

Труды МАИ. 2024. № 136
Trudy MAI, 2024, no. 136

Научная статья

УДК 539.43

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180668>

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ДИАГРАММЫ ПО ИСПЫТАНИЯМ НА СКОРОСТЬ РОСТА ТРЕЩИНЫ УСТАЛОСТИ

Александр Михайлович Крупенин

ПАО «ОДК-УМПО» филиал «ОКБ им. А. Люльки»,

Москва, Россия

Zeus-RUSS@yandex.ru

Аннотация. В работе предложен новый метод построения кинетической диаграммы скорости роста трещины усталости по экспериментальным данным. Метод обладает тем преимуществом, что позволяет учитывать не только количественные, но и качественные характеристики экспериментальных данных. В качестве результата получается кинетическая диаграмма, представляющая из себя функцию, а не разброс точек. По построенной кинетической диаграмме также определяются ее характеристики: границы участка устойчивого роста трещины, коэффициенты уравнения Пэриса, а также коэффициенты уравнения, описывающего первый участок кинетической диаграммы.

Ключевые слова: кинетическая диаграмма, скорость роста трещины усталости, уравнение Пэриса, первый участок кинетической диаграммы

Для цитирования: Крупенин А.М. Новый метод построения кинетической диаграммы по испытаниям на скорость роста трещины усталости // Труды МАИ. 2024. № 136. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180668>

Original article

NEW METHOD FOR CONSTRUCTION KINETIC DIAGRAM BY FATIGUE CRACK GROWTH RATE TESTS

Aleksandr M. Krupenin

A Lyulka Experimental Design Bureau – Branch of PJSC “UEC-UMPO”,
Moscow, Russia

Zeus-RUSS@yandex.ru

Abstract. The article proposes a new method for kinetic diagram plotting of the fatigue crack growth rate by experimental data.

The article is divided into nine parts.

The first part discusses the work relevance, as well as adduces links to the previously conducted research on this issue.

The second part provides general description of processing results of the experiments on fatigue crack growth rate.

The third part discusses specifics and limitations of the current method of results processing of the experiments on fatigue crack growth rate.

The fourth part gives and substantiates assumptions on the qualitative characteristics of experimental data.

The fifth part describes the proposed method for the results processing of the experiments on fatigue crack growth rate. Special basic functions with which processing is performed, are being introduced.

The sixth part performs the studies of the derivatives and integrals of basic functions.

The seventh part describes the methods for determining characteristics of the kinetic diagram. These are the boundaries of the second section, coefficients of the Paris equation and coefficients of the equation approximating the first section of the kinetic diagram.

The eighth part demonstrates the results of the kinetic diagram characteristics computing, as well as provides an example of the operating time computing for a compact sample.

The ninth part presents inferences on the work being accomplished.

1. The causes limiting accuracy of the classical methods for plotting a kinetic diagram are shown. The article demonstrates that the relative error in determining the FCGR through the ratio of finite differences is rather significant and it is not constant in the value of the argument of the $V(N)$ function. Thus, computing the FCGR through the finite differences may lead to a significant error in defining the kinetic diagram and its characteristics.

2. The author introduces and substantiates the assumptions on the qualitative mathematical properties of experimental curves and kinetic diagram. The following properties such as monotony, convexity and the presence of an asymptote are being supposed for the experimental dependence $l(N)$. For dependencies $V(N)$ and $V(\Delta K(l))$, we assume the following properties: smoothness, monotony, and the presence of an asymptote (for $V(N)$).

3. A new method for plotting a kinetic diagram of the FCGR from the SIF range based on the results of an experiment at the FCGR, with account for the qualitative characteristics of the experimental data has been developed. The said method allows obtaining a kinetic

diagram not in the form of a scatter of points, but in the form of a smooth function, which, in its turn, allows considering the kinetic diagram characteristics, as well as some specifics of its behavior, including the first section of the diagram, in more detail.

4. Basic functions, by which experimental data is processed on the FCGR in the proposed method are introduced and studied.

5. Methods for obtaining the kinetic diagram characteristics, describing both the stage of steady growth and the first section of the kinetic diagram, have been developed.

6. The article demonstrates that the first stage of the crack growth may occupy a large part of the cyclic durability.

7. It was demonstrated that a less conservative solution than the solution obtained using only the Paris equation is being obtained with account for the first section of the kinetic diagram when computing the operating time.

Keywords: kinetic diagram, fatigue crack growth rate, Paris law, kinetic diagram first part

For citation: Krupenin A.M. New method for construction kinetic diagram by fatigue

crack growth rate tests // *Trudy MAI*, 2024, no. 136. URL:

<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=180668>

1. Введение

Методы механики разрушения широко применяются в инженерной практике [1-5], а определение наработки деталей конструкций по концепции безопасного развития дефекта (далее КБРД) является обыденностью. Однако со стороны заказчика предъявляются все более строгие требования к наработке изделий и величине ресурса. При этом текущие методы расчета слишком консервативны, и не

удовлетворяют растущих потребностей по наработкам для изделий, поэтому разработка более точных методов как никогда актуальна.

Точность расчетов может быть повышена, в том числе, за счет более детальной обработки экспериментальных данных, на которых основываются расчетные методы.

Для определения наработки по КБРД входными данными являются результаты экспериментов компактных образцов на скорость роста трещины усталости (СРТУ).

В данной работе рассматривается новый метод построения кинетической диаграммы по результатам испытаний образцов на СРТУ. Также определяются характеристики кинетической диаграммы, которые используются для расчета наработки деталей конструкций.

Различные исследования и подходы к построению кинетической диаграммы СРТУ также обсуждаются в работах [6-16].

2 Общее описание обработки результатов экспериментов на СРТУ

Расчет наработки основных деталей по КБРД производится на основе уравнения Пэриса [17]

$$V = \frac{dl}{dN} = C_2(\Delta K(l))^{m_2}; \quad (1)$$

где

V – скорость роста трещины усталости;

l – характерный размер усталостной трещины;

N – количество циклов нагружения;

$\Delta K(l)$ – размах коэффициента интенсивности напряжений (далее КИН);

C_2, m_2 – коэффициенты уравнения Пэриса.

Коэффициенты уравнения Пэриса определяются по кинетической диаграмме роста усталостной трещины (Рисунок 1), где

СХР – стадия хрупкого разрушения (первый участок),

СУР – стадия устойчивого роста (второй участок),

СНР – стадия неустойчивого роста (третий участок).

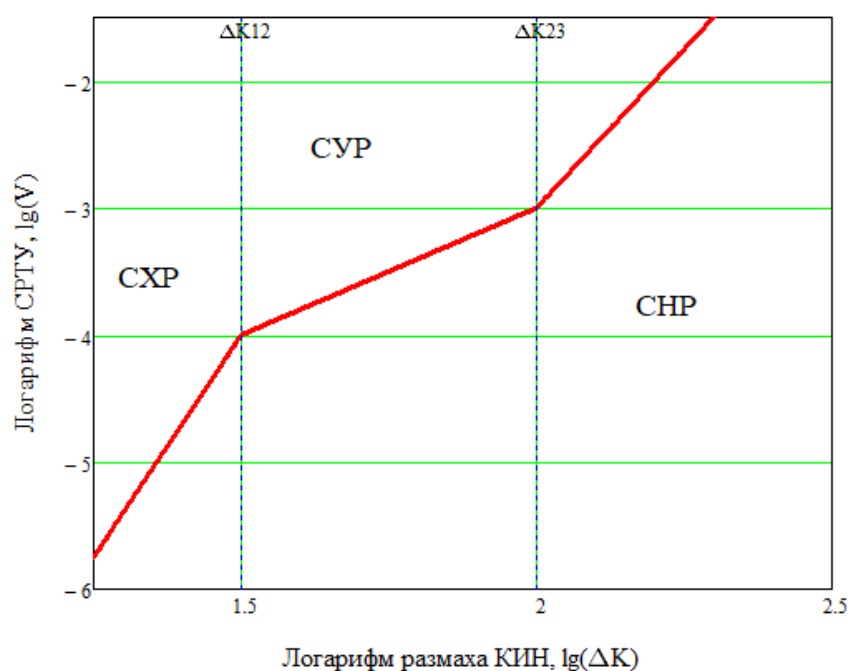


Рисунок 1 – Схематический вид кинетической диаграммы СРТУ

Уравнение Пэриса используется для описания СУР кинетической диаграммы.

Кинетическая диаграмма определяется по результатам испытаний компактных образцов на СРТУ (Рисунок 2).

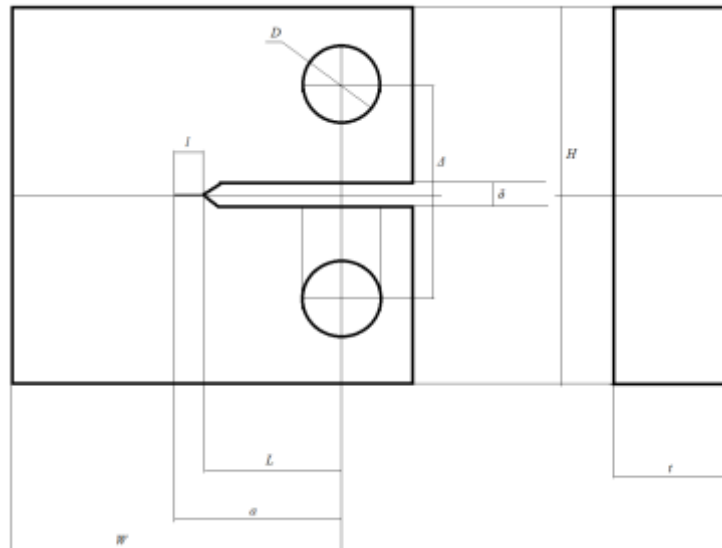


Рисунок 2 – Схематический вид компактного образца для испытаний на трещиностойкость

В качестве результата испытаний получают набор данных в виде зависимости $l(N)$ характерного размера трещины от количества циклов нагружения (Рисунок 3).

Исходную зависимость $l(N)$ необходимо преобразовать к виду

$$V = V(\Delta K(l));$$

$$\Delta K(l) = K(l)_{\max} - K(l)_{\min};$$

где $K(l)_{\max}$, $K(l)_{\min}$ – максимальное и минимальное значение КИН в цикле нагружения.



Рисунок 3 – Типичный вид исходных данных

Для определения размаха коэффициента интенсивности напряжений используют формулу (2) для компактного образца из справочника под редакцией Ю. Мураками или ГОСТ [18, 19].

$$K(l) = \frac{F}{t\sqrt{W}} YI(\alpha); \quad (2)$$

$$YI(\alpha) = \frac{(2 + \alpha)(0.886 + 4.64\alpha - 13.32\alpha^2 + 14.72\alpha^3 - 5.6\alpha^4)}{(1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\alpha = \frac{a}{W} = \frac{l_{\text{надрез}} + l}{W};$$

где

F – растягивающая сила, приложенная к отверстиям образца;

t – толщина образца (Рисунок 2);

W – расстояние от центра нагружения до поверхности образца (Рисунок 2);

a – длина трещины с учетом надреза (Рисунок 2);

$l_{\text{надрез}}$ – длина надреза.

Для определения СРТУ часто применяют следующую формулу

$$V_i \approx \frac{\Delta l_i}{\Delta N_i}; \quad (3)$$

где

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Типичный результат обработки экспериментальных данных представлен на рисунке 4.

В дальнейшем по полученной зависимости $V(l)=V(\Delta K(l))$ определяют характеристики кинетической диаграммы: параметры уравнения Пэриса C_2 и m_2 , а также границы второго участка – ΔK_{12} и ΔK_{23} (Рисунок 1).

Характеристики кинетической диаграммы получают с помощью линейной регрессии второго участка зависимости $V(\Delta K)$ в логарифмических координатах.

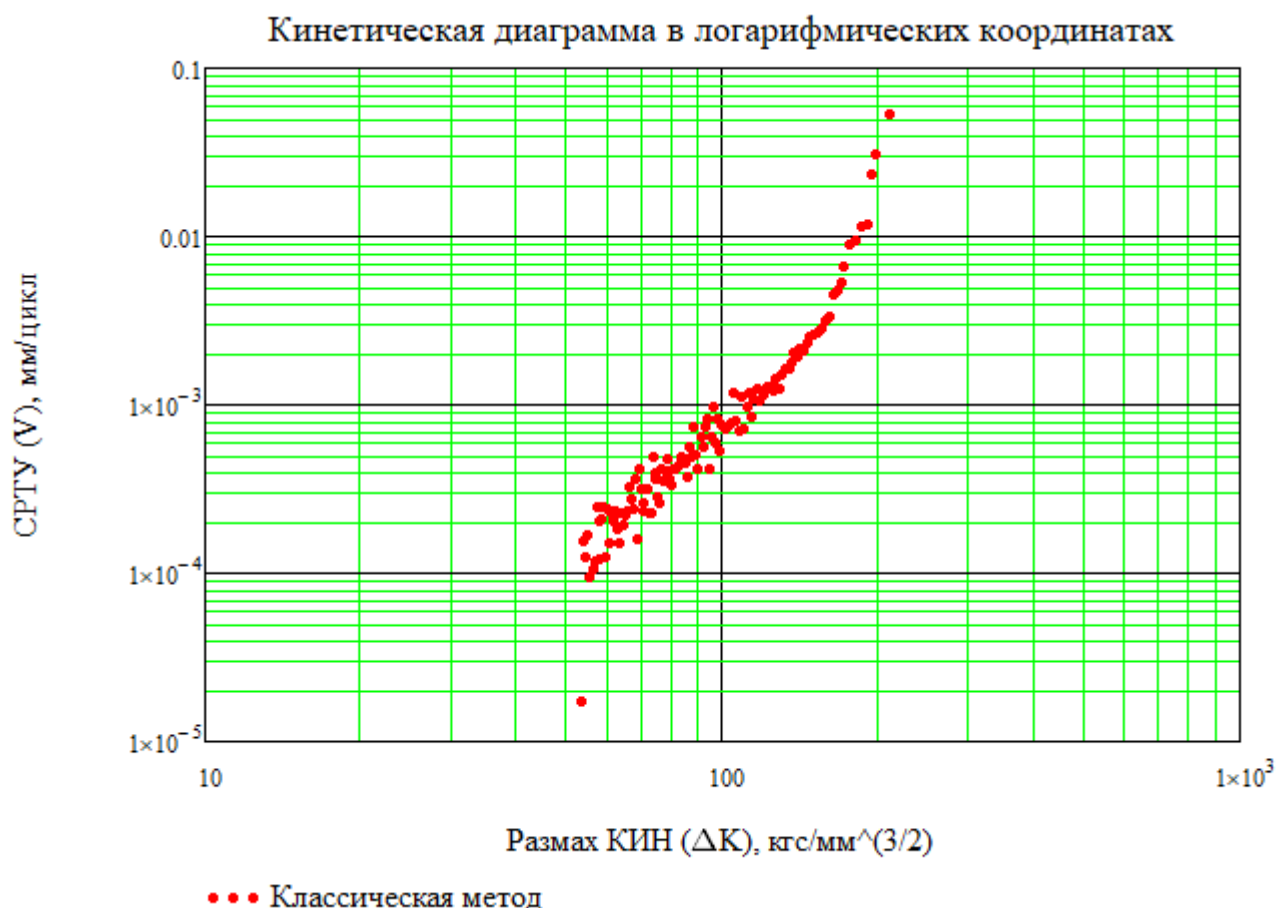


Рисунок 4 – Результат классической обработки экспериментальных данных

3 Обсуждение текущего метода обработки результатов экспериментов на СРТУ

Из рисунка 4 видно, что точки, образующие кинетическую диаграмму, подвержены существенному разбросу, что затрудняет определение характеристик кинетической диаграммы и ухудшает их точность.

Дело в том, что чтобы найти производную dl/dN предполагается, что производная равна отношению первых конечных разностей – характерного размера трещины и количества циклов нагружения соответственно – формула (3).

Однако, в данном случае, такой подход не совсем корректен.

Формула (3) может быть получена разными способами. Приведем один из них.

Напомним, что функция в окрестности точки x_0 раскладывается в ряд Тейлора следующим образом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n; \quad (4)$$

Тогда значение функции в точке x_1 будет

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x_1 - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x_1 - x_0)^3 + \dots;$$

где количеством штрихов над функцией обозначается порядок производной.

Выражая первую производную, получим

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2}(x_1 - x_0) - \frac{f'''(x_0)}{6}(x_1 - x_0)^2 - \dots;$$

или, если переобозначить в терминах Δ

$$f'(x_0) = \frac{\Delta f_0}{\Delta x_0} - \frac{f''(x_0)}{2} \Delta x_0 - \frac{f'''(x_0)}{6} \Delta x_0^2 - \dots;$$

Приведем данную формулу в терминах количества циклов и длины трещины для i -ой точки

$$V_i = \frac{\Delta l_i}{\Delta N_i} - \frac{l''(N_i)}{2} \Delta N_i - \frac{l'''(N_i)}{6} \Delta N_i^2 - \dots; \quad (5)$$

Таким образом, отношение первых разностей сходится к производной функции только в случае стремления шага к нулю: $\max(\Delta N_i) \rightarrow 0$.

Такое стремление возможно обеспечить, например, при численном решении дифференциальных уравнений, где величина шага определяется из условий устойчивости и сходимости.

В данном случае мы имеем результаты эксперимента, и на величину шага повлиять не можем.

Из формулы (5) видно, что абсолютная погрешность формулы (3) выражается соотношением:

$$\left| V_i - \frac{\Delta l_i}{\Delta N_i} \right| = \left| -\frac{l''(N_i)}{2} \Delta N_i - \frac{l'''(N_i)}{6} \Delta N_i^2 - \dots \right|; \quad (6)$$

а относительная погрешность

$$\frac{\left| V_i - \frac{\Delta l_i}{\Delta N_i} \right|}{V_i} = \frac{\left| -\frac{l''(N_i)}{2} \Delta N_i - \frac{l'''(N_i)}{6} \Delta N_i^2 - \dots \right|}{V_i}; \quad (7)$$

Поскольку зависимость $l(N)$ неизвестна, то напрямую применить формулы (6)-(7) не представляется возможным.

В дальнейшем, для приближенной оценки относительной погрешности, заменим в формуле (7) производные и значения функции на конечно-разностные соотношения, а также ограничимся только членом со второй производной в правой части равенства, тогда в качестве оценки относительной погрешности вычисления первой производной получим

$$\frac{\left| V_i - \frac{\Delta l_i}{\Delta N_i} \right|}{V_i} \approx \frac{\frac{\Delta^2 l_i}{2 \Delta N_i}}{\frac{\Delta l_i}{\Delta N_i}} = \frac{\Delta^2 l_i}{2 \Delta l_i}; \quad (8)$$

На рисунках 5, 6 (для данных, приведенных на рисунке 3) приведен пример вычисления зависимости СРТУ от количества циклов нагружения и оценки относительной погрешности этих вычислений по формуле (8) соответственно.

Из рисунков видно, что относительная погрешность вычисления производной по формуле (3) весьма существенна и непостоянна по значению аргумента.



Рисунок 5 – Типичный пример зависимости СРТУ от количества циклов нагружения, найденной по формуле (3)

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что вычисление СРТУ через конечные разности может привести к существенной погрешности определения кинетической диаграммы и ее характеристик.



Рисунок 6 – Оценка относительной погрешности формулы (3) по формуле (8) для данных на рисунке 3, %

4 Качественные свойства исходных экспериментальных данных и кинетической диаграммы

В данном разделе обсуждаются некоторые предположения о качественных характеристиках исходных данных и кинетической диаграммы СРТУ от размаха КИН.

Непрерывность функциональных зависимостей

При испытаниях на трещиностойкость характерный размер трещины и СРТУ определяются в зависимости от циклов нагружения.

Циклы являются величинами дискретными. Однако нас не интересуют отдельные циклы. Нас интересуют сотни, тысячи и десятки тысяч циклов, по сравнению с которыми отдельные циклы можно считать малыми и перейти от дискретных моделей к непрерывным.

Гладкость функциональных зависимостей

В последующем изложении экспериментальные зависимости будут приближаться непрерывными функциями, у которых предполагается достаточная гладкость.

Обосновать это предположение можно тем, что

- 1) трещина прирастает постепенно, а именно трещина прирастает через некоторое количество циклов на СХР и каждый цикл на СУР, но эти приращения малы по отношению к рассматриваемым характерным размерам трещины
- 2) из фрактографических исследований известно, что переход между стадиями роста трещины происходит постепенно

Монотонность зависимости $l(N)$ и наличие асимптоты

Длина трещины может только возрастать, что значит, что зависимость $l(N)$ является монотонно возрастающей.

Из рисунка 3 видно, что, при приближении количества циклов нагружения к максимальному, кривая $l(N)$ резко ускоряется, что является асимптотическим поведением, то есть свидетельствует о наличии асимптоты у зависимости $l(N)$.

Монотонность зависимостей $V(N)$ и $V(\Delta K(l))$

В большинстве экспериментов на циклическую трещиностойкость с компактными образцами СРТУ возрастает, как с количеством циклов нагружения, так и с ростом размаха КИН. То есть кривые $V(N)$ и $V(\Delta K(l))$ также правомерно предполагать монотонно возрастающими.

Выпуклость зависимости $l(N)$

Из математического анализа [20] известно, что необходимым и достаточным условием выпуклости функций является неубывание ее производной.

Поскольку функция $V(N)$ предполагается монотонно возрастающей, то функция $l(N)$ предполагается выпуклой.

Про функции $V(N)$ и $V(\Delta K(l))$ такого сказать нельзя.

Подытожим:

- 1) Для зависимости $l(N)$ предполагаем следующие качественные свойства
 - a. гладкость
 - b. наличие асимптоты
 - c. монотонность
 - d. выпуклость
- 2) Для зависимостей $V(N)$ и $V(\Delta K(l))$ предполагаем следующие свойства
 - a. гладкость
 - b. монотонность
 - c. наличие асимптоты (для $V(N)$)

5 Описание предложенного в работе метода построения кинетической диаграммы

Для исправления ситуации, описанной в разделе 3, в данной работе предложен метод, который состоит в следующем:

1) Находят непрерывную функцию $l(N)$, приближающую зависимость исходных данных

2) По непрерывной функции находят функцию производной $V(N)=dl/dN$

3) Задается шаг по числу циклов h_N

4) Весь диапазон по циклам $[0; N_{max}]$ разбивается с шагом h_N , получаем значения циклов N_i

5) В полученных значениях N_i по аппроксимирующей функции находим значения характерного размера трещины $l_i = l(N_i)$

6) Для каждого N_i по функции производной определяют скорость роста трещины $V_i = V(N_i)$, соответствующие данному числу циклов

7) Для каждого l_i по формуле (2) определяется соответствующий размах КИН, чем и завершается построение кинетической диаграммы

В качестве приближающей зависимости $l(N)$ может быть взят полином. Однако полиномы являются довольно общими функциями, в связи с чем, не сохраняют качественных свойств исходных данных.

Пример построения кинетической диаграммы при помощи полинома приведен на рисунке 7.



Рисунок 7 – Типичный вид кинетической диаграммы, полученной при помощи полинома

В данной работе в качестве приближающей зависимости $l(N)$ принимается функция вида

$$l(N) = \sum_{i=0}^k \frac{\beta_i}{\sqrt[k]{(N_\infty - N)^i}}; \quad (9)$$

где

$$f_{ik}(x) = \frac{1}{\sqrt[k]{(N_\infty - x)^i}} \quad - \quad \text{базисные функции функционального пространства}$$

размерности $k+1$;

N_∞ – координата точки неопределенности функции (9), через которую проходит вертикальная асимптота;

β_i – коэффициенты функции.

Особенностью принятой функции (9) является то, что она не только прекрасно приближает экспериментальные данные, но и сохраняет качественное их поведение, а именно: монотонность, выпуклость, гладкость и наличие асимптоты.

Свойства гладкости и наличие асимптоты следует из вида базисных функций.

Проверка свойств монотонности и выпуклости может быть проведена непосредственно после определения параметров k , N_∞ и β_i .

Свойства монотонности и выпуклости будут зависеть от вида исходных данных, поэтому при подборе вида функции сохранение монотонности и выпуклости нужно проверять.

На практике значение параметров k и N_∞ подбирают, исходя из условий сохранения качественных свойств экспериментальных данных.

Параметры β_i могут быть найдены методом наименьших квадратов.

Типичный вид функции (9), приближающей исходные данные, представлен на рисунке 8.

Типичный вид функции $V(N)$, приближающей производную исходных данных, представлен на рисунке 9, где также приведена функция $V(N)$, найденная с помощью формулы (3) (рисунок 5).

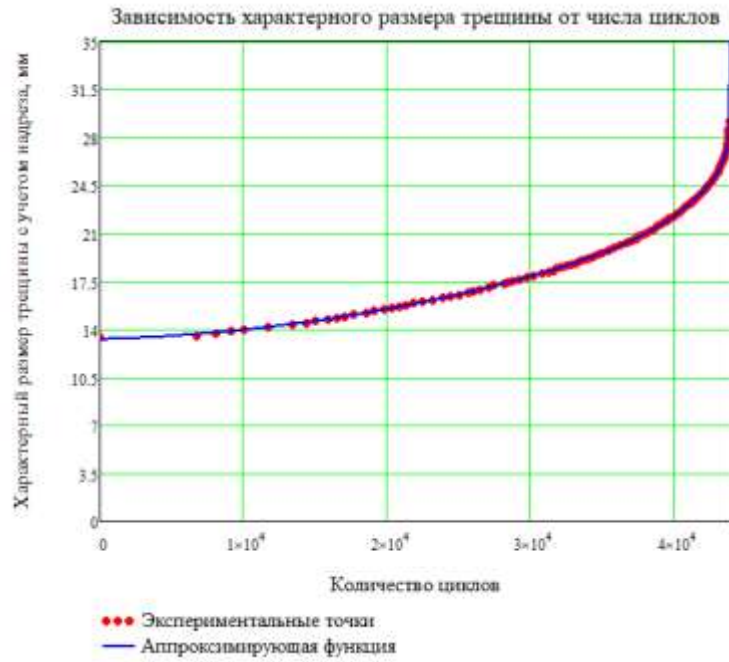


Рисунок 8 – Типичный вид приближения исходных данных при помощи функции вида (9)

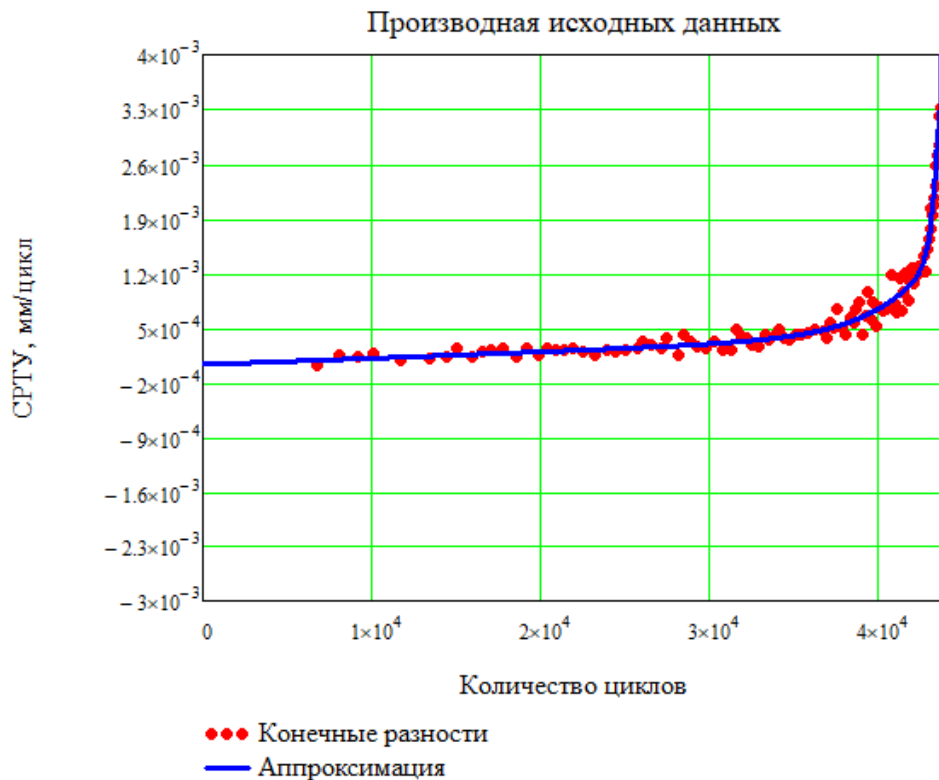


Рисунок 9 – Типичный вид приближения функции $V(N)$ при помощи функции вида (9) на фоне зависимости $V(N)$, найденной при помощи формулы (3)

Типичный вид кинетической диаграммы, полученной по предложенному методу, представлен на рисунке 10.

На рисунке 11 приведено наложение кинетических диаграмм, полученных по классическому и предложенному методам.

Из рисунков видно, что кинетическая диаграмма приняла вид обычной функции, а не облака точек.

Вообще говоря, после определения параметров β_i для функции (9), получаем явно заданную функцию для определения зависимости $l(N)$, по которой можем найти явно заданную функцию $V(N)$. Также по формуле (2) имеем явно заданную зависимость $\Delta K(l)$. То есть имеем теоретическую возможность получить зависимость $V(\Delta K)$ явно, однако эта зависимость сложна, и с ней неудобно работать.

При этом представление кинетической диаграммы в виде функции, пусть и неявной, позволяет более детально рассматривать характеристики кинетической диаграммы, а также некоторые особенности ее поведения, в том числе выделение первого участка диаграммы.

Поиск характеристик кинетической диаграммы будет обсуждаться далее.

Рассмотрение особенностей кинетической диаграммы для различных образцов требует сопоставления с фрактографическими исследованиями и в данной работе не обсуждается. Это тема будет исследоваться в дальнейшем.



Рисунок 10 – Типичный вид кинетической диаграммы, полученной по предложенному методу

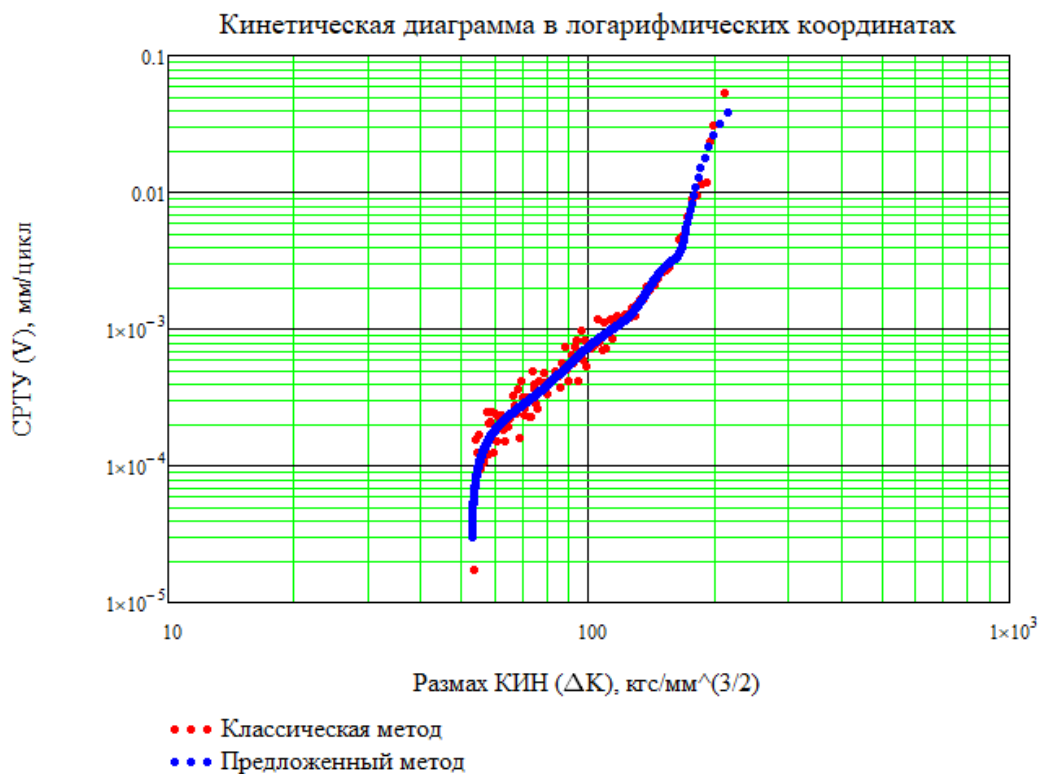


Рисунок 11 – Наложение кинетических диаграмм, полученных по классическому и предложенному методу

6 Исследование базисных функций

Для вычисления функции $V(N)$ необходима формула для первой производной базисных функций. Получим ее, а заодно покажем, что производные и интегралы от базисных функций выражаются через значения самой функции.

Найдем несколько первых производных базисных функций

$$f_{ik}^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} \left((N_\infty - x)^{\frac{i}{k}} \right) = -\frac{i}{k} (N_\infty - x)^{\frac{i}{k}-1} (-1) = \frac{i}{k} \frac{1}{(N_\infty - x)^{\sqrt[k]{(N_\infty - x)^i}}} = \frac{i}{k} \frac{1}{(N_\infty - x)} f_{ik}(x)$$

$$f_{ik}^{(2)}(x) = \frac{d}{dx} (f_{ik}^{(1)}) = \frac{i}{k} \left(1 + \frac{i}{k} \right) (N_\infty - x)^{\frac{i}{k}-2} = \frac{i}{k} \left(1 + \frac{i}{k} \right) \frac{1}{(N_\infty - x)^2} f_{ik}(x)$$

$$f_{ik}^{(3)}(x) = \frac{d}{dx} (f_{ik}^{(2)}) = \frac{i}{k} \left(1 + \frac{i}{k} \right) \left(2 + \frac{i}{k} \right) (N_\infty - x)^{\frac{i}{k}-3} = \frac{i}{k} \left(1 + \frac{i}{k} \right) \left(2 + \frac{i}{k} \right) \frac{1}{(N_\infty - x)^3} f_{ik}(x)$$

Верхний индекс, в круглых скобках, обозначает порядок производной.

Из первых трех производных уже хорошо видна закономерность. Производные базисных функций могут быть выражены через значения функции по формуле, при $n > 0$

$$f_{ik}^{(n)}(x) = \frac{f_{ik}(x)}{(N_\infty - x)^n} \prod_{j=0}^{n-1} \left(j + \frac{i}{k} \right)$$

С интегрированием несколько сложнее. Тут надо выделить два случая, при $i=k$, и при $i \neq k$.

Вычислим несколько первых интегралов при $i \neq k$

$$f_{ik}^{[1]}(x) = \int f_{ik}(x) dx = \int (N_\infty - x)^{-\frac{i}{k}} dx = \frac{(-1)}{\left(1 - \frac{i}{k} \right)} (N_\infty - x)^{1-\frac{i}{k}} = (-1)^1 \frac{(N_\infty - x)}{\left(1 - \frac{i}{k} \right)} f_{ik}(x) + D_1$$

$$f_{ik}^{[2]}(x) = \int f_{ik}^{[1]}(x) dx = \frac{(-1)(-1)}{\left(1 - \frac{i}{k} \right) \left(2 - \frac{i}{k} \right)} (N_\infty - x)^{2-\frac{i}{k}} = (-1)^2 \frac{(N_\infty - x)^2}{\left(1 - \frac{i}{k} \right) \left(2 - \frac{i}{k} \right)} f_{ik}(x) + D_1 x + D_2$$

$$f_{ik}^{[3]}(x) = \int f_{ik}^{[2]}(x) dx = \frac{(-1)(-1)(-1)(N_\infty - x)^{3-\frac{i}{k}}}{\left(1-\frac{i}{k}\right)\left(2-\frac{i}{k}\right)\left(3-\frac{i}{k}\right)} = \frac{(-1)^3 (N_\infty - x)^3}{\left(1-\frac{i}{k}\right)\left(2-\frac{i}{k}\right)\left(3-\frac{i}{k}\right)} f_{ik}(x) + \frac{D_1 x^2}{2} + D_2 x + D_3$$

где D_j – константы интегрирования ($j = 1, 2, 3, \dots$).

Верхний индекс, в квадратных скобках, обозначает порядок интеграла.

Интегралы для базисных функций при $i \neq k$ могут быть выражены через значения функции по формуле

$$f_{ik}^{[n]}(x) = f_{ik}(x) \frac{(-1)^n (N_\infty - x)^n}{\prod_{j=1}^n \left(j - \frac{i}{k}\right)} + \sum_{j=1}^n \frac{D_j x^{n-j}}{(n-j)!}$$

Теперь вычислим несколько первых интегралов при $i=k$. Пусть

$$f(x) = (N_\infty - x)^{-1}$$

$$g(x) = (N_\infty - x)$$

тогда

$$f^{[1]}(x) = \int f(x) dx = \int (N_\infty - x)^{-1} dx = (-1)^1 \ln(g(x)) + D_1$$

$$f^{[2]}(x) = \int f^{[1]}(x) dx = (-1)^2 g(x) (\ln(g(x)) - 1) + D_1 x + D_2$$

$$f^{[3]}(x) = \int f^{[2]}(x) dx = \frac{(-1)^3 g^2(x)}{2} \left(\ln(g(x)) - 1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{D_1 x^2}{2} + D_2 x + D_3$$

$$f^{[4]}(x) = \int f^{[3]}(x) dx = \frac{(-1)^4 g^3(x)}{6} \left(\ln(g(x)) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{D_1 x^3}{6} + \frac{D_2 x^2}{2} + D_3 x + D_4$$

Становится видна закономерность.

Тогда интегралы для базисных функций при $i=k$ могут быть выражены через значения функции по формуле

$$f^{[1]}(x) = \ln(f(x)) + D_1; \text{ при } n=1$$

$$f^{[n]}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!f^{n-1}(x)} \left[\ln(f(x)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right] + \sum_{j=1}^n \frac{D_j x^{n-j}}{(n-j)!}; \text{ при } n > 1$$

Чтобы значение неопределенного интеграла совпадало с определенным интегралом вида

$$\int_{x_0}^x f(z) dz$$

нужно выбирать значения констант интегрирования по следующим формулам

$$D_1 = -Mf^{[1]}(x_0)$$

$$D_p = -Mf^{[p]}(x_0) + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{-D_j(x_0)^{p-j}}{(p-j)!}$$

где при $i \neq k$

$$Mf_{ik}^{[n]}(x) = f_{ik}(x) \frac{(-1)^n (N_\infty - x)^n}{\prod_{j=1}^n (j - \frac{i}{k})}$$

при $i = k$

$$Mf^{[1]}(x) = \ln(f(x));$$

$$Mf^{[n]}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!f^{n-1}(x)} \left[\ln(f(x)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right]; \text{ при } n > 1$$

7 Описание методов определения характеристик кинетической диаграммы

Для автоматизации определения характеристик кинетической диаграммы разработаны формальные методы. Ниже они представлены.

Характеристики кинетической диаграммы определяются в следующем порядке:

- 1) Определяется граница первого и второго участков ΔK_{12} ;
- 2) Определяется граница второго и третьего участков ΔK_{23} ;
- 3) Определяются параметры C_2 и m_2 уравнения Пэриса;
- 4) Определяются порог страгивания K_{th} и характеристики уравнения, приближающего первый участок кинетической диаграммы;

Определение ΔK_{12}

Для определения ΔK_{12} строится производная функции, то есть изменение СРТУ по размаху КИН

$$w_i \approx \frac{\Delta V_i}{\Delta(\Delta K_i)}; \quad (10)$$

В данном случае применение конечных разностей приемлемо, потому что мы можем выбрать достаточно малый шаг h_N .

Типичный вид функции (10) представлен на рисунке 12.

Сравнивая рисунки 10 и 12 видим, что на первом участке изменение СРТУ уменьшается, а при переходе на второй участок начинает возрастать, что соответствует первому минимуму слева функции (10).

Абсцисса этого минимума и соответствует значению ΔK_{12} .

Определение ΔK_{23}

После определения ΔK_{12} , точки, находящиеся слева, соответствующие первому участку, отбрасываются.

По оставшимся точкам строится вторая производная

$$r_i \approx \frac{\Delta w_i}{\Delta(\Delta K_i)}; \quad (11)$$

Типичный вид функции (11) представлен на рисунке 13.

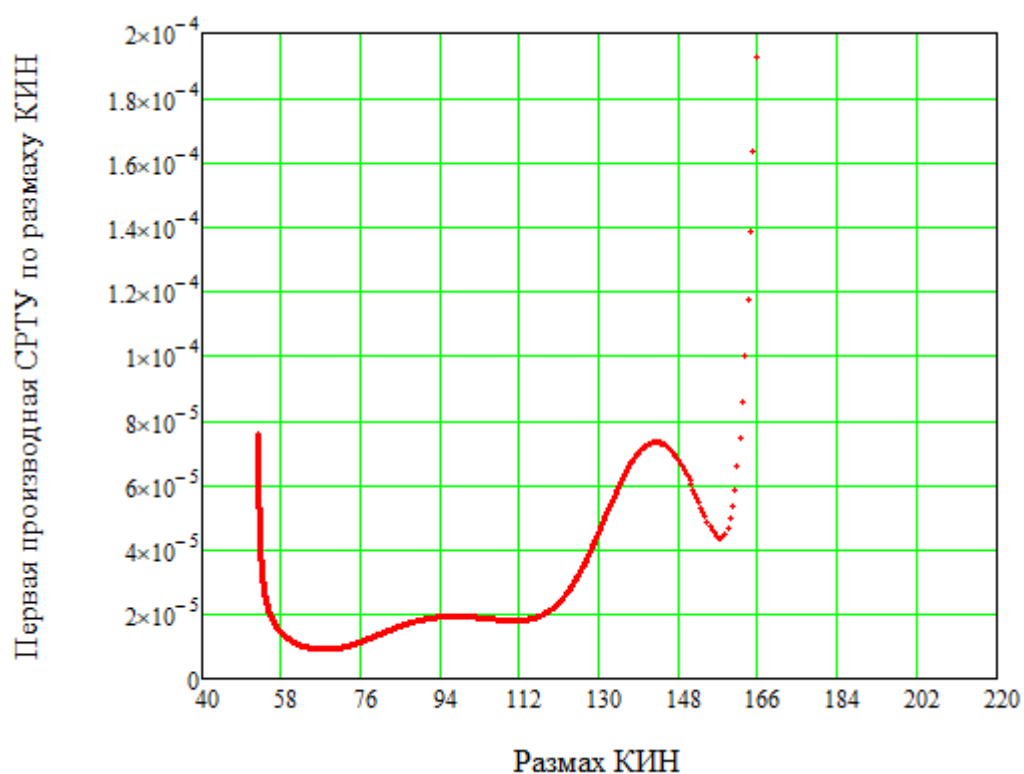


Рисунок 12 – Типичный вид функции (10)

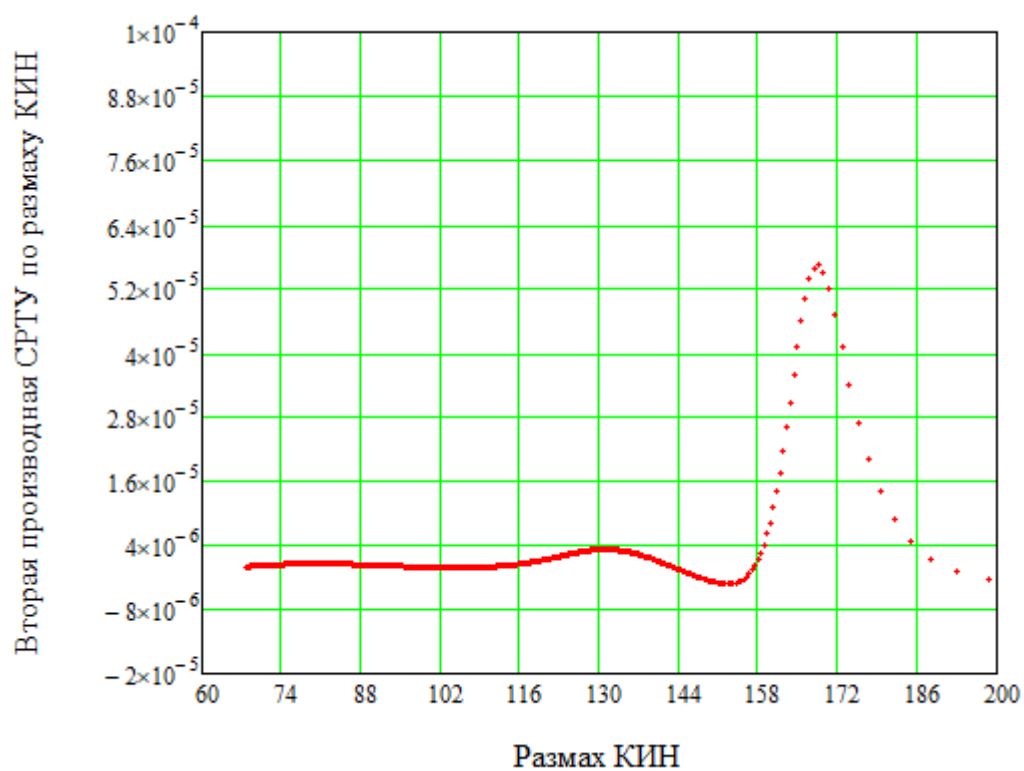


Рисунок 13 – Типичный вид функции (11)

Определение ΔK_{23} является более сложной задачей, потому что рассматриваемые функции являются немонотонными. При этом необходимо выработать формальный критерий выделения ΔK_{23} .

По определению ΔK_{23} является началом третьего, неустойчивого участка роста трещины, который характерен тем, что СРТУ начинается ускоренно расти.

Для формального определения начала ускоренного роста СРТУ в данной работе предложен статистический метод, который заключается в следующем:

1) Выделяется множество точек $\{r\}$, которые гарантировано принадлежат стадии устойчивого роста

2) Для выделенного в пункте 1) множества точек $\{r\}$ определяется

a. математическое ожидание $m_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r_j$

b. среднеквадратичное отклонение $\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^i (r_j - m)^2}{i - 1}}$

c. шаг i задается по количеству точек в выборке, то есть первая итерация будет иметь номер равный количеству точек множества $\{r\}$

3) Запускается итерационный процесс:

a. на каждом $i+1$ шаге к имеющейся выборке по росту размаха КИН добавляется следующая из оставшихся точек, то есть следующая справа.

b. для этой точки, с помощью m_i и σ_i , найденных на i -ом шаге,

вычисляется критерий $Q_{i+1} = \frac{|r_{i+1} - m_i|}{\sigma_i}$

- c. вычисляется критическое значение q_{i+1} равное квантилю распределения Стьюдента $qSt(\gamma, i)$ значимости γ с i степенями свободы, где i – это число точек в выборке на i шаге: $q_{i+1} = qSt(\gamma, i)$
- d. если выполняется условие $Q_{i+1} > q_{i+1}$, значение r_{i+1} считается сильно изменившимся, а абсцисса ему соответствующая принимается за ΔK_{23}

Точность определения ΔK_{23} ниже, чем точность определения ΔK_{12} , однако с этим можно смириться, учитывая, что при больших размахах КИН трещина растет быстро, и расчет наработки даст малую погрешность.

Теоретически допускаем, что СУР кинетической диаграммы описывается прямой в двойных логарифмических координатах, тогда первая производная на этом участке должна быть константой, а вторая производная должна быть равна нулю.

В действительности, как видно из рисунков 12-13, это не так, однако график второй производной более сглаженный, чем график первой производной, поэтому именно функция второй производной выбрана для определения точки окончания второго участка.

Определение параметров C_2 и m_2

Определив границы второго участка кинетической диаграммы, отбрасываем все точки, соответствующие первому и третьему участку, а по оставшимся точкам строим линейную регрессию в двойных логарифмических координатах любым известным методом, например методом наименьших квадратов. Коэффициенты этой регрессии и будут параметрами C_2 и m_2 .

Определение порога страгивания K_{th} и характеристик уравнения, приближающего первый участок кинетической диаграммы

В данном случае не ставится задача отыскать предельный порог страгивания, а ставится задача описать первый участок кинетической диаграммы так, чтобы вычисленная с его помощью значение наработки было гарантировано меньше, чем реальное значение, но больше, чем значение, полученное только с помощью уравнения Пэриса. То есть значение будет вычислено в запас.

Для определения K_{th} исходим из допущения, что первый участок описывается формулой

$$V(\Delta K) = C_1(\Delta K(l) - K_{th})^{m_1}; \quad (12)$$

где C_1 , m_1 , K_{th} – подлежат определению.

Для определения трех неизвестных наложим на уравнение (12) ограничения:

- 1) Равенство значений (1) и (12) в точке ΔK_{12} ;
- 2) Равенство значений производных по размаху КИН функций (1) и (12) в

точке ΔK_{12} , чтобы сохранить свойство гладкости кривой $V(\Delta K)$;

- 3) Потребуем, чтобы кривая (12) лежала выше экспериментальной кривой $V(\Delta K)$, в запас;

Из условий 1) и 2) получим

$$m_1 = m_2 \left(1 - \frac{K_{th}}{\Delta K_{12}} \right)$$

$$C_1 = \frac{C_2 (\Delta K_{12})^{m_2}}{(\Delta K_{12} - K_{th})^{m_1}}$$

Условие 3) удовлетворяется подбором параметра K_{th} .

Типичный вид кривой (12) представлен на рисунке 14.

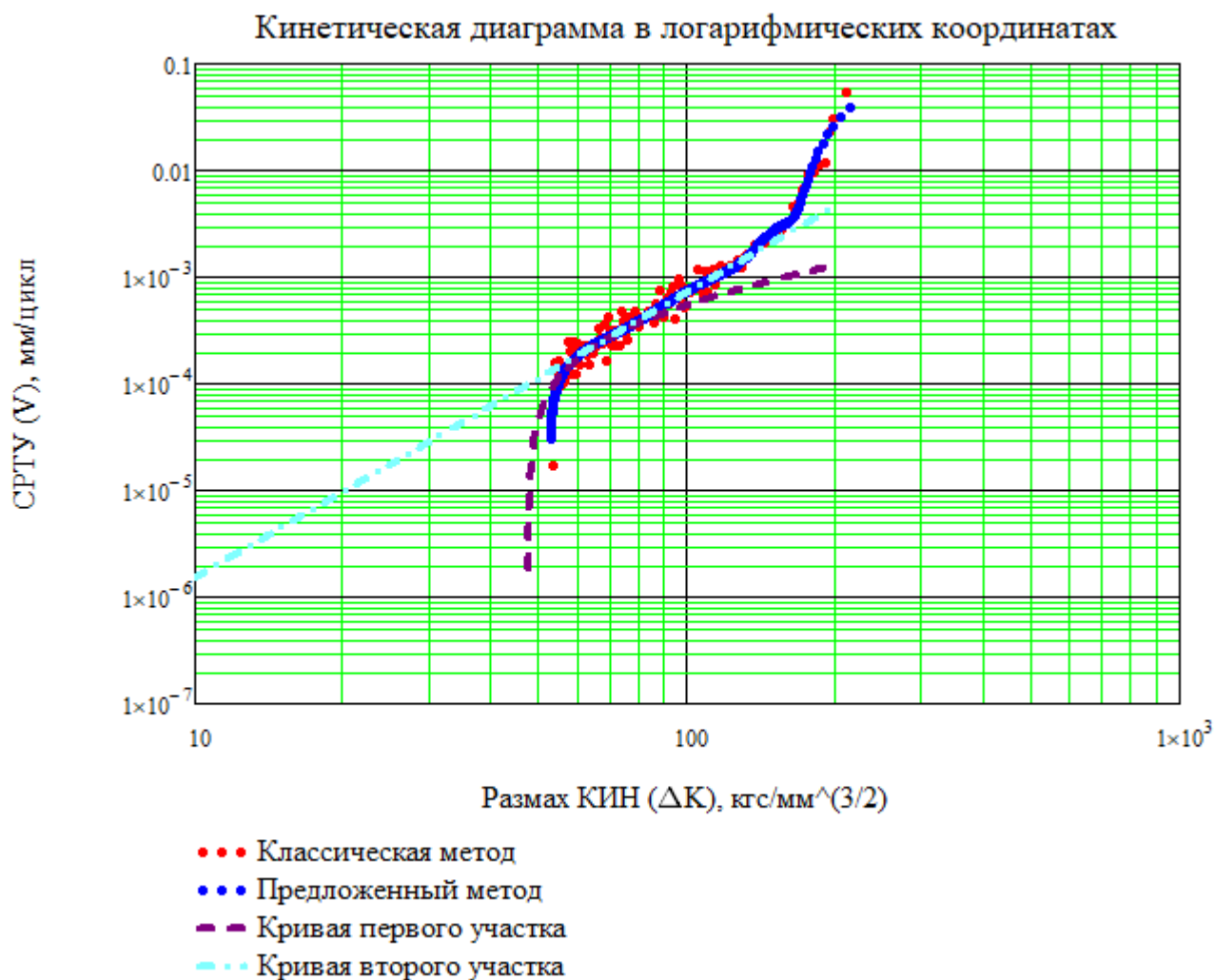


Рисунок 14 – Типичный вид кривых (1) – светлоголубым; и (12) – фиолетовым; на фоне экспериментальной зависимости СРТУ от размаха КИН, полученной классическим и предложенными методами

8 Вычисление наработки

В данном разделе демонстрируются результаты вычисления характеристик кинетической диаграммы, приведенной на рисунке 10, а также расчет наработки для компактного образца, по испытаниям которого получены данные (рисунок 3), с учетом кривой (12) и без учета.

На рисунке 15 приведена кинетическая диаграммы с отмеченными границами второго участка.

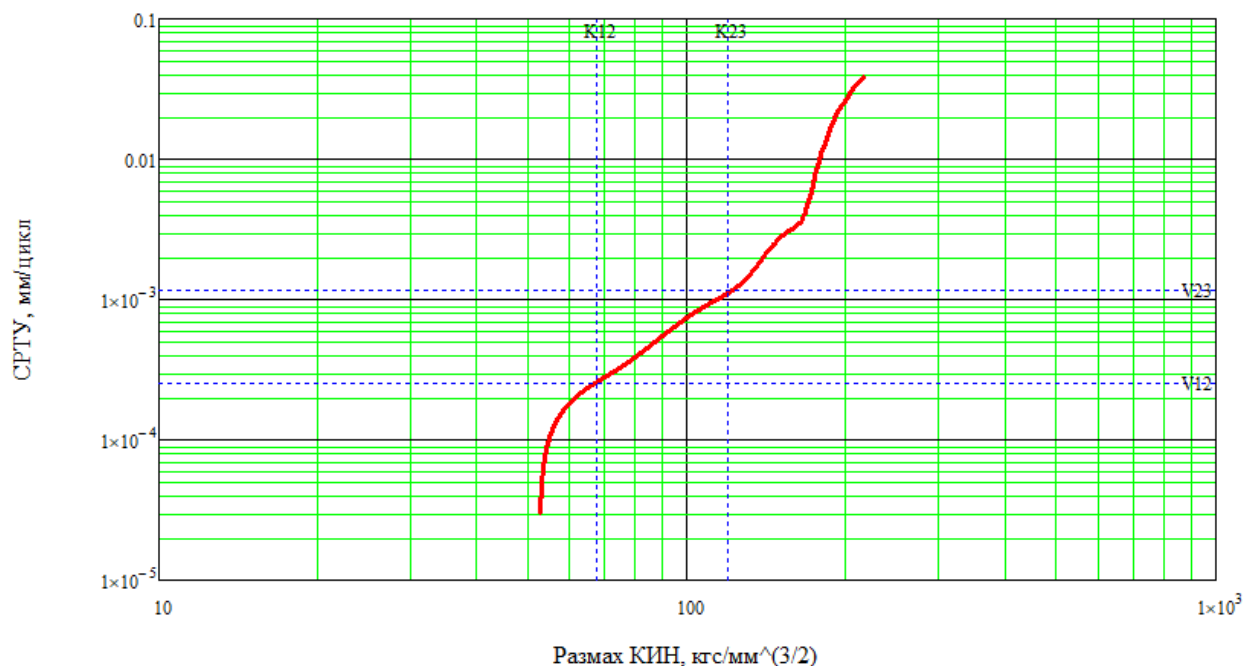


Рисунок 15 – Кинетическая диаграммы с отмеченными границами второго участка

Расчет наработки традиционно проводится по формуле, которая следует из формулы (1)

$$N = \int_{l_0}^{l_c} \frac{dl}{C_2 (\Delta K(l))^{m_2}}; \quad (13)$$

где l_0 – начальный характерный размер трещины;

l_c – критический размер трещины, после которого трещина переходит на СНР.

При этом расчет по формуле (13) ведется для любых начальных размеров трещины даже в том случае, если трещина находится на СХР.

Если учитывать в расчете наработки СХР, то на СХР необходимо вычислять наработку по формуле

$$N = \int_{l_0}^{l_{12}} \frac{dl}{C_1 (\Delta K(l) - K_{th})^{m_1}}; \quad (14)$$

где l_{12} – характерный размер трещины соответствующий ΔK_{12} .

На рисунке 16 представлено сравнение экспериментальной зависимости $l(N)$ с расчетными данными по формулам (13)-(14).

На рисунке изображены:

- 1) красными точками – экспериментальная зависимость $l(N)$;
- 2) синяя сплошная кривая – расчет наработки по формуле (13) только для второго участка, то есть в формуле (13) в качестве l_0 берется l_{12} , и к интегралу добавляется константа интегрирования в виде количества циклов соответствующих началу СУР (соответствующих ΔK_{12});
- 3) розовая штрих-пунктирная кривая – расчет наработки для компактного образца по формуле (13) от начального характерного размера трещины;
- 4) темно-зеленая пунктирная кривая – расчет наработки для компактного образца от начального характерного размера трещины с учетом СХР, то есть по формулам (13)-(14). Переход от формулы (14) к формуле (13) осуществляется при условии, что $\Delta K(l) \geq \Delta K_{12}$.

При наличии СХР во время испытаний, можно сделать следующие выводы:

- 1) рост трещины на первом участке может занимать существенную часть циклов нагружения;
- 2) расчет наработки только по уравнению Пэриса приводит к более консервативной модели, чем расчет с учетом формулы, описывающей СХР;

3) расчет наработки с использованием уравнения (14), с параметрами, полученными по изложенной в работе методике, приводит к консервативной оценке наработки;

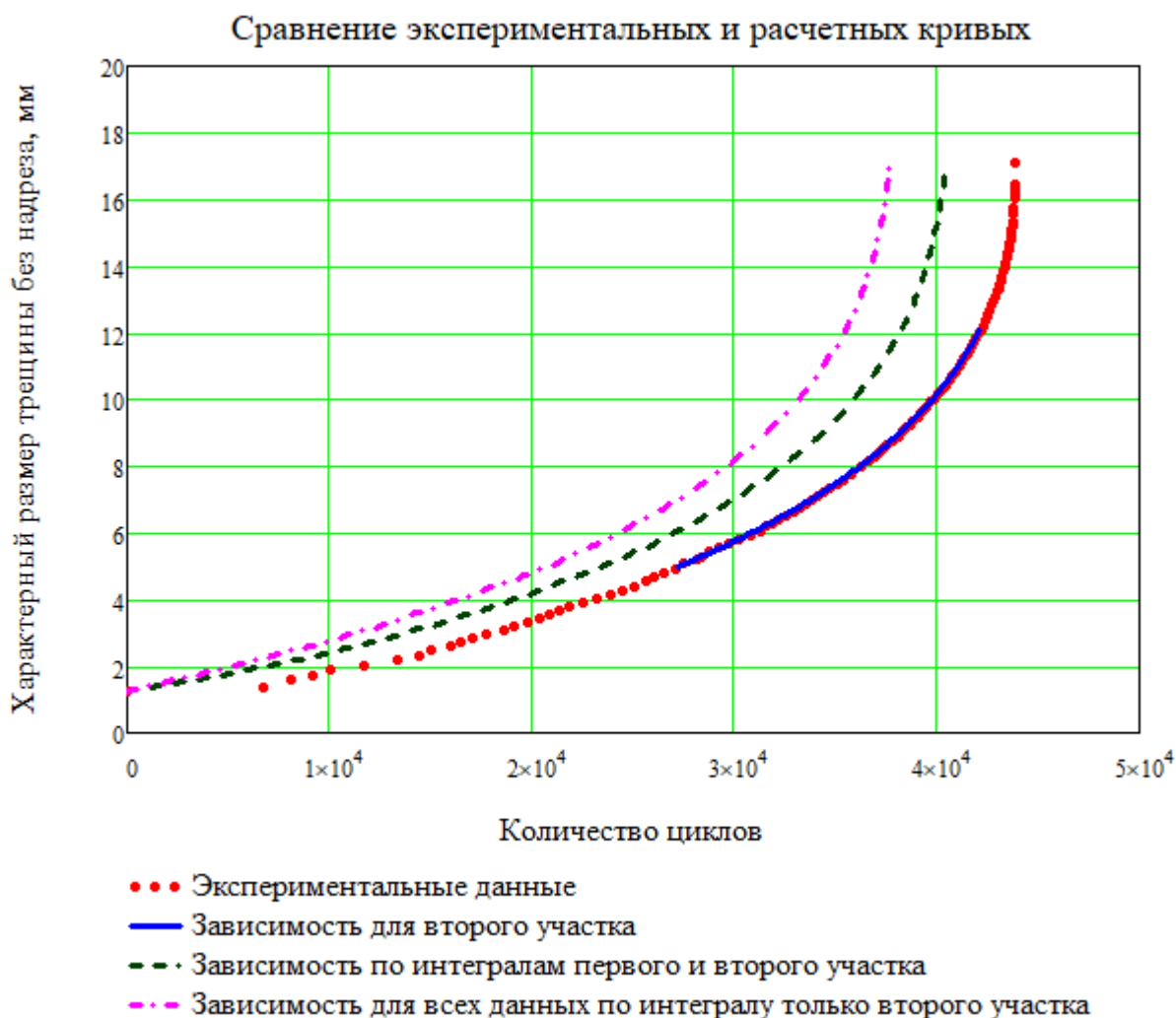


Рисунок 16 – Сравнение экспериментальных данных зависимости $l(N)$ с расчетными кривыми. Описание кривых смотри по тексту

9 Выводы

1. Показаны причины, ограничивающие точность классических методов получения кинетической диаграммы. Показано, что относительная погрешность определения СРТУ через отношение конечных разностей весьма существенна и не постоянна по

значению аргумента функции $V(N)$, и таким образом, вычисление СРТУ через конечные разности может привести к существенной погрешности определения кинетической диаграммы и ее характеристик.

2. Вводятся и обосновываются предположения о качественных математических свойствах экспериментальных кривых и кинетической диаграммы. Для экспериментальной зависимости $l(N)$ предполагаются следующие свойства: гладкость, монотонность, выпуклость и наличие асимптоты. Для зависимостей $V(N)$ и $V(\Delta K(l))$ предполагаем следующие свойства: гладкость, монотонность и наличие асимптоты (для $V(N)$).
3. Разработан новый метод построения кинетической диаграммы СРТУ от размаха КИН по результатам эксперимента на СРТУ, учитывающий качественные характеристики экспериментальных данных. Метод позволяет получить кинетическую диаграмму не в виде разброса точек, а в виде гладкой функции, что позволяет более детально рассматривать характеристики кинетической диаграммы, а также некоторые особенности ее поведения, в том числе первый участок диаграммы.
4. Вводятся и исследуются базисные функции, с помощью которых производится обработка экспериментальных данных на СРТУ в предложенном методе.
5. Разработаны методы получения характеристик кинетической диаграммы, описывающие как стадию устойчивого роста, так и первый участок кинетической диаграммы.
6. Показано, что первая стадия роста трещины может занимать большую часть циклической долговечности.

7. Показано, что, учитывая при расчете наработки первый участок кинетической диаграммы, получаем менее консервативное решение, чем решение, полученное только с помощью уравнения Пэриса.

Список источников

1. Дегтярев С.А., Кутаков М.Н., Леонтьев М.К. Динамика роторов с трещиной в валах // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=55827>
2. Сысоева В.В. Расчеты коэффициентов интенсивности напряжений для типовых авиационных конструкций с трещинами // Труды МАИ. 2011. № 45. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=25559&PAGEN_2=2
3. Тырымов А.А. Численное моделирование и расчет податливости образца с центральной трещиной на основе графовой модели упругого тела // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53010>
4. Шакиртов М.М. О влиянии коэффициента асимметрии цикла внешней нагрузки на характеристики цикла нагружения материала при вершине трещиновидного дефекта // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=72589>
5. Gozs M., Moran B. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions // Engineering Fracture Mechanics, 2002, vol. 69, pp. 299-319. DOI: [10.1016/S0013-7944\(01\)00080-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00080-7)

6. Потапов С.Д., Перепелица Д.Д. Способ обработки результатов испытаний образцов на скорость роста трещины при постоянной амплитуде нагружения // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т.19. № 2. С. 94-100.
7. Потапов С.Д., Перепелица Д.Д. Исследование циклической скорости роста трещин в материалах основных деталей авиационных ГТД // Технология легких сплавов. 2013. № 2. С. 5-19.
8. Потапов С.Д., Перепелица Д.Д. Исследование влияния геометрических особенностей трещины на характеристики циклической трещиностойкости // Технология легких сплавов. 2014. № 1. С. 66-71.
9. Татаринцев В.А., Толстошеев А.К. Влияние эксплуатационных факторов на циклическую трещиностойкость сталей литых корпусов запорной арматуры // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. 2014. № 1. С. 102-107.
10. Туманов Н.В. Кинетическое уравнение устойчивого роста трещин малоциклового усталости // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2014. № 5. С. 18-26.
11. Туманов М.В., Лаврентьева М.А., Черкасова С.А. Прогнозирование остаточного ресурса дисков турбины авиадвигателей на основании расчета периода устойчивого роста трещин малоциклового усталости // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18. № 5. С. 33-41.
12. Хибник Т.А., Кольцун Ю.И. Кинетическая диаграмма медленного роста усталостной трещины. Подрастание трещины // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2011. № 3. С. 110-116.

13. Boyce B.L., Ritchie R.O. Effect of load ratio and maximum stress intensity on the fatigue threshold in Ti-6Al-4V // *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, vol. 68, pp. 129-147. DOI: [10.1016/S0013-7944\(00\)00099-0](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(00)00099-0)
14. Wang K., Wang F., Cui W., Hayat T., Ahmad B. Prediction of short fatigue crack growth of Ti-6Al-4V // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2014, vol. 37, pp. 1075-1086. DOI: [10.1111/ffe.12177](https://doi.org/10.1111/ffe.12177)
15. Ботвина Л.Р., Ярема С.Я., Осташ О.И., Полутранко И.Б. Кинетика усталостного разрушения титанового сплава АТЗ в воздухе, дистиллированной воде и 3,5 %-ом водном растворе NaCl // *Физико-химическая механика материалов*. 1984. № 2. С. 17-22.
16. Lynch S.P. Progression markings, striations, and crack-arrest markings on fracture surfaces // *Material Science and Engineering*. A 468-470, 2007, pp. 74-80. DOI: [10.1016/j.msea.2006.09.083](https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.09.083)
17. Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.E. A Rational Analytic Theory of Fatigue // *The Trend in Engineering*, 1961, vol. 13, pp. 9-14.
18. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ./Под ред. Ю. Мураками. - М.: Мир, 1990. - 448 с.
19. ГОСТ 25.506-85 Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. – М.: Стандарты, 1985.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – СПб.: Лань, 2022. – 608 с.

References

1. Degtyarev S.A., Kutakov M.N., Leont'ev M.K. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55827>
2. Sysoeva V.V. *Trudy MAI*, 2011, no. 45. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=25559&PAGEN_2=2
3. Tyrymov A.A. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53010>
4. Shakirtov M.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72589>
5. Gozs M., Moran B. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions, *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, vol. 69, pp. 299-319. DOI: [10.1016/S0013-7944\(01\)00080-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00080-7)
6. Potapov S.D., Perepelitsa D.D. *Aerospace MAI Journal*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 94-100.
7. Potapov S.D., Perepelitsa D.D. *Tekhnologiya legkikh splavov*, 2013, no. 2, pp. 5-19.
8. Potapov S.D., Perepelitsa D.D. *Tekhnologiya legkikh splavov*, 2014, no. 1, pp. 66-71.
9. Tatarintsev V.A., Tolstosheev A.K. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii. Regional'noe prilozhenie*, 2014, no. 1, pp. 102-107.
10. Tumanov N.V. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta*, 2014, no. 5, pp. 18-26.
11. Tumanov M.V., Lavrent'eva M.A., Cherkasova S.A. *Aerospace MAI Journal*, 2011, vol. 18, no. 5, pp. 33-41.

12. Khibnik T.A., Kol'tsun Yu.I. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta*, 2011, no. 3, pp. 110-116.
13. Boyce B.L., Ritchie R.O. Effect of load ratio and maximum stress intensity on the fatigue threshold in Ti-6Al-4V, *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, vol. 68, pp. 129-147. DOI: [10.1016/S0013-7944\(00\)00099-0](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(00)00099-0)
14. Wang K., Wang F., Cui W., Hayat T., Ahmad B. Prediction of short fatigue crack growth of Ti-6Al-4V, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2014, vol. 37, pp. 1075-1086. DOI: [10.1111/ffe.12177](https://doi.org/10.1111/ffe.12177)
15. Botvina L.R., Yarema S.Ya., Ostash O.I., Polutranko I.B. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov*, 1984, no. 2, pp. 17-22.
16. Lynch S.P. Progression markings, striations, and crack-arrest markings on fracture surfaces, *Material Science and Engineering. A* 468-470, 2007, pp. 74-80. DOI: [10.1016/j.msea.2006.09.083](https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.09.083)
17. Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.E. A Rational Analytic Theory of Fatigue, *The Trend in Engineering*, 1961, vol. 13, pp. 9-14.
18. *Stress intensity factor handbook*, Editor-in-Chief Y. Murakami, The Society of Materials Science, Japan, vol. 1, 450 p.
19. *GOST 25.506-85 Metody mekhanicheskikh ispytanii metallov. Opredelenie kharakteristik treshchinostoikosti (vyazkosti razrusheniya) pri staticheskom nagruzhении* (GOST 25.506-85 Design, calculation and strength testing. Methods of mechanical testing of metals. Determination of fracture toughness characteristics under the static loading), Moscow, Standarty, 1985.

20. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (Course of differential and integral calculus), Saint-Petersburg, Lan', vol. 1, 608 p.

Статья поступила в редакцию 07.04.2024

Одобрена после рецензирования 11.04.2024

Принята к публикации 27.06.2024

The article was submitted on 07.04.2024; approved after reviewing on 11.04.2024; accepted for publication on 27.06.2024