

Научная статья

УДК 629.7.01, 539.4

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188042>

EDN: <https://www.elibrary.ru/UDWXFO>



Математическая модель совместных аэроупругих колебаний лопастей и втулки несущего винта на упругодемпфирующем основании при пространственном движении вертолета

Максим Владимирович Каргаев^{1, 2}

¹ Национальный центр вертолетостроения им. М.Л. Миля и Н.И. Камова,
Томилино, Московская область, Российская Федерация

² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Российская Федерация
kargaev_mv@mail.ru

Аннотация. Предложена математическая модель совместных аэроупругих колебаний лопастей и втулки несущего винта на упругодемпфирующем основании при пространственном движении вертолета. Получены выражения для определения сил и моментов, действующих на втулку со стороны лопастей при совместных аэроупругих колебаниях. Уравнения, определяющие пространственное положение сечений лопасти, получены путем разделения движения точек упругой линии лопасти на относительное и переносное.

Ключевые слова: лопасти и втулка несущего винта, упругодемпфирующее основание, динамика полета вертолета, совместные аэроупругие колебания

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-79-00045, <https://rscf.ru/project/24-79-00045/>

Для цитирования: Каргаев М.В. Математическая модель совместных аэроупругих колебаний лопастей и втулки несущего винта на упругодемпфирующем основании при пространственном движении вертолета // Вестник Московского авиационного института. 2026. Т. 33. № 2. С. 120–131. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188042>

Original article

Mathematical Model of the Blades and Main Rotor Hub Conjoint Aeroelastic Oscillations on the Elastically Damping Base at the Helicopter Spatial Motion

Maksim V. Kargaev^{1, 2}

¹ National Helicopter Center Mil & Kamov, Tomilino, Moscow region, Russian Federation

² Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
kargaev_mv@mail.ru

Abstract

Relatively high demands are being placed on the newly developed helicopters in terms of the fatigue life levels of their aggregates and passenger comfort, due to the magnitude of loads and vibrations in flight. Meeting these

© Каргаев М.В., 2026

requirements is impossible without availability of the appropriate mathematical models and methods for computing the loads and stress-strain state of the main rotor blades (MRB). Throughout the history of the helicopter industry, many relevant models and methods, characterized by the complexity and completeness of the equations, as well as the obtained results accuracy, have been created.

The development of the above mentioned mathematical models proceeded in several directions:

- from the equations of oscillations of MRB in one plane to the equations of conjoint oscillations of MRB in the planes of thrust, rotation and torsion;
- from the “geometrically” linear equations to the “geometrically” nonlinear equations of spatially deformable rods with large displacements;
- from considering the blade as a rod with a rectilinear axis prior to deformation to considering the blade as a spatially curved rod with an initial curvature;
- by the method for the aerodynamic loads computing from linear dependences of aerodynamic coefficients to the “circular” purges and accounting for the unsteadiness of the flow around the blade cross sections;
- according to the method for the inductive velocities computing from traditional disk models to the blade nonlinear vortex models and CFD-methods;
- from considering blade oscillations in steady-state flight modes to considering oscillations in unsteady flight modes at the helicopter arbitrary spatial movement;
- from consideration the isolated blades oscillations on a “rigid” support to the of conjoint oscillations consideration of the blades and main rotor hub on an elastically damping base.

The latter is especially important for the helicopter vibrations computing.

The presented article proposes a generalized mathematical model of conjoint aeroelastic oscillations of the blades and main rotor hub on an elastically damping base during the helicopter spatial movement. The proposed mathematical model may be recommended for application in the tasks of the stress-strain state determining of the main rotor system aggregates and helicopter vibrations inflight.

Keywords: blades and hub of the main rotor, elastically damping base, helicopter flight dynamics, conjoint aeroelastic oscillations

Funding: the research was carried out at the expense of a grant from the Russian Science Foundation No. 24-79-00045, <https://rscf.ru/en/project/24-79-00045/>

For citation: Kargaev M.V. Mathematical Model of the Blades and Main Rotor Hub Conjoint Aeroelastic Oscillations on the Elastically Damping Base at the Helicopter Spatial Motion. *Aerospace MAI Journal*. 2026;33(2):120–131. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188042>

List of Figures

Vector sum characterizing the center of rigidity motion of the MRB cross section

Введение

К вновь разрабатываемым вертолетам предъявляются высокие требования по уровням ресурса их агрегатов и комфорта пассажиров, обусловленным величинами нагрузок и вибраций в полете [1–4]. Обеспечение указанных требований невозможно без наличия соответствующих математических моделей и методов расчета нагрузок и напряженно-деформированного состояния (НДС) лопастей несущего винта (ЛНВ). За всю историю развития вертолетостроения было создано множество соответствующих моделей и методов, отличающихся сложностью и полнотой уравнений, а также точностью получаемых результатов.

Развитие упомянутых математических моделей шло по нескольким направлениям: от уравнений колебаний ЛНВ в одной плоскости [1, 2] переходили к уравнениям совместных колебаний ЛНВ

в плоскостях тяги, вращения и кручения [5, 6]; от «геометрически» линейных уравнений переходили к «геометрически» нелинейным уравнениям пространственно деформируемых стрижней, имеющих большие перемещения [7, 8]; от рассмотрения лопасти в виде стержня с прямолинейной до деформирования осью переходили к рассмотрению лопасти в виде пространственно-криволинейного стержня, имеющего исходную кривизну [9, 10]; по способу расчета аэродинамических нагрузок от линейных зависимостей аэродинамических коэффициентов переходили к «круговым» продувкам и учету нестационарности обтекания сечений лопасти [11]; по способу расчета индуктивных скоростей от традиционных дисковых моделей [1, 2] переходили к лопастным нелинейным вихревым моделям и методам CFD [12–14]; от рассмотрения колебаний лопастей на установившихся

режимах полета переходили к рассмотрению колебаний на неустановившихся режимах полета при произвольном пространственном движении вертолета [15–17]; от рассмотрения изолированных колебаний лопастей на «жестком» основании переходили к рассмотрению совместных колебаний лопастей и втулки несущего винта (ВНВ) на упругодемпфирующем основании [3, 4, 18]. Последнее особо существенно для задач расчета вибраций вертолета.

В настоящей работе предложена обобщенная математическая модель совместных аэроупругих колебаний лопастей и втулки несущего винта на упругодемпфирующем основании при пространственном движении вертолета.

Системы координат

Далее использованы следующие системы координат (СК). *Нормальная земная СК* $O_0X_gY_gZ_g$ — оси и начало этой СК связаны с Землей [19, 20]. *Нормальная СК* $OX_gY_gZ_g$ — СК, оси которой совпадают с осями нормальной земной СК, а начало расположено в центре тяжести вертолета [19, 20]. *Связанная СК* $OXYZ$ — СК, у которой: начало совпадает с началом СК $OX_gY_gZ_g$; ось OX — вдоль продольной оси вертолета (вперед параллельно строительной горизонтали вертолета); ось OY — вертикально вверх в плоскости симметрии вертолета; ось OZ дополняет эту систему до правой тройки. Для вертолета с прямым крылом эта ось идет вдоль правой консоли крыла.

Для описания ориентации связанной СК относительно нормальной СК служат углы Эйлера: ϑ — угол тангажа; ψ — угол рысканья; γ — угол крена, которые могут быть получены из решения уравнений движения вертолета [21]. Переход от нормальной СК к связанной осуществляется с помощью матрицы вращения (*).

Полусвязанная СК $OX_eY_eZ_e$ [19, 20]. *Скоростная СК* $OX_aY_aZ_a$ [19, 20]. При наличии скорости ветра $\vec{V}_w$ воздушная скорость вертолета $\vec{V}_0$ и скорость относительно земли $\vec{V}$ не совпадают. Связь упомянутых скоростей выражается зависимостью $\vec{V}_0 = \vec{V} - \vec{V}_w$.

Скорость $\vec{V}$ может быть выражена в базисе связанной СК — $\vec{V} = [V_x, V_y, V_z]^T = A_{g \rightarrow \phi} [V_{xg}, V_{yg}, V_{zg}]^T$. Скорость ветра $\vec{V}_w$ также может быть записана в связанной СК как

$$\vec{V}_w = [V_{wx}, V_{wy}, V_{wz}]^T = A_{g \rightarrow \phi} [V_{wn}, V_{we}, V_{wd}]^T,$$

где V_{wn}, V_{we}, V_{wd} — северная, восточная и направленная вниз компоненты скорости ветра соответственно. Тогда компоненты вектора воздушной скорости в связанной СК будут иметь вид

$$\vec{V}_0 = [V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}]^T = [V_x - V_{wx}, V_y - V_{wy}, V_z - V_{wz}]^T.$$

При моделировании компоненты $[V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}]^T$ используются для вычисления аэродинамических сил и моментов, действующих на вертолет. Компоненты скорости вертолета $[V_x, V_y, V_z]^T$ относительно земли определяются из решения уравнений движения вертолета [21]. При этом модуль вектора воздушной скорости, углы атаки α и скольжения β в связанной СК определяются выражениями:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{V_{y0}}{V_0} \right);$$

$$\beta = \arctg \left(\frac{V_{z0}}{V_{x0}} \right);$$

$$V_0 = \sqrt{V_{x0}^2 + V_{y0}^2 + V_{z0}^2}.$$

Невращающаяся жесткая СК $O_{вж}X_{вж}Y_{вж}Z_{вж}$ — с началом в геометрическом центре ВНВ, полученным пересечением оси вращения несущего винта (НВ) и плоскости, образованной осями горизонтальных шарниров. В качестве допущения полагается, что данная точка совпадает с центром тяжести ВНВ. Обычно вал НВ наклонен относительно фюзеляжа на угол заклинения $\varphi_{зак}$. Тогда переход от связанной СК к невращающейся жесткой осуществляется линейным перемещением

$$\vec{r}_B = [x_B, y_B, z_B]^T = [x_{внв} - x_{цтв}, y_{внв} - y_{цтв}, z_{внв} - z_{цтв}]^T$$

из центра тяжести вертолета $[x_{цтв}, y_{цтв}, z_{цтв}]^T$ в геометрический центр $[x_{внв}, y_{внв}, z_{внв}]^T$ недеформированной ВНВ и поворотом на угол заклинения $\varphi_{зак}$ с помощью матрицы вращения

$$A_{\phi \rightarrow нж} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{зак} & -\sin \varphi_{зак} & 0 \\ \sin \varphi_{зак} & \cos \varphi_{зак} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Невращающаяся упругая СК $O_{ву}X_{ву}Y_{ву}Z_{ву}$ — с началом в геометрическом центре ВНВ, расположенной на упругодемпфирующем основании, имеющей линейные и угловые перемещения относительно по-

$$A_{g \rightarrow \phi} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \cos \psi + \cos \vartheta \sin \psi \sin \gamma & \sin \vartheta \sin \gamma - \cos \vartheta \sin \psi \cos \gamma \\ -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma & \cos \vartheta \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \psi & -\cos \psi \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (*)$$

ложения жесткой ВНВ. Переход от невращающейся жесткой СК к невращающейся упругой осуществляется линейным перемещением

$$\bar{r}_{\text{удо}} = [x_o, y_o, z_o]^T.$$

Вращающаяся упругая СК $O_{\text{вв}}X_{\text{вв}}Y_{\text{вв}}Z_{\text{вв}}$. Оси этой СК получены путем поворота невращающейся упругой СК: на угол азимутального положения k -й лопасти

$$\psi_k = \omega_{\text{НВ}}t + \frac{2\pi(k-1)}{k_{\text{л}}},$$

$k = 1 \dots k_{\text{л}}$ ($k_{\text{л}}$ – количество ЛНВ, $\omega_{\text{НВ}}$ – угловая скорость вращения НВ); на углы поворотов ВНВ $\varphi_{\text{оx}}, \varphi_{\text{оy}}, \varphi_{\text{оз}}$, колеблющейся на упругодемпфирующем основании; на 90° по направлению вращения НВ для учета начала отсчета азимута лопасти от хвостовой балки вертолета при положительном направлении вращения по часовой стрелке при виде на вертолет сверху. Матрица вращения имеет вид

$$A_{\text{НЖ} \rightarrow \text{вв}} = A_{90} A_{\psi} A_{\varphi},$$

где $A_{\varphi}, A_{\psi}, A_{90}$ – (**).

Маховая СК $O_{\text{лк}}X_{\text{лк}}Y_{\text{лк}}Z_{\text{лк}}$ – это СК с началом, находящимся в центре жесткости комлевого сечения ЛНВ с координатами $\bar{r}_{\text{к}} = [x_{\text{к}}, y_{\text{к}}, z_{\text{к}}]^T$. Оси данной СК повернуты относительно вращающейся упругой СК на углы взмаха $\beta_{\text{к}}$, отставания $\eta_{\text{к}}$ и осевого поворота $\zeta_{\text{к}}$ комля лопасти. Матрица вращения имеет вид (***)

Связанная с деформированным элементом лопасти СК $O_{\text{лс}}X_{\text{лс}}Y_{\text{лс}}Z_{\text{лс}}$ – СК с началом в центре жесткости каждого сечения деформированной лопасти с координатами $\bar{r}_{\text{лс}} = [x_{\text{лс}}, y_{\text{лс}}, z_{\text{лс}}]^T$, оси которой направлены по главным центральным осям сечения и повернуты относительно маховой СК на углы поворотов сечений лопасти $\varphi_{\beta}, \varphi_{\eta}, \varphi_{\zeta}$. Принято, что положительные направления этих поворотов совпадают с положительными направлениями поворотов комля ЛНВ. Матрица вращения имеет вид (****).

Уравнения совместных аэроупругих колебаний лопастей и ВНВ на упругодемпфирующем основании

Представим НВ вертолета, состоящий из ЛНВ и ВНВ в виде сосредоточенной массы, совершающей вынужденные колебания на упругодемпфирующем основании под действием переменных сил и моментов, действующих со стороны колеблющихся лопастей. Рассмотрим колебания такой системы в невращающейся жесткой СК $O_{\text{вж}}X_{\text{вж}}Y_{\text{вж}}Z_{\text{вж}}$. Упругие и демпфирующие свойства основания будем характеризовать матрицами динамической жесткости и демпфирования [18]. При этом матрицу демпфирования будем предполагать диагональной. Тогда система дифференциальных уравнений для совместных аэроупругих колебаний лопастей и ВНВ на упругодемпфирующем основании [3, 4, 18] будет иметь вид (1).

$$A_{\text{НЖ} \rightarrow \text{вв}} = A_{90} A_{\psi} A_{\varphi};$$

$$A_{\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{\text{оз}} \cos \varphi_{\text{оy}} & \sin \varphi_{\text{оз}} \cos \varphi_{\text{оx}} + \cos \varphi_{\text{оз}} \sin \varphi_{\text{оy}} \sin \varphi_{\text{оx}} & \sin \varphi_{\text{оз}} \sin \varphi_{\text{оx}} - \cos \varphi_{\text{оз}} \sin \varphi_{\text{оy}} \cos \varphi_{\text{оx}} \\ -\sin \varphi_{\text{оз}} \cos \varphi_{\text{оy}} & \cos \varphi_{\text{оз}} \cos \varphi_{\text{оx}} - \sin \varphi_{\text{оз}} \sin \varphi_{\text{оy}} \sin \varphi_{\text{оx}} & \cos \varphi_{\text{оз}} \sin \varphi_{\text{оx}} + \sin \varphi_{\text{оз}} \sin \varphi_{\text{оy}} \cos \varphi_{\text{оx}} \\ \sin \varphi_{\text{оy}} & -\cos \varphi_{\text{оy}} \sin \varphi_{\text{оx}} & \cos \varphi_{\text{оy}} \cos \varphi_{\text{оx}} \end{bmatrix}, \quad (**)$$

$$A_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi_k & 0 & \sin \psi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi_k & 0 & \cos \psi_k \end{bmatrix}; \quad A_{90} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_{\text{вв} \rightarrow \text{к}} = \begin{bmatrix} \cos \zeta_{\text{к}} \cos \eta_{\text{к}} & \sin \zeta_{\text{к}} \cos \beta_{\text{к}} + \cos \zeta_{\text{к}} \sin \eta_{\text{к}} \sin \beta_{\text{к}} & \sin \zeta_{\text{к}} \sin \beta_{\text{к}} - \cos \zeta_{\text{к}} \sin \eta_{\text{к}} \cos \beta_{\text{к}} \\ -\sin \zeta_{\text{к}} \cos \eta_{\text{к}} & \cos \zeta_{\text{к}} \cos \beta_{\text{к}} - \sin \zeta_{\text{к}} \sin \eta_{\text{к}} \sin \beta_{\text{к}} & \cos \zeta_{\text{к}} \sin \beta_{\text{к}} + \sin \zeta_{\text{к}} \sin \eta_{\text{к}} \cos \beta_{\text{к}} \\ \sin \eta_{\text{к}} & -\cos \eta_{\text{к}} \sin \beta_{\text{к}} & \cos \eta_{\text{к}} \cos \beta_{\text{к}} \end{bmatrix}. \quad (***)$$

$$A_{\text{к} \rightarrow \text{с}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{\zeta} \cos \varphi_{\eta} & \sin \varphi_{\zeta} \cos \varphi_{\beta} + \cos \varphi_{\zeta} \sin \varphi_{\eta} \sin \varphi_{\beta} & \sin \varphi_{\zeta} \sin \varphi_{\beta} - \cos \varphi_{\zeta} \sin \varphi_{\eta} \cos \varphi_{\beta} \\ -\sin \varphi_{\zeta} \cos \varphi_{\eta} & \cos \varphi_{\zeta} \cos \varphi_{\beta} - \sin \varphi_{\zeta} \sin \varphi_{\eta} \sin \varphi_{\beta} & \cos \varphi_{\zeta} \sin \varphi_{\beta} + \sin \varphi_{\zeta} \sin \varphi_{\eta} \cos \varphi_{\beta} \\ \sin \varphi_{\eta} & -\cos \varphi_{\eta} \sin \varphi_{\beta} & \cos \varphi_{\eta} \cos \varphi_{\beta} \end{bmatrix}. \quad (****)$$

$$\begin{aligned}
& (m_{\text{ВНВ}} + k_{\text{л}} m_{\text{ЛНВ}}) \ddot{x}_0 + k_{xx} \dot{x}_0 + (c_{xx} x_0 + c_{xy} y_0 + c_{xz} z_0 + c_{x\varphi_x} \varphi_{0x} + c_{x\varphi_y} \varphi_{0y} + c_{x\varphi_z} \varphi_{0z}) = F_x; \\
& (m_{\text{ВНВ}} + k_{\text{л}} m_{\text{ЛНВ}}) \ddot{y}_0 + k_{yy} \dot{y}_0 + (c_{yx} x_0 + c_{yy} y_0 + c_{yz} z_0 + c_{y\varphi_x} \varphi_{0x} + c_{y\varphi_y} \varphi_{0y} + c_{y\varphi_z} \varphi_{0z}) = F_y; \\
& (m_{\text{ВНВ}} + k_{\text{л}} m_{\text{ЛНВ}}) \ddot{z}_0 + k_{zz} \dot{z}_0 + (c_{zx} x_0 + c_{zy} y_0 + c_{zz} z_0 + c_{z\varphi_x} \varphi_{0x} + c_{z\varphi_y} \varphi_{0y} + c_{z\varphi_z} \varphi_{0z}) = F_z; \\
& \left(J_{0x} + \frac{k_{\text{л}}}{2} J_{\text{ЛНВ}} \right) \ddot{\varphi}_{0x} - (J_{0z} + k_{\text{л}} J_{\text{ЛНВ}}) \omega_{\text{ВНВ}} \dot{\varphi}_{0z} + k_{\varphi_x \varphi_x} \dot{\varphi}_{0x} + (c_{\varphi_x x} x_0 + c_{\varphi_x y} y_0 + c_{\varphi_x z} z_0 + c_{\varphi_x \varphi_x} \varphi_{0x} + c_{\varphi_x \varphi_y} \varphi_{0y} + c_{\varphi_x \varphi_z} \varphi_{0z}) = M_x; \\
& \left(J_{0z} + \frac{k_{\text{л}}}{2} J_{\text{ЛНВ}} \right) \ddot{\varphi}_{0z} + (J_{0x} + k_{\text{л}} J_{\text{ЛНВ}}) \omega_{\text{ВНВ}} \dot{\varphi}_{0x} + k_{\varphi_z \varphi_z} \dot{\varphi}_{0z} + (c_{\varphi_z x} x_0 + c_{\varphi_z y} y_0 + c_{\varphi_z z} z_0 + c_{\varphi_z \varphi_x} \varphi_{0x} + c_{\varphi_z \varphi_y} \varphi_{0y} + c_{\varphi_z \varphi_z} \varphi_{0z}) = M_z; \\
& (J_{0y} + k_{\text{л}} J_{\text{ЛНВ}}) \ddot{\varphi}_{0y} + k_{\varphi_y \varphi_y} \dot{\varphi}_{0y} + (c_{\varphi_y x} x_0 + c_{\varphi_y y} y_0 + c_{\varphi_y z} z_0 + c_{\varphi_y \varphi_x} \varphi_{0x} + c_{\varphi_y \varphi_y} \varphi_{0y} + c_{\varphi_y \varphi_z} \varphi_{0z}) = M_y.
\end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) точкой обозначено дифференцирование по времени t , а также: $m_{\text{ВНВ}}$, $m_{\text{ЛНВ}}$ — массы ВНВ и ЛНВ соответственно; J_{0x} , J_{0y} , J_{0z} — массовые моменты инерции ВНВ; $J_{\text{ЛНВ}}$ — массовый момент инерции ЛНВ; x_0 , y_0 , z_0 , φ_{0x} , φ_{0y} , φ_{0z} — линейные и угловые перемещения центра ВНВ вдоль и вокруг осей $O_{\text{ВЖ}} X_{\text{ВНЖ}}$, $O_{\text{ВЖ}} Y_{\text{ВНЖ}}$ и $O_{\text{ВЖ}} Z_{\text{ВНЖ}}$ соответственно; k_{xx} , ..., $k_{\varphi_z \varphi_z}$ — коэффициенты матрицы демпфирования основания; c_{xx} , ..., $c_{\varphi_z \varphi_z}$ — коэффициенты матрицы динамической жесткости основания; F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z — суммарные силы и моменты, действующие на ВНВ со стороны ЛНВ.

Уравнения аэроупругих колебаний ЛНВ при пространственном движении вертолета

Для получения уравнений аэроупругих колебаний ЛНВ с учетом упругодемпфирующего основания при пространственном движении вертолета применим способ, аналогично работе [16], основанный на разделении движения на переносное и относительное.

В этом случае движение центра жесткости сечения ЛНВ (см. рисунок) в нормальной земной СК можно представить как

$$\bar{R} = \bar{r}_0 + \bar{r}_{\text{В}} + \bar{r}_{\text{удо}} + \bar{r}_{\text{К}} + \bar{r}_{\text{лс}},$$

где $\bar{r}_0$ — радиус-вектор центра масс вертолета, вращающегося с угловой скоростью $\Omega_0 = [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^T$.

Введем и далее будем использовать обозначение $\bar{r} = [x, y, z]^T = \bar{r}_{\text{К}} + \bar{r}_{\text{лс}}$ — радиус-вектор центра жесткости сечения ЛНВ. Тогда скорости и ускорения центра жесткости сечения ЛНВ будут иметь вид

$$\dot{\bar{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T; \quad \ddot{\bar{r}} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}]^T.$$

В этом случае выражения для первой и второй производных вектора $\bar{R}$ примут вид (2), где $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$ и $\ddot{\bar{r}}$ — относительные перемещения, скорости и ускорения сечений ЛНВ за счет ее упругого деформирования и махового движения; $(\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) = [\omega_{x\Sigma}, \omega_{y\Sigma}, \omega_{z\Sigma}]^T$ — вектор угловой скорости вращения осей СК $O_{\text{ВУ}} X_{\text{ВВУ}} Y_{\text{ВВУ}} Z_{\text{ВВУ}}$ относительно инерциальной системы отсчета.

Перепишем полученные выражения (2) в проекциях на оси вращающейся упругой СК. Для этого поочередно рассмотрим каждый вид движения вертолета, ВНВ и ЛНВ.

Рассмотрим пространственное движение вертолета. Представим вектор ускорений центра масс вертолета через проекции на оси СК $OXYZ$, тогда

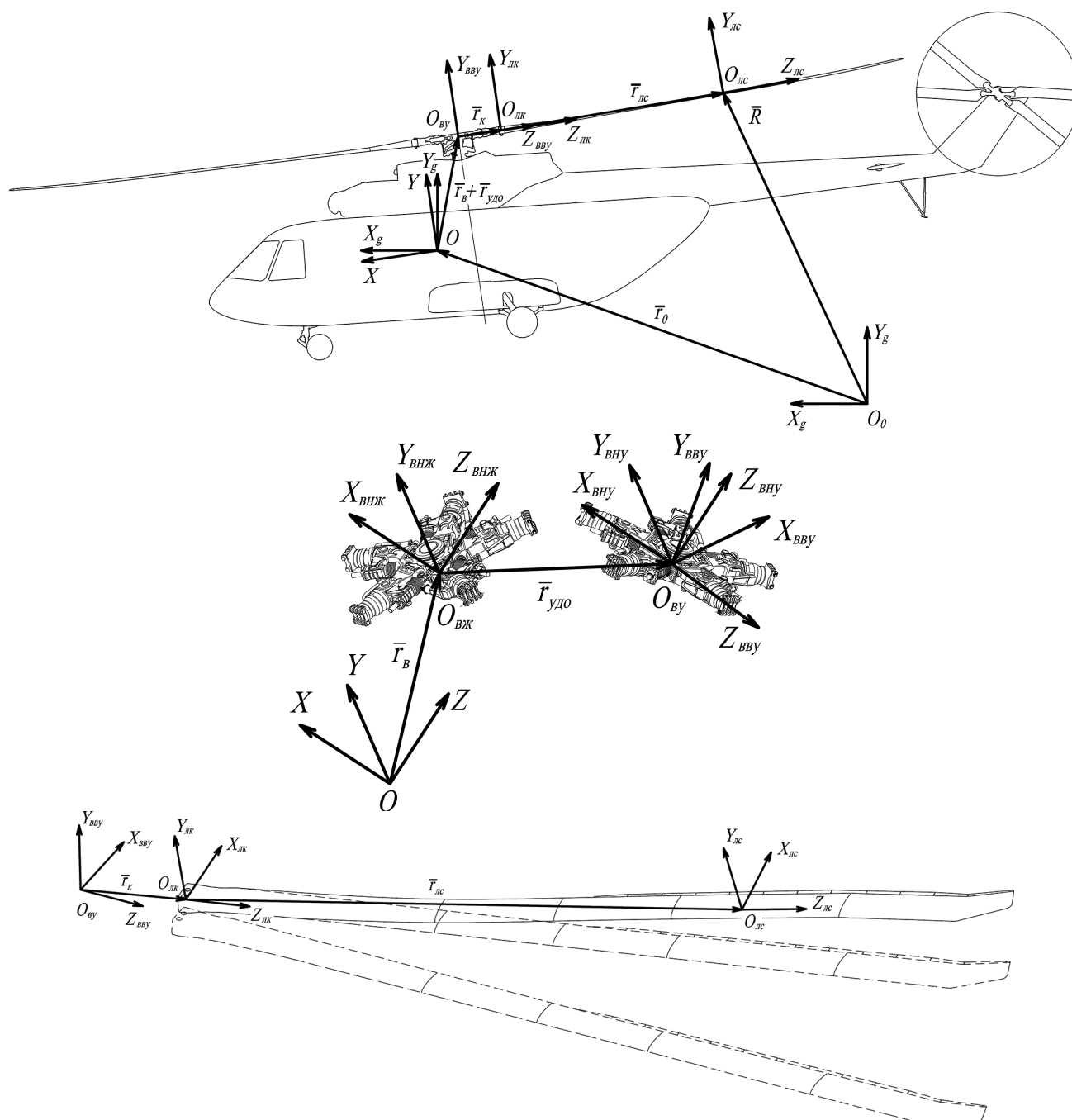
$$\bar{a}_0 = [a_{x0}, a_{y0}, a_{z0}]^T = A_{g \rightarrow \Phi} [a_{xg}, a_{yg} + g, a_{zg}]^T,$$

где g — ускорение свободного падения. В этом случае скорости и ускорения центра ВНВ в проекциях на оси СК $O_{\text{ВУ}} X_{\text{ВВУ}} Y_{\text{ВВУ}} Z_{\text{ВВУ}}$, вызванные пространственным движением вертолета, примут вид (*****) (см. на следующей странице).

Рассмотрим вращение несущего винта. Векторы угловых скоростей и ускорений движения начала СК $O_{\text{ВУ}} X_{\text{ВВУ}} Y_{\text{ВВУ}} Z_{\text{ВВУ}}$ относительно инерциальной СК имеют вид:

$$\begin{aligned}
(\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) &= [\omega_{x\Sigma}, \omega_{y\Sigma}, \omega_{z\Sigma}]^T = [0, \omega_{\text{ВНВ}}, 0]^T + \\
&+ A_{\text{НЖ} \rightarrow \text{ВУ}} A_{\Phi \rightarrow \text{НЖ}} [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^T + [\dot{\varphi}_{0x}, \dot{\varphi}_{0y}, \dot{\varphi}_{0z}]^T;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{R}}{dt} &= \bar{V}_0 + \bar{\Omega}_0 \times (\bar{r}_{\text{В}} + \bar{r}_{\text{удо}}) + \dot{\bar{r}}_{\text{удо}} + \dot{\bar{r}} + (\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) \times \bar{r}, \quad \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_{\text{К}} + \dot{\bar{r}}_{\text{лс}}, \quad \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}_{\text{К}} + \ddot{\bar{r}}_{\text{лс}}, \\
\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} &= \ddot{V}_0 + \ddot{\Omega}_0 \times \bar{V}_0 + \ddot{\bar{r}}_{\text{удо}} + \ddot{\bar{\Omega}}_0 \times (\bar{r}_{\text{В}} + \bar{r}_{\text{удо}}) + \ddot{\bar{\Omega}}_0 \times [\bar{\Omega}_0 \times (\bar{r}_{\text{В}} + \bar{r}_{\text{удо}})] + \\
&+ \ddot{\bar{r}} + (\ddot{\bar{\Omega}} + \ddot{\bar{\Psi}}) \times \bar{r} + (\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) \times [(\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) \times \bar{r}] + 2[(\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) \times \dot{\bar{r}}].
\end{aligned} \quad (2)$$



Векторная сумма, характеризующая движение центра жесткости сечения ЛНВ

$$\begin{aligned} \bar{V}_0 + \Omega_0 \times (\bar{r}_B + \bar{r}_{ydo}) &= A_{\Phi \rightarrow HJ} A_{g \rightarrow \Phi} \bar{V}_0 + B_1 (\bar{r}_B + \bar{r}_{ydo}); \\ \dot{\bar{V}}_0 + \bar{\Omega}_0 \times \bar{V}_0 + \dot{\bar{\Omega}}_0 \times (\bar{r}_B + \bar{r}_{ydo}) + \bar{\Omega}_0 \times [\bar{\Omega}_0 \times (\bar{r}_B + \bar{r}_{ydo})] &= A_{\Phi \rightarrow HJ} A_{g \rightarrow \Phi} \bar{a}_0 + B_1 \bar{V}_0 + B_2 (\bar{r}_B + \bar{r}_{ydo}); \\ B_1 &= \begin{Bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{Bmatrix}; \quad B_2 = \begin{Bmatrix} -(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) & \Omega_y \Omega_x - \varepsilon_z & \Omega_z \Omega_x + \varepsilon_y \\ \Omega_x \Omega_y + \varepsilon_z & -(\Omega_z^2 + \Omega_x^2) & \Omega_z \Omega_y - \varepsilon_x \\ \Omega_x \Omega_z - \varepsilon_y & \Omega_y \Omega_z + \varepsilon_x & -(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (*****)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{\bar{\Omega}} + \ddot{\bar{\Psi}}) &= [\dot{\omega}_{x\Sigma}, \dot{\omega}_{y\Sigma}, \dot{\omega}_{z\Sigma}]^T = [0, \dot{\omega}_{\text{НВ}}, 0]^T + \\ &+ A_{\text{НЖ} \rightarrow \text{ВУ}} A_{\Phi \rightarrow \text{НЖ}} [\dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\Omega}_z]^T + \dot{A}_{\text{НЖ} \rightarrow \text{ВУ}} A_{\Phi \rightarrow \text{НЖ}} \times \\ &\times [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^T + [\ddot{\Phi}_{\text{ОК}}, \ddot{\Phi}_{\text{ОУ}}, \ddot{\Phi}_{\text{ОЗ}}]^T. \end{aligned}$$

В этом случае суммарные скорости и ускорения сечений лопасти относительно ВНВ в проекциях на оси СК $O_{\text{ВУ}} X_{\text{ВВУ}} Y_{\text{ВВУ}} Z_{\text{ВВУ}}$ примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} + (\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) \times \bar{r} &= [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T + B_3 [x, y, z]^T; \\ \ddot{\bar{r}} + (\ddot{\bar{\Omega}} + \ddot{\bar{\Psi}}) \times \bar{r} + (\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) \times [(\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) \times \bar{r}] + 2[(\bar{\Omega} + \bar{\Psi}) \times \dot{\bar{r}}] &= \\ = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}]^T + 2B_3 [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T + B_4 [x, y, z]^T; \end{aligned}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{z\Sigma} & \omega_{y\Sigma} \\ \omega_{z\Sigma} & 0 & -\omega_{x\Sigma} \\ -\omega_{y\Sigma} & \omega_{x\Sigma} & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} -(\omega_{y\Sigma}^2 + \omega_{z\Sigma}^2) & -\dot{\omega}_{z\Sigma} + \omega_{y\Sigma} \omega_{x\Sigma} & \dot{\omega}_{y\Sigma} + \omega_{z\Sigma} \omega_{x\Sigma} \\ \dot{\omega}_{z\Sigma} + \omega_{y\Sigma} \omega_{x\Sigma} & -(\omega_{z\Sigma}^2 + \omega_{x\Sigma}^2) & -\dot{\omega}_{x\Sigma} + \omega_{z\Sigma} \omega_{y\Sigma} \\ -\dot{\omega}_{y\Sigma} + \omega_{z\Sigma} \omega_{x\Sigma} & \dot{\omega}_{x\Sigma} + \omega_{z\Sigma} \omega_{y\Sigma} & -(\omega_{x\Sigma}^2 + \omega_{y\Sigma}^2) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим маховое движение лопасти. В зависимости от конструкции ВНВ моделирование ее работы может иметь свои особенности. Рассмотрим классический несущий винт, имеющий следующее расположение шарниров: горизонтальный (ГШ), вертикальный (ВШ) и осевой (ОШ).

В этом случае выражения, определяющие перемещения, скорости и ускорения конца втулки, а равно и комля лопасти, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{\text{ВШ}} + (\Delta l_{\text{ОШ}} + \Delta l_k) \sin \eta_k; \\ y_k &= \Delta l_{\text{ГШ}} \sin \varphi_{\text{кон}} + \Delta l_{\text{ВШ}} \sin \beta_k + (\Delta l_{\text{ОШ}} + \Delta l_k) \sin \beta_k \cos \eta_k; \\ z_k &= \Delta l_{\text{ГШ}} \cos \varphi_{\text{кон}} + \Delta l_{\text{ВШ}} \cos \beta_k + (\Delta l_{\text{ОШ}} + \Delta l_k) \cos \beta_k \cos \eta_k, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x_{\text{ВШ}}$ — расстояние по нормали от ВШ до оси ЛНВ; $\Delta l_{\text{ГШ}}$ — вынос ГШ; $\Delta l_{\text{ВШ}}$ — расстояние от ГШ до ВШ; $\Delta l_{\text{ОШ}}$ — расстояние от ВШ до ОШ; Δl_k — расстояние от ОШ до комля лопасти; $\varphi_{\text{кон}}$ — угол конструктивной конусности рукава ВНВ в плоскости взмаха. Скорости и ускорения комля

лопасти получаются соответственно однократным и двукратным дифференцированием выражений (3) по времени.

В общем случае, при произвольной конструкции ВНВ величины изгибающих и крутящего моментов $M_x^{\text{Ш}}$, $M_y^{\text{Ш}}$ и $M_z^{\text{Ш}}$ — в ГШ, ВШ и ОШ соответственно, а также углы β_k , η_k и ζ_k должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{aligned} M_x^{\text{Ш}} &= C_{\text{ГШ}} (\beta_k - \varphi_{\text{кон}}); \\ M_y^{\text{Ш}} &= C_{\text{ВШ}} (\eta_k - \eta_{\text{кон}}) + M_d; \\ M_z^{\text{Ш}} &= C_{\text{ОШ}} (\zeta_k - \zeta_{\text{кон}}) + C_{\text{упр}} (\zeta_k - \zeta_{\text{кон}}), \end{aligned}$$

где $C_{\text{ГШ}}$ — жесткость на качание в плоскости взмаха, сосредоточенная в ГШ; $C_{\text{ВШ}}$ — жесткость на качание в плоскости вращения, сосредоточенная в ВШ; $C_{\text{ОШ}}$ — жесткость на закручивание, сосредоточенная в эквивалентном ОШ; $C_{\text{упр}}$ — жесткость проводки управления ЛНВ; $\eta_{\text{кон}}$ — угол конструктивной конусности рукава ВНВ в плоскости вращения; $\zeta_{\text{кон}}$ — угол конструктивного осевого закручивания рукава ВНВ относительно его продольной оси; M_d — момент демпфера ВШ.

Таким образом, вне зависимости от конструкции втулки ЛНВ может перемещаться относительно ВНВ на расстояние $\bar{r}_k$ и поворачиваться на углы β_k , η_k и ζ_k , которые являются функциями времени.

Рассмотрим упругие деформации лопасти. В качестве расчетной схемы ЛНВ используем теорию пространственно-криволинейных стержней [8] при допущениях [8, 16]. В этом случае ось лопасти совпадает с линией центров жесткости сечений ЛНВ. Согласно этой теории, в ненагруженном состоянии ось лопасти может иметь исходную непрямолинейность, характеризуемую $k_{0\beta}$, $k_{0\eta}$, $k_{0\zeta}$ — компонентами вектора кривизны исходного состояния, определяемыми согласно [8]. В нагруженном состоянии упругие компоненты вектора кривизны связаны с деформациями сечений лопасти соотношениями (4), где k_β , k_η , k_ζ — упругие компоненты вектора кривизны; s — дуговая координата до расчетного сечения лопасти, повернутого на углы φ_β , φ_η , φ_ζ относительно сечения недеформированной лопасти, повернутого на углы $\varphi_{0\beta}$, $\varphi_{0\eta}$, $\varphi_{0\zeta}$. Выражения (4) определяют упругую линию ЛНВ

$$\begin{aligned} k_\beta &= \left(\frac{d\varphi_\beta}{ds} + k_{0\beta} \right) \cos \varphi_\eta \cos \varphi_\zeta - \frac{d\varphi_\zeta}{ds} \sin \varphi_\eta + (\sin \varphi_\zeta \cos \varphi_\beta + \cos \varphi_\zeta \sin \varphi_\eta \sin \varphi_\beta) k_{0\eta} + (\sin \varphi_\zeta \sin \varphi_\beta - \cos \varphi_\zeta \sin \varphi_\eta \cos \varphi_\beta) k_{0\zeta}; \\ k_\eta &= \frac{d\varphi_\eta}{ds} - \frac{d\varphi_\beta}{ds} \sin \varphi_\zeta - \sin \varphi_\zeta \cos \varphi_\eta k_{0\beta} + (\cos \varphi_\zeta \cos \varphi_\beta - \sin \varphi_\zeta \sin \varphi_\eta \sin \varphi_\beta) k_{0\eta} + (\cos \varphi_\zeta \sin \varphi_\beta + \sin \varphi_\zeta \sin \varphi_\eta \cos \varphi_\beta) k_{0\zeta}; \\ k_\zeta &= \frac{d\varphi_\beta}{ds} \sin \varphi_\eta \cos \varphi_\zeta + \frac{d\varphi_\zeta}{ds} \cos \varphi_\eta + \sin \varphi_\eta k_{0\beta} - \cos \varphi_\eta \sin \varphi_\beta k_{0\eta} + \cos \varphi_\eta \cos \varphi_\beta k_{0\zeta}, \end{aligned} \quad (4)$$

в пространстве при условии работы ее материалов в пределах закона Гука.

Перемещения сечений лопасти $\bar{r}_{\text{лс}} = [x_{\text{лс}}, y_{\text{лс}}, z_{\text{лс}}]^T$, вызванные упругими деформациями оси жесткости относительно ее недеформированного состояния, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} x_{\text{лс}} &= \int_0^s \sin \varphi_{\eta} ds; \\ y_{\text{лс}} &= -\int_0^s \sin \varphi_{\beta} \cos \varphi_{\eta} ds; \\ z_{\text{лс}} &= \int_0^s \cos \varphi_{\beta} \cos \varphi_{\eta} ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражения для скоростей $\dot{\bar{r}}_{\text{лс}} = [\dot{x}_{\text{лс}}, \dot{y}_{\text{лс}}, \dot{z}_{\text{лс}}]^T$ и ускорений $\ddot{\bar{r}}_{\text{лс}} = [\ddot{x}_{\text{лс}}, \ddot{y}_{\text{лс}}, \ddot{z}_{\text{лс}}]^T$ упругих перемещений сечений ЛНВ получаются путем однократного и двукратного дифференцирования соотношений (5) по времени.

Наконец упругомаховые перемещения, скорости и ускорения ЛНВ в осях СК $O_{\text{вк}}X_{\text{вк}}Y_{\text{вк}}Z_{\text{вк}}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{r} &= A_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \bar{r}_{\text{лс}} + \bar{r}_{\text{к}}; \\ \dot{\bar{r}} &= A_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \dot{\bar{r}}_{\text{лс}} + \dot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \bar{r}_{\text{лс}} + \dot{\bar{r}}_{\text{к}}; \\ \ddot{\bar{r}} &= A_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \ddot{\bar{r}}_{\text{лс}} + 2\dot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \dot{\bar{r}}_{\text{лс}} + \ddot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \bar{r}_{\text{лс}} + \ddot{\bar{r}}_{\text{к}}. \end{aligned}$$

Таким образом, *абсолютные скорости и ускорения лопасти*, являющиеся суммой рассмотренных выше движений: вертолета, лопастей и ВНВ на упруго-демпфирующем основании, вращения НВ, упруго-махового движения ЛНВ, в осях СК $O_{\text{вк}}X_{\text{вк}}Y_{\text{вк}}Z_{\text{вк}}$ примут вид (*****).

Получим выражения для нагрузок, действующих на ЛНВ. Введем вектор $\bar{r}_{\text{лссм}}$, определяющий расстояние от центра масс до центра жесткости сечения лопасти в СК $O_{\text{вк}}X_{\text{вк}}Y_{\text{вк}}Z_{\text{вк}}$. Вследствие того, что принято допущение о неизменности контура сечения, положение центра масс не зависит от времени. Но перемещения и ускорения центра масс сечения ЛНВ относительно его центра жесткости в СК $O_{\text{вк}}X_{\text{вк}}Y_{\text{вк}}Z_{\text{вк}}$ зависят от времени и определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{R}}{dt} &= A_{\text{нж} \rightarrow \text{вк}} \left(A_{\text{ф} \rightarrow \text{нж}} [V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}]^T + B_1 (\bar{r}_{\text{в}} + \bar{r}_{\text{удо}}) + \dot{\bar{r}}_{\text{удо}} \right) + \\ &\quad + A_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \dot{\bar{r}}_{\text{лс}} + \dot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \bar{r}_{\text{лс}} + \dot{\bar{r}}_{\text{к}} + B_3 (A_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \bar{r}_{\text{лс}} + \bar{r}_{\text{к}}); \\ \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} &= A_{\text{нж} \rightarrow \text{вк}} \left(A_{\text{ф} \rightarrow \text{нж}} [a_{x0}, a_{y0}, g, a_{z0}]^T + B_1 [V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}]^T + B_2 (\bar{r}_{\text{в}} + \bar{r}_{\text{удо}}) + \ddot{\bar{r}}_{\text{удо}} \right) + \\ &\quad + A_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \ddot{\bar{r}}_{\text{лс}} + 2\dot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \dot{\bar{r}}_{\text{лс}} + \ddot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \bar{r}_{\text{лс}} + \ddot{\bar{r}}_{\text{к}} + 2B_3 (A_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \dot{\bar{r}}_{\text{лс}} + \dot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \bar{r}_{\text{лс}} + \dot{\bar{r}}_{\text{к}}) + B_4 (A_{\text{вк} \rightarrow \text{лс}}^T \bar{r}_{\text{лс}} + \bar{r}_{\text{к}}). \end{aligned} \quad (*****)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{\text{лссм}} &= A_{\text{вк} \rightarrow \text{к}}^T A_{\text{к} \rightarrow \text{лс}}^T [x_{\text{цм}}, y_{\text{цм}}, z_{\text{цм}}]^T; \\ \frac{d^2\bar{r}_{\text{лссм}}}{dt^2} &= \ddot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{к}}^T A_{\text{к} \rightarrow \text{лс}}^T [x_{\text{цм}}, y_{\text{цм}}, z_{\text{цм}}]^T + \\ &\quad + 2\dot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{к}}^T \dot{A}_{\text{к} \rightarrow \text{лс}}^T [x_{\text{цм}}, y_{\text{цм}}, z_{\text{цм}}]^T + \\ &\quad + A_{\text{вк} \rightarrow \text{к}}^T \ddot{A}_{\text{к} \rightarrow \text{лс}}^T [x_{\text{цм}}, y_{\text{цм}}, z_{\text{цм}}]^T. \end{aligned}$$

В соответствии со вторым законом Ньютона погонные по длине лопасти *силы инерции* можно представить в следующем виде:

$$\bar{f}_{\text{ин}} = m_{\text{л}} \left(\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} + \frac{d^2\bar{r}_{\text{лссм}}}{dt^2} \right),$$

где $m_{\text{л}}$ — погонная масса элемента лопасти.

С учетом того, что масса лопасти по времени неизменна, главный момент от сил инерции [16, 17] можно представить в виде

$$\bar{M}_{\text{ин}} = J_{\text{л}} \dot{\bar{\Omega}}_{\Sigma} + \bar{\Omega}_{\Sigma} J_{\text{л}} \bar{\Omega}_{\Sigma},$$

где $\bar{\Omega}_{\Sigma}$ — угловые скорости связанной с деформированным сечением лопасти СК, а $\dot{\bar{\Omega}}_{\Sigma}$ — их производные по времени; $J_{\text{л}}$ — матрица массовых моментов инерции элемента лопасти.

Угловую скорость связанной с деформированным сечением СК получим путем последовательного сложения вращения самого вертолета, ВНВ и составляющих упругомахового движения ЛНВ, тогда

$$\bar{\Omega}_{\Sigma} = A_{\text{к} \rightarrow \text{с}} (A_{\text{вк} \rightarrow \text{к}} [\bar{\Omega} + \bar{\Psi}] + \bar{\Omega}_{\text{к}}) + \bar{\Omega}_{\text{лс}}.$$

Ее локальная производная по времени определяется выражением

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}}_{\Sigma} &= A_{\text{к} \rightarrow \text{с}} \left(A_{\text{вк} \rightarrow \text{к}} [\dot{\bar{\Omega}} + \dot{\bar{\Psi}}] + \dot{\bar{\Omega}}_{\text{к}} \right) + \dot{A}_{\text{к} \rightarrow \text{с}} (A_{\text{вк} \rightarrow \text{к}} [\bar{\Omega} + \bar{\Psi}] + \bar{\Omega}_{\text{к}}) + \\ &\quad + A_{\text{к} \rightarrow \text{с}} \dot{A}_{\text{вк} \rightarrow \text{к}} [\bar{\Omega} + \bar{\Psi}] + \dot{\bar{\Omega}}_{\text{лс}}. \end{aligned}$$

При этом угловые скорости и ускорения упругомахового движения определяются выражениями:

$$\bar{\Omega}_{\text{к}} = \begin{pmatrix} \cos \eta_{\text{к}} \cos \zeta_{\text{к}} & 0 & -\sin \eta_{\text{к}} \\ -\sin \zeta_{\text{к}} & 1 & 0 \\ \sin \eta_{\text{к}} \cos \zeta_{\text{к}} & 0 & \cos \eta_{\text{к}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_{\text{к}} \\ \dot{\eta}_{\text{к}} \\ \dot{\zeta}_{\text{к}} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Omega}}_k &= \begin{pmatrix} -\dot{\eta}_k \sin \eta_k \cos \zeta_k - \dot{\zeta}_k \cos \eta_k \sin \zeta_k & 0 & -\dot{\eta}_k \cos \eta_k \\ -\dot{\zeta}_k \cos \zeta_k & 0 & 0 \\ \dot{\eta}_k \cos \eta_k \cos \zeta_k - \dot{\zeta}_k \sin \eta_k \sin \zeta_k & 0 & -\dot{\eta}_k \sin \eta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_k \\ \dot{\eta}_k \\ \dot{\zeta}_k \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos \eta_k \cos \zeta_k & 0 & -\sin \eta_k \\ -\sin \zeta_k & 1 & 0 \\ \sin \eta_k \cos \zeta_k & 0 & \cos \eta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\beta}_k \\ \ddot{\eta}_k \\ \ddot{\zeta}_k \end{pmatrix}; \\ \bar{\Omega}_{\text{лс}} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_\eta \cos \varphi_\zeta & 0 & -\sin \varphi_\eta \\ -\sin \varphi_\zeta & 1 & 0 \\ \sin \varphi_\eta \cos \varphi_\zeta & 0 & \cos \varphi_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_\beta \\ \dot{\phi}_\eta \\ \dot{\phi}_\zeta \end{pmatrix}; \\ \dot{\bar{\Omega}}_{\text{лс}} &= \begin{pmatrix} -\dot{\phi}_\eta \sin \varphi_\eta \cos \varphi_\zeta - \dot{\phi}_\zeta \cos \varphi_\eta \sin \varphi_\zeta & 0 & -\dot{\phi}_\eta \cos \varphi_\eta \\ -\dot{\phi}_\zeta \cos \varphi_\zeta & 0 & 0 \\ \dot{\phi}_\eta \cos \varphi_\eta \cos \varphi_\zeta - \dot{\phi}_\zeta \sin \varphi_\eta \sin \varphi_\zeta & 0 & -\dot{\phi}_\eta \sin \varphi_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_\beta \\ \dot{\phi}_\eta \\ \dot{\phi}_\zeta \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos \varphi_\eta \cos \varphi_\zeta & 0 & -\sin \varphi_\eta \\ -\sin \varphi_\zeta & 1 & 0 \\ \sin \varphi_\eta \cos \varphi_\zeta & 0 & \cos \varphi_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_\beta \\ \ddot{\phi}_\eta \\ \ddot{\phi}_\zeta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Отметим, что полученные инерционные силы $\bar{f}_{\text{ин}}$ сосредоточены в центре масс сечений ЛНВ. Поэтому возникает дополнительный погонный момент от сил инерции. Суммарный момент от инерционных сил определяется выражением

$$\bar{q}_{\text{ин}} = \bar{f}_{\text{ин}} \times \bar{r}_{\text{лсм}} + \bar{M}_{\text{ин}}.$$

Погонная аэродинамическая нагрузка в скоростной системе координат в каждом расчетном сечении лопасти определяется выражениями:

$$\begin{aligned}t_{xa} &= C_{xa} \frac{\rho U^2}{2} b; \\ t_{ya} &= C_{ya} \frac{\rho U^2}{2} b; \\ q_{za} &= \frac{1}{2} \rho b^2 \left(m_{za} U - \frac{\pi}{8} b \dot{\phi}_\zeta \right) U,\end{aligned}$$

где C_{xa} , C_{ya} , m_{za} — коэффициенты профильного сопротивления, подъемной силы и момента тангажа, зависящие в свою очередь от угла атаки, чисел Маха и Рейнольдса, формы профиля и состояния поверхности элемента лопасти; ρ — плотность воздуха; b — хорда профиля; U — скорость невозмущенного потока набегающего на профиль.

Воздушная скорость в осях, связанных с сечениями ЛНВ, имеет проекции:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = A_{\text{к} \rightarrow \text{с}} A_{\text{в} \rightarrow \text{к}} \left(\frac{d\bar{R}}{dt} + V_{\text{инд}} \right),$$

где $\bar{V}_{\text{инд}}$ — вектор индуктивных скоростей, компоненты которого определяются в соответствии с известными методами [2, 12, 17].

При этом угол осевого поворота комля лопасти записывается в виде

$$\zeta_k = -(\theta_0 - \theta_1 \sin \psi_k - \theta_2 \cos \psi_k - k_{\text{св}} \beta_k) + \Delta \zeta_{\text{св}},$$

где $\Delta \zeta_{\text{св}} = \frac{M_z^{\text{ш}} - C_{\text{ош}}(\zeta_k - \zeta_{\text{кон}})}{C_{\text{упр}}}$ — угол, обусловленный податливостью системы управления;

$k_{\text{св}}$ — коэффициент компенсатора взмаха.

Знак минус в начале выражения (6) определяет переход в правую СК, когда положительное значение общего шага соответствует отрицательной величине угла поворота СК связанной с ЛНВ.

В соответствии с теорией несущей линии имеем двумерный поток. Тогда модуль скорости невозмущенного потока равен

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2},$$

а угол атаки сечения упругой лопасти при таком подходе будет фактически определяться углом притекания:

$$\alpha_c = \arctg \frac{U_y}{U_x} \approx \frac{U_y}{U_x}, \text{ при } U_x \geq 0;$$

$$\alpha_c = \pi + \arctg \frac{U_y}{U_x} \approx \pi + \frac{U_y}{U_x}, \text{ при } U_x < 0.$$

Для перевода полученных аэродинамических сил и моментов в СК $O_{\text{в} \rightarrow \text{к}} X_{\text{в} \rightarrow \text{к}} Y_{\text{в} \rightarrow \text{к}} Z_{\text{в} \rightarrow \text{к}}$ воспользуемся выражениями:

$$\begin{aligned}\bar{t}_n &= [t_{nx}, t_{ny}, 0]^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha_c & -\sin \alpha_c & 0 \\ \sin \alpha_c & \cos \alpha_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [t_{xa}, t_{ya}, 0]^T + \\ &+ \left[0, \pi \rho b \left(\frac{3}{4} b - \Delta x_{\text{ж}} \right) U \dot{\phi}_\zeta, 0 \right]^T; \\ \bar{t}_{\text{аэр}} &= A_{\text{в} \rightarrow \text{к}}^T A_{\text{к} \rightarrow \text{с}}^T [t_{nx}, t_{ny}, 0]^T; \\ \bar{q}_{\text{аэр}} &= A_{\text{в} \rightarrow \text{к}}^T A_{\text{к} \rightarrow \text{с}}^T \left([0, 0, q_{za}]^T + [0, 0, \Delta x_{\text{ж}} t_{ny}]^T \right),\end{aligned}$$

где $\Delta x_{\text{ж}}$ — расстояние от передней кромки до центра жесткости сечения ЛНВ.

Применив принцип Даламбера, получим выражения для внешней нагрузки, представленной в виде погонных сил

$$\bar{t} = [t_x, t_y, t_z]^T = \bar{t}_{\text{аэр}} - \bar{f}_{\text{ин}},$$

изгибающих и крутящих моментов

$$\bar{q} = [q_x, q_y, q_z]^T = \bar{q}_{\text{аэр}} - \bar{q}_{\text{ин}},$$

в осях СК $O_{\text{ВУ}}X_{\text{ВВУ}}Y_{\text{ВВУ}}Z_{\text{ВВУ}}$.

Тогда уравнения моментов внешних сил [16, 17] в каждом расчетном сечении $s_{\text{лс}}$ лопасти запишутся в виде:

$$\begin{aligned} M_{\text{xc}} &= - \int_R^{s_{\text{лс}}} [t_z(y - y_{\text{лс}}) - t_y(z - z_{\text{лс}}) + q_x] ds; \\ M_{\text{yc}} &= - \int_R^{s_{\text{лс}}} [t_x(z - z_{\text{лс}}) - t_z(x - x_{\text{лс}}) + q_y] ds; \\ M_{\text{zc}} &= - \int_R^{s_{\text{лс}}} [t_y(x - x_{\text{лс}}) - t_x(y - y_{\text{лс}}) + q_z] ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения, определяющие НДС ЛНВ, в зависимости от ее начального состояния и внешнего нагружения имеют вид [8, 16, 17]:

$$\begin{pmatrix} EI_{\text{xc}} & 0 & 0 \\ 0 & EI_{\text{yc}} & 0 \\ 0 & 0 & GI_{\text{zc}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{\beta} - k_{0\beta} \\ k_{\eta} - k_{0\eta} \\ k_{\zeta} - k_{0\zeta} \end{pmatrix} = A_{\text{к} \rightarrow \text{с}} A_{\text{ВУ} \rightarrow \text{к}} \begin{pmatrix} M_{\text{xc}} \\ M_{\text{yc}} \\ M_{\text{zc}} \end{pmatrix},$$

где $EI_{\text{xc}}, EI_{\text{yc}}, GI_{\text{zc}}$ — соответственно жесткости сечений ЛНВ в плоскостях наименьшей и наибольшей жесткости, а также на кручение.

Сосредоточенные в комле k -й лопасти силы в проекциях на оси СК $O_{\text{ВУ}}X_{\text{ВВУ}}Y_{\text{ВВУ}}Z_{\text{ВВУ}}$ получим поворотом $A_{\text{ВУ} \rightarrow \text{к}}^T$ проинтегрированных по длине лопасти распределенных сил с ее свободного конца R до $l_{\text{к}}$ комля:

$$\begin{aligned} \bar{T}_k &= [T_{\text{xc}}, T_{\text{yc}}, T_{\text{zc}}]^T = A_{\text{ВУ} \rightarrow \text{к}}^T [T_{\text{кxc}}, T_{\text{кyc}}, T_{\text{кzc}}]^T, \\ T_{\text{кxc}} &= - \int_R^{l_{\text{к}}} t_{\text{xc}} ds, \quad T_{\text{кyc}} = - \int_R^{l_{\text{к}}} t_{\text{yc}} ds, \quad T_{\text{кzc}} = - \int_R^{l_{\text{к}}} t_{\text{zc}} ds. \end{aligned}$$

Сосредоточенные силы от k -й лопасти в центре ВНВ в невращающейся жесткой СК $O_{\text{ВЖ}}X_{\text{ВНЖ}}Y_{\text{ВНЖ}}Z_{\text{ВНЖ}}$ получим с помощью преобразования:

$$\bar{T}_k^{\text{H}} = [T_{\text{xc}}^{\text{H}}, T_{\text{yc}}^{\text{H}}, T_{\text{zc}}^{\text{H}}]^T = A_{\text{НЖ} \rightarrow \text{ВУ}}^T T_k.$$

Моменты в комле k -й лопасти получим по формулам (6) при $s_{\text{лс}} = l_{\text{к}}$:

$$\bar{M}_k = [M_{\text{xc}}, M_{\text{yc}}, M_{\text{zc}}]^T.$$

Моменты от k -й лопасти $M_{\text{xc}}^{\text{Ш}}, M_{\text{yc}}^{\text{Ш}}, M_{\text{zc}}^{\text{Ш}}$ — в ГШ, ВШ и ОШ соответственно в СК $O_{\text{ВУ}}X_{\text{ВВУ}}Y_{\text{ВВУ}}Z_{\text{ВВУ}}$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{M}_k^{\text{Ш}} &= [M_{\text{xc}}^{\text{Ш}}, M_{\text{yc}}^{\text{Ш}}, M_{\text{zc}}^{\text{Ш}}]^T = B_{\text{к}}^{\text{Ш}} \bar{T}_k + A_{\text{ВУ} \rightarrow \text{к}}^T \bar{M}_k; \\ B_{\text{к}}^{\text{Ш}} &= \begin{pmatrix} 0 & -(z_{\text{к}} - z_{\text{ГШ}}) & y_{\text{к}} \\ (z_{\text{к}} - z_{\text{ВШ}}) & 0 & -x_{\text{к}} \\ -y_{\text{к}} & x_{\text{к}} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $z_{\text{ГШ}}$ — расстояние от оси вращения до ГШ; $z_{\text{ВШ}}$ — расстояние от оси вращения до ВШ.

Суммарные моменты от k -й лопасти в центре ВНВ возникают от действия сил реакции в шарнирах ВНВ и в СК $O_{\text{ВЖ}}X_{\text{ВНЖ}}Y_{\text{ВНЖ}}Z_{\text{ВНЖ}}$ определяются выражением

$$\begin{aligned} \bar{M}_k^{\text{H}} &= [M_{\text{xc}}^{\text{H}}, M_{\text{yc}}^{\text{H}}, M_{\text{zc}}^{\text{H}}]^T = \\ &= A_{\text{НЖ} \rightarrow \text{ВУ}}^T [T_{\text{yc}} z_{\text{ГШ}}, T_{\text{xc}} z_{\text{ВШ}}, C_{\text{ОШ}} (\zeta_{\text{л}} - \zeta_{\text{кон}})]^T. \end{aligned}$$

Суммарные от всех лопастей силы и моменты в центре ВНВ в невращающейся жесткой СК $O_{\text{ВЖ}}X_{\text{ВНЖ}}Y_{\text{ВНЖ}}Z_{\text{ВНЖ}}$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{k=1}^{k_{\text{л}}} T_{\text{xc}}^{\text{H}}; \quad F_y = \sum_{k=1}^{k_{\text{л}}} T_{\text{yc}}^{\text{H}}; \quad F_z = \sum_{k=1}^{k_{\text{л}}} T_{\text{zc}}^{\text{H}}; \\ M_x &= \sum_{k=1}^{k_{\text{л}}} M_{\text{xc}}^{\text{H}}; \quad M_y = \sum_{k=1}^{k_{\text{л}}} M_{\text{yc}}^{\text{H}}; \quad M_z = \sum_{k=1}^{k_{\text{л}}} M_{\text{zc}}^{\text{H}}. \end{aligned}$$

Выводы

Полученная замкнутая система уравнений является обобщением математической модели сложного пространственного деформирования ЛНВ при произвольном движении вертолета [16] на случай совместных аэроупругих колебаний лопастей и втулки несущего винта на упругодемпфирующем основании при пространственном движении вертолета. Предложенная математическая модель может быть рекомендована к использованию в задачах определения НДС агрегатов несущей системы и вибраций вертолета в полете, возникающих на этапах проектирования, испытаний и эксплуатации вертолетов.

Конфликт интересов / Conflict of Interests

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no relevant conflict of interests

Список источников / References

1. Johnson W. *Rotorcraft Aeromechanics*. NY: Cambridge University Press; 2013. 949 p.
2. Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверман А.С. и др. Вертолеты, расчет и проектирование: в 2 томах. М.: Машиностроение, 1966/1967. (457+424)с.
Mil' ML, Nekrasov AV, Braverman AS, et al. *Helicopters, calculation and design*. In 2 vls. Moscow: Mashinostroenie; 1966/1967. (457+424) p. (In Russ.).
3. Самусенко А.Г. (ред.) Вертолеты: Труды ОКБ МВЗ им. М.Л. Миля. Вып. 2. М.: Машиностроение-Полет, 2012. 334 с.
Samusenko AG. (ed) *Vertolety: Trudy OKB MVZ im. M.L. Milya*. Issue 2. Moscow: Mashinostroenie-Polet; 2012. 334 p. (In Russ.).
4. Павленко Н.С. (ред.) Вертолеты: Труды ОКБ МВЗ имени М.Л. Миля. Вып 3. М.: Машиностроение-Полет, 2018. 327 с.
Pavlenko NS. (ed.) *Vertolety: Trudy OKB MVZ imeni M.L. Milya*. Issue 3. Moscow: Mashinostroenie-Polet; 2018. 327 p. (In Russ.).
5. Леонтьев В.А. Метод решения уравнений движения упругих лопастей вертолетных винтов в общем случае движения // Ученые записки ЦАГИ. 2010. Т.XLI. № 5. С. 67-80.
Leont'ev VA. Method of solving equations of motion of elastic blades of helicopter propellers in the general case of motion. *Uchenye zapiski TSAGI*. 2010;XLI(5):67-80. (In Russ.).
6. Ивчин В.А., Аверьянов И.О. Разработка метода расчета деформаций упругой лопасти несущего винта в плоскостях тяги, вращения и кручения путем прямого интегрирования // Научный вестник МГТУ ГА. 2011. № 172. С. 80-87.
Ivchin VA, Aver'yanov IO. Development of a method for calculating deformations of an elastic rotor blade in thrust, rotation and torsion planes by direct integration. *Nauchnyi vestnik MGTU GA*. 2011(172):80-87. (In Russ.).
7. Каргаев М.В. Расчет совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти при раскрутке и торможении несущего винта вертолета в условиях ветра // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 4. С. 101-112.
Kargaev MV. Blade Coupled Bending-and-Torsional Oscillations Computing While the Helicopter Main Rotor Spin-Up and Deceleration under Wind Conditions. *Aerospace MAI Journal*. 2024;31(4):101-112. (In Russ.).
8. Светлицкий В.А. Механика абсолютно гибких стержней. М.: Изд-во МАИ, 2001. 431 с.
Svetlitskii VA. *Mechanics of completely flexible rods*. Moscow: MAI; 2001. 431 p. (In Russ.).
9. Михеев Р.А., Смольянинова Т.Д. Уравнения колебаний лопасти несущего винта вертолета // Ученые записки ЦАГИ. 1985. Т.XVI. № 3. С. 127-134.
Mikheev RA, Smol'yaninova TD. Equations of vibrations of the rotor blade of a helicopter. *Uchenye zapiski TSAGI*. 1985;XVI(3):127-134. (In Russ.).
10. Михайлов С.А., Николаев Е.И., Гарипов А.О. Вывод уравнений колебаний лопасти несущего винта с учетом пространственного движения вертолета // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2005. № 2. С. 3-7.
Mikhailov SA, Nikolaev EI, Garipov AO. Derivation of the oscillation equations of the rotor blade taking into account the spatial motion of the helicopter. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsonnaya tekhnika*. 2005(2):3-7. (In Russ.).
11. Трифонова Т.И., Шелюхин Ю.Ф., Шуховцев Д.В. Модель нестационарных аэродинамических продольных характеристик // Вестник Московского авиационного института. 2016. Т. 23. № 2. С. 24-41.
Trifonova TI, Shelyukhin YuF, Shukhovtsov DV. A model of non-stationary aerodynamic longitudinal characteristics. *Aerospace MAI Journal*. 2016;23(2):24-41. (In Russ.).
12. Игнаткин Ю.М., Макеев П.В., Шомов А.И. Численное моделирование прикладных задач аэродинамики вертолета на базе нелинейной вихревой модели винта // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=65636>
Ignatkin YuM, Makeev PV, Shomov AI. Computational modeling of applied tasks of helicopter aerodynamics based on non-linear vortical model of a rotor. *Trudy MAI*. 2016(87). (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65636>
13. Игнаткин Ю.М., Константинов С.Г. Исследование аэродинамических характеристик профиля и законцовок лопасти несущего винта вертолета методами CFD // Труды МАИ. 2012. № 57. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=30874>
Ignatkin YuM, Konstantinov SG. Researches aerodynamic characteristics of a profile and blade tips helicopter rotor using CFD methods. *Trudy MAI*. 2012(57). (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=30874>
14. Вершков В.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Особенности моделирования обтекания несущего винта вертолета с учетом произвольного движения лопастей // Научный вестник МГТУ ГА. 2019. Т.22. № 3. С. 25-34. DOI: 10.26467/2079-0619-2019-22-3-25-34
Vershkov VA, Kritsky BS, Mirgazov RM. Features of modeling the flow around the helicopter main rotor taking into account arbitrary blades motion. *Civil Aviation High Technologies*. 2019;22(3):25-34. (In Russ.).
15. Бельский А.Б., Григорьев А.Ю., Мышов А.В. и др. Инновационные подходы и технологии решения задачи управления жесткостью лопастей для реализации в перспективных винтокрылых летательных аппаратах // Инновации. 2023. № 2(292). С. 3-9. DOI: 10.26310/2071-3010.2023.292.2.001
Belskiy AB, Grigoryev AYU, Myshov AV, et al. Innovative approaches and technologies for solving the problem of controlling the stiffness of the blades for implementation in promising rotary-wing aircraft. *Innovations*. 2023(2):3-9. (In Russ.).

16. Гирфанов А.М. Математическая модель сложного пространственного деформирования лопасти несущего винта при произвольном движении вертолета // Вестник СамГАУ. 2009. Т. 8. № 4(20). С. 26–34.
Girfanov AM. Mathematical model of complex spatial deformation of rotor blades during helicopter arbitrary motion. *Vestnik SaMGAU*. 2009;8(4):26–34. (In Russ.).
17. Павлов В.В. Летательные аппараты с преобразуемым в несущий винт крылом. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2019. 320 с.
Pavlov VV. *Aircraft with a wing that can be converted into a rotor*. Kazan: KNITU-KAI; 2019. 320 p. (In Russ.).
18. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108. DOI: 10.34759/trd-2019-108-4
Zagordan AA, Zagordan NL. On special generalized coordinates application for studying joint flexural vibrations of the blades of the main rotor, which is fixed on the elastic-damping support. *Trudy MAI*. 2019(108). (In Russ.).
19. Биард Р.У., МакЛэйн Т.У. Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика / Пер. с англ. А.И. Демьяникова; Под ред. Г.В. Анцева. М.: Техносфера, 2015. 311 с.
Beard RW, McLain TW. *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. 2nd ed. Princeton University Press; 2012. 320 p. (In Russ.).
20. Баженов С.Г. Основы динамики полета. М.: Физматлит, 2021. 432 с.
Bazhenov SG. *Fundamentals of flight dynamics*. Moscow: Fizmatlit; 2021. 432 p. (In Russ.).
21. Браверман А.С., Вайнтруб А.П. Динамика вертолета. Предельные режимы полета. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
Braverman AS, Vaintrub AP. *Helicopter dynamics. Extreme flight modes*. Moscow: Mashinostroyeniye; 1988. 280 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию / Received 08.01.2026
Одобрена после рецензирования / Revised 21.01.2026
Принята к публикации / Accepted 25.01.2026