

с вычислительной точки зрения, особенно для сложных геометрических форм. Часто применяются методы численного решения дифференциальных уравнений, такие как метод конечных разностей или метод конечных объемов. Непрерывное моделирование особенно эффективно для анализа гладких конструкций с относительно простой геометрией. Выбор между дискретным и непрерывным моделированием зависит от сложности конструкции, требуемой точности результатов и доступных вычислительных ресурсов. В практике авиационного проектирования часто применяют комбинированный подход, используя дискретное моделирование для большинства конструкции и непрерывное для анализа критических участков или деталей с более простой геометрией. Например, МКЭ может использоваться для моделирования всего фюзеляжа, а метод граничных элементов (МГЭ) – для анализа напряжений вокруг отверстий или других концентраторов напряжений.

2. Возможность дискретного и непрерывного моделировании динамических упругоизгибаемых систем

В более ранних работах авторов [5 – 7] сформулированы утверждения о целесообразности использования моделей, отображающих динамическое взаимодействие элементов с непрерывным и сосредоточенным характером распределения инерционных и жесткостных параметров – комбинированных динамических моделей (КДМ).

Необходимость формирования комбинированной динамической системы [8, 9] возникает для адекватного отображения динамических процессов в системах с

нерегулярными дискретными и непрерывными параметрическими включениями. К таким динамическим системам относится большинство авиационных конструкций, элементы которых имеют непрерывное, нерегулярное распределение инерционных и жесткостных параметров. Для таких конструкций свойственно также наличие дискретных инерционных элементов.

Таким образом, для адекватного отображения динамических процессов математическая модель должна сочетать элементы с распределенными инерционными и жесткостными параметрами, представленными изгибаемыми элементами, с дискретными элементами. То есть возникает необходимость формирования комбинированной динамической системы [8, 9]. Очевидно, что непосредственная формализация динамики таких систем потребует использования и совмещения дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, при попытке решения которых возникают многочисленные трудности [10].

Следует отметить, что понятие динамической системы появилось в силу того, что при качественном анализе дискретные (по параметрам) системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, по типу поведения характеризовались семействами непрерывных функций, в свою очередь структурированных и разделённых узловыми точками [3]. Представляется, что эти обстоятельства являются следствием более общего порядка.

Действительно — для возможности моделирования сложного непрерывного процесса на уровне некоторой системы возникает необходимость его

дискретизации. Весьма распространены [11 – 13] обсуждения, касающиеся сопоставлению дискретных и континуальных способов аппроксимации. При сложных физических объектах проблемы физической и геометрической разнородности осложняются, возникает проблема размерности, поскольку порядки систем уравнений и количество неизвестных достигают иногда миллионов. В анализе динамики сооружений – это обстоятельство приводит к необходимости разработки и применения специфичных технологий хранения и преобразования матриц [14]. Использование современной вычислительной техники вкупе с развитыми вычислительными алгоритмами позволяет получить решение не только в численном, но и в аналитическом виде. В качестве примеров программ, реализующих подобный подход, можно привести такие системы компьютерной алгебры как Maple, Mathcad, Mathematica, Magma [15].

Очевидно, что в наиболее общем виде сооружение может быть представлено следующими элементами: балки с распределенными параметрами масс и упругости, твердые тела, сосредоточенные массы и упругости. При этом в качестве связей могут быть использованы – классические линейные и угловые связи строительной механики [16, 17]. Учитывая изложенное, можно сделать вывод о том, что преимущества дискретных и непрерывных моделей на уровне параметров могут быть взаимно дополняемыми.

Действительно:

- 1) Невозможность непосредственного аналитического описания исходного объекта в целом совместима с аналитическим описанием отдельных элементов, в

частности балок, что дает ряд преимуществ;

2) Операция декомпозиции является неизбежной, требует использования конечного количества узлов и соответствующих узловых связей;

3) Граничные условия элементов при достаточной факторизации допускают единственность решения;

4) Узлы сшивки разнородных элементов всегда можно совместить с возможностью приложения в них внешних сосредоточенных сил и присоединения дискретных элементов;

5) Система разрешающих уравнений для модели сооружения формируема в виде условий равновесия для узловых точек.

3. Метод динамических жёсткостей, метод гармонического элемента.

При анализе динамического состояния сложных балочных систем построение моделей стационарной динамики оказывается весьма трудоемкой задачей. Как один из возможных вариантов ее решения Морисом Био был предложен метод динамических жесткостей [18, 19]. Ключевым принципом метода является дробление конструкции на составные части с формированием элементов с достаточно просто формализующимися функциями динамических жесткостей. Важная особенность классического метода динамических жесткостей состоит в использовании линейных функций жесткости. Последнее обстоятельство приводит к выполнению принципа суперпозиции, позволяющего достаточно просто сформировать разрешающую систему уравнений. «Сшивка» решений ансамбля элементов модели обеспечивается посредством сопряжения выделенных элементов

системы в их общих узловых точках. Однако при этом «сшивка» решений является не тривиальной задачей. Для облегчения ее решения можно ввести понятие связей в смысле их применяя в строительной механике [20, 21]. Данный шаг позволит аналитически учесть граничные условия элементарных элементов и, как следствие, произвести их сшивку в единую систему.

Кроме вышеописанного использование понятия связей позволяет органически применять традиционные методы системного анализа и всех этапах от выбора расчетной схемы до принятия решения по результатам компьютерного анализа. Для пояснения сказанного наложим связи, препятствующие перемещениям узлов некоторого фрагмента и поворотам поперечных сечений балок из плоскости фрагмента. Эти связи (линейные) и угловые изобразим на схеме и пронумеруем их для последующего упорядочивания в системе (рис. 1).

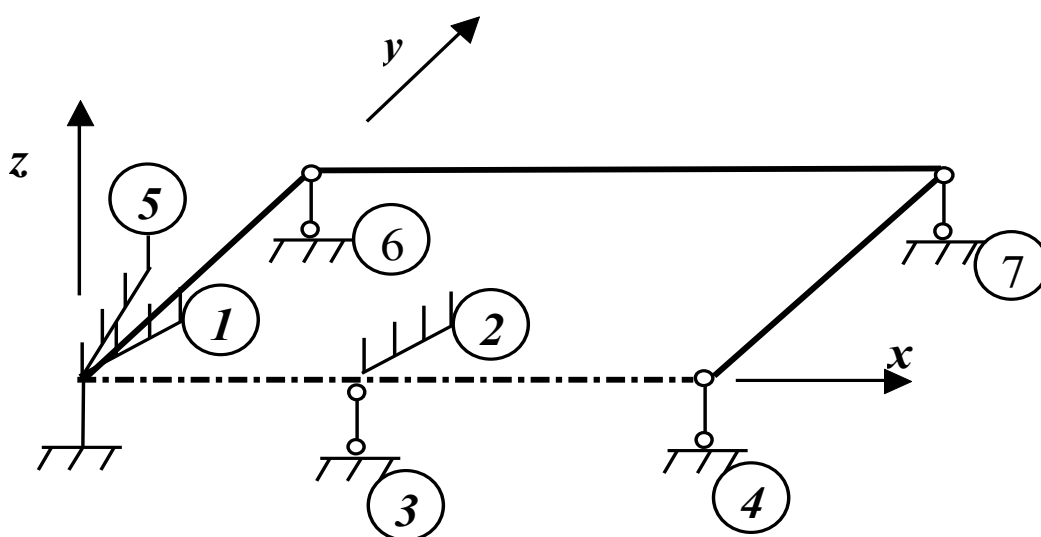


Рис. 1. Пример сшивки балочных элементов с обозначением связей:

1, 2 – угловые связи в плоскости xoz , 3, 4, 6, 7 – линейные связи по направлению оси z , 5 – угловые связи в плоскости yoz

Исключение процедуры дискретизации балочных элементов в контексте динамического анализа позволяет значительно сократить размерность решаемой задачи. Это, в свою очередь, упрощает анализ и делает его более доступным для понимания, а также позволяет получить аналитическое представление о результатах, что является важным аспектом в инженерной практике. Однако, несмотря на все преимущества, следует отметить определенные ограничения, связанные с применением метода динамических жесткостей. В классической формулировке метод динамических жесткостей применим, как правило, только к стержневым динамическим системам. Это связано с тем, что данный метод основан на предположении о линейности и постоянстве динамических характеристик системы. При этом важно учитывать, что в реальных условиях системы могут испытывать нелинейные эффекты, которые не учитываются в рамках данной методологии. Рассмотрим модификацию метода динамических жесткостей, которая может быть полезна для более сложных систем. Предположим, что к стержневому элементу с наложенными по его концам связями приложено статическое сосредоточенное продольное воздействие N . Несмотря на то, что данная сила сама по себе не вызывает колебаний балки, она изменяет ее собственные динамические свойства, что может привести к потере устойчивости. Это подчеркивает важность учета статических нагрузок при анализе динамического поведения конструкций. Допустим, что рассматриваемый элемент обладает изгибной жесткостью EJ и подвержен вынужденным стационарным гармоническим колебаниям с некоторой частотой ω . В этом контексте, элемент можно определить как гармонический

конечный элемент. Это означает, что он моделирует не статические, а динамические свойства реального элемента, отражая способность стержневых элементов проявлять строго определенные параметры колебаний в условиях внешних гармонических воздействий. Для математического описания данного процесса мы можем записать уравнение динамического состояния балки, известное как уравнение Эйлера-Бернулли [22]

$$\rho V_{tt} + EJ V_{xxxx} - NV_{xx} = 0. \quad (1)$$

Стационарное динамическое состояние балки с постоянной частотой определяется его частным решением вида

$$V(x) = Y(x) \sin(\omega t),$$

и вектором граничных условий

$$Y = (Y(0), Y_x|_{x=0}, Y(l), Y_{xx}|_{x=a})^T, \quad (2)$$

компоненты которого расположены в порядке нумерации связей граничных узлов балки.

Совершенно очевидно, что использование частного решения уравнения (1) позволяет однозначно определить динамическое состояние балки. Действительно, вектор (2) определяет краевые условия для уравнения (1). Если для граничных точек элемента задать поочередное единичное смещение связей по их направлениям, то во всех связях, наложенных на краевые узлы, возникнут соответствующие единичные реакции. Полученная в результате нахождения значений этих реакций с последующим их упорядочиванием матрица амплитуд динамических реакций и определит динамическое состояние элемента при единичных воздействиях.

Принимая во внимание также и факт линейности рассматриваемой задачи, получаем, что и состояние элемента и при воздействиях, отличных от единичных также определено, и, следовательно, определено и состояние всего ансамбля элементов. Примем положительным значение реактивного момента, направление которого совпадает с направлением часовой стрелки. Положительным направлением силы будем считать направление вдоль положительного направления оси.

Проиллюстрируем вышесказанное примером. Пусть расчетная схема (рис. 2) содержит три связи. В общем случае, количество связей задачи плоских изгибных колебаний может быть равным от двух до четырех.

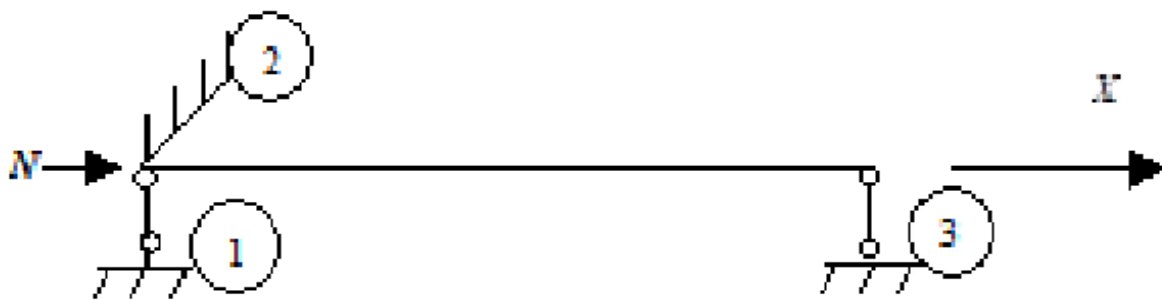


Рис. 2. Вид балочного элемента и нумерация связей

Для определения коэффициентов матрицы и функции амплитуд вынужденных колебаний балки подставим в уравнение (1) искомое решение вида

$$V(x) = Y(x) \sin(\omega t)$$

Выполнив подстановку в уравнение (1) искомого решения и выполнив сокращение на $\sin(\omega t)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$Y^{(IV)}(x) - \frac{NY^{(2)}(x)}{EJ} - Y(x) \frac{\omega^2 \rho}{EJ} = 0 \quad (3)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (3) имеет вид

$$\mu^4 - \frac{\mu^2}{EJ} - Y(x) \frac{\omega^2 \rho}{EJ} = 0.$$

Определив корни биквадратного характеристического уравнения (3) в виде

$$\mu_{1,2}^2 = -\frac{N}{2EJ} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2 \rho}{EJ}},$$

и обозначив эти величины в виде

$$\mu_1 = q, \mu_2 = -q, \mu_3 = is, \mu_4 = -is,$$

в которых

$$q = \sqrt{-\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2 \rho}{EJ}}},$$

$$s = \sqrt{\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2 \rho}{EJ}}}.$$

имеем частное решение уравнения (3), которое может быть представлено в виде линейной комбинации

$$Y(x) = H(x) \vec{C} \quad (4)$$

четырех линейно независимых функций, образующих базисную вектор функцию

$$H(x) = (e^{qx}, e^{-qx}, \sin(sx), \cos(sx)),$$

здесь $\vec{C}$ является вектором коэффициентов линейной комбинации линейно независимых функций, формирующих $H(x)$.

Для выбранной расчетной схемы $Y_{xx}|_{x=a} \equiv 0$ (рис. 3). При определении $Y(x)$ коэффициенты линейных комбинаций фундаментального решения определяются в виде матрицы C путем поочередного задания единичных амплитуд перемещений по направлениям связей 1,2,3.

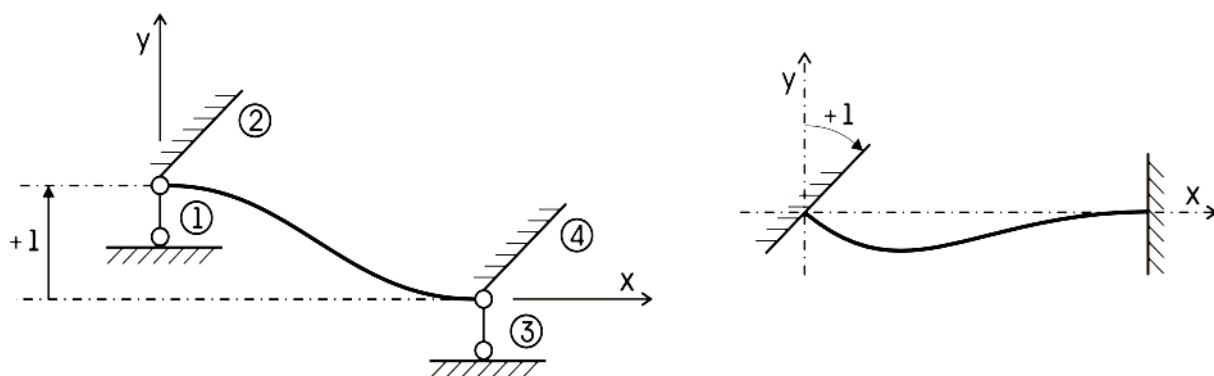


Рис. 3. Правило знаков реакций в связях

Векторы амплитуд единичных перемещений, упорядоченные по номерам связей, образуют матрицу L . Матрицы C и L имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы C определяются из решения систем уравнений

$$AC = L, \quad (5)$$

где A – матрица, образованная из базисной вектор функции $H(x)$ следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} H(0) \\ H_x(x)|_{x=0} \\ H(l) \\ H_{xx}(x)|_{x=a} \end{pmatrix}.$$

Матрица A при поочередных в порядке их нумерации единичных гармонических перемещениях связей (матрица амплитуд гармонических реакций) определяется в виде

$$R = -EJC^T H, \quad (6)$$

здесь

$$H = (H_{xxx}^T(x)|_{x=0}, H_{xx}^T(x)|_{x=0}, H_{xxx}^T(x)|_{x=a}).$$

Вектор Y амплитуд узловых перемещений, соответствующий вектору F амплитуд гармонических воздействий по направлениям связей с частотой ω определяется решением системы линейных уравнений вида

$$RY = F,$$

или

$$-EJ(A^{-1}L)^T H = F.$$

Функция амплитуд перемещений оси балки (функция формы вынужденных колебаний) при заданной узловой форме F силового гармонического воздействия имеет вид

$$Y(x) = Y^T C^T H^T(x). \quad (7)$$

Изложенные методы использованы при анализе виброактивности ряда обогатительных фабрик компании «АЛРОСА», а также в разработке системы виброзащиты конструкций от динамических воздействий работы технологического оборудования, расположенного на верхних этажах фабрик. Использование изложенной методики позволило убедиться в формировании динамических моделей гораздо меньших размерностей по сравнению с моделями, сформированными на основе дискретизации масс.

Заключение

1. Предлагаемый способ формирования модели позволяет совмещать элементы с сосредоточенными и распределенными инерционными параметрами в единой динамической системе.

2. Динамическое состояние такой системы формализуемо с помощью системы уравнений динамического равновесия, сформированной относительно узловых точек при помощи матриц динамических реакций бесконечномерных и дискретных элементов по направлениям степеней свободы динамической системы.

3. Матрицы динамических реакций бесконечномерных изгибаемых элементов (балок с распределенными инерционными параметрами) формируемы в виде амплитуд динамических реакций по направлениям степеней свободы динамической системы, полученных посредством частных решений уравнения Эйлера-Бернулли.

4. Предложенный подход позволяет избежать трудностей в получении решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений динамики и уравнений в частных производных Эйлера-Бернулли посредством сшивки решений.

Список источников

1. Губанов В.А., Захаров В.В., Коваленко А.Н. Введение в системный анализ. - Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988.– 232 с.
2. Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных. – М.: Радио и связь, 1990. – 544 с.
3. Poincare H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. V. I, II, III. – Paris, 1892, 1893, 1899.
4. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
5. Соболев В.И. Дискретно-континуальные динамические системы и виброизоляция

промышленных грохотов. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2002. – 202 с.

6. Соболев В.И., Черниговская Т.Н. Метод гармонического элемента в моделировании стационарных динамических процессов // Вестник Восточно-Сибирского государственного технологического университета. 2010. № 1. С. 43-51.

7. Соболев В.И., Черниговская Т.Н. Построение прямоугольного гармонического элемента для моделирования колебаний тонкой пластины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 16. С. 28-32.

8. Гаскин В.В., Снитко А.Н., Соболев В.И. Динамика и сейсмостойкость зданий и сооружений. – Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1992. – 216 с.

9. Клаф Р., Дж. Пензиен. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 319 с.

10. Гальперин И. Введение в теорию обобщенных функций. – М.: МИАН, 1954. – 64 с.

11. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

12. Бернштейн С.Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функции одной вещественной переменной. Ч. 1. – Л. - М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – 203 с.

13. Галиев К.С., Гордон Л.А., Розин Л.А. О построении универсальной матрицы жесткости в методе конечного элемента // Известия ВНИИ гидротехники. 1974. Т. 105. С. 174-188.

14. Петряков В.Б. Конструирование радиоэлектронной аппаратуры. – М.: Советское радио, 1969. – 118 с.

15. Девенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. – М.: Мир, 1991. –

352 с.

16. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
17. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. – 204 с.
18. Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д. Применение ЭВМ для расчета многосвязных систем методом динамической жесткости. В кн.: Решение задач машиноведения на ЭВМ. – М.: Наука, 1975. – С. 42-47.
19. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. – М.: Издательство литературы по строительству, 1965. – 632 с.
20. Кондратенко Л.А., Миронова Л.И. Моделирование динамики многосвязных нелинейных механических систем с помощью нового численного метода // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179678>
21. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Энергетические характеристики в оценке упругих и рычажных связей в диаде механической колебательной системы // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179676>
22. Корнейчук Н.П., Личун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова Думка, 1988. – 249 с.

References

1. Gubanov V.A., Zakharov V.V., Kovalenko A.N. *Vvedenie v sistemnyi analiz* (Introduction to systems analysis). Leningrad: Izd-vo Leningradskogo universiteta Publ., 1988. 232 p.
2. Klir Dzh. *Sistemologiya. Avtomatizatsiya resheniya sistemnykh* (Systemology. Automation of system problem solving). Moscow: Radio i svyaz' Publ., 1990. 544 p.
3. Poincare H. *Les methodes nouvelles de la mechaniques celestre*. V. I, II, III. – Paris, 1892, 1893, 1899.
4. Butenin N.V., Neimark Yu.I., Fufaev N.A. *Vvedenie v teoriyu nelineinykh kolebaniy* (Introduction to the theory of nonlinear oscillations). Moscow: Nauka Publ., 1987. 384 p.
5. Sobolev V.I. *Diskretno-kontinual'nye dinamicheskie sistemy i vibroizolyatsiya promyshlennyykh grokhotov* (Discrete-continuous dynamic systems and vibration isolation of industrial screens). Irkutsk: Izd-vo IrGTU Publ., 2002. 202 p.
6. Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N. Method of harmonic element in stationary dynamic process modeling. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta*. 2010. No. 1. P. 43-51. (In Russ.)
7. Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N. Construction of a rectangular harmonic element for modeling vibrations of a thin plate. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*. 2007. No. 16. P. 28-32. (In Russ.)
8. Gaskin V.V., Snitko A.N., Sobolev V.I. *Dinamika i seismostoikost' zdaniy i sooruzheniy* (Dynamics and seismic resistance of buildings and structures). Irkutsk: Izd-vo Irkutskogo universiteta Publ., 1992. 216 p.

9. Klaf R., Dzh. Penzien. *Dinamika sooruzhenii* (Dynamics of structures). Moscow: Stroiizdat Publ., 1979. 319 p.
10. Gal'perin I. *Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsii* (Introduction to the theory of generalized functions). Moscow: MIAN Publ., 1954. 64 p.
11. Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii* (Lectures on approximation theory). Moscow: Nauka Publ., 1965. 408 p.
12. Bernshtein S.N. *Ekstremal'nye svoistva polinomov i nailuchshee priblizhenie nepreryvnykh funktsii odnoi veshchestvennoi peremennoi. CH. 1.* (Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable. Part 1). Leningrad-Moscow: ONTI NKTP SSSR Publ., 1937. 203 p.
13. Galiev K.S., Gordon L.A., Rozin L.A. On the construction of a universal stiffness matrix in the finite element method. *Izvestiya VNII gidrotekhniki*. 1974. V. 105, P. 174-188. (In Russ.)
14. Petryakov V.B. *Konstruirovaniye radioelektronnoi apparatury* (Design of electronic equipment). Moscow: Sovetskoe radio Publ., 1969. 118 p.
15. Devenport Dzh., Sire I., Turn'e E. *Komp'yuternaya algebra* (Computer algebra). Moscow: Mir Publ., 1991. 352 p.
16. Forrester Dzh. *Osnovy kibernetiki predpriyatiya (industrial'naya dinamika)* (Fundamentals of Enterprise Cybernetics (Industrial Dynamics)), Moscow: Progress Publ., 1971. 340 p.
17. Khayasi T. *Vynuzhdennyye kolebaniya v nelineinykh sistemakh* (Forced Oscillations in Nonlinear Systems). Moscow: Izd-vo inostrannoi literatury Publ., 1957. 204 p.

18. Airapetov E.L., Genkin M.D. *Primenenie EVM dlya rascheta mnogosvyaznykh sistem metodom dinamicheskoi zhestkosti* (Application of Computers for Calculating Multiconnected Systems by the Dynamic Stiffness Method). Moscow: Nauka Publ., 1975. P. 42-47.
19. Koloushek V. *Dinamika stroitel'nykh konstruktsii* (Dynamics of Building Structures), Moscow: Izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu Publ., 1965. 632 p.
20. Kondratenko L.A., Mironova L.I. Modeling the dynamics of multiply connected nonlinear mechanical systems using a new numerical method. *Trudy MAI*. 2024. No. 135. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179678>
21. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Mironov A.S. Energy characteristics in the evaluation of elastic and lever ties in the dyad of a mechanical oscillatory system. *Trudy MAI*. 2024. No. 135. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179676>
22. Korneichuk N.P., Lichun A.A., Doronin V.G. *Approksimatsiya s ogranicheniyami* (Approximation with restrictions). Kiev: Naukova Dumka Publ., 1988. 249 p.

Статья поступила в редакцию 27.03.2025

Одобрена после рецензирования 12.04.2025

Принята к публикации 25.05.2025

The article was submitted on 27.03.2025; approved after reviewing on 12.04.2025; accepted for publication on 25.05.2025