

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Давыдов Сергей Андреевич

**Анализ напряжённо-деформированного  
состояния упругих сред  
с учётом тепломассопереноса**

01.02.04 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Земсков Андрей Владимирович

Москва – 2020

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Постановка нестационарных задач термоупругой диффузии</b> . . . . .	11
1.1. Современное состояние исследований . . . . .	11
1.2. Математическая модель термоупругой среды с учётом диффузии	18
1.3. Одномерные начально-краевые задачи термоупругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат . . . . .	26
1.4. Начально-краевые условия для задач упругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат . . . . .	31
1.5. Интегральное представление решений . . . . .	33
<b>Глава 2. Нестационарные термоупругодиффузионные процессы в многокомпонентных средах</b> . . . . .	39
2.1. Слой под действием поверхностных кинематических механиче- ских возмущений . . . . .	39
2.2. Слой под действием поверхностных динамических механических возмущений . . . . .	45
2.3. Смешанная задача для слоя . . . . .	47
2.4. Объёмные функции Грина для слоя . . . . .	50
2.5. Функции Грина для полупространства . . . . .	56
<b>Глава 3. Анализ напряженно-деформированного состояния тер- моупругодиффузионных сред под действием нестационарных возмущений</b> . . . . .	59
3.1. Анализ влияния связанных термодиффузионных полей на напря- женно-деформированное состояние . . . . .	59

3.2. Переход к бесконечным скоростям распространения тепловых и диффузионных возмущений . . . . .	69
3.3. Термоупругая диффузия без учёта перекрёстных диффузионных эффектов . . . . .	72
3.4. Оптимизация формул для функций Грина . . . . .	75
3.5. Переход к стационарным режимам . . . . .	79
<b>Заключение</b> . . . . .	92
<b>Список использованных источников</b> . . . . .	93
<b>Приложения</b> . . . . .	115
А. Определители Крамера к п. 2.1 для двухкомпонентных сред . . . . .	115
Б. Многочлены $P_{ik}$ для п. 3.3 в случае динамических граничных условий	118
В. Многочлены $P_{ikl}$ для п. 3.3 в случае смешанных граничных условий	119

## Введение

На современном уровне развития технологий создание материалов с заранее запрограммированными свойствами и модификация уже имеющихся материалов под новые стандарты качества – одно из актуальных направлений разработок в области технологии обработки конструкционных материалов. Разработка математических моделей воздействия различных факторов на обрабатываемый материал и анализ получаемых результатов позволяют рассмотреть большее число эффектов взаимодействия физических полей при минимизации финансовых затрат в случае исследования сложных высокотехнологических процессов.

Существует целый ряд подходов к созданию математических моделей, и один из перспективных, дающих возможность наиболее точно описать рассматриваемые технологические и физические процессы, является построение и анализ моделей связанных полей: механических, тепловых, электрических, магнитных и диффузионных. Известно, что деформация тела связана с изменением содержащегося в нем тепла, а именно, изменяющееся во времени поле деформаций вызывает изменение поля температуры, и наоборот. Таким же образом, наличие диффузионных потоков приводит к перераспределению компонентов вещества, поэтому в диффузионной зоне возникает напряжённо-деформированное состояние, которое в свою очередь за счет деформации кристаллической решетки влияет на величину диффузионного потока.

Моделирование связанности полей необходимо не только при описании технологических процессов. Использование функциональных элементов машин и приборов, изготовленных из многокомпонентных материалов, в условиях интенсивных нагрузок различной физической природы (механических, тепловых, диффузионных) обуславливает необходимость исследования термомеханического поведения этих элементов. Количественное и качественное описание, а так-

же прогнозирование свойств тел из упомянутых материалов основывается на теоретических моделях механики сплошной среды, которые в рамках континуальных представлений учитывают взаимосвязь физико-механических полей в телах сложной внутренней структуры.

Модели, рассматривающие поведение материала в упругой зоне с учётом тепломассопереноса, называются термоупругодиффузионными моделями. Также применимы словосочетания “термоупругая диффузия”, “термоупругость с учетом диффузии”. Термин “thermoelastic diffusion” часто используется за рубежом наряду с термином “thermoelastodiffusion”. Эти модели, помимо граничных и начальных условий, включают в себя уравнения движения, теплопереноса, массопереноса, а также физические и кинематические соотношения. Следует отметить, что в настоящее время не существует общих методов аналитического исследования нестационарных задач механики связанных полей, в частности задач термомеханодиффузии.

Данная работа посвящена разработке аналитических методов исследования одного из классов нестационарных задач термоупругой диффузии, а именно – одномерных задач для тел с плоскими границами.

Структура работы: Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка литературы, включающего 187 наименований, заключения, а также приложений.

В первой главе дан аналитический обзор публикаций, посвящённых задачам термоупругой диффузии. Из обзора следует, что несмотря на большое разнообразие существующих в настоящее время моделей термомеханодиффузии, в основном рассматривались несвязанные задачи, либо связанные задачи в статической или в стационарной постановке. При этом во многих публикациях использовались численные методы исследования. В то же время обзор свидетельствует, что постановки задач механодиффузии и их обобщения с учетом температурных полей проработаны достаточно детально. Также стоит отметить, что на современном этапе широко используются обобщенные модели,

учитывающие релаксационные тепловые и диффузионные эффекты. Также в этой главе приведены линеаризованные уравнения термоупругой диффузии для многокомпонентных сред в прямоугольной системе координат и указаны возможные начально-краевые задачи. Здесь же указывается общий подход к решению подобного рода задач. Решение задач строится в интегральной форме, представляющей собой свертку функций Грина с функциями, задающими внешние поверхностные или объемные термоупругодиффузионные возмущения. При этом сами функции Грина ищутся в виде разложений по собственным функциям, которые являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

Во второй главе в рамках построенных моделей рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для слоя и полупространства в декартовой системе координат с учётом конечной скорости распространения тепловых и диффузионных возмущений. Показано, что данная задача допускает возможность построения аналитического решения в виде элементарных функций (синус, косинус) только при определенных видах граничных условий, которые образуют 3 группы начально-краевых задач. Алгоритм решения соответствующих одномерных задач термоупругой диффузии представляется в виде последовательности следующих действий. К исходной задаче применяется преобразование Лапласа по времени, а также ряды Фурье в задачах для одномерного слоя или синус-, косинус-преобразование в задачах для одномерного полупространства. Как результат, каждая начально-краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно трансформант искомых функций. С учетом того, что решения указанных систем являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа, алгоритм нахождения оригиналов по Лапласу в этом случае осуществляется аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Таким образом, представлены алгоритмы получения поверхностных и объемных функций Грина для всех 3 групп граничных условий.

В третьей главе приводится анализ полученных решений, исследуется влияние связанности полей перемещений, температур и концентраций. Также рассматривается учёт конечной скорости распространения тепловых и диффузионных возмущений. Показана необходимость учёта релаксационных эффектов в связанных задачах термоупругой диффузии на временах, соизмеримых с этими временами релаксации. Помимо этого, исследовано влияние учёта перекрёстных диффузионных эффектов на термоупругодиффузионные процессы в сплошных средах. Продемонстрированы расчётные примеры. Построено решение стационарной задачи термоупругой диффузии для многокомпонентных сред. Исследован переход от нестационарных режимов к стационарным.

**Целью работы** является исследование нестационарного взаимодействия механических, температурных и диффузионных полей в упругих средах, включающее постановки и решения новых задач, а также практические расчеты, позволяющие количественно оценить эффекты, обусловленные взаимным влиянием указанных полей друг на друга.

**Актуальность работы** обусловлена все более и более возрастающим интересом к проблеме исследования связанных термомеханодиффузионных процессов, что подтверждается большим числом современных публикаций как в России, так и за рубежом. Модели, описывающие указанные процессы, постоянно совершенствуются с целью получения более точного описания функционирования конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях воздействия нагрузок различной физической природы.

**Методы исследования.** Для построения замкнутой модели термоупругой диффузии используется аппарат линейной теории упругости, законы термодинамики и тепломассопереноса. Метод решения базируется на теории обобщенных функций, с помощью которой искомые решения представляются в интегральной форме. Ядрами этих представлений являются функции Грина, для нахождения которых используется метод разделения переменных, реализую-

щийся с помощью разложений в ряды по собственным функциям термоупруго-диффузионного оператора и преобразования Лапласа. Указанный подход позволяет в явном виде получить решения рассматриваемых задач, что в свою очередь позволяет с помощью математических пакетов проанализировать эффекты, связанные с взаимодействием механического, температурного и диффузионных полей.

**Научная новизна** работы состоит в построении решений нового класса одномерных нестационарных задач термоупругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков, а также наличия перекрестных диффузионных эффектов.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечивается использованием известных математических методов построения моделей механики связанных полей, которые базируются на известных уравнениях механики деформируемого твёрдого тела, тепломассопереноса и термодинамики. Для решения начально-краевых задач используются апробированные методы математической физики. Для верификации результатов выполнялось сравнение полученных решений задач термомеханодиффузии с известными решениями задач упругости и исследовались переходы к решениям соответствующих статических задач.

**Практическая значимость работы** состоит в разработке методик расчета напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий, с учетом протекающих в них явлений тепломассопереноса. Интерес к подобного рода проблемам объясняется тем, что взаимодействие физических полей в сплошных средах может оказывать нежелательное влияние на функционирование конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях нагрузок различной физической природы. Анализ возникающих при этом эффектов невозможен без разработки моделей термомеханодиффузии и методов решения соответствующих задач.

ющих начально-краевых задач. Всё это в целом обуславливает практическую значимость работы.

**Апробация результатов исследования.** Все основные результаты работы были предметом докладов, обсуждений и дискуссий на российских и международных конференциях, симпозиумах и съездах:

- 14th International Conference on Fracture ICF 14 (Rhodes, Greece, 2017);
- 7th International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences (Moscow 2018);
- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская область, Ярополец, Кременки, 2013 – 2020);
- Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2014 – 2019);
- Междунар. научно-практические конф. «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» и «Проблемы безопасности на транспорте» (Белоруссия, Гомель, 2017 – 2019);
- Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». (Тула, 2014);
- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2014 – 2019);
- Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2014 – 2020);
- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2015 – 2017);
- Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Краснодарский край, Дивноморское, 2016 – 2019);
- Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (Сочи, 2017,

2018);

– IV Конференция молодых ученых и специалистов «Научно-технологическое развитие судостроения» (Санкт-Петербург, 2017);

– Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2016, 2018);

– XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019);

– XIX Всероссийская школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2019).

На различных этапах работа поддерживалась грантом РФФИ (код проекта 18-31-00437).

В заключении приводятся основные результаты диссертации.

**Публикации.** Основные материалы диссертации опубликованы в 35 печатных работах, из них 10 статей в рецензируемых журналах, 25 в сборниках трудов конференций и тезисов докладов.

## Глава 1

# Постановка нестационарных задач термоупругой диффузии

В данной главе приведён обзор современного состояния исследований в области термомеханодиффузии. Также построена нестационарная модель термоупругой диффузии для одномерных физико-механических процессов.

### 1.1. Современное состояние исследований

Из-за активного развития науки и техники с конца 19-го века и по настоящее время стали актуальны вопросы анализа связанности физических процессов, например таких, как термоупругость или механодиффузия. Появилась необходимость уточнения имеющихся на тот период математических и физических моделей различных явлений и процессов [2, 48, 49].

Неравномерное тепловое расширение в общем случае не может происходить свободно в сплошном теле. Оно вызывает температурные напряжения внутри материала. Знание величины и характера действия тепловых напряжений необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции. Тепловые напряжения сами по себе и в сочетании с механическими напряжениями от внешних сил могут вызвать появление трещин и разрушение конструкции из материала с повышенной хрупкостью. Некоторые материалы при быстром возникновении напряжений, обусловленном действием резко нестационарного температурного поля, становятся хрупкими и не выдерживают теплового удара. Повторное действие тепловых напряжений приводит к термоусталостному разрушению элементов конструкции [65, 66].

Действие тепловых напряжений может вызвать значительную пластиче-

скую деформацию, ведущую к полному или прогрессирующему разрушению конструкции, термовыпучиванию тонкостенной конструкции и т. п. Исследования по термоупругости сначала стимулировались задачами о термоупругих напряжениях в элементах конструкций. Они проводились на основе теории, разработанной Дюамелем и Нейманом, которые исходили из следующего предположения: полная деформация является суммой упругой деформации, связанной с напряжениями обычными соотношениями, и чисто теплового расширения, соответствующего известному из классической теории теплопроводности температурному полю. Во второй половине 20-го века Ландау, Лифшиц, Седов, Новацкий и др. стали предлагать связанные математические модели как линейной, так и нелинейной термоупругости [65, 66].

Теория термоупругости на данный момент является известной областью науки, и ей посвящено множество публикаций как в России, так и в мире [58, 59]. Однако для описания технологических процессов взаимного внедрения различных материалов также необходимо учитывать процессы массопереноса и его влияние на напряжённо-деформированное состояние.

Исследование взаимодействия массопереноса и деформаций имеет довольно длинную историю. Не вдаваясь в подробности, отметим только, что первая публикация [18], посвященная изучению влияния изгибных деформаций на массоперенос, появилась в 1936 году. Вплоть до середины 50-х годов 20-го века исследования носили преимущественно экспериментальный характер, что отражено в работах [5, 10, 53, 67–69, 71, 72, 88, 89].

Начало теоретических исследований, направленных на построение математических моделей, описывающих взаимодействие диффузионного и механического полей, связано с публикацией [163]. В дальнейшем, в рамках феноменологического подхода, основанного на теории гомогенных смесей, были построены замкнутые математические модели и сформулированы соответствующие начально-краевые задачи термомеханодиффузии. Среди наиболее новых и зна-

чимых работ здесь можно отметить [8, 60, 61, 64, 70, 75, 76, 78, 79, 83, 86, 90, 93, 95, 97–99, 102–105, 107, 109, 118, 121–125, 127, 128, 130–133, 140, 146, 147, 150, 157, 159, 160, 162, 164–166, 169, 170, 172, 173, 175, 177, 178, 182, 183, 185, 186].

Здесь в основном исследуются линейные модели термомехано-dиффузии. Среди них следует особо выделить публикации, в которых рассматриваются задачи с конечной скоростью распространения тепла и массопереноса [73, 95, 103, 105, 107, 119–121, 121, 122, 131, 133, 138, 159, 167, 169, 172, 173, 178, 182, 183], а также модели, в которых массоперенос и температура описываются уравнениями с дробными производными по времени [115, 123, 145, 166, 170]. Постановки нелинейных задач рассматриваются в работах [8, 60, 64, 86, 101, 108, 125, 127].

Особенного внимания заслуживает работа [149]. В ней рассматриваются различные расширенные модели термодинамики газа, жидкости и твёрдого тела, в т.ч. и приведены связанные задачи. Активной критике и уточнению подвергаются работы и модели Каттанео, хотя именно они получили дальнейшее развитие у авторов таких работ как [101, 126, 133, 170] и др.

Кроме того, достаточно подробный обзор, посвященный различным вопросам моделирования термомехано-dиффузионных процессов за XX век, имеется в работах [16, 158].

Также стоит выделить работы [5, 6, 17], в которых подробно и доступно описываются явления массопереноса в твёрдых телах, в т.ч. и многокомпонентных средах.

Обзор вышеперечисленных публикаций показывает, что рассматриваемые на сегодняшний день модели термоупругой диффузии могут включать в себя как классические, так и обобщенные законы Фика и Фурье. Обобщенные модели представляют большой интерес, т.к. позволяют описать быстро протекающие процессы в средах при моделировании технологий типа сварки взрывом или коротко импульсной лазерной обработки [184, 186]. В этом случае рассматриваются ненулевые времена релаксации или, что то же самое, конечные скорости

распространения диффузионных и тепловых возмущений [142, 143]. Уравнение теплопроводности, связанное с этой теорией, является гиперболическим и, следовательно, устраняет парадокс бесконечных скоростей распространения, свойственных как несвязанным, так и связанным теориям термоупругости [171].

В работе [168] показано на примере стационарных задач влияние учёта времени тепловой релаксации с помощью теории Лорда и Шульмана [148] на напряжения, концентрацию и химический потенциал. При некоторых случаях теплового нагружения достигается разница на порядок. Также показано различие результатов с учетом и без учета диффузии.

В работе [91] представлена феноменологическая модель теплопроводности высоких энергий, а также даны оценки временам релаксации и исследованы их эффекты на конечный результат расчёта.

В работах [151, 152] рассматривается линейная модель квазистатических связанных процессов диффузии, вязкоупругой деформации, химических реакций и эволюции микроструктуры. Стоит отметить, что исследования связанных процессов, включающих также химические и вязкие, представляют особый практический интерес для технологов и материаловедов, однако их учёт связан со значительными математическими трудностями, особенно в нестационарных задачах.

Также есть модели термоупругости, рассматривающие отдельно релаксацию градиента температур и теплового потока [94, 186]. Одно из времен релаксации интерпретируется как задержка, вызванная микроструктурными взаимодействиями (мелкомасштабными механизмами теплопередачи, происходящими в микромасштабе) и называется фазовым запаздыванием градиента температуры. Другое время релаксации интерпретируется как время релаксации из-за быстрых переходных эффектов тепловой инерции (мелкомасштабных эффектов переноса тепла во времени) и называется фазовым запаздыванием теплового потока. При динамических нагрузках их вариация может значительно сказываться

ся на кинематику и динамику массопереноса [94]. В работе [186] рассматривается модель с использованием разложения в ряд Тейлора по временам тепловой и температурной релаксации на основе теории Грина и Нагди [126], что представляет собой модификацию обобщённых законов Фика и Фурье. Аналогичные различные времена релаксации можно ввести и для процесса массопереноса, однако таких работ пока не было встречено.

В работе [96] было показано, что на больших промежутках времени обе теории (обобщённая и необобщённая) дают практически одинаковые результаты. Это связано с короткой продолжительностью так называемого второго звукового эффекта (волновым тепловым возмущением).

Превалирующее число работ рассматривает только влияние тепловой релаксации на термоупругодиффузионные среды. При этом данные об используемых в расчётных примерах времена релаксации разнятся на порядки. Ряд авторов из Индии [134, 138, 169] рассматривают время тепловой релаксации 0.02 сек и диффузионной 0.2 сек. Хотя, как известно, время тепловой релаксации в твердых телах значительно меньше диффузионной [80, 91].

Обзор опубликованных монографий и статей позволяет сделать вывод о том, что исследования в области связанных нестационарных задач термомеханодиффузии недостаточны. Несмотря на большое разнообразие и сложность постановок задач (вплоть до моделей термоэлектромагнитомеханодиффузии), основные достижения в этой области в основном были получены с использованием численных и численно-аналитических методов. Здесь в качестве примера можно привести публикации, посвященные решению: статических [4, 83, 84, 134–137, 165], квазистатических [77, 79, 174, 176] и стационарных [73, 93, 103, 129, 138, 139, 157, 178, 183] задач термомеханодиффузии. Решение подобных задач, даже в многомерном случае особых затруднений не вызывает. Что касается нестационарных задач термомеханодиффузии: одномерных [92, 100, 166, 169, 172, 173] и двумерных [50, 95, 107, 119, 122], в том числе и в цилиндрической системе ко-

ординат [97, 115, 118, 182], то их решение, ввиду использования преобразование Лапласа по времени и его последующего обращения, связано с существенными математическими трудностями.

Для решения этой проблемы применяются алгоритмы, основанные в основном на том, что интеграл Меллина по мнимой прямой выражается через обратное преобразование Фурье, для вычисления которого в дальнейшем используются либо квадратурные формулы, либо ряд Фурье. При этом, как справедливо отмечено в работе [81], универсального алгоритма обращения преобразования Лапласа не существует. Каждый конкретный алгоритм подходит под определенный класс функций. Специфика же изображений влияет на выбор подходящих систем функций с помощью которых можно приблизить искомые значения оригиналов. При этом изображения, получающиеся при решении конкретных задач, являются настолько громоздкими, что практически проверить возможность применения того или иного алгоритма для нахождения их оригиналов не всегда представляется возможным.

Помимо уже отмеченных недостатков таких подходов отметим, что диффузионные процессы протекают достаточно медленно, поэтому может возникнуть необходимость в численном вычислении интегралов (например при обращении преобразования Лапласа или вычислении свертки) на очень больших интервалах, что может потребовать использования очень большого количества точек разбиения промежутков интегрирования. Ввиду этого обстоятельства, практически все задачи рассматриваются в малой окрестности начального момента времени, что не позволяет в полной мере промоделировать протекающие в средах термомеханодиффузионные процессы.

Также необходимо отметить, что незначительное количество работ посвящено многокомпонентным средам, хотя именно они представляют значительный прикладной интерес [43].

Что касается точных решений, то в связи с относительно большой раз-

мерностью систем дифференциальных уравнений, вытекающих из постановок задач термомехано-диффузии, они присутствуют лишь в единичных работах.

В работах [15, 33, 35, 110] были рассмотрены подходы к решению задач нестационарной упругой диффузии и термоупругой диффузии с граничными условиями произвольного вида.

## 1.2. Математическая модель термоупругой среды с учётом диффузии

Дальнейшее исследование связанности полей различной физической природы опирается на обобщенную модель термомеханодиффузии с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных потоков. Для её построения на первом этапе используются *линеаризованные уравнения движения сплошной среды* и *линеаризованные геометрические соотношения*, а также *законы Фурье, Фика* и *линеаризованные уравнения массопереноса*.

Уравнения движения сплошной среды относительно недеформированного состояния, а также геометрические соотношения в криволинейной системе координат имеют вид [19, 59, 85]:

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j \sigma^{ij} + \rho F^i, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (1.1)$$

где  $t$  – время;  $\rho$  – плотность среды;  $u^i$  – компоненты вектора перемещений,  $F^i$  – компоненты вектора массовых сил;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформации Коши;  $\sigma^{ij}$  – компоненты тензора напряжений Эйлера.

В дополнение к соотношениям (1.1) записываются уравнения теплового и диффузионного потоков с учётом конечной скорости переноса тепла и массы (обобщенные законы Фурье и Фика), а также уравнения баланса массы [63]:

$$P^i + t_\vartheta \frac{\partial P^i}{\partial t} = -\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta, \quad (1.2)$$

$$J^{(q)i} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial J^{(q)i}}{\partial t} = -\sum_{r=1}^N \frac{L^{(qr)ij}}{T_0} \nabla_j G^{(r)};$$

$$\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} = -\nabla_i J^{(q)i} + F^{(q)} \quad (q = \overline{1, N}); \quad (1.3)$$

где  $\vartheta = T - T_0$ ;  $T_0$  и  $T$  – начальная и актуальная температура среды;  $P^i$  – вектор плотности теплового потока;  $G^{(q)}$  – химический потенциал  $q$ -ой компоненты вещества в составе  $N$  - компонентной среды;  $\kappa^{ij}$  – компоненты тензора

теплопроводности;  $L^{(qr)ij}$  – коэффициенты матрицы Онзагера;  $J^{(q)i}$  – компоненты вектора плотности массового потока;  $t_\vartheta$  и  $t_\eta^{(q)}$  – время релаксации теплового и диффузионных потоков;  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  – изменение концентрации;  $n_0^{(q)}$  и  $n^{(q)}$  – начальная и актуальная концентрации (массовые доли) компоненты  $q$ -го вещества, причем  $\sum_{q=1}^N n_0^{(q)} = 1$ ;  $F^{(q)}$  – плотность источников вещества (количество вещества, образующегося вследствие химических реакций в единице объёма за единицу времени) для  $q$ -ой компоненты.

В замкнутой относительно диффузионных процессов системе, из закона сохранения массы следует, что [63]:

$$\sum_{q=1}^N n^{(q)} = 1 \Rightarrow \sum_{q=1}^N \eta^{(q)} = 0. \quad (1.4)$$

Это соотношение не является независимым, а может рассматриваться, как следствие из уравнения баланса массы (1.3). В самом деле, из (1.3), при условии изолированности системы, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{q=1}^N \eta^{(q)} = -\operatorname{div} \sum_{q=1}^N \mathbf{J}^{(q)} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\sum_{q=1}^N \eta^{(q)} = \text{const.}$$

Причём в начальном состоянии  $\eta^{(q)} = 0$ , поэтому получаем соотношение (1.4).

Система уравнений (1.1) и (1.2) является незамкнутой. Поэтому, на втором этапе для построения недостающих соотношений используем первый и второй законы термодинамики [19, 59, 62, 63, 85], записанные в виде *уравнения притока тепла*

$$\rho \frac{dU}{dt} = N_s + \rho \left( q^{(Q)} + \tilde{q} \right) \quad (1.5)$$

и *уравнения баланса энтропии*

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \rho q^{(Q)} + W_d. \quad (1.6)$$

Здесь  $S$  – удельная энтропия;  $W_d$  – удельная энергия рассеяния (будем далее полагать, что  $W_d = 0$ );  $\rho^{(Q)}$  – массовая плотность тепловых источников;  $\tilde{q}dt$  – массовая плотность притока энергии без учета тепловой составляющей;  $U$  – внутренняя энергия среды;  $N_s = \sigma^{ij}v_{ij}$  – мощность тензора напряжений,  $v_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций.

Энтропия  $S$ , внутренняя энергия  $U$  и химический потенциал  $G^{(q)}$  системы играют роль термодинамических потенциалов (функций), связывающих термодинамические параметры (переменные) системы, которые характеризуют её состояние в любой момент времени. В качестве термодинамических параметров выступают тензоры деформаций (или напряжений), температура и концентрации компонент твёрдого раствора.

Используя *функцию свободной энергией системы*

$$\Psi = U - ST,$$

дифференциал внутренней энергии, с учетом (1.6) и при условии  $W_d = 0$ , запишется так

$$dU = d\Psi + SdT + TdS = d\Psi + SdT + q^{(Q)}dt. \quad (1.7)$$

Кроме того, будем считать, что дополнительный приток энергии  $\tilde{q}dt$  в уравнении баланса энергии происходит за счет массопереноса, т.е.

$$\rho\tilde{q}dt = \rho \sum_{r=1}^N G^{(r)}d\eta^{(r)}. \quad (1.8)$$

Подставляя полученные выражения (1.7) и (1.8) в (1.5), получаем следующее уравнения притока тепла:

$$d\Psi = \frac{\sigma^{ij}}{\rho}d\varepsilon_{ij} - Sd\vartheta + \sum_{q=1}^N G^{(q)}d\eta^{(q)}.$$

Отсюда получаем следующие выражения для физических соотношений:

$$\sigma^{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad S = -\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad G^{(q)} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta^{(q)}}. \quad (1.9)$$

Далее, для построения линейных физических соотношений нестационарной модели термоупругой диффузии разложим функцию свободной энергии в ряд Тейлора в окрестности начального состояния, удерживая члены до второго порядка малости. При этом полагаем, что в начальном состоянии (обозначается нижнем индексом «0») )

$$\sigma_0^{ij} = \rho \frac{\partial \Psi \left( 0, T_0, n_0^{(q)} \right)}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0, \quad S_0 = - \frac{\partial \Psi \left( 0, T_0, n_0^{(q)} \right)}{\partial \vartheta} = 0,$$

$$G_0^{(q)} = \frac{\partial \Psi \left( 0, T_0, n_0^{(q)} \right)}{\partial \eta^{(q)}} = 0.$$

Кроме того, величину  $\Psi \left( 0, T_0, n_0^{(q)} \right)$ , определяющую некий постоянный уровень энергии также полагаем равной нулю. В результате получаем, что в квадратичном приближении свободная энергия есть однородный многочлен второй степени от деформаций, приращения температуры, а также приращений концентраций веществ [7, 181]:

$$\Psi \left( \varepsilon_{ij}, \vartheta, \eta^{(q)} \right) = \frac{1}{2\rho} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \frac{c_0}{2T_0} \vartheta^2 + \frac{1}{2} \sum_{q,r=1}^N M^{(qr)} \eta^{(q)} \eta^{(r)} - \frac{1}{\rho} b^{ij} \varepsilon_{ij} \vartheta -$$

$$- \frac{1}{\rho} \sum_{q=1}^N \alpha^{(q)ij} \eta^{(q)} \varepsilon_{ij} - \vartheta \sum_{q=1}^N v^{(q)} \eta^{(q)}, \quad (1.10)$$

где

$$C^{ijkl} = \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0, \quad c_0 = - \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} \right)_0, \quad M^{(qr)} = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^{(q)} \partial \eta^{(r)}} \right)_0,$$

$$b^{ij} = - \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \vartheta} \right)_0, \quad \alpha^{(q)ij} = - \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \eta^{(q)}} \right)_0, \quad v^{(q)} = - \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta \partial \eta^{(q)}} \right)_0.$$

Здесь  $C^{ijkl}$  и  $b^{ij}$  – компоненты тензоров упругих и тепловых постоянных;  $c_0$  – коэффициент теплоемкости в начальном состоянии. Коэффициенты  $M^{(qr)}$ ,  $\alpha^{(q)ij}$ ,  $v^{(q)}$  определяются типом кристаллическое решетки и являются характеристиками, связывающими механическое и температурное поля с диффузионным полем.

Подставляя теперь выражение для свободной энергии (1.10) в равенства (1.9), получаем линеаризованные физические соотношения термомехано-диффузии

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - b^{ij} \vartheta - \sum_{q=1}^N \alpha^{(q)ij} \eta^{(q)}; \quad (1.11)$$

$$S = \frac{c_0}{T_0} \vartheta + \frac{b_{ij}}{\rho} \varepsilon_{ij} + \sum_{q=1}^N v^{(q)} \eta^{(q)}; \quad (1.12)$$

$$G^{(q)} = \sum_{r=1}^N M^{(qr)} \eta^{(r)} - \frac{1}{\rho} \alpha^{(q)ij} \varepsilon_{ij} - v^{(q)} \vartheta. \quad (1.13)$$

Здесь  $\alpha^{(q)ij}$  – коэффициенты, характеризующие объёмное расширение среды за счет массопереноса.

За счёт первых двух уравнений в (1.5) из (1.12) может быть исключена энтропия:

$$c_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{T_0 b^{ij}}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + T_0 \sum_{q=1}^N v^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} = \rho^{(Q)} - \rho^{-1} \nabla_i P^i. \quad (1.14)$$

Далее, дифференцируя равенство (1.14) по времени  $t$ , домножая результат дифференцирования на  $t_\vartheta$  и прибавляя его к (1.14), получим *уравнение теплопереноса с конечной скоростью распространения тепловых потоков*:

$$\left(1 + t_\vartheta \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(c_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{T_0 b^{ij}}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + T_0 \sum_{q=1}^N v^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} - \rho^{(Q)} + \rho^{-1} \nabla_i P^i\right) = 0. \quad (1.15)$$

Переходя к построению уравнения массопереноса, будем использовать для коэффициентов  $M^{(qr)}$ ,  $v^{(q)}$  и  $L^{(qr)ij}$  следующие представления [56]:

$$M^{(qr)} = g^{(qr)} \frac{RT_0}{m^{(q)} n_0^{(q)}}, \quad v^{(q)} = \frac{R}{m^{(q)}} \ln \left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}\right), \quad (1.16)$$

$$\frac{R}{m^{(q)}} L^{(qr)ij} = D^{(qr)ij} n_0^{(q)}, \quad D^{(qr)ij} = D^{(qq)ij} g^{(qr)}.$$

Здесь  $\gamma^{(q)}$  – коэффициент активации, зависящий только от концентраций  $n^{(q)}$ ;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $D^{(qq)ij}$  – коэффициенты самодиффузии;

$m^{(q)}$  – молярная масса компоненты с номером  $q$ ;  $g^{(qr)}$  – термодинамические множители Даркена [63]:

$$g^{(qr)} = \delta_{qr} + \frac{n^{(q)} \partial \ln \gamma^{(q)}}{n^{(r)} \partial \ln n^{(r)}} \Big|_{n^{(q)}=n_0^{(q)}, n^{(r)}=n_0^{(r)}},$$

где  $\delta_{qr}$  – символ Кронекера.

С учетом (1.16) выражение для химического потенциала (1.13) записывается так:

$$G^{(q)} = \frac{RT_0}{m^{(q)} n_0^{(q)}} \sum_{r=1}^N g^{(qr)} \eta^{(r)} - \frac{1}{\rho} \alpha^{(q)ij} \varepsilon_{ij} - \frac{R}{m^{(q)}} \ln \left[ n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right] \vartheta. \quad (1.17)$$

Далее применяем те же преобразования к уравнению массового баланса, что и для уравнения теплопереноса (1.14). Вначале подставляем выражение для химического потенциала (1.17) в уравнение (1.3). Затем дифференцируем это уравнение по времени  $t$ , после чего результат дифференцирования домножим на  $t_\eta^{(q)}$  и прибавим к исходному уравнению. Тогда получим *уравнение массопереноса с конечной скоростью распространения диффузионных потоков*:

$$\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial t^2} = \sum_{r=1}^N \frac{m^{(q)} n_0^{(q)}}{RT_0} \nabla_i \left( D^{(qq)ij} \nabla_j G^{(r)} \right) + \left( 1 + t_\eta^{(q)} \frac{\partial}{\partial t} \right) F^{(q)}. \quad (1.18)$$

Таким образом, полученные здесь уравнения тепло и массопереноса с конечными скоростями распространения тепловых и диффузионных потоков рассматриваются как следствие классических уравнений (1.14) и (1.3) при условии, что тепловые и диффузионные потоки удовлетворяют обобщенным законам Фурье и Фика (1.2). Вопросы, касающиеся обоснования этих соотношений, в настоящей работе не рассматриваются.

Ниже приводится обобщенный закон Фика с учетом выражения для химического потенциала (1.17) ( $q = \overline{1, N}$ ):

$$J^{(q)i} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial J^{(q)i}}{\partial t} = - \sum_{r=1}^N D^{(qq)ij} g^{(qr)} \nabla_j \eta^{(r)} + \frac{D^{(qq)ij} m^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho RT_0} \nabla_j \left( \alpha^{(q)kl} \varepsilon_{kl} \right) + \frac{D^{(qq)ij} n_0^{(q)}}{T_0} \ln \left( n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right) \nabla_j \vartheta. \quad (1.19)$$

Таким образом, замкнутая система уравнений линейной теории термоупругости с учётом диффузии с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных возмущений даёт соотношениями (1.1), (1.11), (1.15), (1.17), (1.18). Из неё можно исключить деформации  $\varepsilon_{ij}$  и химический потенциал  $G^{(q)}$ .

В результате получаем:

– уравнение движения сплошной среды

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j (C^{ijkl} \nabla_k u_l) - \nabla_j (b^{ij} \vartheta) - \sum_{r=1}^N \nabla_j \left( \alpha^{(r)ij} \eta^{(r)} \right) + \rho F^i; \quad (1.20)$$

– уравнение теплопереноса

$$\begin{aligned} \rho c_0 \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + t_\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \right) &= \nabla_i (\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta) - T_0 b^{ij} \nabla_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} + t_\vartheta \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) - \\ &- \rho R T_0 \sum_{r=1}^N \frac{\ln \left( n_0^{(r)} \gamma^{(r)} \right)}{m^{(q)}} \left( \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial t} + t_\vartheta \frac{\partial^2 \eta^{(r)}}{\partial t^2} \right) + \rho \left( \rho^{(Q)} + t_\vartheta \frac{\partial \rho^{(Q)}}{\partial t} \right); \end{aligned} \quad (1.21)$$

– уравнения массопереноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial t^2} &= \sum_{r=1}^N \nabla_i \left( D^{(qr)ij} g^{(qr)} \nabla_j \eta^{(r)} \right) - \\ &- \frac{m^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0} \nabla_i \left[ D^{(q)ij} \nabla_j \left( \alpha^{(q)kl} \nabla_k u_l \right) \right] - \\ &- \frac{n_0^{(q)}}{T_0} \ln \left( n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right) \nabla_i \left( D^{(q)ij} \nabla_j \vartheta \right) + \left( F^{(q)} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial F^{(q)}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь произведение  $D^{(qr)ij} = D^{(qq)ij} g^{(qr)}$  из (1.16) представляет собой парциальный коэффициент диффузии.

Построенная здесь система уравнений (1.20) – (1.22) является обобщением моделей, полученных в работах [96, 135, 136, 150, 187] на случай многокомпонентных анизотропных сред.

Для формулировки начально-краевых задач термомеханодиффузии полагаем, что искомые функции удовлетворяю нулевым начальным условиям

$$u^i|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u^i}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0;$$

$$\eta^{(q)} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad q = \overline{1, N}.$$

и следующим граничным условиям на поверхности  $\partial G$  тела  $G$

$$u^i \Big|_{\Pi_u} = U^i, \quad \sigma^{ij} n_j \Big|_{\Pi_\sigma} = \Sigma^i, \quad \partial G = \Pi_u \cup \Pi_\sigma, \quad \Pi_u \cap \Pi_\sigma = \emptyset;$$

$$\vartheta \Big|_{\Pi_T} = \Theta, \quad \left( P^i + t_\vartheta \frac{\partial P^i}{\partial t} \right) \Big|_{\Pi_P} = Q, \quad \partial G = \Pi_T \cup \Pi_P, \quad \Pi_T \cap \Pi_P = \emptyset;$$

$$\eta^{(q)} \Big|_{\Pi_\eta} = N^{(q)}, \quad \left( J^{(q)i} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial J^{(q)i}}{\partial t} \right) \Big|_{\Pi_J} = I^{(q)i}, \quad \partial G = \Pi_\eta \cup \Pi_J, \quad \Pi_\eta \cap \Pi_J = \emptyset.$$

Величины, стоящие в правых частях граничных условий – поверхностные кинематические  $U^i$ ,  $\Theta$ ,  $N^{(q)}$  и динамические  $\Sigma^i$ ,  $Q$ ,  $I^{(q)i}$  возмущения.

Если область  $G$  не ограничена, то должны быть заданы условия на бесконечности. Примером таковых является ограниченность искомых функций.

### 1.3. Одномерные начально-краевые задачи термоупругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат

Далее будем рассматривать одномерные термоупругодиффузионные возмущения в прямоугольной декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$ . Для этого полагаем, что:

$$\mathbf{u} = (u_1(x_1, t), 0, 0), \quad \vartheta = \vartheta(x_1, t), \quad \eta^{(q)} = \eta^{(q)}(x_1, t).$$

В этом случае система (1.20) – (1.22) запишется следующим образом

$$0 = C_{2111} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - b_{21} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} - \sum_{r=1}^N \alpha_{21}^{(r)} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial x_1} + \rho F_2; \quad (1.23)$$

$$0 = C_{3111} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - b_{31} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} - \sum_{r=1}^N \alpha_{31}^{(r)} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial x_1} + \rho F_3; \quad (1.24)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = C_{1111} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - b_{11} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} - \sum_{r=1}^N \alpha_{11}^{(r)} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial x_1} + \rho F_1; \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \rho c_0 \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + t_\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \right) &= \kappa_{11} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} - T_0 b_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + t_\vartheta \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) - \\ &- \rho R T_0 \sum_{r=1}^N \frac{\ln(n_0^{(r)} \gamma^{(r)})}{m^{(q)}} \left( \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial t} + t_\vartheta \frac{\partial^2 \eta^{(r)}}{\partial t^2} \right) + \rho F_\vartheta; \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial t^2} &= \sum_{r=1}^N D_{11}^{(qr)} \frac{\partial^2 \eta^{(r)}}{\partial x_1^2} - \\ &- \frac{m^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0} D_{11}^{(qq)} \alpha_{11}^{(q)} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} - \frac{n_0^{(q)}}{T_0} \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}) D_{11}^{(qq)} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + F_\eta^{(q)}; \end{aligned} \quad (1.27)$$

где

$$F_\vartheta = \left( \rho^{(Q)} + t_\vartheta \frac{\partial \rho^{(Q)}}{\partial t} \right), \quad F_\eta^{(q)} = \left( F^{(q)} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial F^{(q)}}{\partial t} \right).$$

Для совместности вышеуказанной системы (1.23) – (1.27) необходимо потребовать, что

$$\begin{aligned} C_{2111} = C_{3111} = 0, \quad b_{21} = b_{31} = 0, \quad \alpha_{21}^{(r)} = \alpha_{31}^{(r)} = 0, \\ F_2(x_1, t) = F_3(x_1, t) \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Тогда получаем систему, состоящую из уравнений (1.25), (1.26), (1.27), описывающую одномерные термоупругодиффузионные процессы в среде.

Запишем далее выражения для ненулевых компонент тензора напряжений, а также ненулевых компонент векторов тепловых и диффузионных потоков:

$$\sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} - b_{11}\vartheta - \sum_{q=1}^N \alpha_{11}^{(q)}\eta^{(q)}; \quad (1.29)$$

$$\sigma_{22} = C_{2211}\varepsilon_{11} - b_{22}\vartheta - \sum_{q=1}^N \alpha_{22}^{(q)}\eta^{(q)}; \quad (1.30)$$

$$\sigma_{33} = C_{3311}\varepsilon_{11} - b_{33}\vartheta - \sum_{q=1}^N \alpha_{33}^{(q)}\eta^{(q)}; \quad (1.31)$$

$$P_1 + t_\vartheta \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\kappa_{11}\vartheta; \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} J_1^{(q)} + t_\eta^{(q)} \frac{\partial J_1^{(q)}}{\partial t} = - \sum_{r=1}^N D_{11}^{(qq)} g^{(qr)} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial x_1} + \\ + \frac{D_{11}^{(qq)} \alpha_{11}^{(q)} m^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{D_{11}^{(qq)} n_0^{(q)}}{T_0} \ln \left( n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Тогда с учётом (1.28) тензоры  $\boldsymbol{\alpha}^{(r)}$  и  $\mathbf{b}$  имеют вид

$$\boldsymbol{\alpha}^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^{(r)} & \alpha_{23}^{(r)} \\ 0 & \alpha_{32}^{(r)} & \alpha_{33}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Эти условия соответствуют средам с наличием симметрии относительно плоскости  $Ox_2x_3$ .

Так как в одномерной постановке задачи (1.23) – (1.33) не участвуют величины  $b_{21}$ ,  $b_{31}$ ,  $\alpha_{21}^{(r)}$ ,  $\alpha_{31}^{(r)}$ , то без ограничений общности можно полагать, что среда ортотропная. Тогда тензоры  $\boldsymbol{\alpha}^{(r)}$  и  $\mathbf{b}$  можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{\alpha}^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Аналогичный вид имеют тензоры  $\mathbf{D}^{(qp)}$  и  $\boldsymbol{\kappa}$ :

$$\mathbf{D}^{(qp)} = \begin{pmatrix} D_{11}^{(qp)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^{(qp)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(qp)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{pmatrix},$$

а тензор упругих постоянных запишется так:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix}.$$

Следует также отметить, что уравнения термоупругой диффузии (1.23) – (1.33) содержат по одной компоненте каждого из тензоров  $\boldsymbol{\alpha}^{(r)}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{D}^{(qp)}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\mathbf{C}$ . При этом в одномерных задачах обычно задаются только нормальные нагрузки и только по оси  $Ox_1$ . Поэтому для решения начально-краевых задач достаточно считать, что среда является изотропной.

Введём следующие безразмерные параметры (при одинаковом начертании они обозначаются звёздочкой, которая в дальнейшем изложении будет опус-

каться):

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_1}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, \\
D_{qp} &= \frac{D_{11}^{(qp)}}{CL}, \quad \sigma_\gamma^* = \frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{C_{1111}}, \quad C_{\gamma\gamma 11}^* = \frac{C_{\gamma\gamma 11}}{C_{1111}}, \quad \tau_\vartheta = \frac{Ct_\vartheta}{L}, \quad \tau_q = \frac{Ct_\eta^{(q)}}{L}, \\
\Lambda_q &= \frac{m^{(q)}n_0^{(q)}D_{11}^{(qq)}\alpha_{11}^{(q)}}{\rho RT_0 CL}, \quad M_q = \frac{n_0^{(q)}D_{11}^{(qq)}\ln[n_0^{(q)}\gamma^{(q)}]}{CL}, \quad \kappa = \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 LC}, \\
\beta_q &= \frac{R \ln[n_0^{(q)}\gamma^{(q)}]}{m^{(q)}c_0}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta^*}{T_0}, \quad b_u = \frac{b_{11}T_0}{C_{1111}}, \quad b_\vartheta = \frac{b_{11}}{\rho c_0}, \\
F_1^*(\tau, x) &= \frac{F_1(t, x_1)L}{C^2}, \quad F_1^*(\tau, x) = \frac{F_\vartheta(t, x_1)L}{c_0 CT_0}, \\
F_{q+2}^*(\tau, x) &= \frac{F_\eta^{(q)}(t, x_1)L}{n_0^{(q)}C}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Здесь  $L$  – характерный размер среды (в случае слоя – его толщина), а  $C$  – скорость волн растяжения-сжатия. Тогда уравнения движения термоупругодиффузионной среды в безразмерных величинах запишется в форме (точки – производные по безразмерному времени  $\tau$ , а штрихи – производные по безразмерной координате  $x$ ) [30, 31, 38, 40]:

$$\begin{aligned}
\ddot{u} &= u'' - b_u \vartheta' - \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta_q' + F_1(x, \tau), \\
\dot{\vartheta} + \tau_\vartheta \ddot{\vartheta} &= \kappa \vartheta'' - b_\vartheta (\dot{u}' + \tau_\vartheta \ddot{u}') - \sum_{q=1}^N \beta_q (\dot{\eta}_q + \tau_\vartheta \ddot{\eta}_q) + F_2(x, \tau), \\
\dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q &= \sum_{p=1}^N D_{qp} \eta_p'' - \Lambda_q u''' - M_q \vartheta'' + F_{q+2}(x, \tau).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Полученные замкнутые системы уравнений дополняются начальными и граничными условиями, указанными в конце п. 1.2.

В качестве геометрической области  $G$  будут рассматриваться только области с плоскими границами или без таковых: одномерный плоский слой  $[0, 1]$ , одномерное полупространство  $[0, \infty)$  или пространство  $\mathfrak{R}$ .

Обезразмеренные тензоры деформации и напряжений, а также векторы теплового и диффузионного потока вдоль оси  $Ox$  имеют следующие компоненты:

$$\varepsilon = u', \quad \sigma = u' - b_u \vartheta - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j,$$

$$P + \tau_\vartheta \frac{\partial P}{\partial t} = -\kappa \vartheta',$$

$$J_q + \tau_q \frac{\partial J_q}{\partial t} = \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta_r' \quad (q = \overline{1, N}).$$

## 1.4. Начально-краевые условия для задач упругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат

Для замыкания постановки одномерной нестационарной задачи термоупругой диффузии в декартовой системе координат соотношения (1.35) должны быть дополнены граничными и начальными условиями. Выбор тех или иных граничных условий для нестационарных задач, как известно, влияет на подбор наиболее оптимальных методов решения, в т.ч. сводящих к минимуму использование численных алгоритмов. При этом возможность представления решения в виде разложения по собственным функциям (в виде рядов или интегральных преобразований) существенно упрощает поиск аналитического решения. В работе [52] для одномерного случая были решены задачи Штурма-Лаувилля и указаны *граничные условия* для задач упругой диффузии. Их аналоги для задач термоупругой диффузии имеют вид:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), \quad -\kappa\vartheta'|_{x=0} = f_{21}(\tau), \\ \left( \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta_r' \right) \Big|_{x=0} &= f_{q+2,1}(\tau), \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} u|_{x=1} &= f_{12}(\tau), \quad -\kappa\vartheta'|_{x=1} = f_{22}(\tau), \\ \left( \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta_r' \right) \Big|_{x=1} &= f_{q+2,2}(\tau); \\ \left( u' - b_u \vartheta - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=0} &= f_{11}(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta|_{x=0} &= f_{21}(\tau), \quad \eta_q|_{x=0} = f_{q+2,1}(\tau), \\ \left( u' - b_u \vartheta - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=1} &= f_{12}(\tau), \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\vartheta|_{x=1} = f_{22}(\tau), \quad \eta_q|_{x=1} = f_{q+2,2}(\tau);$$

$$\begin{aligned}
u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & -\kappa\vartheta'|_{x=0} &= f_{21}(\tau), \\
\left( \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta_r' \right) \Big|_{x=0} &= f_{q+2,1}(\tau), \\
\left( u' - b_u \vartheta - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=1} &= f_{12}(\tau), \\
\vartheta|_{x=1} &= f_{22}(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+2,2}(\tau).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Все эти граничные условия являются смешанными. Будем их классифицировать по типу механических поверхностных возмущений, используя, таким образом, классификацию, принятую в теории упругости. Тогда первую группу граничных условий (1.36) будем условно называть *кинематическими* граничными условиями. Вторую группу (1.37) – *динамическими* граничными условиями. Третью группу (1.38), представляющую собой комбинацию первых групп – *смешанными* граничными условиями.

*Замечание 1.* В работе также рассматриваются задачи термомехано диффузии для одномерного полупространства. В этом случае искомые функции предполагаются ограниченными в области решения соответствующей задачи следующим ( $x \rightarrow +\infty$ ):

$$\begin{aligned}
\eta_q &= O(1), & u &= O(1), & \vartheta' &= O(1), & \vartheta &= O(1), \\
\left( \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta_r' \right) &= O(1), \\
\left( u' - b_u \vartheta - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) &= O(1).
\end{aligned} \tag{1.39}$$

*Замечание 2.* В задачах для пространства полагается, что указанные выше ограничения (1.39) действительны в  $\mathfrak{R}$ .

Начальные условия, как было указано в п. 1.2, будем полагать нулевыми.

## 1.5. Интегральное представление решений

Решение задач, сформулированных в п. 1.3 и 1.4, представим в виде следующих свёрток:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[ \tilde{G}_{1k} ** F_k + \sum_{l=1}^2 G_{1kl} * f_{kl} \right], \\ \vartheta &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[ \tilde{G}_{2k} ** F_k + \sum_{l=1}^2 G_{2kl} * f_{kl} \right], \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[ \tilde{G}_{q+2,k} ** F_k + \sum_{l=1}^2 G_{q+2,kl} * f_{kl} \right]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Здесь  $\tilde{G}_{ik} = \tilde{G}_{ik}(x, \xi, \tau)$  – объёмные, а  $G_{ikl} = G_{ikl}(x, \tau)$  – поверхностные функции Грина задачи (1.35) ( $i = \overline{1, N+2}$ ). Сами свёртки имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ik} ** F_k &= \int_0^\tau dt \int_G \tilde{G}_{ik}(x, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi, \\ G_{ik} * f_k &= \int_0^\tau G_{ik}(x, \tau - t) f_k(t) dt. \end{aligned}$$

Поверхностные функции Грина  $G_{ikl}(x, \tau)$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{1kl} &= G''_{1kl} - b_u G'_{2kl} - \sum_{q=1}^N \alpha_q G'_{q+2,kl}, \\ \dot{G}_{2kl} + \tau_\vartheta \ddot{G}_{2kl} &= \kappa G''_{2kl} - b_\vartheta \left( \dot{G}'_{1kl} + \tau_\vartheta \ddot{G}'_{1kl} \right) - \sum_{q=1}^N \beta_q \left( \dot{G}_{q+2,kl} + \tau_\vartheta \ddot{G}_{q+2,kl} \right), \\ \dot{G}_{q+2,kl} + \tau_q \ddot{G}_{q+2,kl} &= \sum_{p=1}^N D_{qp} G''_{p+2,kl} - \Lambda_q G'''_{1kl} - M_q G''_{2kl}; \end{aligned} \quad (1.41)$$

а также каким-либо из граничных условий, аналогичных (1.36) – (1.38):

$$\begin{aligned}
G_{1kl}|_{x=0} &= \delta_{1k}\delta_{1l}\delta(\tau), & -\kappa G'_{2kl}|_{x=0} &= \delta_{2k}\delta_{1l}\delta(\tau), \\
\left( \Lambda_q G''_{1kl} + M_q G'_{2kl} - \sum_{r=1}^N D_{qr} G'_{r+2,kl} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{q+2,k}\delta_{1l}\delta(\tau), \\
G_{1kl}|_{x=1} &= \delta_{1k}\delta_{2l}\delta(\tau), & -\kappa G'_{2kl}|_{x=1} &= \delta_{2k}\delta_{2l}\delta(\tau), \\
\left( \Lambda_q G''_{1kl} + M_q G'_{2kl} - \sum_{r=1}^N D_{qr} G'_{r+2,kl} \right) \Big|_{x=1} &= \delta_{q+2,k}\delta_{2l}\delta(\tau);
\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}
\left( G'_{1kl} - b_u G_{2kl} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,kl} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k}\delta_{1l}\delta(\tau), \\
G_{2kl}|_{x=0} &= \delta_{2k}\delta_{1l}\delta(\tau), & G_{q+2,kl}|_{x=0} &= \delta_{q+2,k}\delta_{1l}\delta(\tau), \\
\left( G'_{1kl} - b_u G_{2kl} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,kl} \right) \Big|_{x=1} &= \delta_{1k}\delta_{2l}\delta(\tau), \\
G_{2kl}|_{x=1} &= \delta_{2k}\delta_{2l}\delta(\tau), & G_{q+2,kl}|_{x=1} &= \delta_{q+2,k}\delta_{2l}\delta(\tau);
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
G_{1kl}|_{x=0} &= \delta_{1k}\delta_{1l}\delta(\tau), & -\kappa G'_{2kl}|_{x=0} &= \delta_{2k}\delta_{1l}\delta(\tau), \\
\left( \Lambda_q G''_{1kl} + M_q G'_{2kl} - \sum_{r=1}^N D_{qr} G'_{r+2,kl} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{q+2,k}\delta_{1l}\delta(\tau), \\
\left( G'_{1kl} - b_u G_{2kl} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,kl} \right) \Big|_{x=1} &= \delta_{1k}\delta_{2l}\delta(\tau), \\
G_{2kl}|_{x=1} &= \delta_{2k}\delta_{2l}\delta(\tau), & G_{q+2,kl}|_{x=1} &= \delta_{q+2,k}\delta_{2l}\delta(\tau).
\end{aligned} \tag{1.44}$$

В случае неограниченности среды на функции Грина накладываются огра-

ничения, аналогичные (1.39):

$$\begin{aligned}
G_{q+2,kl} &= O(1), \quad G_{1kl} = O(1), \quad G'_{2kl} = O(1), \quad G_{2kl} = O(1), \\
\left( \Lambda_q G''_{1kl} + M_q G'_{2kl} - \sum_{r=1}^N D_{qr} G'_{r+2,kl} \right) &= O(1), \\
\left( G'_{1kl} - b_u G_{2kl} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,kl} \right) &= O(1), \quad |x| \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Объёмные функции Грина  $\tilde{G}_{ikl}(x, \xi, \tau)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{G}}_{1k} &= \tilde{G}''_{1k} - b_u \tilde{G}'_{2kl} - \sum_{q=1}^N \alpha_q \tilde{G}'_{q+2,kl} + \delta_{1k} \delta(x - \xi) \delta(\tau), \\
\dot{\tilde{G}}_{2kl} + \tau_{\vartheta} \ddot{\tilde{G}}_{2k} &= \kappa \tilde{G}''_{2k} - b_{\vartheta} \left( \dot{\tilde{G}}'_{1k} + \tau_{\vartheta} \ddot{\tilde{G}}'_{1k} \right) - \\
- \sum_{q=1}^N \beta_q \left( \dot{\tilde{G}}_{q+2,k} + \tau_{\vartheta} \ddot{\tilde{G}}_{q+2,kl} \right) &+ \delta_{2k} \delta(x - \xi) \delta(\tau), \\
\dot{\tilde{G}}_{q+2,kl} + \tau_q \ddot{\tilde{G}}_{q+2,kl} &= \sum_{p=1}^N D_{qp} \tilde{G}''_{p+2,kl} - \Lambda_q \tilde{G}'''_{1k} - \\
- M_q \tilde{G}''_{2kl} + \delta_{q+2,k} \delta(x - \xi) \delta(\tau);
\end{aligned} \tag{1.46}$$

а также нулевым начальным условиям и однородным граничным условиям, соответствующим (1.42) – (1.45).

*Замечание.* В случае слоя поверхностные функции Грина обладают свойством симметрии вдоль оси  $Ox$  для задачи (1.41) с граничными условиями (1.42) или (1.43). Это можно показать на примере задачи (1.41), (1.42). При использовании замены пространственной переменной  $y = 1 - x$  для  $G_{ikl}(x, \tau)$  имеет место следующую связь:

$$\begin{aligned}
G_{1k2}(x, \tau) &= G_{1k1}(1 - x, \tau), \quad G_{2k2}(x, \tau) = -G_{2k1}(1 - x, \tau), \\
G_{q+2,k2}(x, \tau) &= -G_{q+2,k1}(1 - x, \tau).
\end{aligned} \tag{1.47}$$

В самом деле, продифференцируем равенства (1.47) по  $x$ :

$$\begin{aligned}
G'_{1k2}(x, \tau) &= -G'_{1k1}(1-x, \tau), \\
G''_{1k2}(x, \tau) &= G''_{1k1}(1-x, \tau), \\
G'''_{1k2}(x, \tau) &= -G'''_{1k1}(1-x, \tau), \\
G'_{2k2}(x, \tau) &= G'_{2k1}(1-x, \tau), \\
G''_{2k2}(x, \tau) &= -G''_{2k1}(1-x, \tau), \\
G'_{q+1,k2}(x, \tau) &= G'_{q+2,k1}(1-x, \tau), \\
G''_{q+1,k2}(x, \tau) &= -G''_{q+2,k1}(1-x, \tau).
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Подставляя теперь (1.47) с учетом соотношений (1.48) в уравнения (1.41) при отсутствии массовых сил и в граничные условия (1.42), получаем

$$\begin{aligned}
\ddot{G}_{1kl}(1-x, \tau) &= G''_{1k1}(1-x, \tau) - \\
&- b_u G'_{2k1}(1-x, \tau) - \sum_{q=1}^N \alpha_q G'_{q+2,k1}(1-x, \tau), \\
-\dot{G}_{2k1}(1-x, \tau) - \tau_\vartheta \ddot{G}_{2k1}(1-x, \tau) &= -\kappa G''_{2k1}(1-x, \tau) + \\
&+ b_\vartheta \left( \dot{G}'_{1k1}(1-x, \tau) + \tau_\vartheta \ddot{G}'_{1k1}(1-x, \tau) \right) + \\
&+ \sum_{q=1}^N \beta_q \left( \dot{G}'_{q+2,k1}(1-x, \tau) + \tau_\vartheta \ddot{G}'_{q+2,k1}(1-x, \tau) \right), \\
-\dot{G}_{q+2,k1}(1-x, \tau) - \tau_q \ddot{G}_{q+2,k1}(1-x, \tau) &= \\
= - \sum_{p=1}^N D_{qp} G''_{p+2,k1}(1-x, \tau) + \Lambda_q G'''_{1k1}(1-x, \tau) + M_q G''_{2k1}(1-x, \tau);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{1k1}(1-x, \tau)|_{x=0} &= 0, \quad -\kappa G'_{2k1}(1-x, \tau)|_{x=0} = 0, \\
\left( \Lambda_q G''_{1k1}(1-x, \tau) + M_q G'_{2k1}(1-x, \tau) - \sum_{r=1}^N D_{qr} G'_{r+2,k1}(1-x, \tau) \right) \Big|_{x=0} &= 0, \\
G_{1k1}(1-x, \tau)|_{x=1} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \quad -\kappa G'_{2k1}(1-x, \tau)|_{x=1} = \delta_{2k} \delta(\tau), \\
\left( \Lambda_q G''_{1k1}(1-x, \tau) + M_q G'_{2k1}(1-x, \tau) - \sum_{r=1}^N D_{qr} G'_{r+2,k1}(1-x, \tau) \right) \Big|_{x=1} &= \delta_{q+2,k} \delta(\tau).
\end{aligned}$$

Следовательно, если функции  $G_{mk2}(x, \tau)$  удовлетворяют начально-краевой задаче (1.41), (1.42), то функции Грина  $G_{1k1}(1-x, \tau)$ ,  $-G_{2k1}(1-x, \tau)$  и  $-G_{q+2,k1}(1-x, \tau)$  тоже являются решениями этой же задачи.

Учитывая установленное свойство симметрии (1.47), в дальнейшем, для удобства изложения, последний индекс в записи функций Грина будем опускать, полагая  $G_{ik} \equiv G_{ik1}$ . Тогда внутренние суммы в (1.40) запишутся так:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 G_{1kl}(x, \tau-t) f_{kl}(t) &= G_{1k}(x, \tau-t) f_{k1}(t) + G_{1k}(1-x, \tau-t) f_{k2}(t), \\ \sum_{l=1}^2 G_{2kl}(x, \tau-t) f_{kl}(t) &= G_{2k}(x, \tau-t) f_{k1}(t) - G_{2k}(1-x, \tau-t) f_{k2}(t), \\ \sum_{l=1}^2 G_{q+2,kl}(x, \tau-t) f_{kl}(t) &= G_{q+2,k}(x, \tau-t) f_{k1}(t) - G_{q+2,k}(1-x, \tau-t) f_{k2}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно найти функции Грина, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} G_{1k}(x, \tau)|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \quad -\kappa G'_{2k}(x, \tau)|_{x=0} = \delta_{2k} \delta(\tau), \\ \left( \Lambda_q G''_{1k}(x, \tau) + M_q G'_{2k}(x, \tau) - \sum_{r=1}^N D_{qr} G'_{r+2,kl}(x, \tau) \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{q+2,k} \delta(\tau), \\ G_{1k}(x, \tau)|_{x=1} &= 0, \quad -\kappa G'_{2k}(x, \tau)|_{x=1} = 0, \\ \left( \Lambda_q G''_{1k}(x, \tau) + M_q G'_{2k}(x, \tau) - \sum_{r=1}^N D_{qr} G'_{r+2,kl}(x, \tau) \right) \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что для краевой задачи (1.41), (1.43) имеют место формулы:

$$\begin{aligned} G_{1k2}(x, \tau) &= -G_{1k1}(1-x, \tau), \quad G_{2k2}(x, \tau) = G_{2k1}(1-x, \tau), \\ G_{q+2,k2}(x, \tau) &= G_{q+2,k1}(1-x, \tau). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Тогда внутренние суммы в (1.40) запишутся так:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 G_{1kl}(x, \tau - t) f_{kl}(t) &= [G_{1k}(x, \tau - t) f_{k1}(t) - G_{1k}(1 - x, \tau - t) f_{k2}(t)], \\ \sum_{l=1}^2 G_{2kl}(x, \tau - t) f_{kl}(t) &= [G_{2k}(x, \tau - t) f_{k1}(t) + G_{2k}(1 - x, \tau - t) f_{k2}(t)], \\ \sum_{l=1}^2 G_{q+2,kl}(x, \tau - t) f_{kl}(t) &= [G_{q+2,k}(x, \tau - t) f_{k1}(t) + G_{q+2,k}(1 - x, \tau - t) f_{k2}(t)]; \end{aligned}$$

где  $G_{ik} \equiv G_{ik1}$  – поверхностные функции Грина, удовлетворяющие уравнению (1.41) и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \left( G'_{1k} - b_u G_{2k} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,k} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \\ G_{2k} \Big|_{x=0} = \delta_{2k} \delta(\tau), \quad G_{q+2,k} \Big|_{x=0} &= \delta_{q+2,k} \delta(\tau), \\ \left( G'_{1k} - b_u G_{2k} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,k} \right) \Big|_{x=1} &= 0, \\ G_{2k} \Big|_{x=1} = 0, \quad G_{q+2,k} \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \tag{1.51}$$

## Глава 2

# Нестационарные термоупругодиффузионные процессы в многокомпонентных средах

В данной главе рассматриваются нестационарные связанные термоупругодиффузионные процессы (1.35) в многокомпонентных ограниченных средах, находящихся под действием поверхностных и объёмных возмущений, описанных в п. 1.5. Начальные условия полагаются нулевыми. Решение ищется в интегральной форме (1.40) и сводится к отысканию поверхностных и объёмных функций Грина.

Предлагаемый алгоритм отыскания функций Грина для слоя состоит из следующих основных этапов: применение преобразования Лапласа по времени [54] и, разложение изображений в ряды Фурье по собственным функциям, решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно изображений коэффициентов этих рядов, переход к оригиналам искомым функций Грина с помощью вычетов. Такой подход позволяет получить аналитическое решение и провести анализ функций Грина [34, 37].

В случае полупространства вместо рядов используются синус-, косинус-преобразования, а полученная СЛАУ решается относительно изображений Фурье-Лапласа.

### 2.1. Слой под действием поверхностных кинематических механических возмущений

Здесь моделируются термоупругодиффузионные процессы в сплошной среде под действием нестационарных тепловых и диффузионных потоков при заданном поле перемещений, которые описываются системой уравнений (1.35),

граничными условиями (1.36) и нулевыми начальными условиями. Для построения функций Грина рассматриваем задачу (1.41) с граничными условиями (1.49) и нулевыми начальными условиями.

**I. Преобразование Лапласа.** Применяя к (1.41) и (1.49) преобразование Лапласа по времени с учётом нулевых начальных условий ( $s$  – параметр преобразования; верхний индекс «L» обозначает трансформанту Лапласа соответствующей функции), получаем систему вида:

$$\begin{aligned} s^2 G_{1k}^L(x, s) &= G_{1k}^{L''}(x, s) - b_u G_{2k}^{L'}(x, s) - \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2,k}^{L'}(x, s), \\ \omega(s) G_{2k}^L(x, s) &= \kappa G_{2k}^{L''}(x, s) - b_\vartheta \omega(s) G_{1k}^{L'}(x, s) - \omega(s) \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2,k}^L(x, s), \quad (2.1) \\ \chi_q(s) G_{q+2,k}^L(x, s) &= \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,k}^{L''}(x, s) - \Lambda_q G_{1k}^{L'''}(x, s) - M_q G_{2k}^{L''}(x, s); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{1k}^L(x, s) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k}, \quad -\kappa G_{2k}^{L'}(x, s) \Big|_{x=0} = \delta_{2k}, \\ \left( \Lambda_q G_{1k}^{L''}(x, s) + M_q G_{2k}^{L'}(x, s) - \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,k}^{L'}(x, s) \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{q+2,k}, \\ G_{1k}^L(x, s) \Big|_{x=1} &= 0, \quad -\kappa G_{2k}^{L'}(x, s) \Big|_{x=1} = 0, \\ \left( \Lambda_q G_{1k}^{L''}(x, s) + M_q G_{2k}^{L'}(x, s) - \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,k}^{L'}(x, s) \right) \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

Для краткости записи в (2.1) введены следующие обозначения:

$$\omega(s) = s(1 + \tau_\vartheta s), \quad \chi_q(s) = s(1 + \tau_q s). \quad (2.2)$$

**II. Разложение в ряды Фурье.** Далее представляем изображения функций Грина в виде неполных рядов Фурье ( $\lambda_n = \pi n$ ):

$$G_{1k}^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}^L(s) \sin(\lambda_n x),$$

$$\begin{aligned}
G_{2k}^L(x, s) &= \frac{G_{2k0}^L(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kn}^L(s) \cos(\lambda_n x), \\
G_{q+2,k}^L(x, s) &= \frac{G_{q+2,k0}^L(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,kn}^L(s) \cos(\lambda_n x).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для того, чтобы найти указанные коэффициенты разложения

$$\begin{aligned}
G_{1kn}^L(s) &\equiv G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) = 2 \int_0^1 G_{1k}^L(x, s) \sin(\lambda_n x) dx, \\
G_{2kn}^L(s) &\equiv G_{2k}^{Lc}(\lambda_n, s) = 2 \int_0^1 G_{2k}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx, \\
G_{q+2,kn}^L(s) &\equiv G_{q+2,k}^{Lc}(\lambda_n, s) = 2 \int_0^1 G_{q+2,k}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx;
\end{aligned}$$

умножаем в (2.1) первое уравнение на  $2 \sin(\lambda_n x)$ , а остальные – на  $2 \cos(\lambda_n x)$ .

Затем интегрируем по пространственной переменной  $x$  в интервале от 0 до 1:

$$\begin{aligned}
2s^2 \int_0^1 G_{1k}^L(x, s) \sin(\lambda_n x) dx &= 2 \int_0^1 G_{1k}^{L''}(x, s) \sin(\lambda_n x) dx - \\
- 2b_u \int_0^1 G_{2k}^{L'}(x, s) \sin(\lambda_n x) dx &- 2 \sum_{q=1}^N \alpha_q \int_0^1 G_{q+2,k}^{L'}(x, s) \sin(\lambda_n x) dx, \\
2\omega \int_0^1 G_{2k}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx &= 2\kappa \int_0^1 G_{2k}^{L''}(x, s) \cos(\lambda_n x) dx - \\
- 2b_\vartheta \omega \int_0^1 G_{1k}^{L'}(x, s) \cos(\lambda_n x) dx &- 2\omega \sum_{q=1}^N \beta_q \int_0^1 G_{q+2,k}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx, \\
2\chi_q \int_0^1 G_{q+2,k}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx &= 2 \sum_{p=1}^N D_{qp} \int_0^1 G_{p+2,k}^{L''}(x, s) \cos(\lambda_n x) dx - \\
- 2\Lambda_q \int_0^1 G_{1k}^{L'''}(x, s) \cos(\lambda_n x) dx &- 2M_q \int_0^1 G_{2k}^{L''}(x, s) \cos(\lambda_n x) dx.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя результаты интегрирования в (2.4), получим следующую СЛАУ относительно коэффициентов  $G_{ikn}^L$ :

$$\begin{aligned} k_1 G_{1kn}^L - b_u \lambda_n G_{2kn}^L - \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2,kn}^L &= F_1, \\ b_\vartheta \omega \lambda_n G_{1kn}^L + k_2 G_{2kn}^L + \omega \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2,kn}^L &= F_2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$-\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1kn}^L - M_q \lambda_n^2 G_{2kn}^L + k_{q+2} G_{q+2,kn} + \lambda_n^2 \sum_{p=1, p \neq q}^N D_{qp} G_{p+2,kn}^L = F_{q+2};$$

где

$$F_1 = 2\lambda_n \delta_{1k}, \quad F_2 = 2(b_\vartheta \omega \delta_{1k} + \delta_{2k}), \quad F_{q+2} = 2(-\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1k} + \delta_{q+2,k}); \quad (2.6)$$

$$k_1(\lambda_n, s) = s^2 + \lambda_n^2, \quad k_2(\lambda_n, s) = \omega(s) + \kappa \lambda_n^2, \quad k_{q+2}(\lambda_n, s) = \chi_q(s) + D_{qq} \lambda_n^2. \quad (2.7)$$

**III. Решения в изображениях.** Решение системы (2.5) имеет вид [111]

– при  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} G_{210}^L &= 2b_\vartheta, & G_{220}^L &= 2\frac{1}{\omega}, \\ G_{2,q+2,0}^L &= -2\frac{\beta_q}{\chi_q}, & G_{q+2,q+2,0}^L &= 2\frac{1}{\chi_q}; \end{aligned}$$

– при  $n \geq 1$ :

$$G_{ikn}^L = \frac{P_{ik}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}. \quad (2.8)$$

Здесь  $P(\lambda_n, s)$  – определитель однородной системы (2.5)

$$P(\lambda_n, s) = \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n & \dots & -\alpha_N \lambda_n \\ b_\vartheta \lambda_n \omega & k_2 & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega & \dots & \beta_N \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & D_{12} \lambda_n^2 & \dots & D_{1N} \lambda_n^2 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & D_{21} \lambda_n^2 & k_4 & \dots & D_{2N} \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Lambda_N \lambda_n^3 & -M_N \lambda_n^2 & D_{N1} \lambda_n^2 & D_{N2} \lambda_n^2 & \dots & k_N \end{vmatrix}, \quad (2.9)$$

а  $P_{ik}(\lambda_n, s)$  – определители, полученные по правилу Крамера из  $P(\lambda_n, s)$  путём замены  $i$ -ого столбца на столбец правых частей (2.6):

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_{N+2})^T.$$

*Примечание.* Многочлен  $P(\lambda_n, s)$  имеет степень  $2N + 4$  по параметру  $s$ . В этом легко убедиться, если произвести его вычисление путём вычёркивания 2-й строки с учётом того, что  $\omega, k_1, k_2, \dots, k_{N+2}$  – многочлены второй степени от  $s$ . Аналогично, такую же степень  $P(\lambda_n, s)$  имеет относительно  $\lambda_n$ .

Для двухкомпонентной среды указанные многочлены в виде определителей приведены в Приложении А.

Таким образом получены разложения изображений функций Грина (2.3) задачи (1.35), (1.36).

**IV. Переход к оригиналам.** Так как функции  $P(\lambda_n, s)$  и  $P_{ik}(\lambda_n, s)$  являются многочленами, то изображения коэффициентов Фурье для функций Грина являются рациональными функциями относительно параметра преобразования  $s$ . Поэтому для нахождения их оригиналов воспользуемся таблицами операционного исчисления и теоремами о вычетах.

Пусть  $s_{jn} = s_j(\lambda_n) \in \mathbb{C}$  ( $j = 1, 2N + 4$ ) – нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$ , тогда оригиналы функций Грина для данной задачи в силу линейности преобразования Лапласа примут вид:

$$\begin{aligned} G_{1k}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}(\tau) \sin(\lambda_n x), \\ G_{2k}(x, \tau) &= \frac{G_{2k0}(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kn}(\tau) \cos(\lambda_n x), \\ G_{q+2,k}(x, \tau) &= \frac{G_{q+2,k0}(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,kn}(\tau) \cos(\lambda_n x); \end{aligned} \quad (2.10)$$

где коэффициенты  $G_{ikn}(\tau)$ , в силу того, что нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$  простые [52], они имеют [3] следующий вид

– при  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} G_{210} &= 2b_{\vartheta}\delta(\tau), & G_{220} &= 2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{\vartheta}}\right) \right], \\ G_{2,q+2,0} &= -2\beta_q \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_q}\right) \right], & & (2.11) \\ G_{q+2,q+2,0} &= 2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_q}\right) \right]; \end{aligned}$$

– при  $n \geq 1$ :

$$G_{ikn} = \sum_{j=1}^{2N+4} \frac{P_{ik}(\lambda_n, s_{jn})}{P'(\lambda_n, s_{jn})} \exp(s_{jn}\tau). \quad (2.12)$$

Здесь штрих обозначает производную по параметру  $s$ .

Для нахождения перемещений, а также приращений температуры и концентраций, найденные функции Грина (2.10) подставляются в свёртки (1.40) из п. 1.5.

В работах [12, 13, 25–34, 92–95] для решения различных задач упругой и термоупругой диффузии применяются аналогичный алгоритм решения, рассмотренный выше.

## 2.2. Слой под действием поверхностных динамических механических возмущений

В данном пункте рассматриваются термоупругодиффузионные процессы в сплошных средах под действием динамических нестационарных поверхностных механических нагрузок. При этом фиксируются температурное и диффузионные поля. Физико-механические процессы описываются системой уравнений (1.35) с граничными условиями (1.37) и нулевыми начальными условиями.

Решение задачи представляется в виде свёрток (1.40). Для построения поверхностных функций Грина, как и в п. 2.1, применяем к (1.41) и (1.51) преобразование Лапласа по времени с учётом нулевых начальных условий, а также разложение в неполные ряды Фурье ( $\lambda_n = \pi n$ ) вида

$$\begin{aligned} G_{1k}^L(x, s) &= \frac{G_{1k0}^L(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}^L(s) \cos(\lambda_n x), \\ G_{2k}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kn}^L(s) \sin(\lambda_n x), \\ G_{q+2,k}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,kn}^L(s) \sin(\lambda_n x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Действуя как в предыдущем пункте, получаем, что коэффициенты этих разложений удовлетворяют следующей системе [29, 51, 112]:

$$\begin{aligned} k_1 G_{1kn}^L + b_u \lambda_n G_{2kn}^L + \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2,kn}^L &= F_1, \\ -b_\vartheta \omega \lambda_n G_{1kn}^L + k_2 G_{2kn}^L + \omega \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2,kn}^L &= F_2, \\ \Lambda_q \lambda_n^3 G_{1kn}^L - M_q \lambda_n^2 G_{2kn}^L + \chi_q G_{q+2,kn}^L + \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,kn}^L &= F_{q+2}; \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$F_1 = -2\delta_{1k}, \quad F_2 = 2\kappa\lambda_n\delta_{2k},$$

$$F_{q+2} = -2\Lambda_q\lambda_n\delta_{1k} - 2\delta_{2k}\lambda_n(\Lambda_q b_u + M_q) + 2\lambda_n \sum_{p=1}^N \delta_{p+2,k}(D_{qp} - \Lambda_q\alpha_p).$$

Решение системы (2.14) имеет вид

– при  $n = 0$ :

$$G_{1k0}^L = \frac{-2\delta_{1k}}{s^2}; \quad (2.15)$$

– при  $n \geq 1$ :

$$G_{ikn}^L = \frac{P_{ik}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}. \quad (2.16)$$

Здесь  $P(\lambda_n, s)$  – определитель однородной системы (2.14), совпадающий с определителем (2.9) системы (2.5), а  $P_{ik}(\lambda_n, s)$  – определители, полученные по правилу Крамера из  $P(\lambda_n, s)$  путём замены  $i$ -ого столбца на столбец свободных членов в (2.14).

Так же, как и в предыдущей задаче, находим оригиналы функций Грина (2.13)

$$G_{1k}(x, \tau) = -\tau H(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}(\tau) \cos(\lambda_n x),$$

$$G_{2k}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kn}(\tau) \sin(\lambda_n x), \quad (2.17)$$

$$G_{q+2,k}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,kn}(\tau) \sin(\lambda_n x);$$

где коэффициенты этих рядов с учётом (2.15) и (2.16) определяются по формулам (2.12).

Для нахождения перемещений, а также приращений температуры и концентраций найденные функции Грина (2.17) подставляются в свёртки (1.40) из п. 1.5.

### 2.3. Смешанная задача для слоя

Во многих физико-механических процессах, представляющих практический интерес, элементы конструкции работают в условиях смешанных (кинематических и динамических) внешних воздействий. Например, одна поверхность слоя зафиксирована, а к другой приложена нагрузка. При этом, скажем одна из поверхностей теплоизолирована, а на другой поддерживается заданный температурный режим. Для моделирования вышеуказанных явлений рассматриваем задачу (1.35) с граничными условиями (1.38) и нулевыми начальными условиями.

Как и ранее, для построения функций Грина, применяем к системе (1.41) и граничным условиям (1.44) преобразование Лапласа по времени с учётом нулевых начальных условий [47]. Далее представляем изображения функций Грина в виде рядов Фурье, причём теперь будем полагать, что  $\lambda_n = \pi(n - 1/2)$ :

$$\begin{aligned}
 G_{1kl}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kln}^L(s) \sin(\lambda_n x), \\
 G_{2kl}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kln}^L(s) \cos(\lambda_n x), \\
 G_{q+2,kl}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,kl n}^L(s) \cos(\lambda_n x);
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$G_{1kln}^L(s) \equiv G_{1kl}^{Ls}(\lambda_n, s) = 2 \int_0^1 G_{1kl}^L(x, s) \sin(\lambda_n x) dx,$$

$$G_{2kln}^L(s) \equiv G_{2kl}^{Lc}(\lambda_n, s) = 2 \int_0^1 G_{2kl}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx,$$

$$G_{q+2,kl n}^L(s) \equiv G_{q+2,kl}^{Lc}(\lambda_n, s) = 2 \int_0^1 G_{q+2,kl}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx.$$

Как и в п. 2.1 и 2.2, умножая первое уравнение в (1.41) на  $2 \sin(\lambda_n x)$ , а

остальные – на  $2 \cos(\lambda_n x)$  и интегрируя по пространственной переменной  $x$  в интервале от 0 до 1, получаем систему уравнений для определения функций  $G_{mkl n}^L(s)$ .

$$\begin{aligned} k_1 G_{1kln}^L - b_u \lambda_n G_{2kln}^L - \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2,kln}^L &= 2F_{1kln}, \\ b_\vartheta \omega \lambda_n G_{1kln}^L + k_2 G_{2kln}^L + \omega \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2,kln}^L &= 2F_{2kln}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$-\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1kln}^L - M_q \lambda_n^2 G_{2kln}^L + \chi_q G_{q+2,kln}^L + \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,kln}^L = 2F_{q+2,kln};$$

где

$$F_{1kln} = \delta_{1k} (\lambda_n \delta_{1l} + (-1)^n \delta_{2l}),$$

$$F_{2kln}(s) = \delta_{1l} (b_\vartheta \omega \delta_{1k} + \delta_{2k}) + (-1)^n \kappa \lambda_n \delta_{2k} \delta_{2l},$$

$$\begin{aligned} F_{q+2,kln} &= \delta_{1l} (-\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1k} + \delta_{q+2,k}) - \\ &- \delta_{2l} (-1)^n \lambda_n \left[ \Lambda_q \delta_{1k} + \delta_{2k} (\Lambda_q b_u + M_q) + \sum_{p=1}^N (\Lambda_q \alpha_p - D_{qp}) \delta_{p+2,k} \right]. \end{aligned}$$

Решение системы (2.19) имеет вид

$$G_{ikln}^L = \frac{P_{ikl}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}. \quad (2.20)$$

Здесь  $P(\lambda_n, s)$  – определитель однородной системы (2.19), который совпадает с таковыми из п. 2.1 и 2.2, а  $P_{ikl}(\lambda_n, s)$  – определители, полученные по правилу Крамера из  $P(\lambda_n, s)$  путём замены  $i$ -ого столбца на столбец

$$2 \left( F_{1kln}, F_{2kln}, F_{3kln}, \dots, F_{Nkln} \right)^T$$

Оригиналы выражений (2.18) примут вид:

$$G_{1kl}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kln}(\tau) \sin(\lambda_n x),$$

$$G_{2kl}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kln}(\tau) \cos(\lambda_n x),$$

$$G_{q+2,kl}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,kl n}(\tau) \cos(\lambda_n x);$$

где коэффициенты  $G_{ikln}(\tau)$  с учётом (2.20) определены так:

$$G_{ikln} = \sum_{j=1}^{2N+4} \frac{P_{ikl}(\lambda_n, s_{jn})}{P'(\lambda_n, s_{jn})} \exp(s_{jn}\tau).$$

Здесь штрих обозначает производную по параметру  $s$ .

Как видно, форма представления функций Грина во всех трех рассмотренных задачах совпадает с точностью до обозначений (в последней задаче добавляется еще один индекс в обозначениях для функции Грина). Различие кроется только в нулевых гармониках рядов Фурье, в выражениях для многочленов  $P_{ik}$  и в значениях  $\lambda_n$ , что существенно не отражается на внешней форме записи решений рассмотренных задач. Подобного рода унификация является основным достоинством предлагаемого алгоритма решения нестационарных задач термомехано-диффузии.

## 2.4. Объёмные функции Грина для слоя

При моделировании различных физико-механических и технологических процессов часто необходим учёт не только внешних поверхностных, но и внешних массовых воздействий, таких как вес конструкции, объёмные плотности тепловых и массовых источников [113]. Далее описывается алгоритм решения задач термоупругой диффузии с учётом объёмных возмущений. Рассматриваются однородные кинематические и динамические граничные условия. Решения для смешанной задачи выражаются через первые два.

**I. Кинематические возмущения.** Рассматриваем задачу (1.46) с нулевыми начальными условиями и однородными граничными условиями, соответствующими (1.42).

Для отыскания объёмных функций Грина применяем к (1.46) преобразование Лапласа по времени:

$$\begin{aligned} s^2 \tilde{G}_{1k}^L &= \tilde{G}_{1k}^{L''} - b_u \tilde{G}_{2k}^{L'} - \sum_{q=1}^N \alpha_q \tilde{G}_{q+2,k}^{L'} + \delta_{1k} \delta(x - \xi), \\ \omega \tilde{G}_{2k}^L &= \kappa \tilde{G}_{2k}^{L''} - b_\vartheta \omega \tilde{G}_{1k}^{L'} - \omega \sum_{q=1}^N \beta_q \tilde{G}_{q+2,k}^L + \delta_{2k} \delta(x - \xi), \\ \chi_q \tilde{G}_{q+2,k}^L &= \sum_{p=1}^N D_{qp} \tilde{G}_{p+2,k}^{L''} - \Lambda_q \tilde{G}_{1k}^{L''''} - M_q \tilde{G}_{2k}^{L''} + \delta_{q+2,k} \delta(x - \xi). \end{aligned}$$

Далее представим изображения объёмных функций Грина в виде рядов Фурье ( $\lambda_n = \pi n$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1k}^L(x, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{1kn}^L(\xi, s) \sin(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{2k}^L(x, \xi, s) &= \frac{\tilde{G}_{2k0}^L(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{2kn}^L(\xi, s) \cos(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{q+2,k}^L(x, \xi, s) &= \frac{\tilde{G}_{q+2,k0}^L(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,kn}^L(\xi, s) \cos(\lambda_n x). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Коэффициенты разложения

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1kn}^L(\xi, s) &\equiv \tilde{G}_{1k}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 \tilde{G}_{1k}^L(x, \xi, s) \sin(\lambda_n x) dx, \\ \tilde{G}_{2kn}^L(\xi, s) &\equiv \tilde{G}_{2k}^{Lc}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 \tilde{G}_{2k}^L(x, \xi, s) \cos(\lambda_n x) dx, \\ G_{q+2, kn}^L(\xi, s) &\equiv \tilde{G}_{q+2, k}^{Lc}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 \tilde{G}_{q+2, k}^L(x, \xi, s) \cos(\lambda_n x) dx;\end{aligned}$$

находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}k_1 \tilde{G}_{1kn}^L - b_u \lambda_n \tilde{G}_{2kn}^L - \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_q \tilde{G}_{q+2, kn}^L &= 2\delta_{1k} \sin(\lambda_n \xi), \\ b_\vartheta \omega \lambda_n \tilde{G}_{1kn}^L + k_2 \tilde{G}_{2kn}^L + \omega \sum_{q=1}^N \beta_q \tilde{G}_{q+2, kn}^L &= 2\delta_{2k} \cos(\lambda_n \xi), \\ -\Lambda_q \lambda_n^3 \tilde{G}_{1kn}^L - M_q \lambda_n^2 \tilde{G}_{2kn}^L + \chi_q \tilde{G}_{q+2, kn}^L + \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N D_{qp} \tilde{G}_{p+2, kn}^L &= \\ &= 2\delta_{q+2, k} \cos(\lambda_n \xi).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Решение системы (2.22) записывается следующим образом

– при  $n = 0$ :

$$\tilde{G}_{220}^L = 2\frac{1}{\omega}, \quad \tilde{G}_{2, q+2, 0}^L = -2\frac{\beta_q}{\chi_q}, \quad \tilde{G}_{q+2, q+2, 0}^L = 2\frac{1}{\chi_q};$$

– при  $n \geq 1$ :

$$\tilde{G}_{ikn}^L = \frac{\tilde{P}_{ik}(\lambda_n, \xi, s)}{P(\lambda_n, s)}.\tag{2.23}$$

Здесь  $P(\lambda_n, s)$  – определитель однородной системы (2.22). В свою очередь  $\tilde{P}_{ik}(\lambda_n, \xi, s)$  – определители, полученные по правилу Крамера из  $P(\lambda_n, s)$  путём замены  $i$ -ого столбца на столбец

$$2(\delta_{1k} \sin(\lambda_n \xi), \delta_{2k} \cos(\lambda_n \xi), \delta_{3k} \cos(\lambda_n \xi), \dots, \delta_{N+2, k} \cos(\lambda_n \xi))^T.$$

Ниже выписаны многочлены  $\tilde{P}_{ik}(\lambda_n, \xi, s)$  для двухкомпонентной среды.

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{1k}(\lambda_n, \xi, s) &= 2 \begin{vmatrix} \delta_{1k} \sin(\lambda_n \xi) & -b_u \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n \\ \delta_{2k} \cos(\lambda_n \xi) & k_2 & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega \\ \delta_{3k} \cos(\lambda_n \xi) & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & D_{12} \lambda_n^2 \\ \delta_{4k} \cos(\lambda_n \xi) & -M_2 \lambda_n^2 & D_{21} \lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix}, \\
\tilde{P}_{2k}(\lambda_n, \xi, s) &= 2 \begin{vmatrix} k_1 & \delta_{1k} \sin(\lambda_n \xi) & -\alpha_1 \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n \\ b_{\vartheta} \omega \lambda_n & \delta_{2k} \cos(\lambda_n \xi) & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & \delta_{3k} \cos(\lambda_n \xi) & k_3 & D_{12} \lambda_n^2 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & \delta_{4k} \cos(\lambda_n \xi) & D_{21} \lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix}, \\
\tilde{P}_{3k}(\lambda_n, \xi, s) &= 2 \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & \delta_{1k} \sin(\lambda_n \xi) & -\alpha_2 \lambda_n \\ b_{\vartheta} \omega \lambda_n & k_2 & \delta_{2k} \cos(\lambda_n \xi) & \beta_2 \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & \delta_{3k} \cos(\lambda_n \xi) & D_{12} \lambda_n^2 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & \delta_{4k} \cos(\lambda_n \xi) & k_4 \end{vmatrix}, \\
\tilde{P}_{4k}(\lambda_n, \xi, s) &= 2 \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & \delta_{1k} \sin(\lambda_n \xi), \\ b_{\vartheta} \omega \lambda_n & k_2 & \beta_1 \omega & \delta_{2k} \cos(\lambda_n \xi) \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & \delta_{3k} \cos(\lambda_n \xi) \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & D_{21} \lambda_n^2 & \delta_{4k} \cos(\lambda_n \xi) \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

*Примечание.* Сравнивая многочлены из Приложения А и (2.24), приходим к выводу, что  $\tilde{P}_{ik}(\lambda_n, \xi, s) \forall i = \overline{1, N+2}$  и  $\forall k = \overline{2, N+2}$  могут быть записаны через  $P_{ik}(\lambda_n, s)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{i2}(\lambda_n, \xi, s) &= P_{i2}(\lambda_n, s) \cos(\lambda_n \xi), \\
\tilde{P}_{i,q+2}(\lambda_n, \xi, s) &= P_{i,q+2}(\lambda_n, s) \cos(\lambda_n \xi).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

По аналогии с п. 2.1 оригиналы имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1k}(x, \xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{1kn}(\xi, \tau) \sin(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{2k}(x, \xi, \tau) &= \frac{\tilde{G}_{2k0}(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{2kn}(\xi, \tau) \cos(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{q+2,k}(x, \xi, \tau) &= \frac{\tilde{G}_{q+2,k0}(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,kn}(\xi, \tau) \cos(\lambda_n x); \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $\tilde{G}_{ikn}$  определяются так

– при  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{220} &= 2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\vartheta}\right) \right], \\ \tilde{G}_{2,q+2,0} &= -2\beta_q \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_q}\right) \right], \\ \tilde{G}_{q+2,q+2,0} &= 2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_q}\right) \right]; \end{aligned} \quad (2.27)$$

– при  $n \geq 1$ :

$$\tilde{G}_{ikn} = \sum_{j=1}^{2N+4} \frac{\tilde{P}_{ik}(\lambda_n, \xi, s_{jn})}{P'(\lambda_n, s_{jn})} \exp(s_{jn}\tau). \quad (2.28)$$

Здесь  $s_{jn} = s_j(\lambda_n)$  – нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$ , а штрих обозначает производную по параметру  $s$ .

**II. Динамические возмущения.** Для отыскания объёмных функций Грина в задаче (1.46), (1.43), аналогично п. 2.1 и 2.2, применяем к (1.46) преобразование Лапласа по времени и разложение в неполные ряды Фурье ( $\lambda_n = \pi n$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1k}^L(x, \xi, s) &= \frac{\tilde{G}_{1k0}^L(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{1kn}^L(\xi, s) \cos(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{2k}^L(x, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{2kn}^L(\xi, s) \sin(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{q+2,k}^L(x, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,kn}^L(\xi, s) \sin(\lambda_n x). \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1kn}^L(\xi, s) &\equiv \tilde{G}_{1k}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 \tilde{G}_{1k}^L(x, \xi, s) \cos(\lambda_n x) dx, \\ \tilde{G}_{2kn}^L(\xi, s) &\equiv \tilde{G}_{2k}^{Lc}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 \tilde{G}_{2k}^L(x, \xi, s) \sin(\lambda_n x) dx, \\ G_{q+2, kn}^L(\xi, s) &\equiv \tilde{G}_{q+2, k}^{Lc}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 \tilde{G}_{q+2, k}^L(x, \xi, s) \sin(\lambda_n x) dx;\end{aligned}$$

находятся с помощью СЛАУ вида:

$$\begin{aligned}k_1 \tilde{G}_{1kn}^L + b_u \lambda_n \tilde{G}_{2kn}^L + \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_q \tilde{G}_{q+2, kn}^L &= 2\delta_{1k} \cos(\lambda_n \xi), \\ -b_\vartheta \omega \lambda_n \tilde{G}_{1kn}^L + k_2 \tilde{G}_{2kn}^L + \omega \sum_{q=1}^N \beta_q \tilde{G}_{q+2, kn}^L &= 2\delta_{2k} \sin(\lambda_n \xi), \\ \Lambda_q \lambda_n^3 \tilde{G}_{1kn}^L - M_q \lambda_n^2 \tilde{G}_{2kn}^L + \chi_q \tilde{G}_{q+2, kn}^L + \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N D_{qp} \tilde{G}_{p+2, kn}^L &= \\ &= 2\delta_{q+2, k} \sin(\lambda_n \xi).\end{aligned}\tag{2.29}$$

Решение системы (2.29) записывается следующим образом

– при  $n = 0$ :

$$\tilde{G}_{1k0}^L = \frac{2\delta_{1k}}{s^2};$$

– при  $n \geq 1$  гармоники  $\tilde{G}_{1kn}^L$  определяются по формулам (2.23).

Здесь  $P(\lambda_n, s)$  – определитель однородной системы (2.14), а числители в (2.23) – определители, полученные из  $P(\lambda_n, \xi, s)$  путём замены  $i$ -ого столбца на столбец

$$2(\delta_{1k} \cos(\lambda_n \xi), \delta_{2k} \sin(\lambda_n \xi), \delta_{3k} \sin(\lambda_n \xi), \dots, \delta_{N+2, k} \sin(\lambda_n \xi))^T.\tag{2.30}$$

*Примечание.* Так же, как и в предыдущей задаче получаем, что многочлены  $\tilde{P}_{ik}(\lambda_n, \xi, s) \forall i = \overline{1, N+2}$  и  $\forall k = \overline{2, N+2}$  могут быть записаны через

$P_{ik}(\lambda_n, s)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{i2}(\lambda_n, \xi, s) &= -P_{i2}(\lambda_n, s) \sin(\lambda_n \xi), \\ \tilde{P}_{i,q+2}(\lambda_n, \xi, s) &= -P_{i,q+2}(\lambda_n, s) \sin(\lambda_n \xi).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Тогда оригиналы имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1k}(x, \xi, \tau) &= \frac{\tilde{G}_{110}(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{1kn}(\xi, \tau) \sin(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{2k}(x, \xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{2kn}(\xi, \tau) \cos(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{q+2,k}(x, \xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,kn}(\xi, \tau) \cos(\lambda_n x);\end{aligned}$$

где  $\tilde{G}_{ikn}$  определяются так

– при  $n = 0$ :

$$\tilde{G}_{110} = 2\tau H(\tau);$$

– при  $n \geq 1$  гармоники  $\tilde{G}_{1kn}$  определяются по формулам (2.28).

**III. Смешанные возмущения.** Для смешанной начально-краевой задачи (1.46), (1.44) объёмные функций Грина записываются в виде следующих рядов ( $\lambda_n = \pi(n - 1/2)$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1kl}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{1kln}^L(s) \sin(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{2kl}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{2kln}^L(s) \cos(\lambda_n x), \\ \tilde{G}_{q+2,kl}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,kl n}^L(s) \cos(\lambda_n x).\end{aligned}$$

С точностью до значений  $\lambda_n$  и нулевых гармоник они аналогичны (2.21). Поэтому, с учетом сделанных уточнений, объёмные функции Грина для смешанной задачи определяются по формулам (2.26) и (2.28).

## 2.5. Функции Грина для полупространства

Ниже описывается алгоритм аналитического построения функций Грина для полупространства. Для этого рассмотрим задачу (1.41) о нахождении поверхностных функций Грина с нулевыми начальными условиями и граничными условиями (1.49), где условия на поверхности  $x = 1$  заменяются условием ограниченности на бесконечности вида (1.45).

Применяя к (1.41) преобразование Лапласа и синус-, косинус-преобразование Фурье, получаем:

$$k_1 G_{1k}^{\text{LS}} - b_u \lambda G_{2k}^{\text{LC}} - \lambda \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2,k}^{\text{LC}} = 2\lambda \delta_{1k},$$

$$b_\vartheta \omega \lambda G_{1k}^{\text{LS}} + k_2 G_{2k}^{\text{LC}} + \omega \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2,k}^{\text{LC}} = 2(b_\vartheta \omega \delta_{1k} + \delta_{2k}), \quad (2.32)$$

$$-\Lambda_q \lambda^3 G_{1k}^{\text{LS}} - M_q \lambda^2 G_{2k}^{\text{LC}} + \chi_q G_{q+2,k}^{\text{LC}} + \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,k}^{\text{LC}} = 2(-\Lambda_q \lambda^2 \delta_{1k} + \delta_{q+2,k}),$$

где  $k_1$  и  $k_2$  определяются по формулам (2.7). Прямое синус-, косинус-преобразование имеет вид:

$$G_{1k}^{\text{LS}}(\lambda, s) = 2 \int_0^\infty G_{1k}^{\text{L}}(x, s) \sin(\lambda x) dx,$$

$$G_{2k}^{\text{LC}}(\lambda, s) = 2 \int_0^\infty G_{2k}^{\text{L}}(x, s) \cos(\lambda x) dx,$$

$$G_{q+2,k}^{\text{LC}}(\lambda, s) = 2 \int_0^\infty G_{q+2,k}^{\text{L}}(x, s) \cos(\lambda x) dx;$$

а обратное:

$$\begin{aligned}
 G_{1k}^L(x, s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{1k}^{LS}(\lambda, s) \sin(\lambda x) dx, \\
 G_{2k}^L(x, s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{2k}^{LC}(\lambda, s) \cos(\lambda x) dx, \\
 G_{q+2,k}^L(x, s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{q+2,k}^{LC}(\lambda, s) \cos(\lambda x) dx.
 \end{aligned}$$

Система (2.32) полностью аналогична (2.5) при замене  $\lambda_n$  на  $\lambda$ . Тогда очевидно, что трансформанты Фурье-Лапласа функций Грина для полупространства связаны с ненулевыми гармониками изображений Лапласа для слоя, полученными в п. 2.1 по формулам (2.8), следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 G_{1k}^{LS}(\lambda, s) &\equiv G_{1k}^{Ls}(\lambda, s) = \frac{P_{1k}(\lambda, s)}{P(\lambda, s)}, \\
 G_{2k}^{LC}(\lambda, s) &\equiv G_{2k}^{Lc}(\lambda, s) = \frac{P_{2k}(\lambda, s)}{P(\lambda, s)}, \\
 G_{q+2,k}^{LC}(\lambda, s) &\equiv G_{q+2,k}^{Lc}(\lambda, s) = \frac{P_{q+2,k}(\lambda, s)}{P(\lambda, s)},
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

где  $P$  и  $P_{ik}$  – многочлены, найденные в п. 2.1.

Для перехода к оригиналам преобразования Лапласа опять воспользуемся теоремами операционного исчисления и вычетами. Тогда искомые функции Грина системы (1.41) примут вид

$$\begin{aligned}
 G_{1k}(x, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{1k}^S(\lambda, \tau) \sin(\lambda x) dx, \\
 G_{2k}(x, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{2k}^C(\lambda, \tau) \cos(\lambda x) dx, \\
 G_{q+2,k}(x, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{q+2,k}^C(\lambda, \tau) \cos(\lambda x) dx.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

где  $G_{1k}^S$ ,  $G_{2k}^C$ ,  $G_{q+2,k}^C$  ищутся по формулам (2.12) с учётом (2.33). Вычисление

интегралов (2.34) производится численно с помощью квадратурных формул [27, 28].

Аналогичным образом на основе решения задачи для слоя строятся алгоритмы решения для других видов граничных условий, а также алгоритмы нахождения объёмных функций Грина для полупространства [113].

## Глава 3

## Анализ напряженно-деформированного состояния термоупругодиффузионных сред под действием нестационарных возмущений

Здесь, с помощью аналитических методов и численных экспериментов, исследуются решения задач связанной термоупругой диффузии, полученные в Главе 2. Проводится анализ влияния учёта ненулевых времён релаксации и перекрёстных диффузионных эффектов. Продемонстрирован переход к стационарным режимам. Также построен ряд расчётных примеров.

### 3.1. Анализ влияния связанных термодиффузионных полей на напряжённо-деформированное состояние

В данном пункте и далее в главе расчётные примеры приведены на базе двухкомпонентной среды ( $N=2$ ) из дюралюминия 2024 ( $q=1: 95\%Al$ ;  $q=2: 5\%Cu$ ) толщиной  $L = 10^{-3}$  м при начальной температуре  $T_0 = 600$  К. Материал слоя имеет следующие характеристики [80, 87, 179]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 5,55 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, & \mu &= 2,61 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, & \rho &= 2740 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\ b^* &= 2,47 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}, & \kappa^* &= 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, & c_{\varepsilon n} &= 920 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \\ \alpha_1^* &= 5 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, & \alpha_2^* &= 2 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, \\ D_1^* &= 2 \cdot 10^{-15} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, & D_2^* &= 4 \cdot 10^{-16} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \\ t_{\vartheta} &= 10^{-5} \text{с}, & t_{\eta 1} &= 20 \text{с}, & t_{\eta 2} &= 40 \text{с}. \end{aligned}$$

Безразмерные величины с учётом формул (1.34) имеют вид:

$$\begin{aligned}
M_1 &= -7,24 \cdot 10^{-14}, & M_2 &= -1,57 \cdot 10^{-18}, & \Lambda_1 &= 8,91 \cdot 10^{-15}, \\
\Lambda_2 &= 1,05 \cdot 10^{-18}, & D_{11} &= 3,29 \cdot 10^{-15}, & D_{12} &= 5,24 \cdot 10^{-20}, \\
D_{21} &= 4,54 \cdot 10^{-16}, & D_{22} &= 4,13 \cdot 10^{-20}, & \alpha_1 &= 4,41 \cdot 10^{-6}, \\
\alpha_2 &= 9,29 \cdot 10^{-7}, & \kappa &= 9,65 \cdot 10^{-6}, & b_u &= 1,38 \cdot 10^{-2}, \\
b_\vartheta &= 1.01, & \beta_1 &= -7,12 \cdot 10^{-5}, & \beta_2 &= -6.47 \cdot 10^{-6}, \\
\tau_T &= 6.37 \cdot 10^{-2}, & \tau_1 &= 1.27 \cdot 10^5, & \tau_2 &= 2.55 \cdot 10^5.
\end{aligned}$$

За единицу безразмерного времени принимается время прохождения волны растяжения-сжатия от одной границы слоя к другой, что примерно соответствует  $1.57 \cdot 10^{-7}$  секунд.

**I. Объёмные возмущения в слое.** Рассматриваем задачу (1.35) с нулевыми кинематическими граничными условиями (1.36) и нулевыми начальными условиями. При этом задаём плотность массовой силы в виде:

$$F_1(x, \tau) = \varphi_1 \tau e^{-\varphi_2 \tau} \sin(\pi x),$$

где полагаем  $\varphi_1 = 10^{-10}$ ,  $\varphi_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ . Остальные внешние объёмные возмущения, такие как приток тепла и вещества, полагаем равными нулю:

$$F_2(x, \tau) = F_3(x, \tau) = F_4(x, \tau) \equiv 0.$$

Тогда решение задачи (1.35), согласно формулам (1.40) и (2.26), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \varphi_1 \sin(\pi x) \sum_{j=1}^8 \frac{\tilde{P}_{11}(\pi, s_j) (e^{s_j \tau} - e^{-\varphi_2 \tau} (1 + [s_j + \varphi_2] \tau))}{P'(\pi, s_j) [s_j + \varphi_2]^2}, \\
\vartheta(x, \tau) &= \varphi_1 \cos(\pi x) \sum_{j=1}^8 \frac{\tilde{P}_{21}(\pi, s_j) (e^{s_j \tau} - e^{-\varphi_2 \tau} (1 + [s_j + \varphi_2] \tau))}{P'(\pi, s_j) [s_j + \varphi_2]^2}, \\
\eta_q(x, \tau) &= \varphi_1 \cos(\pi x) \sum_{j=1}^8 \frac{\tilde{P}_{q+2,1}(\pi, s_j) (e^{s_j \tau} - e^{-\varphi_2 \tau} (1 + [s_j + \varphi_2] \tau))}{P'(\pi, s_j) [s_j + \varphi_2]^2}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь  $s_j$  – нули многочлена  $P(\pi, s)$ . Решения (3.1) представлены на Рис. 3.1 – 3.4. Линии: сплошная –  $\tau = 1 \cdot 10^{10}$ , пунктирная –  $\tau = 2 \cdot 10^{10}$ , штриховая –  $\tau = 3 \cdot 10^{10}$ . В частности, на рисунках 3.2 – 3.4. продемонстрировано влияние механических нагрузок на поле температур и концентраций.

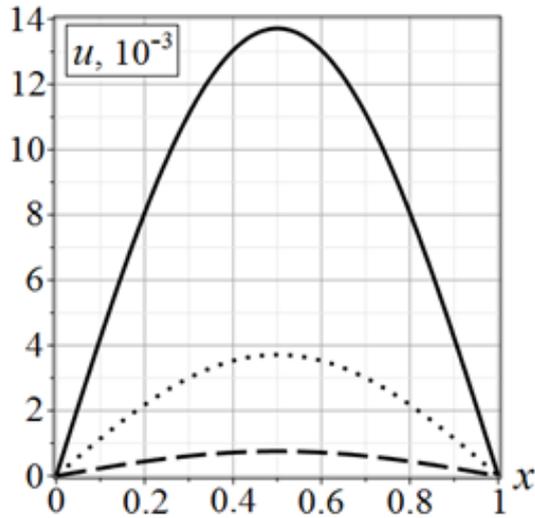


Рис. 3.1. Зависимость  $u(x, \tau)$  от  $x$

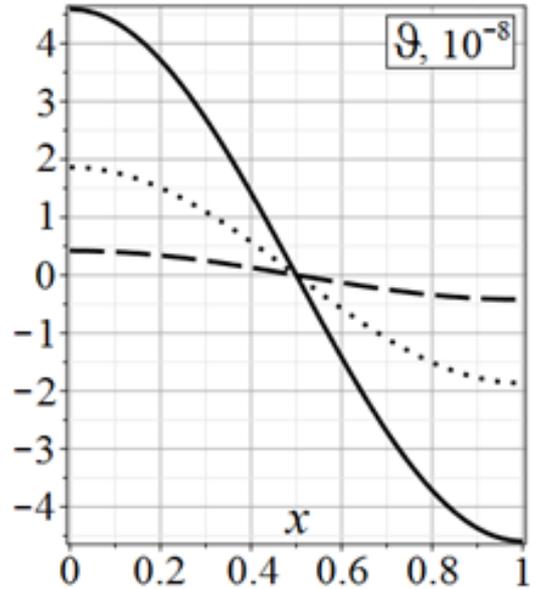


Рис. 3.2. Зависимость  $v(x, \tau)$  от  $x$ .

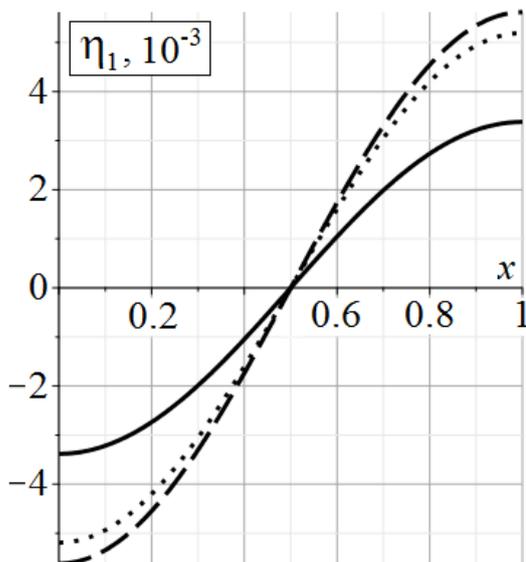


Рис. 3.3. Зависимость  $\eta_1(x, \tau)$  от  $x$ .

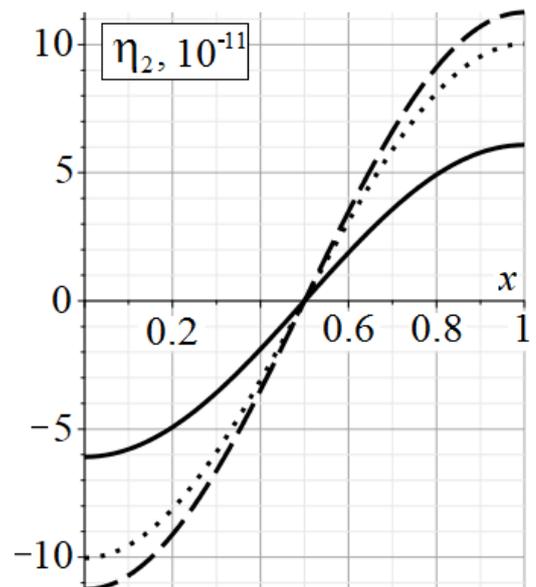


Рис. 3.4. Зависимость  $\eta_2(x, \tau)$  от  $x$ .

## II. Слой под действием внешних поверхностных динамических нагрузок.

В качестве следующего примера рассматриваем задачу (1.35) с динамическими граничными условиями (1.37) и нулевыми начальными условиями. Полагаем, что слой находится под действием растягивающих усилий, заданных следующим образом:

$$f_{11}(\tau) = f_{12}(\tau) \equiv \varphi \cdot H(\tau) = 10^{-3} \cdot H(\tau),$$

что примерно соответствует 100МПа. Все остальные граничные условия принимаются нулевыми – слой теплоизолированный, массообмен с окружающей средой отсутствует. Тогда решение задачи с учётом симметрии (1.50) и формул (2.17) записывается так ( $\lambda_{2n+1} = \pi(2n+1)$ ):

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^8 (-1)^n \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{11}(\lambda_{2n+1}, s_j)}{s_j P'(\lambda_{2n+1}, s_j)} \sin\left(\lambda_{2n+1} \left(\frac{1}{2} - x\right)\right), \\ \vartheta(x, \tau) &= \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^8 (-1)^n \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{21}(\lambda_{2n+1}, s_j)}{s_j P'(\lambda_{2n+1}, s_j)} \cos\left(\lambda_{2n+1} \left(\frac{1}{2} - x\right)\right), \\ \eta_q(x, \tau) &= \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^8 (-1)^n \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{q+2,1}(\lambda_{2n+1}, s_j)}{s_j P'(\lambda_{2n+1}, s_j)} \cos\left(\lambda_{2n+1} \left(\frac{1}{2} - x\right)\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $s_j = s_j(\lambda_{2n+1})$  – нули многочлена  $P(\lambda_{2n+1}, s)$ .

Ниже представлены графики распределения безразмерных термоупруго-диффузионных возмущений среды (3.2). На рисунках 3.5 – 3.8 отражены трёхмерные графики распределения перемещений, а также приращений температуры и концентраций по времени  $\tau$  и глубине слоя  $x$ .

На трёхмерных графиках при значительных временах можно наблюдать процессы затухания возмущений, которые вызваны только лишь приложением динамической нагрузки и связанностью физических полей. Полученные процессы затухания характерны для задач с ненулевым временем релаксации. На рисунке 3.5 можно заметить, что при времени  $\tau \geq 10^{14}$  наблюдается выход

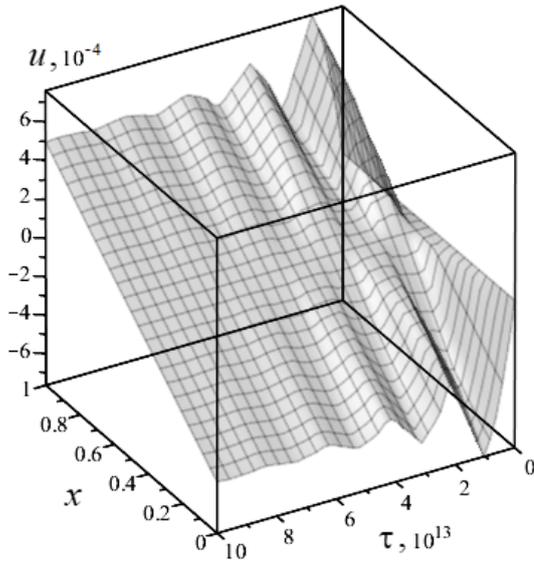


Рис. 3.5. Распределение перемещений внутри слоя  $u(x, \tau)$ .

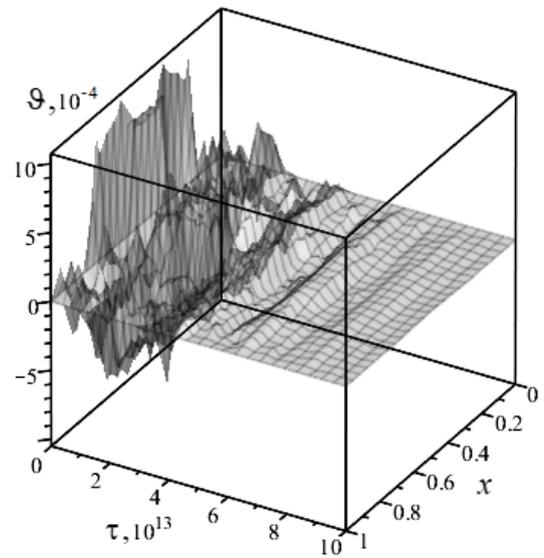


Рис. 3.6. Распределение приращений температуры внутри слоя  $\vartheta(x, \tau)$ .

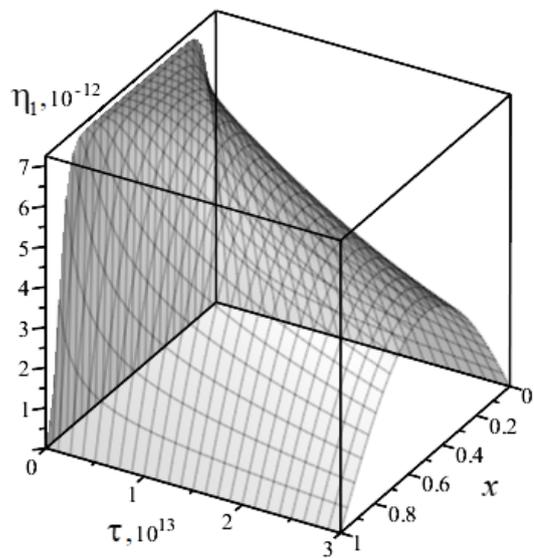


Рис. 3.7. Распределение приращений концентрации алюминия  $\eta_1(x, \tau)$ .

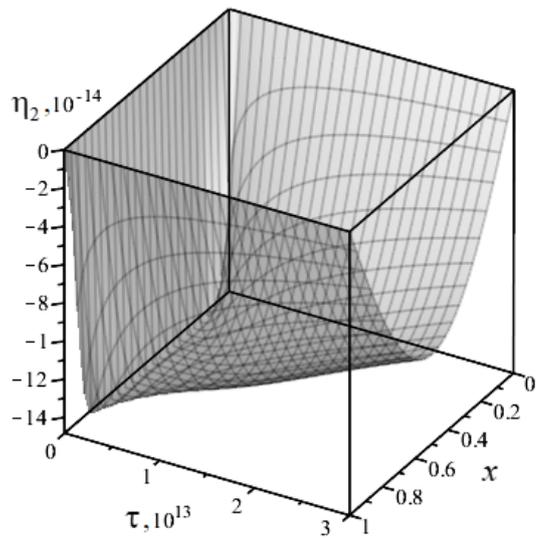


Рис. 3.8. Распределение приращений концентрации меди  $\eta_2(x, \tau)$ .

на статический режим. Более детальный характер термоупругих возмущений изображен на рисунках 3.9 и 3.10. На них рассматривается короткий интервал времени  $\tau = 10^7 \dots 10^7 + 2$ .

Также, для наглядности, ниже на рисунках 3.11 и 3.12 приведены графики перемещений и приращений температуры на верхней половине слоя ( $x = 0 \dots 0.5$ )

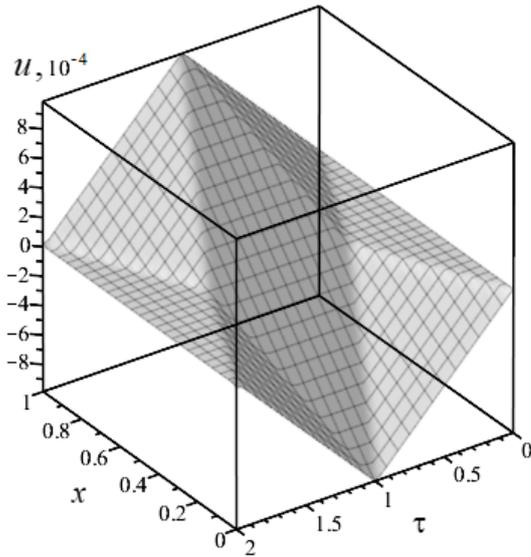


Рис. 3.9. Распределение перемещений  $u(x, \tau)$  на  $\tau = 10^7 \dots 10^7 + 2$ .

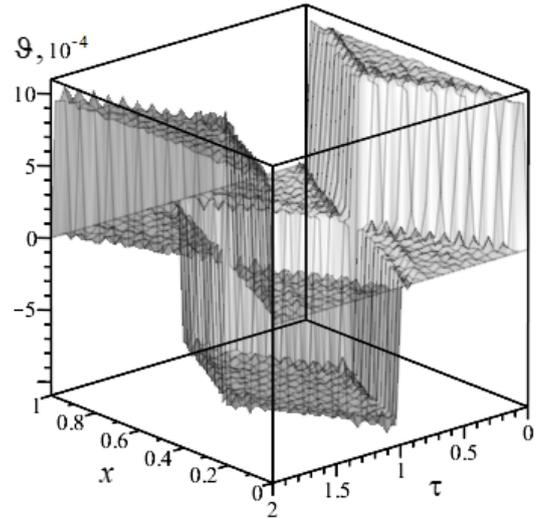


Рис. 3.10. Распределение приращений температуры  $\vartheta(x, \tau)$  на  $\tau = 10^7 \dots 10^7 + 2$ .

при фиксированных значениях времени  $\tau = 10^7 + \Delta\tau$ .

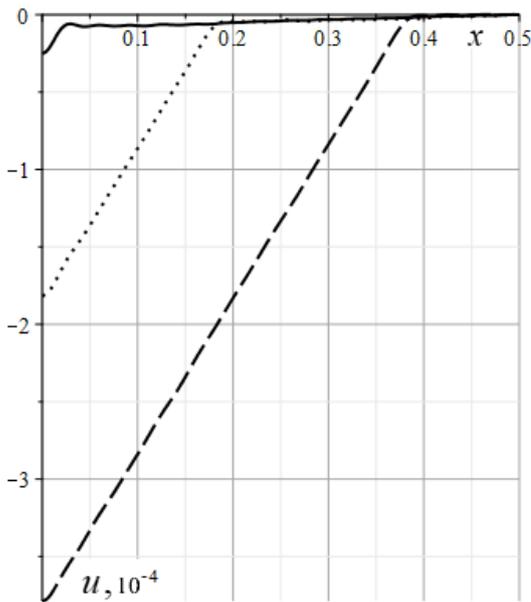


Рис. 3.11. Распределение перемещений  $u(x, \tau)$  по координате  $x$ .

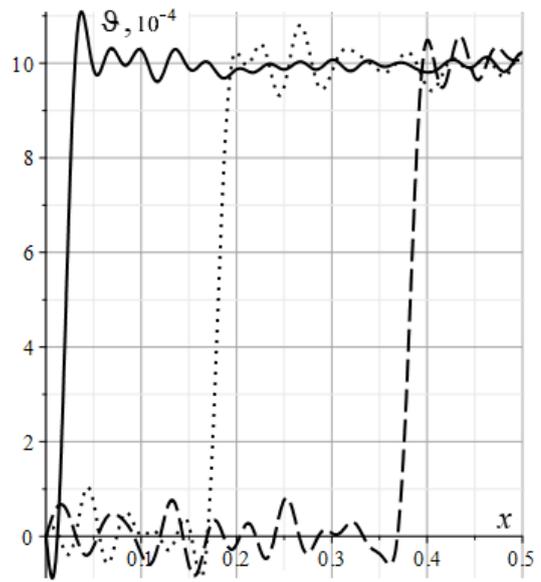


Рис. 3.12. Распределение приращений температуры  $\vartheta(x, \tau)$  по координате  $x$ .

Линии к рисункам 3.11 и 3.12:  $\Delta\tau = 9.9$  – сплошная,  $\Delta\tau = 10.1$  – пунктирная,  $\Delta\tau = 10.3$  – штриховая. Из рисунков 3.9 – 3.12 видно, что фронт волны растяжения-сжатия вызывает резкие скачки приращения температуры в сре-

де, что нельзя сказать на счёт диффузионных процессов, которые значительно более инерционны, чем тепловые (Рис. 3.13).

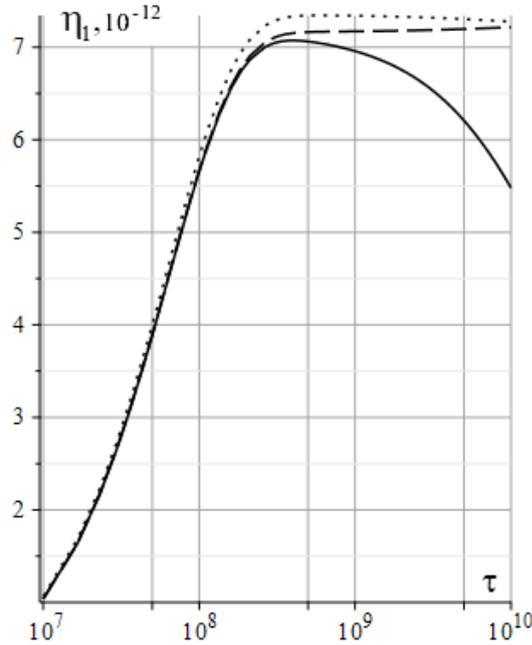


Рис. 3.13. Изменение  $\eta_1(x, \tau)$  по времени  $\tau$ .

Линии к рисункам 3.13:  $x = 0.01$  – сплошная,  $x = 0.25$  – пунктирная,  $x = 0.5$  – штриховая.

Рассмотрим учёт влияния связанности полей на решение задачи теории упругости. На рисунках 3.14 и 3.15 изображены перемещения для связанной задачи термоупругой диффузии и несвязанной (чисто упругой) задачи. Видно, что со временем ( $\tau \geq 10^8$ ) увеличивается запаздывание волны в связанной задаче по отношению к несвязанной. Однако амплитуды колебаний при небольших временах ( $\tau \leq 10^{12}$ ) практически совпадают.

Линии к рисункам 3.14 и 3.15: упругая задача с учётом термодиффузии – сплошная линия, упругая задача без учёта термодиффузии – пунктирная.

Также необходимо отметить наблюдаемую сходимость предлагаемого алгоритма. Все расчёты проведены всего для 30 членов ряда. При их дальнейшем увеличении результаты для перемещений и концентраций практически полностью совпадают, а для температуры изменения носят незначительный характер,

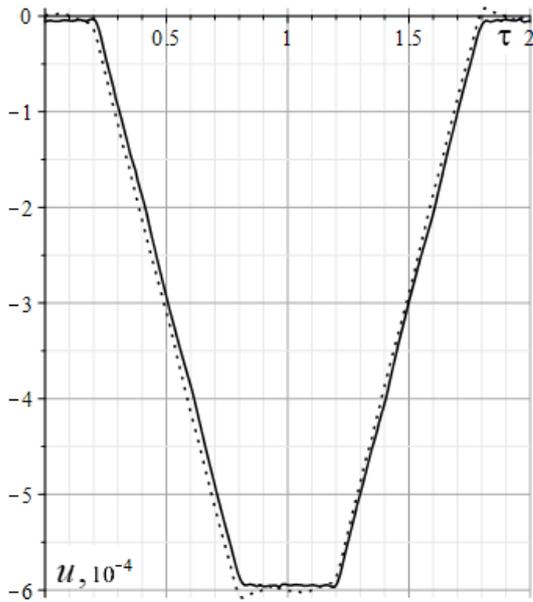


Рис. 3.14. Распределение перемещений  $u(x, \tau)$  при  $x = 0.2$  на интервале  $\tau = 10^8..10^8 + 2$ .

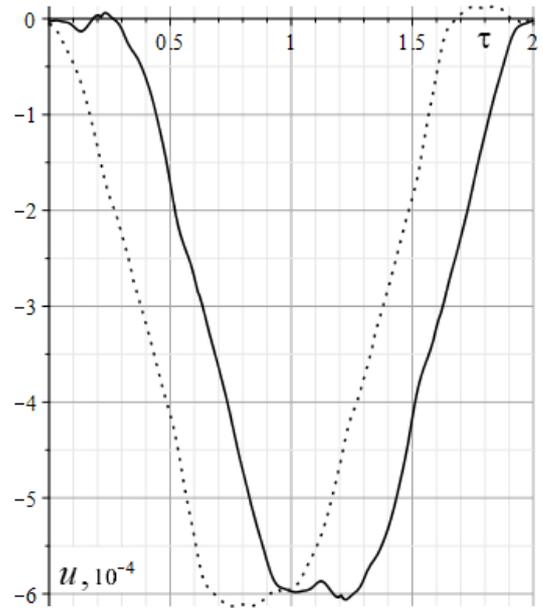


Рис. 3.15. Распределение перемещений  $u(x, \tau)$  при  $x = 0.2$  на интервале  $\tau = 10^9..10^9 + 2$ .

как, например, изображено на рисунке 3.16: 30 членов ряда – сплошная линия, 300 членов ряда – пунктирная.

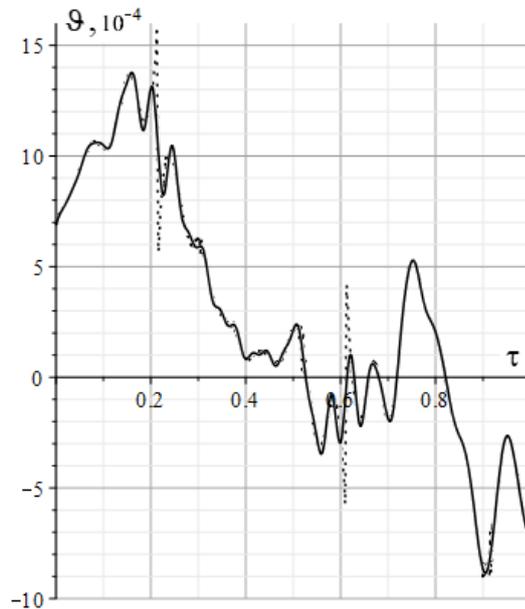


Рис. 3.16. Распределение приращений температуры  $\vartheta(x, \tau)$  при  $x = 0.2$  на интервале  $\tau = 10^9..10^9 + 1$ .

Полученные результаты согласуются с результатами, полученными для аналогичных задач упругой диффузии без учёта тепловых эффектов.

### III. Слой под действием нестационарного диффузионного потока.

В заключение рассмотрим задачу (1.35) для теплоизолированного и зафиксированного на границах однородного слоя. Положим для расчёта все правые части в граничных условиях (1.36) равными нулю, кроме диффузионного потока на верхней границе  $x = 0$ :

$$f_{31}(\tau) = \varphi \cdot H(\tau), \quad (3.3)$$

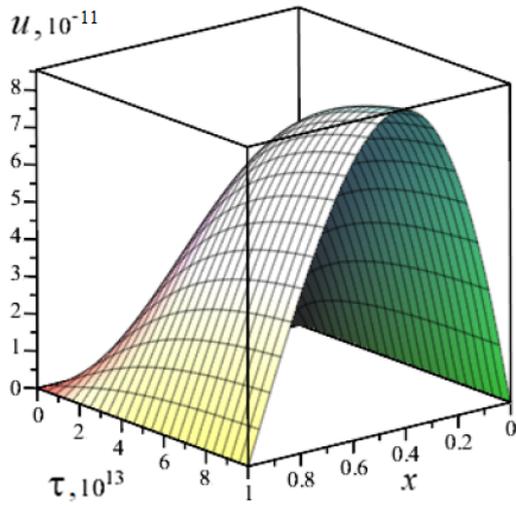
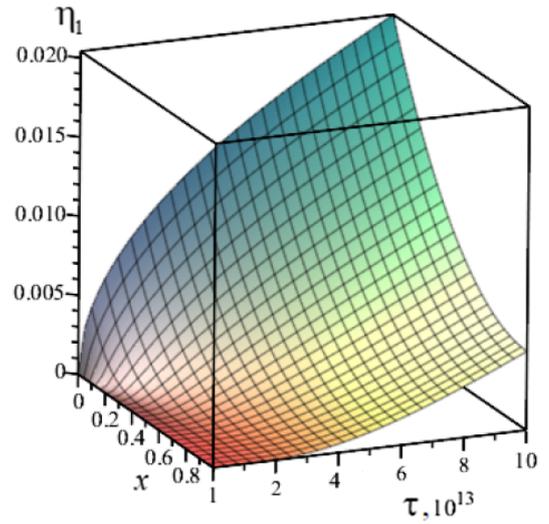
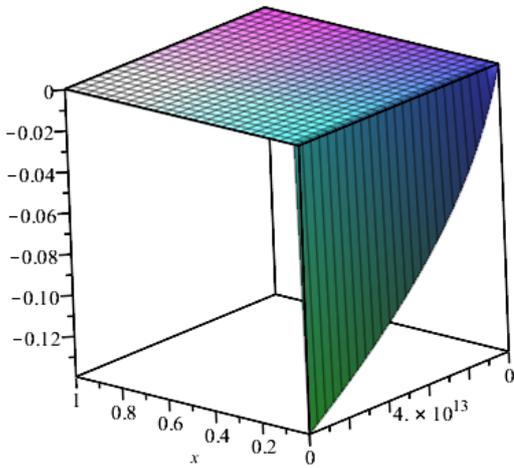
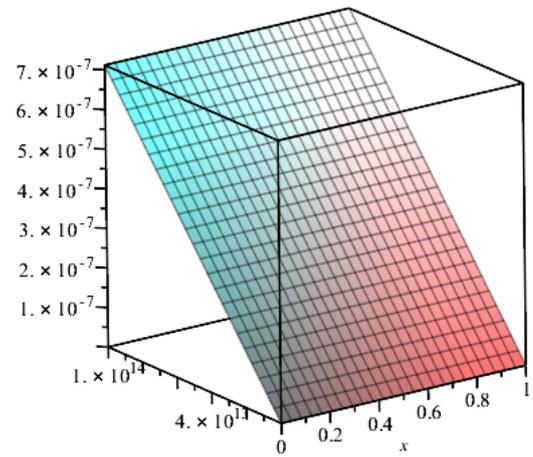
где полагаем  $\varphi = 10^{-16}$ . Тогда решение задачи имеет вид ( $\lambda_n = \pi n$ ):

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{13}(\lambda_n, s_j)}{s_j P'(\lambda_n, s_j)} \sin(\lambda_n x), \\ \vartheta(x, \tau) &= \varphi \vartheta_0 + \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{23}(\lambda_n, s_j)}{s_j P'(\lambda_n, s_j)} \cos(\lambda_n x), \\ \eta_q(x, \tau) &= \delta_{3q} \varphi \eta_{30} + \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{q+2,3}(\lambda_n, s_j)}{s_j P'(\lambda_n, s_j)} \cos(\lambda_n x). \end{aligned}$$

Здесь  $s_j = s_j(\lambda_n)$  – нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$ , а нулевые гармоники  $\vartheta_0$  и  $\eta_{30}$  представлены так:

$$\vartheta_0 = -2\beta_1 \tau - 2\beta_1 \tau_{\vartheta} (e^{-\tau/\tau_{\vartheta}} - 1), \quad \eta_{30} = 2\tau + 2\tau_q (e^{-\tau/\tau_q} - 1).$$

Результаты вычисления свёрток (1.40) показаны на рисунках 3.17 – 3.20, где представлены пространственно-временные распределения перемещений, температуры и концентраций, демонстрирующие взаимосвязь указанных полей при заданном диффузионном потоке (3.3). Вычисления проводились при 1000 членах рядов Фурье. Дальнейшее увеличение количества членов ряда не приводит к каким-либо видимым изменениям полученных результатов. Для наглядности на рисунках 3.20 – 3.24 приведены двумерные графики распределения возмущений по глубине слоя при фиксированном времени. Линии: сплошная –

Рис. 3.17. Зависимость  $u(x, \tau)$ .Рис. 3.18. Зависимость  $\eta_1(x, \tau)$ .Рис. 3.19. Зависимость  $\eta_2(x, \tau)$ .Рис. 3.20. Зависимость  $\vartheta_1(x, \tau)$ .

$\tau = 1 \cdot 10^{13}$ , пунктирная –  $\tau = 2 \cdot 10^{13}$ , штриховая –  $\tau = 3 \cdot 10^{13}$ .  $\tau = 10^{13}$  примерно соответствует 432 часам или 18 суткам.

На рисунке 3.22 видно постепенное смещение максимума перемещений из начала слоя в его центр.

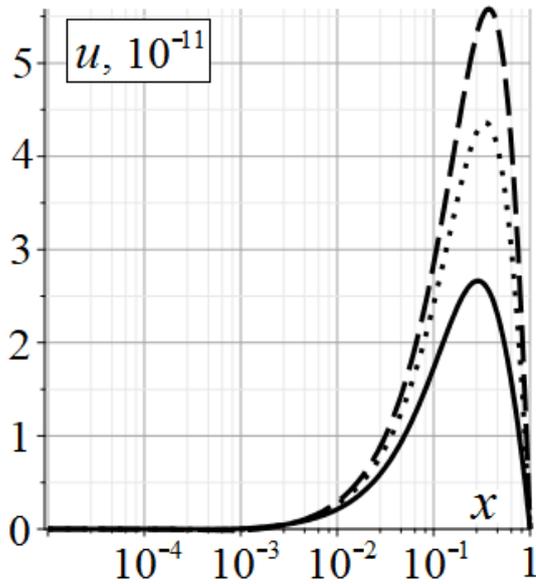


Рис. 3.21. Зависимость  $u(x, \tau)$  от  $x$  по логарифмической шкале.

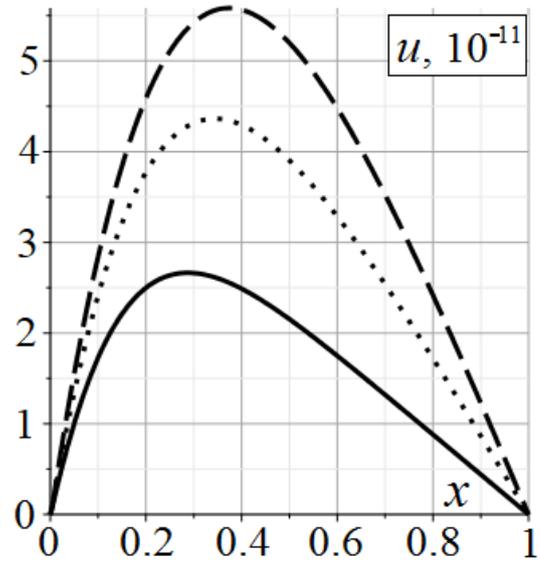


Рис. 3.22. Зависимость  $u(x, \tau)$  от  $x$ .

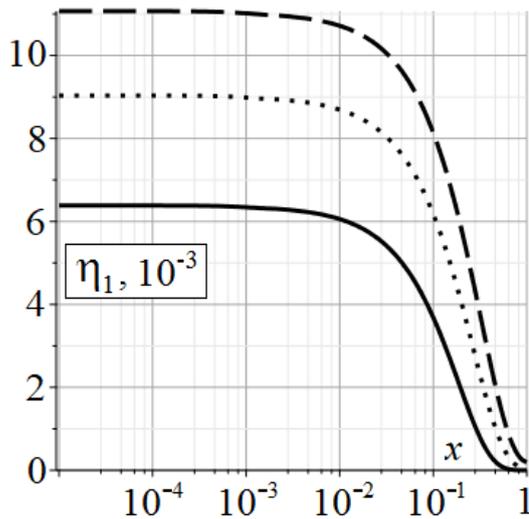


Рис. 3.23. Зависимость  $\eta_1(x, \tau)$  от  $x$ .

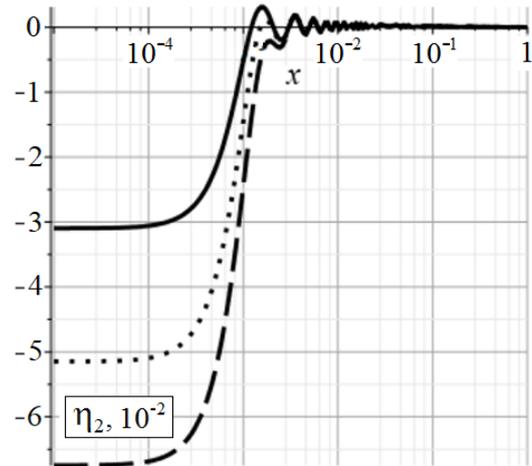


Рис. 3.24. Зависимость  $\eta_2(x, \tau)$  от  $x$ .

### 3.2. Переход к бесконечным скоростям распространения тепловых и диффузионных возмущений

В задаче термоупругой диффузии при относительно больших временах ( $\tau \gg \tau_q > \tau_\vartheta$ ) можно пренебречь релаксационными эффектами и, полагая,

что  $\tau_q \rightarrow 0$  и  $\tau_\vartheta \rightarrow 0$ , произвести переход к классическим законам Фурье и Фика [80, 114]. В этом случае равенства (2.2) принимают вид:

$$\omega(s) = s, \quad \forall q \quad \chi_q(s) = s. \quad (3.4)$$

Решения задач, полученные в Главе 2, сохраняют свой вид. Однако необходимо отметить, что количество корней многочлена  $P(\lambda_n, s)$  снизится с  $2N + 4$  до  $N + 3$ . Тогда оригиналы функций Грина (2.12) и (2.28) для задачи (1.35) записываются так ( $n \geq 1$ )

– для *поверхностных* функций Грина:

$$G_{ikn}(\tau) = \sum_{j=1}^{N+3} \frac{P_{ik}(\lambda_n, s_j)}{P'(\lambda_n, s_j)} \exp(s_j \tau), \quad (3.5)$$

– для *объёмных* функций Грина:

$$\tilde{G}_{ikn}(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{N+3} \frac{\tilde{P}_{ik}(\lambda_n, \xi, s_j)}{P'(\lambda_n, s_j)} \exp(s_j \tau). \quad (3.6)$$

Для *кинематических* граничных условий (1.36) нулевые гармоники в случае *поверхностных* возмущений записываются следующим образом:

$$G_{220} = 2H(\tau), \quad G_{2,q+2,0} = -2\beta_q H(\tau), \quad G_{q+2,q+2,0} = 2H(\tau). \quad (3.7)$$

Причём для случая *поверхностных объёмных* возмущений, в силу равенства (2.25), выполняются тождества

$$\tilde{G}_{220} \equiv G_{220}, \quad \tilde{G}_{2,q+2,0} \equiv G_{2,q+2,0}, \quad \tilde{G}_{q+2,q+2,0} \equiv G_{q+2,q+2,0}. \quad (3.8)$$

Для нулевых гармоник при *динамических поверхностных* и *объёмных* возмущениях остаются справедливыми формулы (2.17) и (2.27) соответственно.

Аналогичные переходы также будет верны и в задачах, не учитывающих перекрёстные диффузионные эффекты, рассматриваемых в п. 3.3.

Решение задачи (1.35), (1.36) с учётом (3.3) и преобразований (3.5) – (3.8) представлено на рисунках 3.25 и 3.26. Линии: сплошная – с учётом конечной

скорости распространения, пунктирная – без учёта конечной скорости распространения.

Необходимо отметить, что различие между графиками стремится к нулю при значениях времени  $\tau$ , значительно превышающих времена релаксации.

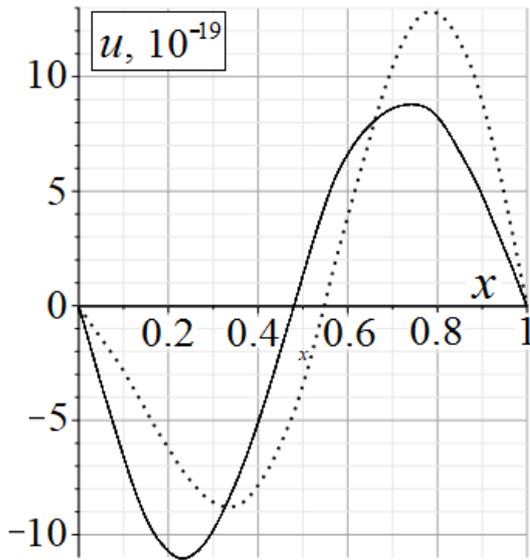


Рис. 3.25. Зависимость  $u(x, \tau)$  от  $x$  при  $\tau = 10^5$ .

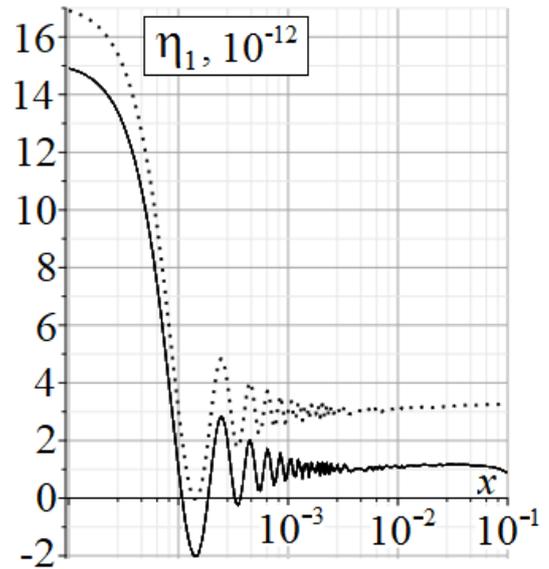


Рис. 3.26. Зависимость  $\eta_1(x, \tau)$  от  $x$  при  $\tau = 10^4$ .

Таким образом, показано, что учёт ненулевых времён релаксации вносит значительный вклад в решение задачи термоупругой диффузии не только для самих потоков, но и для деформаций.

Стоит отметить, что тепловые волны распространяются намного быстрее, чем волны растяжения-сжатия (на несколько порядков), а они, в свою очередь, – намного быстрее, чем волны массопереноса (на 5–6 порядков).

Для любых других материалов решение может быть получено аналогичным образом, если взять соответствующие константы для среды.

### 3.3. Термоупругая диффузия без учёта перекрёстных диффузионных эффектов

В данном разделе рассматривается класс нестационарных задач связанной термоупругой диффузии без учёта перекрёстных диффузионных эффектов. В этом случае в формулах (1.35) – (1.39) полагаем, что

$$D_{qp} = \delta_{qp} D_q = \begin{cases} D_q, & \text{если } q = p \\ 0, & \text{если } q \neq p \end{cases} \quad (3.9)$$

Такого рода задачи нужны при расчёте напряжённо-деформированного состояния (НДС) термоупругой среды, когда взаимное перераспределение компонент среды за счёт внешних диффузионных потоков не представляет исследовательского интереса. Такое допущение практически не влияет на точность расчёта НДС, что показано в работе [111]. При этом изображения искомым функций Грина для  $N$ -компонентных сред можно выразить в явной форме.

Рассмотренные ранее алгоритмы решения в пунктах 2.1 – 2.3 сохраняют свой вид, однако определитель однородной системы (2.5) с учётом (3.9) записывается так:

$$P(\lambda_n, s) = \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n & \dots & -\alpha_N \lambda_n \\ b_\vartheta \lambda_n \omega & k_2 & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega & \dots & \beta_N \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & 0 & \dots & 0 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & 0 & k_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Lambda_N \lambda_n^3 & -M_N \lambda_n^2 & 0 & 0 & \dots & k_N \end{vmatrix}.$$

Он имеет вместо  $(N + 2)^2$  всего  $(5N + 4)$  ненулевых элементов за счёт пренебрежения перекрёстными диффузионными эффектами, что значительно упрощает

его вычисление. В таком случае  $P(\lambda_n, s)$  раскрывается следующим образом:

$$P(\lambda_n, s) = (k_1 k_2 + b_u b_\vartheta \omega \lambda_n^2) \Pi - \omega \lambda_n^6 \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N \Lambda_q M_p \Pi_{qp} + \\ + \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N [\omega (\beta_q M_q k_1 + b_\vartheta \alpha_q M_q \lambda_n^2 + \beta_q \Lambda_q b_u \lambda_n^2) - \alpha_q \Lambda_q k_2 \lambda_n^2] \Pi_q.$$

При этом  $P_{ik}(\lambda_n, s)$  из п. 2.1 примут вид:

$$P_{11} = 2\lambda_n (k_2 + b_\vartheta b_u \omega) \Pi + 2\omega \lambda_n^5 \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N M_q \Lambda_p \Pi_{qp} + \\ + 2\lambda_n^3 \sum_{q=1}^N [\omega (\alpha_q M_q b_\vartheta + \beta_q M_q + b_u \beta_q \Lambda_q) - \alpha_q \Lambda_q k_2] \Pi_q, \\ P_{12} = 2\lambda_n \left( b_u \Pi + \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N \alpha_q M_q \Pi_q \right), \\ P_{1,q+2} = 2\lambda_n \left[ (\alpha_q k_2 - \omega b_u \beta_q) \Pi_q + \omega \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp} \right], \\ P_{21} = 2\omega s^2 \left( b_\vartheta \Pi + \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N \beta_q \Lambda_q \Pi_q \right), \\ P_{22} = 2 \left( k_1 \Pi - \lambda_n^4 \sum_{q=1}^N \alpha_q \Lambda_q \Pi_q \right), \\ P_{2,q+2} = -2\omega \left[ (\beta_q k_1 + b_\vartheta \alpha_q \lambda_n^2) \Pi_q + \lambda_n^4 \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp} \right], \\ P_{q+2,k} = \frac{1}{k_{q+2}} [\lambda_n^2 (\Lambda_q \lambda_n P_{1k} + M_q P_{2k}) - 2P (\delta_{1k} \lambda_n^2 \Lambda_q - \delta_{q+2,k})] \\ (k = \overline{1, N+2});$$

$$\Pi = \prod_{r=1}^N k_{r+2}, \quad \Pi_q = \prod_{r=1, r \neq q}^N k_{r+2}, \quad \Pi_{qp} = (\alpha_q \beta_p - \alpha_p \beta_q) \prod_{r=1, r \neq q, p}^N k_{r+2}.$$

Аналогично  $P_{ik}(\lambda_n, s)$  из п. 2.2 и  $P_{ikl}(\lambda_n, s)$  из п. 2.3 приведены соответственно в Приложении Б и Приложении В.

В свою очередь,  $\tilde{P}_{ik}(\lambda_n, s, \xi)$  для кинематических граничных условий из п. 2.4 примут вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{11} &= \left( k_2 \Pi + \omega \lambda^2 \sum_{q=1}^N \beta_q M_q \Pi_q \right) \sin(\lambda_n \xi), \\
\tilde{P}_{12} &= \lambda \left( b_u \Pi + \lambda^2 \sum_{q=1}^N \alpha_q M_q \Pi_q \right) \cos(\lambda_n \xi), \\
\tilde{P}_{1,q+2} &= \lambda \left[ (\alpha_q k_2 - \beta_q b_u \omega) \Pi_q + \omega \lambda^2 \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp} \right] \cos(\lambda_n \xi), \\
\tilde{P}_{21} &= -\omega \lambda \left( b_\vartheta \Pi_q + \lambda^2 \sum_{q=1}^N \beta_q \Lambda_q \Pi_q \right) \sin(\lambda_n \xi), \\
\tilde{P}_{22} &= \left( k_1 \Pi - \lambda^4 \sum_{q=1}^N \alpha_q \Lambda_q \Pi_q \right) \cos(\lambda_n \xi), \\
\tilde{P}_{2,q+2} &= -\omega \left[ (\beta_q k_1 + \alpha_q b_\vartheta \lambda^2) \Pi_q + \lambda^4 \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp} \right] \cos(\lambda_n \xi), \\
\tilde{P}_{q+2,k} &= \frac{1}{k_{q+2}} \left( 2\delta_{q+2,k} P \cos(\lambda_n \xi) + \Lambda_q \lambda^3 \tilde{P}_{1,k} + M_q \lambda^2 \tilde{P}_{2,k} \right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

*Примечание 1.* Если  $N = 1$ , тогда  $\Pi_q = 1$  и  $\Pi_{qp} = 0$ . Если  $N = 2$ , тогда  $\Pi_{12} = -\Pi_{21} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$ .

*Примечание 2.* Уместность формул (2.31) также видна из сравнения (3.10) и (3.11).

*Примечание 3.* Многочлены для полупространства из п. 2.5 совпадают с таковыми для слоя при замене  $\lambda_n$  на  $\lambda$ .

Переход к оригиналам (2.10) осуществляется по формулам (2.11) и (2.12). Причём сами формулы остаются неизменными, а меняются только лишь входящие в них многочлены. Аналогичным образом осуществляется переход к оригиналам (2.17)

Проанализируем влияние перекрёстных диффузионных на эффектов физические поля на примере III из п. 3.1. Перемещения  $u(x, \tau)$ , а также прираще-

ния температуры  $\vartheta(x, \tau)$  и концентрации  $\eta_1(x, \tau)$  при этом сохраняют свой вид как в п. 3.1. Приращения  $\eta_2(x, \tau)$  показан на рисунке 3.27. Линии: сплошная –  $\tau = 1 \cdot 10^{13}$ , пунктирная –  $\tau = 2 \cdot 10^{13}$ , штриховая –  $\tau = 3 \cdot 10^{13}$ .

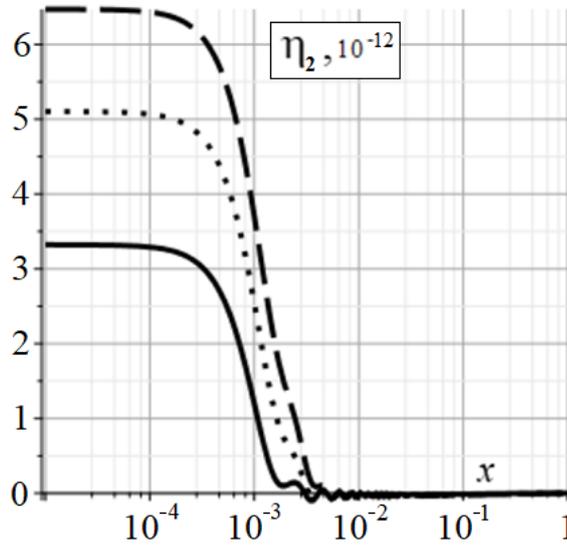


Рис. 3.27. Зависимость  $\eta_2(x, \tau)$  от координаты  $x$  без учёта перекрёстных диффузионных эффектов ( $D_{pq} = 0$ ).

При сравнении рисунков 3.24 и 3.27 видно, что пренебрежение перекрёстными диффузионными эффектами приводит к искажению результатов. При наличии диффузионного потока первой компоненты вещества – вторая реагирует на несколько порядков слабее, не отражая реальных процессов, т.к. должно происходить её постепенное вытеснение с верхней границы слоя.

### 3.4. Оптимизация формул для функций Грина

Как известно, функции Грина принадлежат к классу обобщенных функций. Это означает, что ряды Фурье в представлениях этих функций могут сходиться в обобщенном смысле. Кроме того, суммы этих рядов могут иметь особенности, в том числе и неинтегрируемые [1, 57, 82]. Это вносит дополнительные сложности в вычисление сверток (1.40). Учитывая вышеизложенное, получен-

ные ранее выражения для функций Грина нуждаются в дополнительных преобразованиях.

Рассмотрим задачу термоупругой диффузии из п. 2.1. Из формул (2.8) и Приложения А следует, что для функции Грина  $G_{21}^L(x, s)$  имеет место следующее представление при  $s \rightarrow \infty$ :

$$G_{21}^L(x) = b_{\vartheta} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n x \right).$$

Этот ряд сходится в обобщенном смысле к Дельта-функции Дирака от пространственной переменной  $x$ . Целесообразно представить функцию  $G_{21}^L$  из (2.8) следующим образом:

$$G_{21n}^L = \frac{P_{21}}{P} = \frac{2b_{\vartheta}s^2}{k_1} + \frac{P_{21}^*}{k_1P},$$

где

$$P_{21}^* = P_{21}k_1 - 2b_{\vartheta}s^2P. \quad (3.12)$$

Тогда с учетом равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \cosh((\pi - x)a)}{2a \sinh(\pi a)}$$

получаем [46]:

$$G_{21}^L(x, s) = b_{\vartheta}s \frac{\cosh((1-x)s)}{\sinh s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{21}^*}{k_1P} \cos \lambda_n x. \quad (3.13)$$

Для нахождения оригинала этого выражения, используем следующее представление

$$\frac{\cosh((1-x)s)}{\sinh s} = \frac{e^{-xs} + e^{-(2+x)s}}{1 - e^{-2s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{-(2n+x)s} + e^{-(2+2n-x)s} \right].$$

Тогда ( $L^{-1}$  – оператор обратного преобразования Лапласа)

$$\begin{aligned} G_{21}^*(x, \tau) &= L^{-1} \left[ b_{\vartheta}s \frac{\cosh((1-x)s)}{\sinh s} \right] \\ &= b_{\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} [\delta'(\tau - (2n+x)) + \delta'(\tau - (2+2n-x))], \end{aligned} \quad (3.14)$$

т.к.

$$L^{-1}(se^{as}) = \delta'(\tau + a).$$

Здесь же, при  $\tau_q \rightarrow 0$  и  $\tau_\vartheta \rightarrow 0$  функции  $G_{22n}^L$ ,  $G_{2,q+2,n}^L$ ,  $G_{q+2,1n}^L$  имеют порядок  $1/s$  при  $s \rightarrow \infty$ . Для практического вычисления свёрток (1.40) представим указанные функции в виде:

$$\begin{aligned} G_{22}^L &= \frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x}{k_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{22}^*}{k_2 P} \cos \lambda_n x, \\ G_{2,q+2}^L &= -\beta_q \left( \frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x}{k_{q+2}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{2,q+2}^*}{k_{q+2} P} \cos \lambda_n x, \\ G_{q+2,1}^L &= 2(M_q b_u - \Lambda_q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \cos \lambda_n x}{k_{q+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{q+2,1}^*}{k_{q+2} P} \cos \lambda_n x; \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} P_{22}^* &= P_{22} k_2 - 2P, \\ P_{2,q+2}^* &= P_{2,q+2} k_{q+2} + 2\beta_q P, \\ P_{q+2,1}^* &= P_{q+2,1} - 2M_q b_u \lambda_n^2 P. \end{aligned}$$

Таким образом, для функций  $G_{ikn}^L(s)$  остаются справедливыми представления (2.10). Вместо формул (2.8) будем использовать

$$G_{ikn}^L(s) = \frac{\Phi_{ik}(\lambda_n, s)}{\Psi_{ik}(\lambda_n, s)}, \quad (i = \overline{1, N+2}, k = \overline{1, N+2}); \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{1k} &= P_{1k}, \quad \Psi_{1k} = P; \quad \Phi_{2k} = P_{2k}^*, \quad \Psi_{2k} = k_k P; \\ \Phi_{q+2,1} &= P_{q+2,1}^*, \quad \Psi_{q+2,1} = k_{q+2} P; \quad \Phi_{q+2,l} = P_{q+2,l}, \quad \Psi_{q+2,l} = k_{q+2} P, \\ & \quad l = \overline{2, N+2}. \end{aligned}$$

Тогда оригиналы функций Грина задачи (1.41), (1.42) с учетом представ-

лений (3.12) – (3.16) имеют вид ( $k = \overline{1, N+2}$ ) [3, 46]:

$$\begin{aligned}
G_{1k}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}(\tau) \sin \lambda_n x, \\
G_{2k}(x, \tau) &= \delta_{1k} G_{21}^*(x, \tau) + (\delta_{2k} - \delta_{k, q+2} \beta_q) \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, e^{-\kappa \pi^2 \tau}\right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kn}(\tau) \cos \lambda_n x, \\
G_{q+2, k}(x, \tau) &= \delta_{k1} \frac{\Lambda_q - M_q b_u}{D_q} \frac{\partial}{\partial \tau} \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau}\right) + \\
&\quad + \delta_{k, q+2} \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2, kn}(\tau) \cos \lambda_n x;
\end{aligned}$$

где  $\vartheta_3(x/2, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos \lambda_n x$  – тета функция Якоби [1, 57, 82], а остальные функции имеют вид ( $l = \overline{2, N+2}$ ,  $k = \overline{1, N+2}$ ):

$$\begin{aligned}
G_{1kn}(\lambda_n, \tau) &= \sum_{j=1}^{N+3} A_{1k}^{(j)} e^{s_j \tau}, \\
G_{ikn}(\lambda_n, \tau) &= \sum_{j=1}^{N+3} A_{ik}^{(j)} e^{s_j \tau} + \delta_{i2} \delta_{2k} A_{ik}^{(N+4)} e^{-\kappa \lambda_n^2 \tau} + \delta_{q+2, i} A_{ik}^{(N+5)} e^{-D_q \lambda_n^2 \tau} + \\
&\quad + \delta_{i2} \delta_{k, q+2} A_{ik}^{(N+5)} e^{-D_q \lambda_n^2 \tau} + \delta_{i2} \delta_{1k} \left( A_{ik}^{(N+6)} \cos \lambda_n \tau - A_{ik}^{(N+7)} \sin \lambda_n \tau \right), \\
G_{21}^*(x, \tau) &= b_u L^{-1} \left[ s \frac{\cosh((1-x)s)}{\sinh s} \right] = \\
&= b_u \sum_{n=0}^{\infty} [\delta'(\tau - (2n+x)) + \delta'(\tau - (2+2n-x))].
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_{ik}^{(l)} = A_{ik}^{(l)}(\lambda_n)$  находятся по формулам (штрих означает производную по параметру  $s$ , ( $i, k = \overline{1, N+2}$ ,  $j = \overline{1, N+2}$ )):

$$\begin{aligned}
A_{ik}^{(j)} &= \frac{\Phi_{ik}(\lambda_n, s_j)}{\Psi'_{ik}(\lambda_n, s_j)}, \quad A_{2, q+2}^{(N+4)} = \frac{\Phi_{2, q+2}(\lambda_n, -\kappa \lambda_n^2)}{\Psi'_{2, q+2}(\lambda_n, -\kappa \lambda_n^2)}, \\
A_{2, q+2}^{(N+5)} &= \frac{\Phi_{2, q+2}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}{\Psi'_{2, q+2}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}, \quad A_{q+2, k}^{(N+5)} = \frac{\Phi_{q+2, k}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}{\Psi'_{q+2, k}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}, \\
A_{21}^{(N+6)} &= 2\text{Re} \frac{\Phi_{21}(\lambda_n, \lambda_n)}{\Psi'_{21}(\lambda_n, \lambda_n)}, \quad A_{21}^{(N+7)} = 2\text{Im} \frac{\Phi_{21}(\lambda_n, \lambda_n)}{\Psi'_{21}(\lambda_n, \lambda_n)}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные здесь функции Грина  $G_{ik}(x, \tau)$  в свертки (1.40), получаем решение задачи термоупругой диффузии для слоя с учётом особенностей.

Таким же образом осуществляются преобразования функций Грина в задачах с другими граничными условиями.

Необходимо отметить, что указанные, за исключением (3.12)–(3.14), преобразования целесообразно применять только в моделях, не учитывающих конечные скорости распространения диффузионных потоков. Таким образом, предельный переход при  $\tau_q \rightarrow 0$  и  $\tau_\vartheta \rightarrow 0$  несколько не упрощает решение задач термомеханодиффузии. Напротив, с точки зрения вычислительной практики, решение рассматриваемых здесь задач только усложняется.

### 3.5. Переход к стационарным режимам

Асимптотика решений задач термоупругой диффузии может быть полезной при переходе от нестационарных режимов к статическим, в том числе для проверки результатов, полученных в Главе 2. Рассмотрим статический аналог задачи (1.35) с набором граничных условий (1.36) – (1.38).

Тогда, чтобы получить решение этой задачи, полагаем в граничных условиях (1.36) – (1.38), что

$$f_{kl}(\tau) = \hat{f}_{kl}H(\tau)$$

и после вычисления свертки переходим к пределу при  $\tau \rightarrow \infty$ . В силу того, что (см. [55])

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_{kl}(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} s f_{kl}^L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}_{kl} \frac{1}{s} = \hat{f}_{kl},$$

имеем

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(x) \\ \vartheta(x) \\ \eta_q(x) \end{Bmatrix} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{Bmatrix} G_{1kl}(x, \tau) \\ G_{2kl}(x, \tau) \\ G_{q+2,kl}(x, \tau) \end{Bmatrix} * f_{kl}(\tau) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \begin{Bmatrix} G_{1kl}^L(x, s) \\ G_{2kl}^L(x, s) \\ G_{q+2,kl}^L(x, s) \end{Bmatrix} f_{kl}^L(s) = \hat{f}_{kl} \begin{Bmatrix} G_{1kl}^L(x, 0) \\ G_{2kl}^L(x, 0) \\ G_{q+2,kl}^L(x, 0) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Иными словами, для получения решений задач статики из решений задач динамики необходимо найти предельные значения трансформант Лапласа функций Грина при  $s \rightarrow 0$ . Полагая  $\hat{f}_{kl} = \delta_{kl}$ , получаем функции Грина статической задачи термоупругой диффузии.

Рассмотрим эти предельные переходы на примере одномерных нестационарных задач упругой диффузии, решения которых получены в Главе 2. Найдём вначале аналитическое решение соответствующих стационарных задач.

Уравнения равновесия для одномерной задачи будут иметь вид (в (1.35) отбрасываем члены, содержащие производные по времени):

$$\begin{aligned} u'' - b_u \vartheta' - \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta_q' + F_1(x) &= 0, \quad \kappa \vartheta'' + F_2(x) = 0, \\ \sum_{p=1}^N D_{qp} \eta_p'' - \Lambda_q u''' - M_q \vartheta'' + F_{q+2}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Или же, при отсутствии внешних объёмных возмущений:

$$u'' - b_u \vartheta' - \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta_q' = 0, \quad \vartheta'' = 0, \quad \sum_{p=1}^N D_{qp} \eta_p'' - \Lambda_q u''' = 0. \quad (3.17)$$

При этом имеет место частичная потеря связанности системы с уравнением теплопереноса.

**Решение статической задачи (3.17).**

Интегрируя второе уравнение в (3.17), получаем:

$$\vartheta' = C_4, \quad \vartheta = C_4x + C_5.$$

Подставляем  $\vartheta'$  в первое уравнение (3.17) и выражаем  $u''$ :

$$u'' = b_u C_4 + \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta_q' \quad (3.18)$$

Далее подставляем  $u'''$  в третье уравнение системы (3.17):

$$\sum_{p=1}^N D_{qp} \eta_p'' - \Lambda_q \sum_{p=1}^N \alpha_p \eta_p'' = 0.$$

Отсюда получаем следующие  $N$  уравнений:

$$\sum_{p=1}^N (D_{qp} - \Lambda_q \alpha_p) \eta_p'' = 0.$$

Или, т.к.  $\eta_q''$  линейно независимы, имеем:

$$\forall q: \quad \eta_q'' = 0, \quad \eta_q' = C_{2q+4}, \quad \eta_q = C_{2q+4}x + C_{2q+5}.$$

Подстановка  $\eta_q'$  в (3.18) позволяет найти  $u$ :

$$u'' = b_u C_4 + \sum_{q=1}^N \alpha_q C_{2q+4}.$$

В итоге имеем следующее решение статической задачи (3.17):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left( b_u C_4 + \sum_{q=1}^N \alpha_q C_{2q+4} \right) x^2 + C_2 x + C_3, \\ \vartheta &= C_4 x + C_5, \\ \eta_q &= C_{2q+4} x + C_{2q+5}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Найдём постоянные интегрирования из граничных условий. Для этого рассмотрим кинематические граничные условия вида:

$$\begin{aligned}
u|_{x=0} &= \hat{f}_{11}, & -\kappa\vartheta'|_{x=0} &= \hat{f}_{21}, \\
\left( \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta'_r \right) \Big|_{x=0} &= \hat{f}_{q+2,1}, \\
u|_{x=1} &= \hat{f}_{12}, & -\kappa\vartheta'|_{x=1} &= \hat{f}_{22}, \\
\left( \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta'_r \right) \Big|_{x=1} &= \hat{f}_{q+2,2}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Подставляем (3.19) в (3.20):

$$\begin{aligned}
C_3 &= \hat{f}_{11}, & -\kappa C_4 &= \hat{f}_{21}, \\
(\Lambda_q b_u + M_q) C_4 + \sum_{p=1}^N (\Lambda_q \alpha_p - D_{qp}) C_{2p+4} &= \hat{f}_{q+2,1}, \\
\frac{1}{2} \left( b_u C_4 + \sum_{p=1}^N \alpha_p C_{2p+4} \right) + C_2 + C_3 &= \hat{f}_{12}, & -\kappa C_4 &= \hat{f}_{22}, \\
(\Lambda_q b_u + M_q) C_4 + \sum_{p=1}^N (\Lambda_q \alpha_p - D_{qp}) C_{2p+4} &= \hat{f}_{q+2,2}.
\end{aligned}$$

Или, преобразовав, получаем:

$$\begin{aligned}
C_3 &= \hat{f}_{11}, & \frac{1}{2} \left( b_u C_4 + \sum_{p=1}^N \alpha_p C_{2p+4} \right) + C_2 + C_3 &= \hat{f}_{12}, \\
-\kappa C_4 &= \hat{f}_{21}, & (\Lambda_q b_u + M_q) C_4 + \sum_{p=1}^N (\Lambda_q \alpha_p - D_{qp}) C_{2p+4} &= \hat{f}_{q+2,1}, \\
-\kappa C_4 &= \hat{f}_{22}, & (\Lambda_q b_u + M_q) C_4 + \sum_{p=1}^N (\Lambda_q \alpha_p - D_{qp}) C_{2p+4} &= \hat{f}_{q+2,2}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Система (3.21) является несовместной. Две последних пары уравнений взаимно исключают друг друга. Это объясняется тем, что, с точки зрения механики, тепловые и диффузионные потоки не сбалансированы. Поэтому статическое равновесие системы в данном случае невозможно. Для получения решения

необходимо положить, что  $\hat{f}_{q+2,2} \equiv \hat{f}_{q+2,1} \equiv \hat{f}_{q+2}$  и  $\hat{f}_{22} \equiv \hat{f}_{21} \equiv \hat{f}_2$ . Тогда задача поиска постоянных заметно упрощается:

$$C_3 = \hat{f}_{11}, \quad C_2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \alpha_p C_{2p+4} = \hat{f}_{12} - \hat{f}_{11} + \hat{f}_2 b_u / 2\kappa,$$

$$C_4 = -\hat{f}_2 / \kappa, \quad \sum_{p=1}^N (\Lambda_q \alpha_p - D_{qp}) C_{2p+4} = \hat{f}_{21} (\Lambda_q b_u + M_q) / \kappa + \hat{f}_{q+2}.$$

Для отыскания  $C_{2p+4}$  необходимо решить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{p=1}^N (\Lambda_q \alpha_p - D_{qp}) C_{2p+4} = \hat{f}_{q+2} + \hat{f}_2 (\Lambda_q b_u + M_q) / \kappa. \quad (3.22)$$

Определитель однородной системы (3.22) имеет вид

$$W = \begin{vmatrix} \Lambda_1 \alpha_1 - D_{11} & \Lambda_1 \alpha_2 - D_{12} & \dots & \Lambda_1 \alpha_N - D_{1N} \\ \Lambda_2 \alpha_1 - D_{21} & \Lambda_2 \alpha_2 - D_{22} & \dots & \Lambda_2 \alpha_N - D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_N \alpha_1 - D_{N1} & \Lambda_N \alpha_2 - D_{N2} & \dots & \Lambda_N \alpha_N - D_{NN} \end{vmatrix}. \quad (3.23)$$

Тогда

$$C_{2p+4} = \frac{W_p}{W},$$

где  $W_p$  получается из  $W$  путём подстановки в него вектора

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_3 + \hat{f}_2 (\Lambda_1 b_u + M_1) / \kappa \\ \hat{f}_4 + \hat{f}_2 (\Lambda_2 b_u + M_2) / \kappa \\ \dots \\ \hat{f}_{N+2} + \hat{f}_2 (\Lambda_N b_u + M_N) / \kappa \end{pmatrix}$$

вместо столбца с номером  $p$  по правилу Крамера.

Для упрощения вычисления и анализа определителя  $W$  докажем следующее утверждение.

**Утверждение.** Определитель (3.23) может быть представлен как определитель  $N + 1$  порядка следующим образом:

$$W = (-1)^N \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ \Lambda_1 & D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ \Lambda_2 & D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_N & D_{N1} & D_{N2} & \dots & D_{NN} \end{vmatrix}.$$

*Доказательство.* Пользуясь тем, что определитель обладает свойством линейности по столбцам [12], представим  $W$  следующим образом:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} \Lambda_1\alpha_1 - D_{11} & \Lambda_1\alpha_2 - D_{12} & \dots & \Lambda_1\alpha_N - D_{1N} \\ \Lambda_2\alpha_1 - D_{21} & \Lambda_2\alpha_2 - D_{22} & \dots & \Lambda_2\alpha_N - D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_1\alpha_2 - D_{12} & \dots & \Lambda_1\alpha_N - D_{1N} \\ \Lambda_2 & \Lambda_2\alpha_2 - D_{22} & \dots & \Lambda_2\alpha_N - D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D_{11} & \Lambda_1\alpha_2 - D_{12} & \dots & \Lambda_1\alpha_N - D_{1N} \\ D_{21} & \Lambda_2\alpha_2 - D_{22} & \dots & \Lambda_2\alpha_N - D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Далее совершаем те же операции со вторым столбцом.

$$\begin{aligned} W &= \alpha_1\alpha_2 \begin{vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_1 & \Lambda_1\alpha_3 - D_{13} & \dots \\ \Lambda_2 & \Lambda_2 & \Lambda_2\alpha_3 - D_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \alpha_1 \begin{vmatrix} \Lambda_1 & D_{12} & \Lambda_1\alpha_3 - D_{13} & \dots \\ \Lambda_2 & D_{22} & \Lambda_2\alpha_3 - D_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \\ &- \alpha_2 \begin{vmatrix} D_{11} & \Lambda_1 & \Lambda_1\alpha_3 - D_{13} & \dots \\ D_{21} & \Lambda_2 & \Lambda_2\alpha_3 - D_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \Lambda_1\alpha_3 - D_{13} & \dots \\ D_{21} & D_{22} & \Lambda_2\alpha_3 - D_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Первый определитель равен нулю, т.к. имеет 2 одинаковых столбца – первый и второй. Продолжая процедуру разложения по 3-му, 4-му и т.д. столбцам,

на последнем шаге имеем:

$$\begin{aligned}
 (-1)^N W = & -\alpha_1 \begin{vmatrix} \Lambda_1 & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ \Lambda_2 & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} D_{11} & \Lambda_1 & D_{13} & \dots & D_{1N} \\ D_{21} & \Lambda_2 & D_{23} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \dots \\
 & \dots - \alpha_N \begin{vmatrix} D_{11} & \dots & D_{1,N-1} & \Lambda_1 \\ D_{21} & \dots & D_{2,N-1} & \Lambda_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Здесь множитель  $(-1)^N$  появляется благодаря тому, что при разложении на два множителя определитель со столбцом из коэффициентов диффузии  $D_{qp}$  будет всегда давать множитель  $-1$ .

Выполняя во всех определителях перестановки столбца, включающего  $\Lambda_q$ , с текущей позиции на первую и последовательно передвигая столбцы, включающие  $D_{qp}$ , получаем:

$$\begin{aligned}
 (-1)^N W = & \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \alpha_1 \begin{vmatrix} \Lambda_1 & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ \Lambda_2 & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \\
 & + \alpha_2 \begin{vmatrix} \Lambda_1 & D_{11} & D_{13} & \dots & D_{1N} \\ \Lambda_2 & D_{12} & D_{23} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \dots + (-1)^N \alpha_N \begin{vmatrix} \Lambda_1 & D_{11} & \dots & D_{1,N-1} \\ \Lambda_2 & D_{11} & \dots & D_{2,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Откуда можно легко заметить, что правая часть равенства – раскрытый по первой строке определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ \Lambda_1 & D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ \Lambda_2 & D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_N & D_{N1} & D_{N2} & \dots & D_{NN} \end{vmatrix}.$$

Доказательство окончено. ■

Окончательно получаем искомые константы интегрирования:

$$C_2 = \hat{f}_{12} - \hat{f}_{11} + \hat{f}_2 b_u / 2\kappa - \frac{1}{2W} \sum_{p=1}^N \alpha_p W_p, \quad C_3 = \hat{f}_{11},$$

$$C_4 = -\hat{f}_2 / \kappa, \quad C_{2p+4} = \frac{W_p}{W}.$$

В итоге имеем

$$u = \left( \frac{1}{2W} \sum_{q=1}^N \alpha_q W_q - \frac{b_u}{2\kappa} \hat{f}_2 \right) x^2 + \left( \hat{f}_{12} - \hat{f}_{11} + \frac{b_u}{2\kappa} \hat{f}_2 - \frac{1}{2W} \sum_{p=1}^N \alpha_p W_p \right) x + \hat{f}_{11},$$

$$\vartheta = -\frac{\hat{f}_2}{\kappa} x + C_5, \quad \eta_q = \frac{W_q}{W} x + C_{2q+5}.$$

или

$$u = (1-x)\hat{f}_{11} + \hat{f}_{12}x + \frac{x}{2}(1-x) \left( \frac{b_u}{\kappa} \hat{f}_2 - \frac{1}{W} \sum_{q=1}^N \alpha_q W_q \right), \quad (3.24)$$

$$\vartheta = -\frac{\hat{f}_2}{\kappa} x + C_\vartheta, \quad \eta_q = \frac{W_q}{W} x + C_q.$$

Отсюда видно, что поля температуры и концентраций определяются с точностью до некоторой произвольной постоянной, которые определяются внешними факторами.

**Предельный переход от динамической к статической задаче.** Обратимся к решению из п. 2.1 Статическому решению должны соответствовать значения функций Грина ( $\lambda_n = \pi n$ ):

$$G_{1k}^L(x, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}^L(s) \sin(\lambda_n x),$$

$$G_{2k}^L(x, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_{2k0}^L(s)}{2} + \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kn}^L(s) \cos(\lambda_n x),$$

$$G_{q+2,k}^L(x, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_{q+2,k0}^L(s)}{2} + \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,kn}^L(s) \cos(\lambda_n x).$$

Ранее было получено следующее решение

– при  $n = 0$ :

$$G_{210}^L = 2b_\vartheta, \quad G_{220}^L = 2\frac{1}{\omega},$$

$$G_{2,q+2,0}^L = -2\frac{\beta_q}{\chi_q}, \quad G_{q+2,q+2,0}^L = 2\frac{1}{\chi_q};$$

– при  $n \geq 1$ :

$$G_{ikn}^L = \frac{P_{ik}(\lambda_n, 0)}{P(\lambda_n, 0)}.$$

Здесь  $P(\lambda_n, 0)$  – определитель однородной системы (2.5), который, после разложения по 2-й строке, с учетом доказанного утверждения приводится к виду

$$P(\lambda_n, 0) = \kappa \lambda_n^{2N+4} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ \Lambda_1 & D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ \Lambda_2 & D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_N & D_{N1} & D_{N2} & \dots & D_{NN} \end{vmatrix}.$$

Причём, опираясь на указанную выше теорему, имеем

$$P(\lambda_n, 0) = (-1)^N \kappa \lambda_n^{2N+4} W.$$

$P_{ik}(\lambda_n, 0)$  – определители, полученные по правилу Крамера из  $P(\lambda_n, s)$  путём замены  $i$ -ого столбца на столбец

$$2 \left( \lambda_n \delta_{1k}, \delta_{2k}, -\Lambda_1 \lambda_n^2 \delta_{1k} + \delta_{3k}, \dots, -\Lambda_N \lambda_n^2 \delta_{1k} + \delta_{N+2,k} \right)^T.$$

Рассмотрим определители  $P_{ik}$ :

$$P_{11}(\lambda_n, 0) = 2P(\lambda_n, 0)/\lambda_n,$$

$$P_{12}(\lambda_n, 0) = -2\lambda_n^{2N+1} \begin{vmatrix} -b_u & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ M_1 & D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ M_2 & D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_N & D_{N1} & D_{N2} & \dots & D_{NN} \end{vmatrix},$$

$$P_{13}(\lambda_n, 0) = 2\kappa\lambda_n^{2N+1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{N1} & D_{N2} & \dots & D_{NN} \end{vmatrix},$$

$$P_{14}(\lambda_n, 0) = -2\kappa\lambda_n^{2N+1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ D_{31} & D_{32} & \dots & D_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{N1} & D_{N2} & \dots & D_{NN} \end{vmatrix},$$

и т.д.

Раскрытие такого рода определителей и определителей в (3.24) в общем случае представляется весьма затруднительным, поэтому для наглядности рассмотрим двухкомпонентный слой (Приложение А).

При  $N = 2$  многочлены  $P$  и  $P_{ik}$  будут иметь вид:

$$P = \kappa\lambda_n^8 K,$$

$$P_{11} = 2P/\lambda_n, \quad P_{22} = 2P/\kappa\lambda_n^2,$$

$$P_{12} = 2\lambda_n^5 K_{12}, \quad P_{13} = 2\kappa\lambda_n^5 K_{13}, \quad P_{14} = -2\kappa\lambda_n^5 K_{14},$$

$$P_{32} = -2\lambda_n^6 K_{32}, \quad P_{33} = 2\kappa\lambda_n^6 K_{33}, \quad P_{34} = -2\kappa\lambda_n^6 K_{34},$$

$$P_{42} = 2\lambda_n^6 K_{42}, \quad P_{43} = -2\kappa\lambda_n^6 K_{43}, \quad P_{44} = 2\kappa\lambda_n^6 K_{44},$$

$$P_{21} = P_{23} = P_{24} = P_{31} = P_{41} \equiv 0.$$

где

$$K = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} - \Lambda_1(\alpha_1 D_{22} - \alpha_2 D_{21}) + \Lambda_2(\alpha_1 D_{12} - \alpha_2 D_{11}),$$

$$K_{12} = b_u(D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}) + M_1(\alpha_1 D_{22} - \alpha_2 D_{21}) - M_2(\alpha_1 D_{12} - \alpha_2 D_{11}),$$

$$K_{32} = -M_1 D_{22} + M_2 D_{12} - \Lambda_1 (b_u D_{22} + \alpha_2 M_2) + \Lambda_2 (b_u D_{12} + \alpha_2 M_1),$$

$$K_{42} = -M_1 D_{21} + M_2 D_{11} - \Lambda_1 (b_u D_{21} + \alpha_1 M_2) + \Lambda_2 (b_u D_{11} + \alpha_1 M_1),$$

$$K_{13} = \alpha_1 D_{22} - \alpha_2 D_{21}, \quad K_{14} = \alpha_1 D_{12} - \alpha_2 D_{11},$$

$$K_{33} = D_{22} - \alpha_2 \Lambda_2, \quad K_{34} = D_{12} - \alpha_2 \Lambda_1,$$

$$K_{44} = D_{11} - \alpha_1 \Lambda_1, \quad K_{43} = D_{21} - \alpha_1 \Lambda_2.$$

Оригиналы функций Грина запишутся так

$$\begin{aligned} G_{1k}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{1k}(\lambda_n, 0)}{P(\lambda_n, 0)} \sin(\lambda_n x), \\ G_{2k}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{2k}(\lambda_n, 0)}{P(\lambda_n, 0)} \cos(\lambda_n x), \\ G_{q+2,k}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{q+2,k}(\lambda_n, 0)}{P(\lambda_n, 0)} \cos(\lambda_n x). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Введём следующие дополнительные обозначения:

$$Z_1(x) = \frac{x}{6}(x^2 - 3x + 2), \quad Z_2(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 6x + 2).$$

Причём

$$Z_1(x) + Z_1(1-x) = \frac{x}{2}(1-x), \quad Z_2(x) - Z_2(1-x) = \frac{1}{2} - x.$$

Подставляя в (3.25) многочлены  $P$  и  $P_{ik}$ , получаем:

$$\begin{aligned} G_{21} &= G_{23} = G_{24} = G_{31} = G_{41} \equiv 0, \\ G_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x) = 1 - x, \\ G_{12} &= \frac{1}{\kappa} \frac{K_{12}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^3} \sin(\lambda_n x) = \frac{1}{\kappa} \frac{K_{12}}{K} Z_1(x), \\ G_{13} &= \frac{K_{13}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^3} \sin(\lambda_n x) = \frac{K_{13}}{K} Z_1(x), \\ G_{14} &= -\frac{K_{14}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^3} \sin(\lambda_n x) = -\frac{K_{14}}{K} Z_1(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{22} &= \frac{1}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n x) = \frac{1}{\kappa} Z_2(x), \\
G_{32}(x) &= -\frac{1}{\kappa} \frac{K_{32}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n x) = -\frac{1}{\kappa} \frac{K_{32}}{K} Z_2(x), \\
G_{33}(x) &= \frac{K_{33}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n x) = \frac{K_{33}}{K} Z_2(x), \\
G_{34}(x) &= -\frac{K_{34}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n x) = -\frac{K_{34}}{K} Z_2(x), \\
G_{42}(x) &= \frac{1}{\kappa} \frac{K_{42}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n x) = \frac{1}{\kappa} \frac{K_{42}}{K} Z_2(x), \\
G_{43}(x) &= -\frac{K_{43}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n x) = -\frac{K_{43}}{K} Z_2(x), \\
G_{44}(x) &= \frac{K_{44}}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n x) = \frac{K_{44}}{K} Z_2(x).
\end{aligned}$$

Тогда, с учётом свёрток (1.40) окончательное решение принимает вид:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^4 \left[ G_{1k}(x) \hat{f}_{k1} + G_{1k}(1-x) \hat{f}_{k2} \right], \\
\vartheta &= \sum_{k=1}^4 \left[ G_{2k}(x) \hat{f}_{k1} - G_{2k}(1-x) \hat{f}_{k2} \right], \\
\eta_1 &= \sum_{k=1}^4 \left[ G_{3k}(x) \hat{f}_{k1} - G_{3k}(1-x) \hat{f}_{k2} \right], \\
\eta_2 &= \sum_{k=1}^4 \left[ G_{4k}(x) \hat{f}_{k1} - G_{4k}(1-x) \hat{f}_{k2} \right].
\end{aligned}$$

Учитывая нулевые функции Грина, получаем:

$$\begin{aligned}
u &= \left[ G_{11}(x) \hat{f}_{11} + G_{11}(1-x) \hat{f}_{12} \right] + [G_{12}(x) + G_{12}(1-x)] \hat{f}_2 + \\
&+ [G_{13}(x) + G_{13}(1-x)] \hat{f}_3 + [G_{14}(x) + G_{14}(1-x)] \hat{f}_4, \\
\vartheta &= [G_{22}(x) - G_{22}(1-x)] \hat{f}_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1 &= [G_{32}(x) - G_{32}(1-x)] \hat{f}_2 + [G_{33}(x) - G_{33}(1-x)] \hat{f}_3 + \\ &\quad + [G_{34}(x) - G_{34}(1-x)] \hat{f}_4, \\ \eta_2 &= [G_{42}(x) - G_{42}(1-x)] \hat{f}_2 + [G_{43}(x) - G_{43}(1-x)] \hat{f}_3 + \\ &\quad + [G_{44}(x) - G_{44}(1-x)] \hat{f}_4.\end{aligned}$$

И, окончательно:

$$\begin{aligned}u &= (1-x)\hat{f}_{11} + x\hat{f}_{12} + \frac{x}{2K}(1-x) \left( \frac{\hat{f}_2}{\kappa} K_{12} + K_{13}\hat{f}_3 - K_{14}\hat{f}_4 \right), \\ \vartheta &= \left( \frac{1}{2} - x \right) \frac{\hat{f}_2}{\kappa}, \\ \eta_1 &= \frac{1}{K} \left( \frac{1}{2} - x \right) \left( -\frac{\hat{f}_2}{\kappa} K_{32} + K_{33}\hat{f}_3 - K_{34}\hat{f}_4 \right), \\ \eta_2 &= \frac{1}{K} \left( \frac{1}{2} - x \right) \left( \frac{\hat{f}_2}{\kappa} K_{42} - K_{43}\hat{f}_3 + K_{44}\hat{f}_4 \right).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Сравнивая данное решение с полученным ранее статическим решением (3.24), видно, что они совпадают с точностью до констант. При раскрытии определители  $W$  и  $W_q$  полностью совпадают с таковыми константами  $K_{ik}$ .

Анализируя (3.26), можно заметить следующее. В задачах статистики заданные на границах диффузионные и тепловые потоки оказывают непосредственное влияние на напряжённо-деформированное состояние слоя. Однако, заданные деформации границ слоя дают нулевые приращения концентраций и температуры. Подтверждения этому можно также найти в работах [74, 153]. В них показано, что скорость диффузии в первом приближении пропорциональна скорости деформации как при растягивающих, так и при сжимающих усилиях.

## Заключение

В представленной диссертационной работе проведено исследование нестационарного взаимодействия механических, температурных и диффузионных полей в сплошных средах.

Основные результаты работы:

1. Построена модель термоупругодиффузионной анизотропной многокомпонентной среды с учетом конечных скоростей распространения тепловых и диффузионных потоков, а также с учетом перекрестных диффузионных эффектов.

2. Предложен алгоритм решения нестационарных задач термомеханодиффузии, основанный на использовании интегрального преобразования Лапласа и разложении в ряды Фурье.

3. Построены одномерные нестационарные поверхностные и объемные функции Грина для сред с плоскими границами.

4. На основе представленных моделей и расчетных примеров исследована связанность механического, температурного и диффузионного полей.

5. Исследовано влияние релаксационных эффектов и перекрёстных диффузионных эффектов на термомеханодиффузионные процессы в сплошных средах.

6. Получено решение статической задачи термомеханодиффузии и исследованы возможности перехода от динамического режима к статическому.

## Список использованных источников

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Ахметова Е.Р., Давыдов С.А., Земсков А.В.* Применение линейной нестационарной модели механо диффузии в расчёте технологических процессов на примере ионной имплантации // Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 25–27.
3. *Бертмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Том 1: Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1969. – 344 с.
4. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного: Учебник для вузов. – 3-е изд., доп. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1984. – 320 с.
5. *Бокштейн Б.С.* Диффузия в металлах. – М.: Metallurgiya, 1978. – 248 с.
6. *Бокштейн Б.С., Бокштейн В.С., Жуховицкий А.А.* Термодинамика и кинетика диффузии в твердых телах. – М.: Metallurgiya, 1974. – 280 с.
7. *Бугаев Н.М., Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приближённое решение одномерной задачи связанной термоупругой диффузии для полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вып. 16.– С. 60–68.
8. *Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – Київ: Наукова думка, 2006. – 272 с.
9. *Бурчуладзе Т.В., Бежуашвили Ю.А.* О трехмерных динамических задачах

- сопряженной теории эластотермодиффузии // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 8. – Р. 1446–1455.
10. *Ван Бюрен Х.Г.* Дефекты в кристаллах. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 584 с.
  11. *Вестяк А.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная одномерная задача термоупругой диффузии для однородных многокомпонентных сред с плоскими границами // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 160, кн. 1. – С. 183–195.
  12. *Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1. – М.: Изд-во МАИ, 2002. – 460 с.
  13. *Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Исследование распространения связанных термоупругодиффузионных возмущений с конечной скоростью в средах с плоскими границами // Конференция по строительной механике корабля, посвященная памяти профессора В.А. Постнова и 90-летию со дня его рождения. – С.-Пб, 2017. – Т. 2. – С. 135–137.
  14. *Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В.,* Одномерные нестационарные задачи термоупругой диффузии // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2019. – Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – С. 889–891.
  15. *Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В.* Метод эквивалентных граничных условий для неидеальных твёрдых термоупругодиффузионных растворов // Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2. – М.: ООО «ТРП», 2020. – С. 34–36.
  16. *Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф.* Моделі термомеханіки багатоконпонентних деформівних твердих тіл // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 26–36.

17. *Гегузин Я.Е.* Диффузионная зона. – М.: Наука, 1979. – 343 с.
18. *Горский В.С.* Исследование упругого последействия в сплаве Си-Аи с упорядоченной решеткой // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1936. – Т. 6, № 3. – С. 272–276.
19. *Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: Учебник для Вузов. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
20. *Греков М.А., Костырко С.А.* Потеря устойчивости плоской формы пленочного покрытия при поверхностной диффузии // Вестник СПбГУ. Сер. 10. – 2007. – Вып. 1. – С. 46–54.
21. *Гридасова Е.А.* Влияние диффузионной сварки стекла С49-1 с металлом СТЗСП на прочностные характеристики стекла // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4(4). – С. 1459–1460.
22. *Гришкина А.В., Проскура А.В.* Диффузионное образование трещин // Вестник ТГУ. – 1998. – Т. 3, Вып. 3. – С. 256–258.
23. *Де Гроот С.Р.* Термодинамика необратимых процессов. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 281 с.
24. *Де Гроот С.Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – М.: Издательство «Мир», 1964. – 456 с.
25. *Гуров К.П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. – М.: Наука, 1978. – 128 с.
26. *Гуров К.П., Карташкин Б.А., Угасте Ю.Э.* Взаимная диффузия в многофазных металлических системах. – М.: Наука, 1981. – 350 с.
27. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества. – 2014. – № 2. – С. 31–38.
28. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Упругое полупростран-

- ство под действием одномерных нестационарных диффузионных возмущений // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2014. – Т. 2, кн. 4. – С. 70–79 = *Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* An Elastic Half-Space under the Action of One-Dimensional Time-Dependent Diffusion Perturbations // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2015. – Vol. 36, No 4. – P. 503–509.
29. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Моделирование напряженно-деформированного состояния термоупругодиффузионного слоя // *Тепловые процессы в технике*. – 2020. – Т. 12, № 3. – С. 125–135.
30. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Постановка задачи термоупругой диффузии для полупространства, находящегося под действием нестационарных поверхностных возмущений // Тезисы докладов IV международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 54–56.
31. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Постановка и алгоритм решения нестационарной задачи термомеханодиффузии для многокомпонентных сред // *Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова*. – Т.1. – М.: ООО «ТРП» 2017. – С. 77–79.
32. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Релаксационные одномерные нестационарные упругодиффузионные процессы в сплошных средах // *Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова*. – М.: ООО «ТРП», 2018. – Т. 2. – С. 39–41.
33. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Метод эквивалентных граничных условий в одномерной задаче механодиффузии для полупространства // *Материалы международной научной конференции «Современные*

- проблемы математики, механики, информатики». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – С. 168–174.
34. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Лебедев А.И., Тарлаковский Д.В.* Решение одномерной задачи упругой диффузии для двухкомпонентного полупространства // Материалы XX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – Т. 1, – М.: ООО «ТР-принт», 2014. – С. 72–73.
35. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Построение интегральных соотношений между граничными условиями в нестационарных задачах механодиффузии // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – М.: ООО «ТР-принт», 2015. – Т. 1. – С. 67–68.
36. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Анализ особенностей в решении нестационарной задачи термомеханодиффузии для слоя // Труды XVIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды»: в 2 томах / под ред. А.О. Ватульяна [и др.]. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – Т. 1 – С. 170–174.
37. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Алгоритм решения одномерной связной задачи термоупругости с учётом диффузии для слоя // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т.2. – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 56–58.
38. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная модель массопереноса в термоупругой многокомпонентной изотропной среде // Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков. – М.: Издательство Московского университета 2017. – С. 56.

39. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Объёмные функции грена нестационарной задачи термоупругой диффузии для многокомпонентного слоя // Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТРП», 2018. – С. 38–40.
40. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Постановка нестационарной задачи термоупругости с учетом диффузии для многокомпонентных сред // Материалы Секции «Механика и моделирование материалов и технологий» Международной молодёжной научной конференции «XLIII Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН, 2017. – С. 25–26.
41. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Распространение одномерных связанных термоупругодиффузионных возмущений в изотропном полупространстве с учетом ненулевых времен релаксации // Труды Крыловского государственного научного центра. – 2018. – Специальный выпуск 2. – С. 144–150.
42. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Модель термомеханодиффузии с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных возмущений // Материалы VIII Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте»: в 2 частях. – Гомель: БелГУТ, 2017. – Ч. 2 – С. 183–185.
43. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Распространение в слое связанных термоупругих возмущений с учетом перекрестных диффузионных эффектов // Труды XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2018. – Т. 1. – С. 89–94.
44. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Связанная нестационарная задача термоупругой диффузии для многокомпонентного полупространства // Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое

- деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2017. – С. 38–40.
45. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Моделирование связанных термоупругодиффузионных процессов при разработке новых материалов // Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий Международной молодёжной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН, 2018. – С. 46–48.
46. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомеханодиффузии // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 1. – С. 38–47.
47. *Давыдов С.А.* Термоупругая диффузия в слое под действием смешанных нестационарных возмущений // Сборник материалов IX Всероссийской молодёжной научной конференции «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики – 2019». – 2020. – С. 264–267.
48. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приложения связанных нестационарных задач термоупругой диффузии в области разработки технологий изготовления биомеханических изделий // Тезисы докладов XIV Всероссийской школы «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете». – Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2019. – С. 43.
49. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Нестационарная задача термоупругой диффузии для многокомпонентного полупространства и ее приложения // Сборник трудов Секции «Механика и моделирование материалов и технологий» Международной молодёжной научной конференции «XLV Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН, 2019. – С. 62–64.
50. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Двумерная нестационарная задача термоупругой диффузии для слоя // Тезисы докладов XIX Всероссийской школы-

- семинара «Современные проблемы аэрогидродинамики» – М.: Издательство Московского университета, 2019. – С. 44–45.
51. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Термоупругодиффузионный слой под действием нестационарных динамических возмущений // Материалы IX Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте»: – Гомель: БелГУТ, 2019. – Т. 2. – С. 203–205.
52. *Земсков А.В.* Нестационарные механодиффузионные возмущения в многокомпонентных упругих средах с плоскими границами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 2018. – 248 с.  
<https://mai.ru/upload/iblock/4dc/Dissertatsiya-Zemskov.pdf>
53. *Данков П.Д., Чураев П.В.* Эффект деформации поверхностного слоя металла при окислении // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 73, № 6. – С. 1221–1225
54. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразование. С приложением таблиц, составленных Р. Гершелем. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 288 с.
55. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 568 с.
56. *Еремеев В.С.* Диффузия и напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
57. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. – М.: Академия наук СССР, 1941. – 236 с.
58. *Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Пазин В.П.* Применение метода граничных интегральных уравнений для анализа задач трехмерной динамической теории термоупругости // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – Вып. 72 – С. 146–153
59. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. – М.: МГУ, 1978. – 287 с.
60. *Индейцев Д.А., Стерлин М.Д.* Динамика перестройки твердого тела при

- физико-химических воздействиях // Доклады РАН. – 2011. – Т. 436, №3 – С. 328–331.
61. *Картошкина А.Е.* Влияние динамики на термодиффузию в плоском слое со свободными границами // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 4. – С. 44–53.
62. *Князева А.Г.* Введение в локально-равновесную термодинамику физико-химических превращений в деформируемых средах. – Томск: Томский государственный университет, 1996. – 146 с.
63. *Князева А.Г.* Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях. – Томск: Иван Федоров, 2014. – 172 с.
64. *Князева А.Г.* Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14, № 6. – С. 35–51.
65. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. – Киев.: Вища школа, 1975. – 215 с
66. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – Киев.: Наукова думка, 1970. – 309 с
67. *Конобеевский С.Т.* К теории фазовых превращений. I. Термодинамическая теория явлений возврата при старении // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1943. – Т. 13. – С. 185–200.
68. *Конобеевский С.Т.* К теории фазовых превращений. II. Диффузия в твердых растворах под влиянием распределенных напряжений // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1943. – Т. 13. – С. 200–213.
69. *Конобеевский С.Т.* К теории фазовых превращений. III. Напряжения, возникающие при выделении фазы из твердого раствора // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1943. – Т. 13. – С. 419–431.
70. *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Співвідношення ґрадієнтної термомеханіки за врахування необоротності та інерційності локального зміщення маси // Математические методы и физико-механические поля. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 91–100.

71. *Кубашевский О., Гопкинс Б.* Окисление металлов и сплавов. Пер. с англ. В.А. Алексеева. – М.: Металлургия, 1965. – 482 с.
72. *Кукушкин С.А., Осипов А.В.* Эффект Горского при синтезе пленок карбида кремния из кремния методом топохимического замещения атомов // Письма в ЖТФ. – 2017. – Т. 43, вып. 5. – С. 81–88.
73. *Кумар Р., Кансал Т.* Исследование влияния вращения на волны Релея – Лэмба в изотропной пластине с использованием теории обобщенной термоупругости при наличии диффузии // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 155–167.
74. *Лариков Л.И., Фельченко В.М., Мазаренко В.Ф., Гуревич С.М., Харченко Г.К.* Аномальное ускорение диффузии при импульсном разрушении металлов // Доклады АН СССР. Техническая Физика. – 1975. – Т. 221, № 5. – С. 1073.
75. *Любов Б.Я.* Диффузионные процессы в неоднородных твёрдых средах. – М.: Наука, 1981. – 296 с.
76. *Минов А.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – № 10. – С. 21–26.
77. *Павлина В.С.* О влиянии диффузии на температурные напряжения в окрестности цилиндрической полости // Физико-химическая механика материалов. – 1965. – № 3. – С. 390–394.
78. *Подстригач Я.С., Павлина В.С.* Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в N - компонентном твёрдом растворе // Физико-химическая механика материалов. – 1965. – № 4. – С. 383–389.
79. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наукова думка, 1985. – 198 с.

80. *А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин* Дифференциально-разностные модели и уравнения теплопроводности и диффузии с конечным временем релаксации // Теоретические основы химической технологии. – 2013. – Т. 47, № 3. – С. 271–278.
81. *Порошина Н.И., Рябов В.М.* О методах обращения преобразования Лапласа // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2011. – Вып. 3. – С. 55–64.
82. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 797 с.
83. *Раврик М. С.* Об одной вариационной формуле смешанного типа для контактных задач термодиффузионной теории деформации слоистых оболочек // Математические методы и физико-механические поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 40–44.
84. *Раврик М. С., Бичуя А. Л.* Осесимметричное напряженное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении // Математические методы и физико-механические поля. – 1983. – Вып. 17. – С. 51–54.
85. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: в 2-х т. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 536 с.
86. *Стерлин М.Д.* Динамика локализации напряжений и особенности перестройки структуры неоднородного материала // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – №4(5) – С. 2513–2515.
87. Физические величины: Справочник / *Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М., и др.*; Под общей редакцией Григорьева И.С., Мейлихова И.З. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
88. Физическое материаловедение: в 3-х т.; Под редакцией Кана Р. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 649 с. – Т. 2. – 623 с. – Т. 3. – 663 с.
89. *Флек Ван Л.* Теоретическое и прикладное материаловедение. – М.: Атомиздат, 1975. – 472 с.

90. *Швец Р.Н., Флячок В.М.* Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // *Мат. физ. и нелинейн. мех.* – 1991. – № 16. – С. 39–43.
91. *Якушкин М.М.* Влияние процессов релаксации на перенос тепла, возникающего под действием интенсивных потоков энергии // *Физика и химия обработки материалов.* – 2010. – №3. – С. 27–33.
92. *Abbas I.A.* The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium // *Journal of measurements in engineering.* – 2014. – Vol. 2, Is. 4. – P. 175–184.
93. *Abo-Dahab S.M.* Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories // *Applied Mathematics & Information Sciences.* – 2019. Vol. 13, No. 2. – P. 317-337. – DOI: 10.18576/amis/130221.
94. *Ailawalia P., Budhiraja S.* Dynamic Problem in Thermoelastic Solid Using DualPhase-Lag Model with Internal Heat Source // *Journal of Mathematical Sciences and Applications.* – 2014. – 2(1). С. 10–16. DOI: 10.12691/jmsa-2-1-3
95. *Afram A.Y., Khader S.E.* 2D Problem for a Half-Space under the Theory of Fractional Thermoelastic Diffusion // *American journal of scientific and industrial research.* – 1990. – Vol. 6, No 3. – P. 47–57.
96. *Aouadi M.* Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik.* – 2005. – Vol. 57, No. 2. – P. 350–366.
97. *Aouadi M.* A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci.* – 2006. – Vol. 2006. – P. 1–15.
98. *Aouadi M.* Uniqueness and reciprocity theorems in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Journal of Thermal Stresses.* – 2007. – Vol. 30. – P. 665–678.

99. *Aouadi M.* Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media // Journal of Thermal Stresses. – 2008. – Vol. 31, No. 3. – P. 270–285.
100. *Aouadi M.* Exponential Stability in Hyperbolic Thermoelastic Diffusion Problem with Second Sound // Hindawi Publishing Corporation, International Journal of Differential Equations. – 2011. – Vol. 2011. – P. 1–21.
101. *Aouadi M., Lazzari B., Nibbi R.* A theory of thermoelasticity with diffusion under Green-Naghdi models // ZAMM · Z. Angew. Math. Mech. – 2013. – P. 1–16.
102. *Aouadi M., Soufyane A.* Polynomial and exponential stability for one-dimensional problem in thermoelastic diffusion theory // Applicable Analysis. – 2010. – Vol. 89, No. 6. – P. 935–948.
103. *Atwa S. Y., Egypt Z.* Generalized Thermoelastic Diffusion With Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium // Journal of Materials and Chemical Engineering. – 2013. – Vol. 1, Is. 2. – P. 55–74.
104. *Belova I.V., Murch G.E.* Thermal and diffusion-induced stresses in crystalline solids // Journal of Applied Physics. – 1975. – Vol. 77, No. 1. – P. 127–134.
105. *Bhattacharya D., Kanoria M.* The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR). – 2014. – Vol. 2, Is. 5. – P. 151–159.
106. *Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M.* Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect // International Journal of Computer Sciences and Engineering. – 2019. – Vol. 7, Is. 1.
107. *Choudhary S., Deswal S.* Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion // Meccanica. – 2010. – Vol. 45. – P. 401–413.
108. *Chu J.L., Lee S.* The effect of chemical stresses on diffusion // J. Appl. Phys.

- 1994. – Vol. 75. – P. 2823–2829.
109. *Copetti M.I.M., Aouadi M.* A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // *Applied Numerical Mathematics*. – 2016. – Vol. 109. – P. 157–183.
110. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Igumnov L.A., Tarlakovskiy D.V.* Non-stationary model of mechanical diffusion for half-space with arbitrary boundary conditions // *Materials Physics and Mechanics*. – 2016. – Vol. 28, No. 1/2. – P. 72–76.
111. *Davydov S.A., Zemskov A.V.* Unsteady one-dimensional perturbations in multicomponent thermoelastic layer with cross-diffusion effect // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2018. – 1129, 012009.
112. *Davydov S.A., Zemskov A.V.* Stress-Strain State of a Thermoelastodiffusive Layer // *Abstracts of 18th International Conference «Aviation and Cosmonautics – 2019»*. – M.:MAI, 2019. – P. 484.
113. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Akhmetova E.R.* Thermoelastic Diffusion Multicomponent Half-Space under the Effect of Surface and Bulk Unsteady Perturbations // *Math. Comput. Appl.* – 2019. – 24, 26.
114. *Davydov S.A., Vestyak A.V., Zemskov A.V.* Propagation of one-dimensional thermoelastodiffusive perturbations in a multicomponent layer // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2019. – 1158, 022034.
115. *Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S.* Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // *Physica B: Condensed Matter*. – 2016. – Vol. 496. – P. 57–68.
116. *Dudziak W., Kowalski S.J.* Theory of thermodiffusion for solids // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1989. – Vol. 32. – P. 2005–2013.
117. *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // *The Computer Journal*. – 1974. – Vol. 17. – P. 371–376.

118. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.* – 2011. – Vol. 218. – P. 205–215.
119. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite Medium with a Spherical Cavity // *Int. J. Thermophy.* – 2012. – Vol. 33. – P. 172–183.
120. *Elhagary M.A.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // *Acta Mech.* – 2013. – Vol. 224. – P. 3057–3069.
121. *Elmaklizi Y.D., Othman M.I.A.* The Effect of Rotation on Thermoelastic Diffusion with Temperature-Dependent Elastic Moduli Comparison of Different Theories // *Journal of thermoelasticity.* – 2013. – Vol. 1, No 3. – P. 6–15.
122. *El-Sayed A.M.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space // *Mathematics and Mechanics of Solids.* – 2016. – Vol. 21, No 9. – P. 307–323.
123. *Ezzat M.A., Fayik M.A.* Fractional order theory of thermoelastic diffusion // *J. Thermal Stresses.* – 2011. – Vol. 34. – P. 851–872.
124. *Fan X., Zhao J.H.* Moisture Diffusion and Integrated Stress Analysis in Encapsulated Microelectronics Devices // 12th. Int. Conf. on Thermal, Mechanical and Multiphysics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems. – EuroSimE, 2011. – P. 1–8.
125. *Gawinecki J.A., Szymaniec A.* Global Solution of the Cauchy Problem in Nonlinear Thermoelastic Diffusion in Solid Body // *PAMM. Proc. Appl. Math. Mech.* – 2002. – Vol. 1. – P. 446–447.
126. *Green A.E., Naghdi P.M.* A Re-examination of the Basic Postulates of Thermomechanics // *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences.* – 1991. – Vol. 432, No. 1885. – P. 171-194.
127. *Haghighi-Yazdi M., Lee-Sullivan P.* Modeling of structural mechanics, moisture

- diffusion and heat conduction coupled with physical aging in thin plastic plates  
// *Acta Mech.* – 2014. – Vol. 225. – P. 929–950.
128. *Hwang C.C., Huang I.B.* Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state // *IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN)*. – 2012. – Vol. 2, Is. 8. – P. 166–182.
129. *Kansal T.* Fundamental Solution in the Theory of Thermoelastic Diffusion Materials with Double Porosity // *Journal of Solid Mechanics*. – 2019. – Vol. 11, No. 2. – P. 281–296. – DOI: 10.22034/JSM.2019.665384.
130. *Knyazeva A.G.* Model of medium with diffusion and internal surfaces and some applied problems // *Materials Physics and Mechanics*. – 2004. – Vol. 7, No 1. – P. 29–36.
131. *Kothari S., Mukhopadhyay S.* On the representations of solutions in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Math. Solids*. – 2011. – Vol. 17. – P. 120–130.
132. *Kuiken G.D.C.* Thermodynamics of Irreversible Processes. Applications to Diffusion and Rheology. – N.Y. etc.: Wiley, 1994. – 458 p.
133. *Kumar R.* Propagation of stoneley waves at the boundary surface of thermoelastic diffusion solid and microstretch thermoelastic diffusion solid. – *Materials Physics and Mechanics*. – 2018. – Vol. 35. – P. 87–100.
134. *Kumar R., Chawla V.* Green's Functions in Orthotropic Thermoelastic Diffusion Media // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2012. – Vol. 36. – P. 1272–1277.
135. *Kumar R., Chawla V.* A study of Green's functions for two-dimensional problem in orthotropic magneto-thermoelastic media with mass diffusion // *Materials Physics and Mechanics*. – 2012. – Vol. 15. – P. 78–95.
136. *Kumar R., Chawla V.* Fundamental solution for two-dimensional problem in orthotropic piezothermoelastic diffusion media // *Materials Physics and Mechanics*. – 2013. – Vol. 6. – P. 159–174.

137. *Kumar R., Chawla V.* A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media // African journal of mathematics and computer science research. – 2014. – Vol. 7, No 7. – P. 68–78.
138. *Kumar R., Devi S., Sharma V.* Plane waves and fundamental solution in a modified couple stress generalized thermoelastic with mass diffusion // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 24. – P. 72–85.
139. *Kumar R., Kansal T.* Propagation of cylindrical Rayleigh waves in a transversely isotropic thermoelastic diffusive solid half-space // Appl. Math. Mech. – 2013. – Vol. 43, No 3. – P. 3–20.
140. *Kumar R., Kothari S., Mukhopadhyay S.* Some theorems on generalized thermoelastic diffusion // Acta Mech. – 2011. – Vol. 217. – P. 287–296.
141. *Kumar R., Devi S., Sharma V.* Resonance of Nanoscale Beam due to Various Sources in Modified Couple Stress Thermoelastic Diffusion with Phase Lags // Mechanics and Mechanical Engineering. – 2019. Vol. 23. –P. 36–49. – DOI: 10.2478/mme-2019-0006.
142. *Kumar R., Devi S.* Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // CMST. –2019. – Vol. 25, No. 4. – P. 167–176. – DOI: 10.12921/cmst.2018.0000034.
143. *Kumar R., Devi S.* Effects of Viscosity on a Thick Circular Plate in Thermoelastic Diffusion Medium // Journal of Solid Mechanics. – 2019. – Vol. 11, No. 3. – P. 581–592. – DOI: 10.22034/JSM.2019.667247.
144. *Kaur I., Lata P.* Rayleigh wave propagation in transversely isotropic magneto-thermoelastic medium with three-phase-lag heat transfer and diffusion // International Journal of Mechanical and Materials Engineering. – 2019. – Vol. 14, Article No 12. – DOI: 10.1186/s40712-019-0108-3
145. *Lata P.* Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate // Coupled systems mechanics. – 2019. Vol. 8, Is. 1. – P. 39–53. – DOI: 10.12989/csm.2019.8.1.039.

146. *Lee S., Wang W. L., Chen J. R.* Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses // *Materials Chemistry and Physics*. – 2000. – Vol. 64, No 2. – P. 123–130.
147. *Lee S., Ouyang H.* General solution of diffusion-induced stresses // *J. Thermal Stresses*. – 1987. – Vol. 10. – P. 269–282.
148. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1967. – Vol. 15, Is. 5. – P. 299–309.
149. *Muller I., Ruggeri T.* Rational Extended Thermodynamics. 2nd edition – Springer, 1998. – 397 p.
150. Modelling and optimization in thermomechanics of electroconductive heterogeneous solids / Editor-in-Chief Burak Ya. J. and Kushnir R. M. V.1: Thermomechanics of multicomponent solids of low electrical conductivity *Ya. J. Burak, O. R. Hachkevych, R. F. Terletskaa* – Lviv: SPOLOM, 2006. – 300 P.
151. *Dudin D., Keller I.* On Description of Fast Diffusion in a Coupled Multicomponent System with Microstructure Within the Framework of the Thermodynamics of Irreversible Processes // *Advanced Structured Materials*. Vol. 141: Multiscale Solid Mechanics. – Springer Nature Switzerland. – DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2\_8. Полный текст доступен на портале ResearchGate (дата последнего обращения – 22.09.2020).
152. *Dudin D., Keller I.* On the Spectrum of Relaxation Times in Coupled Diffusion and Rheological Processes in Metal Alloys // *Advanced Structured Materials*. Vol. 137: Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics – Springer Nature Switzerland. – DOI: 10.1007/978-3-030-53755-5\_3. Полный текст доступен на портале ResearchGate (дата последнего обращения – 22.09.2020).
153. *Nirano K., Cohen M., Averbach V., Ujiye N.* Self-Diffusion in Alpha Iron During Compressive Plastic Flow // *Transactions of the Metallurgical Society*

- of AIME. – 1963. – Vol. 227. – P. 950.
154. *Nowacki W.* Dynamical Problem of Thermodiffusion in Solid – I // Bulletin of polish Academy of Sciences Series, Science and Technology. – 1974. – Vol. 22. – P. 55–64.
155. *Nowacki W.* Dynamical Problem of Thermodiffusion in Solid – II // Bulletin of polish Academy of Sciences Series, Science and Technology. – 1974. – Vol. 22. – P. 129–135.
156. *Nowacki W.* Dynamical Problem of Thermodiffusion in Solid – III // Bulletin of polish Academy of Sciences Series, Science and Technology. – 1974. – Vol. 22. – P. 275–276.
157. *Nowacki W.* Dynamical Problems of Thermodiffusion in Solids // Proc. Vib. Prob. – 1974. – Vol. 15. – P. 105–128.
158. *Olesiak Z.S.* Problems of thermodiffusion of deformable solids // Materials Science. – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 297–303.
159. *Othman M.I.A., Elmaklizi Y.D.* 2-D Problem of Generalized Magneto-Thermoelastic Diffusion, with Temperature-Dependent Elastic Moduli // Journal of physics. – 2013. – Vol. 2, No 3. – P. 4–11.
160. *Pidstryhach Ya.S.* Differential equations of the problem of thermodiffusion in a solid deformable isotropic body // Dop. Akad. Nauk USSR. – 1961. – No 2. – P. 169–172.
161. *Pidstryhach Ya.S., Shevchuk P.R.* The variational form of the equations of the theory of thermodiffusion processes in a deformable solid body // Prikl. Mat. Mekh. – 1969. – Vol. 33, No 4. – P. 774–777.
162. *Pidstryhach Ya.S., Shvets R.N., Pavlina V.S., Dasyuk Ya.I.* On the scattering of mechanical energy in a deformable solid body during thermodiffusion processes // Probl. Prochn. – 1973. – Vol. 1. – P. 3–8.
163. *Prussin S.* Generation and Distribution of Dislocations by Solute Diffusion // J. Appl. Phys. – 1961. – Vol. 32. – P. 1876–1881.

164. *Pyr'ev Yu. A., Mokrik R.I.* The coupled quasistatic problem of mechanical thermodiffusion for a cylinder // *Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya.* – 1997. – Vol. 40, No 2. – P. 117–121.
165. *Rambert G., Grandidier J.C., Aifantis E.C.* On the direct interactions between heat transfer, mass transport and chemical processes within gradient elasticity // *European Journal of Mechanics A/Solids.* – 2007. – Vol. 26. – P. 68–87.
166. *Salama M.M., Kozae A.M., Elsafty M. A., Abelaziz S.S.* A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion // *International Journal of Scientific and Engineering Research.* – 2015. – Vol. 6, Is. 1. – P. 358–371.
167. *Semwal S., Mukhopadhyay S.* Boundary integral equation formulation for generalized thermoelastic diffusion – Analytical aspects // *Applied Mathematical Modelling.* – 2014. – Vol. 38, Is. 14. – P. 3523–3537.
168. *Ram P., Sharma N., Kumar R.* Thermomechanical response of generalized thermoelastic diffusion with one relaxation time due to time harmonic sources // *International Journal of Thermal Sciences* Volume 47, Issue 3, March 2008, Pages 315-323
169. *Sharma J.N., Sharma N.K., Sharma K.K.* Transient Waves Due to Mechanical Loads in Elasto-Thermo-Diffusive Solids // *Advances in Applied Mathematics and Mechanics.* – 2011. – Vol. 3, No 1. – P. 87–108.
170. *Sharma J.N., Thakur N., Singh S.* Propagation characteristics of elasto-thermodiffusive surface waves in semiconductor material half-space // *Therm Stresses.* – 2007. – Vol. 30. – P. 357–380.
171. *Sherief H.H., Hamza F. A., Saleh H.* The theory of generalized thermoelastic diffusion // *International Journal of Engineering Science.* – 2004. – Vol. 42. – P. 591–608.
172. *Sherief H.H., El-Maghraby N.M.* A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // *Int. J. Thermophys.* – 2009. – Vol. 30.

- P. 2044–2057.
173. *Sherief H.H., Saleh H.* A Half Space Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // International Journal of Solids and Structures. – 2005. – Vol. 42. – P. 4484–4493.
174. *Shvets R.N., Buryak V.V.* On the influence of viscoelastic properties of a material on the stressed state of a cylinder under diffusion saturation // Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya. – 1990. – No 31. – P. 41–44.
175. *Shvets R.N., Dasyuk Ya.I.* On variational theorems of thermodiffusion of deformable solid bodies // Mat. Fiz. – 1977. – No 22. – P. 102–108.
176. *Shvets R.N., Yatskiv A.I.* Construction of the solution of the mixed boundary-value problem of mechanothermodiffusion for layered bodies of canonical shape // Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya. – 1992. – No 35. – P. 70–75.
177. *Shvets R.N., Yatskiv A.I.* The coupled problem of mechanothermodiffusion for layered bodies of canonical shape with thin layers // Dop. Akad. Nauk Ukr. – 1993. – No 11. – P. 65–69.
178. *Singh B.* Reflection of SV waves from free surface of an elastic solid in generalized thermodiffusion // J. Sound Vib. – 2006. – Vol. 291. – P. 764–778.
179. *Szekeres A. and Fekete B.* Continuummechanics – Heat Conduction – Cognition // Periodica Polytechnica Mechanical Engineering. – 2015. – 59(1). C. 8–15. DOI: 10.3311/PPme.7152.
180. *Sur A., Kanoria M.* Elasto-Thermodiffusive Response in a Two-Dimensional Transversely Isotropic Medium // Mechanics of Advanced Composite Structures. – 2019. Vol. 6. No 2019. – P. 95 – 104. DOI: 10.22075/MACS.2018.13517.1134.
181. *Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media // Encyclopedia of thermal stress, volume 2. – Springer Dordrecht Heidelberg

- New York London, Springer reference, 2014. – P. 1064–1071.
182. *Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C.* Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions // *Acta Mech.* – 2015. – Vol. 226. – P. 3263–3274.
183. *Verma K.L.* On the diffusive waves in heat conducting solids // *Annals of faculty engineering Hunedoara – international journal of engineering.* – 2013. – Vol. 11, Fascicule 4. – P. 99–102.
184. *Wen M., Xu J., Xiong H.* Thermal Diffusion Effects in a Tunnel with a Cylindrical Lining and Soil System under Explosive Loading // *Mathematical Problems in Engineering.* – 2019. – Vol. 2019. – ID 2535980. – DOI: 10.1155/2019/2535980.
185. *Yang F.* Interaction between diffusion and chemical stress // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2005. – Vol. 409. – P. 153–159.
186. *Zenkour A.M.* Thermoelastic diffusion problem for a half-space due to a refined dual-phase-lag Green-Naghdi model // *Journal of Ocean Engineering and Science.* – 2020. – DOI: 10.1016/j.joes.2019.12.001
187. *Zhang J., Li Y.* A Two-Dimensional Generalized Electromagneto-thermoelastic Diffusion Problem for a Rotating Half-Space // *Mathematical Problems in Engineering.* – Hindawi Publishing Corporation, 2014. – Vol. 2014. – P. 1–12.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Определители Крамера к п. 2.1 для двухкомпонентных сред.

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n \\ b_\vartheta \omega \lambda_n & k_2 & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & D_{12} \lambda_n^2 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & D_{21} \lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix}, \\
 P_{11} &= 2\lambda_n \begin{vmatrix} 1 & -b_u & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ b_\vartheta \omega & k_2 & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^2 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & D_{12} \lambda_n^2 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^2 & -M_2 \lambda_n^2 & D_{21} \lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix}, \\
 P_{21} &= 2\omega \begin{vmatrix} k_1 & \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n \\ b_\vartheta \lambda_n & b_\vartheta & \beta_1 & \beta_2 \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -\Lambda_1 \lambda_n^2 & k_3 & D_{12} \lambda_n^2 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -\Lambda_2 \lambda_n^2 & D_{21} \lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix}, \\
 P_{31} &= 2\lambda_n^2 \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n \\ b_\vartheta \omega \lambda_n & k_2 & b_\vartheta \omega & \beta_2 \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n & -M_1 & -\Lambda_1 & D_{12} \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & -\Lambda_2 \lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix}, \\
 P_{41} &= 2\lambda_n^2 \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & \lambda_n, \\ b_\vartheta \omega \lambda_n & k_2 & \beta_1 \omega & b_\vartheta \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & -\Lambda_1 \lambda_n^2 \\ -\Lambda_2 \lambda_n & -M_2 & D_{21} & -\Lambda_2 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

$$P_{12} = 2\lambda_n \begin{vmatrix} b_u & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -M_1\lambda_n^2 & k_3 & D_{12}\lambda_n^2 \\ -M_2\lambda_n^2 & D_{21}\lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix},$$

$$P_{22} = 2 \begin{vmatrix} k_1 & \alpha_1\lambda_n & \alpha_2\lambda_n \\ \Lambda_1\lambda_n^3 & k_3 & D_{12}\lambda_n^2 \\ \Lambda_2\lambda_n^3 & D_{21}\lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix},$$

$$P_{32} = -2\lambda_n^2 \begin{vmatrix} k_1 & b_u\lambda_n & \alpha_2\lambda_n \\ \Lambda_1\lambda_n & -M_1 & D_{12} \\ \Lambda_2\lambda_n^3 & -M_2\lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix},$$

$$P_{42} = 2\lambda_n^2 \begin{vmatrix} k_1 & b_u\lambda_n & \alpha_1\lambda_n \\ \Lambda_1\lambda_n^3 & -M_1\lambda_n^2 & k_3 \\ \Lambda_2\lambda_n & -M_2 & D_{21} \end{vmatrix},$$

$$P_{13} = -2\lambda_n \begin{vmatrix} b_u & \alpha_1 & \alpha_2 \\ k_2 & \beta_1\omega & \beta_2\omega \\ -M_2\lambda_n^2 & D_{21}\lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix},$$

$$P_{23} = -2\omega \begin{vmatrix} k_1 & -\alpha_1\lambda_n & -\alpha_2\lambda_n \\ b_\vartheta\lambda_n & \beta_1 & \beta_2 \\ -\Lambda_2\lambda_n^3 & D_{21}\lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix},$$

$$P_{33} = 2 \begin{vmatrix} k_1 & -b_u\lambda_n & -\alpha_2\lambda_n \\ b_\vartheta\omega\lambda_n & k_2 & \beta_2\omega \\ -\Lambda_2\lambda_n^3 & -M_2\lambda_n^2 & k_4 \end{vmatrix},$$

$$P_{43} = -2\lambda_n^2 \begin{vmatrix} k_1 & -b_u\lambda_n & -\alpha_1\lambda_n \\ b_\vartheta\omega\lambda_n & k_2 & \beta_1\omega \\ -\Lambda_2\lambda_n & -M_2 & D_{21} \end{vmatrix},$$

$$P_{14} = 2\lambda_n \begin{vmatrix} b_u & \alpha_1 & \alpha_2 \\ k_2 & \beta_1\omega & \beta_2\omega \\ -M_1\lambda_n^2 & k_3 & D_{12}\lambda_n^2 \end{vmatrix},$$

$$P_{24} = 2\omega \begin{vmatrix} k_1 & -\alpha_1\lambda_n & -\alpha_2\lambda_n \\ b_\vartheta\lambda_n & \beta_1 & \beta_2 \\ -\Lambda_1\lambda_n^3 & k_3 & D_{12}\lambda_n^2 \end{vmatrix},$$

$$P_{34} = -2\lambda_n^2 \begin{vmatrix} k_1 & -b_u\lambda_n & -\alpha_2\lambda_n \\ b_\vartheta\omega\lambda_n & k_2 & \beta_2\omega \\ -\Lambda_1\lambda_n & -M_1 & D_{12} \end{vmatrix},$$

$$P_{44}(\lambda_n, s) = 2 \begin{vmatrix} k_1 & -b_u\lambda_n & -\alpha_1\lambda_n \\ b_\vartheta\omega\lambda_n & k_2 & \beta_1\omega \\ -\Lambda_1\lambda_n^3 & -M_1\lambda_n^2 & k_3 \end{vmatrix}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Многочлены  $P_{ik}$  для п. 3.3 в случае динамических граничных условий.

$$\begin{aligned}
P_{11} &= -2k_2\Pi + 2\lambda_n^2 \sum_{q=1}^N (k_2\alpha_q\Lambda_q - \omega\beta_q B_q) \Pi_q + \\
&\quad + 2\lambda_n^4\omega \sum_{q=1}^N \Lambda_q \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp}, \\
P_{12} &= -2\lambda_n^2\kappa b_u\Pi + 2\lambda_n^2 \sum_{q=1}^N [(k_2\alpha_q - \omega b_u\beta_q) B_q + \lambda_n^2\kappa\alpha_q M_q] \Pi_q + \\
&\quad + 2b_u\lambda_n^4\omega \sum_{q=1}^N \Lambda_q \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp}, \\
P_{1,q+2} &= 2\lambda_n^2 \left[ \sum_{p=1}^N R_{qp} (k_2\alpha_p - \omega b_u\beta_p) \Pi_p + \omega\lambda_n^2 \sum_{p=1}^N R_{qp} \sum_{j=1}^N M_j \Pi_{pj} \right], \\
P_{21} &= 2\omega\lambda_n \left[ -b_\vartheta\Pi + \sum_{q=1}^N \Lambda_q (s^2\beta_q + b_\vartheta\lambda_n^2\alpha_q) \Pi_q \right], \\
P_{22} &= 2\lambda_n\kappa k_1\Pi + 2\lambda_n \sum_{q=1}^N [\omega B_q (k_1\beta_q + \lambda_n^2 b_\vartheta\alpha_q) - \lambda_n^4\kappa\alpha_q\Lambda_q] \Pi_q + \\
&\quad + 2\omega\lambda_n^5 \sum_{q=1}^N M_q \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp}, \\
P_{2,q+2} &= 2\omega\lambda_n \left[ \sum_{p=1}^N R_{qp} (k_1\beta_p + b_\vartheta\lambda_n^2\alpha_p) \Pi_p - \lambda_n^4 D_q \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp} \right], \\
P_{q+2,k} &= \frac{\lambda_n^2}{k_{q+2}} (M_q P_{2k} - \Lambda_q \lambda_n P_{1k}) - \frac{\lambda_n P}{k_{q+2}} \left( \Lambda_q \delta_{1k} - \delta_{2k} B_q - \Lambda_q \sum_{p=1}^N \alpha_p \delta_{p+2,k} \right);
\end{aligned}$$

где  $B_q = b_u\Lambda_q + M_q$ ,  $R_{qp} = (\alpha_q\Lambda_p - \delta_{qp}D_q)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Многочлены  $P_{ikl}$  для п. 3.3 в случае смешанных граничных условий.

$$\begin{aligned} \frac{P_{111}}{2} &= \lambda_n (k_2 + b_u b_\vartheta \omega) \Pi + \omega \lambda_n^5 \sum_{q=1}^N M_q \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp} + \\ &+ \lambda_n^3 \sum_{q=1}^N [\omega (\alpha_q b_\vartheta M_q + \beta_q M_q + b_u \beta_q \Lambda_q) - \alpha_q \Lambda_q k_2] \Pi_q \end{aligned}$$

$$\frac{P_{121}}{2} = \lambda_n \left( b_u \Pi + \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N \alpha_q M_q \Pi_q \right)$$

$$\frac{P_{1,q+2,1}}{2} = \lambda_n \left[ (\alpha_q k_2 - b_u \beta_q \omega) \Pi_q + \omega \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp} \right]$$

$$\frac{P_{112}}{2} = (-1)^{n+1} \left[ -k_2 \Pi + \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N (\alpha_q \Lambda_q k_2 - \beta_q B_q \omega) \Pi_q + \lambda_n^4 \omega \sum_{q=1}^N \Lambda_q \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{122}}{2} &= (-1)^{n+1} \lambda_n^2 \left[ -\kappa b_u \Pi + \sum_{q=1}^N ((\alpha_q k_2 - \beta_q b_u \omega) B_q + \kappa \alpha_q M_q \lambda_n^2) \Pi_q \right] + \\ &+ (-1)^{n+1} b_u \omega \lambda_n^4 \sum_{q=1}^N \Lambda_q \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp} \end{aligned}$$

$$\frac{P_{1,q+2,2}}{2} = (-1)^{n+1} \lambda_n^2 \left[ \sum_{p=1}^N R_{qp} (\alpha_p k_2 - b_u \beta_p \omega) \Pi_p + \omega \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N R_{qp} \sum_{j=1}^N M_j \Pi_{pj} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{211}}{2} &= \omega s^2 \left( b_\vartheta \Pi + \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N \beta_q \Lambda_q \Pi_q \right); \\ \frac{P_{221}}{2} &= k_1 \Pi - \lambda_n^4 \sum_{q=1}^N \alpha_q \Lambda_q \Pi_q; \\ \frac{P_{2,q+2,1}}{2} &= -\omega \left( (\beta_q k_1 + \alpha_q b_\vartheta \lambda_n^2) \Pi_q + \lambda_n^4 \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp} \right); \\ \frac{P_{212}}{2} &= (-1)^n \lambda_n \omega \left[ -b_\vartheta \Pi + \sum_{q=1}^N \Lambda_q (\beta_q s^2 + \alpha_q b_\vartheta \lambda_n^2) \Pi_q \right]; \\ \frac{P_{222}}{2} &= (-1)^n \lambda_n \left[ \kappa k_1 \Pi + \sum_{q=1}^N (B_q (\beta_q k_1 + \alpha_q b_\vartheta \lambda_n^2) \omega - \kappa \alpha_q \Lambda_q \lambda_n^4) \Pi_q \right] + \\ &\quad + (-1)^n \omega \lambda_n^5 \sum_{q=1}^N M_q \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp}; \\ \frac{P_{2,q+2,2}}{2} &= (-1)^n \omega \lambda_n \left[ \sum_{p=1}^N R_{qp} (\beta_p k_1 + \alpha_p b_\vartheta \lambda_n^2) \Pi_p - D_q \lambda_n^4 \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp} \right]; \\ \frac{P_{q+2,kl}}{2} &= \frac{\delta_{1l}}{k_{q+2}} (-\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1k} + \delta_{q+2,k}) + \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1} \delta_{2l}}{k_{q+2}} \lambda_n \left( \Lambda_q \delta_{1k} + \delta_{2k} B_q + \sum_{p=1}^N R_{qp} \delta_{p+2,k} \right) + \Lambda_q \lambda_n^3 \frac{P_{1kl}}{k_{q+2} P} + M_q \lambda_n^2 \frac{P_{2kl}}{k_{q+2} P}, \\ \text{где } B_q &= b_u \Lambda_q + M_q, \quad R_{qp} = \alpha_q \Lambda_p - \delta_{qp} D_q. \end{aligned}$$