


На правах рукописи



Доброславский Александр Владимирович

**Исследование усредненных движений КА в ограниченной
задаче трех тел с учетом сил светового давления**

Специальность 01.02.01 —
«Теоретическая механика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре «Моделирование динамических систем» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

- Научный руководитель: **Красильников Павел Сергеевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Моделирование динамических систем» в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
- Официальные оппоненты: **Асланов Владимир Степанович**,
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Теоретической механики» в ФГБОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева»
- Тихонов Алексей Александрович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры «Теоретической и прикладной механики» в ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
- Ведущая организация: **Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук**

Защита состоится 22 апреля 2022 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ: https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=162618.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.125.14.

Автореферат разослан « ___ » _____ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.125.14,
доктор физико-математических наук



Гидаспов В.Ю.

Общая характеристика работы

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию движения спутников с большим отношением площади поперечного сечения к массе (спутника-баллона) в ограниченной задаче трех тел под действием сил светового давления. Поскольку силы светового давления имеют естественный характер (неуправляемые), задача относится к классу фотогравитационных задач. Основным методом исследования был выбран метод усреднения уравнений движения по двум быстрым переменным задачи – средним аномалиям возмущающего тела и спутника, что позволяет рассматривать движение объектов на асимптотически больших временных промежутках.

Актуальность темы. В последнее время большое число работ посвящается фотогравитационной задаче трех тел, однако, проблема построения решений этой задачи на асимптотически больших промежутках времени на текущий момент не исследована. Также требует рассмотрения классическая ограниченная пространственная задача трех тел в случаях, следующих за хилловским приближений.

Известно, что началом исследования влияния сил светового давления на пассивно гравитирующее тело стала работа В. В. Радзиевского, в которой ограниченная задача трех тел была обобщена на фотогравитационный случай, благодаря введенному коэффициенту редукции. Интерес к проблеме возрос в связи с исследованием движения спутника Vanguard I, деградация орбиты которого превосходила расчетные значения. В работах П. Мюзена, Р. У. Паркинсона, Г. М. Джонса, И. И. Шапиро было учтено влияние сил светового давления на спутник в первом приближении классической теории возмущений, хотя заход спутника в земную тень не учитывался. Большую роль фактор светового давления сыграл при исследовании движения спутников-баллонов Echo 1, Echo 2 и PAGESOS, чему посвящен целый ряд работ, среди которых следует упомянуть работы Ё. Козаи, Р. У. Брайанта, С. Ферраз-Мелло, Е. П. Аксёнова, С. Н. Вашковьяк, в которых учитывается эффект земной тени.

Исследование движения объектов большой парусности приобретает особое значение в связи с космическим мусором, движущимся на высоких орбитах. Этому посвящены работы А. В. Кривова, Л. Л. Соколова, В. В. Дикарева, Д. П. Гамильтона и др. Пересечение такими объектами зоны земной тени вносит дополнительное возмущение в их движение. При этом исследователи полагали тень Земли цилиндрической: С. Ферраз-Мелло, М. Л. Лидов, Е. Я. Иванова, С. Н. Вашковьяк, хотя в работе М. Л. Лидова и Е. Я. Ивановой оговаривалось, что используемый расчетно-аналитический метод годится и для других форм земной тени. Как показано в данной работе, при рассмотрении светового давления на спутник находящийся в значительном удалении от Земли в задачах трех и четырех тел эффектом земной тени можно пренебречь. В работе С. Я. Степанова и др. рассматривается ограниченная задача четырех тел, где на частицы в окрестности треугольных точек либрации системы

Земля-Луна (облака Кордылевского) оказывается фотогравитационное воздействие со стороны Солнца. Численно показывается, что каждая их треугольных точек охватывается устойчивыми периодическими траекториями, из устойчивости которых следует, что пылевое облако при малых возмущениях начальных условий движется в окрестности периодического решения. Учет светового давления приводит к изменению формы периодических траекторий.

Для исследования орбит вышеупомянутых объектов на значительных временных промежутках в работе используется метод усреднения, впервые примененный К. Гауссом при исследовании эволюции орбиты малой планеты Церера. Приложения метода к классической задаче трех тел были подробно разобраны в статьях Н. Д. Моисеева, где, наряду со схемой Гаусса, были рассмотрены задача Фату, Делоне-Хилла, обобщенная задача Делоне-Хилла в плоском и пространственном случаях. В работе М. Е. Эша метод двойного усреднения используется для решения ограниченной задачи четырёх тел, в частности, используется техника, впервые применённая К. Гауссом, следуя которой Луна представляется материальным кольцом, при этом были рассмотрены траектории движения спутника, как находящиеся внутри лунной орбиты, так и вовне. В более ранних статьях описаны эволюционные эффекты в орбитальном движении спутника в задаче трех тел. Так, хорошо известен эффект Лидова-Козаи, при котором наклонение орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела влияет, в зависимости от значения большой полуоси, на эволюцию эксцентриситета исследуемой орбиты и на диапазон его изменения. В работе М. Л. Лидова, описана эволюция орбиты спутника планеты в рамках эллиптической задачи трех тел для случая Хилла (случай малого отношения большой невозмущенной полуоси орбиты спутника к радиусу орбиты планеты); был описан эффект падения спутника на центральное тело, когда плоскость орбитального движения спутника перпендикулярна плоскости орбиты возмущающего тела. В работе Ё. Козаи получено приближенное выражение для дважды усредненной возмущенной силовой функции в астероидной круговой задаче трех тел, вычислены значения критических наклонов орбит. В работе В. В. Сидоренко исследуется эксцентрический эффект Козаи-Лидова, который может быть интерпретирован как резонансный эффект.

Е. П. Аксёнов получил аналитическое выражение для дважды усредненной возмущенной силовой функции в круговой пространственной задаче трех тел в виде ряда Фурье, коэффициенты которого выражаются через неизвестные специальные функции, записанные в виде квадратур. Для пространственной задачи трех тел усредненные уравнения движения спутника аналитически исследованы для «внутреннего», хилловского случая в работе М. Л. Лидова. Иной предельный случай, когда большая полуось невозмущенной орбиты близка к радиусу орбиты внешнего тела (Юпитера), исследован М. Л. Лидовым, С. Л. Зиглиным, описаны кривые неаналитичности силовой функции в плоскости кеплеровских элементов e, ω . Общий случай усредненной силовой функции задачи исследован в статьях М. А. Вашковьяка: численно построены характерные

элементы фазового портрета усредненной системы для произвольных значений известных интегралов.

Решение плоской ограниченной эллиптической задачи трёх тел методом двойного усреднения без учёта сил светового давления было получено также в работах Е. П. Аксёнова: показано, что усреднённые уравнения движения допускают два первых интеграла, исследованы траектории движения спутника, в частности траектории падения спутника на центральное тело. Качественные исследования плоской эллиптической задачи были продолжены в серии работ Ф. Вереша, где были подробно рассмотрены случаи циркуляции и либрации перицентра орбиты.

Целью данной работы является исследование движения пассивно гравитирующего тела, возмущенного силой светового давления в ограниченной задаче трех и четырех тел в плоской и пространственной постановке методом усреднения.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать влияние зоны земной тени на движение спутника в случае асимптотически большого промежутка времени в фотогравитационной задаче трех тел.
2. Исследовать эволюционные эффекты в плоской ограниченной задаче трех тел на основе двойного усреднения силовой функции задачи.
3. Исследовать эволюционные эффекты в движении спутника-баллона в плоской ограниченной планетной задаче четырех тел с учетом сил светового давления на асимптотически больших промежутках времени на основе трехкратного усреднения оскулирующих уравнений движения, записанных в кеплеровских элементах орбиты.
4. Исследовать эволюцию пространственных орбит искусственного спутника Солнца с учетом возмущений от внешней планеты (Юпитера) и от солнечного давления.

Научная новизна:

1. В настоящее время хорошо известны исследования двукратно усредненной классической ограниченной задачи трех тел. Для фотогравитационной задачи трех тел такие исследования являются новыми.
2. Показано наличие новых положений равновесия, а также новых областей осциллирующих движений в плоскости элементов орбиты (e, ω) по сравнению с классической ограниченной задачей трех тел.
3. Показано, что фотогравитационный случай приводит к бифуркации положения равновесия по параметру светового давления на спутник δ и по большой полуоси орбиты спутника a в случае задачи четырех тел.
4. Исследовано влияния конической тени на среднее движение спутника по эллиптической орбите в плоскости эклиптики, ранее такие исследования не производились.

5. Впервые показано, что дважды усредненная силовая функция допускает, на основе применения формулы Парсеваля, явное аналитическое представление через гипергеометрические (обобщенные гипергеометрические) функции, допускающие разложение в сходящиеся степенные ряды.
6. В плоскости кеплеровских элементов (e, ω) пространственной ограниченной задачи трех тел впервые построены фазовые портреты колебаний во втором, третьем и четвертом приближениях силовой функции.

Научная и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Получено уравнение пребывания ИСЗ в зоне земной тени при его движении в плоскости эклиптики. Дана количественная оценка относительного времени пребывания ИСЗ в земной тени в зависимости от элементов орбиты.
2. Получена усредненная возмущающая функция в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел с учетом сил светового давления.
3. Получена усредненная возмущающая функция в плоской ограниченной эллиптической задаче четырех тел с учетом сил светового давления. Определены бифуркационные параметры задачи.
4. Получена усредненная возмущающая функция в пространственной ограниченной круговой фотогравитационной задаче трех тел во внутреннем астероидном варианте. Определены бифуркационные параметры задачи.
5. Получен эффект сдвига траекторий ИСЗ в сторону, более удаленную от Солнца, по сравнению с классической ограниченной задачей трех тел.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе применяется классический для теории дифференциальных уравнений и небесной механики метод усреднения по средним аномалиям объекта и возмущающего тела. Также применяется аппарат гипергеометрических и обобщенных гипергеометрических функций.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: 1) строгим использованием математического аппарата теоретической и небесной механики, 2) применением классических аналитических и приближенно-аналитических методов исследования, 3) использованием CAS Mathematica 11.3.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах: 1) Семинаре «Аналитическая механика и теория устойчивости» (Москва, МГУ, 2018, 2020), 2) Семинаре «Динамические системы и механика» кафедр 811 и 802 (Москва, МАИ, 2019, 2020), 3) Международных конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам

DIFF2018 и DIFF2020 (Суздаль, 2018, 2020), 4) 19-ой международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2020), 5) XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019), 6) IX международной конференции по механике «Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2021), 7) Международной конференции «Проблемы механики и управления» (Махачкала, 2018), 8) XII и XIII международных конференциях по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2018, 2020), 9) XXI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2019), 10) XLIII и XLV Академических чтений по космонавтике (Москва, 2019, 2021).

Личный вклад. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором реализованы используемые аналитические методы компьютерной алгебры в среде Mathematica. Выбор методов анализа, круга рассматриваемых задач, идея применения формулы Парсеваля и вывод формулы (4.15) в главе 4 принадлежат проф. П. С. Красильникову.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных работах, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых в WoS и Scopus [1–4], 2 – в трудах конференций (Scopus) [5; 6], 10 – в тезисах докладов.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена рассмотрению процедуры определения конуса земной тени при движении спутника в плоскости эклиптики. Были найдены границы конусной тени и точки ее пересечения с эллиптической орбитой спутника. Угол θ_1 в полярной системе координат, при которых ИСЗ заходит в земную тень задается выражениями:

$$\cos \theta_1 = \frac{-\psi_1 \pm \chi_1 \sqrt{\psi_1^2 + \chi_1^2 - 1}}{\psi_1^2 + \chi_1^2}, \quad \sin \theta_1 = \frac{\chi_1 \pm \psi_1 \sqrt{\psi_1^2 + \chi_1^2 - 1}}{\psi_1^2 + \chi_1^2}$$

Здесь функции ψ_1 , χ_1 имеют выражения:

$$\psi_1 = e \cos \omega + \xi \sin(\alpha + \nu_S), \quad \chi_1 = e \sin \omega - \xi \cos(\alpha + \nu_S), \quad \xi = \frac{a(1 - e^2)}{R_E},$$

где a , e , ω – соответственно, большая полуось, эксцентриситет и аргумент перицентра орбиты спутника, ν_S – истинная аномалия солнечной орбиты, α –

половина угла при вершине конуса земной тени, а R_E – радиус Земли. Угол θ_2 , при которых ИСЗ выходит из земной тени, соответственно:

$$\cos \theta_2 = \frac{-\psi_2 \pm \chi_2 \sqrt{\psi_2^2 + \chi_2^2 - 1}}{\psi_2^2 + \chi_2^2}, \quad \sin \theta_2 = \frac{\chi_2 \pm \psi_2 \sqrt{\psi_2^2 + \chi_2^2 - 1}}{\psi_2^2 + \chi_2^2}$$

Здесь функции ψ_2 , χ_2 имеют выражения:

$$\psi_2 = e \cos \omega + \xi \sin(\alpha - \nu_S), \quad \chi_2 = e \sin \omega - \xi \cos(\alpha - \nu_S)$$

Случай пересечения спутником цилиндрической тени является частным случаем конусной тени, если положить $\alpha \rightarrow 0$.

Для определения времени пребывания спутника в зоне земной тени в работе используется интеграл площадей, из которого получаем:

$$\tau(\theta_1, \theta_2, \omega) = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{a^3}{f m_E}} \left(2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \left(\frac{\sin(\theta - \omega)}{1 + \cos(\theta - \omega)} \right) \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin(\theta - \omega)}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \right)_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Где f – гравитационная постоянная, m_E – масса Земли, $\tau = \tau(\theta_1, \theta_2, \omega)$ – время пребывания спутника в земной тени за один виток.

Для численного моделирования была получена следующая расчетная формула:

$$\bar{t}(e, a) = \frac{1}{T_S} \sum_{i=1}^N \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \tau \left(\theta_1 \left(\nu_S^{(i)} \right), \theta_2 \left(\nu_S^{(i)} \right), \omega_j \right)$$

где $\nu_S^{(i)} = \nu_S(t^{(i)})$, T_S – период, равный солнечному году, L – количество рассматриваемых значений аргумента перицентра спутника ω .

На основе численного моделирования была дана оценка среднему времени пребывания спутника в зоне земной тени в зависимости от параметров его орбиты во внешней сфере гравитационного влияния Земли, в частности установлено, что увеличение большой полуоси спутника a ведет к уменьшению среднего времени нахождения в земной тени (см. рис. 1). Также установлено, что увеличение эксцентриситета e приводит к увеличению среднего времени нахождения спутника в тени, хотя с приближением к внешней границе сферы гравитационного влияния Земли влияние уменьшается.

Сравнение результатов, полученных при рассмотрении конической формы тени с результатами, полученными для цилиндрической формы показало, что во внутренней сфере гравитационного влияния Земли разница между конусной и цилиндрической моделью тени невелика, однако с увеличением большой полуоси орбиты a цилиндрическая модель тени дает большую погрешность, и в этом случае коническая модель предпочтительнее.

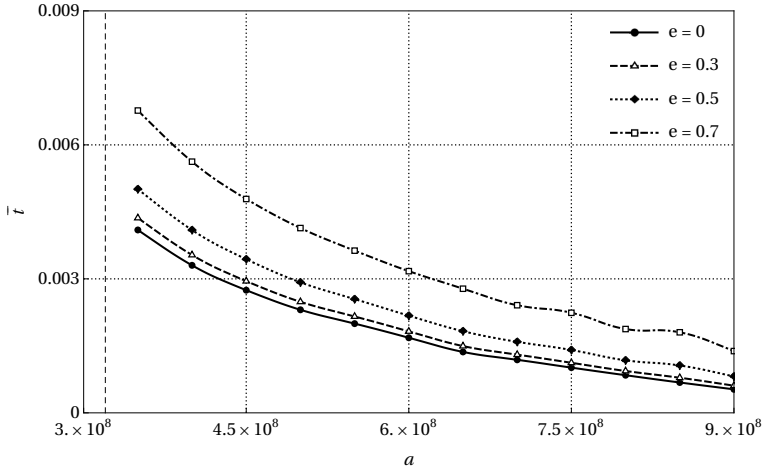


Рис. 1 — Случай конической тени

Было также установлено, что относительная длительность пребывания в конической земной тени, при движении спутника в плоскости эклиптики по орбитам, находящимся полностью во внешней сфере Хилла Земли, при эксцентриситете $e = 0.7$ не превышает 0.62% от периода обращения, что позволяет не учитывать тень при качественном анализе движений спутника.

Вторая глава посвящена исследованию эволюции высоких орбит спутника Земли в ограниченной задаче трех тел, под действием гравитационных возмущений со стороны Солнца и светового давления без учета земной тени, когда невозмущенная траектория спутника – кеплеровский эллипс, принадлежащий плоскости эклиптики. Возмущающая функция задачи в геоцентрической системе отсчета задается выражением:

$$R = -\delta r_0^2 \frac{r}{r_1^2} \cos \gamma + \frac{1}{r_1} (f m_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^k P_k(\cos \gamma) \quad (1)$$

где δ – коэффициент солнечного давления на спутник; r_0 – константа, среднее расстояние от Земли до Солнца; r_1 – расстояние от центра до Солнца в эллиптическом движении; m_1 – масса Солнца; r – расстояние от центра до спутника; γ – угол между направлением на Солнце и спутник; P_k – полиномы Лежандра.

В результате усреднения выражения (1) по средней аномалии спутника и Солнца получено среднее значение возмущающей функции в отсутствии резонансов между средним невозмущенным движением спутника и средним движением Солнца:

$$R^{**}(e, \omega) = \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} (f m_1 - \delta r_0^2) \zeta. \quad (2)$$

Здесь ζ определяется по формуле:

$$\zeta = \sum_{k=2}^{\infty} p^{k+2} p_1^{1-k} \left(\check{A}_{(1-k),0} A_{(k+2),0} \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \check{A}_{(1-k),i} A_{(k+2),i} \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 \cos i\omega \right), \quad (3)$$

где a_1, e_1, p_1 – большая полуось, эксцентриситет и фокальный параметр солнечной орбиты; a, ω, p – большая полуось, аргумент перицентра и фокальный параметр орбиты спутника; $A_{n,0}, \check{A}_{n,0}, A_{n,k}, A_{n,s}$ выражаются через гипергеометрические функции Гаусса и Клаузена; $P_k^{(i)}(0)$ – присоединенный полином Лежандра в нуле.

Показано, что первыми интегралами усредненных оскулирующих уравнений являются большая полуось орбиты спутника a и среднее значение возмущающей функции R^{**} . Был подробно изучен хилловский вариант задачи, при котором $r/r_1 \ll 1$, что позволяет пренебречь в формуле (3) членами порядка $(r/r_1)^4$ и выше. Для усеченного ряда построены фазовые портреты колебаний при разных значениях параметров:

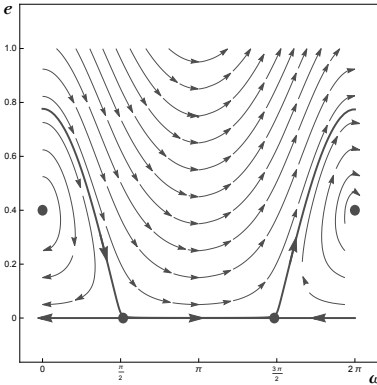


Рис. 2 — Фазовый портрет колебаний с одним устойчивым стационарным решением на цилиндре $S^1 \times R^1$

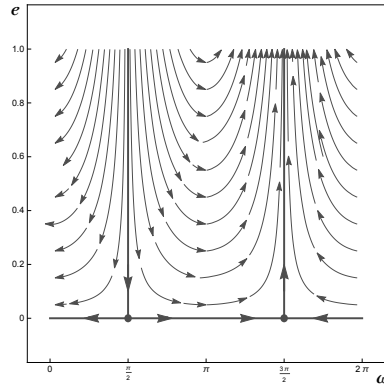


Рис. 3 — Фазовый портрет колебаний в отсутствии устойчивого стационарного решения

Показано, что существует три типа эволюционирующих орбит: орбиты либрационного и ротационного типов и орбиты столкновения с Землей. Для орбит первого типа оскулирующие аргумент перицентра и эксцентриситет меняются периодически, но с малыми амплитудами, орбита близка к траектории, сохраняющей значения своих невозмущенных кеплеровских элементов во все время движения.

Особенность семейства орбит второго типа – непрерывно возрастающий аргумент перицентра, и, как следствие, медленное вращение линия апсид

оскулирующего эллипса, на которое накладывается медленное периодическое изменение эксцентриситета.

Орбиты столкновения характеризуются оскулирующими эксцентриситетами, близкими к единице. В этом случае расстояние между Землей и перицентром орбиты мало, что ведет к столкновению спутника-баллона с Землей.

Численное моделирование траекторий позволило описать дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи трех тел в область, более удаленную от Солнца.

Третья глава посвящена исследованию плоской ограниченной планетной задачи четырёх тел с учётом сил светового давления, когда орбита Земли – кеплеровский эллипс с фокусом в Солнце, орбита Луны – кеплеровский эллипс с фокусом в Земле, спутник Земли – пассивно гравитирующее тело. Возмущающая функция задачи в геоцентрической системе отсчета задается выражением:

$$R = -\delta r_0^2 \frac{r}{r_1^2} \cos \gamma_1 + \frac{1}{r_1} (f m_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^k P_k(\cos \gamma_1) + \\ + f m_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{r_2^3 - r^3}{r^2 r_2^2} \cos \gamma_2 + \frac{1}{r} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r} \right)^k P_k(\cos \gamma_2) \right), \quad (4)$$

где δ – коэффициент солнечного давления на спутник; r_0 – константа, среднее расстояние от Земли до Солнца; r_1 – расстояние от центра до Солнца в эллиптическом движении; r_2 – расстояние от центра до Луны в эллиптическом движении; m_1 – масса Солнца; m_2 – масса Луны; r – расстояние от центра до спутника; γ_1 – угол между направлением на Солнце и спутник; γ_2 – угол между направлением на Луну и спутник; P_k – полиномы Лежандра.

Проведено усреднение выражения (4) по средним аномалиям спутника, Солнца и Луны, в результате получена усреднённая силовая функция задачи в оскулирующих элементах в нерезонансном случае, когда невозмущённая орбита спутника Земли принадлежит внешней сфере гравитационного влияния Земли, расположенной за лунной сферой Хилла:

$$R^{***} = (f m_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} R_{1-k, k+2, k}^{**}(\omega) + \\ + f m_2 \left(\frac{1}{a} + \sum_{k=2}^{\infty} R_{k+2, 1-k, k}^{***}(\omega - \omega_2) \right). \quad (5)$$

Здесь a , e , ω – большая полуось, эксцентриситет и аргумент перицентра орбиты спутника; e_2 , ω_2 – эксцентриситет и аргумент перицентра орбиты Луны; а операторы усреднения $R_{s, m, k}^{**}(\eta)$, $R_{t, m, k}^{***}(\zeta)$ выражаются через гипергеометрические функции Гаусса и Клаузена.

Показано, что интегралами усреднённых уравнений в оскулирующих элементах являются большая полуось орбиты спутника a и среднее значение силовой функции R^{***} . Для проведения качественного анализа рассмотрен усечённый ряд (5), в котором используются первые три члена, взятые для гравитационного возмущения со стороны Солнца (поскольку $r/r_1 \ll 1$) и со стороны Луны ($r_2/r \ll 1$). Используя усеченный ряд были исследованы стационарные режимы колебаний, их бифуркация в зависимости от коэффициента светового давления δ и большой полуоси невозмущённой орбиты спутника a . Показано,

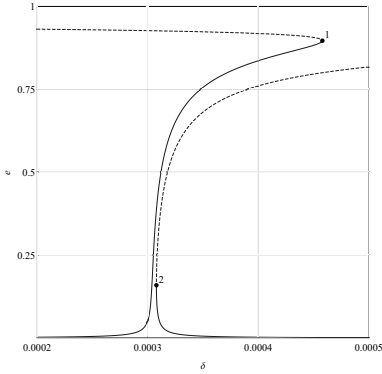


Рис. 4 — Бифуркационная диаграмма $e(\delta)$

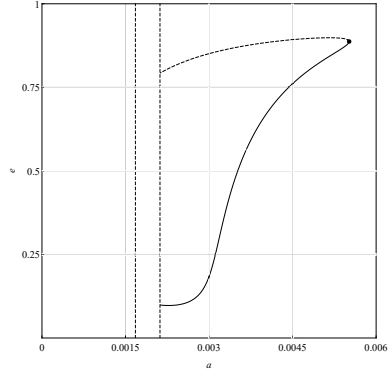


Рис. 5 — Бифуркационная диаграмма $e(a)$

что при фиксированном параметре большой полуоси, существует два бифуркационных значения коэффициента светового давления (см. рис. 4). Бифуркации по a также наблюдаются при фиксированном значении δ (рис. 5).

Построены фазовые портреты колебаний при разных значениях коэффициента светового давления δ , имеющие гораздо более сложный вид, чем в плоской задаче трех тел (см. рис. 6, 7, 8).

Показано, что существует два типа эволюционирующих орбит: орбиты либрационного и ротационного типов. Для орбит первого типа оскулирующие аргумент перигея и эксцентриситет меняются периодически, но с малыми амплитудами, орбита близка к траектории, отвечающей стационарной точке и сохраняющей значения своих невозмущённых кеплеровских элементов во всё время движения.

Орбиты второго типа имеют непрерывно возрастающий аргумент перигея, и, как следствие, медленное вращение линии апсид оскулирующего эллипса, на которое накладывается медленное периодическое изменение эксцентриситета.

Притяжение спутника точкой Луной сильно осложняет проведение расчётов в окрестности эксцентриситета $e = 1$, так как при этом коэффициенты ряда полученной силовой функции R^{***} быстро возрастают по величине при $e \rightarrow 1$ и ряд расходится. Поэтому, в отличие от плоской ограниченной задачи

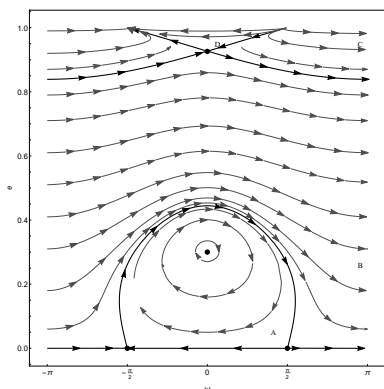


Рис. 6 — Фазовый портрет при значении $\delta = 10^{-3}$

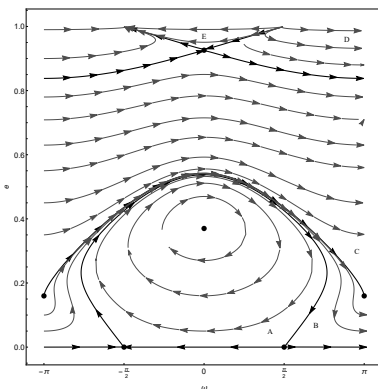


Рис. 7 — Фазовый портрет при бифуркационном значении $\delta = \delta_*^{(2)}$

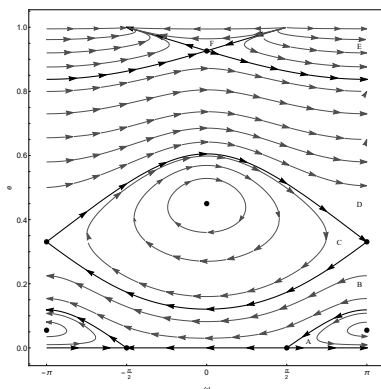


Рис. 8 — Фазовый портрет при значении $\delta = 1.5 \times 10^{-3}$

трёх тел, численный счёт не подтвердил наличие орбит столкновения с Землёй, для которых эксцентриситет близок к единице.

Описаны дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи четырёх тел в область, более удалённую от Солнца.

В **четвертой главе** рассмотрена пространственная ограниченная круговая задача трех тел в нерезонансном случае. Предполагается, что пассивно гравитирующее тело имеет большую парусность, что делает необходимым рассмотреть задачу с учетом светового давления. Изучение эволюции орбиты спутника проводится на основе схемы Гаусса: исследуются усредненные уравнения движений в кеплеровом фазовом пространстве, когда в качестве невозмущенной орбиты берется кеплеровский эллипс с фокусом в основном теле (Солнце), находящийся внутри сферы, радиус которой равен радиусу орбиты внешней планеты (Юпитера), таким образом исследуется внутренняя задача.

Показано, что силовая функция задачи в гелиоцентрической системе отсчета имеет вид:

$$R = -\frac{\delta r_0^2}{r} + \frac{f m_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J}\right)^n P_n(\cos \gamma), \quad (6)$$

где δ – коэффициент солнечного давления на спутник; r_0 – константа, среднее расстояние от Земли до Солнца; r_J , m_J – радиус круговой орбиты и масса Юпитера; r – расстояние от центра до спутника; γ – угол между направлением на Юпитер и спутник; P_k – полиномы Лежандра.

Показано, что в результате двукратного усреднения силовой функции задачи световое давление не оказывает влияния на качественные исследования пассивно гравитирующей точки, вследствие чего была рассмотрена классическая задача. Известно, что исследование усредненной модели в классическом случае, когда световым давлением пренебрегают, сталкивается с немалыми трудностями как при вычислении усредненной силовой функции, так и при анализе эволюционирующих орбит.

В работе показано, что дважды усредненная силовая функция допускает, на основе применения формулы Парсевала, явное аналитическое представление через гипергеометрические функции Гаусса $F_{2,1}$ и обобщенные гипергеометрические функции Клаузена $F_{3,2}^{reg}$, допускающие разложение в сходящиеся степенные ряды. Выражение для усредненной силовой функции можно разложить в ряд Фурье по ω :

$$R^{**} = \frac{f m_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{2n}(e) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} B_{2k}(e) A_{2n}^{(2k)}(e, \cos i) \right) \cos 2n\omega \right]. \quad (7)$$

Здесь

$$B_{2n} = \frac{a^{2n}(1+e)^{2n}}{r_J^{2n}} P_{2n}(0), \\ A_m^{(2n)} = \begin{cases} 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n; 1 - m, 1 + m; \frac{2e}{e-1} \right) \times \\ \times \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i), & m \leq 2n \\ 0, & m > 2n \end{cases}$$

i , a , e , ω – наклонение, большая полуось, эксцентриситет и аргумент перицентра орбиты спутника.

Показано также, что усредненные уравнения движения интегрируются по Лиувиллю (имеются три независимых первых интеграла в инволюции):

$$a = c_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1, \quad \hat{R}(e, \omega) = c_2, \quad (8)$$

где второй из этих интегралов часто называют интегралом Лидова–Козаи, а силовая функция $\hat{R} = \hat{R}(e, \omega)$ – результат исключения угла i .

Редуцированная система уравнений с одной степенью свободы имеет вид:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e}. \quad (9)$$

При фиксированном значении аргумента перигента $\omega = \pi/2$ были получены диаграммы равновесия $e(c_1)$ и $e(a/r_J)$ для хилловского, а также для второго, третьего и четвертого приближений силовой функции. Было установлено, что в случае третьего и четвертого приближений кривые равновесия содержат точки бифуркации типа «седло-узел» как по параметру c_1 , так и по параметру a/r_J (см. рис. 9, 10).

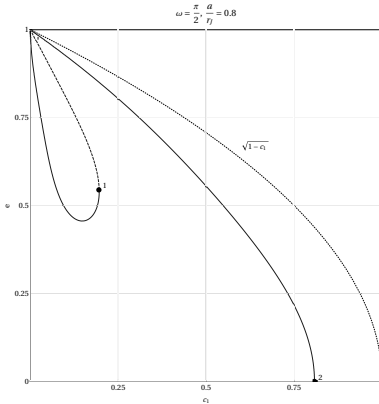


Рис. 9 – Диаграмма равновесий $e(c_1)$ для третьего приближения.

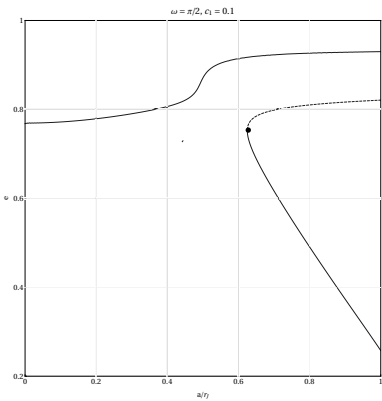


Рис. 10 – Диаграмма равновесий $e(a/r_J)$ для третьего приближения.

В плоскости кеплеровских элементов (e, ω) были численно построены фазовые портреты колебаний для хилловского, а также второго, третьего и четвертого приближений силовой функции задачи (см. рис. 11, 12, 13, 14). Фазовые портреты были построены для значения параметра $c_1 = 0.1$. Заметим, что топология фазовых портретов для хилловского и второго приближений силовой функции не зависит от параметра c_1 , в то время как фазовые портреты третьего и четвертого приближения в зависимости от значения параметра c_1 имеют, соответственно, два и три топологически различных рисунка.

Анализ фазовых портретов выявил область либрационных A и ротационных B движений аргумента перигента. Также было описано появление

в области либрационных движений A кластера, состоящего из подобластей либрационных движений линии апсид C, D, E с соответствующими им стационарными точками типа «центр» и двумя седловыми точками (см. рис. 13, 14).

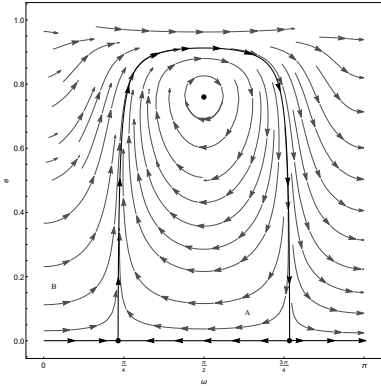


Рис. 11 — Фазовый портрет в хилловском приближении силовой функции при $c_1 \in (0, 1)$.

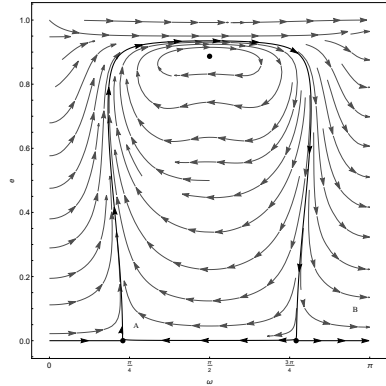


Рис. 12 — Фазовый портрет во втором приближении силовой функции при $c_1 \in (0, 1)$.

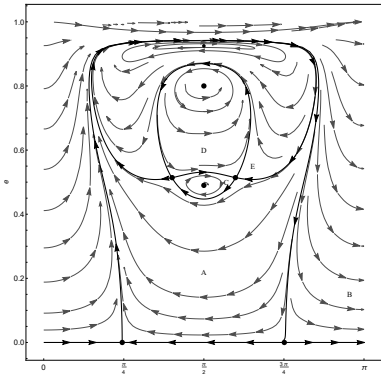


Рис. 13 — Фазовый портрет в третьем приближении силовой функции при $c_1 \in (0, 0.195)$.

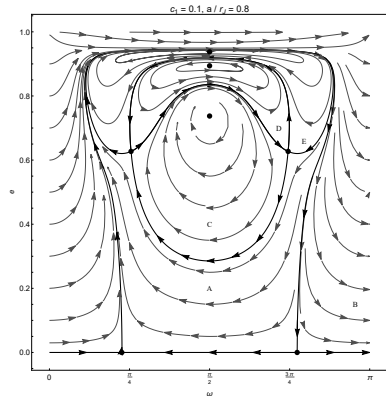


Рис. 14 — Фазовый портрет в четвертом приближении силовой функции при $c_1 \in (0.015, 0.382)$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено уравнение конической тени, для тела, движущегося по эллиптической орбите в плоскости эклиптики.
2. Получена количественная оценка относительного времени пребывания ИСЗ, движущегося в плоскости эклиптики, в земной тени в зависимости от элементов орбиты
3. Описана эволюция высоких орбит в плоской эллиптической задаче трех тел с учетом светового давления: получена усредненная силовая функция задачи, построен фазовый портрет колебаний по эксцентриситету и аргументу перицентра эволюционирующего эллипса в зависимости от коэффициента светового давления δ . Получены орбиты столкновения с Землей. Описан эффект смещения орбит под действием светового давления в область более удаленную от Солнца.
4. Описана эволюция высоких орбит в плоской эллиптической планетной задаче четырех тел с учетом светового давления: получена усредненная силовая функция задачи, найдены бифуркационные параметры, построены фазовые портреты колебаний по эксцентриситету и аргументу перицентра эволюционирующего эллипса в зависимости от коэффициента светового давления δ .
5. Получено явное представление для усредненной силовой функции в виде ряда Фурье, коэффициенты которого выражаются через известные специальные функции Клаузена. Численно показано, что этот ряд является расходящимся асимптотическим рядом вдоль кривых неаналитичности. Описана эволюция орбит в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел: найдены бифуркационные параметры, построены фазовые портреты колебаний по эксцентриситету и аргументу перицентра эволюционирующего эллипса в хилловском, а также во втором, в третьем и четвертом приближениях.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Доброславский А. В., Красильников П. С.* Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной задаче трех тел с учетом светового давления // *Письма в астрономический журнал.* — 2018. — Т. 44, № 8–9. — С. 618–630.
2. *Доброславский А. В., Красильников П. С.* Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной планетной задаче четырёх тел с учётом светового давления // *Прикладная математика и механика.* — 2020. — Т. 84, № 1. — С. 26–43.
3. *Доброславский А. В.* Об оценке среднего времени пребывания ИСЗ в земной тени при движении в плоскости эклиптики // *Космические исследования.* — 2021. — Т. 59, № 3. — С. 1–7.

4. Dobroslavskii A. V., Krasil'nikov P. S. Motion of a Satellite in the Circular Three-Body Problem with Light Pressure // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2021. — Vol. 255, no. 5. — Pp. 616–622. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05399-y>.
5. Dobroslavskii A. V., Krasilnikov P. S. On the averaged balloon satellite motions in a plane restricted four-body problem with light pressure // *AIP Conference Proceedings*. — 2019. — Vol. 2181, no. 1. — P. 020010. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5135670>.
6. Dobroslavskiy A. V., Krasilnikov P. S. Analysis of balloon satellite motion in the planetary restricted four-body problem taking into consideration light pressure forces // *AIP Conference Proceedings*. — 2019. — Vol. 2171, no. 1. — P. 160004. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5133308>.
7. Доброславский А. В., Красильников П. С. Эволюция плоских орбит спутника-баллона под действием возмущающего притяжения Солнца и светового давления // *Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018)*, 24-31 мая 2018 г., Алушта. — 2018. — С. 495–496.
8. Доброславский А. В., Красильников П. С. Эволюция плоских орбит спутника-баллона под действием возмущающего притяжения Солнца и светового давления // *Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам*, 6-11 июля 2018 г., Суздаль. — 2018. — С. 123.
9. Доброславский А. В., Красильников П. С. Эволюция плоских орбит спутника-баллона под действием возмущающего притяжения Солнца и светового давления // *Проблемы механики и управления: Материалы Международной конференции*, 16–22 сентября 2018 г., Махачкала. — 2018. — С. 136–138.
10. Доброславский А. В., Красильников П. С. Анализ движений спутника-баллона в плоской ограниченной задаче четырех тел с учетом сил светового давления // *XLII Академические чтения по космонавтике. Сборник тезисов*. 29 января – 1 февраля 2019 г. — Т. 1. — 2019. — С. 110–111.
11. Доброславский А. В., Красильников П. С. Анализ осредненных движений спутника-баллона в плоской ограниченной задаче четырех тел с учетом сил светового давления // *Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам*, 24–31 мая 2019 г., Алушта. — 2019. — С. 720–721.

12. *Доброславский А. В., Красильников П. С.* Анализ средних движений спутника-баллона в плоской ограниченной эллиптической задаче четырёх тел // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. — 2019. — С. 664–666.
13. *Доброславский А. В.* Эволюция плоских орбит спутника-баллона под действием возмущающего притяжения Солнца и светового давления // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 3-8 июля 2020 г., Суздаль. — 2020. — С. 56–57.
14. *Доброславский А. В.* Оценка среднего времени пребывания спутника в земной тени при движении в плоскости эклиптики // Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020), 6–13 сентября 2020 г., Алушта. — 2020. — С. 373–376.
15. *Доброславский А. В., Красильников П. С.* Об эволюции орбит в круговой ограниченной задаче трех тел со световым давлением. Внутренняя задача // 19-я Международная конференция "Авиация и космонавтика". 23–27 ноября 2020 года. Москва. Тезисы. — 2020. — С. 562–564.
16. *Доброславский А. В.* Эволюция орбит во внутренней круговой ограниченной задаче трёх тел со световым давлением // IX Поляховские чтения : Материалы международной научной конференции по механике, 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург. — 2021. — С. 147–148.

Доброславский Александр Владимирович

Исследование усредненных движений КА в ограниченной задаче трех тел с учетом сил
светового давления

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____