

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Калас Вячеслав Олегович



**ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ И НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАНИЙ
В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА**

01.02.01 – Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Красильников Павел Сергеевич

Москва 2015

Содержание

Введение	4
Глава 1. Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в линейном приближении	8
1.1 Общая постановка задачи и основные определения	8
1.2 Вывод приближенного уравнения движения до членов четвертого порядка относительно z	10
1.3 Теоретическое описание и обоснование алгоритма определения границы устойчивости	14
1.4 Численно-аналитическое исследование устойчивости при малых значениях эксцентриситета	17
1.5 Исследование устойчивости в первом приближении при любых значениях эксцентриситета, меньших единицы	23
Глава 2. Исследование устойчивости равновесия в задаче Синикова в нелинейном приближении	28
2.1 Теоретическое обоснование и описание алгоритма исследования устойчивости посредством сведения к эквивалентной задаче об устойчи- вости неподвижной точки отображения, сохраняющего площадь	28
2.2 Постановка задачи. Построение точечного отображения T	42
2.3 Исследование устойчивости в нелинейной постановке	47
Глава 3. Исследование устойчивости равновесия в фотогравитаци- онной задаче Синикова	55
3.1 Исследование устойчивости в первом приближении для различных значений коэффициента редукции	55
3.2 Исследование устойчивости в нелинейной постановке для различных значений коэффициента редукции	61

Глава 4. Исследование резонансных колебаний в фотогравитационной задаче Ситникова	62
4.1 Метод усреднения в многочастотной системе при резонансе	62
4.2 Исследование колебаний в фотогравитационной задаче Ситникова, постановка задачи и основные определения	67
4.3 Нахождение параметрического резонанса для системы первого приближения	68
4.4 Нахождение параметрического резонанса для системы в нелинейном приближении	71
4.5 Исследование системы в нелинейном приближении при строгом резонансе и в окрестности резонанса	74
Заключение	82
Приложение I	85
Приложение II	94
Список использованных источников	101

Введение

На протяжении долгого времени [25] исследователи, занимавшиеся небесной механикой, искали пример колебательного решения в задаче трех, т. е. орбиты, которая почти убегает в бесконечность, но постоянно возвращается. Функция такого решения снова и снова принимает как малые значения, так и произвольно большие и не имеет предела по мере приближения времени к бесконечности. Вопрос о существовании орбиты задачи трех тел с таким поведением был важен для классификации решений задачи 3-х тел по их асимптотическому поведению при $t \rightarrow \infty$. В 1961 году К.А. Ситников доказал существование такого решения для частного случая задачи трех тел.

В данной работе исследуется случай задачи трех тел, исследованный К.А. Ситниковым. Задача Ситникова связана с проблемой классификации финальных движений в задаче трех тел. Полную классификацию типов финальных движений дал Шази [1], постулируя наличие осциллирующих решений, которым отвечают неограниченные колебания координаты z , при условии, что z не стремится к бесконечности со временем. В 1954 году А.Н. Колмогоров предложил изучить частный случай задачи трех тел на предмет исследования топологии некоторых подмножеств фазового пространства, порождающих разные типы финальных движений. К.А. Ситников [2] доказал для этого случая существование осциллирующих решений, для которых координата z испытывает бесконечное число выбросов на произвольно большие расстояния, однако всегда возвращается в начало координат.

Позднее, В.М. Алексеев [3] исследовал хаотические движения в задаче Ситникова методами символьной динамики и показал, что при определенных условиях в этой задаче реализуются все возможные комбинации финальных движений по Шази, доказал также существование осциллирующих и гиперболо-эллиптических решений, меняющих свой финальный тип за счет явления «полного захвата». Mozer J. познакомил западных исследователей с задачей Ситникова, читая лекции по небесной механике в Принстонском университете в начале 70-ых и публикуя результаты своих исследований этой

задачи в виде монографии [4]. Впоследствии появилось множество работ, посвященных задаче Ситникова, в основном зарубежных авторов. Например, в работах [5-9] исследовались регулярные (периодические) орбиты, работы [10-13] посвящены вопросам хаотической динамики. Статья [16] посвящена устойчивости равновесия эллиптической ограниченной задачи многих тел типа «задачи Ситникова» в случае малых значений эксцентриситета.

В главе 1 рассмотрена задача устойчивости в первом приближении положения тривиального равновесия в задаче Ситникова. Показано, что первое приближение имеет вид линейного уравнения второго порядка с периодическим по времени коэффициентом (уравнение типа Хилла).

Устойчивость равновесия исследовалась на основе регуляризации уравнения в окрестности особой точки и последующего вычисления следа a матрицы монодромии. Показано, что равновесие устойчиво при почти всех значениях эксцентриситета e из интервала $[0,1)$. Неустойчивость имеет место на дискретном множестве значений e , когда мультипликаторы являются кратными (с непростыми элементарными делителями), при этом $e = 1$ является точкой сгущения этого множества.

В главе 2 исследуется устойчивость тривиального равновесия в задаче Ситникова с учетом нелинейных членов в уравнениях движения. Для гамильтоновых уравнений задачи построено, с точностью до членов третьего порядка малости включительно, отображение фазового пространства на себя в момент времени $t = 2\pi$; на основе метода точечных отображений сделаны выводы об устойчивости равновесия. Показано, что всюду в области значений эксцентриситета e из интервала $[0,1)$ имеет место устойчивость по Ляпунову, если исключить из рассмотрения дискретную последовательность значений $\{e_j\}$, для которых след матрицы монодромии равен ± 2 .

Исследованы первое и второе значения эксцентриситета из указанной последовательности. Равновесие устойчиво для первого значения $e = e_1$.

Второе значение эксцентриситета $e = e_2$ отвечает вырождению теорем устойчивости, поэтому требует привлечения членов порядка выше третьего.

В главе 3 исследуется устойчивость тривиального равновесия в задаче Ситникова при наличии сил светового давления со стороны основных тел (фотогравитационная задача Ситникова). Примером описываемой задачи является система из двух одинаковых по массе и излучению звезд, между которыми сосредоточены облака из пылевых частиц, подверженных влиянию как сил светового давления (парусный эффект), так и сил гравитации.

Показано влияние коэффициента редукции q на вид функции $b(e)$, представляющей собой половину следа матрицы монодромии. Представлен характер изменения функции $b(e)$ при 17-ти значениях коэффициента q , отвечающих трем интервалам изменения этого параметра: $[0.3, 1]$, $(0.16, 0.3]$, $[0.1, 0.16]$. Описано поведение функции $b(e)$ на этих интервалах и сделаны выводы об устойчивости тривиального равновесия в первом приближении. В частности, показано, что при малых значениях q функция $b(e)$ монотонно убывает, пересекая ось абсцисс и образуя область $b(e) < -1$ (неустойчивость как в линейном приближении, так и в строгой нелинейной постановке). Сделаны выводы об изменении областей эксцентриситета, отвечающих зонам устойчивости в линейном и нелинейном приближении.

В главе 4 также рассматривается задача о движении пассивно гравитирующей точки в поле притяжения двух одинаковых массивных тел, излучающих световую энергию. Также предполагается, что масса гравитирующей точки много меньше массы притягивающих тел, поэтому ее влиянием на движение основных тел можно пренебречь.

В окрестности устойчивого тривиального равновесия исследуются одномерные колебания точки вдоль оси Z , перпендикулярной плоскости орбиты главных тел и проходящей через центр масс системы. Получены уравнения колебаний с точностью до членов четвертого порядка малости по отклонениям. Получены условия существования параметрического резонанса

1:2. Методом усреднения исследованы резонансные колебания точки как при строгом резонансе, так и в окрестности резонанса: выведены усредненные уравнения, показано, что они допускают первый интеграл, построен фазовый портрет колебаний в окрестности резонанса (и при строгом резонансе). Результаты исследований дублируются в разных системах координат.

Актуальность исследований обусловлена возможностью использования внутренней коллинеарной точки либрации двойной планеты (или двойной звезды, имеющей одинаковые притягивающие массы) для размещения в ней пилотируемой орбитальной станции, космической обсерватории или телескопа. Некоторые европейские и американские проекты ([WMAP](#), «Планк», «Гершель») по созданию таких станций для системы Солнце-Земля уже реализованы. Все эти проекты предполагают исследование устойчивости равновесия точки либрации, исследование колебаний в ее окрестности.

Глава 1. Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в линейном приближении

1.1 Общая постановка задачи и основные определения

Рассмотрим задачу об устойчивости равновесия пассивно гравитирующей точки, находящейся в поле притяжения двух массивных тел одинаковой массы: $m_1 = m_2$. Предполагается, что точка массы m движется вдоль оси Oz , проходящей через центр масс притягивающих тел, перпендикулярно плоскости их движения. Одномерное движение вдоль оси Oz возможно в силу симметрии задачи (см. рис. 1.1). Считается, что масса гравитирующей точки много меньше массы притягивающих тел, т.е. $m \ll m_1$, поэтому ее влиянием на движение основных тел можно пренебречь (ограниченная постановка задачи). Траектории движения основных тел относительно общего центра масс – кеплеровские эллипсы эксцентриситета e .

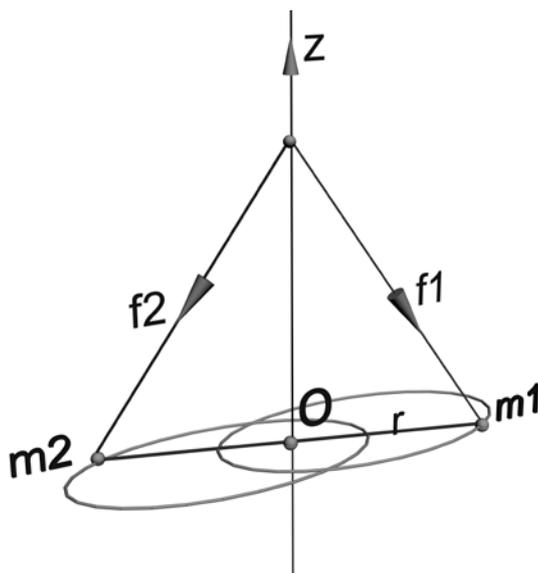


Рис. 1.1

Получим уравнения движения точки массы m вдоль оси Oz . Пусть $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ – силы притяжения со стороны масс m_1, m_2 соответственно. Тогда

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Проектируем это уравнение на ось Oz и, учитывая, что

$$F_{jz} = -|F_{jz}| \cos \alpha = -|F_{jz}| \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}, \quad |F_{1z}| = |F_{2z}| = f \frac{mm_1}{z^2 + r^2},$$

имеем уравнение второго порядка

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Здесь $\mu = f(m_1 + m_2)$, $2r$ – расстояние между притягивающими телами, зависящее от эксцентрисической аномалии E по формуле

$$2r = a(1 - e \cos E) \quad (1.1)$$

Параметр a – большая полуось орбиты. Аномалия E зависит от времени t в силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - \tau),$$

где $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ – среднее движение притягивающих тел, τ – один из кеплеровских элементов орбиты (1.1), представляющий собой время прохождения перицентра.

Будем считать, без ограничения общности, что $f = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $a = 1$. Этого можно добиться с помощью выбора единиц измерения времени, расстояния и массы притягивающих тел. В этом случае $\mu = 1$, $n = 1$, поэтому период обращения основных тел будет равен 2π . Окончательно уравнения движения имеют следующий вид:

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + r^2(t))^{3/2}} = 0 \quad (1.2)$$

Очевидно, $z = 0$ – частное решение этого уравнения.

Основная цель работы, представленной в главе 1, – исследование устойчивости тривиального решения уравнения (1.2) в первом приближении.

На первом шаге исследования, в случае малых значений эксцентриситета, используется приближенный метод построения границ областей устойчивости для уравнения типа Хилла (классическая теория параметрического резонанса).

1.2 Вывод приближенного уравнения движения до членов четвертого порядка относительно z

Получим разложение уравнения (1.2) в ряд по степеням z и e , используя ряд Лагранжа

$$E(e, \zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}(\sin^n \zeta)}{d\zeta^{n-1}} e^n, \quad \zeta = (t - \tau). \quad (1.3)$$

С этой целью разложим второе слагаемое уравнения (1.2) в ряд Тейлора по степеням z , получим

$$\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^3} z - \frac{3}{2r^5} z^3 + O(z^5)$$

Откидываем члены выше 3-го порядка. Тогда уравнение (1.2) примет следующий вид

$$\ddot{z} + \frac{1}{r^3} z - \frac{3}{2r^5} z^3 = 0 \quad (1.4)$$

Получим уравнение, содержащее члены до четвертого порядка по степеням e .

Выразим r из равенства (1.1):

$$r = \frac{1}{2}(1 - e \cos E)$$

Разложим выражения $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ в ряд Тейлора по степеням e :

$$\frac{1}{r^3} = 8 + (24 \cos E)e + (48 \cos^2 E)e^2 + (80 \cos^3 E)e^3 + \dots \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{r^5} = 32 + (160 \cos E)e + (480 \cos^2 E)e^2 + (1120 \cos^3 E)e^3 + \dots \quad (1.6)$$

Используя представление E в виде ряда (1.3) и, без ограничения общности, полагая $\tau = 0$, получим:

$$E = t + e \sin t + e^2 \sin t \cos t + \dots \quad (1.7)$$

Пусть $\Delta = e \sin t + e^2 \sin t \cos t + \dots$. Тогда мы можем представить (1.7) как

$$E = t + \Delta \quad (1.8)$$

Далее, раскладывая $\cos E$ по степеням Δ , получим:

$$\begin{aligned} \cos E = \cos(t + \Delta) &= \cos t - \sin(t + \Delta) \Big|_{\Delta=0} \Delta - \frac{1}{2} \cos(t + \Delta) \Big|_{\Delta=0} \Delta^2 + \dots = \\ &= \cos t - (\sin t) \Delta - \left(\frac{1}{2} \cos t \right) \Delta^2 + \dots \end{aligned}$$

Теперь, подставляя $\Delta = e \sin t + e^2 \sin t \cos t + \dots$ и ограничиваясь членами до третьего порядка по e , имеем:

$$\begin{aligned} \cos E &= \cos t - (\sin t) (e \sin t + e^2 \sin t \cos t) - \left(\frac{1}{2} \cos t \right) (e \sin t + e^2 \sin t \cos t)^2 + \dots = \\ &= \cos t - e \sin^2 t - e^2 \sin^2 t \cos t - \frac{1}{2} \cos t (e^2 \sin^2 t) + \dots = \\ &= \cos t - e \sin^2 t - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 t \cos t + \dots = \\ &= \cos t - e(1 - \cos^2 t) - \frac{3}{2} e^2 (\cos t - \cos^3 t) + \dots \end{aligned}$$

Заметим, что в формулах разложения $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$, то есть в формулах (1.5) и (1.6), слагаемое, содержащее $\cos E$, умножается на e , поэтому при разложении $\cos E$ в ряд мы ограничиваемся членами до третьего порядка по e .

Далее, удерживая члены до третьего порядка по e , получим:

$$\cos E = \cos t - e(1 - \cos^2 t) - \frac{3}{2} e^2 (\cos t - \cos^3 t) \quad (1.9)$$

Используя тригонометрические формулы

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \quad \cos^3 t = \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4},$$

представим (1.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \cos E &= \cos t - e \left(1 - \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) - \frac{3}{2} e^2 \left(\cos t - \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4} \right) = \\ &= \cos t - \frac{1}{2} e (1 - \cos 2t) - \frac{3}{8} e^2 (\cos t - \cos 3t) \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\cos E = \cos t - \frac{1}{2}e(1 - \cos 2t) - \frac{3}{8}e^2(\cos t - \cos 3t) \quad (1.10)$$

Так как в формулах разложения $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$, то есть в формулах (1.5) и (1.6), слагаемое, содержащее $\cos^2 E$, умножается на e^2 , то в выражении $\cos^2 E$ нам достаточно удержать члены до второго порядка.

$$\begin{aligned} \cos^2 E &= \cos^2 t + e \cos t (\cos 2t - 1) = \cos^2 t + e(\cos t \cos 2t - \cos t) = \\ &= \frac{1 + \cos 2t}{2} + e \left(\frac{\cos 3t + \cos t}{2} - \cos t \right) = \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) + \frac{1}{2}e(\cos 3t - \cos t) \end{aligned}$$

$$\cos^2 E = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) + \frac{1}{2}e(\cos 3t - \cos t) \quad (1.11)$$

Так как в формулах разложения $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ слагаемое, содержащее $\cos^3 E$, умножается на e^3 , то в выражении $\cos^3 E$ нам достаточно удержать члены до первого порядка.

$$\cos^3 E = \cos^3 t \quad (1.12)$$

Подставляя (1.10), (1.11), (1.12) в формулы (1.5) и (1.6), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= 8 + 24 \left(e \cos t - \frac{1}{2}e^2(1 - \cos 2t) - \frac{3}{8}e^3(\cos t - \cos 3t) \right) + \\ &+ 48 \left(\frac{1}{2}e^2(1 + \cos 2t) + \frac{1}{2}e^3(\cos 3t - \cos t) \right) + 80e^3(\cos^3 t) = \\ &= 8 + 24e \cos t + e^2(12 + 36 \cos 2t) + e^3(27 \cos t + 53 \cos 3t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^5} &= 32 + 160 \left(e \cos t - \frac{1}{2}e^2(1 - \cos 2t) - \frac{3}{8}e^3(\cos t - \cos 3t) \right) + \\ &+ 480 \left(\frac{1}{2}e^2(1 + \cos 2t) + \frac{1}{2}e^3(\cos 3t - \cos t) \right) + 1120e^3(\cos^3 t) = \\ &= 32 + 160e \cos t + e^2(160 + 320 \cos 2t) + e^3(540 \cos t + 580 \cos 3t) \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующие соотношения:

$$\frac{1}{r^3} = 8 + 24e \cos t + e^2 (12 + 36 \cos 2t) + e^3 (27 \cos t + 53 \cos 3t) \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{r^5} = 32 + 160e \cos t + e^2 (160 + 320 \cos 2t) + e^3 (540 \cos t + 580 \cos 3t) \quad (1.14)$$

Теперь подставим (1.13) и (1.14) в уравнение (1.4):

$$\ddot{z} + \left(8 + 24e \cos t + e^2 (12 + 36 \cos 2t) + e^3 (27 \cos t + 53 \cos 3t)\right) z - \frac{3}{2} \left(32 + 160e \cos t + e^2 (160 + 320 \cos 2t) + e^3 (540 \cos t + 580 \cos 3t)\right) z^3 = 0$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} & \ddot{z} + (8 + 12e^2) z = \\ & = -\left(24e \cos t + e^2 (36 \cos 2t) + e^3 (27 \cos t + 53 \cos 3t)\right) z + \\ & + \left(48 + 240e \cos t + e^2 (240 + 480 \cos 2t) + e^3 (810 \cos t + 870 \cos 3t)\right) z^3 \end{aligned}$$

Запишем получившееся выражение в следующем виде:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = g(t)z + h(t)z^3 \quad (1.15)$$

где

$$\omega = \sqrt{(8 + 12e^2)},$$

$$g(t) = -\left(24e \cos t + e^2 (36 \cos 2t) + e^3 (27 \cos t + 53 \cos 3t)\right),$$

$$h(t) = \left(48 + 240e \cos t + e^2 (240 + 480 \cos 2t) + e^3 (810 \cos t + 870 \cos 3t)\right)$$

Итак, мы получили уравнение движения (1.15). Если отбросить члены выше первого порядка по z , то мы получим уравнение типа Хилла.

1.3 Теоретическое описание и обоснование определения границы устойчивости

Ниже представлен алгоритм определения границы устойчивости [14].

Рассмотрим уравнение Хилла в общем виде, которое записывается следующим образом [14]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\delta + \varepsilon\psi(t))x = 0 \quad (1.16)$$

Здесь δ и ε – некоторые параметры, а $\psi(t)$ – периодическая функция периода T . Выбором параметров δ и ε невозмущенное движение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ можно сделать как устойчивым, так и неустойчивым.

Задача об устойчивости уравнения Хилла состоит в следующем: в плоскости параметров δ и ε найти области устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения $x = 0$, $\dot{x} = 0$.

Положим $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$.

Тогда уравнение (1.16) будет эквивалентно системе двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(\delta + \varepsilon\psi(t))x_1 \quad (1.17)$$

Запишем систему (1.17) в матричном виде:

$$\dot{x} = P(t) \cdot x$$

Здесь $x = (x_1, x_2)^T$, $P(t)$ – квадратная матрица

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix},$$

элементами которой являются периодические функции периода T . В нашем случае $p_{11} = p_{22} = 0$, $p_{12} = 1$, $p_{21} = -(\delta + \varepsilon\psi(t))$.

Как показано в работе [14], решение системы будет иметь вид:

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{T} \ln \rho_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T} \ln \rho_2$$

Матрица $P(t)$ имеет вид:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\delta + \varepsilon\psi(t)) & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\rho^2 + a\rho + 1 = 0 \quad (1.18)$$

Как показано в [14], возможны следующие варианты.

1. $|a| > 2$. Оба корня уравнения будут вещественными и различными.

Так как их произведение равно единице, один из корней будет по модулю больше единицы, а второй меньше единицы. В данном случае решение будет неустойчивым.

2. $|a| < 2$. Тогда

$$\rho_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \cdot i, \quad |\rho_{1,2}| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\pm\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)^2} = 1$$

Модули корней равны единице, а сами корни различны. Поэтому при $|a| < 2$ движение будет устойчивым.

3. При $|a| = 2$ достигается граница устойчивости.

Коэффициент a уравнения (1.19) при данном периоде T зависит от параметров δ и ε . Границей области устойчивости на плоскости δ, ε будут служить уравнения

$$a(\delta, \varepsilon) = \pm 2 \quad (1.19)$$

Построим алгоритм определения границы устойчивости. Известно, что характеристическое уравнение (1.18) получается из следующего равенства:

$$\det(X(T) - \rho E) = 0, \quad (1.20)$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица решений, T – период коэффициентов матрицы $P(t)$ системы (1.17). Характеристическое уравнение (1.20) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x_{11}(T) - \rho & x_{12}(T) \\ x_{21}(T) & x_{22}(T) - \rho \end{vmatrix} = \\ = \rho^2 - (x_{11}(T) + x_{22}(T))\rho + (x_{11}(T) \cdot x_{22}(T) - x_{12}(T) \cdot x_{21}(T)) = 0.$$

Учитывая структуру характеристического уравнения (1.18), получаем равенство

$$a = -(x_{11}(T) + x_{22}(T)) \quad (1.21)$$

Граница устойчивости достигается при $|a| = 2$ и зависит от параметров δ и ε . Составим следующий алгоритм определения границы устойчивости.

1) Вычисляем решение СДУ (1.17) $x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{pmatrix}$ с начальными условиями $x^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Вычисляем решение СДУ (1.17) $x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix}$ с начальными условиями $x^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Вычисляем $|a| = |x_{11}(T) + x_{22}(T)|$.

4) Начиная с малого ε , постепенно увеличиваем его с заданным шагом $\Delta\varepsilon$ (например, $\Delta\varepsilon = 0.1$) до тех пор, пока значение $|a|$ не будет равно 2 с заданной точностью (например, точностью 0.0002). Если $|a| > 2$ с точностью меньшей, чем заданная, мы делаем по ε шаг назад и уменьшаем шаг $\Delta\varepsilon$ в 10 раз, после чего опять увеличиваем ε , но с новым шагом.

Алгоритм описан для фиксированного параметра δ .

1.4 Численно-аналитическое исследование устойчивости при малых значениях эксцентриситета.

Приведем наше уравнение (1.15), которое выглядит следующим образом

$$\ddot{z} + \omega^2 z = g(t)z + h(t)z^3,$$

где

$$\omega = \sqrt{(8 + 12e^2)},$$

$$g(t) = -(24e \cos t + e^2(36 \cos 2t) + e^3(27 \cos t + 53 \cos 3t)),$$

$$h(t) = (48 + 240e \cos t + e^2(240 + 480 \cos 2t) + e^3(810 \cos t + 870 \cos 3t)),$$

к виду (1.16). Для этого отбросим члены, содержащие e выше первого порядка и слагаемое с z^3 . В результате получим

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -24e \cos t \cdot z$$

или

$$\ddot{z} + (\omega^2 + 24e \cos t)z = 0. \quad (1.22)$$

Здесь $\omega = 2\sqrt{2}$.

Положим

$$z = x_1, \quad \dot{z} = x_2.$$

Тогда уравнение (1.22) будет эквивалентно двум уравнениям первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(\omega^2 + 24e \cdot \cos t)x_1. \quad (1.23)$$

Система (1.23) имеет вид системы уравнений Хилла. Поэтому мы можем применить вышеописанный алгоритм для определения границы устойчивости.

Проведенные расчеты в Maple для определения параметра e при заданном параметре $\omega = 2\sqrt{2}$ дали следующие результаты (рис. 1.2 и 1.3):

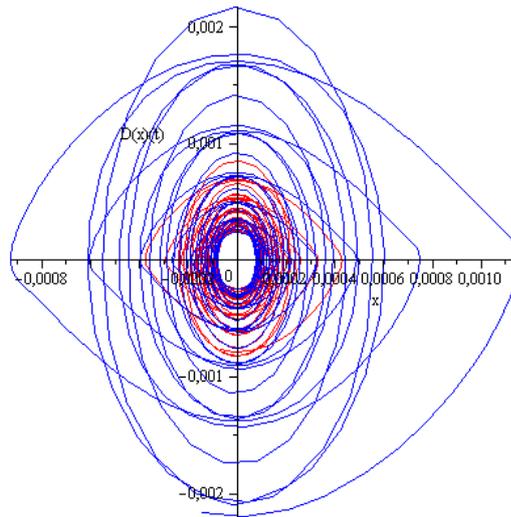


Рис. 1.2

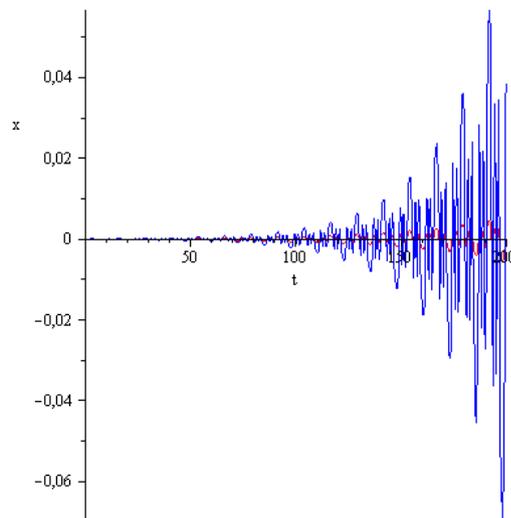


Рис. 1.3

Как видно из программы, возникает подозрение на потерю устойчивости при переходе параметра e от 0.313 к 0.315. Проведенные расчеты показывают, что критическое значение этого параметра, при котором наблюдается смена устойчивости на неустойчивость, равно $e=0.313406784$.

Пользуясь приведенным в параграфе 1.3 алгоритмом, построим границу устойчивости в области параметров $24e$, ω^2 , меняя ω^2 от 4 до 9 с заданным шагом.

Результаты вычислений приведены на рисунке 1.4.

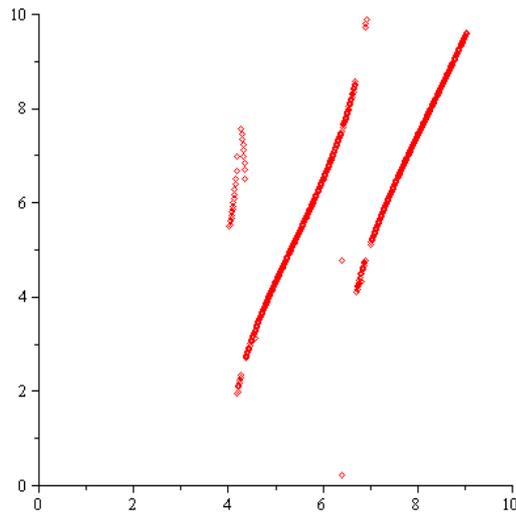


Рис. 1.4

Как видно из графика, получается картина, качественно совпадающая с диаграммой Айнса – Стретта.

Удержим теперь в уравнении (1.15) члены до третьего порядка по e , откидывая слагаемое с z^3 :

$$\ddot{z} + (\tilde{\omega}^2 + 24e \cos t + 36e^2 \cos 2t)z = 0, \quad (1.24)$$

где

$$\tilde{\omega}^2 = 8 + 12e^2 = \omega^2 + 12e^2.$$

Представим уравнение в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(\tilde{\omega}^2 + 24e \cdot \cos t + 36e^2 \cdot \cos 2t)x_1. \quad (1.25)$$

Здесь ω^2 – параметр из системы уравнений (1.23).

Вычислим зависимость $24e$ от ω^2 так же, как для уравнения первого приближения по e и построим графики границы устойчивости для систем уравнений (1.23) и (1.25). Соответствующие границы устойчивости приведены на рис. 1.5.

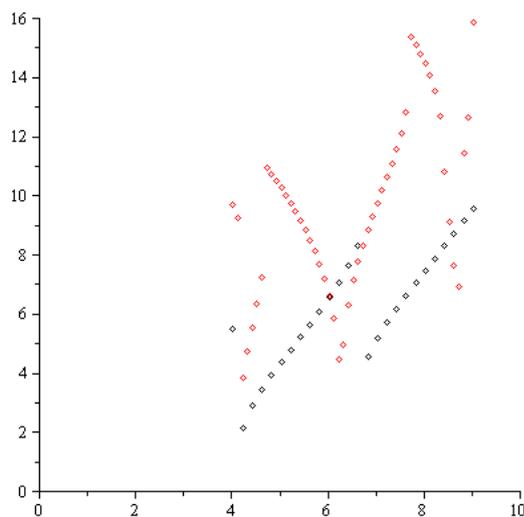


Рис. 1.5

Нижний график представляет границу устойчивости системы (1.23), а верхний – системы (1.25).

Теперь исследуем устойчивость системы, описываемой уравнением (1.4), отбрасывая слагаемое с z^3 .

$$\ddot{z} + \frac{1}{r^3} z = 0. \quad (1.26)$$

Учитывая, что $r = \frac{1}{2}(1 - e \cos E)$, преобразуем $\frac{1}{r^3}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= \frac{8}{(1 - e \cos E)^3} = \frac{8(1 + (1 - e \cos E)^3 - (1 - e \cos E)^3)}{(1 - e \cos E)^3} = \\ &= 8 + \frac{8(1 - (1 - 3e \cos E + 3e^2 \cos^2 E - e^3 \cos^3 E))}{(1 - e \cos E)^3} = \\ &= 8 + \frac{8(3e \cos E - 3e^2 \cos^2 E + e^3 \cos^3 E)}{(1 - e \cos E)^3} = \\ &= 8 \left(1 + \frac{3e \cos E - 3e^2 \cos^2 E + e^3 \cos^3 E}{(1 - e \cos E)^3} \right). \end{aligned}$$

Уравнение (1.26) примет вид

$$\ddot{z} + 8(1 + e \cdot \varphi(t)) \cdot z = 0, \quad (1.27)$$

где

$$\varphi(t) = \cos E \cdot \frac{3 - 3e \cos E + e^2 \cos^2 E}{(1 - e \cos E)^3}.$$

Используя формулу (1.3), разложим $E(t)$ в ряд, удерживая первые сорок членов ряда

$$E(t) = t + e \cdot \sin t + \sum_{n=2}^{40} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}(\sin^n t)}{dt^{n-1}} e^n. \quad (1.28)$$

Преобразуем уравнение (1.27) в уравнение с переменной ω^2

$$\ddot{z} + \omega^2 + 8e \cdot \varphi(t) = 0, \quad (1.29)$$

В функцию $\varphi(t)$ подставим ряд (1.28), после чего уравнение (1.27) представим в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(\omega^2 + 8e \cdot \varphi(t)) \cdot x_1 \quad (1.30)$$

Варьируя параметр ω^2 от четырех до девяти, определяем по описанному алгоритму границу устойчивости. Проведенные вычисления в Maple представлены на рис. 1.6 в виде диаграмм границ устойчивости для систем уравнений (1.23) и (1.30). Уравнения (1.23) описывают исходное уравнение (1.2) до второго порядка точности по e , в то время как для уравнений (1.30) мы удерживаем первые сорок членов ряда (1.3), получая таким образом систему, которая описывает (1.2) с точностью до членов сорок первой степени по e . Нижний график относится к системе (1.23), а верхний – к системе (1.30).

Из получившихся графиков можно сделать следующие выводы. Любой отброшенный член порядка e^k оказывает существенное влияние на поведение границы устойчивости, делая результаты вычисления недостоверными в любом приближении по e .

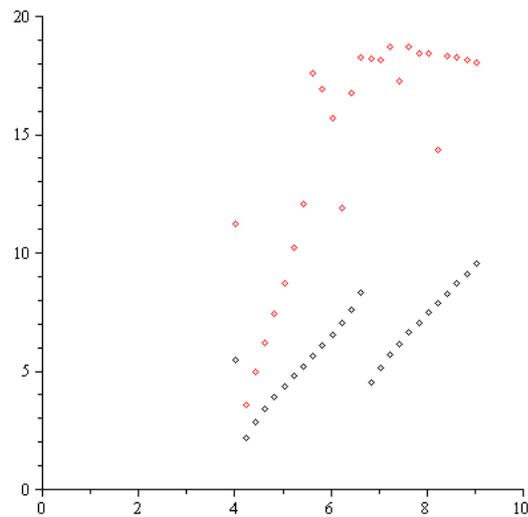


Рис. 1.6

Таким образом, исследование устойчивости равновесия системы, описываемой уравнением (1.2), на основе представлений классической теории параметрического резонанса, когда возмущения представлены рядом по малому параметру, имеет достоверный характер только для достаточно малых значений эксцентриситета.

1.5 Исследование устойчивости в первом приближении при любых значениях эксцентриситета, меньших единицы

Рассмотрим задачу устойчивости тривиального решения $z = 0$ уравнения (1.1), (1.2) в первом приближении. С этой целью линеаризуем уравнение (1.2) в окрестности нуля:

$$\ddot{z} + (1/r^3)z = 0 \quad (1.31)$$

Для исследования задачи устойчивости при любых значениях e из интервала $[0,1)$ следует привести уравнение (1.31) к виду

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{8}{(1 - e \cos E)^3} z &= 0 \\ \dot{E} &= \frac{1}{1 - e \cos E} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Как показал Ляпунов [15], характеристическое уравнение системы (1.32) (E рассматриваем как периодическую функцию t в силу второго уравнения) имеет вид $\rho^2 + a(e)\rho + 1 = 0$, при этом тривиальное равновесие $z = 0$ неустойчиво, если коэффициент $a(e)$, представляющий собой след матрицы монодромии $Z(2\pi)$, удовлетворяет неравенству $|a(e)| > 2$, устойчиво при $|a(e)| < 2$. Если $|a(e)| = 2$, то мультипликаторы системы являются вещественными, кратными, равными по модулю единице. В этом случае положение равновесия неустойчиво по степенному закону, если элементарные делители непростые, устойчиво в случае простых делителей.

Поскольку предельное значение $e = 1$ является особым параметром системы (1.32) (ее правая часть терпит разрыв при $E = 2\pi k$), необходимо провести регуляризацию уравнений (1.32) в окрестности $e = 1, E = 2\pi k$. С этой целью введем (вместо t) фиктивное время g таким образом, чтобы фазовая кривая $x_1(g) = z(t(g)), x_2(g) = \dot{z}(t(g))$ была гладкой функцией параметра g в силу гладкости правых частей преобразованных уравнений. Положим

$$g = \int_0^t \frac{dt}{(1 - e \cos E)^3} \quad (1.33)$$

Уравнения (1.32) примут вид

$$\frac{dx_1}{dg} = (1 - e \cos \Sigma)^3 x_2, \quad \frac{dx_2}{dg} = -8x_1, \quad \frac{d\Sigma}{dg} = (1 - e \cos \Sigma)^2 \quad (1.34)$$

где $\Sigma(g) = E(t(g))$.

На рисунке 1.7 представлен график зависимости $\Sigma(g)$ при $e = 0.999$, $E(0) = 0$.

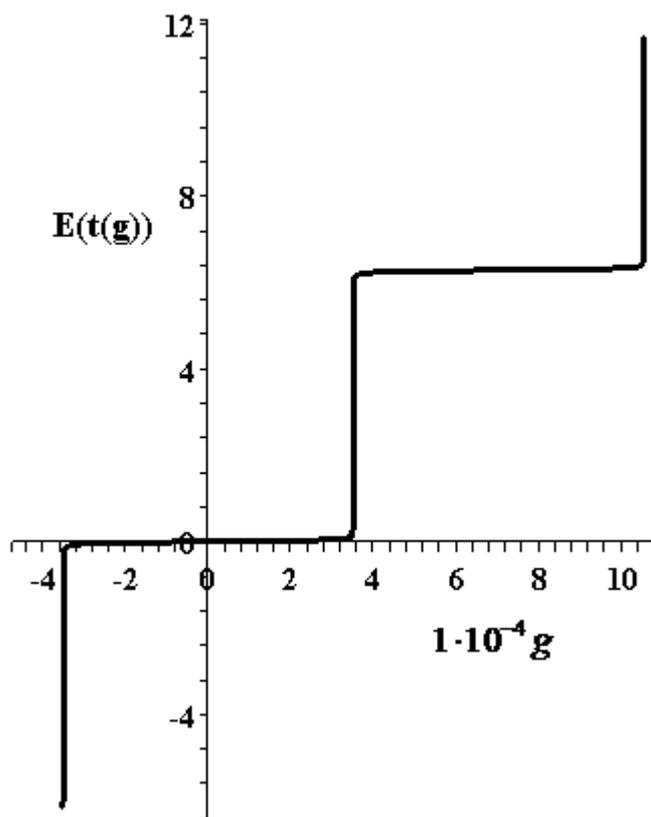


Рис. 1.7

Аналогичный вид имеет график функции $t = t(g)$, определяемой равенством $E - e \sin E = n(t - \tau)$. Отсюда следует, что в течение продолжительного интервала изменения фиктивного времени g

эксцентрическая аномалия $\Sigma(g)$ сохраняет значения, близкие к нулю, либо к $2\pi k$, а переход от одной «ступени» к другой происходит за очень короткий промежуток времени. Расчеты показывают, что за время «скачка» функции $\Sigma(g)$ величины $x_1(g)$, $x_2(g)$ быстро осциллируют, а в оставшееся время они совершают медленные колебания. Такое поведение фазовых переменных объясняется эффектом замедления времени в окрестности особых точек $E = 2\pi k$.

С приближением параметра e к единице резко возрастает величина продолжительности ступенек $\Sigma = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$ и в пределе, когда $e = 1$, функция $\Sigma = \Sigma(g)$ (соответственно $t = t(g)$) становится многозначной, каждая ветвь которой имеет вид бесконечной «ступеньки», заключенной между двумя горизонтальными асимптотами $\Sigma = 2\pi(k - 1)$ и $\Sigma = 2\pi k$.

Имеем $a(e) = z^{(1)}(2\pi) + \dot{z}^{(2)}(2\pi)$, где $(z^{(k)}, \dot{z}^{(k)})$, $k = 1, 2$ – фундаментальная нормальная система решений уравнений (1.32). Отсюда следует, что

$$a(e) = x_1^{(1)}(g^*) + x_2^{(2)}(g^*) \quad (1.35)$$

при условии $t(g^*) = 2\pi$. Из формулы (1.33) явствует, что

$$g^*(e) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 - e \cos E)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(1 - e \cos E)^2}.$$

В силу очевидного равенства $t(g + g^*) = t(g) + 2\pi$ имеем $\Sigma(g + g^*) = \Sigma(g) + 2\pi$, поэтому $g^*(e)$ – ширина «ступеньки». Полагая начальные условия равными

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}(0) = 1, x_2^{(1)}(0) = 0, E(0) = 0, \\ x_1^{(2)}(0) = 0, x_2^{(2)}(0) = 1, E(0) = 0, \end{aligned}$$

находим нормальную фундаментальную систему решений $x^{(1)}(g)$, $x^{(2)}(g)$ уравнений (1.34), после этого вычисляем след $a(e)$ матрицы монодромии

$$X(g^*) = \left\| x_{ij}(g^*) \right\|_{i,j=1}^2, \quad x_{ij}(g^*) = x_i^{(j)}(g^*)$$

на основе формулы (1.35). Результаты расчетов $a(e)$ приведены на рис. 1.8.

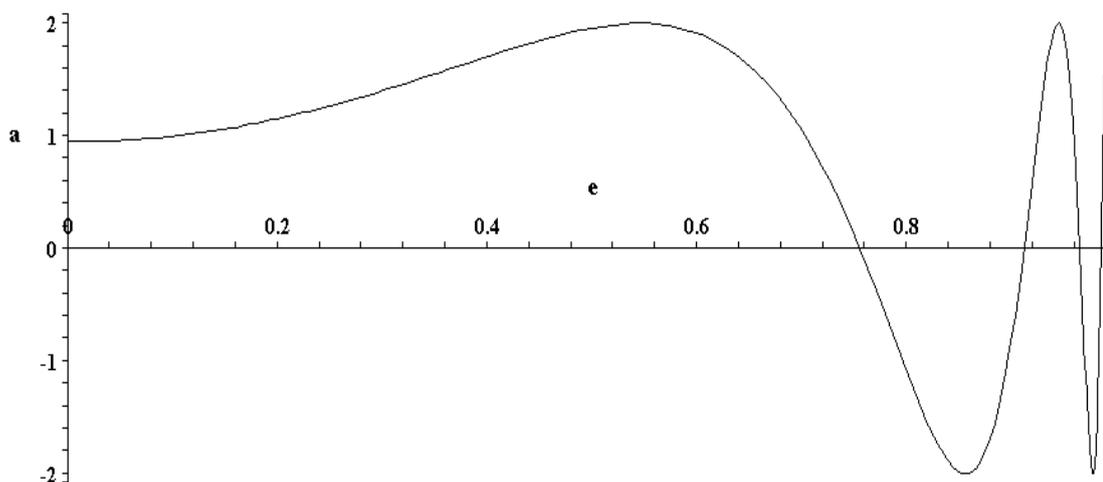


Рис. 1.8

Из этого рисунка следует, что равновесие $z=0$ устойчиво для почти всех значений e , исключая дискретное множество нулей уравнения

$$|a(e)| = 2 \quad (1.36)$$

Значение $e=1$ является предельной точкой этого множества, функция $a(e)$ имеет особенность при $e=1$, она ведет себя по типу функции $2\sin(1/(1-e))$.

Покажем, что для первых девяти членов бесконечной последовательности корней уравнения (1.36) имеет место неустойчивость равновесия. Действительно, приближенные значения этих корней приведены в первой строке таблицы 1.1

e	0.544880	0.855860	0.944770	0.977520	0.990605	0.996021	0.998305	0.999276	0.999690
$x_{12}(g^*)$	0.000210	$0.720807 \cdot 10^{-6}$	$0.514462 \cdot 10^{-7}$	$0.270881 \cdot 10^{-6}$	$0.123914 \cdot 10^{-6}$	$0.556056 \cdot 10^{-7}$	$-0.57712 \cdot 10^{-9}$	$-0.13619 \cdot 10^{-7}$	$0.12155 \cdot 10^{-8}$
$x_{21}(g^*)$	-0.01878	-0.00384	-0.00267	-0.26457	-1.31505	-8.58158	1.044799	305.5066	-359.381

Таблица 1.1

Вторая и третья строка заполнена недиагональными элементами матрицы монодромии. Они отличны от нуля, поэтому, в силу непрерывности решений задачи Коши от параметра e , отличными от нуля будут недиагональные элементы матрицы монодромии, отвечающей строгим значениям корней уравнения (1.36). Но это означает, что матрица $X(g^*)$ имеет непростые элементарные делители (простые элементарные делители существуют только в том случае, когда $X(g^*) = \pm E$), поэтому равновесие неустойчиво.

Заметим, что неустойчивость равновесия в первом приближении при «больших значениях» e исследовалась также в работе [16] на основе приближенного анализа. Показано, что при $e \approx 0.876551$ имеет место неустойчивость тривиального равновесия, что является приближением для более строгого значения $e = 0.855860$.

Расчеты фундаментальной матрицы решений проводились на основе метода rosenbrock с точностью $1 \cdot 10^{-17}$, величина $a(e)$ вычислялась с точностью порядка $1 \cdot 10^{-7}$. Знак величины $a(e)$ чередуется последовательно, начиная с положительного.

Поскольку наличие непростых элементарных делителей является случаем общего положения, следует ожидать, что неустойчивость тривиального равновесия имеет место и для оставшейся бесконечной последовательности нулей уравнения (1.36) (строгое обоснование этого утверждения требует доказательства кратности мультипликаторов $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$ относительно элементарных делителей для уравнения типа Хилла). Заметим также, что анализ устойчивости в нелинейном приближении предполагает отдельного рассмотрения и будет представлен в последующих главах.

В заключении отметим, что вывод статьи [17] об устойчивости тривиального равновесия в линейном приближении при любых $e \in [0,1)$ является ошибочным.

Глава 2. Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейном приближении

2.1 Теоретическое обоснование и описание алгоритма исследования устойчивости посредством сведения к эквивалентной задаче об устойчивости неподвижной точки отображения, сохраняющего площадь

Многие задачи классической и небесной механики приводят к необходимости исследования устойчивости положения равновесия периодической по независимой переменной гамильтоновой системы с одной степенью свободы [19]. К этим задачам можно отнести задачи об устойчивости периодических движений твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести, многочисленные задачи о движении спутника относительно центра масс, вопросы исследования движения в окрестности периодических траекторий ограниченной задачи трех тел и т.д. Так как задача Ситникова представляет собой периодическую по независимой переменной гамильтонову систему с одной степенью свободы, ее также можно отнести к вышеописанному классу задач.

К настоящему времени задача об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем изучена довольно подробно [24]. В основе алгоритмов исследования лежит метод нормальных форм Пуанкаре. Суть этого метода заключается в том, что функция Гамильтона при помощи канонического преобразования приводится к некоторой простейшей (нормальной) форме. Соответствующая каноническая система дифференциальных уравнений существенно проще исходной, что облегчает ее исследование.

Сложность процедуры получения нормальной формы возникает в случае явной зависимости от времени функции Гамильтона. Сначала требуется найти периодическое по времени линейное каноническое преобразование, приводящее квадратичную по фазовым переменным часть гамильтониана к нормальной форме. После этого осуществляется нормализация членов третьей и более высоких степеней в разложении

гамильтониана в ряд. Соответствующее нелинейное нормализующее преобразование близко к тождественному и задается рядами с периодическими по времени коэффициентами. Эти ряды строятся при помощи преобразования Биркгофа или его современных модификаций [19].

Техническая сторона вопроса процедуры нормализации сильно упрощается, если использовать метод точечных отображений, как это сделано в [26] при исследовании треугольных лагранжевых решений эллиптической задачи трех тел. В предложенном в [26] способе осуществляется нормализация не самой функции Гамильтона, а производящей функции отображения, порождаемого соответствующей этой функции канонической системой дифференциальных уравнений движения. А уже затем по нормальной форме производящей функции восстанавливается нормальная форма функции Гамильтона. Однако предложенный в [26] способ сохраняет один существенный недостаток классической методики, так как, по-прежнему, требует предварительной нормализации линейных уравнений возмущенного движения.

Изложенный ниже метод предполагает способ исследования устойчивости положения равновесия периодических по времени гамильтоновых систем с одной степенью свободы, который свободен от упомянутого недостатка [19]. Предлагаемый метод исследования основывается на нормализации отображения при помощи канонических преобразований, приводимых ниже теоремах второго метода Ляпунова и теореме Мозера об инвариантных кривых, примененных к нормализованному отображению [20].

Теорема 2.1 (теорема Ляпунова) [20]. Пусть P_* – неподвижная точка отображения T и пусть некоторая непрерывная функция V обращается в нуль в точке P_* и знакопеременна в ее окрестности, а разность $\Delta = V(TP) - V(P)$ определено-положительна в некоторой окрестности точки P_* . Тогда неподвижная точка P_* неустойчива ■

Теорема 2.2 (теорема Четаева) [20]. Пусть P_* – неподвижная точка отображения T и пусть возможно найти такую непрерывную функцию V , что: 1) $V(P_*) = 0$, 2) в сколь угодно малой окрестности точки P_* существует область $V > 0$, на границе которой $V = 0$, 3) во всех точках P области $V > 0$ разность $\Delta = V(TP) - V(P)$ положительна. Тогда неподвижная точка P_* неустойчива ■

Пусть T – сохраняющее площадь отображение плоскости в себя, неподвижной точкой которого является начало координат. Достаточное условие устойчивости этой точки является следствием из теоремы Мозера о кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь.

Теорема 2.3 (теорема Мозера) [20]. Пусть отображение T задано в виде

$$\rho_1 = \rho + \varphi(\rho, \theta), \quad \theta_1 = \theta + \alpha + a\rho^m + \psi(\rho, \theta) \quad (2.1)$$

и $\rho = 0$ – его неподвижная точка. Величины α, a, m постоянны, $m > 0$. Функции φ и ψ достаточно гладкие, 2π -периодические по θ и при малых ρ допускают оценки вида $\varphi = O(\rho^\beta)$, $\psi = O(\rho^\gamma)$, причем $\beta > m$, $\gamma > m$. Тогда неподвижная точка отображения устойчива ■

Следуя работам [19-21], опишем процедуру исследования устойчивости с помощью метода точечных отображений. Предположим, что отображение T плоскости x, y в себя аналитично в окрестности неподвижной точки $x = y = 0$. Зададим его равенствами

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = g(x, y) \quad (2.2)$$

$$f(x, y) = ax + by + O_2, \quad g(x, y) = cx + dy + O_2 \quad (2.3)$$

Здесь и далее через O_k обозначается сходящийся степенной ряд, начинающийся с членов, степень которых не ниже k . Условие сохранения площади означает, что выполняется следующее тождество

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 1 \quad (2.4)$$

Отсюда следует зависимость коэффициентов ряда (2.3) от соотношений, вытекающих из (2.4).

Линеаризованное отображение (2.2) имеет вид

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy \quad (2.5)$$

В силу (2.4) определитель матрицы этого отображения равен единице, а характеристическое уравнение будет таким

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \quad (2A = a + d) \quad (2.6)$$

Приведем отображение (2.5) к вещественной нормальной форме. Можно убедиться непосредственным вычислением, что любое линейное вещественное невырожденное преобразование не меняет свойство отображения T сохранять площадь. В зависимости от значений величин a, b, c, d возможны следующие случаи.

Случай 1 ($|A| > 1$).

Корни ρ_1, ρ_2 уравнения (2.6) вещественны. Обозначим их через ρ и ρ^{-1} , где $\rho = A + (A^2 - 1)^{1/2}$.

Нормальная форма отображения (2.5) имеет вид

$$q_1 = \rho q, \quad p_1 = \rho^{-1} p \quad (2.7)$$

Нормализующую замену переменных, приводящую (2.5) к форме (2.7), можно выбрать следующим образом.

При условии $b \neq 0$

$$x = -bq - bp, \quad y = (a - \rho)q + (a - \rho^{-1})p$$

При условии $b = 0$

$$x = (a - d)q, \quad y = cq + p$$

Случай 2 ($A = 1$).

В этом случае $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Если $b = c = 0$, то нормализация не требуется, так как в этом случае $a = d = 1$ и отображение (2.5) уже имеет нормальную форму

$$x_1 = x, \quad y_1 = y$$

Если же хотя бы одна из величин b или c отлична от нуля, то нормальная форма отображения (2.5) будет такой

$$q_1 = q + p, \quad p_1 = p$$

Нормализующая замена переменных может быть выбрана следующим образом.

В случае $b \neq 0, \quad c = 0$

$$x = |b|^{1/2} q, \quad y = \sigma |b|^{-1/2} p \quad (\sigma = \text{sign } b) \quad (2.8)$$

В случае $b = 0, \quad c \neq 0$

$$x = \sigma |c|^{-1/2} p, \quad y = |c|^{1/2} q \quad (\sigma = \text{sign } c) \quad (2.9)$$

В случае $bc \neq 0$

$$x = bq, \quad y = (1 - a)q + p \quad (2.10)$$

Случай 3 ($A = -1$).

Здесь $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Если $b = c = 0$, то отображение (2.5) уже имеет нормальную форму

$$x_1 = -x, \quad y_1 = -y$$

Если же хотя бы одна из величин b или c отлична от нуля, то нормальной формой отображения (2.5) будет отображение

$$q_1 = -q + p, \quad p_1 = -p$$

В случае $b \neq 0, \quad c = 0$ нормализующая замена переменных имеет вид (2.8).

В случае $b = 0, \quad c \neq 0$ нормализующая замена переменных имеет вид (2.9).

В случае $bc \neq 0$ нормализующая замена переменных имеет вид

$$x = bq, \quad y = -(a + 1)q + p$$

Случай 4 ($|A| < 1$).

В этом случае корни уравнения (2.6) комплексно-сопряженные с модулем, равным единице.

$$\rho_1 = \rho = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad \rho_2 = \bar{\rho} = \cos \alpha - i \sin \alpha \quad (2.11)$$

$$\cos \alpha = A, \quad \sin \alpha = (1 - A^2)^{1/2}$$

Нормализованное отображение (2.5) представляет собой поворот на угол α :

$$q_1 = \cos \alpha q + \sin \alpha p, \quad p_1 = -\sin \alpha q + \cos \alpha p$$

Нормализующую замену переменных можно взять в виде

$$x = -\sigma |b|^{1/2} (\sin \alpha)^{-1/2} q \quad (\sigma = \text{sign } b)$$

$$y = (|b| \sin \alpha)^{-1/2} (a - \cos \alpha) q - (\sin \alpha)^{1/2} |b|^{-1/2} p$$

В дальнейшем будем считать, что нормализация линеаризованного отображения (2.2) уже осуществлена. Применяя для новых переменных q, p старые обозначения x, y , будем рассматривать отличающиеся один от другого шесть случаев I – VI отображения (2.2). Ниже представлены матрицы нормализованной линейной части отображения, соответствующие случаям I – VI:

$$\text{I)} \quad \left\| \begin{array}{cc} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{array} \right\|, \quad \text{II)} \quad \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \text{III)} \quad \left\| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|,$$

$$\text{IV)} \quad \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \text{V)} \quad \left\| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|, \quad \text{VI)} \quad \left\| \begin{array}{cc} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right\|$$

В случае I величина ρ вещественна, $\rho \neq \pm 1$, а в случае VI число $\alpha \pi^{-1}$ не является целым.

Случай I.

В случае I отображение (2.2) имеет вид

$$x_1 = \rho x + O_2, \quad y_1 = \rho^{-1} y + O_2 \quad (\rho \neq \pm 1)$$

Неподвижная точка $x = y = 0$ неустойчива [20].

Случай II.

Имеем отображение

$$x_1 = x + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad y_1 = y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n \quad (2.12)$$

Теорема 2.4 [20]. Если правая часть хотя бы одного из равенств (2.12) действительно содержит члены второй степени, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения неустойчива ■

Для доказательства используется теорема Четаева и переход к переменным φ, r по формулам

$$x = \sqrt{2r} \sin \varphi, \quad y = \sqrt{2r} \cos \varphi \quad (2.13)$$

Пусть теперь правые части равенств (2.12) не содержат членов второй степени. В переменных φ, r , задаваемых формулами (2.13), отображение записывается так

$$r_1 = r - G'(\varphi)r^2 + O(r^{5/2}), \quad \varphi_1 = \varphi + 2G(\varphi)r + O(r^{3/2}) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} G(\varphi) &= b_0 + a_2 \sin 2\varphi + b_2 \cos 2\varphi + a_4 \sin 4\varphi + b_4 \cos 4\varphi \\ b_0 &= (3a_{03} + 2a_{21} - 3b_{30}) / 8, \quad a_2 = a_{30} - b_{03}, \quad b_2 = (a_{03} + b_{30}) / 2 \\ a_4 &= -(a_{30} + b_{03}) / 2, \quad b_4 = (a_{03} - 2a_{21} - b_{30}) / 8 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теорема 2.5 [20]. Если уравнение $G(\varphi) = 0$ не имеет вещественных корней, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения устойчива, если же существует такое значение $\varphi = \varphi_*$, что $G(\varphi_*) = 0$, а $G'(\varphi_*) \neq 0$, то неподвижная точка неустойчива ■

Случай III.

Отображение (2.2) имеет вид

$$x_1 = -x + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad y_1 = -y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n \quad (2.16)$$

Исследование устойчивости точки $x = y = 0$ в рассматриваемом случае можно свести к случаю II. Для этого вместо отображения T , задаваемого равенствами (2.16), рассмотрим его вторую степень T^2 .

В отображении T^2 члены второй степени полностью отсутствуют и оно представляется рядами вида

$$\begin{aligned}x_2 &= x + a'_{30}x^3 + a'_{21}x^2y + a'_{12}xy^2 + a'_{03}y^3 + O_4 \\y_2 &= y + b'_{30}x^3 + b'_{21}x^2y + b'_{12}xy^2 + b'_{03}y^3 + O_4\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}a'_{30} &= -2a_{30} - 2a_{20}^2 + 2b_{20}b_{02}, & a'_{21} &= -2a_{21} + 2a_{20}b_{02} - 2a_{02}b_{20} \\a'_{12} &= -2a_{12} + 2a_{20}a_{02} - 2b_{02}^2, & a'_{03} &= -2a_{03} \\b'_{30} &= -2b_{30}, & b'_{21} &= -2b_{21} - 2a_{20}^2 + 2b_{20}b_{02} \\b'_{12} &= -2b_{12} + 2a_{20}b_{02} - 2a_{02}b_{20}, & b'_{03} &= -2b_{03} + 2a_{20}a_{02} - 2b_{02}^2\end{aligned}\tag{2.18}$$

Для отображения (2.17) справедлива теорема 2.5. Только при вычислении функции $G(\varphi)$ нужно в (2.15) величины a_{mn}, b_{mn} заменить на величины a'_{mn}, b'_{mn} из (2.18).

Случай IV.

Имеем отображение

$$x_1 = x + y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \quad y_1 = y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn}x^m y^n\tag{2.19}$$

Ниже будет доказано следующее утверждение.

Теорема 2.6 [20]. Если $b_{20} \neq 0$, то неподвижная точка $x = y = 0$ неустойчива. Если же $b_{20} = 0$, то при выполнении неравенства $2b_{30} + b_{11}^2 < 0$ имеет место устойчивость, а при $2b_{30} + b_{11}^2 > 0$ – неустойчивость ■

Случай V.

Имеем отображение

$$x_1 = -x + y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \quad y_1 = -y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn}x^m y^n\tag{2.20}$$

Исследование случая V можно свести к изученному случаю IV, если вместо отображения T рассмотреть его вторую степень. Линейная часть отображения T^2 имеет вид $x_2 = x - 2y, y_2 = y$. Если сделать замену переменных $x = \xi, y = -\frac{1}{2}\eta$, то для второй степени отображения получим равенства, аналогичные (2.19):

$$\xi_2 = \xi + \eta + \sum_{m+n=2}^{\infty} a'_{mn} \xi^m \eta^n, \quad \eta_2 = \eta + \sum_{m+n=2}^{\infty} b'_{mn} \xi^m \eta^n \quad (2.21)$$

Коэффициенты a'_{mn} , b'_{mn} в (2.21) выражаются через коэффициенты исходного отображения (2.20). В частности, нужные для получения выводов устойчивости коэффициенты будут такими: $b'_{20} = 0$, $b'_{30} = 4(b_{30} - b_{20}^2)$, $b'_{11} = -2b_{20}$.

Из теоремы 2.6 вытекает следующее утверждение об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (2.20).

Теорема 2.7 [20]. При выполнении неравенства $2b_{30} - b_{20}^2 < 0$ неподвижная точка устойчива, если же $2b_{30} - b_{20}^2 > 0$, то имеет место неустойчивость ■

Случай VI.

Отображение (2.2) записывается в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \alpha x + \sin \alpha y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n \\ y_1 &= -\sin \alpha x + \cos \alpha y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n \end{aligned} \quad (2.22)$$

Положив $z = x - iy$, $\rho = \cos \alpha + i \sin \alpha$, запишем отображение (2.22) в комплексной форме

$$z_1 = \rho z + \sum_{m+n=2}^{\infty} f_{mn} z^m \bar{z}^n, \quad \bar{z}_1 = \bar{\rho} \bar{z} + \sum_{m+n=2}^{\infty} \bar{f}_{mn} \bar{z}^m z^n \quad (2.23)$$

Пусть $f_{mn} = \mu_{mn} + i\nu_{mn}$. Для коэффициентов форм второй и третьей степени из (2.23) имеем такие выражения

$$\begin{aligned} \mu_{20} &= \frac{1}{4}(a_{20} - a_{02} + b_{11}), \quad \nu_{20} = \frac{1}{4}(a_{11} - b_{20} + b_{02}), \quad \mu_{11} = \frac{1}{2}(a_{20} + a_{02}) \\ \nu_{11} &= -\frac{1}{2}(b_{20} + b_{02}), \quad \mu_{02} = \frac{1}{4}(a_{20} - a_{02} - b_{11}), \quad \nu_{02} = -\frac{1}{4}(a_{11} + b_{20} - b_{02}) \\ \mu_{30} &= \frac{1}{8}(a_{30} - a_{12} + b_{21} - b_{03}), \quad \nu_{30} = \frac{1}{8}(a_{21} - a_{03} - b_{03} + b_{12}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{21} &= \frac{1}{8}(3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03}), & \nu_{21} &= \frac{1}{8}(a_{21} + 3a_{03} - 3b_{03} - b_{12}) \\
\mu_{12} &= \frac{1}{8}(3a_{30} + a_{12} - b_{21} - 3b_{03}), & \nu_{12} &= -\frac{1}{8}(a_{21} + 3a_{03} + 3b_{30} + b_{12}) \\
\mu_{03} &= \frac{1}{8}(a_{30} - a_{12} - b_{21} + b_{03}), & \nu_{03} &= -\frac{1}{8}(a_{21} - a_{03} + b_{30} - b_{12})
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Производящая функция $\Gamma(z, \bar{z}_1)$ отображения (2.23) имеет вид

$$\Gamma = \rho z \bar{z}_1 + \sum_{k=3}^{\infty} \Gamma_k(z, \bar{z}_1), \quad \Gamma_k = \sum_{m+n=k} \gamma_{mn} z^m \bar{z}_1^n \tag{2.26}$$

Для нужных в дальнейшем коэффициентов γ_{mn} имеем такие выражения:

$$\gamma_{30} = -\frac{1}{3}\rho \bar{f}_{02}, \quad \gamma_{21} = f_{20}, \quad \gamma_{12} = -\rho^3 \bar{f}_{20}, \quad \gamma_{03} = \frac{1}{3}\rho^2 f_{02} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{40} &= -\frac{1}{4}\rho \bar{f}_{03} - \frac{1}{2}f_{20}\bar{f}_{02}, & \gamma_{04} &= \frac{1}{4}\rho^3 f_{03} - \frac{1}{2}\rho^4 f_{02}\bar{f}_{20} \\
\gamma_{22} &= \frac{1}{2}\rho f_{21} - \frac{1}{2}\rho^2 f_{11}\bar{f}_{11} - \rho^2 f_{02}\bar{f}_{02}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

В неявной форме отображение (2.23) задается равенствами

$$z_1 = \rho z + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \bar{z}_1} + O_4, \quad \bar{z} = \rho \bar{z}_1 + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_4}{\partial z} + O_4 \tag{2.29}$$

Для получения нормальной формы отображения (2.23) введем новые переменные $\zeta, \bar{\zeta}$ при помощи канонического преобразования с производящей функцией $S(\zeta, \bar{z})$:

$$S = \zeta \bar{z} + \sum_{k=3}^{\infty} S_k(\zeta, \bar{z}), \quad S_k = \sum_{m+n=k} S_{mn}(\zeta^m, \bar{z}^n) \tag{2.30}$$

$$z = \zeta + \frac{\partial S_3}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial S_4}{\partial \bar{z}} + O_4, \quad \bar{\zeta} = \bar{z} + \frac{\partial S_3}{\partial \zeta} + \frac{\partial S_4}{\partial \zeta} + O_4 \tag{2.31}$$

В новых переменных отображение $\zeta, \bar{\zeta} \rightarrow \zeta_1, \bar{\zeta}_1$ задается при помощи производящей функции

$$W = \rho \zeta \bar{\zeta}_1 + \sum_{k=3}^{\infty} W_k(\zeta, \bar{\zeta}_1), \quad W_k = \sum_{m+n=k} w_{mn} \zeta^m \bar{\zeta}_1^n \tag{2.32}$$

посредством равенств

$$\zeta_1 = \rho\zeta + \frac{\partial W_3}{\partial \bar{\zeta}_1} + \frac{\partial W_4}{\partial \bar{\zeta}_1} + O_4, \quad \bar{\zeta} = \rho\bar{\zeta}_1 + \frac{\partial W_3}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_4}{\partial \zeta} + O_4 \quad (2.33)$$

Из (2.29), (2.31) и (2.33) получаем тождество

$$W_3(\zeta, \bar{\zeta}_1) \equiv \Gamma_3(\zeta, \bar{\zeta}_1) + S_3(\zeta, \rho\bar{\zeta}_1) - S_3(\rho\zeta, \bar{\zeta}_1) \quad (2.34)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\zeta, \bar{\zeta}_1$, получим равенства

$$\begin{aligned} w_{30} &= \gamma_{30} + (1 - \rho^3)s_{30}, & w_{21} &= \gamma_{21} + \rho(1 - \rho)s_{21} \\ w_{12} &= \gamma_{12} - \rho(1 - \rho)s_{12}, & w_{03} &= \gamma_{03} - (1 - \rho^3)s_{03} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Пусть $\rho^3 = 1$, то есть имеет место резонанс третьего порядка ($3\alpha = 2\pi l$, l – целое число). Тогда величины s_{21} и s_{12} можно взять такими, чтобы величины w_{21} и w_{12} обратились в нуль. Величины же w_{30} и w_{03} уничтожить нельзя и форма W_3 в (2.32) будет иметь вид

$$W_3 = \gamma_{30}\zeta^3 + \gamma_{03}\bar{\zeta}_1^3$$

а нормализованное в членах второй степени отображение задается равенствами

$$\zeta_1 = \rho\zeta + f_{02}\bar{\zeta}^2 + O_3, \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\rho}\bar{\zeta} + \bar{f}_{02}\zeta^2 + O_3 \quad (2.36)$$

Теорема 2.8 [20]. Если $\rho^3 = 1$ и хотя бы одна из величин μ_{02} или ν_{02} из (2.24) отлична от нуля, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (2.22) неустойчива ■

Пусть теперь $\rho^3 \neq 1$. В этом случае, согласно (2.35), коэффициенты s_{mn} в форме S_3 функции (2.30) можно выбрать так, чтобы полностью уничтожить форму W_3 в производящей функции (2.32). При таком выборе S_3 из (2.29), (2.31) и (2.33) следует тождество

$$W_4(\zeta, \bar{\zeta}_1) \equiv \Gamma_4(\zeta, \bar{\zeta}_1) + \bar{\rho} \frac{\partial \Gamma_3(\zeta, \bar{\zeta}_1)}{\partial \zeta} \frac{\partial S_3(\zeta, \rho\bar{\zeta}_1)}{\partial \bar{\zeta}_1} + S_4(\zeta, \rho\bar{\zeta}_1) - S_4(\rho\zeta, \bar{\zeta}_1) \quad (2.37)$$

Отсюда получаем следующие выражения для коэффициентов W_4 из (2.32):

$$\begin{aligned}
w_{40} &= \gamma_{40} + \frac{3\gamma_{30}\gamma_{21}}{\rho(\rho-1)} - (\rho^4 - 1)s_{40}, \quad w_{31} = \gamma_{31} + \frac{2\gamma_{21}^2}{\rho(\rho-1)} - \frac{6\gamma_{30}\gamma_{12}}{\rho-1} - \rho(\rho^2 - 1)s_{31} \\
w_{22} &= \gamma_{22} - \frac{9\rho^2\gamma_{30}\gamma_{03}}{\rho^3 - 1} + \frac{(1-4\rho)\gamma_{21}\gamma_{12}}{\rho(\rho-1)}, \quad w_{04} = \gamma_{04} - \frac{3\rho^2\gamma_{03}\gamma_{12}}{\rho^3 - 1} + (\rho^4 - 1)s_{04} \\
w_{13} &= \gamma_{13} - \frac{2\gamma_{12}^2}{\rho-1} - \frac{6\rho^2\gamma_{03}\gamma_{21}}{\rho^3 - 1} + \rho(\rho^2 - 1)s_{13}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Пусть помимо условия $\rho^3 \neq 1$ выполняется также условие $\rho^4 \neq 1$, то есть отсутствует и резонанс четвертого порядка ($2\alpha \neq l\pi$, l – целое число). Тогда, согласно (2.38), можно так выбрать s_{40} , s_{31} , s_{13} , s_{04} , что величины w_{40} , w_{31} , w_{13} , w_{04} обратятся в нуль. Коэффициент же w_{22} уничтожить нельзя и нормализованная до членов четвертой степени производящая функция (2.32) имеет вид

$$W = \rho\zeta\bar{\zeta}_1 + w_{22}\zeta^2\bar{\zeta}_1^2 + O_5$$

Соответствующее нормализованное до членов третьей степени отображение будет таким:

$$\zeta_1 = \rho\zeta + f_{21}^*\zeta^2\bar{\zeta} + O_4, \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\rho}\bar{\zeta} + \bar{f}_{21}^*\bar{\zeta}^2\zeta + O_4 \tag{2.39}$$

где $f_{21}^* = 2\bar{\rho}w_{22}$. Из условия сохранения площади следует соотношение $\rho\bar{f}_{21}^* + \bar{\rho}f_{21}^* = 0$.

Положим $f_{21}^* = \mu_{21}^* + iv_{21}^*$. Из (2.27), (2.28) и (2.38) получаем такие выражения для величин μ_{21}^* и v_{21}^* :

$$\begin{aligned}
\mu_{21}^* &= \mu_{21} + (3 + 4\cos\alpha)(\mu_{20}^2 + v_{20}^2) - \frac{\mu_{02}^2 + v_{02}^2}{1 + 2\cos\alpha} \\
v_{21}^* &= v_{21} + \frac{\sin\alpha(1 - 4\cos\alpha)(\mu_{20}^2 + v_{20}^2)}{1 - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha(\mu_{02}^2 + v_{02}^2)}{(1 + 2\cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Входящие сюда величины μ_{mn} , ν_{mn} выражаются через коэффициенты отображения (2.22) по формулам (2.24), (2.25). Из условия сохранения площади следует, что величины μ_{21}^* , ν_{21}^* связаны тождеством

$$\cos \alpha \mu_{21}^* + \sin \alpha \nu_{21}^* = 0 \quad (2.41)$$

При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядка справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.9 [20]. Если $\mu_{21}^* + \nu_{21}^* \neq 0$, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (2.22) устойчива ■

Рассмотрим теперь случай резонанса четвертого порядка, когда $\rho^4 = 1$. В этом случае величины s_{31} и s_{13} в (2.38) можно выбрать так, чтобы коэффициенты w_{31} и w_{13} формы W_4 из (2.32) обратились в нуль. Коэффициент w_{22} по-прежнему нельзя уничтожить, а при $\rho^4 = 1$ нельзя также уничтожить коэффициенты w_{40} и w_{04} . Поэтому нормализованная до членов четвертой степени функция (2.32) будет такой:

$$W = \rho \zeta \bar{\zeta}_1 + w_{22} \zeta^2 \bar{\zeta}_1^2 + w_{40} \zeta^4 + w_{04} \bar{\zeta}_1^4 + O_5$$

Соответствующее отображение имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \rho \zeta + f_{21}^* \zeta^2 \bar{\zeta} + f_{03}^* \bar{\zeta}^3 + O_4 \\ \bar{\zeta}_1 &= \bar{\rho} \bar{\zeta} + \bar{f}_{21}^* \bar{\zeta}^2 \zeta + \bar{f}_{03}^* \zeta^3 + O_4 \end{aligned} \quad (2.42)$$

где по-прежнему $f_{21}^* = 2\bar{\rho}w_{22} = \mu_{21}^* + i\nu_{21}^*$, а $f_{03}^* = 4\rho w_{04}$.

Положив $f_{03}^* = \mu_{03}^* + i\nu_{03}^*$ и учтя равенство $\rho^4 = 1$, получим из (2.38), (2.27) и (2.28) такие выражения для μ_{03}^* и ν_{03}^* .

$$\mu_{03}^* = \mu_{03} - 2(\mu_{20}\mu_{02} + \nu_{20}\nu_{02}), \quad \nu_{03}^* = \nu_{03} - 2(\mu_{20}\nu_{02} - \mu_{02}\nu_{20}) \quad (2.43)$$

Величины μ_{mn} , ν_{mn} выражаются через коэффициенты отображения (2.22) по формулам (2.24), (2.25).

Далее, при $\rho^4 = 1$ имеем $\cos \alpha = 0$. Поэтому из тождества (2.41) следует, что при резонансе четвертого порядка величина $\nu_{21}^* = 0$. Величина же μ_{21}^* , вычисленная по формуле (2.40), будет такой:

$$\mu_{21}^* = \mu_{21} + 3(\mu_{20}^2 + \nu_{20}^2) - (\mu_{02}^2 + \nu_{02}^2) \quad (2.44)$$

Теорема 2.10 [20]. При выполнении неравенства $\mu_{21}^* > \mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2}$ неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (2.22) устойчива. Если же $\mu_{21}^* < \mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2}$, то имеет место неустойчивость ■

2.2 Постановка задачи. Построение точечного отображения T

Вернемся к задаче об устойчивости тривиального равновесия пассивно гравитирующей точки, находящейся в поле притяжения двух массивных тел одинаковой массы. Напомним, что точка массы m движется вдоль оси Oz , проходящей через центр масс притягивающих тел, перпендикулярно плоскости их движения. При этом считаем, что масса гравитирующей точки много меньше массы притягивающих тел, поэтому ее влиянием на движение основных тел можно пренебречь. Относительная траектория движения основных тел – кеплеровский эллипс с эксцентриситетом e .

Как было показано в п. 1.1, уравнения движения пассивно-гравитирующей точки вдоль оси z имеют следующий вид:

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + r^2(t))^{3/2}} = 0, \quad 2r = a(1 - e \cos E) \quad (2.45)$$

Здесь r – половина расстояния между телами m_1, m_2 , E – эксцентрическая аномалия, e – эксцентриситет орбиты, a – ее большая полуось. Единицы измерения выбраны таким образом, что $m_1 + m_2 = 1$, $a = 1$, при этом период T обращения основных тел по орбите равен 2π .

Аномалия E зависит от времени t в силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (2.46)$$

где τ – один из кеплеровских элементов эллиптической орбиты, представляющий собой время прохождения через перигеум, $n = 2\pi/T$ – среднее движение основных тел. Без ограничения общности будем считать, что $\tau = 0$, при этом $n = 1$ в силу выбора единиц измерения.

Устойчивость равновесия в первом (линейном) приближении была исследована в главе 1. Было показано, что равновесие $z = \dot{z} = 0$ устойчиво для почти всех значений e , исключая дискретное множество нулей уравнения

$$|b(e)| = 1, \quad (2.47)$$

отвечающих случаю кратных мультипликаторов. Здесь $b(e)$ – половина следа матрицы монодромии линеаризованных уравнений движения. Корни

уравнения (2.47) образуют последовательность значений $\{e_j\} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$ такую, что для каждого e_j равновесие полиномиально неустойчиво в линейном приближении (утверждение доказано для первых девяти членов последовательности $\{e_j\}$, имеющих непростые элементарные делители).

Исследуем устойчивость тривиального равновесия в нелинейном приближении для любых $e \in [0,1)$.

Уравнения движения (2.45) представляют собой периодическую систему Гамильтона с одной степенью свободы:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.48)$$

Здесь

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{(q^2 + r^2)^{1/2}}, \quad 2r = a(1 - e \cos E), \quad q = z, \quad p = \dot{z}$$

Задача об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем изучена довольно подробно. Наиболее распространенный метод анализа – метод нормальных форм. Однако получение нормальной формы для неавтономной функции Гамильтона является сложной задачей. Поэтому воспользуемся методом точечных отображений, изложенным в параграфе 3.1, приводящим задачу об устойчивости равновесия к эквивалентной задаче об устойчивости неподвижной точки отображения T , сохраняющим площадь, и представляющим собой отображение фазового пространства уравнений (2.45) на себя для момента времени $t = 2\pi$. В работе [19] получен явный вид отображения $T: q_0, p_0 \rightarrow q_1, p_1$ (q_0, p_0 – начальные значения величин q, p) с точностью до членов третьего порядка малости по фазовым переменным и с точностью до значений коэффициентов некоторых однородных форм, входящих в представление отображения T . Коэффициенты форм определяются путем интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Запишем гамильтониан системы (2.48), раскладывая его в ряд по q, p и отбрасывая аддитивное слагаемое, не зависящее от q, p :

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2r^3} q^2 - \frac{3}{8r^5} q^4 + \dots \quad (2.49)$$

Необходимо подавить квадратичную часть гамильтониана, чтобы представить производящую функцию Ψ преобразования T , близкого к тождественному, в виде ряда, не содержащего линейных членов. С этой целью введем каноническую замену переменных $q, p \rightarrow \xi, \eta$ вида

$$q = x_{11}(t)\xi + x_{12}(t)\eta, \quad p = x_{21}(t)\xi + x_{22}(t)\eta, \quad \xi(0) = \xi_0 = q_0, \quad \eta(0) = \eta_0 = p_0, \quad (2.50)$$

где $x_{ij}(t)$ – элементы нормальной фундаментальной матрицы решений уравнений в вариациях Пуанкаре с функцией Гамильтона

$$H_2 = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2r^3} q^2$$

Тогда преобразованный гамильтониан $G(\xi, \eta, t)$ примет вид

$$G = G_3(\xi, \eta, t) + G_4(\xi, \eta, t) + \dots, \quad (2.51)$$

где

$$G_3 = 0, \quad G_4 = -\frac{3}{8r^5} (x_{11}(t)\xi + x_{12}(t)\eta)^4 \quad (2.52)$$

Замена переменных (2.50) приводит задачу о построении отображения T к нахождению отображения $\xi_0, \eta_0 \rightarrow \xi_1, \eta_1$ ($\xi_1 = \xi(2\pi), \eta_1 = \eta(2\pi)$)

$$\xi_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_0}, \quad \eta_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1}$$

за период изменения t от 0 до 2π . Производящую функцию Ψ такого преобразования можно представить рядом

$$\Psi = \xi_1 \eta_0 + \Phi_3(\xi_1, \eta_0, 2\pi) + \Phi_4(\xi_1, \eta_0, 2\pi) + \dots,$$

где $\Phi_k(\xi, \eta_0, t)$ – однородные формы k -го порядка такие, что формальный ряд

$$\Phi = \xi \eta_0 + \Phi_3(\xi, \eta_0, t) + \Phi_4(\xi, \eta_0, t) + \dots,$$

$$\Phi_k(\xi, \eta_0, t) = 0 \quad (k = 3, 4)$$

является полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + G\left(\xi, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, t\right) = 0 \quad (2.53)$$

В силу (2.53), формы $\Phi_k(\xi, \eta_0, t)$ находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3(\xi, \eta_0, t)}{\partial t} &= -G_3(\xi, \eta_0, t) \\ \frac{\partial \Phi_4(\xi, \eta_0, t)}{\partial t} &= -G_4(\xi, \eta_0, t) - \frac{\partial G_3(\xi, \eta_0, t)}{\partial \eta_0} \frac{\partial \Phi_3(\xi, \eta_0, t)}{\partial \xi} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.54)$$

Учитывая начальные условия $\Phi_k(\xi, \eta_0, 0) = 0$, равенства (2.52), (2.54), однородные формы Φ_3, Φ_4 представим в виде

$$\Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = \lambda_1(t)\xi^4 + \lambda_2(t)\xi^3\eta_0 + \lambda_3(t)\xi^2\eta_0^2 + \lambda_4(t)\xi\eta_0^3 + \lambda_5(t)\eta_0^4, \quad \lambda_k(0) = 0$$

Из второго равенства системы (2.54) следует

$$\dot{\lambda}_1\xi^4 + \dot{\lambda}_2\xi^3\eta_0 + \dot{\lambda}_3\xi^2\eta_0^2 + \dot{\lambda}_4\xi\eta_0^3 + \dot{\lambda}_5\eta_0^4 = \frac{3}{8r^5}(x_{11}(t)\xi + x_{12}(t)\eta_0)^4 \quad (2.55)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ξ, η_0 в левой и правой частях уравнения (2.55) и интегрируя полученные равенства, будем иметь:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{3}{8} \int_0^t \frac{x_{11}^4(t)}{r(t)^5} dt, \quad \lambda_2(t) = \frac{3}{2} \int_0^t \frac{x_{11}^3(t)x_{12}(t)}{r(t)^5} dt, \quad \lambda_3(t) = \frac{9}{4} \int_0^t \frac{x_{11}^2(t)x_{12}^2(t)}{r(t)^5} dt, \\ \lambda_4(t) &= \frac{3}{2} \int_0^t \frac{x_{11}(t)x_{12}^3(t)}{r(t)^5} dt, \quad \lambda_5(t) = \frac{3}{8} \int_0^t \frac{x_{12}^4(t)}{r(t)^5} dt \end{aligned} \quad (2.56)$$

Равенства (2.56) необходимо дополнить уравнениями в вариациях, уравнением (2.46) и провести их интегрирование от $t=0$ до $t=2\pi$ для разных значений параметров e , учитывая, что

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0.$$

Отображение T выглядит следующим образом [24]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} &= X(2\pi) \begin{pmatrix} q_0 - \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0 \partial p_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} - \frac{\partial S_4}{\partial p_0} + O_4 \\ p_0 + \frac{\partial S_3}{\partial q_0} - \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0^2} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial S_4}{\partial q_0} + O_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Здесь

$$S_3 = \Phi_3(q_0, p_0, 2\pi) \equiv 0, S_4 = \Phi_4(q_0, p_0, 2\pi),$$

O_4 – совокупность членов, порядок которых выше третьего.

2.3 Исследование устойчивости в нелинейной постановке

Запишем линеаризованное отображение T :

$$\begin{aligned} q_1 &= y_{11}q_0 + y_{12}p_0, & p_1 &= y_{21}q_0 + y_{22}p_0 \\ y_{ij} &= x_{ij}(2\pi) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Собственные значения уравнений в вариациях Пуанкаре являются корнями уравнения

$$\rho^2 - 2b\rho + 1 = 0 \quad (2b = y_{11} + y_{22}) \quad (2.59)$$

На рис. 2.1 приведен график зависимости $b(e)$. Из вида графика следует, что $|b(e)| < 1$ всюду, за исключением дискретного набора значений $\{e_j\} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$, такого, что $b(e_j) = \pm 1$.

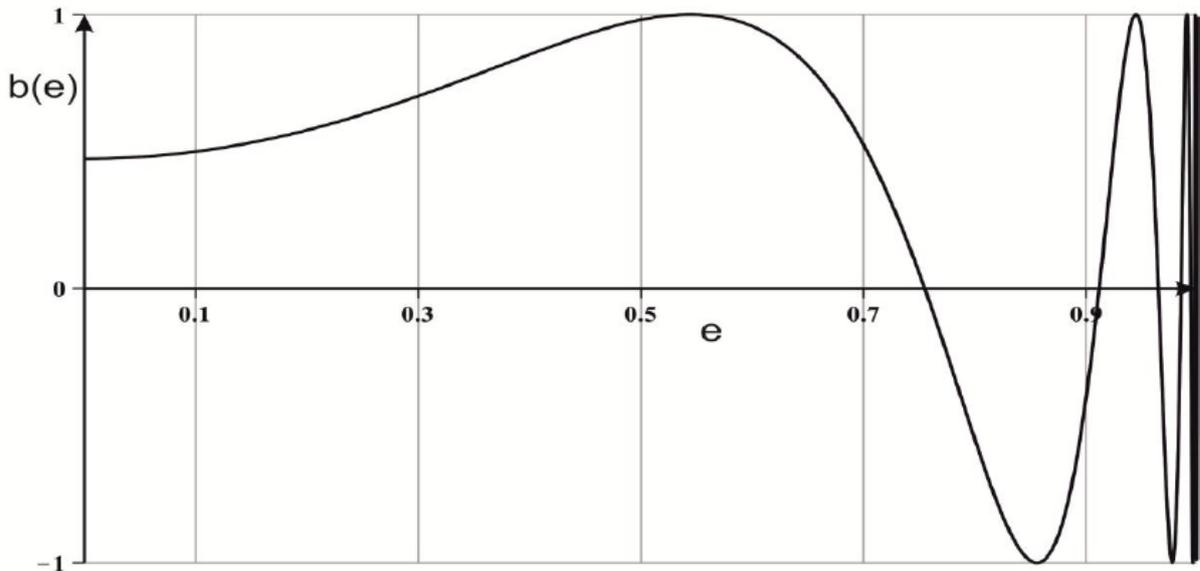


Рис. 2.1 График зависимости $b(e)$

Условия устойчивости и неустойчивости системы при $|b| \leq 1$ получены в работах [19,20] с дополнениями в [21] (в гиперболическом случае $|b| > 1$ положение равновесия неустойчиво). Приведем их краткое описание.

С помощью линейной замены переменных

$$q = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p = n_{21}Q + n_{22}P \quad (d = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} \neq 0) \quad (2.60)$$

отображение (2.58) приводим к вещественной нормальной форме. Тогда преобразование $Q_0, P_0 \rightarrow Q_1, P_1$ предстанет в виде

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} Q_0 - \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0 \partial P_0} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} - \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + O_4 \\ P_0 + \frac{\partial F_3}{\partial Q_0} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0^2} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_0} + O_4 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

где

$$\begin{aligned} F_3 &= d^{-1} \cdot S_3(n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0) \\ F_4 &= d^{-1} \cdot S_4(n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0) + \Delta \\ \Delta &= \frac{1}{2} \left[n_{11}n_{22} \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0} \right)^2 - 2n_{12}n_{21} \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0} \right) \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0} \right) + n_{11}n_{21} \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0} \right)^2 \right] \\ F_k &= \sum_{\nu+\mu=k} f_{\nu\mu} Q_0^\nu P_0^\mu \quad (k=3,4) \end{aligned}$$

Рассмотрим эллиптический случай, когда $|b(e)| \leq 1$. Тогда мультипликаторы ρ_1, ρ_2 являются комплексно сопряженными величинами с модулями, равными единице:

$$\rho_1 = \exp(i2\pi\lambda), \quad \rho_2 = \exp(-i2\pi\lambda), \quad \cos(2\pi\lambda) = b$$

Нормальная форма линейного отображения (2.58) задает поворот на угол $2\pi\sigma$, где

$$\sigma = \delta\lambda, \quad \delta = \text{sign}(y_{12} \sin(2\pi\lambda)),$$

при этом коэффициенты n_{ij} в нормализующем преобразовании (2.60) вычисляются по формулам

$$n_{11} = -\delta\chi y_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = \delta\chi[y_{11} - \cos(2\pi\lambda)], \quad n_{22} = -\chi \sin(2\pi\lambda), \quad \chi = |y_{12} \sin(2\pi\lambda)|^{-1/2}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{30} - f_{12}, \quad a_2 = f_{12} + 3f_{30}, \quad a_3 = f_{22} - f_{40} - f_{04}, \\ b_1 &= f_{21} - f_{03}, \quad b_2 = f_{21} + 3f_{03}, \quad b_3 = f_{13} - f_{31}, \\ k &= 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) + 6(a_1b_2 - a_2b_1) - 8a_2b_2 + 9\text{ctg}(3\pi\sigma)(a_1^2 + b_1^2) + 3\text{ctg}(\pi\sigma)(a_2^2 + b_2^2), \end{aligned}$$

$$k_0 = 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) - 8a_2b_2 + \sqrt{3}(a_2^2 + b_2^2),$$

$$k_1 = 2[4a_3 + 9a_1b_1 - a_2b_2 + 3\text{ctg}(\pi\sigma)(a_1a_2 - b_1b_2)],$$

$$k_2 = 8b_3 - 9(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + 6\text{ctg}(\pi\sigma)(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Следующие три теоремы полностью решают задачу устойчивости по формам третьего порядка малости, исключая вырожденные случаи, при которых нарушаются условия теорем.

Исследование устойчивости в вырожденных случаях следует проводить по формам более высокого порядка малости.

Теорема 2.11. [19-21,24] Предположим, что $|b| < 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $b \neq -1/2$, $b \neq 0$ (нерезонансный случай), то положение равновесия устойчиво при $k \neq 0$
- II. Если $b = -1/2$ (резонанс третьего порядка), то равновесие неустойчиво при $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Если $a_1^2 + b_1^2 = 0$, но при этом $k_0 \neq 0$, то имеет место устойчивость
- III. Если $b = 0$ (резонанс четвертого порядка), то положение равновесия устойчиво при $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ и неустойчиво, когда $|k| < \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ ■

Заметим, что условия теоремы 2.11 исключают из рассмотрения критические значения e_j , при которых $|b(e)| = 1$. Вычисления проводились на интервале $e \in [0,1)$. Показано, что в нерезонансном случае ($|b(e)| < 1$, $b \neq -1/2$, $b \neq 0$) коэффициент $k(e)$ отличен от нуля всюду (см. рис. 2.2). Поэтому положение тривиального равновесия устойчиво по Ляпунову.

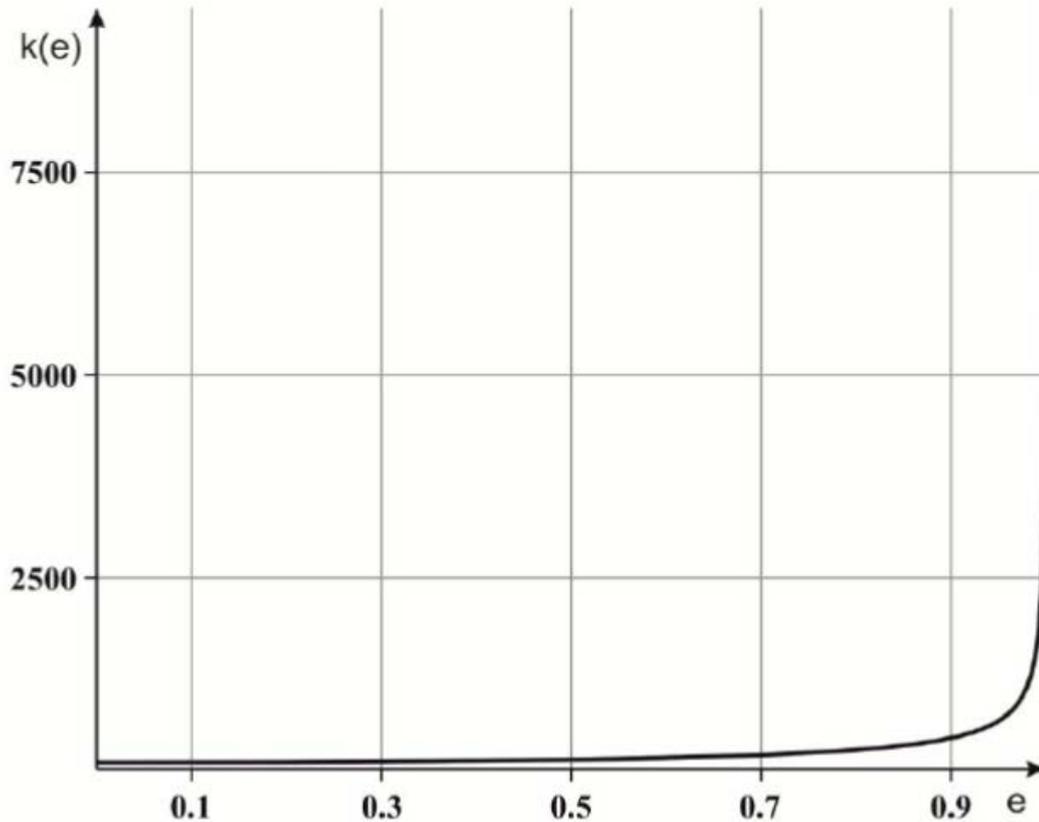


Рис. 2.2 График зависимости $k(e)$

При резонансе третьего порядка ($b(e) = -1/2$) имеем $a_1^2(e) + b_1^2(e) = 0$ при любых e , поскольку $S_3 \equiv 0$. Коэффициент $k_0(e)$ тождественно равен $k(e)$, поэтому $k_0(e) \neq 0$. Отсюда следует устойчивость тривиального равновесия.

Наконец, $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ на всем интервале $e \in [0,1)$, в частности, неравенство сохраняет силу и при $b(e) = 0$. Следовательно, на основе пункта III теоремы 2.11, равновесие устойчиво.

Таким образом, теорема 2.11 гарантирует устойчивость по Ляпунову тривиального равновесия для всех значений эксцентриситета e из интервала $e \in [0,1)$, если исключить из рассмотрения корни $\{e_j\}$ уравнения (2.47).

Рассмотрим теперь случай кратных мультипликаторов: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ (резонанс первого порядка, $b(e) = 1$ при $e = e_1, e_3, e_5, e_7, e_9$) и $\rho_1 = \rho_2 = -1$ (резонанс второго порядка, $b(e) = -1$, когда $e = e_2, e_4, e_6, e_8$).

Отметим, что отображение (2.60) будет тождественным, если $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Если $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$, то коэффициенты линейного преобразования (2.60) вычисляются в соответствии со следующей таблицей [19]:

$y_{12} \neq 0, y_{21} = 0$	$n_{11} = \sqrt{ y_{12} }, n_{12} = n_{21} = 0, n_{22} = \sqrt{ y_{12} } / y_{12}$
$y_{12} = 0, y_{21} \neq 0$	$n_{11} = 0, n_{12} = \sqrt{ y_{21} } / y_{21}, n_{21} = \sqrt{ y_{21} }, n_{22} = 0$
$y_{12} \neq 0, y_{21} \neq 0$	$n_{11} = y_{12}, n_{12} = 0, n_{21} = \text{sign}(b) - y_{11}, n_{22} = 1$

Теорема 2.12. [19-21,24] Предположим, что $b = 1$.

- I. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Тогда, если $S_3 \neq 0$, то положение равновесия $p = q = 0$ исходной системы неустойчиво. Если $S_3 \equiv 0$, а уравнение $\varphi(x) \equiv S_4(\sin(x), \cos(x)) = 0$ не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво.
- II. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$. Если $f_{30} \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. Если $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 < 0$, то имеет место устойчивость. В случае $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 > 0$ равновесие неустойчиво ■

Сформулируем аналогичную теорему для случая $b = -1$. Для этого введем дополнительные обозначения. Пусть

$$R_4(q_0, p_0) = 2S_4 - \frac{\partial S_3}{\partial q_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0}, \quad g = -8f_{40} + 12f_{30}f_{21} - 9f_{30}^2$$

Теорема 2.13. [19-21,24] Предположим, что $b = -1$.

- I. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Если уравнение $\psi(x) \equiv R_4(\sin(x), \cos(x)) = 0$ не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво.
- II. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$. Если $g > 0$, то положение равновесия неустойчиво, если $g < 0$, то устойчиво ■

Исследуем на устойчивость только две точки e_1, e_2 , отвечающие случаю кратных мультипликаторов: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ при $e = e_1$ и $\rho_1 = \rho_2 = -1$ при $e = e_2$. Анализ остальных точек $e = e_j$ ($j = 3, 4, \dots$) требует большой точности вычисления и представляет собой отдельную задачу.

Для повышения надежности вычислений необходимо повысить точность расчетов, удерживая большое число значащих цифр в представлении исследуемых точек. Однако, проводить вычисления корней уравнения $|b(e)| = 1$ затруднительно в силу их вырожденности:

$$\left. \frac{db(e)}{de} \right|_{e=e_j} = 0 \quad (2.62)$$

Поэтому величины $\{e_j\}$ будем рассматривать как корни уравнения (2.62). С этой целью положим

$$z_{11}(t) = \frac{dx_{11}(t)}{de}, \quad z_{12}(t) = \frac{dx_{12}(t)}{de}, \quad z_{21}(t) = \frac{dx_{21}(t)}{de}, \quad z_{22}(t) = \frac{dx_{22}(t)}{de},$$

рассматривая $z_{ij}(t)$ как новые функции времени, такие, что

$$\frac{db(e)}{de} = 0.5(z_{11}(2\pi) + z_{22}(2\pi))$$

Дифференциальные уравнения относительно $x_{ij}(t), z_{ij}(t)$ имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{11}(t) = x_{21}, \quad \dot{x}_{21}(t) = -\frac{x_{11}}{r^3(t)} \\ \dot{x}_{12}(t) = x_{22}, \quad \dot{x}_{22}(t) = -\frac{x_{12}}{r^3(t)} \\ \dot{z}_{11} = z_{21}, \quad \dot{z}_{21} = -\frac{z_{11}}{r^3(t)} - \frac{24 \cos E}{(1 - e \cos E)^4} x_{11} \\ \dot{z}_{12} = z_{22}, \quad \dot{z}_{22} = -\frac{z_{12}}{r^3(t)} - \frac{24 \cos E}{(1 - e \cos E)^4} x_{12} \\ \dot{E} = \frac{1}{1 - e \cos E} \end{array} \right.$$

$$x_{11}(0) = 1, x_{12}(0) = 0, x_{21}(0) = 0, x_{22}(0) = 1,$$

$$z_{11}(0) = z_{12}(0) = z_{21}(0) = z_{22}(0) = 0$$

Нулевые начальные данные по $z_{ij}(t)$ обусловлены независимостью начальных данных по $x_{ij}(t)$ от эксцентриситета.

Расчеты показывают, что корни уравнения

$$0.5(z_{11}(2\pi) + z_{22}(2\pi)) = 0 \quad (2.63)$$

простые, первые два корня, если удерживать 14 значащих цифр, имеют вид

$$e_1 = 0.54446890395124, e_2 = 0.855862554109814$$

Они удовлетворяют уравнению (2.63) с точностью $10E-11$ и с точностью $10E-8$ уравнениям $b(e) = 1, b(e) = -1$ соответственно.

Вычисления показывают, что $y_{12}(e_1) = y_{21}(e_1) = 0$, при этом функция $\varphi(x)$ из теоремы 2.12 удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & 377.762846455813(\sin x)^4 + 3.89313385769305 \cdot 10^{-8}(\sin x)^3 \cos x + \\ & + 8.46955261944630(\sin x)^2(\cos x)^2 + 3.34345010652353 \cdot 10^{-10} \sin x(\cos x)^3 + \\ & + 0.047472457175316(\cos x)^4 > 0, x \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Поэтому, на основании теоремы 2.12, тривиальное равновесие устойчиво по Ляпунову при $e = e_1$.

Рассмотрим второй корень $e = e_2$ уравнения (2.63). Для него имеем

$$y_{21}(e_2) = -0.000879508 \neq 0$$

Параметр g обращается в ноль как в случае $y_{12} = 0$, так и в случае $y_{12} \neq 0$. Поэтому теорема 2.13 не работает в силу вырождения, исследование устойчивости требует привлечение членов более высокого порядка малости.

Заметим, что исследование устойчивости, предпринятое в работе [17] для произвольных значений e , неверное. К примеру, нет анализа кривой $b = b(e)$, содержащей бесконечную последовательность экстремальных точек $b(e_j) = \pm 1, \{e_j\} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$, и, как следствие, нет выводов о неустойчивости равновесия в первом приближении при $e = e_j$. Нелинейный

анализ устойчивости отсутствует, хотя делаются выводы об устойчивости по Ляпунову (есть ссылка на монографию Бибикова Ю. Н. [22] без всякой проверки выполнения условий соответствующих теорем).

Глава 3. Исследование устойчивости равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова

3.1 Исследование устойчивости в первом приближении для различных значений коэффициента редукции

Рассмотрим задачу о движении пассивно гравитирующей точки C , находящейся в поле притяжения двух массивных тел одинаковой массы $m_1 = m_2$, излучающих световую энергию. В этом случае точка C испытывает, помимо гравитационного притяжения, световое давление со стороны тел m_1, m_2 . Предполагается, что точка C массы m движется вдоль оси Oz , проходящей через центр масс притягивающих тел, перпендикулярно плоскости их движения. Одномерное движение вдоль оси Oz возможно в силу симметрии задачи (см. рис. 1.1). Считается, что масса гравитирующей точки много меньше массы притягивающих тел, т.е. $m \ll m_1$, поэтому ее влиянием на движение основных тел можно пренебречь (ограниченная постановка задачи). Траектории движения основных тел относительно общего центра масс – кеплеровские эллипсы эксцентриситета e .

Если световое давление отлично от нуля, задачу о движении точки C будем называть фотогравитационной задачей Ситникова.

Получим уравнения движения точки массы m вдоль оси Oz . Пусть $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ – силы, действующие со стороны масс m_1, m_2 соответственно. Эти силы будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{F}_1 = f \frac{qmm_1}{R_1^2}, \quad \mathbf{F}_2 = f \frac{qmm_2}{R_2^2},$$

где $R_1 = R_2 = \sqrt{z^2 + r^2}$. Здесь q – коэффициент редукции массы частицы. Он меньше единицы, так как обусловлен воздействием светового потока на частицу C , а это воздействие направлено в сторону, прямо противоположную силе притяжения (см. [23]).

Тогда уравнение движения точки C будет таким

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Проектируем это уравнение на ось Oz и, учитывая, что

$$F_{jz} = -|F_{jz}|\cos\alpha = -|F_{jz}|\frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}, \quad |F_{1z}| = |F_{2z}| = f \frac{qmm_1}{z^2 + r^2},$$

имеем уравнение второго порядка

$$\ddot{z} = -\frac{\mu qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Здесь $\mu = f(m_1 + m_2)$, $2r$ – расстояние между притягивающими телами, зависящее от эксцентрической аномалии E по формуле

$$2r = a(1 - e \cos E) \quad (3.1)$$

Параметр a – большая полуось орбиты. Аномалия E зависит от времени t в силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - \tau),$$

где $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ – среднее движение притягивающих тел, τ – один из кеплеровских элементов орбиты, представляющий собой время прохождения перицентра.

Будем считать, без ограничения общности, что $f = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $a = 1$. Этого можно добиться с помощью выбора единиц измерения времени, расстояния и массы притягивающих тел. В этом случае $\mu = 1$, $n = 1$, поэтому период обращения основных тел будет равен 2π . Уравнения движения примут следующий вид:

$$\ddot{z} + \frac{q \cdot z}{(z^2 + r^2(t))^{3/2}} = 0 \quad (3.2)$$

Очевидно, что $z = 0$ – частное решение этого уравнения.

Аналогично п. 1.5 для исследования задачи устойчивости в первом приближении по z при любых значениях e из интервала $[0,1)$ будем рассматривать систему уравнений

$$\ddot{z} + \frac{8q}{(1 - e \cos E)^3} z = 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{E} = \frac{1}{1 - e \cos E}$$

Характеристическое уравнение системы (3.3) имеет вид

$$\rho^2 - 2b\rho + 1 = 0 \quad (2b = y_{11} + y_{22}), \quad (3.4)$$

при этом тривиальное равновесие $z = 0$ неустойчиво, если коэффициент $b(e)$, представляющий собой половину следа матрицы монодромии $Z(2\pi)$, удовлетворяет неравенству $|b(e)| > 1$, устойчиво при $|b(e)| < 1$. Если $|b(e)| = 1$, то мультипликаторы системы являются вещественными, кратными, равными по модулю единице. В этом случае положение равновесия неустойчиво по степенному закону, если элементарные делители непростые, устойчиво в случае простых делителей.

Для проведения анализа устойчивости тривиального равновесия численно были получены графики функций $b(e)$, определяющие области и границы устойчивости.

В приложении 1 приведены графики функций $b(e)$ для различных значений коэффициента редукции q . Как видно из рис. 1 – 9, при убывании q функция $b(e)$ имеет характер колебаний с множеством точек экстремиситета, соответствующих экстремумам функции. Анализ устойчивости при $q = 1$ был представлен в п. 1.5. В дополнение к проведенным исследованиям стоит отметить, что точки $b(e) = -1$ требуют дополнительного анализа на наличие областей, отвечающих условию $b(e) < -1$. При выполнении этого условия тривиальное равновесие будет неустойчивым. В случае $|b(e)| < 1$ положение равновесия устойчиво в линейном приближении. При выполнении равенства $|b(e)| = 1$ вывод об устойчивости в линейном приближении делается по элементарным делителям.

Что касается характера изменения колебаний функции $b(e)$, то при уменьшении параметра q наблюдается смещение графика колебаний в сторону особой точки $e=1$. При этом начальное значение функции $b(e)$ варьируется в пределах интервала $[-1;1]$. При дальнейшем уменьшении коэффициента редукции функция $b(e)$ становится монотонной на интервале от нуля до единицы. Характер поведения функции $b(e)$ в окрестности $e=1$ требует отдельного анализа.

В приложении 1 представлены графики $b(e)$ (рис. 1 – 17) при параметре $q=1, 0.9, \dots, 0.2, 0.19, 0.18, \dots, 0.1$.

Как видно из рис. 1 – 8 ($q=1; 0.9; 0.8; 0.7; 0.6; 0.5; 0.4; 0.3$), функция $b(e)$, значения которой принадлежат интервалу $[-1,1]$, совершает колебания, сгущающиеся по мере приближения к предельному значению $e=1$. При этом минимальное значение этой функции равно (-1) . Как было отмечено выше (см. классический случай $q=1$), численный счет не может выявить малых областей изменения e , в которых функция $b(e)$ принимает значения, меньшие (-1) . На существование таких областей указывает строгий анализ поведения этой функции (Бардин Б.С., не опубликованные исследования). Поэтому критические значения e , в которых график функции $b(e)$ «касается» прямой $b=-1$, требуют дополнительного исследования.

На рис. 9 – 13 ($q=0.2; 0.19; 0.18; 0.17; 0.16$) отчетливо видны области изменения e , для которых $b(e) < -1$, при этом в остальных областях изменения параметра e график функции $b(e)$ принадлежит области $[-1,1]$, сохраняя колебательный характер в окрестности точки $e=1$.

В случаях $q=0.15; 0.14; 0.11; 0.1$ (рис. 14 – 17) функция $b(e)$ монотонно убывает, принимая отрицательные значения, меньшие минус единицы, при $e > e^*$, где e^* – корень уравнения $b=-1$. Отметим, что малая окрестность точки $e=1$ требует отдельного исследования на предмет

сохранения колебаний, при которых функция $b(e)$ принимает значения, равные единице.

Окончательный вывод исследования устойчивости в первом приближении состоит в следующем. Для коэффициента редукции q из диапазона $[0.3 - 1.0)$ имеем устойчивость, за исключением критических значений e , при которых $|b(e)|=1$. При e , удовлетворяющих равенству $b(e)=1$, равновесие неустойчиво (непростые элементарные делители). Случай $b(e)=-1$ требует отдельного рассмотрения в силу приближенного характера вычисления корней этого уравнения: возможно появление достаточно малых областей изменения e , точность расчета которых превышает точность вычислений, и для которых $b(e)<-1$. В этих гипотетических областях равновесие будет неустойчивым по первому приближению.

Случай $q \in [0.16, 0.3)$ характеризуется тем, что отчетливо видны области изменения e , для которых $b(e)<-1$, при этом график функции $b(e)$ сохраняет колебательный характер в окрестности точки $e=1$. Поэтому имеем устойчивость в первом приближении при $e \in [0, e^*)$, где e^* – первый корень уравнения $b=-1$. Равновесие неустойчиво при $e \in (e^*, e^{**})$, где e^{**} – второй корень уравнения $b=-1$. Дальнейший вывод об устойчивости зависит от характера колебаний функции $b(e)$ в окрестности точки $e=1$, поэтому необходимы дальнейшие вычисления.

В случае $q \in (0, 0.16)$ имеем устойчивость при $e \in [0, e^*)$, где e^* – корень уравнения $b(e)=-1$. При $e > e^*$ положение равновесия неустойчиво по первому приближению, за исключением малой окрестности точки $e=1$, требующей отдельного анализа.

Таким образом, в данном разделе представлен качественный анализ поведения функции половины следа матрицы монодромии на интервале $e \in [0, 1)$ и показано, какие области изменения данной функции отвечают

условиям устойчивости или неустойчивости. Окрестность особой точки $e = 1$ требует дополнительного анализа.

Для вывода об устойчивости системы в нелинейном приближении воспользуемся алгоритмами, изложенными в работах [19-21].

3.2 Исследование устойчивости в нелинейной постановке для различных значений коэффициента редукции

В дополнение к выводам об устойчивости в линейном приближении, изложенным в п. 3.1, стоит отметить, что при выполнении условия $b(e) < -1$ тривиальное положение равновесия будет неустойчивым не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи [24]. Если $|b(e)| \leq 1$, то для строгого решения вопроса об устойчивости недостаточно анализа линейного приближения.

Вывод об устойчивости при выполнении условия $|b(e)| < 1$ можно сделать согласно теореме 2.11.

Что касается остальных значений эксцентриситета e , отвечающих условиям $b(e) = \pm 1$, анализ устойчивости требует уточнения.

В приложении 2 приведены графики функции $k(e)$ при $q = 0.9, 0.8, \dots, 0.2$. По данным графикам можно сделать следующие выводы.

Согласно теореме 2.11 для коэффициентов редукции $q = 0.9, 0.8, \dots, 0.2$ при $b \neq -1/2, b \neq 0$ положение равновесия будет устойчивым в строгой нелинейной постановке, так как $k(e) \neq 0$.

При резонансе третьего порядка ($b(e) = -1/2$) имеем $a_1^2(e) + b_1^2(e) = 0$ при любых e , поскольку $S_3 \equiv 0$. Коэффициент $k_0(e)$ тождественно равен $k(e)$, поэтому $k_0(e) \neq 0$. Отсюда следует устойчивость тривиального равновесия.

Неравенство $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ выполняется на всем интервале $e \in [0, 1)$. В частности, неравенство сохраняет силу и при $b(e) = 0$. Следовательно, на основе пункта III теоремы 2.11, равновесие устойчиво.

Таким образом, теорема 2.11 гарантирует устойчивость по Ляпунову тривиального равновесия для всех значений эксцентриситета e из интервала $e \in [0, 1)$, если исключить из рассмотрения корни $\{e_j\}$ уравнения $|b(e)| = 1$, а также области по эксцентриситету, удовлетворяющие неравенству $b(e) < -1$.

Глава 4. Исследование резонансных колебаний в фотогравитационной задаче Ситникова

4.1 Метод усреднения в многочастотной системе при резонансе

Ниже изложена необходимая теоретическая база для дальнейших исследований.

Рассматривается явление резонанса в многочастотных системах вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y) & X(x, y + 2\pi) = X(x, y) \\ \dot{y} = \omega(x) + \varepsilon Y(x, y) & Y(x, y + 2\pi) = Y(x, y) \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь x – n -мерный вектор медленных переменных, а y – m -мерный вектор быстрых переменных. Усреднение правых частей системы можно проводить как по времени

$$\bar{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \varphi(t)) dt, \quad (4.2)$$

считая медленные переменные x параметрами, а быстрые – линейными функциями времени $\varphi(t) = \omega t + y_0$ в силу невозмущенных уравнений, так и по быстрым переменным y_j , вычисляя кратные интегралы от правых частей на периоде изменения переменных y_j :

$$X^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(x, y) dy_1 \dots dy_m$$

Эти две процедуры усреднения дают один и тот же результат, если частоты ω_j линейно независимы.

Рассмотрим резонансный случай, когда частоты ω_j вступают в резонансные отношения вида

$$\lambda_1 \omega_1(x) + \dots + \lambda_m \omega_m(x) = 0, \quad (4.3)$$

где m – размерность вектора y (или число частот), λ_j – целые числа.

При резонансе временное и пространственное средние не совпадают. Помимо этого временное среднее терпит разрыв и зависит от вектора

начальных условий y_0 . Это значит, что вычисление среднего недостоверно по причине неоднозначного его поведения в окрестности резонанса.

Резонанс (4.3) ведет к разрыву временного среднего.

Временное среднее терпит разрыв при резонансе (4.3): $\bar{X}(x, y_0)$ меняется скачком на величину $2\text{Re}\left[X^{(\lambda)}(x)e^{i(\lambda, y_0)}\right]$, как только система выходит на резонанс. В дополнение к этому, значение усредненной величины зависит от вектора начальных условий y_0 , что ведет к недопустимой зависимости результатов усреднения от вида траектории быстрых движений $y = \omega t + y_0$ невозмущенного движения.

Следует отметить, что не любое равенство вида (4.3) ведет к разрыву среднего. Так, если окажется, что коэффициент $X^{(\lambda)}(x)$ равен нулю, то резонанс $(\lambda, \omega) = 0$ не проявляет себя. Вектор частот $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ будет резонансным в первом приближении метода усреднения, если выполняются два условия:

- а) равенство (4.3) справедливо для некоторых целочисленных значений λ_j ,
- б) временное среднее (4.2) терпит разрыв при $(\lambda, \omega) = 0$.

Опишем процедуру усреднения при резонансе (4.3), когда частоты ω_j постоянны. Обычная схема усреднения, устраняющая все гармоники вида $X^{(k)}(x)\text{exp}i(k, y)$ некорректна по причине медленного изменения «резонансной» гармоники $X^{(\lambda)}(x)\text{exp}i(\lambda, y)$. Для устранения этих проблем ограничимся рассмотрением резонансной окрестности, которую мы определим с помощью резонансной расстройки

$$\Delta = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_m,$$

полагая ее малой величиной порядка ε .

Итак, считаем $\Delta \sim \varepsilon$. В частности, этой области принадлежит нулевое значение Δ , что отвечает случаю строгого выполнения равенства (4.3).

Существенной особенностью поведения системы в окрестности резонанса является медленное изменение со временем величины

$$\theta = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m \quad (4.4)$$

Действительно, вычислим производную по времени от θ в силу уравнений (4.1). Получим

$$\dot{\theta} = \lambda_1 \dot{y}_1 + \dots + \lambda_m \dot{y}_m = \Delta + \varepsilon (\lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_m Y_m) \sim \varepsilon$$

Поэтому θ следует рассматривать как новую независимую переменную, аналогичную медленным аргументам x_j .

Выполним преобразование

$$x \rightarrow x, y \rightarrow (\theta, y_2, \dots, y_m),$$

тождественное по всем переменным задачи, за исключением y_1 , которое заменяется на θ . Из формулы (4.4) следует, что

$$y_1 = \frac{\theta - \lambda_2 y_2 - \dots - \lambda_m y_m}{\lambda_1}$$

Теперь запишем исходные уравнения (4.1) в новых переменных:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X \left(x, \lambda_1^{-1} (\theta - (\bar{\lambda}, \bar{y})), \bar{y} \right), \\ \dot{\theta} &= \Delta + \varepsilon \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_k \left(x, \lambda_1^{-1} (\theta - (\bar{\lambda}, \bar{y})), \bar{y} \right), \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{\omega} + \varepsilon \bar{Y} \left(x, \lambda_1^{-1} (\theta - (\bar{\lambda}, \bar{y})), \bar{y} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\bar{y} = (y_2, \dots, y_m), \bar{Y} = (Y_2, \dots, Y_m), \bar{\lambda} = (\lambda_2, \dots, \lambda_m), \bar{\omega} = (\omega_2, \dots, \omega_m),$$

$(\bar{\lambda}, \bar{\omega})$ - скалярное произведение векторов.

Система уравнений (4.5) замкнута относительно переменных x, θ, \bar{y} и не имеет резонансов, поскольку вектор частот $\bar{\omega}$ не является резонансным. Она содержит медленные переменные в количестве $(n+1)$ и $(m-1)$ быстрых переменных. Это значит, что мы можем усреднить ее в нерезонансном случае с обычной гарантией точности приближения.

Более подробно остановимся на одном частном случае, когда векторные функции $Y_k(x, y)$ равны нулю при $k = 1, \dots, m$. Такое возможно, например, когда медленными переменными задачи являются константы интегрирования, входящие в общее решение невозмущенной системы. Тогда исследуемая система уравнений приводится к стандартному по Боголюбову виду, правая часть которой явно зависит от времени. Если зависимость от времени имеет квазипериодический характер с конечным набором частот $\omega_1, \dots, \omega_m$, то величины $y_j = \omega_j t$ будут быстрыми переменными задачи, удовлетворяющими уравнениям $\dot{y}_j = \omega_j$.

При резонансе $\lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_m = 0$ система уравнений (4.5) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X\left(x, \lambda_1^{-1}(\theta - (\bar{\lambda}, \bar{y})), \bar{y}\right), \\ \dot{\theta} &= \Delta, \quad \dot{\bar{y}} = \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Усредненные уравнения запишутся в форме

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u, \mathcal{G}), \quad \mathcal{G} = \varepsilon \delta t \quad (4.6)$$

Эти уравнения зависят от резонансной фазы $\mathcal{G} = \varepsilon \delta t$, изменяющейся со временем по линейному закону, поэтому они относятся к классу систем с медленно меняющимся параметром \mathcal{G} .

В случае, когда резонансное равенство выполняется строго, расстройка Δ равна нулю, поэтому усредненные уравнения примут наиболее простой вид

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u, 0)$$

Они часто допускают интегрирование в квадратурах, поэтому удастся подробно исследовать поведение усредненной системы при строгом резонансе.

Однако в случае приближенного выполнения резонансного равенства величина $\Delta = \varepsilon \delta$ отлична от нуля, поэтому исследование колебаний становится более сложным. Очевидно, что в этом случае решения системы уравнений будут отличаться от решений тех же самых уравнений, но имеющих фиксированное значение \mathcal{G} . Здесь можно воспользоваться методом

усреднения после введения медленного времени $\tau = \sqrt{\varepsilon} \delta t$. Тогда уравнения (4.6) примут вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} \bar{X}(u, \sqrt{\varepsilon} \tau)$$

Усредним их по τ , получим

$$\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} \bar{\bar{X}}(v), \quad \bar{\bar{X}}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{X}(v, \tau) d\tau$$

Она совпадает, с точностью до замены ε на $\sqrt{\varepsilon}/\delta$ с усредненной системой нерезонансного случая.

Таким образом, в ε - окрестности резонанса движения системы имеют ещё нерезонансный характер, хотя амплитуда колебаний возрастает в $\varepsilon^{-1/2}$ раз, а точность приближения уменьшается в $\sqrt{\varepsilon}$ раз. Дальнейшее уменьшение окрестности резонанса, сопровождающееся уменьшением δ , делает усреднение по τ незаконным по причине быстрого изменения v как функции τ (δ стоит в знаменателе правой части). Существенно резонансные колебания в таких системах наблюдаются в ε^2 - окрестности резонанса.

4.2 Исследование колебаний в фотогравитационной задаче Ситникова, постановка задачи и основные определения

Вернемся к задаче о движении пассивно гравитирующей точки C , находящейся в поле притяжения двух массивных тел одинаковой массы $m_1 = m_2$, излучающих световую энергию.

Уравнение движения точки массы m вдоль оси Oz имеет следующий вид:

$$\ddot{z} = -\frac{\mu q z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Здесь q – коэффициент редукции массы частицы, $\mu = f(m_1 + m_2)$, $2r$ – расстояние между притягивающими телами, зависящее от эксцентрической аномалии E по формуле

$$2r = a(1 - e \cos E) \quad (4.7)$$

Параметр a – большая полуось орбиты. Аномалия E зависит от времени t в силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - \tau),$$

где $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ – среднее движение притягивающих тел, τ – один из кеплеровских элементов орбиты, представляющий собой время прохождения перицентра.

Будем считать, без ограничения общности, что $f = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $a = 1$.

Уравнения движения примут следующий вид:

$$\ddot{z} + \frac{q \cdot z}{(z^2 + r^2(t))^{3/2}} = 0 \quad (4.8)$$

$z = 0$ – частное решение этого уравнения.

4.3 Нахождение параметрического резонанса для системы первого приближения

Разложим второе слагаемое уравнения (4.8) в ряд Тейлора относительно

z

$$\ddot{z} + \frac{q}{r^3} z - \frac{3q}{2r^5} z^3 + O(z^5) = 0$$

С точностью до членов четвертого порядка относительно z имеем

$$\ddot{z} + \frac{q}{r^3} z - \frac{3q}{2r^5} z^3 = 0 \quad (4.9)$$

Используя уравнение (4.7), разложим сомножители $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ в ряд относительно эксцентриситета e

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} \left(8 + (24 \cos E)e + (48 \cos^2 E)e^2 + (80 \cos^3 E)e^3 + \dots \right)$$

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{a^5} \left(32 + (160 \cos E)e + (480 \cos^2 E)e^2 + (1120 \cos^3 E)e^3 + \dots \right)$$

Используя разложение в ряд, получим следующие выражения для $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{a^3} \left(8 + 24e \cos t + e^2 (12 + 36 \cos 2t) + e^3 (27 \cos t + 53 \cos 3t) \right) \\ \frac{1}{r^5} &= \frac{1}{a^5} \left(32 + 160e \cos t + e^2 (160 + 320 \cos 2t) + e^3 (540 \cos t + 580 \cos 3t) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Учитывая, что параметр $a=1$ и предполагая, не ограничивая общности, что $\tau = 0$, запишем уравнение (4.9) в следующем виде

$$\ddot{z} + q \cdot \omega^2 z = q \cdot g(t)z + q \cdot h(t)z^3 \quad (4.11)$$

где

$$\omega = \sqrt{(8 + 12e^2)},$$

$$g(t) = -\left(24e \cos t + e^2 (36 \cos 2t) + e^3 (27 \cos t + 53 \cos 3t) \right),$$

$$h(t) = (48 + 240e \cos t + e^2(240 + 480 \cos 2t) + e^3(810 \cos t + 870 \cos 3t))$$

Оставляя члены до второго порядка относительно z и относительно e , из (4.11) получим следующее уравнение

$$\ddot{z} + 8q(1 + 3e \cos t)z = 0 \quad (4.12)$$

Положим $w^2 = 8q$. Тогда уравнение (4.12) примет вид

$$\ddot{z} + w^2(1 + 3e \cos t)z = 0 \quad (4.13)$$

Рассмотрим задачу о нахождении резонанса в уравнении (4.13). Здесь w – собственная частота колебаний, а параметрическая частота колебаний равна единице (сомножитель перед переменной t). С помощью стандартной замены переменных

$$z = x \cos y_1, \quad \dot{z} = -xw \sin y_1$$

это уравнение сводится к одночастотной неавтономной системе. Вводим новую быструю переменную $y_2 = t$, исключая время t из правой части. Тогда уравнения колебаний предстанут в виде двухчастотной автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3ewx \sin y_1 \cos y_1 \cos y_2 \\ \dot{y}_1 = w + 3ew \cos^2 y_1 \cos y_2 \\ \dot{y}_2 = 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

Вычислим временное среднее от правой части уравнения для медленной переменной x вдоль быстрых решений $y_1 = wt + y_{10}$, $y_2 = t$ невозмущенной задачи

$$\bar{X}(x, y_{10}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 3wx \sin(wt + y_{10}) \cos(wt + y_{10}) \cos t \, dt$$

Проводя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \bar{X}(x, y_{10}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3wx}{4T} & \left(\frac{4w \cos 2y_{10} + (1 - 2w) \cos(2(wT + y_{10}) + T)}{(2w + 1)(2w - 1)} \right) - \\ & - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3wx}{4T} \left(\frac{(1 + 2w) \cos(2(wT + y_{10}) - T)}{(2w + 1)(2w - 1)} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Учитывая положительность w , можно сделать вывод, что при $w = \frac{1}{2}$ присутствует неопределенность типа $0/0$, которая ведет к разрыву среднего в окрестности резонанса. Этот резонанс представляет собой главный параметрический резонанс. Других резонансов, проявляющих себя в первом приближении метода усреднения, нет.

Найдем параметр q , соответствующий данному резонансу.

$$q = \frac{w^2}{8} = \frac{1}{32}.$$

Итак, мы исследовали уравнение на наличие резонансов в первом приближении и нашли коэффициент редукции массы частицы q , при котором присутствует резонанс.

4.4 Нахождение параметрического резонанса для системы в нелинейном приближении

Рассмотрим уравнение (4.11):

$$\ddot{z} + q \cdot \omega^2 z = q \cdot g(t)z + q \cdot h(t)z^3.$$

Предположим, что величина z является малой величиной порядка ε .
Делая замену переменных

$$z = \varepsilon y, \quad \dot{z} = \varepsilon \dot{y},$$

где $y \sim 1$, после чего сокращая левую и правую часть уравнения на ε , получим

$$\ddot{y} + q\omega^2 y = qg(t)y + qh(t)\varepsilon^2 y^3$$

$$\ddot{y} + q\omega^2 y = q(-24e \cos t - 36e^2 \cos 2t)y + q(48 + 240e \cos t)\varepsilon^2 y^3$$

Положим $\varepsilon^2 = e$. С точностью до членов второго порядка малости по e будем иметь:

$$\ddot{y} + 8qy = e \left((-24q \cos t)y + 48qy^3 \right).$$

Пусть $w^2 = 8q$. Тогда уравнение будет иметь следующий вид:

$$\ddot{y} + w^2 y = e \left((-24q \cos t)y + 48qy^3 \right) \quad (4.16)$$

Исследуем параметрические колебания этого уравнения. Преобразуем (4.16), используя замену переменных Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} y &= x_1 \cos wt - x_2 \sin wt \\ \dot{y} &= x_1 w \sin wt - x_2 w \cos wt \end{aligned} \quad (4.17)$$

В новых переменных x_1, x_2 уравнение (4.16) примет вид стандартной по Боголюбову системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{e \sin wt}{w} \left((-24q \cos t)(x_1 \cos wt - x_2 \sin wt) + 48q(x_1 \cos wt - x_2 \sin wt)^3 \right) \\ \dot{x}_2 = -\frac{e \cos wt}{w} \left((-24q \cos t)(x_1 \cos wt - x_2 \sin wt) + 48q(x_1 \cos wt - x_2 \sin wt)^3 \right) \end{cases} \quad (4.18)$$

Эту систему можно рассматривать как систему с двумя быстрыми переменными t и wt . Таким образом, уравнение (4.16) эквивалентно следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{e \sin y_1}{w} \left((-24q \cos y_2)(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1) + 48q(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1)^3 \right) \\ \dot{x}_2 = -\frac{e \cos y_1}{w} \left((-24q \cos y_2)(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1) + 48q(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1)^3 \right) \\ \dot{y}_1 = w \\ \dot{y}_2 = \gamma \end{cases} \quad (4.19)$$

при условии, что начальные значения быстрых переменных y_1, y_2 равны нулю $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$. Здесь $\gamma = 1$. Вектор частот будет таким: $\bar{w} = (w, \gamma) = (w, 1)$. Система (4.19) содержит две медленные и две быстрые переменные.

Вычисляя временное среднее от правой части уравнений (4.18), получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = e \frac{18qv_2(4w^2 - 1)}{w(2w - 1)(2w + 1)} (v_1^2 + v_2^2) \\ \dot{v}_2 = -e \frac{18qv_1(4w^2 - 1)}{w(2w - 1)(2w + 1)} (v_1^2 + v_2^2) \end{cases} \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что при $w = 0, \pm \frac{1}{2}$ числители и знаменатели правых частей системы (4.20) обращаются в ноль, хотя прохождение параметра w через значения $\pm \frac{1}{2}$ не ведет к разрыву временного среднего, поскольку $4w^2 - 1 \equiv (2w - 1)(2w + 1)$. Тем не менее, частоты $w = \pm \frac{1}{2}$ являются резонансными, так как вид усредненных уравнений резко меняется, когда w принимает указанные значения. Отбрасывая нулевые и отрицательные значения частоты w , получим резонансные значения частоты собственных колебаний:

$$w = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $q = \frac{1}{32}$. Заметим, что коэффициент q получился таким же, как и в случае линейного приближения.

4.5 Исследование системы в нелинейном приближении при строгом резонансе и в окрестности резонанса

Исследуем колебания системы при резонансе $w \approx \frac{1}{2}$. В этом случае разность частот $\Delta = w - \frac{1}{2}\gamma$ есть величина порядка ε , если $\delta \approx 1$: $\Delta = \varepsilon\delta$.

Вводим новую медленную переменную $\theta = y_1 - \frac{1}{2}y_2$. Выражая отсюда $y_1 = \theta + \frac{1}{2}y_2$, получим новый вид уравнений (4.19):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -e \frac{\sin\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right)}{\frac{1}{2} + \Delta} (-24q \cos y_2) \left(x_1 \cos\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right) - x_2 \sin\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right) \right) - \\ \quad - e \frac{\sin\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right)}{\frac{1}{2} + \Delta} 48q \left(x_1 \cos\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right) - x_2 \sin\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right) \right)^3 \\ \dot{x}_2 = -e \frac{\cos\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right)}{\frac{1}{2} + \Delta} (-24q \cos y_2) \left(x_1 \cos\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right) - x_2 \sin\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right) \right) - \\ \quad - e \frac{\cos\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right)}{\frac{1}{2} + \Delta} 48q \left(x_1 \cos\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right) - x_2 \sin\left(\theta + \frac{1}{2}y_2\right) \right)^3 \\ \dot{\theta} = e\delta \\ \dot{y}_2 = 1 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Система уравнений (4.21) замкнута относительно переменных x_1, x_2, θ, y_2 и не имеет резонансов, поскольку вектор частот $\bar{w} = (\gamma) = (1)$ не является резонансным. Она содержит три медленных и одну быструю переменные. Это значит, что мы можем усреднить ее как в нерезонансном случае с обычной гарантией точности приближения.

Усредняем уравнения (4.21) по быстрой переменной y_2 на периоде 2π :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{12eq}{1+2\Delta} (3u_1^2 u_2 + 3u_2^3 - u_2 + 2u_1 \sin \theta \cos \theta + 2u_2 (\cos \theta)^2) \\ \dot{u}_2 = \frac{12eq}{1+2\Delta} (2u_1 \cos^2 \theta - 2u_2 \sin \theta \cos \theta - u_1 - 3u_1^3 - 3u_1 u_2^2) \end{cases} \quad (4.22)$$

где $\theta = e\delta t$. Таким образом, колебания в окрестности резонанса $w \approx \frac{1}{2}$ описываются уравнениями (4.22), содержащими медленно меняющийся со временем параметр θ .

Исследуем поведение решений системы уравнений (4.22), когда частота собственных колебаний $w = \frac{1}{2}$ строго. Тогда величина δ равна нулю и $\theta = e\delta t = 0$. Усредненные уравнения (4.22) примут более простой вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 12eq (3u_1^2 u_2 + 3u_2^3 + u_2) \\ \dot{u}_2 = -12eq (3u_1 u_2^2 + 3u_1^3 - u_1) \end{cases} \quad (4.23)$$

Для простоты введем обозначение $eq = \varepsilon$. Тогда система (4.23) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 12\varepsilon (3u_1^2 u_2 + 3u_2^3 + u_2) \\ \dot{u}_2 = -12\varepsilon (3u_1 u_2^2 + 3u_1^3 - u_1) \end{cases} \quad (4.24)$$

Легко видеть, что уравнения (4.24) можно записать в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{q} = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q} \quad (4.25)$$

если переменную u_1 считать обобщенной координатой q , а u_2 – обобщенным импульсом p .

Заметим, что в уравнениях Гамильтона переменная q выступает в качестве обобщенной координаты и не имеет ничего общего с коэффициентом редукции массы частицы.

Функция Гамильтона $H(q, p)$ будет такой:

$$H = 9(p^2 + q^2)^2 + 6(p^2 - q^2)$$

Учитывая, что функция Гамильтона не зависит явно от времени t , приходим к выводу, что уравнения (4.25) допускают первый интеграл $H(q, p) = \text{const}$

В исходных переменных этот интеграл имеет форму

$$3(u_1^2 + u_2^2)^2 + 2(u_2^2 - u_1^2) = C \quad (4.26)$$

Для получения параметрического представления фазовых кривых, описываемых интегралом (4.26), положим

$$u_1 = \pm\sqrt{v}, \quad u_2 = \pm\sqrt{w}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (4.26). Получим квадратное уравнение относительно v .

$$v^2 + \left(2w - \frac{2}{3}\right)v + w^2 + \frac{2}{3}w - \frac{1}{3}C = 0$$

Решение уравнения будет таким:

$$v_{1,2} = -\left(w - \frac{1}{3}\right) \pm \frac{1}{3}\sqrt{1 - 12w + 3C}$$

На рисунке 4.1 представлен фазовый портрет резонансных колебаний, рассчитанный на основе параметрического представления кривых.

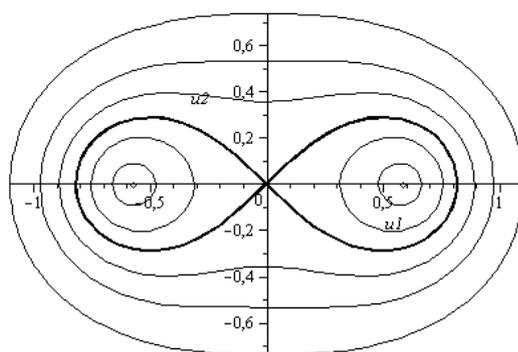


Рис. 4.1. Фазовый портрет резонансных колебаний

Сепаратриса колебаний выделена жирным черным цветом, она проходит через неустойчивое положение равновесия $u_1 = u_2 = 0$, отвечающее константе

$C=0$. В окрестности стационарных значений $u_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $u_2 = 0$,

соответствующих константе $C = -\frac{1}{3}$, изображающая точка описывает

замкнутые кривые. Амплитуда колебаний растет с приближением константы C к нулю, поэтому замкнутые кривые заполняют всю область, ограниченную сепаратрисой. Дальнейшее возрастание константы C , когда постоянная интегрирования принимает положительные значения, ведет к появлению замкнутых периодических решений, охватывающих начало координат, сепаратрису и движения вблизи равновесия $u_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $u_2 = 0$.

Заметим, что положение равновесия $u_1 = u_2 = 0$ является устойчивым при $\varepsilon = 0$. Однако при сколь угодно малом ε , отличным от нуля, это равновесие неустойчиво, что можно легко проверить, используя теорему об устойчивости по первому приближению. Это значит, что в системе наблюдается явление параметрического резонанса, то есть нарастание амплитуды колебаний при малых возмущениях в начальных условиях, выводящих систему из равновесия. Амплитуда таких колебаний – величина порядка единицы, независимо от величины малого параметра ε .

Теперь проведем исследования в окрестности резонанса $w = \frac{1}{2}$.

Уравнения (4.22) допускают неавтономный первый интеграл. Но пользоваться им неудобно, поэтому исследование окрестности резонанса $w = \frac{1}{2}$ будем проводить в переменных амплитуда (α) – фаза (β). В этом случае фазовые переменные уравнения (4.16) имеют следующее представление:

$$y = \alpha \cos \beta, \dot{y} = -\alpha w \sin \beta$$

Для простоты в уравнении (4.16) положим $\varepsilon = \varepsilon q$. Тогда оно примет вид:

$$\ddot{y} + w^2 y = \varepsilon \left((-24 \cos t) y + 48 y^3 \right) \quad (4.27)$$

Уравнение движения в новых переменных будет таким:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos t) \alpha \cos \beta + 48 \alpha^3 \cos^3 \beta \right) \sin \beta \\ \dot{\beta} = w - \frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos t) \cos \beta + 48 \alpha^2 \cos^3 \beta \right) \cos \beta \end{cases} \quad (4.28)$$

Вводя новую быструю переменную $y_1 = t$, получаем многочастотную систему

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos y_1) \alpha \cos \beta + 48 \alpha^3 \cos^3 \beta \right) \sin \beta \\ \dot{\beta} = w - \frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos y_1) \cos \beta + 48 \alpha^2 \cos^3 \beta \right) \cos \beta \\ \dot{y}_1 = 1 \end{cases} \quad (4.29)$$

Для преобразования этой системы в окрестности резонанса $w = \frac{1}{2}$

введем медленную фазу $\psi = \beta - \frac{1}{2} y_1$. После подстановки быстрой переменной

$\beta = \psi + \frac{1}{2} y_1$ в систему (4.29) получим

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos y_1) \alpha \cos \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) + 48 \alpha^3 \cos^3 \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) \right) \sin \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) \\ \dot{\psi} = \Delta - \frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos y_1) \cos \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) + 48 \alpha^2 \cos^3 \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) \right) \cos \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) \\ \dot{y}_1 = 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

После последующего усреднения по времени вдоль быстрых движений $y_1 = t$, получим усредненные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = 6 \frac{\varepsilon}{w} v_1 \sin 2v_2 \\ \dot{v}_2 = \Delta + 6 \frac{\varepsilon}{w} (\cos 2v_2 - 3v_1^2) \end{cases} \quad (4.31)$$

Здесь v_1, v_2 имеют смысл переменных α, ψ соответственно, $\Delta = w - \frac{1}{2} -$ резонансная расстройка, порядок малости которой равен ε : $\Delta = \varepsilon\delta$.

Перейдем к полярным координатам

$$u = v_1 \cos v_2, \quad v = v_1 \sin v_2$$

Усредненные уравнения (4.31) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{6\varepsilon}{w} v \left[3(u^2 + v^2) + 1 - \frac{w}{6\varepsilon} \Delta \right] \\ \dot{v} = -\frac{6\varepsilon}{w} u \left[3(u^2 + v^2) - 1 - \frac{w}{6\varepsilon} \Delta \right] \end{cases} \quad (4.32)$$

Несложно видеть, что эти уравнения допускают автономный первый интеграл

$$u^2 \left(1 + \frac{\Delta w}{6\varepsilon} \right) - v^2 \left(1 - \frac{\Delta w}{6\varepsilon} \right) - \frac{3}{2} (u^2 + v^2)^2 = C_1, \quad (4.33)$$

который гораздо проще неавтономного интеграла усредненной задачи, представленного в переменных u_1, u_2 . Учитывая, что $\Delta = \varepsilon\delta$ и полагая $a = \frac{\delta w}{3}$, представим интеграл (4.33) в следующем виде:

$$3(u^2 + v^2)^2 + 2(v^2 - u^2) - a(u^2 + v^2) = C \quad (4.34)$$

Варьируя значения параметра a , можно проследить за качественным изменением фазового портрета в зависимости от выбора данного параметра. Ниже представлены фазовые портреты для различных областей параметра a .

1) $a \leq -2$.

В этом случае коэффициенты $(2 - a) > 0$, $(2 + a) \leq 0$ при членах v^2, u^2 соответственно. На рисунке 4.2 представлен фазовый портрет для этого случая, $a = -4$.

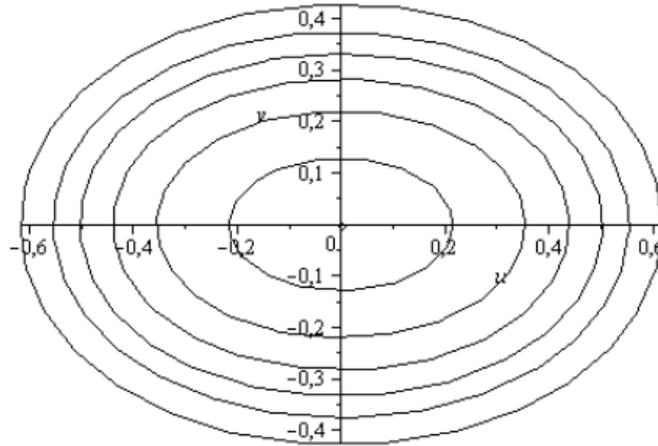


Рис. 4.2 Фазовый портрет при $a \leq -2$

Как видно из графика, здесь есть одна устойчивая особая точка в начале координат.

2) $-2 < a \leq 2$.

В этом случае $(2 - a) \geq 0$, $(2 + a) > 0$. Ниже представлен фазовый портрет при $a = 1$. Сепаратриса проходит через неустойчивое положение равновесия $u = v = 0$, отвечающее константе $C = 0$. Также есть две устойчивые особые точки.

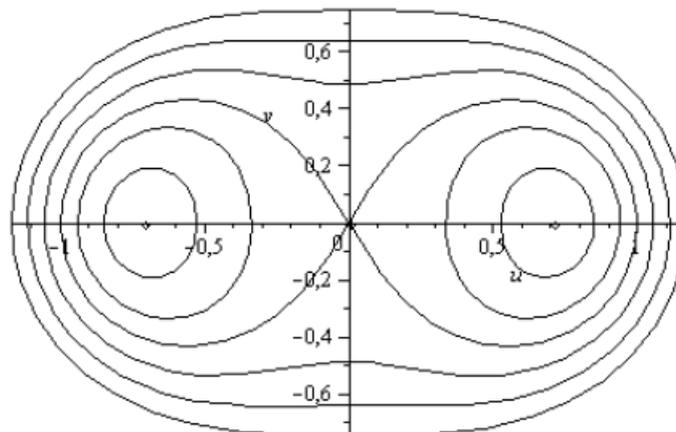


Рис. 4.3 Фазовый портрет при $-2 < a \leq 2$

3) $a > 2$.

Коэффициенты $(2 - a) < 0$, $(2 + a) > 0$.

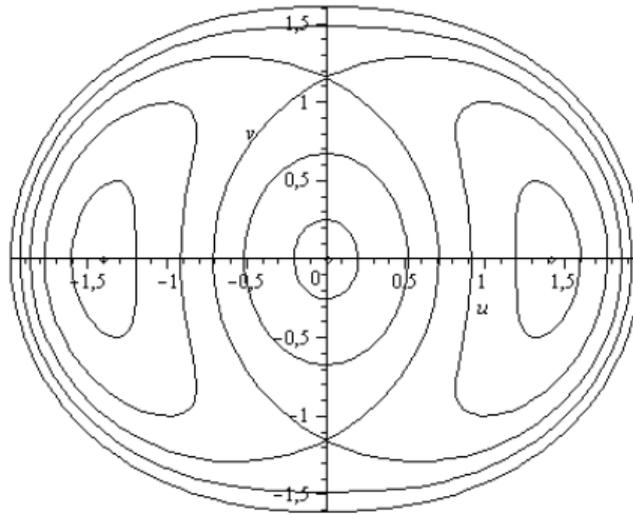


Рис. 4.4 Фазовый портрет при $a > 2$

Рисунок 4.4 соответствует значению $a = 10$. В этом случае имеем три устойчивых положения равновесия и два неустойчивых, через которые проходит сепаратриса.

Итак, мы имеем три качественно различных фазовых портрета, соответствующих интервалам $a \leq -2$, $-2 < a \leq 2$ и $a > 2$. Значения параметра $a = \pm 2$ являются бифуркационными, при которых наблюдается изменение топологического типа фазового портрета колебаний.

Заключение

Диссертационная работа содержит несколько новых научных результатов.

Получены условия устойчивости тривиального равновесия в первом приближении на основе регуляризации линейных уравнений движения и последующего вычисления следа a матрицы монодромии. Показано, что в классической задаче Ситникова равновесие устойчиво при почти всех значениях эксцентриситета e из интервала $[0, 1)$. Неустойчивость имеет место на дискретном множестве значений e , когда мультипликаторы являются кратными (с непростыми элементарными делителями), при этом $e = 1$ является точкой сгущения этого множества.

На основе метода точечных отображений получены условия устойчивости в нелинейной постановке. Показано, что устойчивость по первому приближению сохраняется в полной системе для всех значений эксцентриситета из интервала $[0, 1)$ за исключением дискретного множества значений e , отвечающих случаю кратных мультипликаторов ($|b(e)| = 1$). Устойчивость равновесия сохраняется для первого значения эксцентриситета e_1 ($b(e_1) = -1$) из этого множества, второе значение e_2 ($b(e_2) = -1$) нейтрально в нелинейном приближении (вычисления показывают, что имеет место вырождение условий теоремы об устойчивости). Однако недавние аналитические исследования (Бардин Б.С., работа не опубликована) поставили под сомнение этот вывод, поэтому требуется дополнительный анализ. Остается также открытым вопрос устойчивости равновесия при остальных критических значениях эксцентриситета.

Для фотогравитационной задачи Ситникова показано влияние коэффициента редукции q на вид функции $b(e)$, представляющей собой половину следа матрицы монодромии. Сделаны выводы об изменении областей эксцентриситета, отвечающих зонам устойчивости в линейном и нелинейном приближении.

Показано, что для коэффициента редукции q из диапазона $[0.3 - 1.0)$ равновесие устойчиво в первом приближении, за исключением критических значений e , при которых $|b(e)| = 1$. При e , удовлетворяющих равенству $b(e) = 1$, равновесие неустойчиво (непростые элементарные делители). Случай $b(e) = -1$ требует отдельного рассмотрения в силу приближенного характера вычисления корней этого уравнения.

Случай $q \in [0.16, 0.3)$ характеризуется тем, что равновесие устойчиво в первом приближении при $e \in [0, e^*)$, где e^* – первый корень уравнения $b(e) = -1$. Равновесие неустойчиво при $e \in (e^*, e^{**})$, где e^{**} – второй корень уравнения $b = -1$.

В случае $q \in (0, 0.16)$ имеем устойчивость при $e \in [0, e^*)$, где e^* – корень уравнения $b(e) = -1$. При $e > e^*$ положение равновесия неустойчиво по первому приближению, за исключением малой окрестности точки $e = 1$, требующей отдельного анализа.

В дополнение к выводам об устойчивости в линейном приближении сделан вывод о неустойчивости тривиального положения равновесия при выполнении условия $b(e) < -1$ в строгой нелинейной постановке задачи.

Доказана устойчивость по Ляпунову тривиального равновесия для всех значений эксцентриситета e из интервала $e \in [0, 1)$ за исключением корней $\{e_j\}$ уравнения $b(e) = \pm 1$ и областей $b(e) < -1$, в которых имеет место неустойчивость.

Методом усреднения исследованы резонансные колебания точки как при строгом резонансе, так и в окрестности резонанса: выведены усредненные уравнения, показано, что они допускают первый интеграл, построен фазовый портрет колебаний в окрестности резонанса (и при строгом резонансе). Результаты исследований дублируются в разных системах координат.

Актуальность работы заключается в том, что задача космической динамики, предполагающая создание орбитальных станций в точках либрации

системы трех гравитирующих тел (два массивных тела и пассивно гравитирующий спутник), требует исследования устойчивости равновесия спутника в точках либрации и анализа его нелинейных колебаний в окрестности этих точек. Поэтому исследование равновесия в задаче (два притягивающих тела имеют одинаковую массу) и в ее обобщенном варианте, когда учитывается световое давление со стороны притягивающих тел (звезд), является актуальной задачей в динамике спутников.

В работе представлен качественный анализ устойчивости положения тривиального равновесия в обобщенной задаче Ситникова. Основным результатом является наличие областей устойчивости по эксцентриситету, при которых равновесие является устойчивым как в линейном приближении, так и в строгой нелинейной постановке.

Также данный теоретический результат объясняет возможное скопление пылевых частиц между двумя одинаковыми по массе и излучению звездами, где частицы подвержены влиянию как сил светового давления (парусный эффект), так и сил гравитации.

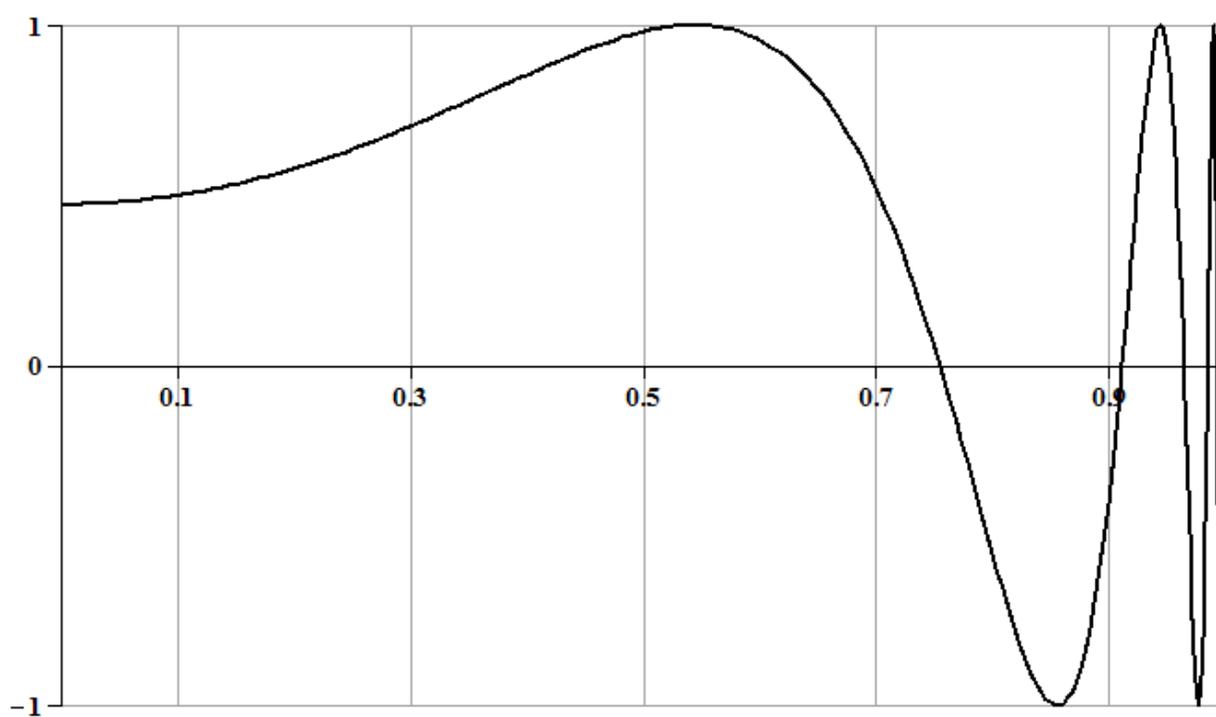


Рис. 1 График зависимости $b(e)$ при $q = 1$

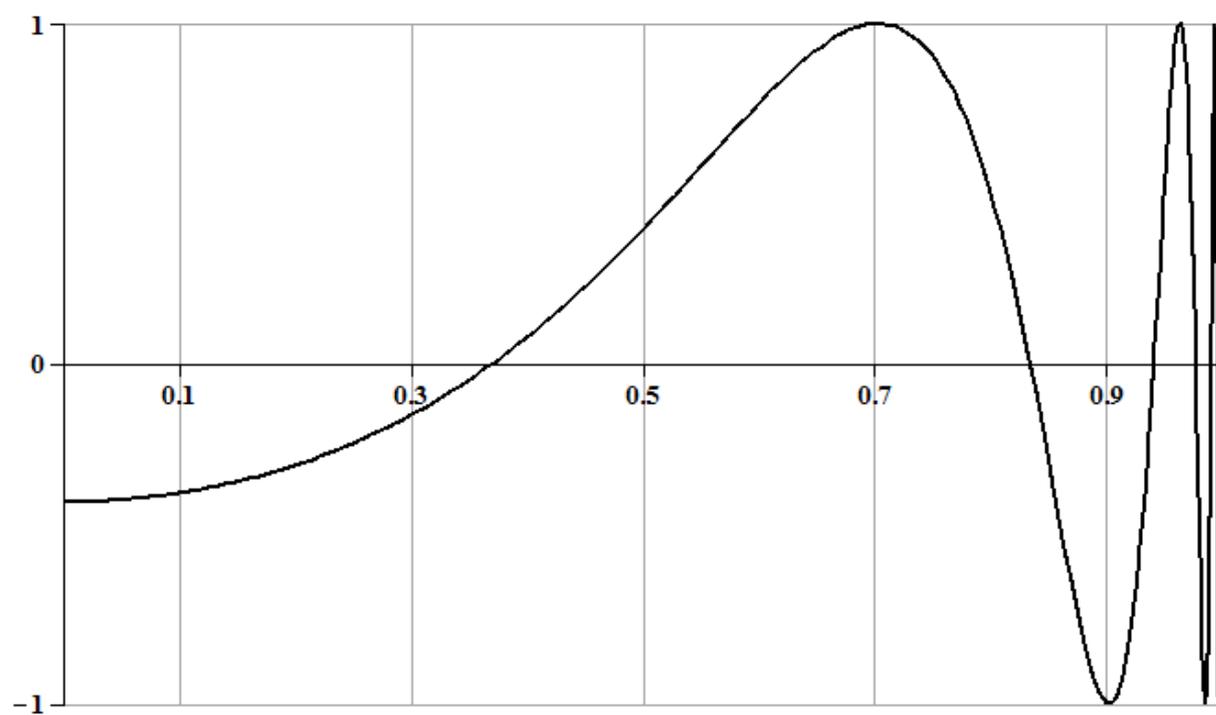


Рис. 2 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.9$

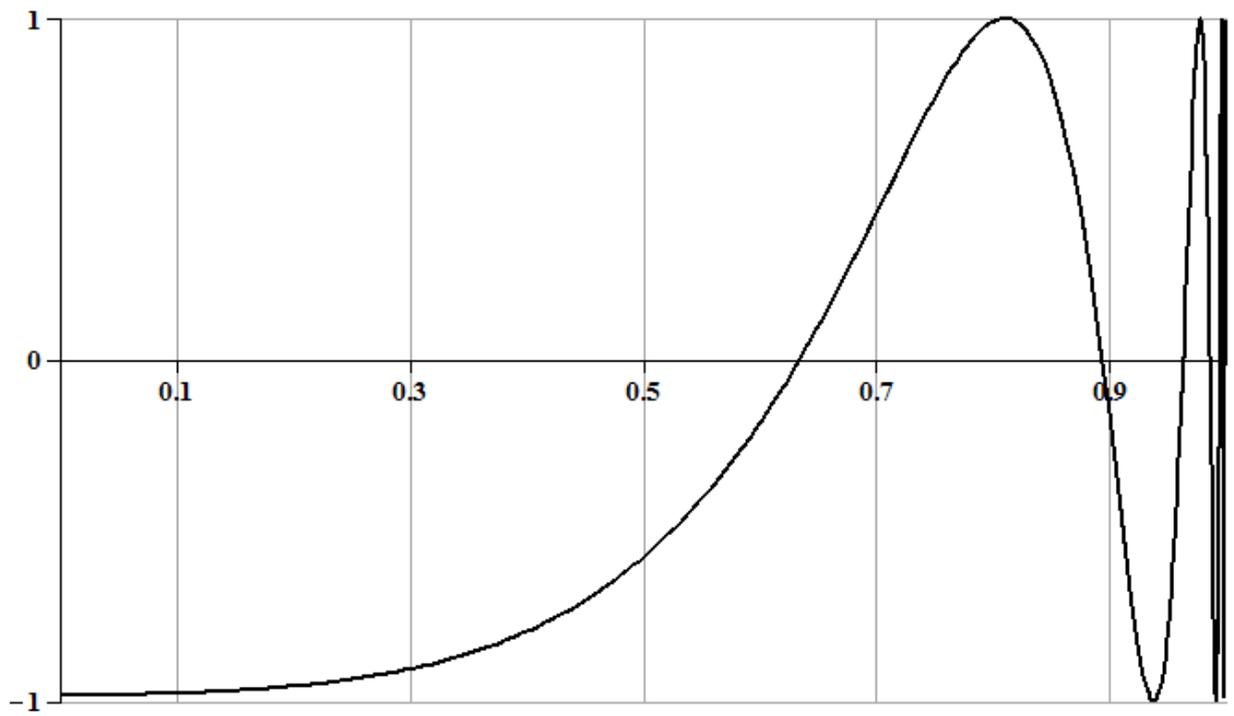


Рис. 3 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.8$

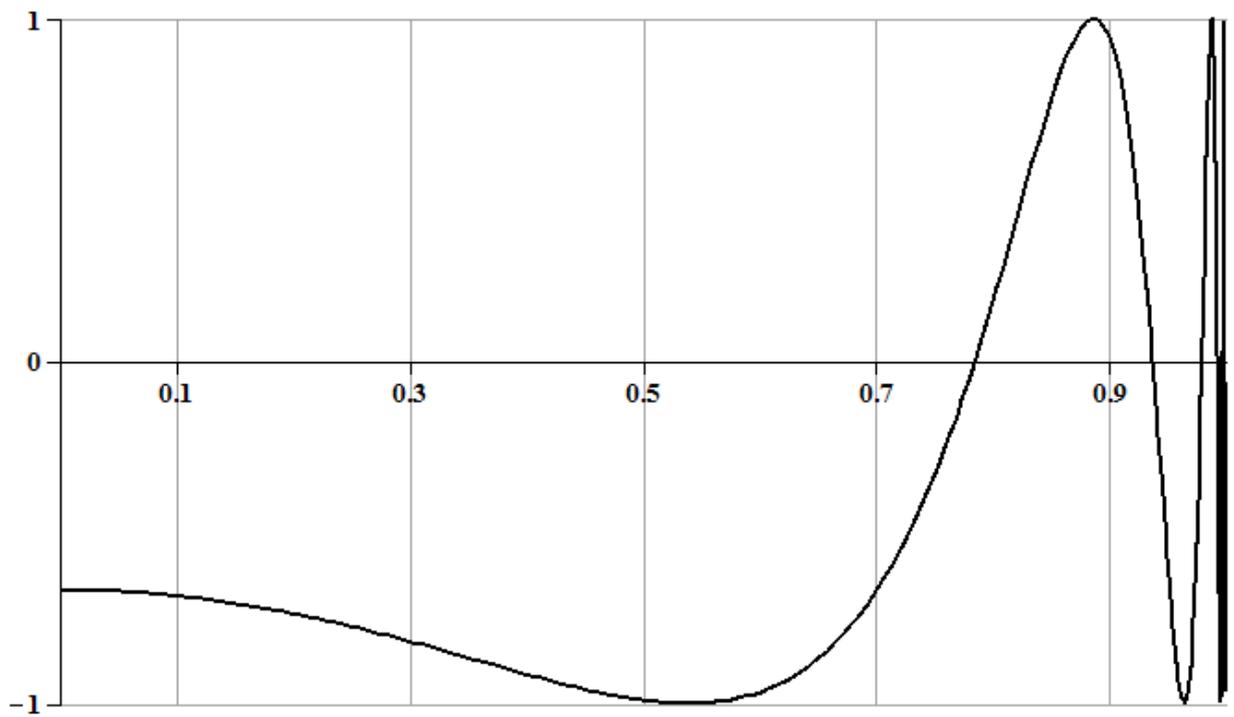


Рис. 4 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.7$

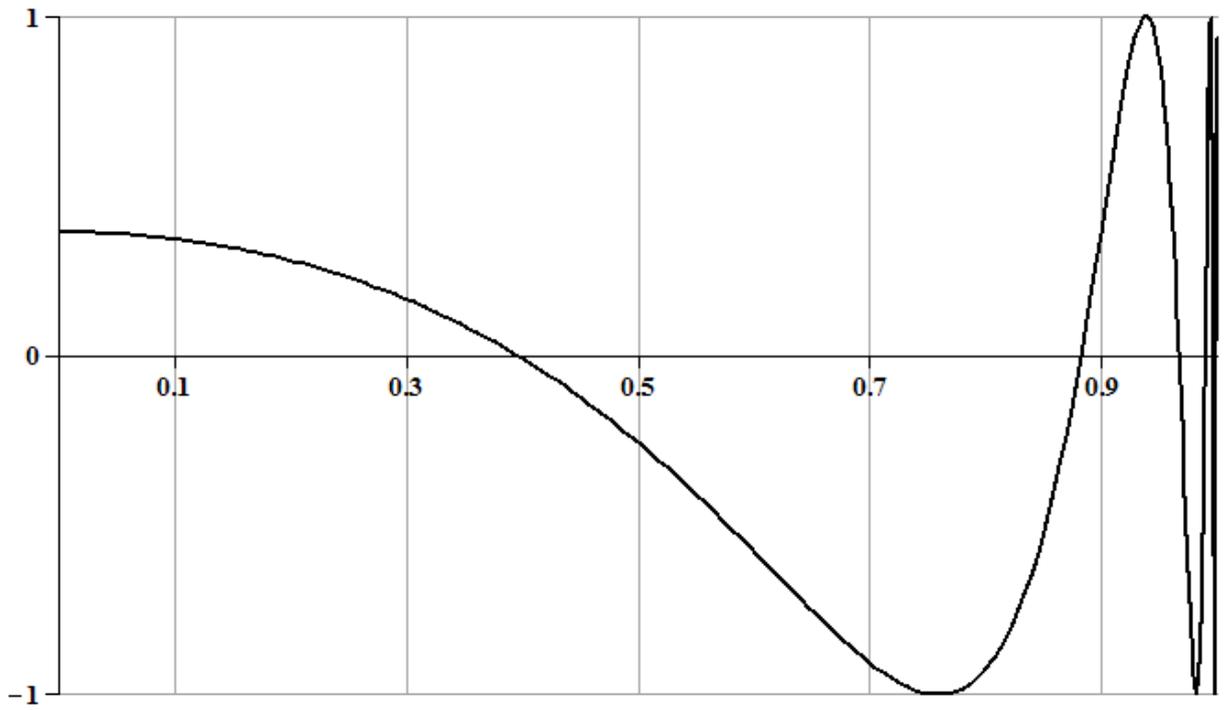


Рис. 5 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.6$

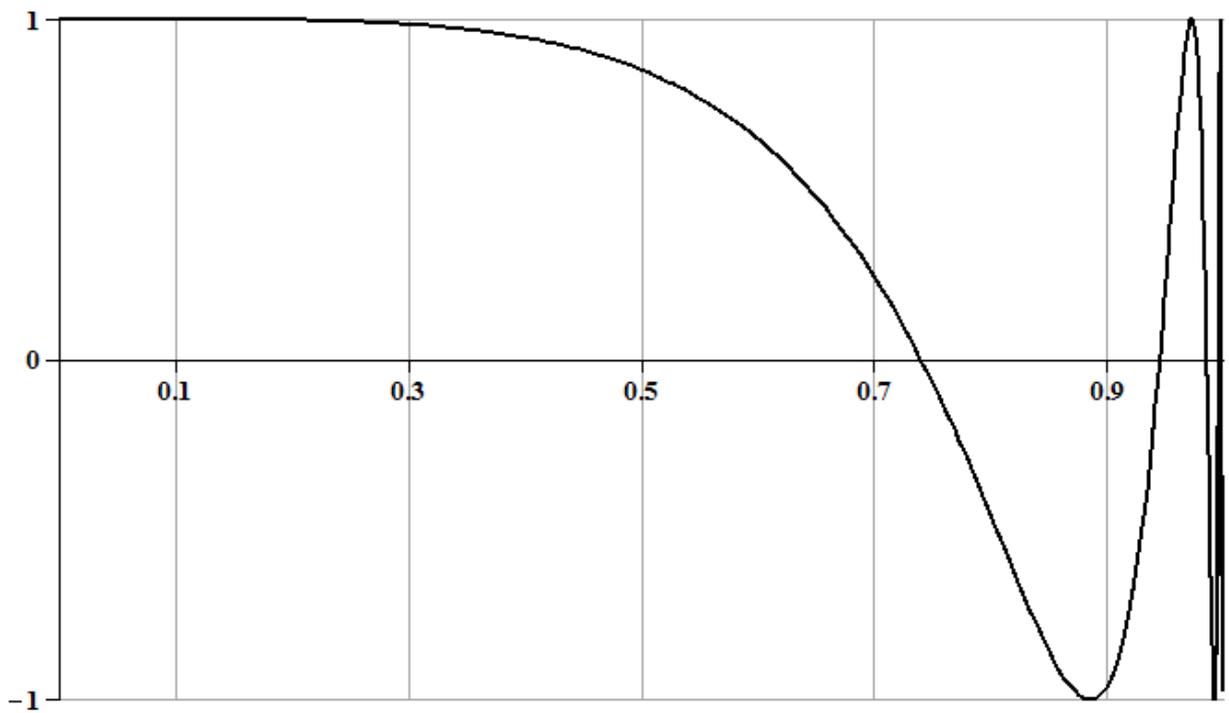


Рис. 6 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.5$

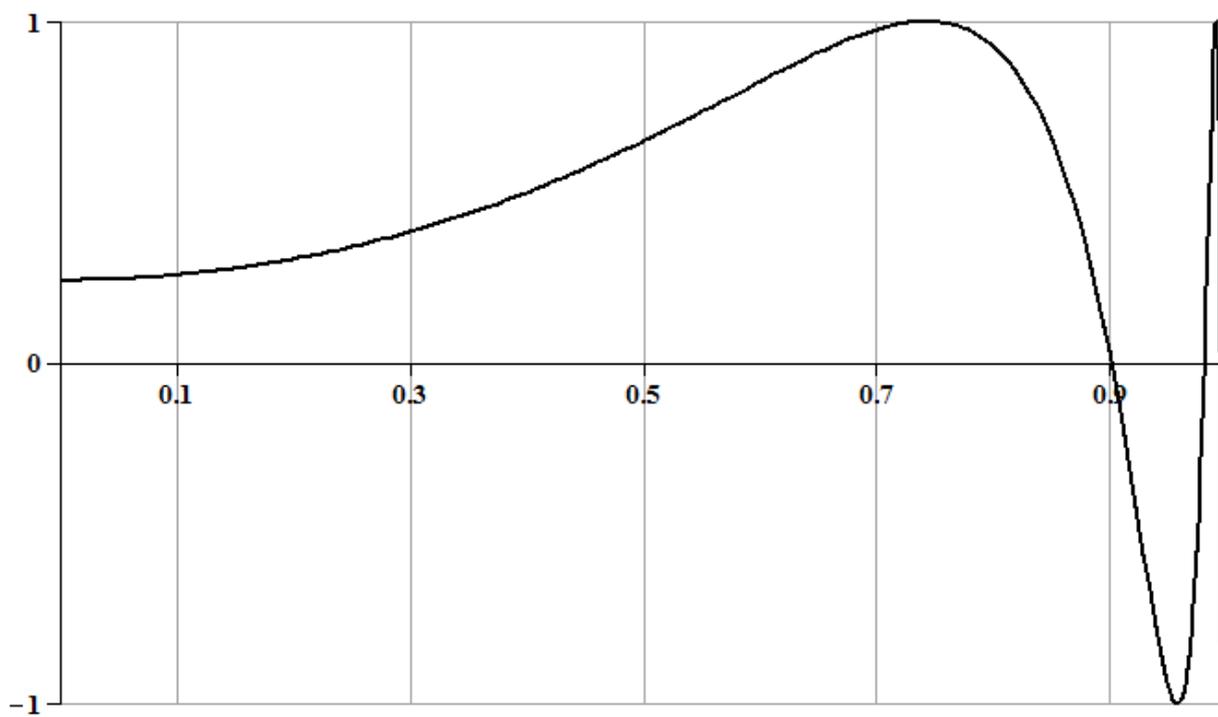


Рис. 7 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.4$

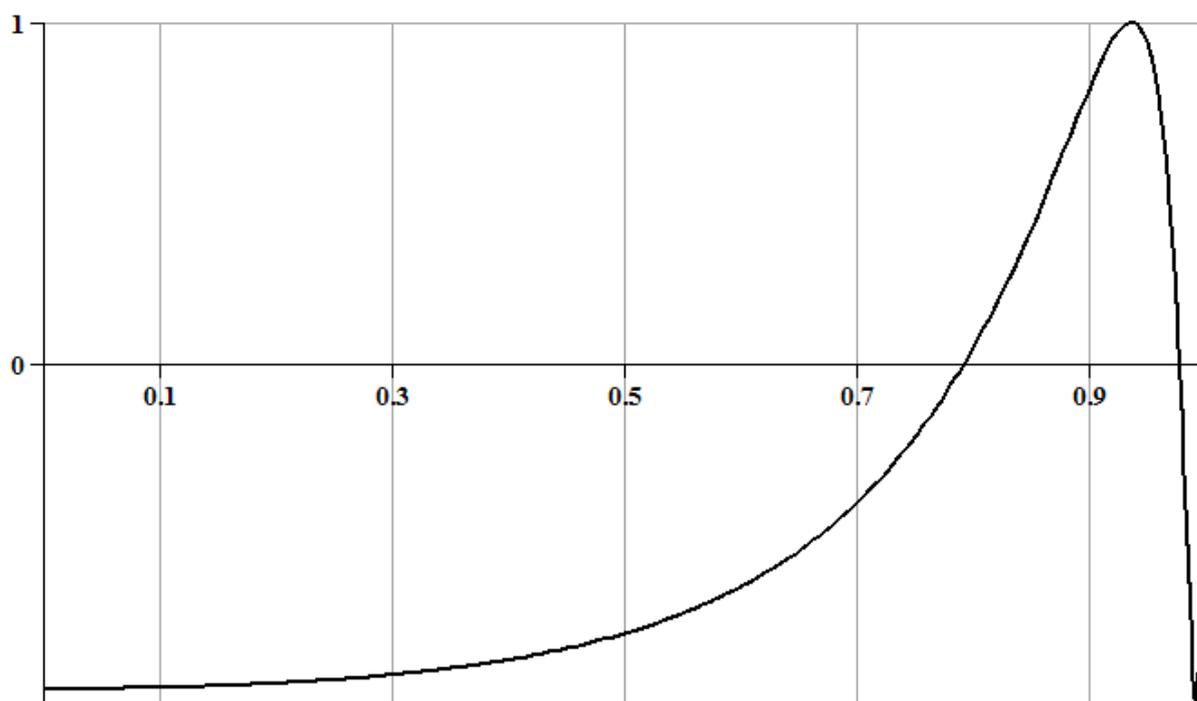


Рис. 8 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.3$

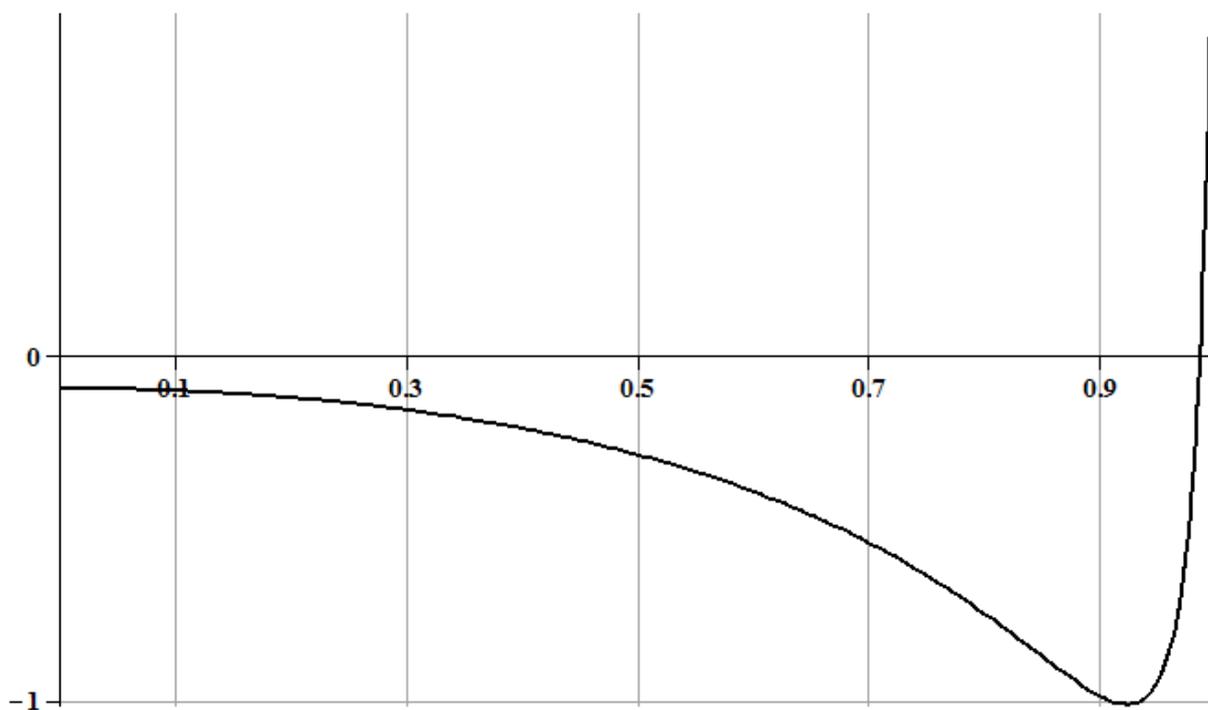


Рис. 9 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.2$

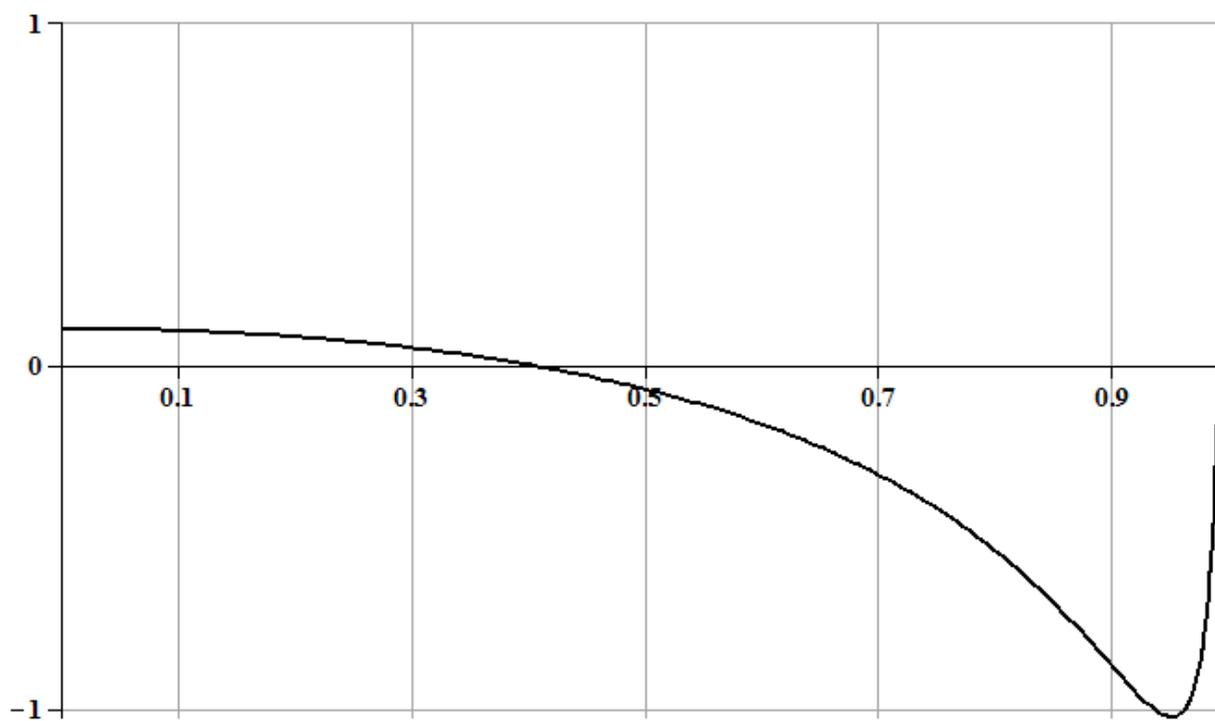


Рис. 10 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.19$

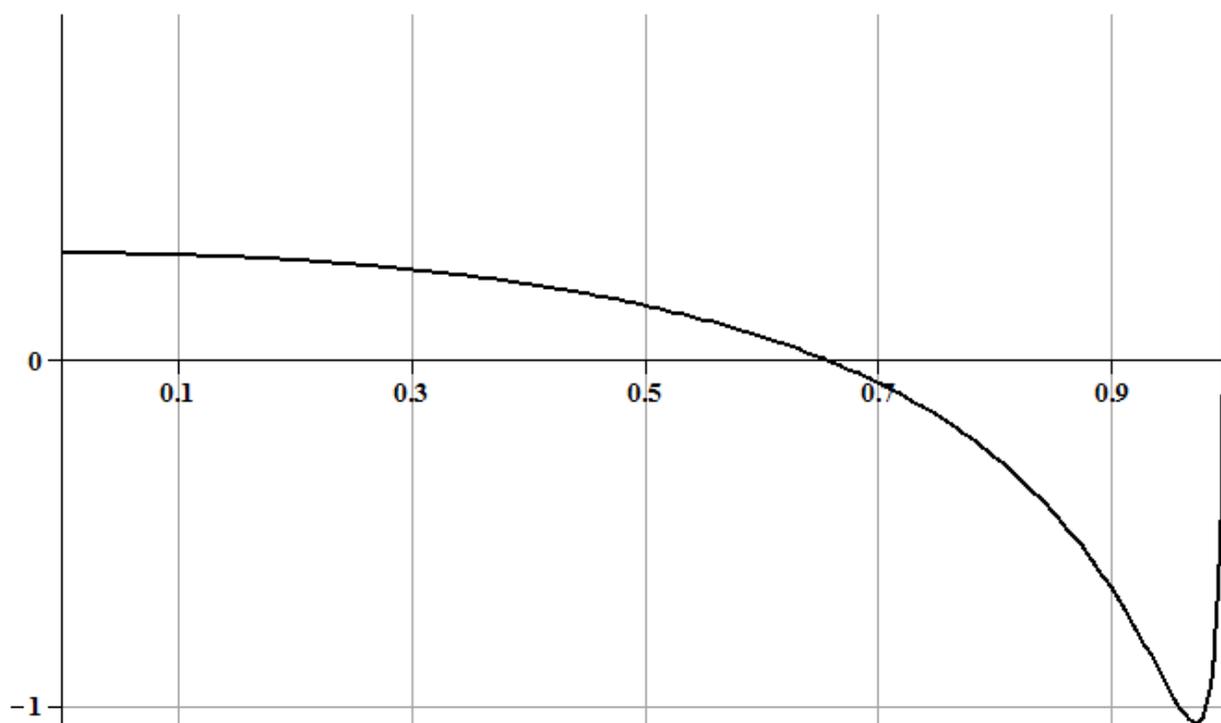


Рис. 11 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.18$

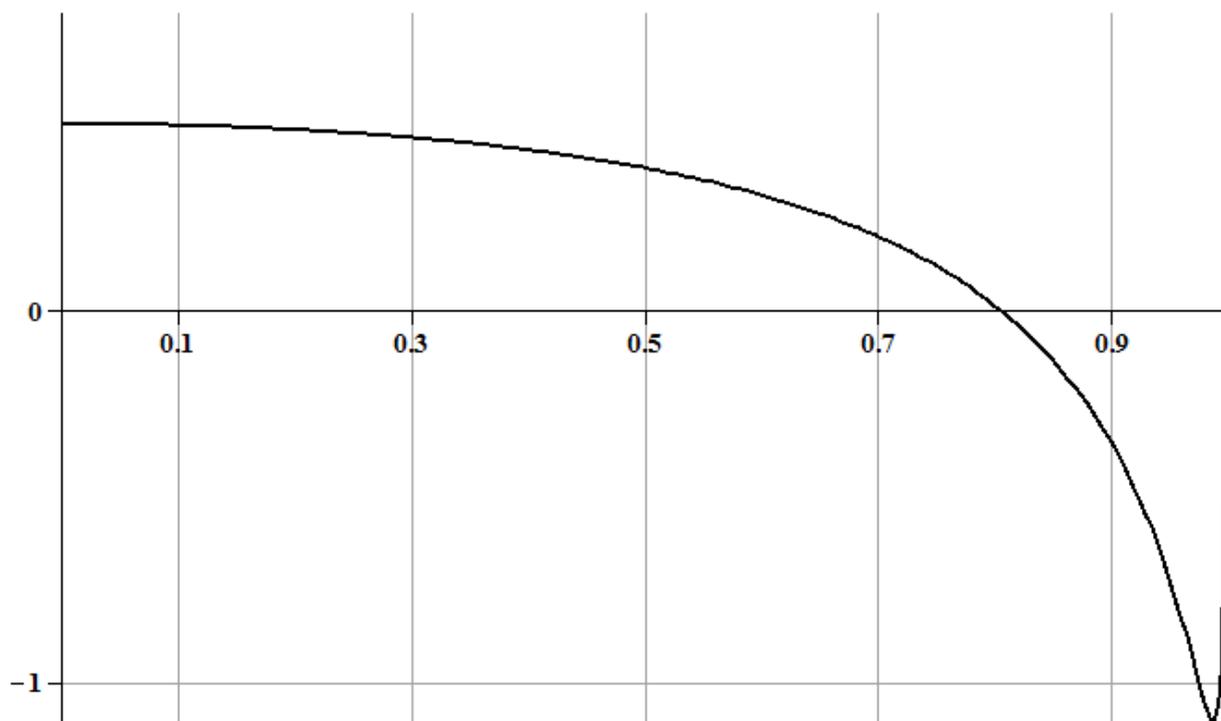


Рис. 12 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.17$

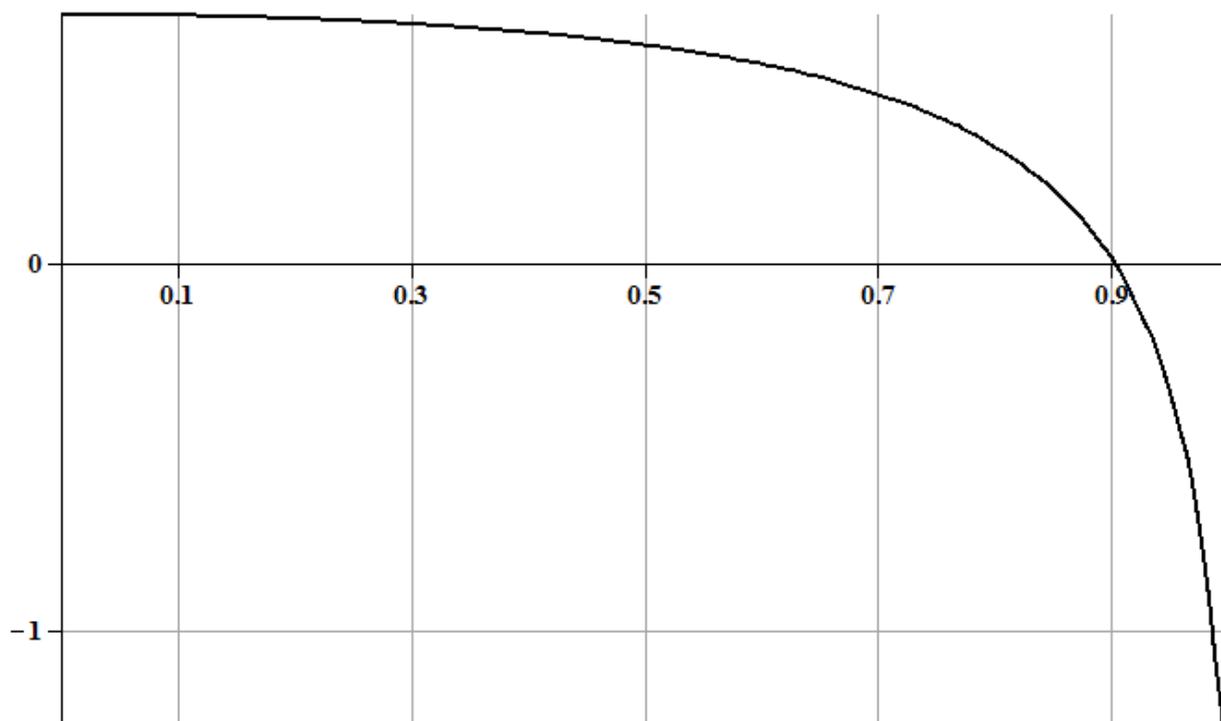


Рис. 13 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.16$

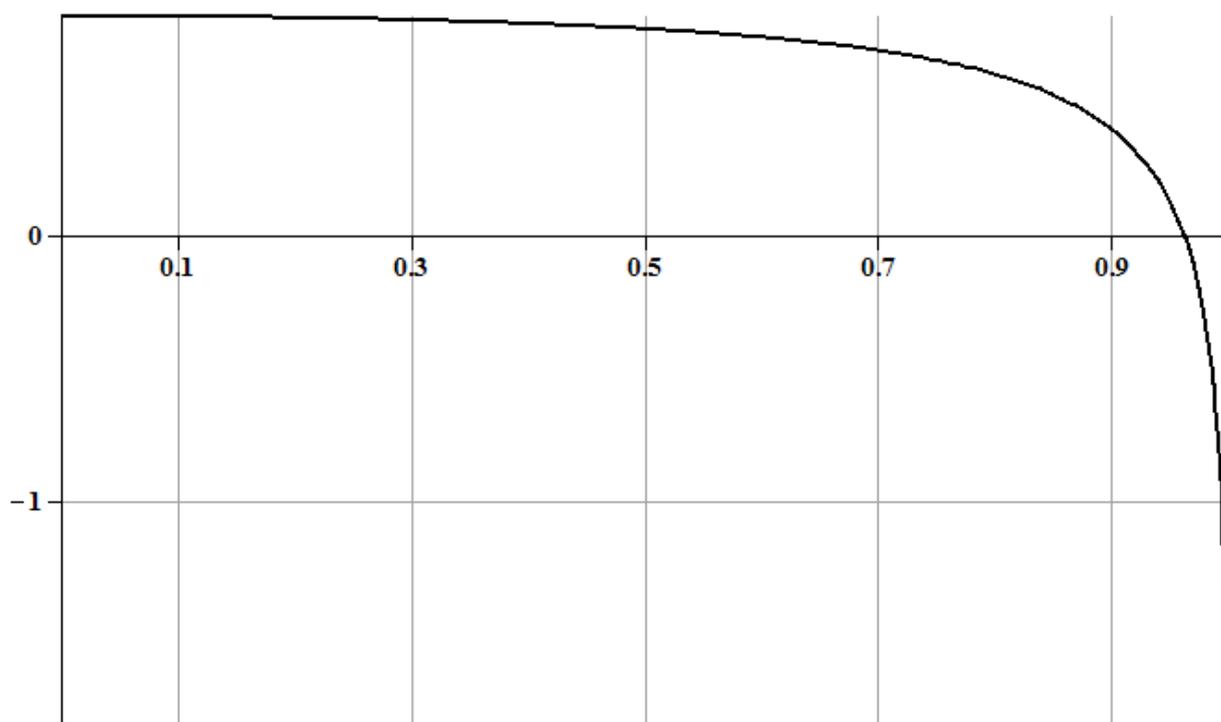


Рис. 14 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.15$

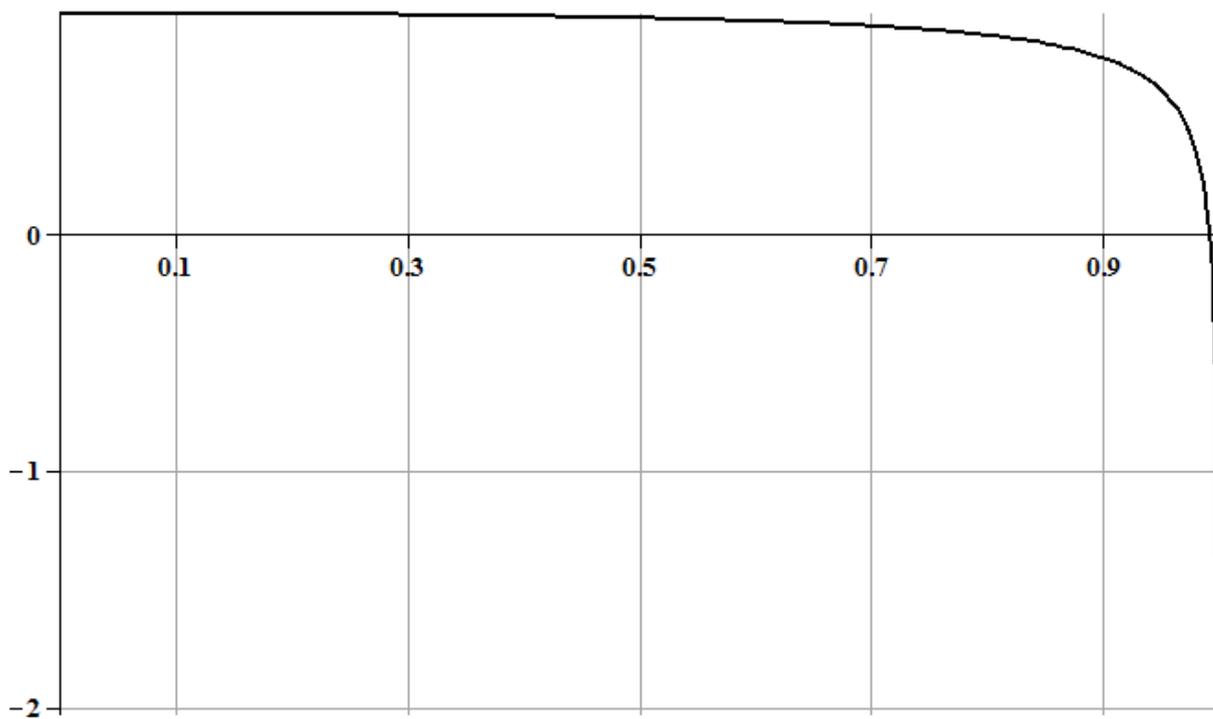


Рис. 15 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.14$

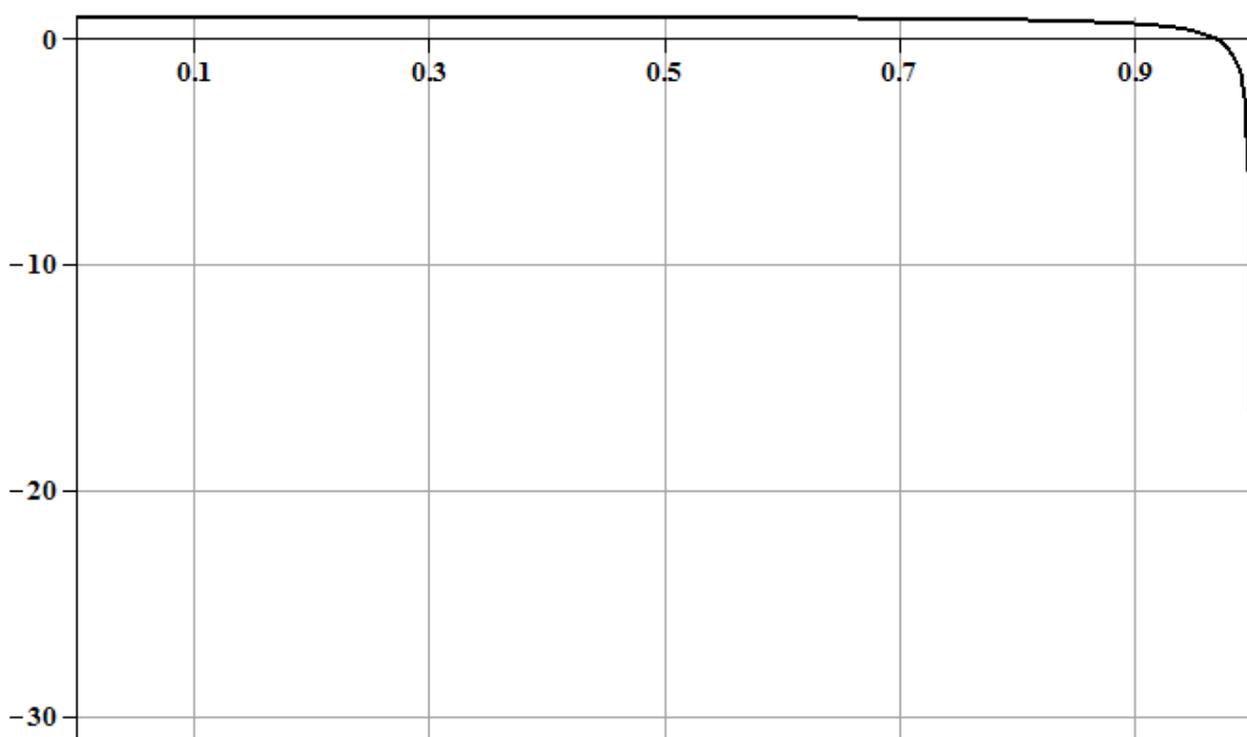


Рис. 16 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.11$

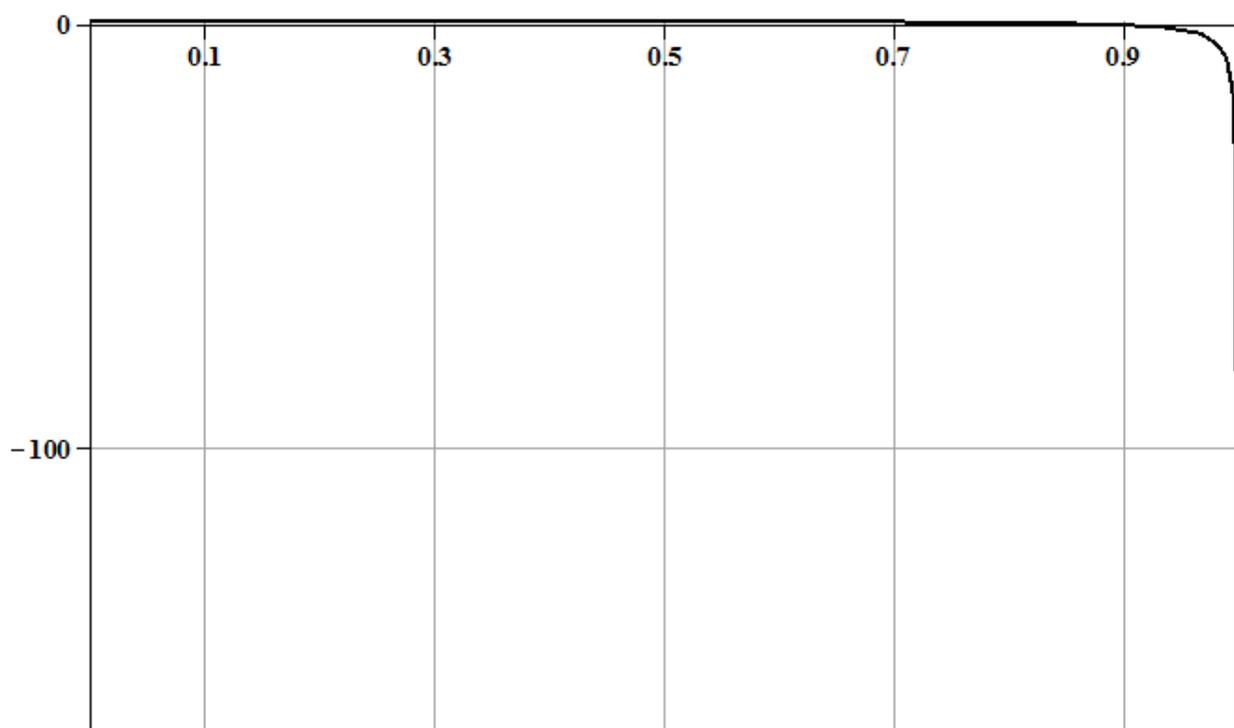


Рис. 17 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.1$

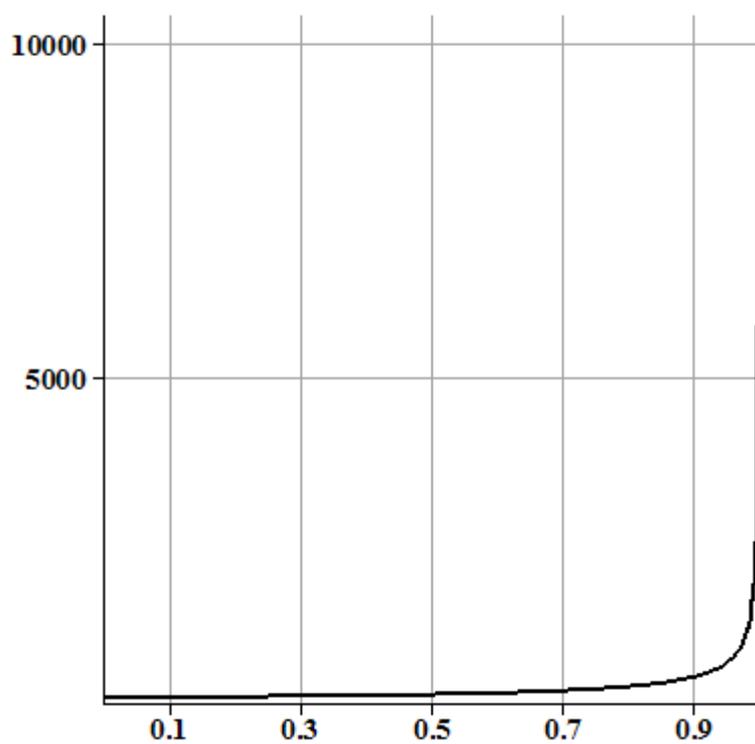


Рис. 1 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.9$

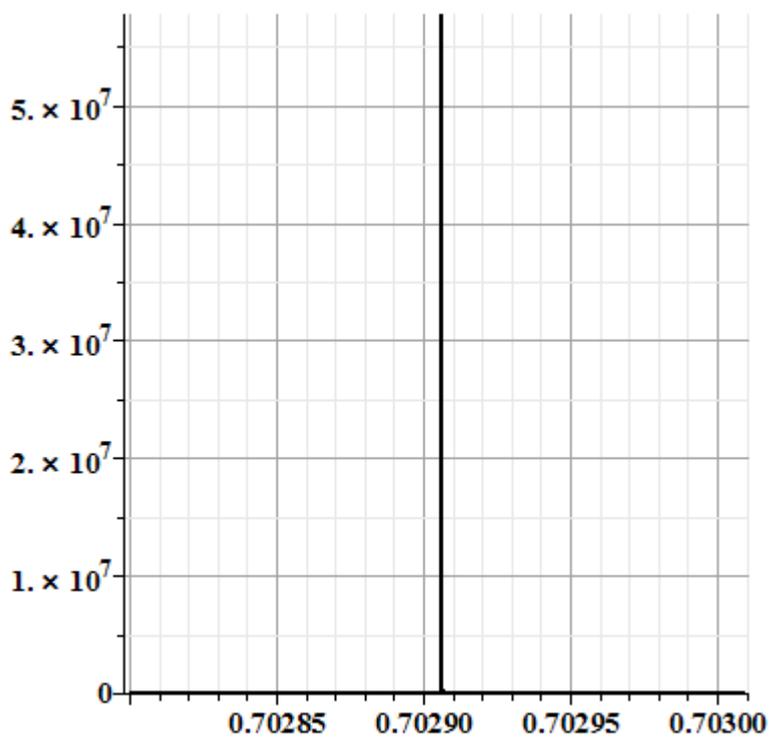


Рис. 2 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.9$ в окрестности $e = e_1^*$

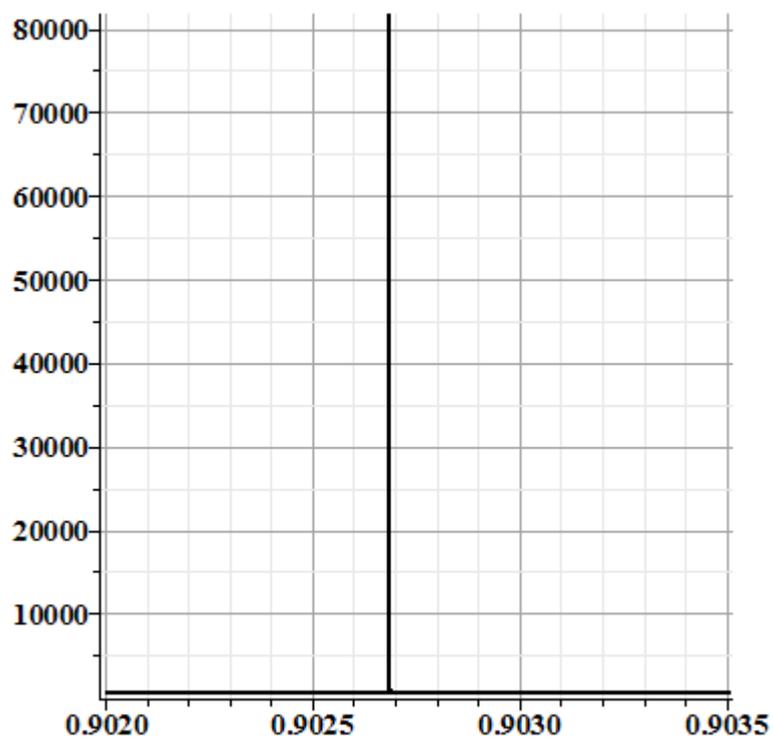


Рис. 3 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.9$ в окрестности $e = e_2^*$

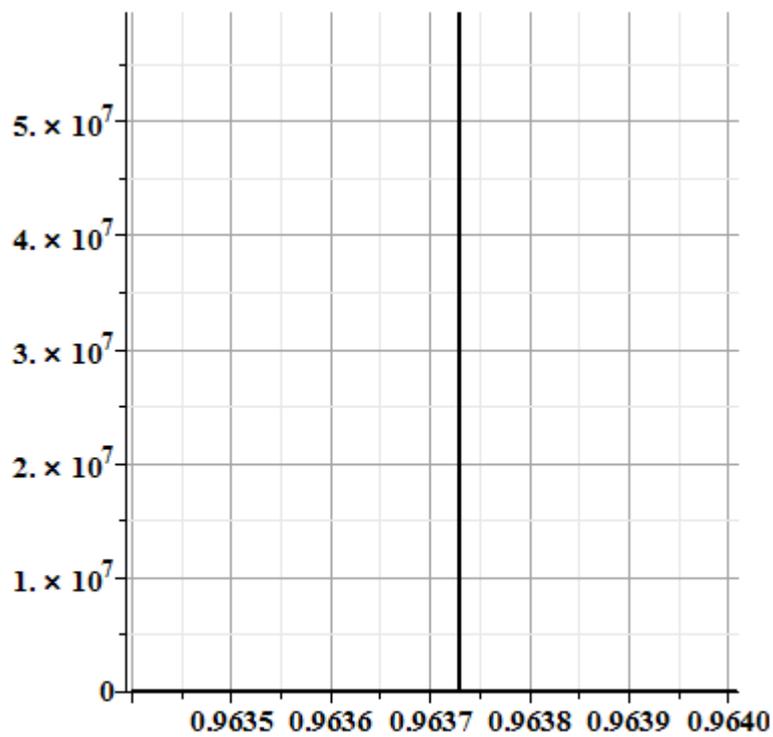


Рис. 4 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.9$ в окрестности $e = e_3^*$

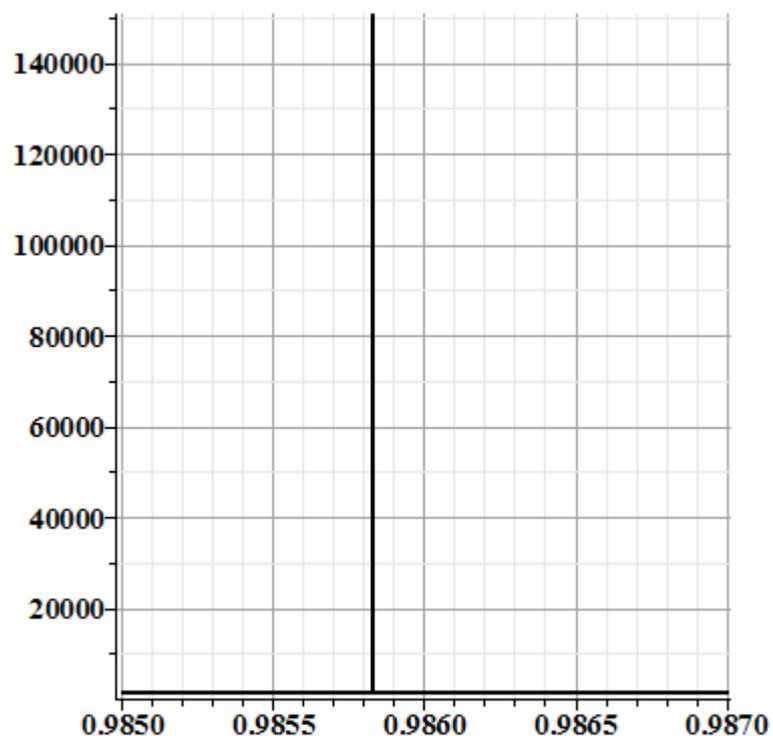


Рис. 5 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.9$ в окрестности $e = e_4^*$

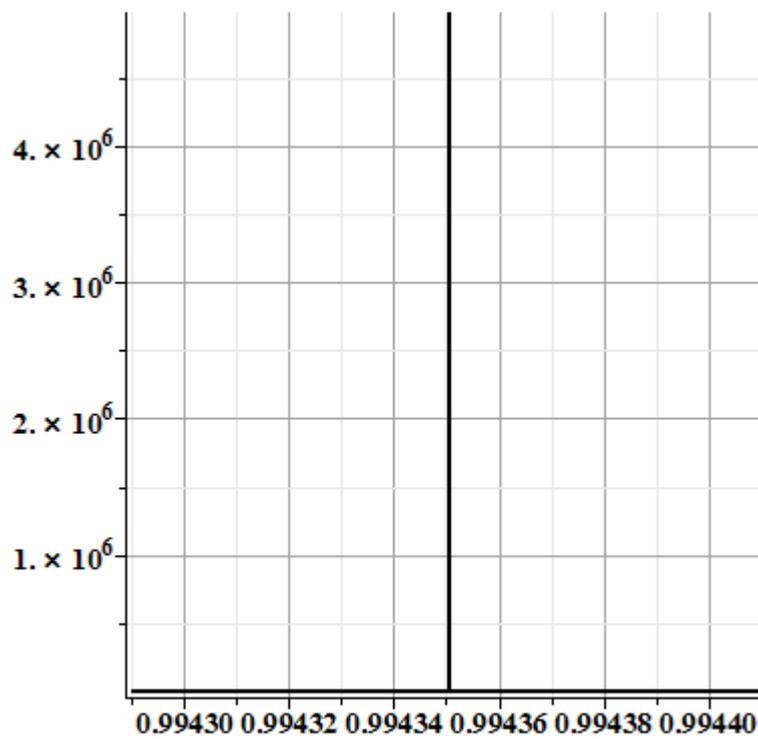


Рис. 6 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.9$ в окрестности $e = e_5^*$

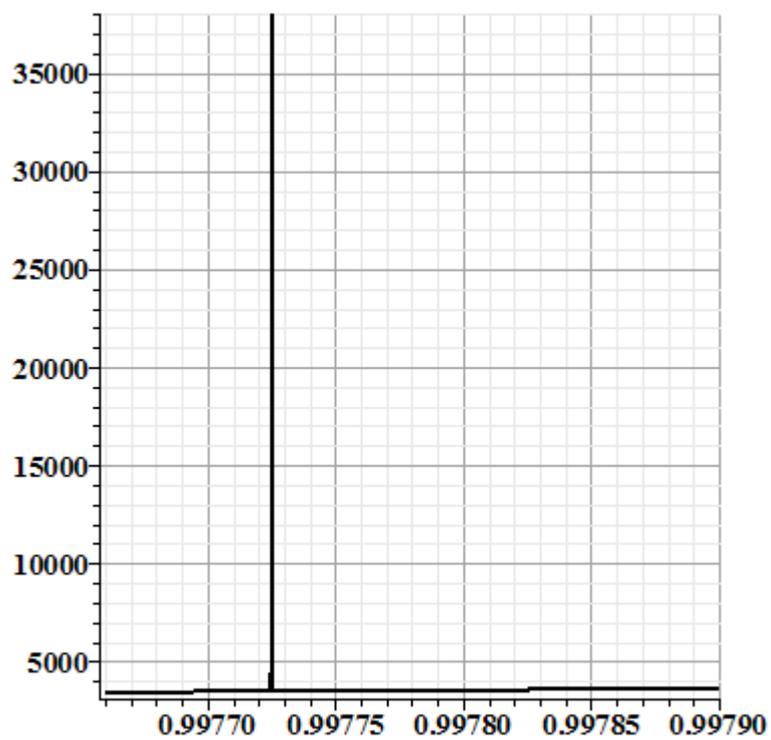


Рис. 7 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.9$ в окрестности $e = e_6^*$

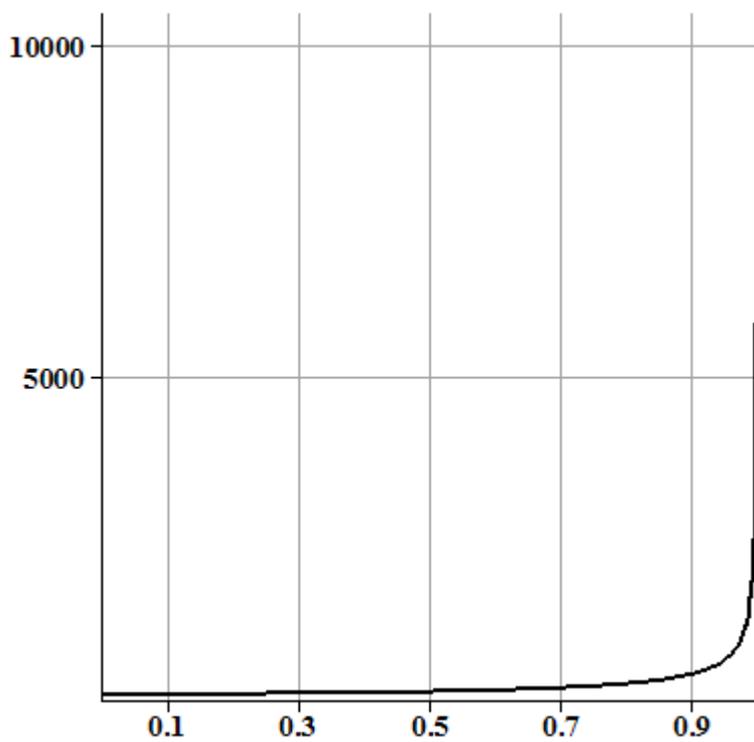


Рис. 8 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.8$

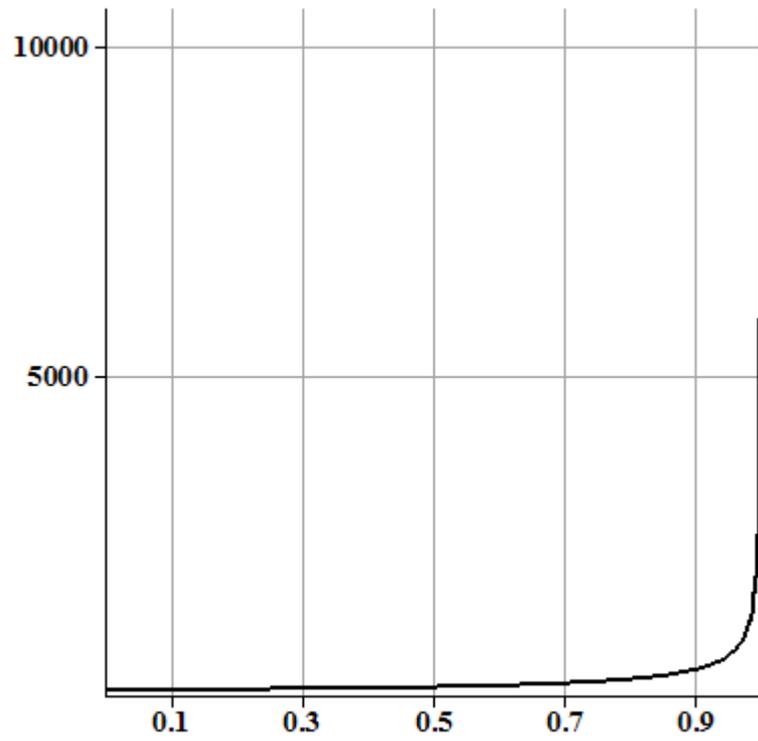


Рис. 9 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.7$

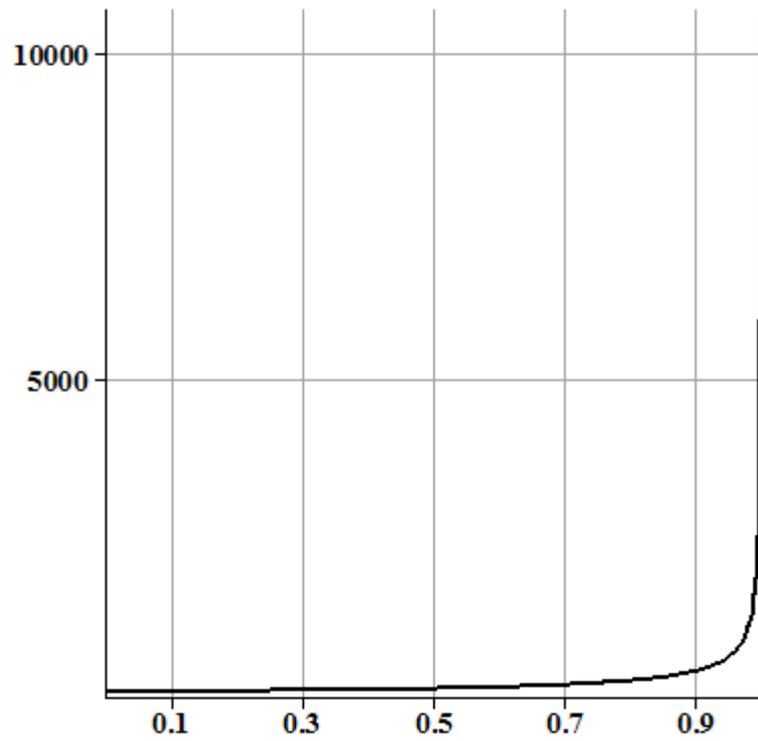


Рис. 10 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.6$

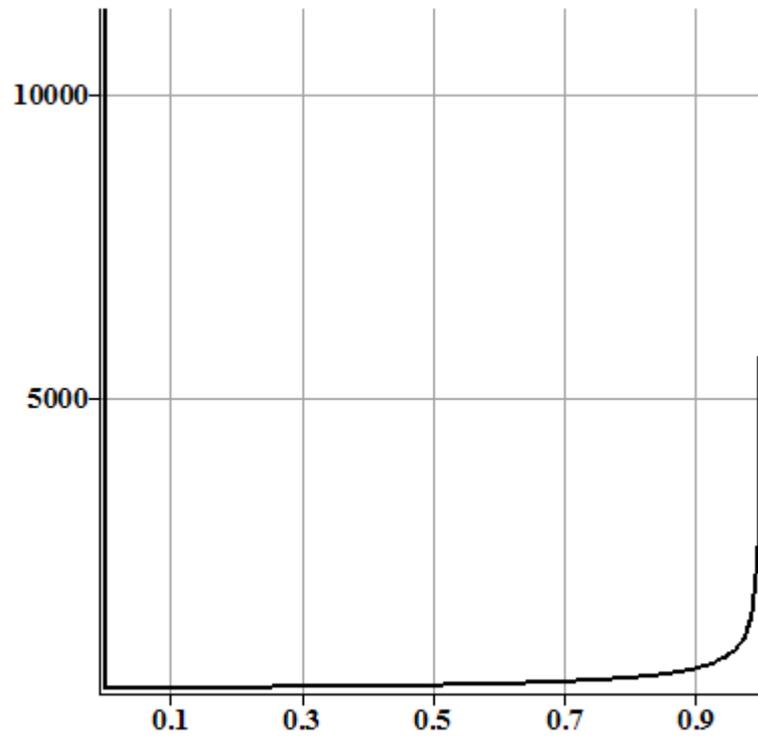


Рис. 11 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.5$

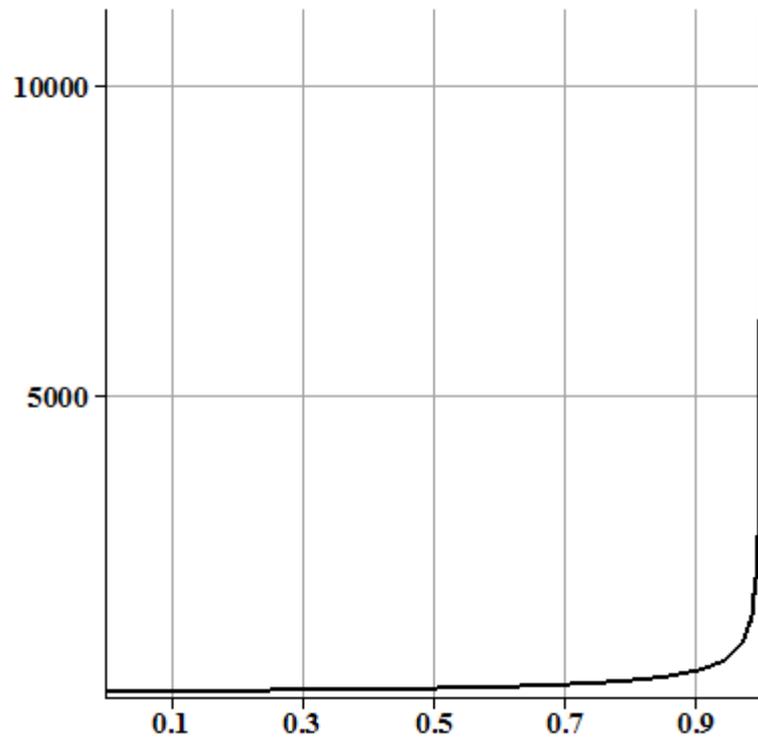


Рис. 12 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.4$

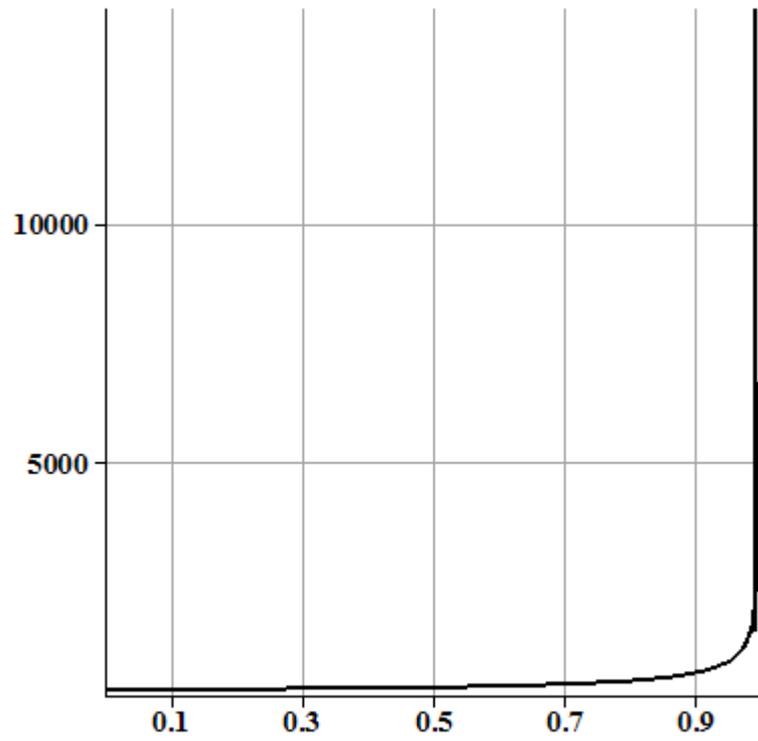


Рис. 13 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.3$

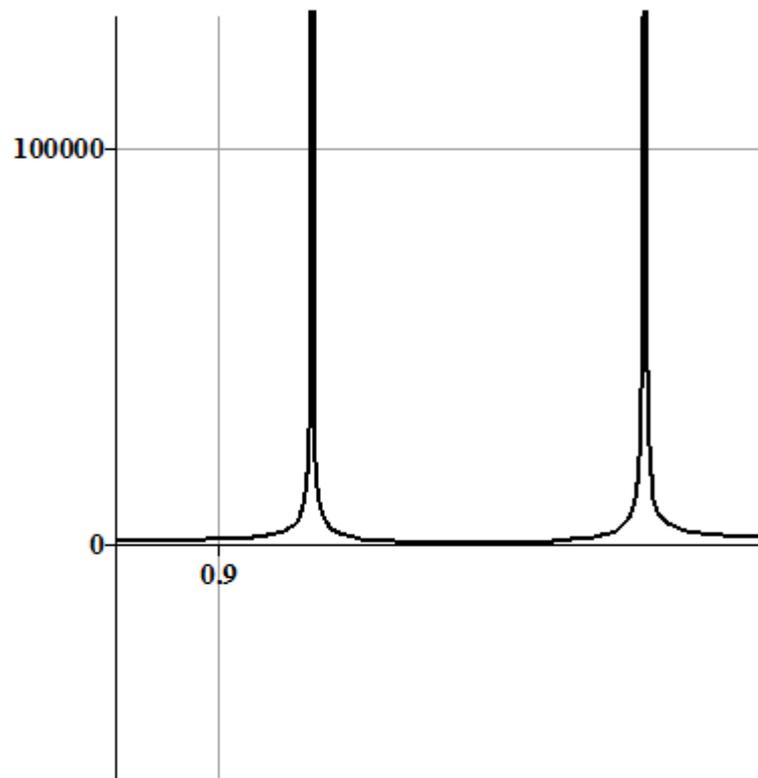


Рис. 14 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.2$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Chazy J. Sur l'allure final du mouvement dans le problème des trios corps quant le temps croît indéfiniment // Annales de l'Ecole Norm. Sup. 3 ser. 1922. Т. 39. P. 29–130.
2. Ситников К.А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // ДАН. 1960. Т. 133. №2. С. 303–306.
3. Алексеев В.М. Квазислучайные динамические системы I, II, III // Матем. сб. 1968. Т. 76. № 1. С. 72–134; 1968. Т. 77. № 4. С. 545–601; 1969. Т. 78. № 1. С. 3–50.
4. Moser J. Stable and Random Motions in Dynamical Systems // Princeton University Press, NJ. 1973.
5. Belbruno E., Llibre J., Olle M. On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // Celestial Mech. and Dynam. Astronom. 1994. № 60. P. 99–129.
6. Corbera M., Llibre J. Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincaré map // Celestial Mech. Dynam. Astronom. 2000. № 77. P. 273–303.
7. Jiménez-Lara L., Escalona-Buendía A. Symmetries and bifurcations in the Sitnikov problem // Celestial Mech. Dynam. Astronom. 2001. № 79. P. 97–117.
8. Llibre J., Ortega R. On the families of periodic orbits of the Sitnikov problem // SIAM J. Applied Dynamical Systems. 2008. № 7. P. 561–576.
9. Hagel J. A new analytic approach to the Sitnikov problem // Celes. Mech. 1992. № 53. P. 267–292.
10. Kovács T., Érdi B. The structure of the extended phase space of the Sitnikov problem // Astron. Nachr. 2007. AN 328. № 8. P. 801–804.
11. Liu Jie, Sun Yi-Sui. On the Sitnikov problem // Celes. Mech. 1990. № 49. P. 285–302.
12. Jalali M.A., Pourtakdoust S.H. Regular and Chaotic Solutions of the Sitnikov Problem near the $3/2$ Com mensurability // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1997. № 68. P. 151–162.

13. Clark Robinson. Uniform subharmonic orbits for Sitnikov problem // *Discrete and continuous dynamical systems. Series S.* 2008. V. 1. № 4. P. 647–652.
14. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения // М.: Наука, 1976.
15. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 471.
16. Прокопеня А.Н. Исследование устойчивости равновесных решений эллиптической ограниченной задачи многих тел методами компьютерной алгебры // *Математическое моделирование.* 2006. Т. 18. № 10. С. 102–112.
17. Тхай В.Н. Периодические движения обратимой механической системы второго порядка. Приложение к задаче Ситникова // *ПММ.* 2006. Т. 70. №5. С. 813–834.
18. Журавлёв С. Г., Перепелкина Ю.В. Об устойчивости в строгом нелинейном смысле тривиального положения относительного равновесия в классическом и обобщенных вариантах задачи Ситникова // *ПММ,* 2013, т. 77, №2, с. 239–250.
19. Маркеев А. П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *МТТ,* 2004, №6, с. 3–12.
20. Маркеев А. П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // *МТТ,* 1996, №2, с. 37–54.
21. Маркеев А. П. Об устойчивости нелинейных колебаний связанных маятников // *МТТ,* 2013, №4, с. 20–30.
22. Бибиков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Ленинград: ЛГУ, 1991. 143 с.
23. Радзиевский В.В. *Астрономический журнал,* Т. 27, 1950, стр. 250.
24. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2009. 396 с.

25. Диаку Ф., Холмс Ф. Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.

26. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

27. Калас В.О. Исследование резонансных колебаний в фотогравитационной задаче Ситникова // Электронный журнал «Труды МАИ». 2011, № 45.

28. Калас В.О., Красильников П.С. Об устойчивости равновесия в задаче Ситникова // Космические исследования. 2011, Т. 49, № 6, с. 1-4.

29. Калас В.О., Красильников П.С. Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке // Нелинейная динамика. 2015, Т. 11, № 1, с. 117-126.