



На правах рукописи

НГУЕН ЛЕ ЗУНГ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМЛИ
ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС НА КОРОТКИХ
ИНТЕРВАЛАХ ВРЕМЕНИ**

Специальность: 01.02.01 – “Теоретическая механика”

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре «Теоретическая механика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

ПЕРЕПЁЛКИН Вадим Владимирович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Государственного астрономического института имени П.К. Штернберга МГУ

БАРКИН Юрий Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика» Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета

ЗЛЕНКО Александр Афанасьевич

Ведущая организация:

Институт астрономии Российской академии наук.

Защита состоится «20» июня 2014 г. в 12⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), расположенном по адресу: 125993, Москва А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВПО Московского авиационного института (национального исследовательского университета),

http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=48891.

Автореферат разослан « » 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

к.ф.-м.н., доцент



Гидаспов В. Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования:

Диссертационная работа посвящена развитию фундаментальной задачи построения математических моделей вращательно-колебательных движений деформируемой Земли относительно центра масс, адекватных данным наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ).

Математические модели вращательно-колебательного движения Земли, которые с высокой точностью идентифицируют ее параметры вращения и дают надежный их прогноз, являются основополагающими при исследовании ряда астрометрических, геодинамических и навигационных задач.

Достижение высоких точностей координатно-временного обеспечения наземных (стационарных и подвижных), а также движущихся в околоземном пространстве объектов связано с фундаментальной проблемой определения параметров вращения Земли (ПВЗ). Без точного знания этих параметров невозможна высокоточная навигация космических аппаратов (КА).

Для уточнения координатно-временного обеспечения наиболее существенное значение имеет высокоточный прогноз ПВЗ (движения земного полюса и неравномерности ее осевого вращения - временной поправки UT1-TAI) на коротких интервалах времени (от 1-2 до 20-30 суток). С помощью методов небесной механики разрабатывается модель прогнозирования вращательно-колебательных характеристик движения Земли на коротких интервалах времени под воздействием гравитационно-приливных сил от Солнца и Луны.

Высокоточные данные экспериментальных наблюдений ПВЗ свидетельствуют о сложных динамических процессах, происходящих в системе Земля-Луна-Солнце. Исследование этой проблемы на основе модели деформируемой Земли было частично проведено в работах С. Ньюкомба, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, П. Мельхиора, У. Манка и Г. Макдональда, Ф.А. Слудского, М.С. Молоденского и многих других.

Актуальность проблемы обусловлена также существенно возросшей точностью астрометрических измерений и отсутствием рационального подхода при построении моделей прогнозирования вращательно-колебательного

движения Земли на интервалы различной длительности с соответствующими им требуемыми современными приложениями точностями.

В этой связи решаемые в диссертационной работе задачи моделирования вращательно-колебательного движения Земли и их приложения являются **актуальными**.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертации является разработка динамических моделей вращательно-колебательного движения Земли, адекватных данным наблюдений и измерений МСВЗ, и прогнозирование колебаний земного полюса и неравномерности осевого вращения Земли на коротких интервалах времени.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Проведенное численное-аналитическое моделирование колебательного движения полюса Земли в переменных действие-угол, показала адекватность построенной модели данным наблюдений и измерений МСВЗ.
2. Разработана небесномеханическая модель приливной неравномерности осевого вращения деформируемой Земли, учитывающая короткопериодические возмущения Луны с комбинационными частотами.
3. Установлено целесообразность учёта поправок на возмущения короткопериодических лунных приливов для повышения точностных характеристик прогноза нестабильности шкалы Всемирного времени UT1, связанного с вращением Земли, на коротких и внутрисуточных интервалах времени.
4. Построена модель внутрисуточных колебаний полюса Земли, которая имеет прикладное значение для задач навигации.

Теоретическая и практическая значимость:

Одной из основных перспективных направлений применения математических моделей движения Земли является уточнение орбитально-вращательных характеристик КА, поскольку при функционировании космической техники и систем телекоммуникаций точность координатно-временного обеспечения имеет существенное, основополагающее значение.

Прогноз фундаментальных составляющих ПВЗ в коротком интервале времени (до 20 суток) позволяет заметно повысить точность оценки параметров

орбиты КА, что в свою очередь обеспечивает значительное повышение точности прогноза эфемерид спутников на последующие сутки.

Вычислительная сложность алгоритмов непосредственного учета колебаний ПВЗ и их малопараметрических математических моделей приемлема для аппаратуры потребителя.

Полученные результаты могут быть рекомендованы для реализации в аппаратуре потребителя при решении навигационных задач, а именно, достижения высокой точности эфемеридно-временного обеспечения навигационных спутниковых систем.

Методология и методы исследований:

Теоретическое моделирование вращательно-колебательных движений Земли, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ, проводится с помощью приближенных методов нелинейной механики в сочетании с численным экспериментом. Модель вращательно-колебательного процесса Земли основана на учете гравитационно-приливных моментов сил от Солнца и Луны. Для построения математической модели первого приближения использовалась динамическая теория вращения твердого тела. Моделирование (интерполяция и прогноз) вращательно-колебательного движения Земли, адекватное наблюдениям и измерениям МСВЗ проводится с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Положения, выносимые на защиту: На защиту выносятся следующие положения:

1. Проведено моделирование колебательного движения полюса Земли в переменных действие-угол, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ.
2. Разработана небесномеханическая модель приливной неравномерности осевого вращения деформируемой Земли, учитывающая короткопериодические возмущения Луны с комбинационными частотами.
3. С помощью спектрального анализа учтены нестационарные колебания неравномерности вращения Земли с малыми амплитудами.

4. Установлено, что для повышения точностных характеристик прогноза нестабильности шкалы Всемирного времени UT1, связанного с вращением Земли, на коротких и внутрисуточных интервалах времени представляется целесообразным учёт поправок на возмущения короткопериодических лунных приливов.

5. Построена модель внутрисуточных колебаний полюса Земли, которая имеет прикладное значение для задач навигации.

Степень достоверности и апробация результатов:

Достоверность построенных математических моделей и сделанных выводов обеспечена корректной математической постановкой задач, применением строгих математических выводов и подтверждается хорошим согласованием с данными наблюдений и измерений МСВЗ. Основные результаты диссертации докладывались автором на конференциях.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 печатных работах, в том числе в 3 статьях в журналах из списка ВАК.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на:

- конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела » (г. Донецк, июль, 2011г.);
- XXXXII Всероссийском симпозиуме «Механика и процессы управления» (г. Миасс, декабрь, 2012 г.);
- конференции «Инновации в авиации и космонавтике - 2013» (г. Москва, МАИ, апрель, 2013 г.);
- конференции «Международная конференция по математической теории управления и механике» (г. Суздаль, июль, 2013 г.).

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Она содержит 100 страниц машинописного текста, включающего 19 рисунков и список литературы из 59 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, её научная новизна и практическая значимость. Сформулированы цели и задачи исследований. Представлены основные научные положения, выносимые на защиту. Даются структура и содержание диссертации. Дана общая характеристика диссертационной работы.

В первой главе диссертации рассматривается небесномеханическая модель колебательного движения полюса Земли.

Для адекватного описания возмущенных движений деформируемой Земли вокруг центра масс в работе используется простая механическая модель вязкоупругого твердого тела. Планета представляется двухслойной, состоящей из абсолютно твердого ядра и вязкоупругой мантии. На внутренней границе перемещения частиц упругой среды отсутствуют, а внешняя граница свободна. Считается, что среда описывается линейной теорией вязкоупругости, а процесс деформации происходит квазистатически. Эти допущения позволяют применить строгие теоремы механики, методы возмущений и усреднений и наглядно исследовать модель вращательно-колебательных движений Земли.

Далее на основе модели вязкоупругого тела для системы "Земля-Луна" в поле притяжения Солнца с помощью асимптотических методов нелинейной механики и математического моделирования уравнений движения в переменных действие-угол даны качественный анализ и количественные оценки сложного динамического процесса, учитывающего взаимное расположение мгновенной оси вращения Земли, оси фигуры и её вектора кинетического момента. Исследованы возможности идентификации и приближения аналитической модели к реальным траекторным измерениям движения земного полюса по данным МСВЗ.

Исследуемые колебательные движения полюса для вязкоупругой Земли основываются на наиболее общих уравнениях механики, которые справедливы для произвольных деформируемых тел.

Для исследования колебательного движения полюса Земли под действием внешних возмущающих моментов гравитационно-приливных сил вначале определяется его невозмущённое движение. Для этого в переменных действие-

угол выписывается функционал Рауса для модельной задачи и строятся траектории в фазовом пространстве I_j, ω_j ($j = 1, 2, 3$). Усреднённый по быстрым угловым переменным (собственному вращению и орбитальному движению), функционал Рауса R_0 имеет вид:

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{A^*} \left(1 - \mu^* \frac{\alpha^2}{\chi^2} \right), \quad \mu^* = \frac{C^* - A^*}{C^*}. \quad (1)$$

Затем приводится общее решение рассматриваемой на предварительном этапе усреднённой задачи, отвечающей функционалу Рауса R_0 :

$$\begin{aligned} I_i(t) &= I_i^0 = const, \quad \omega_3(t) = w_3^0, \\ w_{1,2}(t) &= n_{1,2}(t) + w_{1,2}^0, \quad w_i^0 = const, \\ n_1 &= -\frac{\pi}{2} \frac{I_2}{A^*} \frac{\mu^* \kappa}{\kappa_* \chi K(\lambda)}, \quad n_2 = \frac{I_2}{A^*} \left(\frac{A^*}{C^*} + \mu^* \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right)}{K(\lambda)} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \kappa_* &= \sqrt{1 + \kappa^2}, \quad K = \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + O(\lambda^4), \\ \chi &= \kappa \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \quad \Pi = \frac{\pi}{2\kappa_*} + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Здесь A^*, B^*, C^* - эффективные главные центральные моменты инерции с учётом деформаций «замороженной» фигуры Земли; фазы w_1, w_2 и частоты n_1, n_2 отвечают соответственно чандлеровскому движению полюсов и суточному вращению деформируемой Земли.

С помощью кинематических уравнений Эйлера и динамических уравнений Эйлера-Лиувилля строится математическая модель первого приближения чандлеровских и годовых колебаний полюса под воздействием гравитационно-приливных сил от Солнца и Луны. С использованием численного моделирования строится траектория и прогноз движения полюса Земли в сопоставлении с астрометрическими данными МСВЗ.

Для изучения осевого вращения деформируемой Земли и колебания его полюса воспользуемся классическими динамическими уравнениями Эйлера-

Лиувилля с переменным тензором инерции которые могут быть записаны в известной форме:

$$\begin{aligned}
 J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M}, \\
 \boldsymbol{\omega} &= (p, q, r)^T, \quad J = J^* + \delta J, \\
 J^* &= \text{const}, \quad J^* = \text{diag}(A^*, B^*, C^*), \quad \delta J = \delta J(t), \\
 \|\delta J\| &\ll \|J^*\|, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_k + \mathbf{M}^S + \mathbf{M}^L.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости в связанной с Землей гринвичской геоцентрической системе координат, оси которой приближенно совпадают с главными центральными осями инерции J^* с учётом деформаций «замороженной» Земли, обусловленных сложным движением - собственным вращением и движением относительного барицентра системы Земля- Луна.

Считается, что малые вариации тензора инерции δJ могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные влиянием лунно-солнечных суточных приливов и, возможно, другие (годовые, полугодовые, месячные, полусуточные и т.п.). В качестве основных возмущающих внешних моментов сил \mathbf{M} , вызывающих нутационные колебания земного полюса, принимаются гравитационно-приливные воздействия от Солнца и Луны.

Численные расчёты проводились на основе процедуры метода наименьших квадратов. Алгоритм применялся независимо к переменным $x(\tau)$, $y(\tau)$ в виде шестимерных аппроксимаций согласно построенной модели

$$\begin{aligned}
 x(\tau) &= (\zeta, f(\tau)), \quad y(\tau) = (\mu, f(\tau)), \\
 \zeta &= (\zeta_1, \dots, \zeta_6)^T, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_6)^T, \\
 f(\tau) &= (1, \tau, \cos 2\pi N\tau, \sin 2\pi N\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T, \\
 N &\approx 0.845 \div 0.850.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Получены интерполяция траектории полюса на интервалах времени 6, 12 лет и более и прогноз на 1- 3 года. Шестимерные векторы ζ, μ подлежат определению. Исследование эффективности интерполяции и прогноза движения полюса Земли на основе ежедневных данных измерений МСВЗ свидетельствует об удовлетворительной точности построения модели (4).

Для реальной ситуации, отвечающей современным данным МСВЗ, повышение точности краткосрочного прогноза (0.5-3 месяца) достигается уменьшением длительности интервала интерполяции. Это обусловлено уменьшением динамической ошибки аппроксимации процесса и сравнительно высокой точностью измерений. Процедура оптимизации (т.е. уменьшения) интервала и его влияния на прогноз иллюстрируется на графиках рис. 1 - 2. Длительность интервала обработки уменьшалась от 8 лет до 1 года (от 2922 до 365 точек). Установлено, что для однолетнего интервала обработки (рис.2) погрешность прогноза составляет величину 10^{-3} угл. сек.

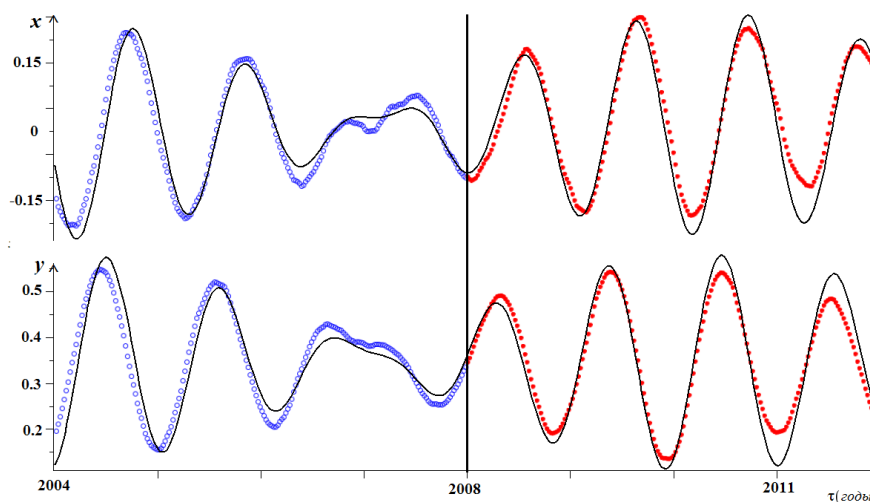


Рис. 1. Четырехлетняя интерполяция (2004- 2008 гг.) и четырехлетний прогноз (2008- 2011 гг.) координат полюса $x(\tau)$, $y(\tau)$.

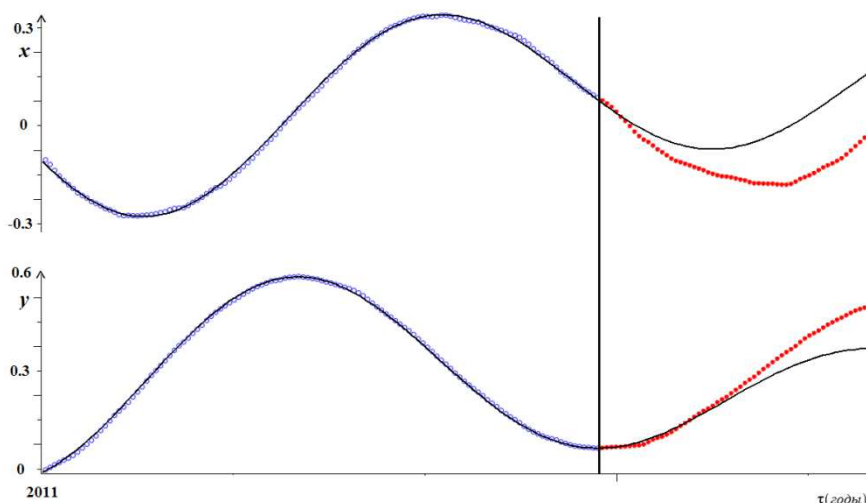


Рис. 2. Годичная интерполяция на 2011 г., краткосрочный (~ 150 сут.) прогноз координат полюса $x(\tau)$, $y(\tau)$.

На промежутке 1.5 месяца по оси x и 2.5 месяца по оси y , т.е. линейная ошибка прогноза координат земного полюса порядка $5 \div 10$ см. Интерполяция на четырехлетнем интервале и соответствующий четырехлетний прогноз (рис.1) являются «умеренно удовлетворительными».

Во второй главе диссертации основное внимание уделено построению динамической модели осевого вращения Земли, описывающей вариации продолжительности суток на коротких интервалах времени.

Для изучения осевого вращения Земли рассматривается третье уравнение системы (3) для компоненты $r(t)$:

$$C^* \dot{r} + (B^* - A^*) pq + (J_{qr} p - J_{pr} q) r = M_r^S + M_r^L. \quad (5)$$

Здесь J_{pr}, J_{qr} – малые внедиагональные элементы тензора инерции, $M_r^{S,L}$ – компоненты гравитационно-приливных возмущающих моментов от Солнца и Луны соответственно.

Величина изменения длительности суток $l.o.d.(\varphi, t)$ (length of the day changes) связана с угловой скоростью осевого вращения Земли $r(t)$ и определяется выражением:

$$r(t) = \left[1 + \frac{d(UT1 - TAI)}{d(TAI)} \right] r_0 \cong \left[1 - \frac{l.o.d.(t)}{86400c} \right] r_0, \quad (6)$$

$$r_0 = 7.292115 \times 10^{-5} \frac{rad}{c}.$$

Небесномеханическая модель приливных регулярных изменений скорости осевого вращения Земли описывается линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d \left[(C^* + \delta C) l.o.d.(\varphi, t) \right]}{dt} = -\frac{D_0}{r_0} \left[M_r^S + M_r^L + \Delta M(\dot{\Omega}, \dot{i}) \right],$$

$$\frac{d[UT1 - TAI](\varphi, t)}{dt} = -D_0^{-1} l.o.d.(\varphi, t), \quad (7)$$

$$D_0 = 86400c.$$

Здесь C^* – осевой момент инерции с учетом деформаций «замороженной» фигуры Земли; φ – угол собственного вращения; $M_r^{S,L}$ – лунно-солнечные

гравитационно-приливные моменты сил с основными частотами; $\Delta M^{S,L}(\dot{\Omega}, \dot{I})$ – слагаемые более высокой степени малости в разложении лунно-солнечного гравитационно-приливного момента пространственного варианта данной задачи. Например, выражение M_r^S имеет следующую структуру:

$$M_r^S = 3\omega_0^2 \left[\left(B^* + \delta B - (A^* + \delta A) \right) \gamma_p \gamma_q + \delta J_{pq} (\gamma_p^2 - \gamma_q^2) + \delta J_{qr} \gamma_p \gamma_r - \delta J_{pr} \gamma_q \gamma_r \right], \quad (8)$$

$$\gamma_p = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_q = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_r = \cos \theta,$$

где ω_0 – частота орбитального движения, $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r$ – направляющие косинусы радиус-вектора в связанной системе; ψ, θ, φ – углы Эйлера; A^*, B^*, C^* – эффективные главные центральные моменты инерции с учётом деформаций «замороженной» Земли; коэффициенты $\delta A, \delta B, \delta J_{pq}, \delta J_{qr}, \delta J_{pr}$ обусловлены приливыми суточными и полусуточными гравитационными воздействиями Луны и Солнца. Они не поддаются прямым измерениям. Для них могут быть получены косвенные оценки на основе измерений характеристик процесса.

Интегрируя уравнение (7), получим модель флуктуаций длительности суток, учитывающую основные лунно-солнечные возмущения:

$$l.o.d.(\tau) = c(\tau) + a_c^s \cos(2\pi\tau) + a_s^s \sin(2\pi\tau) + b_c^s \cos(4\pi\tau) + b_s^s \sin(4\pi\tau) +$$

$$+ a_c^L \cos(2\pi\nu_m\tau) + a_s^L \sin(2\pi\nu_m\tau) + b_c^L \cos(2\pi\nu_f\tau) + b_s^L \sin(2\pi\nu_f\tau). \quad (9)$$

Здесь $\nu_m = 13.28$, $\nu_f = 26.68$ – частоты месячного и двухнедельного колебаний, обусловленных лунным возмущением; неизвестные $c, a_{C,S}^{S,L}, b_{C,S}^{S,L}$ – величины, подлежащие вычислению с помощью метода наименьших квадратов по измерениям МСВЗ. Параметр τ в (9) измеряется стандартными годами.

Для внутригодовых интервалов из (6) и (9) запишем выражение для разности $UT1-TAI$:

$$\frac{1}{365.25} [UT1 - TAI](\tau) = - \int l.o.d.(\tau) d\tau$$

$$= const - c\tau - (2\pi)^{-1} (a_s^s \sin(2\pi\tau) - a_c^s \cos(2\pi\tau)) -$$

$$- (4\pi)^{-1} (b_s^s \sin(4\pi\tau) - b_c^s \cos(4\pi\tau)) -$$

$$- (2\pi\nu_m)^{-1} (a_s^L \sin(2\pi\nu_m\tau) - a_c^L \cos(2\pi\nu_m\tau)) -$$

$$- (2\pi\nu_f)^{-1} (b_s^L \sin(2\pi\nu_f\tau) - b_c^L \cos(2\pi\nu_f\tau)) \quad (10)$$

Для пространственного варианта ограниченной задачи трех тел Земля–Луна–Солнце уравнение возмущенного движения узла лунной орбиты Ω_M и наклона I плоскости лунной орбиты к эклиптике имеют вид:

$$\frac{d\Omega_M}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n_S^2}{n_M} \left[1 - \cos 2(l_M - \Omega_M) - \cos 2(l_S - \Omega_M) + \cos 2\lambda \right], \quad (11)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{3}{4} \frac{n_S^2}{n_M} \sin I \left[\sin 2(l_S - \Omega_M) - \sin 2(l_M - \Omega_M) + \sin 2\lambda \right].$$

Здесь n_M, n_S – сидерические средние движения Луны и Солнца соответственно; периодические колебания угла I совершаются с периодом 18.61 года; l_M – средняя долгота Луны; a_M – большая полуось орбиты Луны; $(l_M - \Omega_M)$ – угол между Луной и восходящим узлом лунной орбиты; $\lambda = (n_M - n_S)t + \lambda_0$ – приближенно разность долгот Луны и Солнца. Она не является линейной функцией времени, поскольку среднее движение n_M подвергается, по крайней мере, периодическим изменениям.

Представим приливные коэффициенты лунно-солнечных гравитационно-приливных моментов сил (амплитуд и фаз основных колебаний) в виде квазипериодических функций по времени. Необходимое для такого представления соответствие коэффициентов внутригодовых и внутрисуточных квазипериодических колебаний (наличия структурных свойств моделей) наглядно иллюстрируется на рис. 3 и получается из обработки наблюдений Земли. На нем приводится сравнение нестационарных усредненных внутригодовых и амплитудных модуляций внутрисуточных колебаний длительности суток $l.o.d.(\tau)$ и $\langle A(\tau) \rangle_\varphi$ соответственно. В этом случае «нерегулярные» колебания во вращательном движении Земли аппроксимируются квазипериодическим процессом, производная которого имеет структуру гравитационно-приливного момента с периодическими коэффициентами.

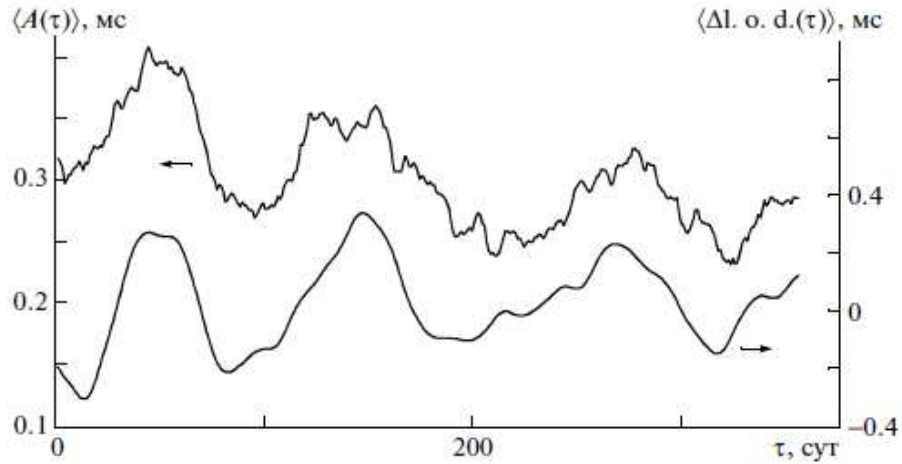


Рис. 3. Усредненные амплитудные модуляции нестационарных внутрисуточных флуктуаций $\langle A(\tau) \rangle_\phi$ и усредненные квазипериодические внутригодовые колебания $\langle \Delta l.o.d.(\tau) \rangle$ (усредненный резидиум на 40-суточном интервале времени) в течение лунного года в 2008г.

Обозначив $\mu(t) = r_0^{-1} \left[M_r^S + M_r^L + \Delta M^{SL}(\dot{\Omega}, \dot{I}) \right]$, выражения изменения длительности суток и временной поправки будут иметь вид:

$$[UT1 - TAI](t) = [UT1 - TAI](0) - D_0^{-1} l.o.d.(0)t + \int_0^t (t - t_1) \langle \mu(t_1) \rangle_\phi dt_1, \quad (12)$$

$$l.o.d.(t) = l.o.d.(0) - D_0 \int_0^t \langle \mu(t_1) \rangle_\phi dt_1.$$

Здесь $\langle \dots \rangle_\phi$ – символ осреднения на суточном интервале времени.

Численное моделирование внутригодовой приливной неравномерности осевого вращения Земли на основе выражений (12) проводится методом наименьших квадратов.

На рис. 5 приводятся интерполяция изменения длительности суток $l.o.d.$, выполненная с помощью построенной модели на интервале времени с 01.09.2010 г. по 01.09.2011 г., в сравнении с данными наблюдений МСВЗ и прогноз до 01.01.2012 г. На рис. 6 приводятся интерполяция и прогноз временной поправки $UT1 - TAI$ на тех же интервалах. Следует отметить, что поправка $UT1 - UTC$ отличается от $UT1 - TAI$, входящей в выражение (12), на целое число секунд. Вынужденная процедура введения «скачущих» секунд осуществляется МСВЗ и частота их определяется межгодовой неравномерностью осевого вращения Земли.

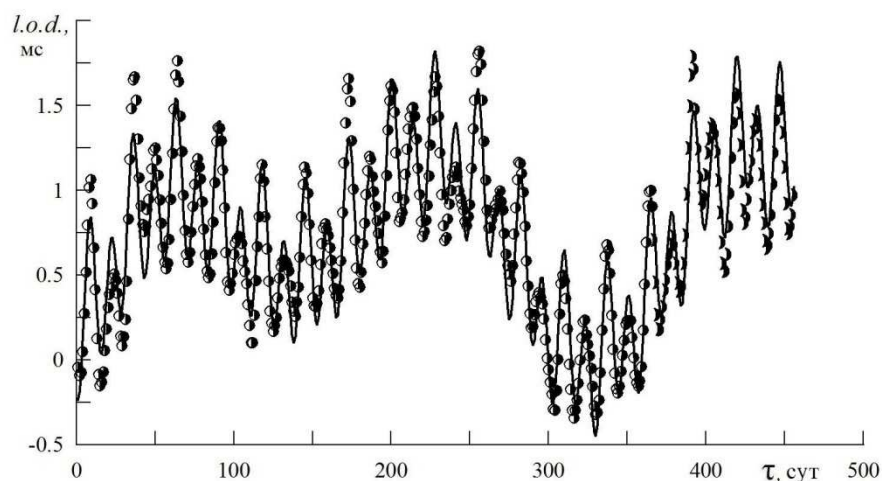


Рис. 4. Интерполяция изменения длительности суток $l.o.d.$ в сравнении с данными наблюдений (01.09.2010 г.– 01.09.2011 г.) и прогноз до 01.01.2012 г. Сплошная линия – теоретическая модель. Дискретные данные (точки и полумесяцы) – результаты наблюдений МСВЗ в сравнении с интерполяцией и прогнозом соответственно.

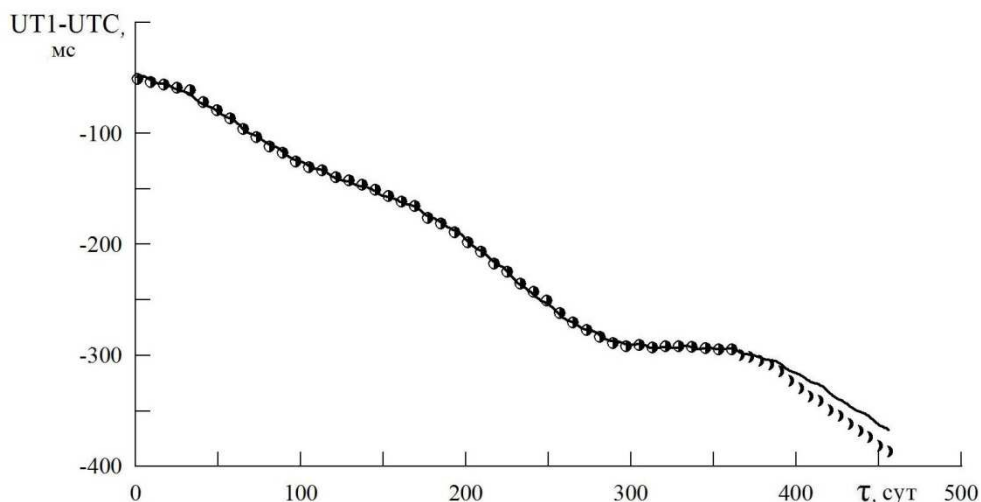


Рис. 5. Интерполяция временной поправки $UT1 - UTC$ в сравнении с данными наблюдений (01.09.2010 г.– 01.09.2011г.) и прогноз до 01.01.2012 г. Дискретные данные (точки и полумесяцы) – результаты наблюдений МСВЗ в сравнении с интерполяцией и прогнозом соответственно.

В третьей главе рассматривается построение динамической модели внутрисуточного колебательного процесса полюса Земли. Дифференциальные уравнения колебательного движения земного полюса на внутрисуточных интервалах времени могут быть получены из динамических уравнений Эйлера-

Лиувилля пространственного варианта задачи «деформируемая Земля-Луна» в поле притяжения Солнца.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[1 + \chi_A + \kappa_p r_0 \right] p + N_p \frac{B}{A} (1 + \chi_B) q &= \kappa_q r^2 + M_{p,q}^{SL}(\Omega, I, \pi), \\ \frac{d}{dt} \left[1 + \chi_B + \kappa_q r_0 \right] q - N_q \frac{A}{B} (1 + \chi_A) p &= -\kappa_p r^2 + M_{q,p}^{SL}(\Omega, I, \pi), \\ N &= \sqrt{N_p N_q (1 + \chi_A)(1 + \chi_B)} \simeq (0.84 \div 0.85) \omega_0, \\ A &= A^* + \delta A, B = B^* + \delta B, C = C^* + \delta C, \\ \chi_A &= \frac{\delta A}{A^*}, \chi_B = \frac{\delta B}{B^*}, \kappa_p = \frac{\delta J_{pr}}{A^*}, \kappa_q = \frac{\delta J_{qr}}{B^*}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\omega = (p, q, r)^T$ - вектор угловой скорости в связанной с Землей системе координат; N – чандлеровская частота; ω_0 - среднее движение Земли по орбите вокруг Солнца; A^*, B^*, C^* - эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций «замороженной» фигуры Земли; малые вариации тензора инерции δJ_{ij} ($i, j = p, q, r$) содержат различные гармонические составляющие (зональные, тессеральные, секториальные), обусловленные возмущающим влиянием гравитационных приливов от Солнца и Луны и других факторов; $\chi_A, \chi_B, \kappa_p, \kappa_q$ - приливные горбы и выступы соответственно; $M_{p,q}^{SL}(\Omega, I, \pi)$ - зависящие от переменных Эйлера (углов нутации θ , прецессии ψ и собственного вращения φ) и средних движений Земли и Луны удельные моменты лунно-солнечных гравитационно-приливных сил; Ω - долгота восходящего узла лунной орбиты; π - долгота перигея орбиты Луны; I - наклонение плоскости лунной орбиты к эклиптике.

Для описания внутрисуточных колебаний земного полюса примем следующие обозначения в разложении вариаций тензора инерции δJ_{ij} :

$$\delta J_{ij} = \delta J_{ij}^{(t)} + \delta J_{ij}^{(\varphi)} + \delta J_{ij}^{(2\varphi)} + \dots \quad (14)$$

где $\delta J_{ij}^{(t)}$ - внутригодовые и межгодовые вариации; $\delta J_{ij}^{(\varphi)}$, $\delta J_{ij}^{(2\varphi)}$ - суточные и полусуточные вариации.

Внутрисуточные вариации $\delta J_{ij}^{(\varphi)}$, $\delta J_{ij}^{(2\varphi)}$ содержат составляющие колебаний с комбинационными частотными ν_i пространственного варианта задачи и частотами ϑ_j , обусловленными нерегулярными возмущениями. Например, суточные колебания приливных выступов κ_p , κ_q представимы следующим образом:

$$\kappa_p^{(\varphi)} = \sum_i A_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + \alpha_i), \quad (15)$$

$$\kappa_q^{(\varphi)} = \sum_i B_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + \beta_i),$$

где амплитуды $A_i^{(\varphi)}$, $B_i^{(\varphi)}$ подлежат определению из наблюдений; фазы α_i , β_i соответствуют компонентам приливообразующего геопотенциала. Следует отметить, что в отличие от случая регулярных колебаний приливного потенциала вязкоупругой планеты, когда $\kappa_q^{(\varphi)} \approx \kappa_p^{(\varphi+\pi/2)}$, функция $\kappa_p^{(\varphi)}$ и $\kappa_q^{(\varphi)}$ принимаются существенно различными, они могут содержать произвольного вида наблюдаемые компоненты, которые аппроксимируются гармоническими составляющими с частотами ϑ_j . Полусуточные составляющие приливных коэффициентов – горбов и выступов – имеют аналогичный выражениям (15) вид.

Выражения координат земного полюса x_p , y_p в результате решения системы (13) представим в виде суммы:

$$x_p = \bar{x}_p + x_p^{(\varphi)} + x_p^{(2\varphi)}, \quad (16)$$

$$y_p = \bar{y}_p + y_p^{(\varphi)} + y_p^{(2\varphi)},$$

где \bar{x}_p , \bar{y}_p - основная математическая модель колебаний земного полюса, а $x_p^{(\varphi)}$, $y_p^{(\varphi)}$, $x_p^{(2\varphi)}$, $y_p^{(2\varphi)}$ - суточные и полусуточные слагаемые модели его высокочастотных колебаний:

$$x_p^{(\varphi)} = \sum_i a_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + \nu_i + \alpha_i^{(\varphi)}) + \sum_j c_j^{(\varphi)} \cos(\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{(\varphi)}),$$

$$y_p^{(\varphi)} = \sum_i a_i^{(\varphi)} \sin(\varphi + \nu_i + \alpha_i^{(\varphi)}) + \sum_j c_j^{(\varphi)} \sin(\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{(\varphi)}), \quad (17)$$

$$x_p^{(2\varphi)} = \sum_i a_i^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + \nu_i + \alpha_i^{2\varphi}) + \sum_j c_j^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{2\varphi}),$$

$$y_p^{(2\varphi)} = \sum_i b_i^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + \nu_i + \gamma_i^{2\varphi}) + \sum_j d_j^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + \vartheta_j + \delta_j^{2\varphi}).$$

На основе оценок слагаемых модели главным образом коэффициенты κ_p, κ_q определяют положение мгновенной оси деформируемой фигуры Земли. Между коэффициентами модели существует структурное свойство, при котором будет выполняться равенство $y_p^{(\varphi)} = x_p^{(\varphi+\pi/2)}$.

Приведем результаты численного моделирования, выполненного на основе метода наименьших квадратов, в сравнении с высокоточными данными наблюдений и измерений МСВЗ и РСДБ-наблюдений.

На рис. 6 приведены интерполяция внутрисуточных колебаний координат x_p, y_p земного полюса на интервале времени с 12.08.2008 г. по 24.08.2008 г. и прогноз на двое суток в сравнении с данными РСДБ-наблюдений (здесь координаты x_p, y_p измеряются в угловых миллисекундах).

Моделирование результирующей траектории земного полюса проводится независимо для основной модели (\bar{x}_p, \bar{y}_p) и модели его внутрисуточных колебаний $(x_p^{(\varphi)} + x_p^{(2\varphi)}, y_p^{(\varphi)} + y_p^{(2\varphi)})$ согласно (16), (17).

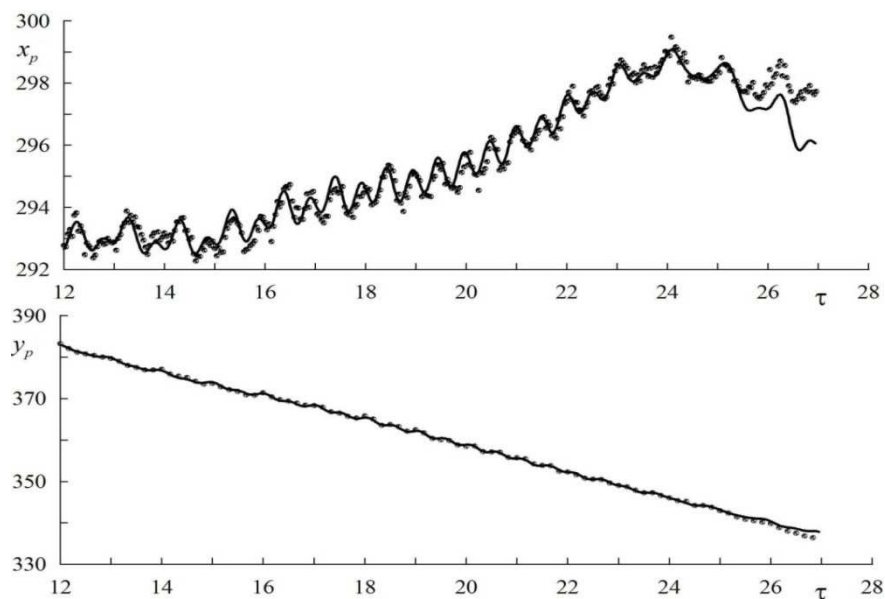


Рис. 6. Интерполяция (с 12.08.2008 г. по 24.08.2008 г.) и прогноз (с 25.08.2008 г. по 26.08.2008 г.) координат земного полюса x_p, y_p .

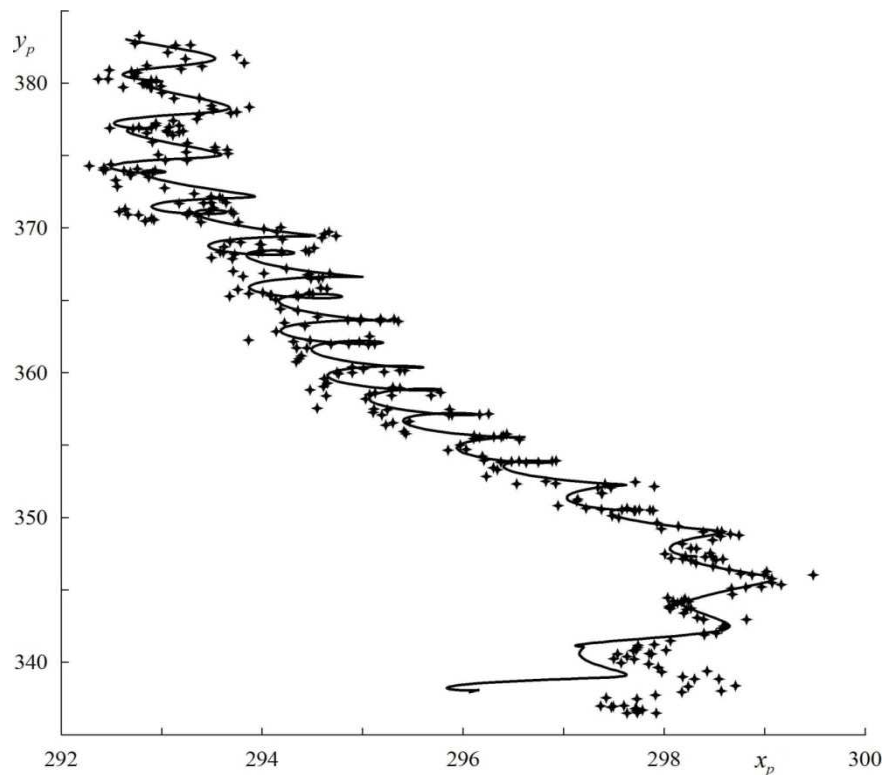


Рис. 7. Интерполяция (с 12.08.2008 г. по 24.08.2008 г.) и прогноз (с 26.08.2008 г. по 26.08.2008 г.) траектории земного полюса.

Основная траектория полюса строится с помощью взвешенного метода наименьших квадратов на длительном интервале интерполяции, примыкающем к прогнозируемому интервалу. На рис. 7 приведены интерполяция с 12.08.2008 по 24.08.2008 траектории полюса Земли и ее прогноз с 26.08.2008 по 26.08.2008.

Заметим, что из анализа результатов численного моделирования среднесуточного движения земного полюса на различных интервалах времени, оценки точности прогноза основной модели лежат в пределах $1.5 \div 2$ см.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Проведено моделирование колебательного движения полюса Земли в переменных действие-угол, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ.
2. Разработана небесномеханическая модель приливной неравномерности осевого вращения деформируемой Земли, учитывающая короткопериодические возмущения Луны с комбинационными частотами.
3. С помощью спектрального анализа учтены нестационарные колебания неравномерности вращения Земли с малыми амплитудами.

4. Установлено, что для повышения точностных характеристик прогноза нестабильности шкалы Всемирного времени UT1, связанного с вращением Земли, на коротких и внутрисуточных интервалах времени представляется целесообразным учёт поправок на возмущения короткопериодических лунных приливов.

5. Построена модель внутрисуточных колебаний полюса Земли, которая имеет прикладное значение для задач навигации.

Основные публикации по теме диссертации:

I. В изданиях, рекомендованных перечнем ВАК:

1. Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Нгуен Ле Зунг, Перепёлкин В.В. Неравномерности вращения Земли и проблема нестабильности шкал времени // ДАН. 2012. — Т.442(4). — С. 468-473.
2. Крылов С.С., Филиппова А.С., Нгуен Ле Зунг Внутрисуточный анализ колебаний полюса Земли // Космонавтика и ракетостроение, 2014 . —1(74) . — С.106-112.
3. Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С., Нгуен Ле Зунг Моделирование внутрисуточного колебательного процесса земного полюса // Астрономический журнал, 2014. —Т. 91(3). — С.251-260.

II. В других изданиях:

4. Нгуен Ле Зунг, Перепёлкин В. В. Разработка динамических моделей прогнозирования параметров вращения Земли на базе информационных ресурсов МСВЗ // Одиннадцатая международная конференция «Устойчивость, управление и динамика твердого тела» Донецк. 2011. — С.92.
5. Нгуен Ле Зунг. Моделирование вращательно-колебательных движений деформируемой Земли (интерполяция и прогноз) // XXXXII Всероссийский симпозиум «механика и процессы управления».г.Миасс (18-20 декабря 2012 года). — Т.3. — С.17-23.
6. Нгуен Ле Зунг. Высокоточный прогноз временных поправок в спутниковой навигации // Московская молодежная научно-практическая конференция.

«Инновации в авиации и космонавтике». Сборник тезисов докладов, Москва, 2013.

7. Бондаренко В. В., Перепёлкин В. В., Нгуен Ле Зунг. Моделирование внутрисуточных колебаний полюса деформируемой Земли // «Международная конференция по математической теории управления и механике». Тезисы докладов, г. Суздаль, 2013.

Список использованных источников:

8. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Модель движения полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим данным // *Астрономический журнал*. 2002. — Т. 79(1). — С. 81-89.
9. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. и др. Гравитационно-приливной механизм колебаний полюса Земли // *Астрономический журнал*. — 2005. — Т. 10(82). — С. 950-960.
10. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. др. Высокоточный прогноз движения полюса Земли // *Астрономический журнал*. — 2006. — Т. 4(83). — С. 376-384.
11. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Анализ влияния многочастотных воздействий на колебания полюса Земли // *Астрономический журнал*. 2007. — Т. 84(5). — С. 471-478.
12. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Моделирование движения полюса Земли на коротком интервале // *ДАН*. — 2009. — Т. 2(425). — С. 326-331.
13. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Небесномеханическая модель неравномерности вращения Земли // *Космические исследования*. — 2009. — Т. 5(47). — С. 452–459.