

На правах рукописи

Леонов Сергей Сергеевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА И
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре «Дифференциальные уравнения» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ, Московский авиационный институт)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Кузнецов Евгений Борисович

Официальные оппоненты: **Лопаницын Евгений Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор центра математического образования
ФГБОУ ВО «Московский политехнический университет»

Орлов Игорь Александрович,
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник лаборатории теории механизмов и структуры машин отдела «Механика машин и управление машинами» ФГБУН «Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладной механики Российской академии наук»

Защита состоится «16» декабря 2016 года в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке: https://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=72710

Автореферат разослан «____» _____ 2016 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.125.04, кандидат
физико-математических наук, доцент

Северина
Наталья Сергеевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие задачи физики и механики моделируются плохо обусловленными задачами Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с несколькими предельными особыми точками (ПОТ), в которых правые части уравнений системы теряют смысл. Явные методы для решения таких задач могут оказаться малоэффективными. Методы же решения жестких задач на основе неявных схем, разрабатываемые такими учеными как Ракитский Е. В., Арушанян О. Б., Калиткин Н. Н., Скворцов Л. М., Новиков Е. А., Демидов Г. В., Булатов М. В., Лебедев В. И., Gear C. W., Rosenbrock H. H., Lambert J. D., Wanner G., Hairer E., Campbell S. L. и др., имеют ряд недостатков, связанных с решением систем нелинейных уравнений, возникающих при реализации неявных схем. Поэтому разработка новых численных методов решения плохо обусловленных задач является актуальной.

Одним из наиболее эффективных подходов к решению плохо обусловленных начальных задач для систем ОДУ является метод продолжения решения по наилучшему параметру*, отсчитываемому вдоль интегральной кривой рассматриваемой задачи. Систематическое развитие данного метода получил в работах Григолоука Э. И., Шалашилина В. И., Кузнецова Е. Б. и их учеников, ими показана эффективность наилучшей параметризации при решении широкого класса плохо обусловленных задач. Также параметризацию в своих работах использовали Калиткин Н. Н., Лопаницын Е. А., Гаврюшин С. С., Карпов В. В., Семенов А. А., Riks E., Crisfield A. E. и др.

В диссертационной работе разрабатываются новые методы численного решения плохо обусловленных задач Коши для систем ОДУ с несколькими ПОТ, использующие продолжение решения по параметру. В качестве приложения предложенных методов рассматриваются тестовые задачи расчета длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести†. Для моделирования процесса ползучести вплоть до разрушения применяется использующий понятие параметра поврежденности кинетический подход (Работнов Ю. Н., Качанов Л. М., Шестериков С. А., Соснин О. В., Локощенко А. М., Никитенко А. Ф., Горев Б. В., Хажинский Г. М., Hayhurst D. R., Altenbach H., Krajcinovic D., Trampczynski W., Betten J. и др.).

Характерной чертой моделирования процесса ползучести является то, что определяющие уравнения, используемые для описания данного процесса, содержат несколько материальных констант, которые необходимо определять на основании информации о протекании процесса деформирования, главным источником которой является эксперимент. Кроме того, значения материальные константы зависят от многих факторов, включающих температуру и уровень нагружения, что существенно усложняет процесс их определения. В качестве нового подхода к идентификации моделей ползучести предложен метод, основанный на применении нейросетевой методологии, разрабатываемой Васильевым А. Н. и Тарховым Д. А.‡

Целью работы является создание новых эффективных методов численного решения плохо обусловленных задач Коши для систем ОДУ с несколькими ПОТ, а также методов построения моделей, описываемых такими начальными задачами.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

* Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.

† Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 2014. – 752 с.

‡ Васильев А. Н., Тархов Д. А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2009. – 528 с.

1. В рамках метода продолжения решения по параметру разработать подход к численному решению плохо обусловленных начальных задач.

2. Указать преимущества использования метода продолжения решения по параметру к решению плохо обусловленных начальных задач по сравнению с традиционными методами численного интегрирования задачи Коши.

3. Разработать метод, использующий алгоритмы нейросетевого моделирования, для идентификации моделей, описываемых плохо обусловленными задачами Коши со скалярными параметрами, и расчета недоопределенных граничных задач.

4. Апробировать разработанные методы на тестовых задачах расчета длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести.

Методы исследования. Для решения задачи Коши в работе применяются традиционные явные и неявные методы, а также метод продолжения решения по параметру. Для идентификации моделей и решения недоопределенных граничных задач используются искусственные нейронные сети. Для моделирования рассматриваемых в диссертационной работе тестовых задач ползучести применяются уравнения кинетической теории.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Рассмотрено применение метода продолжения решения по параметру, в том числе и наилучшему, к расчету моделей, описывающих деформирование элементов конструкций в условиях ползучести при разных температурно-силовых воздействиях.

2. Для решения плохо обусловленных задач Коши предложен новый аргумент продолжения решения, названный модифицированным наилучшим, для которого определено отклонение направления отсчета по отношению к наилучшему, позволяющее оценивать обусловленность параметризованных им задач. Доказана единственность наилучшего аргумента в классе модифицированных аргументов продолжения специального вида, используемых для задач ползучести.

3. Разработан метод идентификации моделей ползучести по результатам эксперимента, комбинирующий возможности нейросетевого моделирования и продолжение решения по параметру.

Научная и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Применение наилучшей параметризации к решению плохо обусловленных задач Коши для систем ОДУ с двумя ПОТ позволяет упростить процесс вычисления, существенно уменьшить время счета и погрешность решения по сравнению с другими методами. При этом, для реализации метода продолжения по параметру не требуется существенных затрат, что способствует его быстрому внедрению.

2. Модифицированный аргумент продолжения решения позволяет при расчете более гибко учитывать особенности конкретной задачи, что дает возможность получать более удобный вид параметризованной задачи с необходимыми свойствами и еще больше сократить время счета.

3. Предложенный нейросетевой подход к идентификации моделей не зависит от вида используемых уравнений, что делает его применимым для широкого класса задач и на практике позволяет получить более точное согласование экспериментальных и расчетных данных.

4. По результатам проводимых в диссертации исследований разработан комплекс программ «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей парамет-

ризации» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016613378), который может быть использован для решения практических задач.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: **1)** строгим использованием классических механических концепций и адекватного математического аппарата, **2)** удовлетворительным согласованием полученных расчетных данных с точными аналитическими решениями рассматриваемых задач, а также опубликованными расчетными и экспериментальными результатами других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях, симпозиумах и конкурсах: **1)** XVIII и XIX международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2013 и 2015), **2)** IV международной научной конференции «Фундаментальные проблемы системной безопасности и устойчивости» (Москва, 2013), **3)** 12-ой и 13-ой международных конференциях «Авиация и космонавтика» (Москва, 2013 и 2014), **4)** конкурсе научно-технических работ и проектов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики» (Москва, 2013), **5)** XX и XXI международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова (Кременки, 2014 и 2015), **6)** X и XI международных конференциях по неравновесным процессам в соплах и струях (Алушта, 2014 и 2016), **7)** VIII всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 2014), **8)** международной конференции «Успехи механики сплошных сред» (Владивосток, 2014), **9)** московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике» (Москва, 2015), **10)** XI всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015), **11)** XXVI международной конференции «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций» (Санкт-Петербург, 2015), **12)** International Symposium «Mathematics of XXI Century & Natural Science» (St. Petersburg, 2015), **13)** X юбилейной международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2015), **14)** Thirteenth International Symposium on Neural Networks (St. Petersburg, 2016).

Личный вклад. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором реализованы используемые численные методы решения задачи Коши в среде Matlab, проведены численные эксперименты и выполнен анализ полученных расчетных данных. Выбор численных методов расчета, круга рассматриваемых задач и разработка алгоритма применения метода продолжения решения по параметру для задач ползучести проводились под руководством Е. Б. Кузнецова. Адаптация нейросетевого подхода к решению задач ползучести выполнена совместно с А. Н. Васильевым. Программная реализация алгоритмов нейросетевого моделирования в среде Mathcad выполнена автором диссертации.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 29 работах, среди которых 6 статей в журналах из перечня ВАК [1-6] и 23 публикации в других изданиях, основные из которых [7-11].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и четырех приложений. Полный объем диссертации составляет 176 страниц с 28 рисунками и 56 таблицами. Список литературы содержит 115 наименований.

Работа поддержана грантами РФФИ № 13-08-00473-а и № 16-08-00943-а.

Благодарности. Прежде всего автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному руководителю Евгению Борисовичу Кузнецову за многолетнее внимание к работе и обсуждение кандидатской диссертации на всех этапах ее создания. Огромную признательность автор выражает Александру Николаевичу Васильеву, советы которого позволили значительно улучшить часть диссертационной работы, посвященную использованию искусственных нейронных сетей. Автор безгранично благодарен своим родителям Галине Владимировне и Сергею Алексеевичу за неоценимую моральную поддержку, без которой диссертационная работа не была бы завершена.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проводимых исследований, приводится краткий обзор научной литературы по изучаемой проблеме, ставятся цель и задачи работы, формулируются научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В **первой главе** рассмотрено применение традиционных явных и неявных методов решения задачи Коши к расчету моделей, которые описываются плохо обусловленными задачами Коши для систем ОДУ с несколькими ПОТ. В качестве тестовых используются задачи расчета ползучести и длительной прочности металлических конструкций при постоянной температуре, которые моделируются уравнениями теории структурных параметров Ю. Н. Работнова в форме системы двух ОДУ вида*

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma)}{\Psi(\omega)}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma)}{\Omega(\omega)} \quad (1)$$

с однородными начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \omega(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь ε – деформация ползучести, ω – безразмерный параметр поврежденности, σ – действующее напряжение, t – время, функциональные зависимости, входящие в правые части, определяются по результатам эксперимента. Параметр поврежденности ω изменяется от нулевого значения, в случае когда конструкция абсолютно целая, до единицы в момент разрушения.

Аналитическое решение задач вида (1)-(2) удается получить крайне редко, поэтому основным инструментом их исследования являются численные методы.

В первой части главы рассматривается решение плохо обусловленных начальных задач для систем ОДУ с одной ПОТ. Примером подобных задач является одноосное растяжение плоских образцов из титанового сплава ОТ-4 при постоянных напряжениях σ_0 и температуре $T = 500^\circ\text{C}$ в условиях ползучести. Для описания данной задачи используется конкретизация уравнений (1) в энергетической форме[†]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sigma_0(A_* - A)^m}, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{(A_* - A)^m} \quad (3)$$

с начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, \quad A(0) = 0. \quad (4)$$

В системе (3) роль параметра поврежденности играет величина удельной работы рассеяния A , принимающая в момент разрушения свое критическое значение A_* . Мате-

* Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 2014. – 752 с.

† Соснин О. В. Энергетический вариант ползучести и длительной прочности. Сообщение 1. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов // Проблемы прочности. – 1973. – №. 5. – С. 45-49.

риальные константы для системы (3) имеют вид: $A_* = 88.2 \text{ МДж/м}^3$, $m = 3$, $\beta = 0.0357 \text{ МПа}^{-1}$, $K = 1023.829 \text{ МПа}^4 \cdot \text{ч}^{-1}$.

Задача (3)-(4) плохо обусловлена в окрестности момента разрушения, но может быть решена явными методами, в качестве которых использовались методы Эйлера (ЭЯ), Эйлера-Коши (ЭКЯ) и Рунге-Кутты 4 порядка точности (РК4Я) с постоянным и переменным шагом. Смена шага проводится по методу Рунге-Ромберга-Ричардсона (РРР) с параметрами θ_1 и $\theta_2 = \theta_1/2$, отвечающими за уменьшение и увеличение шага соответственно. Для метода РК4Я результаты даны в таблице 1, где t_n^* , ε_n^* и A_n^* – расчетные значения длительной прочности конструкции, деформации ползучести и удельной работы рассеяния в момент разрушения соответственно, t_c – среднее время счета, h^t – шаг по аргументу t , θ_1 – задаваемая точность. При этом, для задачи (3)-(4) может быть найдено точное решение

$$A(t) = A_* - [A_*^{m+1} - K(m+1)e^{\beta\sigma_0 t}]^{1/(m+1)}, \quad \varepsilon(t) = A(t)/\sigma_0, \quad (5)$$

используя которое вычислялись следующие характеристики для относительной погрешности δA : δA_m – максимальное значение, δA_{med} – медиана, δA_{av} – среднее значение и δA_{dev} – среднеквадратическое отклонение от среднего значения (см. таблицу 1). Здесь и далее методами ЭЯ и ЭКЯ получены аналогичные расчетные данные.

Таблица 1. Расчетные данные для сплава ОТ-4

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	t_c , мс	δA_m , %	δA_{av} , %	δA_{med} , %	δA_{dev} , %
Постоянный шаг, $h^t = 10^{-4}$ ч								
98	0.8835	86.5788	446.2275	28387	1.838	$4 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-4}$
112.7	0.7741	87.2374	263.9683	16786	1.091	$5 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-4}$
147	0.5863	86.1794	77.5427	4926.2	2.291	$3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-10}$	0.003
Переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$								
98	0.9	88.1998	446.2276	1040.3	0.016	$6 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-4}$
112.7	0.7826	88.1995	263.9683	1032.6	0.023	$7 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-4}$
147	0.6	88.1987	77.5427	1020.2	0.017	$6 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-4}$

На рис. 1 изображены кривые ползучести для задачи деформирования образцов из сплава ОТ-4, полученные методом РК4Я при переменном шаге интегрирования с точностью $\theta_1 = 10^{-4}$. Точками отмечены экспериментальные данные, полученные под руководством О. В. Соснина. Квадратными маркерами отмечены кривые, соответствующие точному аналитическому решению (5). Треугольными маркерами отмечены приближенные решения задачи (3)-(4). При постоянном шаге интегрирования получены аналогичные кривые ползучести.

Применение явных методов численного решения задачи Коши с постоянным шагом интегрирования для расчета длительной прочности прямоугольных образцов из титанового сплава может требовать значительных вычислительных ресурсов. При этом, постоянный шаг позволяет получить решение высокой точности вне некоторой окрестности ПОТ, но не дает возможности близко подойти к ней. Более рациональным является применение переменного шага интегрирования с оценкой локальной погрешности в каждой точке по методу РРР, который в большинстве случаев позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты, а также дает возможность получить решения заданной точности и близко подойти к ПОТ. Применения специальных методов решения плохо обусловленных задач Коши не требуется. Данные выводы подтверждают также результаты расчета задачи деформирования трубчатых образцов из

нержавеющей стали X18H10T под действием постоянной одноосной растягивающей нагрузки при температуре $T = 850^\circ\text{C}$ в условиях ползучести*.

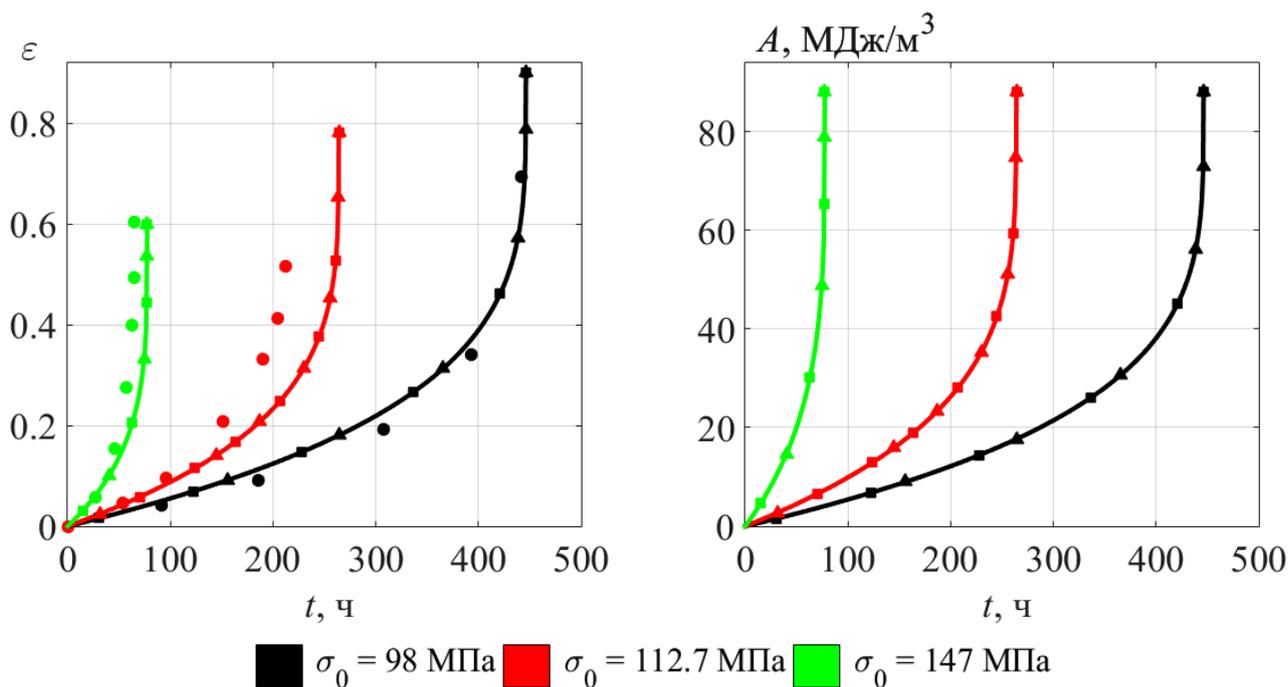


Рис. 1. Кривые ползучести для сплава ОТ-4

Во второй части главы рассмотрены задачи Коши для систем ОДУ с двумя ПОТ. Примером является задача одноосного растяжения цилиндрических образцов из стали 45 при постоянных напряжениях σ_0 и температуре $T = 850^\circ\text{C}$, определяющие уравнения для которой записываются в форме системы ОДУ (1) вида[†]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \quad (6)$$

с начальными условиями (2). Материальные константы для системы (6): $B_\varepsilon = 9.967 \cdot 10^{-19} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}$, $B_\omega = 9.689 \cdot 10^{-17} \text{ МПа}^{-k} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 0.849$, $n = 8.1$, $k = 6.97$, $m = 2.83$.

Задача (6), (2) имеет две ПОТ: в начальный момент времени и при разрушении. Применение явных методов для решения подобных задач малоэффективно. В диссертационной работе для решения задачи (6), (2) использовались неявный метод Эйлера (ЭНЯ) и неявный гауссов метод 4 порядка точности (Г4НЯ)[‡] с переменным шагом интегрирования. Реализация данных методов сопряжена с необходимостью численного решения систем нелинейных уравнений, что приводит к возникновению ограничения на шаг h^t , вид которого для задачи (6), (2) определяет

Теорема 1. *Для сходимости итерационного процесса метода простых итераций решения систем нелинейных уравнений, возникающих при решении задачи (6), (2) неявными методами, достаточно, чтобы шаг h^t для методов ЭНЯ и Г4НЯ удовлетворял соответственно неравенствам*

$$h^t < \left(C_{1,i}^{(0)} / \left| C_{2,i}^{(0)} \right| \right) \cdot (B_\varepsilon \sigma_0^n + B_\omega \sigma_0^k)^{-1} \quad \text{и} \quad (7)$$

* Локощенко А. М., Шестериков С. А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // Прикладная механика и техническая физика. – 1980. – №. 3. – С. 155-159.

† Горев Б. В., Захарова Т. Э., Клопотов И. Д. К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств // Физическая мезомеханика. – 2002. – Т. 5. – № 2. – С. 17–22.

‡ Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.

$$h^t < \frac{D_{1,i}^{(0)} \cdot D_{2,i}^{(0)} \cdot (B_\varepsilon \sigma_0^n + B_\omega \sigma_0^k)^{-1}}{\left[1/2 \cdot \left| H_{1,i}^{(0)} \right| \cdot D_{2,i}^{(0)} + (1/2 + \sqrt{3}/3) \cdot \left| H_{2,i}^{(0)} \right| \cdot D_{1,i}^{(0)} \right]}. \quad (8)$$

В таблице 2 даны результаты решения задачи (6), (2), полученные методом Г4НЯ с точностью $\theta_1 = 10^{-4}$, где ω_n^* – расчетное значение параметра поврежденности в момент разрушения. С использованием точного решения задачи (6), (2)

$$\omega(t) = \left\{ 1 - \left[1 - (m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k t \right]^{1/(m+1)} \right\}^{1/(\alpha+1)}, \quad \varepsilon(t) = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \cdot \omega(t), \quad (9)$$

вычислена относительная погрешность $\delta\omega$, обозначения для которой аналогичны используемым в таблице 1. Для старта неявных методов необходимо также задать приближение для начального момента времени, которое для метода Г4НЯ выбиралось в виде $h_0^t = 3 \cdot 10^{-7}$ ч, $\varepsilon_0^{(0)} = 2 \cdot 10^{-5}$, $\omega_0^{(0)} = 4 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 2. Расчетные данные для стали 45

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	t_c , мс	$\delta\omega_m$, %	$\delta\omega_{av}$, %	$\delta\omega_{med}$, %	$\delta\omega_{dev}$, %
35	0.5714	0.9997	7.0006	62.681	79.186	0.185	0.003	2.446
40	0.6647	1	2.7601	74.867	87.418	0.181	0.002	2.53
45	0.7592	0.9998	1.2145	72.269	91.929	0.2	0.003	2.678

На рис. 2 изображены кривые ползучести для задачи одноосного растяжения образцов из стали 45, полученные методом Г4НЯ при переменном шаге интегрирования с точностью $\theta_1 = 10^{-4}$, звездочкой обозначен момент разрушения в эксперименте. Экспериментальные данные получены под руководством Б. В. Горева.

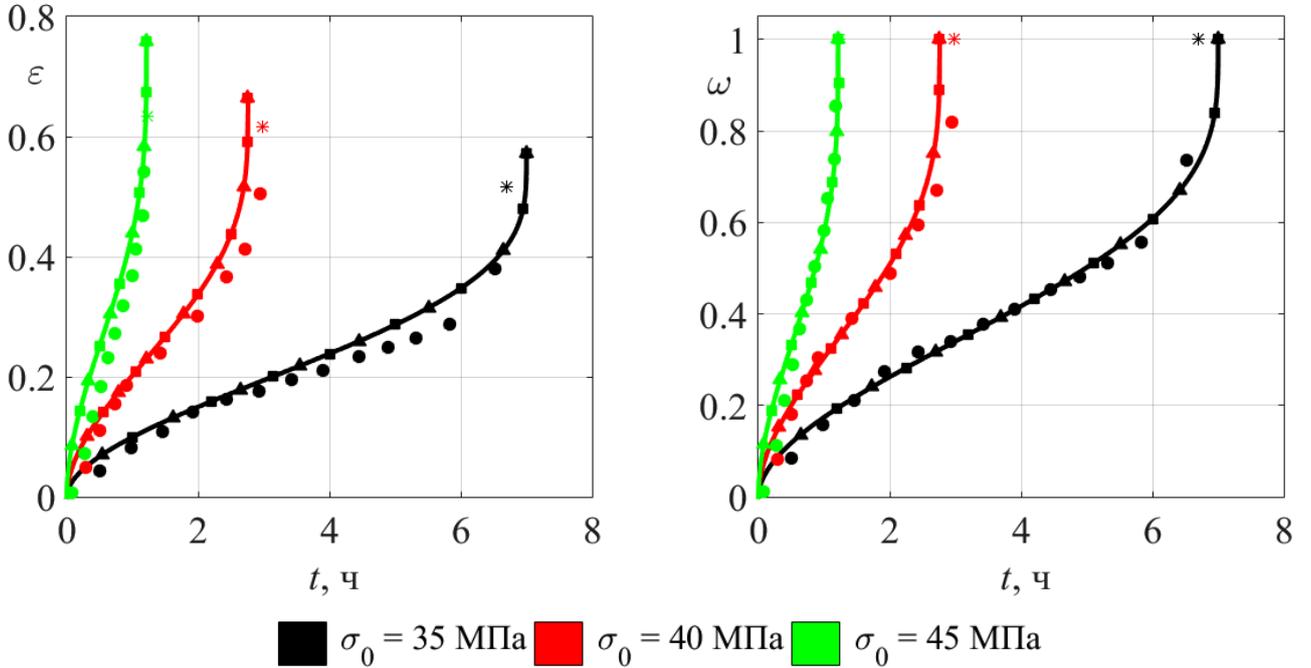


Рис. 2. Кривые ползучести для стали 45

Таким образом, для решения задачи расчета длительной прочности образцов из стали 45 необходимо использовать специальные методы решения жестких задач. Применяемые в диссертационной работе неявные методы позволяют получить решение данной задачи, но, в связи с необходимостью численного решения систем нелинейных уравнений, обладают рядом недостатков. К таковым относятся: необходимость выбора начального приближения и обоснования сходимости итерационных процессов,

возникновение ограничения на шаг интегрирования и т. д. Все это усложняет процесс решения подобных задач. Данные выводы подтверждают также результаты решения задачи расчета ползучести и длительной прочности круглых стержней из анизотропного титанового сплава ЗВ при одноосном растяжении[†].

Во **второй главе** для устранения трудностей, возникающих при решении задач Коши для систем ОДУ с несколькими ПОТ неявными методами, используется преобразование исходной задачи к наилучшему аргументу λ^\ddagger , отсчитываемому вдоль интегральной кривой этой задачи, который доставляет ей наилучшую обусловленность. Для задачи (1)-(2) наилучший аргумент записывается в скалярном виде

$$(d\lambda)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + (dt)^2. \quad (10)$$

Для образцов из стали 45 преобразованная к аргументу λ задача примет вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q_1}}, \quad \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_1}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q_1}} \quad (11)$$

с начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad t(0) = 0, \quad (12)$$

где $Q_1 = \omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}$. Значения материальных констант для системы (11) те же, что и для системы (6).

Квадратичная норма правой части системы (11) равна единице и задача (11), (12) может быть решена явными методами, используемыми ранее. Результаты, полученные методом РК4Я с точностью $\theta_1 = 10^{-4}$, даны в таблице 3. Кривые ползучести, полученные при решении задачи (11), (12), аналогичны изображенным на рис. 2.

Таблица 3. Расчетные данные для стали 45, задача (11), (12)

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	t_c , мс	$\delta\omega_m$, %	$\delta\omega_{av}$, %	$\delta\omega_{med}$, %	$\delta\omega_{dev}$, %
35	0.5713	0.9995	7.0005	42.61	0.709	0.004	10^{-5}	0.038
40	0.6646	0.9999	2.7601	40.88	0.656	0.004	10^{-5}	0.038
45	0.7587	0.9992	1.2145	42.44	0.534	0.003	10^{-5}	0.03

При сравнении результатов таблиц 2 и 3 можно видеть, что переход к аргументу λ дает возможность сократить время счета в среднем на 35-40 процентов и уменьшить погрешность решения на порядок и более. Все это объясняется как указанными свойствами аргумента λ , так и возможностью применения явных методов для решения задачи (11), (12). Также исчезают все трудности, связанные с реализацией неявных методов и численным решением систем нелинейных уравнений. Аналогичные результаты получены и для задачи расчета ползучести и длительной прочности круглых стержней из анизотропного титанового сплава ЗВ при одноосном растяжении.

Применим наилучшую параметризацию также и к задаче расчета длительной прочности прямоугольных образцов из титанового сплава ОТ-4. Для задачи (3)-(4) аргумент λ примет вид

$$(d\lambda)^2 = (d\varepsilon)^2 + (dA)^2 + (dt)^2. \quad (13)$$

Тогда задача (3)-(4), преобразованная к аргументу λ , запишется в виде

[†] Горев Б. В., Банщикова И. А. К описанию процесса ползучести и разрушения упрочняющихся материалов по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности // *Вестник Самарского государственного технического ун-та. Серия «Физико-математические науки»*. – 2009. – № 2. – С. 90–98.

[‡] Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_2}}, \quad \frac{dA}{d\lambda} = \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_2}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\sigma_0 \cdot (A_* - A)^m}{\sqrt{Q_2}} \quad (14)$$

с однородными начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, A(0) = 0, t(0) = 0. \quad (15)$$

Здесь $Q_2 = \sigma_0^2 \cdot (A_* - A)^{2m} + (1 + \sigma_0^2) \cdot K^2 e^{2\beta\sigma_0}$. Значения материальных констант для системы (14) те же, что и для системы (3).

Результаты решения задачи (14)-(15), рассчитанные по методу РК4Я, представлены в таблице 4, где h^λ – шаг по аргументу λ . Кривые ползучести, полученные при решении задачи (14)-(15), аналогичны изображенным на рис. 1.

Таблица 4. Расчетные данные для сплава ОТ-4, задача (14)-(15)

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	t_c , мс	δA_m , %	δA_{av} , %	δA_{med} , %	δA_{dev} , %
Постоянный шаг, $h^\lambda = 10^{-4}$								
98	0.9	88.2	446.2276	50302	0.045	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$
112.7	0.7826	88.1999	263.9683	31985	0.044	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$
147	0.6	88.1999	77.5427	13877	0.053	10^{-5}	$2 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-4}$
Переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$								
98	0.9	88.1993	446.2276	1542.7	0.022	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-4}$
112.7	0.7826	88.1991	263.9683	1535.2	0.03	$9 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-4}$
147	0.6	88.1992	77.5427	1553.6	0.026	$4 \cdot 10^{-6}$	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-4}$

Отметим, что время счета для λ -преобразованной задачи (14)-(15) возрастает до двух раз для постоянного шага и до 50 процентов для переменного шага по сравнению с решением исходной задачи (3)-(4). При этом, существенного уменьшения погрешности не происходит. Время счета возрастает из-за увеличения размерности решаемой задачи на единицу и общим усложнением вида уравнений при переходе к аргументу λ , что является недостатком наилучшей параметризации. В случае использования постоянного шага, переход к аргументу λ позволяет гораздо ближе подойти к ПОТ в момент разрушения, но это приводит к увеличению погрешности результата.



Рис. 3. Блок-схема комплекса программ

Для решения задач, рассматриваемых в первой и второй главах диссертационной работы, в вычислительной среде Matlab R2015a разработан комплекс программ «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации». В состав программного комплекса включены все указанные выше методы, а также символьная процедура преобразования к наилучшему аргументу λ . Блок-схема комплекса программ изображена на рис. 3.

В **третьей главе** для ослабления недостатков наилучшей параметризации предложен модифицированный наилучший аргумент κ , который для системы ОДУ второго порядка

$$\frac{du}{dx} = F_1(u, v, x), \quad \frac{dv}{dx} = F_2(u, v, x), \quad x_0 \leq x \leq x_*, \quad u_0 \leq u \leq u_*, \quad v_0 \leq v \leq v_* \quad (16)$$

с начальными условиями

$$u(x_0) = u_0, \quad v(x_0) = v_0 \quad (17)$$

имеет вид

$$(d\kappa)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + \left(\frac{dx}{f(u, v, x)} \right)^2, \quad (18)$$

где функция $f(u, v, x)$ полагается произвольной неотрицательной.

Исследован процесс отсчета аргумента κ вида (18) и доказана

Теорема 2. *Для определения отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего в правой A_+ и левой A_- полукрестностях точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$, лежащей на интегральной кривой задачи (16)-(17), необходимо и достаточно, чтобы существовало целое число $k \geq 0$, являющееся наименьшим порядком частных производных функции $f(u, v, x)$, которые не обращаются одновременно в ноль, и существовали пределы*

$$A_{\pm} = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \Delta x \cdot \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\pm 1)^k \partial^{|\alpha|} f^{\pm}}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta x^{\alpha_1} \Delta y^{\alpha_2} \Delta z^{\alpha_3} + \gamma_{\pm}^{(k+1)}(\rho, \xi) \right|^{-1}, \quad (19)$$

где $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$, $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$.

Суммарное отклонение E_{ij} между направлениями отсчета аргументов κ и λ при движении вдоль интегральной кривой от точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$ до $M_j(u_j, v_j, x_j)$ имеет вид

$$E_{ij} = \left| \int_{x_i}^{x_j} \left(1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|, \quad x_0 \leq x_i, x_j \leq x_*. \quad (20)$$

По величине локальных отклонений (19) на интегральной кривой выделяются три класса точек: точки локальной эквивалентности при $A_+ = A_- = 0$, точки локальной неэквивалентности первого рода при $0 < A_{\pm} < \infty$ и второго рода при $A_+ \rightarrow \infty$ или $A_- \rightarrow \infty$. При прохождении через точку локальной эквивалентности M_i суммарное отклонение (20) изменяется на бесконечно малую величину, а при прохождении точек локальной неэквивалентности первого и второго рода оно изменяется на конечную или бесконечно большую величину соответственно.

Используя данную классификацию, аргументы λ и κ будем называть локально эквивалентными в окрестности точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$, если 1) точка M_i является точкой локальной эквивалентности и 2) существует точка интегральной кривой $M_j(u_j, v_j, x_j)$, лежащая левее M_i , такая что $E_{ji} = 0$.

Аргументы λ и κ будем называть эквивалентными в рассматриваемой области, если они локально эквивалентны в каждой точке этой области, т. е. для каждого значения $x \in [x_0, x_*]$ выполнено

$$\int_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi = 0.$$

Для эквивалентных аргументов λ и κ длины и тангенсы углов наклона векторов $d\bar{\lambda}$ и $d\bar{\kappa}$, задающих направления отсчета аргументов λ и κ соответственно, бесконечно близки. Обусловленность задач, преобразованных аргументами эквивалентными наилучшему, бесконечно близка к наилучшей.

Однако для аргументов продолжения решения вида (18) доказана

Теорема 3. *Для того чтобы аргументы λ и κ вида (18) были эквивалентны в рассматриваемой области, необходимо и достаточно, чтобы $f(u, v, x) = 1$ во всех точках этой области.*

Это значит, что наилучший аргумент λ единственный среди аргументов вида (18) доставляет задаче (16)-(17) наилучшую обусловленность.

Введем меру, позволяющую оценивать отклонение между направлениями отсчета аргументов λ и κ , в усредненном виде

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{\kappa_*} \int_0^{\kappa_*} \frac{|f(u, v, x) - 1|}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x)F_1^2(u, v, x) + f^2(u, v, x)F_2^2(u, v, x)}} d\zeta, \quad (21)$$

где u, v, x являются функциями аргумента κ .

На практике значение меры отклонения $\bar{\Xi}$ позволяет оценивать и сравнивать обусловленности задач, преобразованных аргументом κ : чем больше значение меры $\bar{\Xi}$, тем хуже обусловленность преобразованной задачи.

Используем полученные результаты для расчета длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести.

Для задачи растяжения образцов из стали 45 выберем аргумент κ в виде

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \right)^2. \quad (22)$$

Тогда преобразованная к аргументу κ задача (6), (2) запишется в форме системы

$$\frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q_3}} = \text{const}, \quad \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_3}} = \text{const}, \quad \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q_3}} \quad (23)$$

с начальными условиями (12). Здесь $Q_3 = 1 + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k} = \text{const}$.

Так как функция $\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m$ ограничена единицей, то и норма правой части системы (23) будет ограничена единицей, что дает возможность использовать для решения задачи (23), (12) явные методы. А учитывая, что первые два уравнения системы (23) имеют постоянные правые части, можно гораздо проще реализовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом, применяемые для численного решения. Результаты, полученные методом РК4Я с точностью $\theta_1 = 10^{-4}$, даны в таблице 5. Кривые ползучести для задачи (23), (12) аналогичны изображенным на рис. 2.

Таблица 5. Расчетные данные для стали 45, задача (23), (12)

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	t_c , мс	$\delta\omega_m$, %	$\delta\omega_{av}$, %	$\delta\omega_{med}$, %	$\delta\omega_{dev}$, %
35	0.5715	0.9998	7.0005	22.92	0.408	$7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	0.013
40	0.6644	0.9996	2.7601	17.54	0.408	$9 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-7}$	0.014
45	0.7588	0.9994	1.2145	15.6	0.408	0.001	$4 \cdot 10^{-7}$	0.016

Анализируя результаты таблицы 5, можно видеть, что переход к аргументу κ позволяет сократить время счета в среднем еще от нескольких десятков процентов до

нескольких раз. Это объясняется тем, что для κ -преобразованной задачи (23), (12) удается получить значительно более простой вид определяющих соотношений по сравнению с задачами (6), (2) и (11), (12). Наблюдается уменьшение погрешности решения в разы, но порядок погрешности сохраняется на уровне, полученном для λ -преобразованной задачи (11), (12). Сохранение порядка погрешности для κ -преобразованной задачи (23), (12) подтверждает и величина среднего отклонения $\bar{\Xi}$, равная 0.8588 для всех значений начального напряжения, что говорит о близости обусловленности κ -преобразованной задачи к наилучшей. Аналогичные результаты получены и при решении задачи расчета ползучести и длительной прочности круглых стержней из анизотропного титанового сплава ЗВ при одноосном растяжении.

Для задачи расчета длительной прочности прямоугольных образцов из титанового сплава ОТ-4 выберем аргумент κ в виде

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (dA)^2 + \left(\frac{dt}{(A_* - A)^m} \right)^2. \quad (24)$$

Тогда задача (3)-(4), преобразованная к аргументу κ , примет форму

$$\frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_4}} = \text{const}, \quad \frac{dA}{d\kappa} = \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_4}} = \text{const}, \quad \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\sigma_0 \cdot (A_* - A)^m}{\sqrt{Q_4}} \quad (25)$$

с начальными условиями (15). Здесь $Q_4 = \sigma_0^2 + (\sigma_0^2 + 1) \cdot K^2 \cdot e^{2\beta\sigma_0} = \text{const}$.

Правые части уравнений системы (25) также ограничены. Результаты решения задачи (25), (15), полученные методом РК4Я, представлены в таблице 6, где h^κ – шаг по аргументу κ . Кривые ползучести, полученные при решении задачи (25), (15), аналогичны изображенным на рис. 1.

Таблица 6. Расчетные данные для сплава ОТ-4, задача (25), (15)

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	t_c , мс	δA_m , %	δA_{av} , %	δA_{med} , %	δA_{dev} , %
Постоянный шаг, $h^\kappa = 10^{-4}$								
98	0.9	88.1999	446.2276	6252.4	0.143	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-9}	0.004
112.7	0.7826	88.1999	263.9683	6238.9	0.157	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.004
147	0.6	88.2	77.5427	6247.7	0.148	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005
Переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$								
98	0.9	88.1995	446.2276	1021.9	0.088	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-10}	0.002
112.7	0.7826	88.1997	263.9683	1020.1	0.038	10^{-5}	$4 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-4}$
147	0.6	88.1991	77.5427	1026.4	0.074	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-11}$	0.002

Из таблицы 6 можно видеть, что по сравнению с задачей (3)-(4) переход к аргументу κ для постоянного шага позволяет снизить время счета до четырех раз, но при $\sigma_0 = 147$ МПа происходит увеличение времени счета на 20-25 процентов. Это же характерно и для методов ЭЯ и ЭКЯ. Для переменного шага время счета для метода РК4Я мало отличается по сравнению с решением непараметризованной задачи, но для методов ЭЯ и ЭКЯ уменьшение времени счета более существенное – от 1.5 до 2 раз, что объясняется значительным упрощением вида системы (25) по сравнению с исходной (3). В случае использования постоянного шага также удастся близко подойти к ПОТ в момент разрушения, но погрешность увеличивается даже в сравнении с наилучшей параметризацией, что объясняется как фактическим увеличением шага по аргументу t , так и ухудшением обусловленности (значение меры отклонения $\bar{\Xi} = 5.095, 2.9979, 0.8791$ для $\sigma_0 = 98, 112.7, 147$ МПа соответственно). Для переменного-

го шага погрешность также возрастает, но ее порядок сопоставим с результатами наилучшей параметризации. Стоит отметить, что при использовании метода РРР для задач, преобразованных к аргументу κ , шаг интегрирования стабилизируется на некотором значении, затем не изменяясь до конца вычислений.

В **четвертой главе** рассмотрено применение методов нейросетевого моделирования* к решению задачи Коши для системы m ОДУ r -ого порядка с p неизвестными скалярными параметрами, задаваемыми вектором $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \bar{\alpha}) = 0, \quad t \in [t_0, t_*] \quad (26)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}(t_0) = \mathbf{y}_{r-1}. \quad (27)$$

Здесь $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{(r+1)m+p+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ – вектор-функция векторного аргумента с компонентами $f_i : \mathbb{R}^{(r+1)m+p+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $\mathbf{y} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ – искомое решение, t_0 – начальная точка, t_* – конечная точка, $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{jm})^T$, $j = 0, \dots, r-1$ – значения $\mathbf{y}(t)$ и ее $r-1$ первых производных в точке t_0 , $\mathbf{y}^{(j)}(t) = d^j \mathbf{y}(t)/dt^j$, $\mathbf{y}^{(0)}(t) = \mathbf{y}(t)$.

При описании физических процессов на области изменения параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ могут накладываться ограничения вида

$$\alpha_s \in A_s \subseteq \mathbb{R}, \quad s = 1, \dots, p. \quad (28)$$

Пусть для задачи (26)-(27) выполнены условия теоремы Коши о существовании решения начальной задачи. Кроме того, имеются l экспериментальных наблюдений

$$\mathbf{y}(t_q^e) = \mathbf{y}_q^e, \quad t_q^e \in (t_0, t_*], \quad q = 1, \dots, l, \quad (29)$$

где $\mathbf{y}_q^e = (y_{q1}^e, \dots, y_{qm}^e)^T$ – значения $\mathbf{y}(t)$ в точках t_1^e, \dots, t_l^e соответственно.

Для решения начальной задачи (26)-(27) методами нейросетевого моделирования, каждую компоненту вектор-функции $\mathbf{y}(t)$ разложим по нейросетевому базису

$$\hat{y}_i(t, \mathbf{w}_i) = \sum_{j_i=1}^{N_i} c_{ij_i} \nu_{j_i}(t, \mathbf{a}_{ij_i}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (30)$$

где $\mathbf{w}_i = (\mathbf{w}_{i1}, \dots, \mathbf{w}_{iN_i})^T$ – настраиваемые матрицы нейросетевых коэффициентов, $\mathbf{w}_{ij_i} = (c_{ij_i}, \mathbf{a}_{ij_i})$, c_{ij_i} и $\mathbf{a}_{ij_i} = (a_{ij_i}^1, a_{ij_i}^2)$ – линейно и нелинейно входящие параметры соответственно, N_i – количество нейронов в разложениях (30).

Используя разложения (30), запишем нормированный функционал ошибки для задачи (26)-(27) в дискретной форме

$$J(\bar{\alpha}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m) = \frac{1}{R_1} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \sum_{h=1}^M \left| f_i(\xi_h, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}', \dots, \hat{\mathbf{y}}^{(n)}, \bar{\alpha}) \right|^2 + \right. \\ \left. + \gamma_i \sum_{j=0}^{r-1} \left| \hat{y}_i^{(j)}(t_0, \mathbf{w}_i) - y_{ji} \right|^2 + \delta_i \sum_{q=1}^l \left| \hat{y}_i(t_q, \mathbf{w}_i) - y_{qi}^e \right|^2 \right). \quad (31)$$

В данной формуле вектор-функция $\mathbf{F}(t, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}', \dots, \hat{\mathbf{y}}^{(n)}, \alpha)$ вычисляется на множестве пробных точек $\{\xi_h\}_{h=1}^M$, генерируемых случайным образом по равномерному закону распределения на отрезке $[t_0, t_*]$, M – количество пробных точек, $R_1 = \sum_{i=1}^m (\beta_i \cdot M + \gamma_i \cdot r + \delta_i \cdot l)$, $\hat{\mathbf{y}}(t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ – вектор нейросетевых разложений.

* Васильев А. Н., Тархов Д. А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2009. – 528 с.

Для нахождения неизвестных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ и нейросетевых коэффициентов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ решается задача минимизации функционала ошибки (31). Во избежание остановки процесса минимизации в точке локального минимума, после нескольких итераций алгоритма минимизации производится регенерация пробных точек.

Сформулированный нейросетевой подход применим к идентификации моделей, описывающих ползучесть и длительную прочность металлических конструкций. Для определения материальных констант, входящих в систему (6), описывающую растяжение образцов из стали 45, запишем разложения (30) в форме

$$\hat{\varepsilon}(t, \mathbf{c}, \mathbf{A}) = \sum_{j_1=1}^{N_1} c_{j_1} \frac{\text{th}(a_{1j_1}t + a_{2j_1})}{(1 + a_{3j_1}t + a_{4j_1})}, \quad \hat{\omega}(t, \mathbf{b}, \mathbf{D}) = \sum_{j_2=1}^{N_2} b_{j_2} \frac{\text{th}(d_{1j_2}t + d_{2j_2})}{(1 + d_{3j_2}t + d_{4j_2})}. \quad (32)$$

Здесь $\mathbf{c} = \{c_{j_1}\}$, $\mathbf{b} = \{b_{j_2}\}$ – векторы линейно входящих параметров, $\mathbf{A} = \{a_{ij_1}\}$, $\mathbf{D} = \{d_{ij_2}\}$ – матрицы нелинейно входящих параметров, $i = 1, \dots, 4$.

Результаты для стали 45, полученные при минимизации функционала ошибки вида (31) методом сопряженных градиентов, даны в таблице 7. Минимизация функционала ошибки велась до значений меньших $5 \cdot 10^{-4}$ и занимала в среднем 12-17 минут.

Таблица 7. Материальные константы для задачи (6), (2)

σ_0 , МПа	Б. В. Горев с соавторами [†]				Нейросетевое моделирование			
	$B_\varepsilon \sigma_0^n$, ч ⁻¹	$B_\omega \sigma_0^k$, ч ⁻¹	α	m	$B_\varepsilon \sigma_0^n$, ч ⁻¹	$B_\omega \sigma_0^k$, ч ⁻¹	α	m
35	0.0115297	0.0201714	0.849	2.83	0.0079387	0.0156534	0.9468	3.8725
40	0.0340058	0.0511611			0.0382844	0.061904	0.806	1.966
45	0.0882853	0.1162713			0.1602613	0.2551528	0.2971	1.4793

С использованием полученных материальных констант в таблице 8 приведены данные о процессе деформирования образцов из стали 45, где ε_a^* и t_a^* – точные значения деформации ползучести в момент разрушения и длительной прочности соответственно, $\delta\varepsilon_a^*$ и δt_a^* – относительная погрешность точного значения деформации ползучести в момент разрушения и длительной прочности по отношению к экспериментальному.

Таблица 8. Основные данные о процессе деформирования для задачи (6), (2)

σ_0 , МПа	Эксперимент [†]		Б. В. Горев с соавторами [†]				Нейросетевое моделирование			
	t_e^* , ч	ε_e^*	t_a^* , ч	ε_a^*	δt_a^* , %	$\delta \varepsilon_a^*$, %	t_a^* , ч	ε_a^*	δt_a^* , %	$\delta \varepsilon_a^*$, %
35	6.706	0.516	7.0005	0.5716	4.392	10.775	6.7347	0.5072	0.428	1.705
40	2.98	0.616	2.7601	0.6647	7.379	7.906	3.0157	0.6184	1.198	0.39
45	1.224	0.633	1.2145	0.7593	0.782	19.953	1.2187	0.6281	0.433	0.774

Зависимости деформации ползучести и параметра поврежденности от времени, построенные с использованием полученных материальных констант, показаны на рис. 4, где непрерывные и штрих-пунктирные линии – аналитические зависимости, соответствующие параметрам модели, полученным Б. В. Горевым с соавторами[†] и с использованием нейросетевого моделирования соответственно.

Применение нейросетевого моделирования позволило для каждого значения начального напряжения построить модель, описывающую процесс ползучести рассматриваемой конструкции вплоть до разрушения. Относительные погрешности δt_a^* и $\delta \varepsilon_a^*$

[†] Горев Б. В., Захарова Т. Э., Клопотов И. Д. К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств // *Физическая мезомеханика*. – 2002. – Т. 5. – № 2. – С. 17–22.

не превосходят нескольких процентов. Схожие результаты получены для модели, описывающей растяжение прямоугольных образцов из сплава ЗВ при постоянных напряжениях и температуре в условиях ползучести.

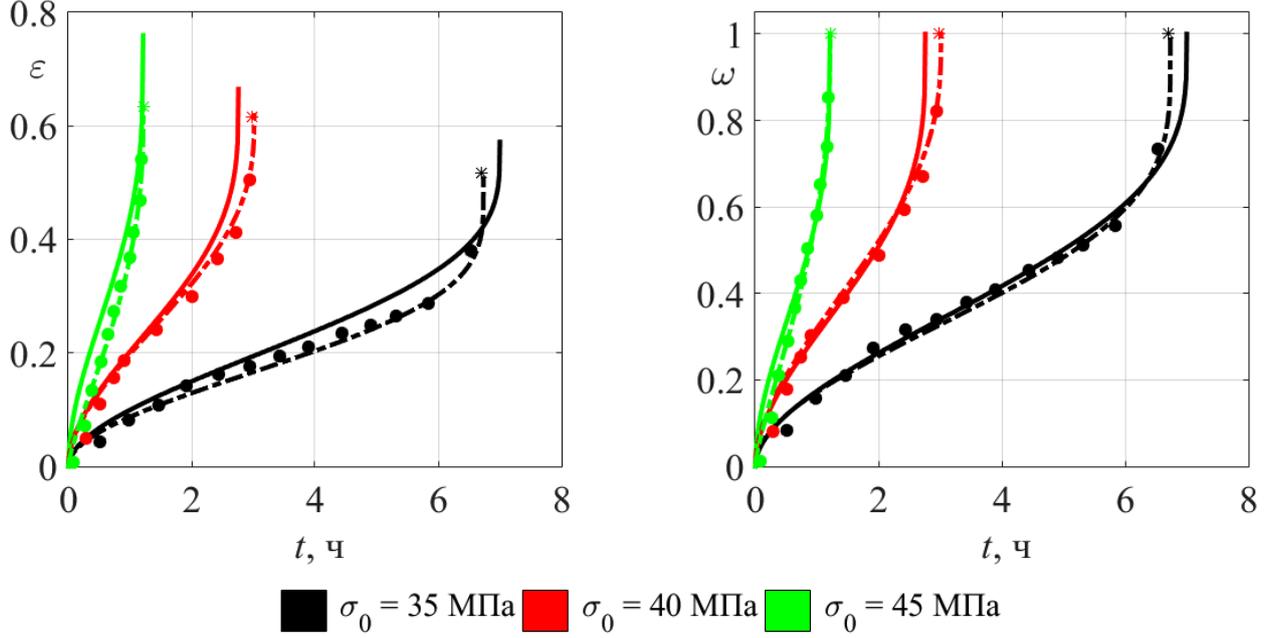


Рис. 4. Кривые ползучести для стали 45, точные аналитические решения

Ранее отмечалось, что задача (6), (2) имеет две ПОТ: в начальный момент времени и при разрушении. Метод нейронных сетей позволяет обойти данную особенность и получить параметры модели, а также приближенное решение данной задачи, имеющее вид близкий к кривым, изображенным на рис. 4 штрих-пунктирными линиями. Однако особенность остается, и можно ожидать, что если нам удастся устранить ее, то это позволит сократить временные затраты на минимизацию функционала ошибки и использовать более простые формы базисных функций в разложениях (30). Для этой цели будем использовать задачу (23), (12), преобразованную к аргументу κ . Обозначая линейные и нелинейные параметры разложения для времени за \mathbf{r} и \mathbf{S} , запишем нейросетевые разложения для данной задачи в виде

$$\hat{\varepsilon}(\kappa, \mathbf{c}, \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{N_1} c_j \cdot \text{th}(a_{0j}\kappa + a_{1j}), \quad \hat{\omega}(\kappa, \mathbf{b}, \mathbf{D}) = \sum_{j=1}^{N_2} b_j \cdot \text{th}(d_{0j}\kappa + d_{1j}), \quad (33)$$

$$\hat{t}(\kappa, \mathbf{r}, \mathbf{S}) = \sum_{j=1}^{N_3} r_j \cdot \text{th}(s_{0j}\kappa + s_{1j}).$$

Результаты процесса идентификации для задачи (23), (12) при $\sigma_0 = 35 \text{ МПа}$, полученные при минимизации функционала ошибки вида (31) методом сопряженных градиентов, даны в таблице 9. Минимизация функционала ошибки велась до значений меньших $5 \cdot 10^{-4}$, время счета удалось сократить до 7 минут. Графики зависимостей деформации ползучести и параметра поврежденности от времени, построенные с использованием полученных материальных констант, аналогичны изображенным на рис. 4 штрих-пунктирными линиями.

Таблица 9. Материальные константы для задачи (23), (12), $\sigma_0 = 35 \text{ МПа}$

Б. В. Горев с соавторами				Нейросетевое моделирование			
$B_\varepsilon \sigma_0^n, \text{ ч}^{-1}$	$B_\omega \sigma_0^k, \text{ ч}^{-1}$	α	m	$B_\varepsilon \sigma_0^n, \text{ ч}^{-1}$	$B_\omega \sigma_0^k, \text{ ч}^{-1}$	α	m
0.0115297	0.0201714	0.849	2.83	0.0108111	0.02085	0.8107	2.9025

С использованием этих результатов получены данные о процессе деформирования образцов из стали 45 при $\sigma_0 = 35$ МПа, приведенные в таблице 10.

Таблица 10. Данные о процессе деформирования для задачи (23), (12)

Эксперимент		Б. В. Горев с соавторами				Нейросетевое моделирование			
t_e^* , ч	ε_e^*	t_a^* , ч	ε_a^*	δt_a^* , %	$\delta \varepsilon_a^*$, %	t_a^* , ч	ε_a^*	δt_a^* , %	$\delta \varepsilon_a^*$, %
6.706	0.516	7.0005	0.5716	4.392	10.775	6.7874	0.5185	1.214	0.484

Таким образом, комбинированное использование нейросетевого моделирования и метода продолжения решения по параметру позволяет уменьшить времени счета вдвое при сохранении точности моделирования.

Другой задачей, для которой нейросетевое моделирование позволяет значительно упростить процесс решения, является задача определения установившегося напряжено-деформированного состояния во вращающемся сплошном равномерно прогретом диске постоянной толщины из титанового сплава ОТ-4 при температуре $T = 450^\circ\text{C}$ и напряжении $G = 490.33$ МПа в условиях ползучести, описываемая уравнениями в энергетической форме[†]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_\varphi}{dx} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{d\sigma_r}{dx} \left[1 + \frac{(\beta\sigma_i - 2)(2\sigma_i^2 - 3\sigma_\varphi\sigma_r)}{2\sigma_i^2} \right] - \frac{3(\sigma_\varphi - \sigma_r)}{x} \right\}, \\ \frac{d\sigma_r}{dx} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{x} + Gx = 0 \end{array} \right. \quad (34)$$

с граничными условиями

$$\sigma_r(0) = \sigma_\varphi(0), \quad \sigma_r(1) = 0, \quad (35)$$

где σ_r, σ_φ – радиальная и тангенциальная компоненты напряжений, $\beta = 0.023 \text{ МПа}^{-1}$ – материальная константа, $\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_\varphi\sigma_r + \sigma_\varphi^2}$ – интенсивность напряжения, $x = r/R$ – безразмерный радиус, R – радиус диска, $H = 2 + (2\sigma_i^2)^{-1}(\beta\sigma_i - 2)(2\sigma_\varphi - \sigma_r)^2$.

Можно видеть, что граничное условие на ободу диска задано только для радиальной компоненты напряжений. Граничное же условие в центре диска задано равенством двух компонент напряжений, но их значения неизвестны. В этом случае традиционные методы решения граничных задач (например метод стрельбы) трудоемки, так как требуют предварительного оценивания значений компонент напряжений в центре диска, для чего используется решение упругой задачи о диске[‡]. Но в некоторых случаях сложно найти даже решение упругой задачи.

Применение описанного выше нейросетевого подхода (с учетом известных материальных констант и замены начальных условий на граничные) для решения задачи (34)-(35) позволяет снять необходимость в вычислении упругого решения, что значительно упрощает процесс вычисления. Нейросетевые разложения для компонент напряжений выбирались в форме

$$\hat{\sigma}_r(x, \mathbf{c}, \mathbf{A}) = \sum_{j_1=1}^{N_1} \frac{c_{j_1}}{1 + (a_{1j_1}x + a_{2j_1})^2}, \quad \hat{\sigma}_\varphi(x, \mathbf{b}, \mathbf{D}) = \sum_{j_2=1}^{N_2} \frac{b_{j_2}}{1 + (d_{1j_2}x + d_{2j_2})^2}. \quad (36)$$

[†] Соснин О. В., Горев Б. В. Энергетический вариант ползучести и длительной прочности. Сообщение 3. Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков // Проблемы прочности. – 1974. – №. 3. – С. 3-7.

[‡] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

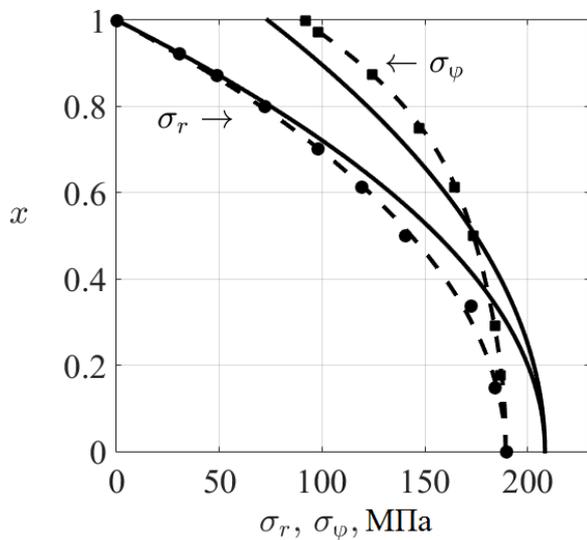


Рис. 5. Компоненты напряжений

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для математического моделирования процесса ползучести металлических конструкций разработан подход, использующий алгоритмы нейросетевого моделирования и продолжения решения по параметру, позволяющий проводить идентификацию материальных констант, входящих в определяющие уравнения ползучести и длительной прочности. Также показана эффективность нейросетевого подхода при решении нелинейных задач ползучести с недоопределенными граничными условиями.

2. Предложен подход, основанный на использовании метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации, позволяющий обходить трудности, связанные с решением плохо обусловленных начальных задач для систем ОДУ, возникающих при расчете деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций в условиях ползучести при различных температурно-силовых воздействиях.

3. Разработан численный метод решения плохо обусловленных начальных задач, использующий модифицированный аргумент продолжения решения, получаемый путем преобразования наилучшего аргумента. Показаны преимущества данного метода при расчете задач ползучести по сравнению с другими подходами. Доказана единственность наилучшего аргумента и дан способ оценки обусловленности задач, преобразованных модифицированным наилучшим аргументом.

4. Разработан и зарегистрирован комплекс программ численного решения задачи Коши для систем ОДУ с использованием как традиционных явных и неявных методов, так и метода продолжения решения по наилучшему аргументу. Его эффективность протестирована на решении задач расчета длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести.

Публикации в журналах из перечня ВАК

1. Budkina E. M., Kuznetsov E. B., Lazovskaya T. V., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2016. – Vol. 9719. – Pp. 277-283.

2. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Методика выбора функций определяющих уравнений ползучести и длительной прочности с одним скалярным параметром поврежденности // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2016. – Т. 57. – № 2. – С. 202-211.

На рис. 5 изображены зависимости компонент напряжений от безразмерного радиуса, полученные при минимизации функционала ошибки вида (31) методом сопряженных градиентов до значения 0.029, где точками и квадратами обозначены решения, полученные в работе Соснина О. В. с соавторами, для радиальной и тангенциальной компонент напряжений соответственно, сплошная линия – упругое решение, штриховая линия – нейросетевое решение.

3. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Математическое моделирование чистого изгиба балки из авиационного материала в условиях ползучести [Электронный ресурс] // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. – 2013. – № 65. – Режим доступа: <https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35927>

4. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Чистый изгиб балки из разномодульного материала в условиях ползучести // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2013. – Т. 6. – № 4. – С. 26-38.

5. Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Идентификация параметров модели разрушения для анизотропных конструкций // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния»*. – 2014. – № 4(22). – С. 33-45.

6. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Математическое моделирование чистого изгиба балки из разномодульного авиационного материала в условиях ползучести // *Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования»*. – 2015. – № 1. – С. 111-122.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

Помимо публикаций в журналах из перечня ВАК по теме диссертации имеется 22 публикации в других изданиях, монографиях и материалах конференций, основные из которых

7. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. О модификации наилучшего параметра продолжения решения // *Журнал Средневолжского математического общества*. – 2015. – Т. 17. – № 1. – С. 71-81.

8. Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Нейросетевой метод идентификации и анализа модели деформирования металлических конструкций в условиях ползучести // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. – 2015. – Т. 2. – № 11. – С. 360-370.

9. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков // *Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), 24-31 мая 2015 г., Алушта*. – М.: Изд-во МАИ, 2015. – С. 292-294.

10. Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Vasilyev A. N. Creep model identification problem for steel 45 specimens uniaxial tension // *International Symposium «Mathematics of XXI Century & Natural Science», September 29 - October 3, 2015. Book of Abstracts*. – St. Petersburg: Publishing House of SPbPU, 2015. – Pp. 27.

11. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. О параметрах продолжения решения для задач ползучести // *Материалы X Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), 25-31 мая 2016 г., Алушта*. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – С. 354-356.