

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
(МГУ имени М.В. Ломоносова)**

На правах рукописи



Коровайцева Екатерина Анатольевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
ИЗ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 1.1.8.

«Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Современное состояние исследований поведения оболочек при больших перемещениях и деформациях	16
1.1. Различные варианты теории мягких оболочек.....	16
1.2. Методы решения задач статического деформирования мягких оболочек.....	28
1.3. Методы решения задач динамического деформирования мягких оболочек.....	35
1.4. Выводы по главе 1. Цель и задачи исследования.....	44
Глава 2. Построение разрешающих соотношений теории мягких оболочек из гиперупругих материалов	47
2.1. Построение смешанных уравнений теории мягких оболочек при больших деформациях.....	47
2.2. Смешанные уравнения осесимметричного деформирования мягких оболочек при больших деформациях.....	54
2.3. Построение смешанных уравнений технической теории мягких оболочек.....	57
2.4. Смешанные уравнения осесимметричного деформирования технической теории мягких оболочек.....	61
2.5. Физические соотношения для гиперупругих материалов.....	63
2.6. Уравнения осесимметричного движения мягких оболочек вращения....	68
2.7. Выводы по главе 2.....	68
Глава 3. Систематизация одномерных физически и геометрически нелинейных краевых задач механики тонкостенных конструкций	70
3.1. Обоснование необходимости систематизации задач механики тонкостенных конструкций.....	70
3.2. Канонические формы одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций.....	73

3.3. Формы одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций с дополнительными алгебраическими соотношениями.....	77
3.4. Приведение разрешающей системы уравнений теории мягких оболочек к канонической форме.....	79
3.5. Выводы по главе 3.....	83
Глава 4. Исследование осесимметричного статического деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов.....	84
4.1. Базовый алгоритм решения задач статического деформирования мягких оболочек вращения.....	84
4.2. Особенности построения численного решения задач о деформировании мягких оболочек при больших деформациях.....	93
4.3. Использование метода автоматической сегментации для повышения точности решения задач статического деформирования мягких оболочек из гиперупругих материалов.....	108
4.4. Критерий однозначности решения задач деформирования мягких оболочек методом продолжения по параметру.....	122
4.5. Влияние формы меридиана на поведение оболочки из гиперупругого материала при раздувании.....	133
4.6. Расчет цилиндрической оболочки с местным утонением из гиперупругих материалов различных моделей.....	143
4.7. Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки вращения из гиперупругого материала.....	168
4.8. Выводы по главе 4.....	196
Глава 5. Исследование осесимметричного динамического деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов	198
5.1. Базовый алгоритм решения задач динамического деформирования мягких оболочек вращения.....	198
5.2. Особенности построения численного решения задач о динамическом деформировании мягких оболочек при больших деформациях	201

5.3. Использование метода автоматической сегментации для повышения точности решения задач динамического деформирования мягких оболочек из гиперупругих материалов.....	214
5.4. Исследование динамического раздувания сферической оболочки из гиперупругих материалов различных моделей линейно возрастающим давлением.....	229
5.5. Исследование деформирования цилиндрической оболочки из гиперупругого материала под действием давления, изменяющегося по гармоническому закону.....	246
5.6. Выводы по главе 5.....	263
Заключение.....	265
Список литературы.....	268

Введение

Оболочечные конструкции из гиперупругих (высокоэластичных) материалов находят широкое применение в различных отраслях машиностроения и приборостроения. Так, в космической технике эластичные оболочечные конструкции, способные функционировать в большом диапазоне перемещений, поворотов и деформаций, используются в качестве скафандров космонавтов, тормозных устройств для спускаемых космических аппаратов, исполнительных элементов приборов и аппаратуры. Мягкие оболочки являются основными элементами воздухоплавательных конструкций. В судостроении надувные мягкооболочечные конструкции используются в качестве гибких ограждений, спасательных устройств, забортных баллонов, элементов судовых кранцевых устройств, плавучих мягких емкостей. При создании устройств активно развивающейся в последние годы мягкой робототехники применяются оболочечные элементы из гиперупругих материалов различных типов. Среди современных областей применения оболочек из высокоэластичных материалов следует также отметить «умную» электронику, гибкую электронику и протезирование внутренних органов.

В результате анализа литературы, посвященной исследованию поведения оболочек при больших деформациях, было выявлено несоответствие определений мягкой оболочки, встречающихся в различных работах. Поэтому представляется целесообразным провести обзор трактовок указанного понятия и сформулировать определение мягкой оболочки, которое будет использоваться в диссертации.

Базой для развития отечественных теоретических и прикладных исследований в области мягких оболочек является цикл работ С.А. Алексева, открывающийся статьей [1], в которой утверждается, что понятие о мягкой оболочке обобщает понятие о гибкой нити. Далее для простоты дальнейших выкладок мягкой оболочке приписывается ряд свойств, в

частности, нерастяжимость материала. В более поздней работе С.А. Алексеева [2], озаглавленной «Основы теории мягких оболочек вращения», однако, не встречается понятия о мягкой оболочке, а используется понятие абсолютно гибкой оболочки. Очевидно, что по мере развития и усложнения теории рассматриваемое определение приобретало иной смысл, чем в первых работах. Наиболее четкое определение мягкой оболочки приведено в работе [125]. Здесь под мягкой понимается безмоментная оболочка, у которой усилия сжатия считаются равными нулю. Подчеркивается, что такие оболочки в литературе называют также мембранными, эластичными, гибкими, пневматическими и пр., имея в виду их малую изгибную жесткость, приводящую к образованию складок в зонах, где возникают сжимающие усилия. Отмечается, что, в зависимости от величины деформаций, можно различать три схемы мягких оболочек: нерастяжимые, с малыми деформациями и с большими деформациями.

Подобное определение можно найти в монографии Черных К.Ф. [134]: «Мягкими называют оболочки с весьма малой изгибной жесткостью, не воспринимающие поэтому заметных изгибающих моментов и сжимающих усилий».

В зарубежной литературе не удалось обнаружить определение мягкой оболочки, за исключением работы [174], в которой как основные понятия, так и выкладки, касающиеся основ теории мягких оболочек, полностью заимствованы из отечественной монографии [112]. В ряде зарубежных монографий, посвященных теории упругости и теории оболочек, приводится математическая постановка задач деформирования упругих мембран. При этом рассматривается случай только больших деформаций. В книге [37] при этом записываются соотношения для изгибающих и крутящих моментов, но уравнения равновесия составляются только для мембранных усилий. Какими-либо пояснениями подобные выкладки не сопровождаются. В книге [174] указано, что мембранную теорию оболочек можно также назвать безмоментной, а ее разрешающие соотношения получаются формально

исключением пар сил из соотношений общей теории. При формулировке физических и геометрических соотношений принимается, что деформации являются большими. Частные случаи безмоментной теории не рассматриваются.

Использование термина «мягкая оболочка» (soft shell) удалось обнаружить лишь в двух зарубежных работах [207, 215]. Авторами изучается теоретически и экспериментально процесс образования складок в мягкой полусферической оболочке. При этом рассматриваются модели высокоэластичных материалов (неогуковский и Муни-Ривлина). Однако предлагаемые авторами для расчетов разрешающие соотношения содержат не только растягивающие усилия, но и изгибающие моменты, что принципиально отличает указанные работы от всех предшествующих им исследований в области мягких оболочек или оболочек из высокоэластичных материалов.

В настоящей диссертации использована терминология, характерная для отечественных работ, т.е. под мягкой оболочкой будет пониматься оболочка, не воспринимающая изгибающих моментов и сжимающих усилий. При этом будут рассматриваться большие деформации.

С точки зрения математической постановки задачи деформирования мягкооболочечных конструкций описываются системами нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений, а с точки зрения механики указанные задачи являются задачами с произвольной физической и геометрической нелинейностью. Формулировка разрешающих соотношений, описывающих поведение таких конструкций, требует привлечения нелинейной теории упругости и соотношений для упругих потенциалов материалов, определяемых экспериментально. При этом уже на этапе математической постановки задач деформирования мягких оболочек прослеживается принципиальное различие работ отечественных и зарубежных исследователей. В нашей стране в период интенсивного развития народного хозяйства постановка задач для теоретических

исследований определялась запросами промышленности, поэтому отечественные работы явно или неявно ориентированы на решение конкретных прикладных задач, проектирование и анализ работы конкретных конструкций той или иной отрасли промышленности в предполагаемых условиях нагружения и закрепления. В последние десятилетия теоретические исследования поведения мягкооболочечных конструкций были минимизированы. Давая характеристику отечественным работам, посвященным анализу деформирования мягких оболочек, за весь период их развития, можно отметить, что в подавляющем большинстве публикаций рассматривается линейно упругое поведение материала и малые деформации. Лишь в работах двух авторов XXI века исследовались большие деформации при статическом нагружении оболочек из высокоэластичных материалов. С одной стороны, такое положение дел обосновано прикладной направленностью отечественных работ, т.к. большинство реальных конструкций эксплуатируются в диапазоне малых деформаций. С другой стороны, безусловно, постановка задачи должна быть полной, максимально учитывающей возможные варианты свойств, нагружения и поведения конструкции. Это необходимо прежде всего для завершенности математического и программного обеспечения, разрабатываемого для проектирования и исследования конструкций, в том числе с новыми свойствами.

В работах зарубежных исследователей, как было отмечено выше, понятие мягкой оболочки не используется. В публикациях, по тематике относящихся к настоящей диссертации, рассматривается деформирование оболочек из высокоэластичных материалов изначально без ограничений на диапазон деформаций. Однако в силу отсутствия прикладной направленности зарубежных работ геометрия изучаемых конструкций является простейшей – плоская мембрана, сфера, цилиндр, тор. Многие работы отличаются друг от друга лишь рассмотрением иной формы упругого потенциала материала либо иной формы меридиана оболочки, а алгоритм

решения задачи остается прежним. Необходимо отметить слабое, в отличие от отечественных работ, использование численных методов для расчета оболочек из высокоэластичных материалов зарубежными исследователями.

Таким образом, развитие и апробация алгоритмического обеспечения решения задач деформирования мягких оболочек, максимально учитывающего возможные особенности их поведения, представляется актуальным.

Целью настоящей диссертации является разработка и развитие математических моделей и методов решения задач деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов при произвольных перемещениях и деформациях. Достижение этой цели осуществляется путем решения целого ряда задач, связанных как с построением разрешающих соотношений и анализом статического и динамического деформирования мягких оболочек при заданных нагрузках, геометрии конструкции и свойствах материала, так и с изучением особенностей реализации используемых вычислительных алгоритмов.

Так как одной из задач диссертации является разработка алгоритмов решения задач деформирования мягкооболочечных конструкций, то представляется необходимым предварительное проведение систематизации различных математических постановок соответствующих задач с целью максимального их охвата и сведения к рациональному минимуму. При этом систематизация выполнена для полного спектра краевых задач механики тонкостенных конструкций, как линейных, так и нелинейных. Это связано с тем, что при разработке алгоритмов решения нелинейная задача может быть сведена к линейной, дальнейшее решение которой также требует алгоритмизации, несмотря на то, что методика решения может являться очевидной.

Следующей характерной чертой диссертации является исследование и описание особенностей реализации разрабатываемых алгоритмов. Несмотря на то, что объектом исследования диссертации являются оболочки из

гиперупругих материалов, избегать изучения и описания вычислительных сложностей, встречающихся при реализации алгоритмов, по мнению автора, нельзя. Зачастую алгоритм может казаться очевидным, однако основанное на его использовании получение решения при больших перемещениях и деформациях, сопровождающих деформирование рассматриваемой конструкции, оказывается возможным лишь при корректном управлении параметрами алгоритма, соотносящемся с пониманием особенностей решаемой системы уравнений. Кроме того, даже в случае получения решения оно может оказаться ошибочным не только по причине характерной для нелинейных задач его неоднозначности, но и в связи с неверным назначением параметров вычислительного алгоритма. Таким образом, успешное решение задачи механики неотделимо от решения задачи программирования, и представляется обоснованным при исследовании поведения конструкций с сильной физической и геометрической нелинейностью в равной степени уделять внимание обеим задачам.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Получение разрешающих соотношений, описывающих поведение тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов как при осесимметричном, так и при неосесимметричном статическом и динамическом нагружении в виде, адаптированном для формулировки алгоритмов решения задач.

2. Разработка классификации одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций, основанной на обобщении их математических постановок.

3. Адаптация алгоритмов решения нелинейных многоточечных неразветвленных краевых и начально-краевых задач, основанных на развитии метода дифференцирования по параметру, к задачам деформирования оболочек из гиперупругих материалов с учетом особенностей соответствующих систем уравнений.

4. Решение комплекса новых задач осесимметричного статического деформирования оболочек вращения из высокоэластичных материалов. Используемые алгоритмы позволили впервые получить значения меридиональных и окружных деформаций порядка 2000%, а поперечных деформаций, близких к -100%, в численном расчете, а также исследовать напряженно-деформированное состояние оболочек с локальным утонением из высокоэластичных материалов при глубоком закритическом поведении.

5. Решение комплекса новых задач динамического деформирования оболочек из высокоэластичных материалов при больших деформациях и перемещениях, в том числе с использованием соотношений моментной теории оболочек. Впервые при решении нелинейной начально-краевой задачи деформирования оболочки получены значения поперечных деформаций, превышающие по абсолютной величине 90%, без необходимости введения искусственного демпфирования в физические соотношения.

6. Разработка и применение метода автоматической сегментации для повышения точности решения рассматриваемых задач.

7. Формулировка условий, позволяющих оценить однозначность продолжения решения задачи о деформировании оболочки из гиперупругого материала в процессе построения численного решения.

Практическая ценность диссертации заключается в создании алгоритмического аппарата и программного обеспечения решения широкого круга задач осесимметричного деформирования оболочек вращения из гиперупругих материалов при больших перемещениях и деформациях, охватывающего задачи статики, динамики и параметрического анализа.

Методы исследования. Решение поставленных в работе физически и геометрически нелинейных задач осесимметричного статического деформирования оболочек из высокоэластичных материалов основывается на использовании метода непрерывного продолжения по параметру. При решении задач динамики применяется метод прямых, позволяющий свести начально-

краевую задачу к краевой, решаемой с использованием метода непрерывного продолжения по параметру последовательно на каждом шаге по времени. Сформулированы алгоритмы, учитывающие особенности используемых разрешающих систем уравнений, и разработаны комплексы программ, реализующие указанные алгоритмы.

Достоверность результатов обеспечивается проведением тестовых расчетов, позволяющих сравнить построенное численное решение с аналитическим, а при отсутствии аналитического решения – анализом сходимости результатов, использованием предложенных в работе методов повышения точности решения разрешающих систем уравнений, проверкой предложенных в работе критериев однозначности продолжения решения, либо проведением расчетов по разным системам уравнений.

Диссертация состоит из пяти глав, основных результатов и выводов и списка литературы.

В первой главе приведен обзор литературы, посвященной разработке нелинейной теории оболочек как в общей моментной постановке, так и для случая безмоментных оболочек, включая оболочки, испытывающие большие деформации. Также приведен обзор исследований, касающихся статического и динамического поведения оболочек из гиперупругих материалов как при малых, так и при больших деформациях.

Во второй главе сформулированы новые разрешающие соотношения теории мягких оболочек при больших деформациях в виде, удобном для последующего приведения математической постановки задачи к форме, необходимой для разработки вычислительных алгоритмов. Приведены как двумерные соотношения, так и одномерные уравнения осесимметричного деформирования мягких оболочек при больших перемещениях и деформациях. Также сформулированы уравнения технической теории мягких оболочек в удобной для последующей алгоритмизации их решения форме. Приведены физические соотношения для рассматриваемых в работе

высокоэластичных материалов для случаев двухосного и одноосного напряженного состояния.

В третьей главе приведена классификация одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций, включающая как линейные, так и нелинейные задачи, как для неразветвленных составных, так и для разветвленных конструкций.

В четвертой главе сформулирован алгоритм решения задач осесимметричного статического деформирования составных оболочек вращения из гиперупругих материалов при больших перемещениях и деформациях. Проведен сравнительный анализ статического деформирования оболочек канонических форм меридиана при одинаковой площади боковой поверхности в недеформированном состоянии. Проанализировано влияние локального утонения на деформирование цилиндрической оболочки. Протестировано использование разрешающих соотношений моментной теории оболочек, построенной на основании модифицированной гипотезы Кирхгофа-Лява, для случая раздувания цилиндрической оболочки. Сформулирован алгоритм параметрического анализа напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки вращения при больших перемещениях и деформациях. Приведен пример использования алгоритма для исследования влияния геометрических параметров и механических характеристик материала оболочки на ее напряженно-деформированное состояние. Предложена методика автоматической сегментации интервала интегрирования, направленная прежде всего на минимизацию необоснованных действий вычислителя при управлении параметрами вычислительного алгоритма, а также на повышение точности решения задачи. Предложен подход к оценке однозначности продолжения решения задачи о деформировании оболочки из гиперупругого материала в процессе проведения вычислений.

В пятой главе сформулирован алгоритм решения задач осесимметричного динамического деформирования составных оболочек

вращения из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях. Рассмотрены три случая зависимости раздувающего оболочку давления от времени – постоянное, линейно возрастающее и гармонически изменяющееся. Описаны особенности реализации сформулированного алгоритма. Для обоснованного назначения числа сегментов разбиения меридиана оболочки в рамках реализации алгоритма предложена используемая при решении задач статики методика автоматической сегментации. Для случая линейно возрастающего во времени давления установлена возможность появления динамического хлопка. Для решения задачи о раздувании цилиндрической оболочки гармонически изменяющейся нагрузкой впервые использованы соотношения моментной теории оболочек, построенной на основании модифицированной гипотезы Кирхгофа-Лява.

В заключении приведены основные результаты проведенной при написании диссертации работы.

На защиту выносятся:

- математическая постановка задач статического и динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов;
- классификация одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций;
- алгоритмы численного решения задач осесимметричного статического и динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях;
- метод автоматической сегментации интервала интегрирования краевой задачи;
- критерий оценки единственности решения и однозначности его продолжения по параметру в процессе проведения вычислений в рамках реализации разработанных в диссертации алгоритмов;
- результаты решений новых задач нелинейного осесимметричного статического и динамического деформирования оболочек из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях.

Диссертация состоит из 290 страниц машинописного текста, 13 таблиц, 169 рисунков. Список литературы содержит 219 наименований. По тематике диссертации опубликовано 12 статей в журналах, рекомендованных ВАК, а также зарегистрировано 3 программы.

Глава 1. Современное состояние исследований поведения оболочек при больших перемещениях и деформациях

1.1. Различные варианты теории мягких оболочек

В наиболее общей постановке задачи деформирование мягких оболочек из высокоэластичных материалов сопровождается большими перемещениями и деформациями, математическое описание которых требует привлечения нелинейной теории оболочек.

Первые упоминания о нелинейных задачах для пластин и оболочек принадлежат ещё основоположникам развития механики как науки Кирхгофу, Клебшу, Сен-Венану. Под влиянием научно-технического прогресса работы этого направления интенсивно развивались в последующем, когда необходимость создания новой техники заставила вплотную заняться нелинейными задачами. Задача о конечных прогибах обшивки корабля сформулирована и решена И.Г.Бубновым [11], давшим классификацию пластинок по характеру напряжённого состояния. Общие уравнения для определения конечных прогибов абсолютно гибкой пластины получены Фёпплем [150]. Здесь впервые в нелинейной теории использована функция напряжений Эри для описания плоской задачи.

В 1910 году Карманом [169] получены уравнения для расчёта пластин с конечной жёсткостью на изгиб. Краевые задачи для них содержат поперечный прогиб и функцию напряжений. Первая краевая задача в перемещениях с полиномиальной их аппроксимацией и применением принципа возможных перемещений для определения констант составлена С.П.Тимошенко [121]. Она описывала конечные перемещения круглой пластины при осесимметричной деформации. Параллельно с развитием прикладных вопросов нелинейной теории упругости развивались методологические аспекты расчётов по различным теориям, росло количество числовых результатов теоретических исследований. В целом к 20-м годам XX века в итоге была отработана концепция принципа

линеаризации в рассмотрении ряда прикладных вопросов, что позволило перейти на базе обобщения предыдущих исследований к развитию нелинейной теории оболочек. В 1935 году Biezeno [147] получены нелинейные уравнения осесимметричного деформирования слабо вогнутой круглой пластины постоянной толщины. В 1938 году Маргерром [176] опубликован нелинейный вариант теории пологих оболочек, широко применявшийся впоследствии в расчётной практике. При этом срединная поверхность оболочки отождествлялась с геометрией на плоскости, а квадраты углов поворота нормали считались одного порядка малости с относительными удлинениями. Существенным этапом в развитии нелинейной теории оболочек были работы ряда советских исследователей. В 1948 году Х.М.Муштари [98] выполнена одна из фундаментальных работ по общей нелинейной теории оболочек, где даются уточнённые соотношения для расчёта компонент деформации срединной поверхности и формулы для изменений кривизны при конечных деформациях. Изложенный автором вариант теории является обобщением нелинейной теории пластин Кармана на оболочки произвольного очертания. Существенное влияние на развитие технической теории оболочек оказали и оказывают до сих пор работы В.В.Новожилова [102-104], где дан систематизированный анализ основных соотношений нелинейной теории упругости. На основе анализа проведён ряд упрощений, наметивших пути последовательного вывода геометрических соотношений теории оболочек, пластин и стержней, послужившего основой последующего развития замкнутой разрешающей системы уравнений нелинейной теории оболочек с самым широким инженерным применением [137]. Последующий этап в развитии нелинейной теории оболочек в тензорной форме связан с работами Х.М.Муштари и К.З.Галимова. В работе К.З.Галимова [15] в законченном виде и с необходимой строгостью представлены уравнения равновесия и граничные условия геометрически нелинейной теории упругости, осуществлён переход к двумерной задаче теории оболочек. В работе Х.М.Муштари [99] приведены соотношения для

компонент конечной деформации срединной поверхности оболочки и проведены упрощения основных выражений для различных соотношений относительных удлинений и изгибов. В [99] даётся полная классификация краевых задач нелинейной теории оболочек с выделением случаев малых деформаций, средних и сильных изгибов. Получены системы уравнений, описывающие пологие и непологие оболочки. Обобщение результатов этих авторов содержится в монографии [16].

В развитие работ [15, 16, 99, 100] В.Н. Паймушиным [110] были сформулированы соотношения теории тонких оболочек при произвольных перемещениях и деформациях, основанные на уточнении модели Кирхгофа-Лява. Позднее в работе [108] аналогичным образом были построены соотношения модифицированного варианта теории тонких оболочек типа теории Тимошенко. Суть уточнения классических моделей заключается в учете поперечной деформации путем введения в геометрические соотношения дополнительной неизвестной функции.

За рубежом аналогичные работы как по нелинейной теории упругости, так и по нелинейной теории оболочек проводились рядом исследователей. Соотношения теории больших упругих деформаций впервые были сформулированы, по-видимому, в работах Ривлина в 1940-х гг. [184-191]. При этом компоненты деформации определялись, как и в работах В.В. Новожилова, по соотношениям Лява. Рассматривался как сжимаемый, так и несжимаемый материал, в том числе частный случай неогуковского материала. Уравнения движения и граничные условия задачи были сформулированы для всех трех типов материала в прямоугольной декартовой системе координат двумя способами: исходя из уравнений равновесия бесконечно малого элемента твердого тела и на основании вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Следует подчеркнуть, что постановка задачи была сформулирована для случая динамического деформирования тела, а все соотношения записаны в скалярной форме. Позднее [139] Ривлином была предпринята попытка использования системы уравнений

равновесия теории оболочек, предложенной Лявом [176], к решению задач о раздувании равномерным давлением плоской мембраны и сферы из материала Муни. Отметим, что и в более поздних работах зарубежных авторов прослеживается тенденция к построению разрешающих систем уравнений для частных случаев конкретных задач вместо разработок общей теории оболочек из высокоэластичных материалов.

Более общая форма соотношений теории упругости как в декартовых прямоугольных, так и в криволинейных подвижных координатах, была дана Грином и Церна в работе [156], а также были построены как общая теория пластин и оболочек, так и их частные случаи – теория мембран (очевидно, соответствующая теории безмоментных оболочек в русскоязычной литературе), моментная теория оболочек, теория пологих и цилиндрических оболочек, теория оболочек вращения. Все уравнения были приведены в тензорной форме. Для описания упругих свойств материала введено понятие упругого потенциала, обсуждены его формы, в том числе для случая нелинейной упругости. На основании построенных соотношений был решен ряд задач теории упругости, в том числе при больших деформациях для несжимаемого изотропного материала.

Грином и Адкинсом в [37] систематизированы результаты, полученные англоязычными авторами в области разработки нелинейной теории упругости к 1960-му году. Исследуется форма функции упругого потенциала для основных кристаллических классов, выводятся физические соотношения для ортотропных и трансверсально-анизотропных материалов.

Ряд последующих работ зарубежных авторов посвящен формулированию частного случая нелинейной теории оболочек, схожего по гипотезе малой изгибной жесткости с отечественной теорией мягких оболочек. Так, в работе Foster'a [152] на основании системы уравнений теории больших деформаций, сформулированной в [37] в криволинейных координатах, построена система дифференциально-алгебраических уравнений деформирования осесимметричной мембраны из материала

Муни-Ривлина. Следует отметить, что системы уравнений равновесия для симметричных мембран формулируются в цилиндрических координатах.

Статья Alexander [142], по-видимому, является одной из немногих работ зарубежных исследователей, в которой выводятся уравнения равновесия элементов конструкций в достаточно общей форме, при этом удобной для использования в численных расчетах. Уравнения получены на основании вариационного принципа для осесимметричной оболочки из несжимаемого высокоэластичного материала, раздуваемой постоянным по меридиану давлением.

В работе Харнаха [129] на основании вариационного принципа в тензорной форме построена система уравнений теории мягких высокоэластичных оболочек. Основываясь на утверждении, что в силу высокой степени геометрической нелинейности получить решения таких уравнений может быть крайне затруднительно, автор предлагает ряд упрощенных теорий (геометрически линейную теорию мягких оболочек, геометрически нелинейные теории гибких нитей).

Теория мягких оболочек как частный случай общей теории оболочек получила наибольшее развитие исключительно в работах отечественных исследователей. Предтечей этого развития явились, по-видимому, работы Х.А. Рахматулина [114-115]. В 30-40 гг. XX века им впервые была сформулирована теория осесимметричного парашюта, учитывающая специфическую форму сферического купола, обусловленную существованием строп. При этом предполагается, что на формообразование парашюта наиболее влияет локальный радиус кривизны купола. При формировании системы уравнений учитываются только т.н. экваториальные напряжения, а меридиональные напряжения предполагаются пренебрежимо малыми. Материал подчиняется закону Гука. Разрешающая система интегро-дифференциальных уравнений формулируется относительно натяжений в стропах парашюта и параметров, характеризующих геометрию купола. Также

построены системы разрешающих уравнений для парашюта с центральной стропой и конического парашюта.

В наиболее общей постановке основы теории мягких оболочек были заложены в работах С.А. Алексева. На первом этапе формирования теории оболочка рассматривалась как обобщение понятия о гибкой нити в предположении нерастяжимости, но сжимаемости материала, а система разрешающих уравнений сводилась к геометрическим дифференциальным уравнениям, позволяющим определить форму осесимметричной оболочки, находящейся под действием внутреннего давления [1]. При этом были введены понятия раскройной, начальной и конечной формы оболочки. Раскройной называется поверхность оболочки в недеформированном состоянии, определяемая с точностью до изгиба. Начальной является конкретная форма, которую оболочка имеет в начале рассматриваемого процесса. Под конечной (деформированной) понимается форма, принимаемая оболочкой в поле нагрузок.

В соответствии с этими определениями С.А. Алексевым сформулированы три основные постановки задач статики мягких оболочек:

1) Дана конечная форма мягкой оболочки под действием известных нагрузок. Найти раскройную форму.

2) Дана начальная форма и система нагрузок. Найти конечную форму и напряженное состояние.

3) Дана форма оболочки, нагрузки и напряжения, удовлетворяющие уравнениям равновесия. Дана система дополнительных нагрузок, налагаемая на описанное состояние оболочки. Найти новое состояние.

В работе [2] С.А. Алексевым построена система уравнений равновесия осесимметричной оболочки для случая малых деформаций и линейных физических соотношений. Рассмотрены одноосное и двухосное напряженное состояние оболочки, даны алгоритмы решения трех типов задач статики мягких оболочек. Позднее [4] аналогичные теоретические разработки при указанных выше ограничениях были проведены С.А. Алексевым для мягкой

оболочки произвольной геометрии в криволинейных координатах. При этом разрешающие соотношения были записаны как в векторной, так и в скалярной формах.

Уравнения напряженно-деформированного состояния безмоментных оболочек при больших деформациях, по-видимому, впервые были сформулированы в работах А.С. Григорьева. Так, в работе [35] построена система уравнений осесимметричного напряженно-деформированного состояния безмоментных цилиндрических оболочек из несжимаемого материала при больших деформациях в случае постоянного по меридиану оболочки давления, включающая уравнения равновесия, определяемые из рассмотрения геометрии оболочки кинематические соотношения, и физические соотношения, аппроксимирующие зависимость между главными напряжениями и разностью главных истинных удлинений параболой m -го порядка. Позднее [36] эти соотношения обобщены на случай произвольной оболочки вращения при переменном по длине меридиана давлении. Однако представляется, что практическая применимость работ А.С. Григорьева относится более к задачам пластического деформирования конструкций, нежели чем к расчету конструкций из высокоэластичных материалов.

Иные варианты теории мягких оболочек формулировались для различных частных случаев прикладных задач. При этом отечественными исследователями рассматривался только случай малых деформаций. Так, в работе В.М. Гордеева [30] построена система разрешающих уравнений для расчета тканевых оболочек в криволинейных координатах, направленных вдоль нитей ткани. Нелинейные слагаемые в геометрических соотношениях вводятся только относительно прогиба оболочки, а физические соотношения предполагаются линейными.

В статье В.Л. Бидермана, Б.Л. Бухина [10] получены линейные уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки в криволинейных координатах при произвольных перемещениях и деформациях. При этом физические соотношения материала оболочки предполагаются линейными.

В работе В.И. Усюкина [123] формулируются в скалярной форме уравнения равновесия торových мембранных оболочек при нагружении внутренним давлением и цилиндрических оболочек при неосесимметричной нагрузке для случаев малых перемещений и деформаций. Получены аналитические решения ряда задач.

В книге Отто, Тростеля [105] проекционным путем в криволинейных координатах построена система уравнений равновесия безмоментных мембран и геометрические соотношения для случая больших и малых деформаций. При этом в первом случае уравнения равновесия составлены в метрике актуального состояния, во втором случае – в метрике недеформированного состояния. В связи с ориентацией монографии на расчет пневматических конструкций, физические соотношения приняты соответствующими материалам, наиболее часто используемым при проектировании воздухоопорных сооружений, т.е. материал предполагается ортотропным. В случае малых деформаций в качестве физических соотношений предлагается использование закона Гука, в случае больших деформаций – законов Каппуса и Генки.

Л.И. Балабухом, В.И. Усюкиным в работе [7] предложена приближенная теория расчета мягких оболочек вращения, основанная на разделении напряженного состояния на основное и дополнительное, позволяющем формулировать линеаризованные разрешающие соотношения. Усилия, соответствующие основному состоянию, определяются из уравнений равновесия оболочки, нагруженной предварительным давлением. Для дополнительного состояния на основании вариационного принципа составляются уравнения равновесия, линеаризованные относительно основного состояния. Нелинейные слагаемые в соотношениях В.В. Новожилова для деформаций дополнительного напряженного состояния считаются малыми, а физические соотношения – линейными. При этом деформации для основного напряженного состояния могут определяться из нелинейных физических соотношений.

В работе В.Э. Магулы [95] приведены основные зависимости теории мягких оболочек, по-видимому, наиболее часто использовавшиеся в расчетах на момент написания работы. Они включают уравнения равновесия в метрике деформированного состояния, полученные А.Л. Гольденвейзером [29], тождества Кодацци-Гаусса и физические соотношения в форме функциональной связи усилий, деформаций и некоторых произвольных постоянных.

В работах Б.И. Друзя [44-51] для построения разрешающих соотношений по определению напряженно-деформированного состояния мягкооболочечных конструкций используется простейший вариант геометрически нелинейной теории мягких оболочек в квадратичном приближении. При этом в отличие от уравнений, применяемых для расчета моментных оболочек, в соотношениях сохранены некоторые члены, учитывающие удлинения оболочки, вызванные ее прогибом.

В работе [55] предложены соотношения геометрически нелинейной теории мягких оболочек вращения в метрике деформированного состояния в предположении малости деформаций и квадратов углов поворота по сравнению с единицей. Материал оболочки предполагается ортотропным.

По-видимому, единственной публикацией, в которой сформулированы уравнения теории больших деформаций мягких оболочек произвольной начальной геометрии в форме, наиболее удобной для преобразований с целью последующей программной реализации, остается работа В.И. Усюкина [124]. При выводе используется вариационный подход, уравнения сформулированы в метрике как исходного, так и деформированного состояния. Отметим, что в метрике деформированного состояния уравнения соответствуют полученным в работе А.Л. Гольденвейзера [29] проекционным путем.

В работах [132, 133] К.Ф. Черных предложил нелинейную теорию тонких оболочек из эластомеров (резиноподобных материалов), учитывающую сжимаемость материалов. При этом при выводе разрешающих

соотношений используется уточненная геометрическая гипотеза Кирхгофа, что позволяет без повышения порядка разрешающей системы уравнений учесть деформационное утонение. Уравнения равновесия и граничные условия записываются в недеформированном материальном базисе, положение которого известно, а полученные при этом соотношения отнесены к деформированным материальным осям. Помимо этого, принята гипотеза о линейном законе распределения напряжений по толщине, что упрощает связь между усилиями и компонентами деформации срединной поверхности.

В работе В.Н. Паймушина [107] построены уравнения деформирования безмоментных оболочек при больших перемещениях и деформациях, приводящие при предельном переходе к случаю малых деформаций к непротиворечивым соотношениям.

Общая теория раскрыя мягких оболочек при больших деформациях впервые сформулирована в диссертации К.М. Кылытчанова [94], при этом разрешающие соотношения записаны в тензорной форме.

Монографии 90-х и более поздних годов издания уже не содержали принципиально новых разработок теории больших деформаций или теории мягких оболочек, а являлись обобщением результатов, накопленных в указанных разделах механики деформируемого твердого тела в течение XX века [145, 146, 162]. В частности, в монографии Libai [174] представлен вывод соотношений теории мягких оболочек при больших деформациях в наиболее удобной для последующей программной реализации форме для случаев как статического, так и динамического нагружения, как для осесимметричной, так и для общей постановки задачи. Уравнения сформулированы в тензорной, смешанной и скалярной формах. При этом особое внимание уделено определениям «истинной мембраны» и «оболочечной мембраны». Данная работа является одной из немногих работ зарубежных исследователей, в которой рассматривается возможность образования складок в мембране.

В статье Naughton'a [159] уравнения теории изотропных нелинейно-

упругих мембран получены двумя способами: из трехмерных уравнений теории упругости при принятии соответствующих гипотез и на основании вариационного принципа. Уравнения пригодны для расчета мембран в одно- и двухосных зонах. Продемонстрированы различия формулировок и результатов расчетов, получаемых при использовании двух предложенных групп уравнений.

В сборнике лекций [147] приведены не только результаты разработок теории нелинейно упругих тел, но и обзор ряда задач деформирования гиперупругих тел, в которых наиболее ярко проявляются специфические свойства высокоэластичных материалов.

Построению соотношений динамического деформирования мягких оболочек посвящено значительно меньшее количество публикаций. Первые работы в этом направлении, по-видимому, принадлежат зарубежным авторам и относятся к 60-м годам XX века. При этом рассматривались лишь частные задачи динамического раздувания сферической, цилиндрической и торовой оболочек [157], а разрешающие соотношения сводились к уравнениям динамики системы с одной степенью свободы. Среди работ зарубежных исследователей можно выделить лишь одну [174], в которой были сформулированы соотношения динамического деформирования мягкооболочечных конструкций в общей математической постановке.

Труды отечественных авторов, посвященные построению уравнений динамики мягких оболочек, характеризуются более сложной формулировкой соотношений. Среди первых работ этого направления следует отметить статью С.А. Алексеева [3], в которой была сформулирована в векторной форме система уравнений малых колебаний мягких оболочек путем включения в состав уравнений равновесия сил инерции.

Большой комплекс теоретических исследований стационарного динамического поведения мягких оболочек был выполнен Б.И. Друзем. В диссертационной работе [44] автором были получены уравнения колебаний мягких оболочек в ортогональных криволинейных координатах,

совпадающих с линиями главных кривизн напряженной оболочки. При выводе применялась линейная теория тонких моментных оболочек для случая применимости гипотезы Кирхгофа-Лява. Уравнения колебаний мягких оболочек были построены как частный случай перехода от общих уравнений для моментных оболочек к безмоментным, при этом рассматривалось равновесие элемента предварительно напряженной мягкой оболочки, нагруженной дополнительной нагрузкой, величина которой имеет тот же порядок, что и основная нагрузка, и к уравнениям равновесия добавлялись инерционные члены. Кинематические соотношения были приняты линейными [103]. Нелинейные члены в уравнениях равновесия формировались в результате подстановки в уравнения добавочных усилий, выраженных через деформации оболочки. Физические соотношения были приняты линейными.

В работе В.В. Риделя, Б.В. Гулина [42] дана математическая постановка задач динамики мягких анизотропных оболочек, каркасированных абсолютно гибкими дискретно расположенными нитями. Уравнения движения сформулированы в произвольной системе координат для двухосной и одноосной зон. Обобщение разработанной теории позднее представлено в монографии [116]. При этом постановка задачи учитывает основные особенности поведения рассматриваемого типа конструкций: сильную формоизменяемость, большие деформации, возможность одновременного существования одноосных, двухосных и ненапряженных зон, анизотропию материала.

В диссертации В.А. Хованца [130] построены вариационные уравнения движения мягких оболочек в приращениях для задач контактного взаимодействия с жесткими преградами. При этом деформации предполагаются большими, но в качестве физических соотношений используется обобщенный закон Гука.

В монографии [94] представлены используемые в прикладных расчетах системы разрешающих уравнений одномерных и двумерных моделей

парашютов (формулируемые в локальной системе координат соответствующих бесконечно малых элементов проекционным путем). При этом уравнения двумерной модели отличаются от полученных авторами [116] лишь учетом диссипативной силы. Рассматриваются физические соотношения для нелинейно-ортотропного, линейно-упругих анизотропного, ортотропного и изотропного материалов. Отличительной особенностью монографии является формирование конечноэлементной модели деформирования мягкой оболочки типа парашюта (при этом прикладная направленность задачи определяется использованием физических соотношений, характерных для материалов, применяемых для производства парашютов). Разрешающие соотношения, описывающие динамическое поведение парашюта, построены с применением метода сосредоточенных масс, т.е. парашют представляется совокупностью дискретно расположенных сосредоточенных масс, шарнирно соединенных между собой невесомыми упругими нитями, работающими только на растяжение, и уравнения движения по принципу д'Аламбера составляются для сосредоточенной массы.

1.2. Методы решения задач статического деформирования мягких оболочек

Работы, посвященные исследованию статического поведения мягких оболочек, можно разделить на две группы. К первой группе относятся задачи моделирования конкретных конструкций, изготавливаемых из материалов, обладающих малой изгибной жесткостью. Характерно, что подобные прикладные задачи рассматривались исключительно отечественными исследователями. При этом деформации предполагались малыми. Наибольшее количество работ этой группы относится к расчету и проектированию пневмоконструкций.

В одном из первых исследований указанного направления [17]

получены решения частных задач об определении напряженно-деформированного состояния в элементах пневмоконструкций из мягких нерастяжимых материалов – цилиндрической и сферической оболочках, нагруженных равномерно распределенной симметричной, а для случая цилиндрической оболочки – и односторонней радиальной нагрузкой. При этом расчет сводится к получению простейших геометрических соотношений и уравнений равновесия, исходящих из рассмотрения геометрии деформирования конечного элемента оболочки. Аналогичный подход к расчету воздухоопорных зданий и сооружений используется в более поздней работе [53].

В работе Н.П. Стрекозова [121] решены задачи о расчете напряженно-деформированного состояния конической и цилиндрической мягких оболочек с жесткими днищами, нагруженных внутренним давлением. При этом используются простейшие уравнения равновесия для частных случаев рассматриваемых оболочек, кинематические соотношения определяются из рассмотрения геометрии конкретной оболочки, а физические соотношения предполагаются соответствующими некоторым тканевым материалам. Решение задачи получено численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В статьях Ишии, Харнаха [53] описаны особенности применения к расчету пневматических конструкций наиболее распространенных методов – метода конечных разностей и метода конечных элементов.

В более позднем исследовании А.Ю. Кимом [57] поведение мембранно-пневматических сооружений рассматривается с учетом упругой работы воздуха. При этом выводится авторская система разрешающих уравнений для линзообразной мембранно-пневматической системы, а для описания поведения воздуха применяется уравнение универсального состояния газа. Вычисления проводятся итерационным методом приращений параметров с поэтапным применением метода Бубнова-Галеркина. Несмотря на учет геометрической, а в ряде случаев и физической нелинейности в

разрешающих соотношениях, полученные в расчетах перемещения являются малыми по сравнению с размерами исследуемых конструкций.

Большое количество исследований, посвященных моделированию поведения элементов судовых конструкций, было выполнено дальневосточной школой. В монографии В.Э. Магулы [96] приведены инженерные методы расчета и проектирования судовых устройств – гибких и мягких судовых переборок, баллонов, спасательных устройств типа надувных плотов. В более сложной постановке, т.е. с использованием авторского варианта уравнений квадратичной нелинейной теории оболочек Л.А. Шаповалова, задачи расчета судовых мягкооболочечных конструкций исследованы в работах Б.И. Друзя [44-51].

Ряд работ советских ученых в области расчета мягких оболочек не имеет очевидной прикладной направленности, однако она подразумевается самой постановкой задачи. Таковы, в частности, работы школы В.И. Усюкина, посвященные исследованию напряженно-деформированного состояния составных оболочек вращения канонических форм меридиана при осе- и неосесимметричном нагружении в случае малых деформаций на основании технической теории мягких оболочек [125-128]. Для проведения вычислений по разрешающим соотношениям технической теории используются метод конечных разностей и метод конечных элементов.

Ряд задач раскрытия мягких оболочек при больших деформациях решен в диссертации К.М. Кылытчанова [94]. В частности, рассмотрены задачи раскрытия мягких равнонапряженных оболочек вращения и симметрично деформируемых мягких оболочек вращения, содержащих одноосную и двухосную зоны, а также исследовано напряженно-деформированное состояние области сопряжения одноосной зоны с двухосной. При этом приняты двух- и трехпараметрические формы упругих потенциалов материала. Необходимо подчеркнуть, что, по-видимому, данная работа является первой среди работ отечественных ученых, в которой исследуются истинно большие деформации (получены величины деформаций до 6).

Лишь в XXI веке разработки отечественных ученых в области исследования мягких оболочек приобрели более абстрактный характер. Так, в работе [219] исследуется устойчивость цилиндра из высокоэластичного материала в условиях растяжения, кручения и раздувания. При этом используются уравнения трехмерной теории упругости, которые линеаризуются около положения равновесия. Материал предполагается несжимаемым, рассмотрены упругие потенциалы Бидермана и степенной закон. При анализе условий устойчивости цилиндра используется конечно-разностная аппроксимация разрешающей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В последних отечественных диссертационных работах рассматриваемой области численно исследовалось поведение оболочек в истинно большом диапазоне деформаций (порядка нескольких единиц). Так, в диссертации Е.П. Колпака [59] приведены результаты комплекса работ, выполненных автором в области численного исследования напряженно-деформированного состояния балки-полоски, оболочки вращения, цилиндрической оболочки, плоских мембран для ряда форм упругого потенциала материала. Для построения решения разработан алгоритм, основанный на конечно-разностной аппроксимации разрешающей системы нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений [134] и последующем решении полученной системы нелинейных алгебраических уравнений итерационными методами.

В диссертации А.М. Колесникова [58] на основании авторской системы разрешающих соотношений с помощью метода пристрелки исследовано напряженно-деформированное состояние замкнутой сферической оболочки, плоской мембраны, цилиндрической и торообразной оболочек из высокоэластичного материала при осесимметричном нагружении. На диапазон деформирования оболочки не накладывается каких-либо ограничений.

Переходя к обзору публикаций зарубежных исследований

безмоментных оболочек из высокоэластичных материалов, необходимо отметить не только отсутствие прикладной направленности рассматриваемых задач, но и анализ больших деформаций уже в первых работах, относящихся к 50-м годам XX века. Последнее оказалось возможным, очевидно, благодаря упрощенной постановке задачи.

Первой работой этого направления, была, по-видимому, статья Green'a, Shield'a [154], в которой рассматривалось раздувание сферической мембраны из неогуковского материала как частный случай задачи деформирования толстостенной сферы и впервые было получено соотношение, связывающее величину раздувающего оболочку давления с меридиональной деформацией.

Последующие зарубежные работы можно классифицировать по признаку формы исследуемого тела.

Анализ поведения сферической оболочки был продолжен Foster'ом в [152], где было аналитически исследовано напряженно-деформированное состояние равномерно раздуваемой сферы из неогуковского материала. Позднее Yang'ом, Feng'ом [211] была численно решена задача о выполаживании полусферы из материала Муни-Ривлина на основании авторской системы уравнений в перемещениях для случая осесимметричного деформирования.

В работе Naughton'a [161] были исследованы условия, при которых возможно появление несферических форм потери устойчивости при раздувании сферы из высокоэластичных материалов различных типов.

С развитием вычислительной техники постановка задач и методика их решения усложнялись. Так, в работе de Neto [178] на основании линеаризации закона сохранения количества движения нелинейно-упругой среды была дана постановка задачи о статическом деформировании высокоэластичных тел из материалов, упругий потенциал которых подчиняется ряду определенных законов. Были приведены примеры решения задач о деформировании как сфер, так и плоских мембран с использованием метода конечных элементов. В конечноэлементном разбиении применялся

треугольный трехузловой конечный элемент.

Первые зарубежные исследования напряженно-деформированного состояния плоских мембран относятся к 1960-м годам. В работе Hart-Smith'a и Grisp'a [159] на основании системы уравнений, предложенной в [139] получено решение задачи о раздувании плоской круглой мембраны из материала, упругий потенциал которого подчиняется закону Харт-Смита. Однако позднее Wu [208] показано, что класс задач теории больших деформаций мембран, для которых возможно получение аналитических решений, может быть шире, чем это было принято считать. Были приведены примеры построения таких решений для задач о плоском напряженном состоянии, плоском деформированном состоянии, растяжения и раздувания мембран из материала, функция энергии деформации которого имеет специальный вид (в частном случае вырождающийся в соотношение для неогукковского материала), и задачи о плоской деформации мембраны из материала, подчиняющегося закону Ривлина.

Дальнейшие исследования поведения мембран проводились с применением численных методов.

В статье Roxburg'a [194] на основании общей теории, предложенной в монографиях [155, 200] построена система уравнений раздувания плоской кольцевой мембраны из материала Муни-Ривлина, позволяющая учесть образование одноосных зон, представляющая собой совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых получено методом пристрелки. В работе Jiang'a [165] также проводится линеаризация разрешающих соотношений деформирования мембраны, а полученная в результате система двух дифференциальных уравнений решается методом конечных элементов, причем используется двухузловой конечный элемент. Приведен пример решения задачи о раздувании кольцевой мембраны из материалов неогукковского, Муни-Ривлина и Огдена.

В статье Haddow [158] предложено использование вариационных принципов для построения уравнений деформирования высокоэластичных

мембран из сжимаемых и несжимаемых материалов. Приведены примеры использования предложенного подхода для численного решения задачи об осевом растяжении круговой цилиндрической мембраны.

К постановке и решению задач статического деформирования цилиндрических оболочек из высокоэластичных материалов в XX веке зарубежные исследователи обращались наиболее часто по сравнению с задачами анализа оболочек иных форм. Первая работа по расчету деформирования цилиндрической оболочки относится к 1967 году [152], когда было получено численное решение задачи о раздувании цилиндра из неогуковского материала. Позднее авторами Yang'ом, Feng'ом [211] на основании авторской системы уравнений в перемещениях было получено численное решение задачи об осевом растяжении цилиндрической трубки из материала Муни-Ривлина.

В статье Taber'a [202] рассматривается задача о совместном нагружении цилиндра из неогуковского материала растяжением, раздуванием и кручением. Разрешающие соотношения выводятся двумя способами – на основании уравнений нелинейной теории упругости и нелинейной теории оболочек, а решения получены аналитически.

Для исследований статического поведения цилиндрических оболочек из высокоэластичных материалов XXI века характерно использование коммерческих конечноэлементных комплексов. Так, в статье Suh'a [201] исследуется сдвиг резиновой цилиндрической трубки из неогуковского материала, закрепленной по наружному и внутреннему диаметрам между жестких цилиндрических трубок. Нагружение резиновой трубки осуществляется кручением или осевым перемещением жестких трубок друг относительно друга. Получена простейшая формула для напряжений, возникающих в трубке при чистом сдвиге. Напряженное состояние резиновой трубки в зависимости от угла закручивания или величины относительного перемещения жестких трубок исследуется в конечноэлементном комплексе ABAQUS.

В работе Vucchi [149] исследуется точность решения задач деформирования цилиндрической трубки для семи функций упругого потенциала и различных комбинаций одноосного, равнонапряженного двухосного состояния и чистого сдвига с использованием программного комплекса ABAQUS. Результаты расчета сравниваются с результатами, полученными другими авторами с использованием авторского конечноэлементного комплекса, с аналитическими решениями задач, а также с результатами, полученными при использовании разных конечных элементов.

В работе Zhu [218] в трехмерной постановке рассматривается задача статического деформирования толстостенного цилиндра из несжимаемого неогуковского материала. Решение получено методом конечных элементов, при реализации которого использованы программирование в C++ и сравнительные расчеты в комплексе ABAQUS.

Статья Kydonieftz [172] оказалась единственной зарубежной работой в доступной литературе, в которой исследуется деформирование торовой оболочки. Предполагается, что оболочка выполнена из несжимаемого неогуковского материала и нагружена внутренним давлением.

Такой же единичной работой является статья Saccomandi [195], посвященная построению трехмерных уравнений статического деформирования тела из неогуковского материала для случая неоднородного одноосного растяжения, наложенного на псевдоплоскую деформацию. С использованием построенных уравнений получены аналитические решения задач о совместном неоднородном растяжении и кручении плиты и о совместном неоднородном растяжении и «классическом» кручении.

1.3. Методы решения задач динамического деформирования мягких оболочек

Интерес к задачам динамического деформирования мягких оболочек в

последние годы стремительно возрастает, о чем можно судить по количеству публикаций по данной тематике. При этом, как и в случае задач статики, можно выделить два подхода к их постановке и решению. Первый подход характерен для отечественных школ исследования мягкооболочечных конструкций и отличается направленностью на решение конкретных прикладных задач – как правило, парашютостроения и судостроения. При этом разрабатываются модели исследуемой конструкции, учитывающие ее специфические свойства или условия работы. По результатам обзора литературы можно выделить два направления работ, выполнявшихся в отечественных школах.

Первое направление связано с анализом динамического поведения мягких оболочек, образованных полотнищем, гибкими лентами и стропами, находящихся в потоке воздуха. При этом рассмотрены плоская и пространственная задачи раскрытия парашюта и безмачтового паруса, задачи аэродинамического нагружения неосесимметричного парашюта и прямоугольной мягкой мембраны [20-27, 38-42, 52]. Разрешающие соотношения соответствующих начально-краевых задач формируются проекционным путем. Физические соотношения предполагаются линейными. Решение задач строится численно методом конечных разностей. Даны рекомендации по проведению расчетов в области сопряжения одно- и двухосных зон, а также по корректировке и регуляризации численного решения. Следует отметить предложенную в монографии В.В. Риделя, Б.В. Гулина [116] методику сквозного счета, позволяющую проводить вычисления при возникновении одноосного напряженного состояния на каком-либо этапе деформирования конструкции по единой системе уравнений и единому алгоритму.

В доступной литературе периода 1990-2009 гг. не удалось найти ни одной отечественной работы, посвященной динамике мягких оболочек в потоке воздуха. В 2009 г. была опубликована монография, посвященная решению прикладных задач парашютостроения [95] методом конечных

разностей с использованием авторского пакета программ. При этом парашюты моделируются с применением метода дискретных масс.

Следует отметить ряд исследований последних лет, касающихся анализа динамического поведения воздухоопорных сооружений под действием ветровой нагрузки [98]. При этом приняты предположения о физической линейности материала рассматриваемых конструкций. В частности, для цилиндрической оболочки и пластины, находящихся в вязкой несжимаемой жидкости, решены задачи модального анализа и задачи обтекания потоком жидкости. Для проведения расчетов используется программный комплекс ANSYS.

Второе направление работ, посвященных динамике мягких оболочек, связано с исследованиями взаимодействия оболочек с потоком жидкости. Следует отметить дальневосточную школу, в работах которой исследованы аэро- и гидроупругие стационарные колебания элементов судовых конструкций. Решены задачи о линейных и нелинейных колебаниях безграничной плоской мембраны в жидкости, о колебаниях круговой цилиндрической и сферической оболочек в жидкости [44, 48-51]. Получены аналитические выражения для частот колебаний рассматриваемых оболочек. Существенный прогресс в развитие исследований дальневосточной школы внесла диссертация В.А. Хованца [130], в которой был предложен ряд алгоритмов численного решения прикладных задач контактного взаимодействия мягких оболочек с жесткими преградами. Алгоритмы основаны на применении методов конечных элементов и редуцирования.

Подводя итог обзора отечественных исследований динамики мягких оболочек, следует подчеркнуть, что, несмотря на то, что во многих работах постановка задачи дается для материала с произвольными нелинейными физическими соотношениями, результаты расчета приводятся лишь для линейного поведения материала оболочек (за исключением приведенного в монографии [116] тестового примера удара по гибкой нити, в котором принята квадратичная зависимость усилия от деформации нити). В

доступной отечественной литературе лишь в двух работах [18, 19] исследовано динамическое поведение оболочек из материала Черныха при значениях поперечной деформации до 95%. При этом в статье [18] проекционным способом получена система уравнений неосесимметричного динамического деформирования безмоментной тонкой оболочки из гиперупругого материала при больших перемещениях и деформациях для случая упругого потенциала Черныха с учетом внутреннего трения в материале. Решение задачи построено для осесимметричной оболочки вращения типа усеченного конуса на основании метода конечных разностей с использованием явной схемы, при этом отмечается, что коэффициент внутреннего трения подбирается на основании численных экспериментов. Судя по изложению результатов исследования, целью введения внутреннего трения в материале является устранение неустойчивости вычислительного алгоритма. Закон изменения во времени раздувающего оболочку давления принят линейным. В работе [19] аналогичный подход использован для постановки и решения задачи о динамическом раздувании трехслойной сферической оболочки из материала с теми же свойствами, что и в статье [18], при этом закон изменения нагрузки во времени принят линейным, а по достижении некоторой величины нагрузки – постоянным.

Зарубежные исследования динамического поведения мягких оболочек принципиально отличаются от отечественных, во-первых, отсутствием прикладной направленности задачи, а во-вторых, учетом физической нелинейности материала оболочки. Среди таких задач первой была рассмотрена задача динамического раздувания бесконечно длинного цилиндра из несжимаемого высокоэластичного материала [171]. При этом для расчетов использовалось уравнение статики, заимствованное из [156], в правую часть которого было добавлено инерционное слагаемое. Вследствие учета только радиальных перемещений уравнение движения оболочки оказалось возможным привести к виду уравнения движения системы с одной степенью свободы. Было получено аналитическое выражение для периода

колебаний оболочки.

В работе Shahinpoor'a [197] получено аналитическое решение аналогичной задачи при нагружении цилиндра равномерным давлением, изменяющимся во времени по четырем законам: функции Хевисайда, линейно убывающему, гармоническому и периодическому ступенчатому.

В статье [206] рассматривается устойчивость и малые колебания относительно статического деформированного состояния цилиндрической и сферической оболочек из несжимаемого неогуковского материала. Система двух уравнений неосесимметричного движения оболочек приводится без вывода, а ее решение разыскивается в виде разложения в ряд по собственным формам. После преобразований математическая формулировка рассматриваемых задач для оболочек обоих типов представляет одно обыкновенное дифференциальное уравнение (выведенное для каждой оболочки в отдельности). Получены аналитические выражения для собственных частот чисто радиальных колебаний оболочек. Неосесимметричные колебания оболочек исследуются численно на основании метода конечных разностей. Анализируются диаграммы деформирования и зависимость частот колебаний от величины деформации оболочек.

В работе Akkas'a [140] исследуются условия динамической устойчивости раздуваемой внезапно приложенным постоянным давлением сферической мембраны из материала Муни-Ривлина. Уравнение радиальных колебаний мембраны, как и обычно в зарубежных работах, имеет вид дифференциального уравнения второго порядка, получаемого для частного случая конкретной рассматриваемой задачи, что позволяет построить выражение для фазовой траектории в аналитическом виде и методом перебора параметров материала исследовать влияние свойств материала на устойчивость фазовых траекторий.

В статье Calderer'a [150] рассматривается задача о динамическом раздувании мембраны, сферической и цилиндрической оболочек из

несжимаемого изотропного высокоэластичного материала. Однако и в этом случае система уравнений движения выводится для конкретной рассматриваемой задачи, принимая вид обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего поведение системы с одной степенью свободы, а исследование заключается в определении условий существования и поведения решений (периодическое или неограниченно возрастающее).

В работе Акууз'а [141] исследуются неосесимметричные колебания раздуваемых цилиндрических оболочек из сжимаемого высокоэластичного материала. Уравнения движения выводятся для частного случая геометрии оболочки, нагружения и формы упругого потенциала, при этом напряженно-деформированное состояние оболочки представлено суммой статического состояния, соответствующего большим деформациям, и накладываемого на него динамического состояния, соответствующего малым деформациям. Система уравнение решается в ФОРТРАН методом множественной пристрелки (используется готовая процедура ФОРТРАН) и в комплексе ABAQUS методом конечных элементов.

В статье Verron'а [204] исследуется динамическое раздувание сферической мембраны из несжимаемого материала Муни-Ривлина. Уравнение движения оболочки в радиальном направлении, полученное из закона сохранения количества движения, сводится к виду уравнения движения системы с одной степенью свободы, что позволяет как анализировать фазовый портрет системы при разных параметрах материала, так и исследовать условия устойчивости движения.

Аналогичная постановка задачи и подход к решению используются в работах Yuan'а [214] для случая динамического раздувания периодическим ступенчатым давлением бесконечно длинного цилиндра из несжимаемого материала Огдена), Ren'а [182], [183] при исследовании поведения цилиндра и сферы из неогуковского материала, нагружаемого постоянным и периодическим давлением, Yong'а [213] для анализа динамического раздувания толстостенной сферы из неогуковского диэлектрического

материала в случаях постоянного и периодического электрического напряжения, действующего на сферу, Ju и Niu [168] для изучения радиальных колебаний сферической мембраны из несжимаемого материала Огдена, нагружаемой внезапно приложенным равномерным давлением по внешнему и внутреннему радиусам, Zhao [217] для случая квазипериодического и хаотического движения сферической мембраны из материала Муни-Ривлина под действием равномерно распределенного по меридиану давления, представляющего суперпозицию постоянного во времени и возмущающего гармонического давления.

Статья [192], по-видимому, является первым исследованием, в котором использовалась та же узкая математическая постановка задачи, что и в перечисленных выше статьях, но цель исследования была шире – анализ свойств диаграмм деформирования и фазовых траекторий для задачи о динамическом раздувании внезапно приложенной постоянной нагрузкой сферической мембраны в зависимости от типа упругого потенциала материала.

Исследование зависимости динамического поведения гиперупругих оболочек от параметров исходных данных поставленной задачи также было выполнено в ряде работ последних лет, посвященных анализу динамики оболочек под воздействием гармонически изменяющегося во времени давления. Так, в [198, 143, 216] исследуется раздувание сферической оболочки гармонически изменяющейся во времени нагрузкой для высокоэластичных материалов различных типов, при этом предполагается наличие усложненных свойств материалов – вязкоупругости или электроупругости. Для разных значений параметров материала строятся графики зависимости прогиба оболочки от времени, а также фазовые портреты и амплитудно-частотные характеристики системы.

В работах [166, 209, 210, 205] задача исследования движения цилиндрической оболочки из высокоэластичного материала под действием гармонически изменяющейся формулируется как начально-краевая, решение

которой строится с использованием либо метода Ритца [210], либо метода гармонического баланса. Как и в статьях, посвященных анализу поведения сферической оболочки, для разных значений параметров материала и геометрии оболочки или амплитуды и частоты внешней нагрузки проводится сравнение фазовых портретов и амплитудно-частотных характеристик системы. При этом в работах [209, 210] учитывается наличие температурного поля.

В доступной литературе удалось найти лишь несколько зарубежных работ более сложной постановки, посвященных динамике оболочек или сред из высокоэластичных материалов. При этом в большинстве таких исследований анализируется поведение высокоэластичных сред.

Так, в статье Janele [164] рассмотрена задача распространения сферической волны в неограниченной среде из сжимаемого и несжимаемого высокоэластичных материалов. Система разрешающих соотношений включает уравнения движения и геометрические соотношения и приводится к векторно-матричному виду, а ее решение построено с использованием конечно-разностной схемы МакКорнака типа предиктор-корректор.

В работе [193] исследуется распространение нестационарной волны в теле, материал которого подчиняется закону Муни-Ривлина. Уравнение нелинейной эластодинамики Клейна-Гордона записывается в терминах комплексной переменной, образованной перемещениями, распространяющимися в поперечном направлении и поляризованными в продольных направлениях. Решение уравнения разыскивается аналитически для случая специального вида объемной силы, действующей на тело. Аналитически же исследованы условия устойчивости волн различных типов.

В статье [181] рассматривается распространение линейно поляризованных поперечных волн в предварительно напряженном несжимаемом изотропном гиперупругом теле. Выполнен асимптотический анализ уравнений теории упругости, описывающих распространение волны малой, но конечной амплитуды. Исследовано распространение ударных волн

в теле, предварительная деформация которого является конечной, а также зависимость времени проявления нелинейных эффектов от направления распространения волны.

В ряде работ последних лет для проведения вычислений используются коммерческие конечноэлементные комплексы. Так, в статье Kannan'a [169] исследуется нестационарное движение упругих тел, физические соотношения для которых описываются нелинейной зависимостью между линеаризованными напряжениями и деформациями. Решение соответствующей задачи теории упругости находится полуобратным методом, причем в специальном виде разыскиваются как напряжения, так и перемещения. В итоге формируется система двух дифференциальных уравнений в частных производных, решение которой строится с использованием комплекса COMSOL.

В работе Soares'a [199] на основании вариационного принципа получены уравнения движения прямоугольной мембраны из материала Муни-Ривлина. Линеаризация уравнений позволяет получить несвязанные уравнения движения в плоскости мембраны и в направлении нормали к плоскости мембраны. Представляя прогиб мембраны разложением в ряд Фурье по координатам и в ряд по собственным функциям, удается получить аналитическое выражение для частоты собственных колебаний мембраны. Анализ нелинейных колебаний проводится на основании гипотезы о малости перемещений в плоскости мембраны по сравнению с нормальным перемещением, что позволяет упростить уравнение движения мембраны в направлении нормали. Численные результаты (значения частот для разных мод колебаний, амплитудно-частотных характеристик, резонансные кривые и их зависимость от относительного удлинения мембраны и свойств материала) получены с использованием программного комплекса ABAQUS.

В работе [153] изучается поведение полусферического мягкого актюатора из материала Джента, надуваемого жидкостью. Актюатор представляет собой два пологих сферических сегмента, в полость между

которыми вводится жидкость. Квазистатическое деформирование актюатора исследуется в конечноэлементном комплексе ABAQUS, а для исследования динамического поведения (прыжка) актюатор моделируется системой из двух сосредоточенных масс, соединенных упругим и вязким элементами, свойства которых определяются из предварительного анализа статического поведения в комплексе ABAQUS. Формулируется система уравнений движения модели, представляющая собой два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка. Решение системы построено в системе MATLAB с помощью решателя ODE45.

Таким образом, можно заключить, что, начиная с первых работ по исследованию динамики мягких оболочек из высокоэластичных материалов, постановка задач и методика их решения для большинства зарубежных авторов принципиально не изменилась, несмотря на развитие вычислительной техники, базируясь по-прежнему на сведениях задачи о динамическом деформировании оболочки с конкретными параметрами геометрии, материала, нагружения и закрепления к задаче Коши, решение которой можно было бы получить аналитически. Помимо этого, в последние годы стали появляться работы, авторы которых получают численные результаты с использованием коммерческих программных комплексов, что, с одной стороны, может быть оправдано сложностью рассматриваемой задачи и трудоемкостью самостоятельного программирования, а с другой стороны, может являться причиной появления неконтролируемых ошибок в вычислениях, особенно при исследовании больших перемещений и деформаций.

1.4. Выводы по главе 1. Цель и задачи исследования

В результате проведенного анализа работ, посвященных исследованию поведения оболочек и оболочечных конструкций из высокоэластичных материалов, можно сделать следующие выводы:

1. Обилие разрешающих систем уравнений деформирования мягких оболочек обусловлено различием допущений о геометрии оболочки, рассматриваемом диапазоне деформаций, характере нагрузки. Замкнутые системы уравнений формулируются лишь при существенных ограничениях на указанные характеристики, определяющие постановку задачи.

2. Алгоритмы решения задач статического деформирования оболочек из высокоэластичных материалов разработаны лишь для задач конкретных ограниченных постановок, а особенности их реализации не изучены, несмотря на очевидную возможность возникновения сложностей построения численного решения нелинейных задач.

3. Вопросы глубокого закритического деформирования мягких оболочек при больших деформациях как с позиций выявления и преодоления возможных вычислительных сложностей, так и с позиций исследования механического поведения оболочек, остаются малоизученными.

4. Задачи динамического деформирования мягких оболочек исследованы в полной математической постановке, т.е. как начально-краевые задачи без ограничения на форму меридиана оболочки, лишь для случая линейно упругого материала в предположении малости деформаций.

5. Для решения задач деформирования оболочек из высокоэластичных материалов отечественными авторами применялись лишь соотношения безмоментной теории оболочек, а в зарубежных публикациях лишь в нескольких работах предприняты попытки учета моментности напряженного состояния для оболочек конкретной формы меридиана, простейших условий нагружения и закрепления, а также в предположении линейной упругости материала при выводе физических соотношений для изгибающих моментов.

На основании изложенных выводов сформулируем цель и задачи диссертационной работы.

Целью работы является разработка и развитие математических моделей и методов решения задач деформирования тонкостенных оболочек вращения

из гиперупругих материалов при произвольных перемещениях и деформациях.

Задачи работы:

1. Формулировка разрешающих соотношений теории мягких оболочек из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях, удобных для использования при разработке численных алгоритмов.

2. Разработка и реализация алгоритмов решения задач осесимметричного статического и динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях, универсальных для исследования максимально широкого круга задач в заданной постановке.

3. Разработка методов контроля точности и единственности численного решения нелинейных краевых и начально-краевых задач, реализуемых в процессе его построения.

4. Разработка методики исследования влияния свойств высокоэластичного материала на особенности процесса потери устойчивости и глубокое закритическое поведение осесимметричных оболочек вращения.

5. Исследование особенностей динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов при решении соответствующих начально-краевых задач в полной постановке при различных зависимостях нагрузки от времени, включая анализ распределения компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану оболочек.

6. Апробация использования соотношений моментной теории оболочек для исследования поведения оболочек из высокоэластичных материалов.

Глава 2. Построение разрешающих соотношений теории мягких оболочек из гиперупругих материалов

2.1. Построение смешанных уравнений теории мягких оболочек при больших деформациях

Основываясь на результатах приведенного в п. 1.1 обзора существующих вариантов соотношений, по которым проводится расчет мягких оболочек, можно заключить, что в наиболее общей форме соотношения теории мягких оболочек предложены В.И. Усюкиным [124]. Однако особенностью представленной в [124] системы дифференциальных уравнений является несоответствие порядка системы и числа дифференцируемых функций. Как следствие этого, при попытке приведения системы к нормальной форме Коши либо повышается порядок дифференцирования компонент вектора разрешающих переменных, либо в левой части векторного дифференциального уравнения вектор производных искомых функций умножается на матрицу. Кроме того, в системе разрешающих соотношений [124] вектор разрешающих переменных содержит неравное число силовых и геометрических компонент, что может затруднять формулирование граничных условий задачи. Поэтому в диссертации предложена модификация системы уравнений теории больших деформаций мягких оболочек, приведенной в [118], позволяющая представить разрешающие соотношения в форме, более удобной как для формализации краевой задачи, так и для алгоритмизации решения различных типов задач теории мягких оболочек произвольной топологии. При этом получаемые в работе уравнения теории мягких оболочек не претендуют на принципиальность изменений или уточнений по сравнению с работой [124].

Ориентируясь на расчет осесимметричных мягких оболочек из высокоэластичных материалов, нагруженных плавно изменяющейся нагрузкой, используем при построении уравнений вариационный метод в соответствии с рекомендациями работ [102], [124]. При этом получим

разрешающие соотношения в проекциях на оси криволинейной системы координат, связанной с исходными состояниями оболочки [63, 79].

Будем полагать, что оболочка тонкая постоянной толщины h . Зададим ее срединную поверхность Π в виде

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \in D \subset R^2.$$

При этом ее граница $\Gamma = \partial\Pi$ определяется как

$$\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \in \partial D,$$

а базис касательной к срединной поверхности плоскости $P = d\Pi$

$$\mathfrak{a}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_j}.$$

В занимаемой оболочкой геометрической области $G \subset R^3$ введем связанные со срединной поверхностью криволинейные координаты α_1, α_2, ξ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2) + \xi \mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \in D, -\frac{h}{2} \leq \xi \leq \frac{h}{2}.$$

При этом ξ отсчитывается в направлении единичного нормального вектора \mathbf{n} к внешней стороне поверхности Π , а $\xi = 0$ соответствует срединной поверхности (рис. 2.1).

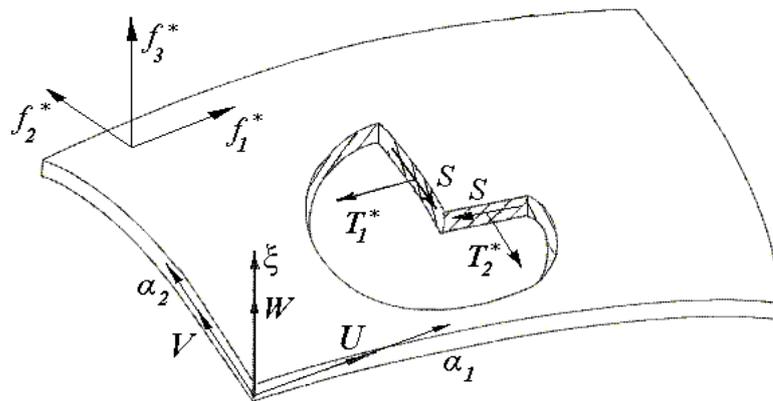


Рис. 2.1. Положительные направления усилий и перемещений

В результате деформации оболочки положение ее точек относительно исходной ортогональной криволинейной системы координат α_1, α_2, ξ

изменится. Перемещение точек определим в плоскости меридиана оболочки по оси α_1 тангенциальным перемещением u , по оси α_2 – окружным перемещением v , по оси ξ – нормальным перемещением w . Полагая согласно геометрической гипотезе теории мягких оболочек перемещения u, v, w неизменными по толщине оболочки, запишем ненулевые компоненты линейного тензора деформаций [102]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{1}{R_1} w; \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{R_2} w; \quad (2.2)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u + \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1}; \quad (2.3)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v; \quad (2.4)$$

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{R_1} u - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}; \quad (2.5)$$

$$\mathcal{G}_2 = \frac{1}{R_2} v - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}. \quad (2.6)$$

Здесь A_1, A_2 - коэффициенты Ляме, R_1, R_2 - радиусы кривизны недеформированной срединной поверхности оболочки.

По (2.1)-(2.6) определяются выражения для компонент нелинейного тензора деформаций Грина, характеризующих удлинения тех линейных элементов, которые до деформации параллельны координатным осям [102]:

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \gamma_1^2 + \mathcal{G}_1^2); \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_2^* = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_2^2 + \gamma_2^2 + \mathcal{G}_2^2); \quad (2.8)$$

$$\omega^* = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1 + \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2, \quad (2.9)$$

связанные с величинами e_1, e_2, ω соотношениями

$$e_1 + \frac{1}{2}e_1^2 = \varepsilon_1^*, \quad 1 \Leftrightarrow 2; \quad (2.10)$$

$$\omega(1+e_1)(1+e_2) = \omega^*, \quad (2.11)$$

где e_1, e_2 - относительные удлинения волокон оболочки вдоль линий α_1, α_2 соответственно, ω - косинус угла между осями α_1, α_2 на деформированной поверхности оболочки.

Следуя работе [124], для вывода уравнений равновесия оболочки используем принцип возможных перемещений. Условия равновесия оболочки, соответствующие этому принципу, имеют вид

$$\delta W = \delta A,$$

где δW - работа внутренних усилий T_1, T_2, S (рис. 2.2), затрачиваемая на деформирование оболочки из состояния равновесия, δA - работа поверхностных и краевых сил на соответствующих перемещениях из состояния равновесия.

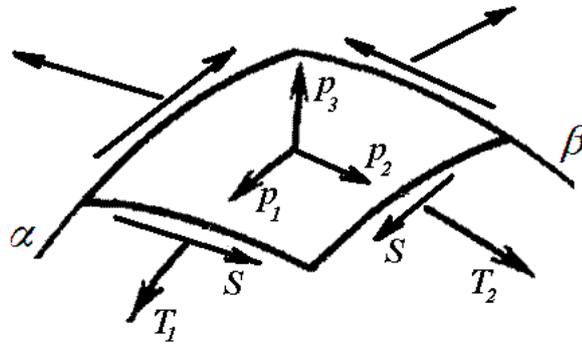


Рис. 2.2. Направления истинных усилий, действующих по граням элемента деформированной оболочки, и проекций распределенной нагрузки на оси деформированной поверхности оболочки

Виртуальная работа внутренних усилий имеет вид

$$\delta W = \iint_S (T_1^* \delta \varepsilon_1^* + T_2^* \delta \varepsilon_2^* + S \delta \omega^*) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

где T_1^* , T_2^* - усилия, приведенные к метрике исходного состояния. Они связаны с истинными усилиями, действующими по граням деформированного элемента оболочки, соотношениями

$$T_1^* = T_1 \frac{1+e_2}{1+e_1}; \quad T_2^* = T_2 \frac{1+e_1}{1+e_2}. \quad (2.12)$$

Вариации деформаций (2.7)-(2.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1^* &= (1+\varepsilon_1)\delta\varepsilon_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 + \mathcal{G}_1\delta\mathcal{G}_1, \quad 1 \rightleftharpoons 2; \\ \delta\omega^* &= (1+\varepsilon_2)\delta\gamma_1 + \gamma_1\delta\varepsilon_2 + (1+\varepsilon_1)\delta\gamma_2 + \gamma_2\delta\varepsilon_1 + \mathcal{G}_1\delta\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2\delta\mathcal{G}_1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Работа внешних сил, действующих на оболочку, складывается из работы поверхностных и краевых сил. Пусть на контуре Γ оболочки действуют краевые усилия $\mathbf{T}^0 = T_i^0 \mathbf{e}_i$, $\mathbf{S}^0 = S_i^0 \mathbf{e}_i$, $\mathbf{Q}^0 = Q_i^0 \mathbf{e}_i$ ($i=1,2$), а составляющие поверхностной нагрузки по осям криволинейной системы координат α_1 , α_2 , ξ , отнесенные к площади недеформированного элемента оболочки, соответственно f_1^* , f_2^* , f_3^* . Совершаемая ими работа при малых виртуальных деформациях срединной поверхности определяется выражением [103]

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_S (f_1^* \delta u + f_2^* \delta v + f_3^* \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ &+ \int_{\Gamma_1} (T_1^0 \delta u + S_1^0 \delta v + Q_1^0 \delta w) (1+e_2) A_2 d\alpha_2 + \int_{\Gamma_2} (T_2^0 \delta u + S_2^0 \delta v + Q_2^0 \delta w) (1+e_1) A_1 d\alpha_1. \end{aligned}$$

В итоге вариационное уравнение принципа возможных перемещений имеет вид

$$\begin{aligned} &\iint_S \left\{ [T_1^* (1+\varepsilon_1) + S\gamma_2] \delta\varepsilon_1 + [T_2^* (1+\varepsilon_2) + S\gamma_1] \delta\varepsilon_2 + [T_1^* \gamma_1 + S(1+\varepsilon_2)] \delta\gamma_1 + \right. \\ &+ [T_2^* \gamma_2 + S(1+\varepsilon_1)] \delta\gamma_2 + [T_1^* \mathcal{G}_1 + S\mathcal{G}_2] \delta\mathcal{G}_1 + [T_2^* \mathcal{G}_2 + S\mathcal{G}_1] \delta\mathcal{G}_2 \left. \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \iint_S (f_1^* \delta u + f_2^* \delta v + f_3^* \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\Gamma_1} (T_1^0 \delta u + S_1^0 \delta v + Q_1^0 \delta w) (1+e_2) A_2 d\alpha_2 + \\ &+ \int_{\Gamma_2} (T_2^0 \delta u + S_2^0 \delta v + Q_2^0 \delta w) (1+e_1) A_1 d\alpha_1. \end{aligned}$$

Выразим вариации компонент тензора малых деформаций через вариации перемещений и их производные

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta v + \frac{1}{R_1} \delta w; \quad (2.14)$$

$$\delta\varepsilon_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \delta v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{R_2} \delta w; \quad (2.15)$$

$$\delta\gamma_1 = -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta v}{\partial \alpha_1}; \quad (2.16)$$

$$\delta\gamma_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \delta u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v; \quad (2.17)$$

$$\delta\mathcal{G}_1 = \frac{1}{R_1} \delta u - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_1}; \quad (2.18)$$

$$\delta\mathcal{G}_2 = \frac{1}{R_2} \delta v - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_2}. \quad (2.19)$$

Пользуясь формулами Остроградского-Гаусса в криволинейных координатах, получаем вариационное уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \iint_S \left\{ \left[L_1(T_{1x}, T_{1y}, T_{1z}, T_{2x}, T_{2y}) - f_1^* A_1 A_2 \right] \delta u + \left[L_2(T_{1x}, T_{1y}, T_{2x}, T_{2y}, T_{2z}) - f_2^* A_1 A_2 \right] \delta v + \right. \\ & \left. + \left[L_3(T_{1x}, T_{1z}, T_{2y}, T_{2z}) - f_3^* A_1 A_2 \right] \delta w \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} \left\{ \left[T_{1x} - T_1^0 (1 + e_2) A_2 \right] \delta u + \left[T_{1y} - S_1^0 (1 + e_2) A_2 \right] \delta v + \left[T_{1z} - Q_1^0 (1 + e_2) A_2 \right] \delta w \right\} d\alpha_2 + \\ & + \int_{\Gamma_1} \left\{ \left[T_{2x} - S_2^0 (1 + e_1) A_1 \right] \delta u + \left[T_{2y} - T_2^0 (1 + e_1) A_1 \right] \delta v + \left[T_{2z} - Q_2^0 (1 + e_1) A_1 \right] \delta w \right\} d\alpha_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь выражения L_i представляют соотношения

$$\begin{aligned} L_1(T_{1x}, T_{1y}, T_{1z}, T_{2x}, T_{2y}) &= -\left(\frac{\partial T_{1x}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{2x}}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{1y} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{2y} + \frac{A_1}{R_1} T_{1z}; \\ L_2(T_{1x}, T_{1y}, T_{2x}, T_{2y}, T_{2z}) &= -\left(\frac{\partial T_{1y}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{2y}}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{2x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{1x} + \frac{A_2}{R_2} T_{2z}; \\ L_3(T_{1x}, T_{1z}, T_{2y}, T_{2z}) &= \frac{\partial T_{1z}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{2z}}{\partial \alpha_2} + \frac{A_1}{R_1} T_{1x} + \frac{A_2}{R_2} T_{2y}, \end{aligned}$$

где введены следующие обобщенные усилия, имеющие смысл проекций равнодействующих истинных усилий на оси системы координат, связанной с недеформированной оболочкой (рис. 2.3):

$$\begin{aligned}
T_{1x} &= [T_1^*(1 + \varepsilon_1) + S\gamma_2] A_2; & T_{2x} &= [T_2^*\gamma_2 + S(1 + \varepsilon_1)] A_1; \\
T_{1y} &= [T_1^*\gamma_1 + S(1 + \varepsilon_2)] A_2; & T_{2y} &= [T_2^*(1 + \varepsilon_2) + S\gamma_1] A_1; \\
T_{1z} &= (T_1^*\varrho_1 + S\varrho_2) A_2; & T_{2z} &= (T_2^*\varrho_2 + S\varrho_1) A_1.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

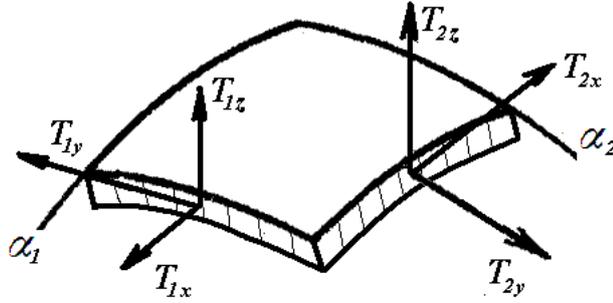


Рис. 2.3. Направления обобщенных усилий

При независимых в области S вариациях δu , δv , δw из вариационного уравнения (2.20) следуют уравнения равновесия в проекциях на оси криволинейной системы координат, связанной с недеформированной срединной поверхностью оболочки

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial T_{1x}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{2x}}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{1y} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{2y} + \frac{A_1}{R_1} T_{1z} &= f_1^* A_1 A_2; \\
-\left(\frac{\partial T_{1y}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{2y}}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{2x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{1x} + \frac{A_2}{R_2} T_{2z} &= f_2^* A_1 A_2; \\
\frac{\partial T_{1z}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{2z}}{\partial \alpha_2} + \frac{A_1}{R_1} T_{1x} + \frac{A_2}{R_2} T_{2y} &= f_3^* A_1 A_2.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

и силовые граничные условия

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = const: T_{1x} - T_1^0(1 + e_2) A_2 = 0; T_{1y} - S_1^0(1 + e_2) A_2 = 0; T_{1z} - Q_1^0(1 + e_2) A_2 = 0; \\
\alpha_1 = const: T_{2x} - S_2^0(1 + e_1) A_1 = 0; T_{2y} - T_2^0(1 + e_1) A_1 = 0; T_{2z} - Q_2^0(1 + e_1) A_1 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений, описывающих деформирование мягких оболочек, включает уравнения равновесия (2.22), дополнительные проекционные уравнения (2.21), зависимости, описывающие приведение истинных усилий к метрике исходного состояния (2.12), геометрические соотношения (2.1)-(2.9) и (2.10)-(2.11). Для замыкания системы уравнений

используются физические соотношения, связывающие истинные усилия T_1 , T_2 , S с удлинениями e_1 , e_2 и сдвигом ω . Окончательно сформированная система содержит 26 уравнений с 26 неизвестными.

2.2. Смешанные уравнения осесимметричного деформирования мягких оболочек при больших деформациях

Круг задач, рассматриваемых в диссертации, ограничен случаем осесимметричного деформирования мягких оболочек вращения. Используемая в расчетах система уравнений формируется из представленных в п. 2.1 соотношений в предположении отсутствия кососимметричных составляющих внешних нагрузок, внутренних силовых факторов, обобщенных перемещений и деформаций:

$$f_2^* = 0; \quad S = T_{2z} = T_{1y} = T_{2x} = 0; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \varrho_2 = 0.$$

Тогда разрешающая система дифференциальных уравнений примет вид [63]

$$\frac{dT_{1x}}{d\alpha_1} = \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha_1} T_{2y} + \frac{A_1}{R_1} T_{1z} - f_1^* A_1 A_2; \quad (2.23)$$

$$\frac{dT_{1z}}{d\alpha_1} = -\frac{A_1}{R_1} T_{1x} - \frac{A_2}{R_2} T_{2y} + f_3^* A_1 A_2; \quad (2.24)$$

$$\frac{du}{d\alpha_1} = A_1 \varepsilon_1 - \frac{A_1}{R_1} w; \quad (2.25)$$

$$\frac{dw}{d\alpha_1} = -A_1 \varrho_1 + \frac{A_1}{R_1} u; \quad (2.26)$$

Дополнительные алгебраические соотношения образуются уравнениями связи деформации с компонентами вектора перемещений u , w и компонентой линейного тензора деформаций

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{dA_2}{d\alpha_1} u + \frac{1}{R_2} w; \quad (2.27)$$

$$e_2 = \varepsilon_2; \quad (2.28)$$

проекционными соотношениями

$$\begin{aligned} T_{1x} &= T_1^* (1 + \varepsilon_1) A_2; \quad T_{2y} = T_2^* (1 + e_2) A_1; \quad T_{1z} = T_1^* \mathcal{G}_1 A_2; \\ T_1^* &= T_1 \frac{1 + e_2}{1 + e_1}; \quad T_2^* = T_2 \frac{1 + e_1}{1 + e_2}; \end{aligned} \quad (2.29)$$

и уравнением, следующим из соотношения $e_1 + \frac{1}{2}e_1^2 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \mathcal{G}_1^2)$,

приводящего к уравнению

$$T_1(1 + e_1)(1 + e_2)A_2 = T_{1x}(1 + \varepsilon_1) + T_{1z}\mathcal{G}_1 \quad (2.30)$$

Для замыкания системы используются физические соотношения

$$T_1 = T_1(e_1, e_2); \quad T_2 = T_2(e_1, e_2). \quad (2.31)$$

Для канонических форм меридиана коэффициенты Ламе, радиусы кривизны и координата α_1 представлены в табл. 2.1. Здесь R_c - радиус цилиндра, γ - угол полураствора конуса, θ - угловая координата, R_T - радиус кривизны меридиана тора, d_T - расстояние от оси вращения до центра кривизны меридиана тора. Координата S для конуса отсчитывается от его вершины.

Табл. 2.1. Геометрические параметры различных форм меридиана

Форма меридиана	α_1	A_1	A_2	$dA_2/d\alpha_1$	R_1	R_2
Цилиндр	S	l	R	0	∞	R_c
Конус	S	l	$S \cdot \sin \gamma$	$\sin \gamma$	∞	$\frac{B}{\cos \gamma}$
Сфера	θ	R	$R \cdot \sin \theta$	$R \cdot \cos \theta$	R	R
Тор	θ	R_T	$d_T + R_T \cdot \sin \theta$	$R_T \cdot \cos \theta$	R_T	$\frac{B}{\sin \theta}$

Введем безразмерные величины следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\{u; w; A_1; A_2; R_1; R_2; S\}^* &= \{u; w; A_1; A_2; R_1; R_2; \alpha_1\}/R_0; \\
\{T_1^* \ T_2^* \ T_1 \ T_2\}^* &= \{T_1^* \ T_2^* \ T_1 \ T_2\}/Ch_0; \\
\{\Phi; f_1^*; f_3^*\}^* &= \{\Phi; f_1^*; f_3^*\}/C; \\
\{T_{1x} \ T_{1z} \ T_{2y}\}^* &= \{T_{1x} \ T_{1z} \ T_{2y}\}/Ch_0R_0;
\end{aligned} \tag{2.32}$$

где R_0, h_0 - характерный размер срединной поверхности оболочки и ее толщина в точке приведения, C - параметр, характеризующий свойства материала. Указанные величины оговариваются конкретно в каждом случае.

Тогда систему уравнений (2.23)-(2.31) можно привести к безразмерному виду:

$$\frac{dT_{1x}}{dS} = \alpha T_{2y} + \beta T_{1z} - f_1^* \gamma R; \tag{2.33}$$

$$\frac{dT_{1z}}{dS} = -\beta T_{1x} - \delta T_{2y} + f_3^* \gamma R; \tag{2.34}$$

$$\frac{du}{dS} = \chi \varepsilon_1 - \beta w; \tag{2.35}$$

$$\frac{dw}{dS} = -\chi \vartheta_1 + \beta u; \tag{2.36}$$

$$e_2 = \chi(\alpha u + \delta w) / \gamma; \tag{2.37}$$

$$T_{1x} = T_1^* (1 + \varepsilon_1) \frac{\gamma}{\chi}; \quad T_{2y} = T_2^* (1 + e_2) \chi; \quad T_{1z} = T_1^* \vartheta_1 \frac{\gamma}{\chi}; \tag{2.38}$$

$$T_1^* = T_1 \frac{1 + e_2}{1 + e_1}; \quad T_2^* = T_2 \frac{1 + e_1}{1 + e_2}; \tag{2.39}$$

$$T_1 (1 + e_1) (1 + e_2) \frac{\gamma}{\chi} = T_{1x} (1 + \varepsilon_1) + T_{1z} \vartheta_1; \tag{2.40}$$

$$T_1 = T_1(e_1, e_2); \quad T_2 = T_2(e_1, e_2). \tag{2.41}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{dS}; \quad \beta = \frac{A_1}{R_1}; \quad \gamma = A_1 A_2; \quad \delta = \frac{A_2}{R_2}; \quad \chi = A_1; \quad R = \frac{R_0}{h_0}.$$

Значения введенных коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \chi$ представлены в табл. 2.2.

Табл. 2.2. Геометрические коэффициенты для различных форм меридиана

Форма меридиана	α	β	γ	δ	χ
Цилиндр	0	0	R	R/R_c	1
Конус	$\sin \gamma$	0	$S \cdot \sin \gamma$	$\cos \gamma$	1
Сфера	$\cos \theta$	1	$R^2 \cdot \sin \theta$	$\sin \theta$	R
Тор	$\cos \theta$	1	$R_T \cdot (d_T + R_T \cdot \sin \theta)$	$\sin \theta$	R_T

Далее в расчетах будет рассматриваться случай осесимметричного нагружения оболочки следящей равномерно распределенной нагрузкой p , действующей по нормали к меридиану. В этом случае компоненты вектора нагрузки f_1^*, f_3^* записываются в виде

$$f_1^* = p \mathcal{Q}_1 (1 + e_2);$$

$$f_3^* = p (1 + \varepsilon_1) (1 + e_2).$$

2.3. Построение смешанных уравнений технической теории мягких оболочек

Основным условием существования решения сформулированной в п. 2.2 системы уравнений является определенность и непрерывность функции правых частей системы и ее частных производных по вектору разрешающих переменных [56]. Однако, как будет показано ниже при описании шагового алгоритма решения задачи, для системы (2.33)-(2.41) указанное условие на первом шаге алгоритма не выполняется. Поэтому особенностью расчета мягких оболочек является регуляризация соотношений теории больших деформаций на начальном этапе решения. С этой целью предлагается использование уравнений технической теории мягких оболочек, получаемых

упрощением систем (2.1)-(2.12), (2.21)-(2.22) и (2.33)-(2.41) при малых деформациях. Отметим, что соотношения технической теории мягких оболочек были получены В.И. Усюкиным в работе [125], однако им свойственны те же недостатки, что и уравнениям теории больших деформаций [124], затрудняющие их использование для формализации краевой задачи и построения алгоритма решения. Поэтому в диссертации сформулирован модифицированный вариант системы уравнений технической теории мягких оболочек, аналогичный предложенному в п. 2.1 для случая больших деформаций [78].

Тогда в случае малых деформаций следующие компоненты нелинейного тензора деформаций можно считать равными компонентам линейного тензора:

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_1^*, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \quad \omega = \omega^*, \\ \varepsilon_1^* &= \varepsilon_1, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \quad \omega^* = \gamma_1 + \gamma_2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Аналогично [125], представим усилия, действующие в деформированной оболочке, в виде суммы двух слагаемых, соответствующих основному и дополнительному напряженному состоянию:

$$T_1 = T_{10} + \bar{T}_1 \quad (1 \Leftrightarrow 2); \quad S = S_0 + \bar{S}. \quad (2.43)$$

Геометрия основного состояния считается известной. Усилия и перемещения, соответствующие дополнительному состоянию, определяются из системы уравнений, получаемой в результате линеаризации компонент вариационного уравнения относительно основного состояния. Тогда элементарная работа усилий T_1^* , T_2^* , S с учетом соотношения (2.12), выражения для вариации конечных деформаций (2.13) и представления (2.43) определяется как

$$\begin{aligned} T_1^* \delta \varepsilon_1^* &= T_{10} \delta \varepsilon_1 + T_{10} \varepsilon_2 \delta \varepsilon_1 + T_{10} \gamma_1 \delta \gamma_1 + T_{10} \vartheta_1 \delta \vartheta_1 + \bar{T}_1 \delta \varepsilon_1, \quad 1 \Leftrightarrow 2; \\ S \delta \omega^* &= S_0 (\delta \gamma_1 + \delta \gamma_2) + S_0 (\varepsilon_2 \delta \gamma_1 + \gamma_1 \delta \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \delta \gamma_2 + \gamma_2 \delta \varepsilon_1 + \vartheta_1 \delta \vartheta_2 + \vartheta_2 \delta \vartheta_1) + \\ &\quad + \bar{S} (\delta \gamma_1 + \delta \gamma_2). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Поверхностная нагрузка также представляется в виде суммы двух слагаемых, соответствующих основному и дополнительному напряженному состоянию. Введя вектор нагрузки $\mathbf{f}^T = \{f_1 \quad f_2 \quad f_3\}$, компонентами которого являются ее проекции на координатные оси деформированной поверхности оболочки, запишем указанное представление в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \bar{\mathbf{f}}. \quad (2.45)$$

Вектор поверхностной нагрузки \mathbf{f}^* , приведенной к метрике исходного состояния, в случае больших деформаций связан с вектором \mathbf{f} соотношением [128]

$$\mathbf{f}^* = (1 + e_1)(1 + e_2)\sqrt{1 - \omega^2}\mathbf{f}. \quad (2.46)$$

Для случая малых деформаций с учетом (2.42) и (2.45) соотношение (2.46) приобретает вид

$$\mathbf{f}^* = \bar{\mathbf{f}} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_0.$$

Тогда элементарная работа поверхностных сил на приращении вектора полного перемещения $\mathbf{u}^T = \{u \quad v \quad w\}$

$$\mathbf{f}^{*T} \cdot \delta\mathbf{u} = \mathbf{f}_0^T \cdot \delta\mathbf{u} + \bar{\mathbf{f}}^T \cdot \delta\mathbf{u} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mathbf{f}_0 \cdot \delta\mathbf{u}. \quad (2.47)$$

Используя вариационное уравнение принципа возможных перемещений, соотношения (2.44), (2.47) и (2.14)-(2.19), получаем системы дифференциальных уравнений равновесия для основного и дополнительного состояний.

Для основного состояния уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{10}A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}T_{20} - \frac{\partial S_0A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}S_0 - A_1A_2f_{10}; \\ \frac{\partial S_0A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}T_{10} - \frac{\partial T_{20}A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}S_0 - A_1A_2f_{20}; \\ \frac{T_{10}}{R_1} + \frac{T_{20}}{R_2} &= f_{30}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Для дополнительного состояния введем следующие обобщенные усилия:

$$\begin{aligned}
T_{1x} &= (\bar{T}_1 + T_{10}\varepsilon_2 + S_0\gamma_2)A_2; & T_{2x} &= (T_{20}\gamma_2 + S_0\varepsilon_1 + \bar{S})A_1; \\
T_{1y} &= (\bar{S} + T_{10}\gamma_1 + S_0\varepsilon_2)A_2; & T_{2y} &= (\bar{T}_2 + T_{20}\varepsilon_1 + S_0\gamma_1)A_1; \\
T_{1z} &= (T_{10}\mathcal{G}_1 + S_0\mathcal{G}_2)A_2; & T_{2z} &= (T_{20}\mathcal{G}_2 + S_0\mathcal{G}_1)A_1.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Уравнения равновесия для дополнительного состояния запишем в обобщенных усилиях:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{1x}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{\partial T_{2x}}{\partial \alpha_2} - [\bar{f}_1 + f_{10}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]A_1A_2 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{1y} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{2y} + \frac{A_1}{R_1} T_{1z}; \\
\frac{\partial T_{1y}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{\partial T_{2y}}{\partial \alpha_2} - [\bar{f}_2 + f_{20}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]A_1A_2 - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{2x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{1x} + \frac{A_2}{R_2} T_{2z}; \\
\frac{\partial T_{1z}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{\partial T_{2z}}{\partial \alpha_2} + [\bar{f}_3 + f_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]A_1A_2 - \frac{A_1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{1x} - \frac{A_2}{R_2} T_{2y}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Назначим граничные условия для системы (2.48) в виде

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = const : T_{10} &= 0; & S_0 &= 0; \\
\alpha_1 = const : T_{20} &= 0; & S_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Тогда следующие из принципа возможных перемещений силовые граничные условия для системы (2.50) имеют вид

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = const : \frac{T_{1x}}{A_2} + T_{10} &= T_1^0; & \frac{T_{1y}}{A_2} + S_0 &= S_1^0; & \frac{T_{1z}}{A_2} &= -Q_1^0; \\
\alpha_1 = const : \frac{T_{2x}}{A_1} + S_0 &= T_2^0; & \frac{T_{2y}}{A_1} + T_{20} &= S_2^0; & \frac{T_{2z}}{A_1} &= -Q_2^0.
\end{aligned}$$

Замкнутая система уравнений для дополнительного состояния содержит 18 уравнений и включает в себя уравнения равновесия (2.50), дополнительные проекционные соотношения (2.49), геометрические соотношения (2.1)-(2.6) и физические соотношения, связывающие усилия дополнительного состояния $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{S}$ с компонентами деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$.

Отметим, что в известной литературе техническая теория мягких оболочек применялась для расчета поведения оболочек из материалов, описываемых линейными физическими соотношениями. Однако использование подхода к расчету мягких оболочек, подразумевающего

разделение напряженного состояния на основное и дополнительное, является возможным и необходимым и при численном решении задач, математическая постановка которых подразумевает использование нелинейных физических соотношений.

2.4. Смешанные уравнения осесимметричного деформирования технической теории мягких оболочек

В случае осесимметричного деформирования [78] усилия основного состояния определяются из соотношений

$$\begin{aligned}\frac{dT_{10}A_2}{d\alpha_1} &= \frac{dA_2}{d\alpha_1}T_{20} - A_1A_2f_{10}; \\ \frac{T_{10}}{R_1} + \frac{T_{20}}{R_2} &= f_{30}.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Система уравнений для определения компонент дополнительного состояния включает уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{dT_{1x}}{d\alpha_1} &= \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha_1} T_{2y} + \frac{A_1}{R_1} T_{1z} - [\bar{f}_1 + f_{10}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] A_1 A_2; \\ \frac{dT_{1z}}{d\alpha_1} &= -\frac{A_1}{R_1} T_{1x} - \frac{A_2}{R_2} T_{2y} + [\bar{f}_3 + f_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] A_1 A_2,\end{aligned}\tag{2.52}$$

дополнительные проекционные соотношения

$$\begin{aligned}T_{1x} &= (\bar{T}_1 + T_{10}\varepsilon_2) A_2; \\ T_{2y} &= (\bar{T}_2 + T_{20}\varepsilon_1) A_1; \\ T_{1z} &= T_{10}\mathcal{Q}_1 A_2,\end{aligned}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\alpha_1} &= A_1\varepsilon_1 - \frac{A_1}{R_1}w; \\ \frac{dw}{d\alpha_1} &= -A_1\mathcal{Q}_1 + \frac{A_1}{R_1}u; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_1A_2} \frac{dA_2}{d\alpha_1} u + \frac{1}{R_2}w,\end{aligned}$$

и физические соотношения

$$T_1 = T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2); \quad T_2 = T_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

где T_1, T_2 определяются соотношениями (2.43).

Система дополняется кинематическими граничными условиями вида

$$u = u_0; \quad w = w_0$$

и силовыми граничными условиями для системы (2.51)

$$\alpha_2 = const : T_{10} = 0$$

и системы (2.52)

$$\alpha_2 = const : \frac{T_{1x}}{A_2} + T_{10} = T_1^0; \quad \frac{T_{1z}}{A_2} = -Q_1^0.$$

Вводя безразмерные величины аналогично соотношениям (2.32) и дополняя их безразмерными комплексами для усилий и нагрузок основного и дополнительного состояний $\{T_{10} \quad T_{20} \quad \bar{T}_1 \quad \bar{T}_2\}^* = \{T_{10} \quad T_{20} \quad \bar{T}_1 \quad \bar{T}_2\} / Ch_0$ и $\{\bar{f}_1 \quad f_{10}\}^* = \{\bar{f}_1 \quad f_{10}\} / C$ соответственно, можно привести систему уравнений технической теории мягких оболочек к безразмерному виду (звездочки, обозначающие безразмерные величины, в уравнениях опущены). Тогда уравнения равновесия для основного состояния записываются следующим образом:

$$\frac{dT_{10}}{dS} = -\alpha(T_{10} + T_{20}) - f_{10}\gamma R;$$

$$\beta T_{10} + \delta T_{20} = f_{30}\gamma R,$$

а разрешающие соотношения для дополнительного состояния принимают вид

$$\frac{dT_{1x}}{dS} = \alpha T_{2y} + \beta T_{1z} - [\bar{f}_1 + f_{10}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\gamma R;$$

$$\frac{dT_{1z}}{dS} = -\beta T_{1x} - \delta T_{2y} + [\bar{f}_3 + f_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\gamma R;$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dS} &= \chi \varepsilon_1 - \beta w; \\ \frac{dw}{dS} &= -\chi \vartheta_1 + \beta u; \\ T_{1x} &= (\bar{T}_1 + T_{10} \varepsilon_2) \frac{\gamma}{\chi}; \\ T_{2y} &= (\bar{T}_2 + T_{20} \varepsilon_1) \chi; \\ T_{1z} &= T_{10} \vartheta_1 \frac{\gamma}{\chi}; \\ \varepsilon_2 &= \chi (\alpha u + \delta w) / \gamma; \\ T_1 &= T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2); \quad T_2 = T_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2); \\ T_1 &= T_{10} + \bar{T}_1 \quad (1 \Leftrightarrow 2). \end{aligned}$$

2.5. Физические соотношения для гиперупругих материалов

Физические соотношения для рассматриваемых в диссертации высокоэластичных материалов характеризуются упругим потенциалом, который для изотропного материала является функцией трех главных инвариантов тензора деформации Коши-Грина. В литературе, как правило, соотношения для упругих потенциалов представлены функциями главных кратностей удлинений $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. При этом различаются сжимаемые и несжимаемые высокоэластичные материалы. В работе будут рассмотрены три варианта упругих потенциалов для несжимаемых материалов:

- 1) неогуковский [203]:

$$W = C(I_1 - 3), \quad (2.53)$$

- 2) Муни-Ривлина [187]:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3), \quad (2.54)$$

- 3) Йео [212]:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)^3. \quad (2.55)$$

Здесь $C, C_{10}, C_{01}, C_1, C_2, C_3$ - параметры материала оболочки, $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$ - инварианты тензора деформаций Коши-Грина, $\lambda_i = 1 + e_i$; $i = \overline{1,3}$.

Связь функции упругого потенциала с напряжениями для несжимаемого материала имеет вид [144]:

$$\sigma_i = -p + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i},$$

где p – гидростатическое давление.

Приняв, что индекс 3 обозначает направление нормали к срединной поверхности оболочки, получим из условия несжимаемости материала выражение для кратности удлинения в указанном направлении:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (2.56)$$

Используя статическую гипотезу мягких оболочек $\sigma_3 = 0$, найдем гидростатическое давление:

$$p = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}.$$

Тогда

$$\sigma_i = -\lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}. \quad (2.57)$$

Внутренние усилия T_1, T_2 связаны с соответствующими напряжениями σ_1, σ_2 соотношением

$$T_i = \sigma_i \lambda_3 h_0, \quad i = 1, 2,$$

где h_0 - толщина недеформированной оболочки, или, учитывая (2.56),

$$T_i = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \sigma_i h_0, \quad i = 1, 2. \quad (2.58)$$

Используя соотношения (2.53)-(2.55) и (2.57)-(2.58), можно получить следующие выражения для напряжений σ_1, σ_2 и усилий T_1, T_2 для рассматриваемых материалов:

1) неогуковский

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2C\lambda_1^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \cdot \lambda_2^2} \right]; \quad 1 \Leftrightarrow 2; \\ T_1 &= 2Ch_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \cdot \lambda_2^2} \right]; \quad 1 \Leftrightarrow 2,\end{aligned}\tag{2.59}$$

2) Муни-Ривлина

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2\lambda_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) [C_{10} + C_{01} \cdot \lambda_2^2]; \quad 1 \Leftrightarrow 2; \\ T_1 &= 2h_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) [C_{10} + C_{01} \cdot \lambda_2^2]; \quad 1 \Leftrightarrow 2,\end{aligned}\tag{2.60}$$

3) Йео

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2 \cdot \lambda_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) [C_1 + 2C_2 \cdot (I_1 - 3) + 3C_3 \cdot (I_1 - 3)^2]; \quad 1 \Leftrightarrow 2; \\ T_1 &= 2h_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) \cdot [C_1 + 2C_2 \cdot (I_1 - 3) + 3C_3 \cdot (I_1 - 3)^2]; \quad 1 \Leftrightarrow 2,\end{aligned}\tag{2.61}$$

где $I_1 = \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

Следует отметить, что приведенные соотношения справедливы только в случае двухосного напряженного состояния. При выводе физических соотношений для случая одноосного напряженного состояния необходимо учитывать основную гипотезу теории мягких оболочек – предположение о нулевой изгибной жесткости. Эта гипотеза имеет ряд следствий, в частности, неотрицательность усилий в оболочке: $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$. Поэтому в области, где кратности удлинений $\lambda_1 \leq 1$, $\lambda_2 \leq 1$, т.е. где возникают нулевые или отрицательные деформации, усилия T_1 , T_2 равны нулю. В области, где лишь одно из удлинений $\lambda_i \leq 1$, соответствующее усилие $T_i = 0$, а выражения для второго усилия не содержит удлинения λ_i . Последовательность вывода физических соотношений для описанного случая одноосного напряженного

состояния обоснована в [116] и состоит из двух этапов (поясним на примере $T_2 = 0$):

1) Определение связи удлинения λ_2^* , при котором усилие T_2 обращается в ноль, с удлинением λ_1 , из соотношения $T_2 = F_2(\lambda_1, \lambda_2^*) = 0$;

2) Подстановка найденной функции $\lambda_2^* = f(\lambda_1)$ в физическое соотношение $T_1 = F_1(\lambda_1, \lambda_2)$.

Тогда для рассматриваемых в диссертации видов высокоэластичного материала можно получить следующие физические соотношения для случаев одноосного напряженного состояния:

1) неогуковский

$$T_1 = 2h_0\lambda_1^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\lambda_1^3}\right]; \quad T_2 = 0 \text{ при } \lambda_1 > 1, \lambda_2 < \lambda_2^*, \lambda_2^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, 1 \Leftrightarrow 2.$$

2) Муни-Ривлина

$$T_1 = 2h_0\lambda_1^{3/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^3}\right) (C_{10} + C_{01}\lambda_1^{1/2}), \quad T_2 = 0 \text{ при } \lambda_1 > 1, \lambda_2 < \lambda_2^*; \quad \lambda_2^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, 1 \Leftrightarrow 2.$$

3) Йео

$$T_1 = 2h_0\lambda_1^{3/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^3}\right) \left[C_{10} + 2C_{20} \cdot (I_1 - 3) + 3C_{30} \cdot (I_1 - 3)^2 \right], \quad T_2 = 0$$

$$\text{при } \lambda_1 > 1, \lambda_2 < \lambda_2^*; \quad \lambda_2^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}; \quad I_1 = \frac{2}{\lambda_1} + \lambda_1^2, 1 \Leftrightarrow 2.$$

При наличии предварительного напряженного состояния мягкой оболочки физические соотношения выводятся несколько иначе. Пусть оболочка заданной формы получена путем предварительного нагружения из оболочки некоторой неизвестной раскройной формы. За исходное состояние для отсчета деформаций, перемещений и усилий может быть принято как состояние, свободное от напряжений, так и предварительное напряженное состояние. Для материалов оболочек, не имеющих естественного ненапряженного состояния, упругие потенциалы позволяют построить

физические соотношения относительно предварительного состояния. Для материалов, имеющих естественное состояние, учет предварительного напряженного состояния сложнее, так как физические соотношения для расчета оболочки заданной начальной формы строятся по упругому потенциалу, полученному относительно естественного состояния. По этой же причине деформации, входящие в физические соотношения для заданного предварительного напряженного состояния e_i^0 и искомого напряженно-деформированного состояния e_i^* , отличного от него, отсчитываются, как и потенциал, относительно естественного состояния. При этом не имеет значения, относительно какого состояния записываются уравнения равновесия мягкой оболочки.

Следуя (2.58), запишем физические соотношения для заданного предварительного и искомого напряженного состояния:

$$T_1^0 = \frac{h_0}{(1+e_2^0)} \frac{\partial W}{\partial e_1^0} - \frac{h_0}{(1+e_1^0)^2 (1+e_2^0)^2} \frac{\partial W}{\partial e_3^0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2$$

$$T_1 = \frac{h_0}{(1+e_2^*)} \frac{\partial W}{\partial e_1^*} - \frac{h_0}{(1+e_1^*)^2 (1+e_2^*)^2} \frac{\partial W}{\partial e_3^*}, \quad 1 \rightleftharpoons 2$$

В связи с тем, что система уравнений равновесия составляется относительно системы координат, связанной с начальным предварительным напряженным состоянием, в соотношениях нелинейной краевой задачи теории мягких оболочек, кроме физических уравнений для заданного предварительного напряженного состояния и искомого напряженно-деформированного состояния, необходимо использовать уравнения связи деформаций этих двух состояний с системами отсчета, связанными с предварительным и естественным состоянием материала оболочки

$$e_i = \frac{e_i^* - e_i^0}{1 + e_i^0}, \quad i = 1, 2.$$

Величины предварительных натяжений T_1^0, T_2^0 определяются по уравнениям равновесия (2.51).

2.6. Уравнения осесимметричного движения мягких оболочек вращения

Систему дифференциальных уравнений осесимметричного движения мягких оболочек вращения получим, учтя в уравнениях равновесия (2.23)-(2.24) силы инерции в соответствии с принципом д'Аламбера:

$$\begin{aligned}\frac{dT_{1x}}{d\alpha_1} &= \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha_1} T_{2y} + \frac{A_1}{R_1} T_{1z} - f_1^* A_1 A_2 + A_1 A_2 \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{dT_{1z}}{d\alpha_1} &= -\frac{A_1}{R_1} T_{1x} - \frac{A_2}{R_2} T_{2y} + f_3^* A_1 A_2 - A_1 A_2 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (2.62)$$

Здесь ρ - плотность материала оболочки, t – время.

Вводя безразмерный параметр времени соотношением $t^* = t \sqrt{\frac{C}{R_0^2 \rho}}$, а

безразмерную толщину оболочки – соотношением $h^* = h/h_0$, уравнения движения (2.62) можно записать в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\frac{dT_{1x}}{dS} &= \alpha T_{2y} + \beta T_{1z} - f_1^* \gamma R + \gamma h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{dT_{1z}}{dS} &= -\beta T_{1x} - \delta T_{2y} + f_3^* \gamma R - \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (2.63)$$

Тогда полную систему уравнений начально-краевой задачи необходимо дополнить начальными условиями

$$t = 0 \quad u = u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u'_0; \quad w = w_0; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w'_0.$$

2.7. Выводы по главе 2

1) Получены замкнутые системы уравнений неосесимметричного и осесимметричного статического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов при больших деформациях.

- 2) Получены замкнутые системы уравнений технической теории мягких оболочек для случаев неосесимметричного и осесимметричного статического деформирования.
- 3) Получены физические соотношения для неогуковского материала, материалов Муни-Ривлина и Йео как для двухосного, так и для одноосного случаев напряженного состояния.
- 4) Представлены уравнения осесимметричного динамического деформирования мягких оболочек вращения из высокоэластичных материалов при больших деформациях.

Глава 3. Систематизация одномерных физически и геометрически нелинейных краевых задач механики тонкостенных конструкций

3.1. Обоснование необходимости систематизации задач механики тонкостенных конструкций

Как следует из пп. 1.2, 1.3, для исследований статического и динамического поведения мягкооболочечных конструкций характерно обилие методов расчета, зависящих от геометрии оболочки, условий ее нагружения и закрепления. Одной из задач диссертации является разработка алгоритмов расчета мягких оболочек, ориентированных на максимально широкий круг задач их деформирования. Поэтому представляется обоснованным стремление привести разрешающие соотношения, описывающие поведение мягких оболочек, к форме, универсальной для различной геометрии меридиана, физических соотношений и функций нагрузки. Одновременно форма записи системы уравнений должна быть рациональной для последующей записи соотношений алгоритма решения задачи.

Выбирая форму записи, можно выделить четыре способа описания моделей задач механики: скалярный, операторный, тензорный и векторно-матричный. Представленное в гл.2 скалярное описание разрешающих соотношений является наименее структурным, так как зачастую приводит к необходимости построения громоздких выкладок и усложняет формулировку и последующее программирование алгоритмов решения задач [27, 111, 112, 119, 138]. Использование операторного подхода при формулировании разрешающих соотношений и алгоритмов решения, как показала практика расчетов, может привести к принципиальному замедлению скорости сходимости итераций численных процессов и увеличению времени расчета в несколько раз по сравнению с организацией процедуры вычислений, основанной на векторно-матричной формализации [5, 14]. Применение тензорного аппарата, судя по доступной литературе, удобно лишь для

описания моделей задач механики [31, 32, 112], а при разработке алгоритмов решения тензорные формулировки разрешающих соотношений приводятся к скалярным. При этом векторно-матричная формулировка уравнений, описывающих математические модели задач механики, является наиболее часто используемой при необходимости разработки вычислительных алгоритмов благодаря не только своей компактности, но и создаваемой такой формулировкой возможности структурного программирования [9, 33, 34, 60, 101, 113, 118, 135, 138]. Поэтому в диссертации избрано описание выведенных в главе 2 соотношений теории больших деформаций и технической теории мягких оболочек с помощью векторно-матричной формализации как одного из инструментов компьютерного моделирования. При этом необходимо учесть максимально широкий круг особенностей исходных данных рассматриваемых задач: состав конструкции, ее геометрию, материал, условия нагружения, условия закрепления.

Конструкции будем считать однородными по составу: либо стержневыми, либо оболочечными. Материалы элементов конструкций в общем случае могут характеризоваться различными моделями: как линейно упругой, так и нелинейно упругой.

Простейшая формулировка задач деформирования мягкооболочечных конструкций характерна для случая статического осесимметричного нагружения. Динамическое нагружение и/или его неосесимметричность для оболочек существенно увеличивают трудоемкость решения задачи, приводя к необходимости формулировки уравнений в частных производных. Аналогично при осесимметричном по пространственной переменной закреплении конструкции трудоемкость решения задачи существенно меньше, чем при неосесимметричном закреплении. Постановка и решение соответствующих задач требуют лишь описания неосесимметричности нагружения и закрепления или дискретизации времени и связаны с введением блочных векторов и матриц в разрешающие соотношения, а принципиальных методических затруднений не вызывают. Поэтому в

диссертации формализуются только одномерные краевые задачи. При этом независимо от типа конструкций, их состава, геометрии, материала, нагружения и закрепления, при описании исходной задачи используется единая векторно-матричная форма. Так как одним из этапов разрабатываемых для решения задач алгоритмов может являться сведение системы нелинейных уравнений к системе линейных (квазилинейных) уравнений, то при формализации будем учитывать два типа краевых задач: линейные и нелинейные без ограничения на диапазон исследуемых нелинейностей. В каждом из типов задач рассмотрим три формы, считающиеся каноническими:

- 1) двухточечная краевая задача;
- 2) многоточечная неразветвленная краевая задача;
- 3) многоточечная разветвленная краевая задача.

Согласно используемым определениям в многоточечной задаче выделяются узлы двух типов: внешние и внутренние. В узлах первого типа для описания совместности деформирования элементов конструкции используются граничные условия. Во внутренних узлах конструкции сопрягаются как минимум два деформируемых элемента конструкции. Если во всех внутренних узлах конструкции сопрягаются только по два деформируемых элемента, конструкция называется неразветвленной, а условия совместности деформирования во внутренних узлах конструкции имеют вид условий сопряжения вектора разрешающих переменных без разделения обобщенных перемещений и усилий. При наличии в конструкции хотя бы одного внутреннего узла с сопряжением более двух элементов (разветвленная конструкция) необходимо разделить обобщенные перемещения и усилия. Тогда во внутренних узлах конструкции совместность деформирования элементов конструкции описывается двумя типами соотношений:

- 1) условия неразрывности обобщенных перемещений для элементов, сопрягаемых в каждом узле элементов конструкции;

2) условия равновесия обобщенных внутренних сил, возникающих в каждом из сопрягаемых в узле элементов конструкции, и внешних узловых обобщенных сил.

3.2. Канонические формы одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций

При переходе от скалярной к векторно-матричной формулировке разрешающих соотношений теории мягких оболочек будем последовательно вводить формы краевых задач, начиная с простейших, возникающих при формулировке промежуточных этапов алгоритмов решения, и заканчивая наиболее общей формой, характерной для исходной постановки задачи осесимметричного деформирования мягкой оболочки вращения при больших деформациях [65]. Поэтому первая группа канонических форм представляет собой систематизацию одномерных линейных краевых задач:

1) двухточечные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма I)

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x, \boldsymbol{\mu})y + \mathbf{q}(x, \boldsymbol{\mu}), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1)y_1 + \mathbf{b}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1) = 0, \quad 1 \rightleftharpoons 2. \quad (3.2)$$

Здесь и далее $y(x, \boldsymbol{\mu})$ – вектор разрешающих переменных задачи, $\mathbf{A}(x, \boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{B}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1)$ – матрицы коэффициентов, $\mathbf{q}(x, \boldsymbol{\mu})$ – вектор-функция из l компонент заданных обобщенных распределенных нагрузок, $\boldsymbol{\mu}(x)$, $\boldsymbol{\mu}_1$ – вектор-функция и вектор исходных значений параметров задачи, 1 и 2 – индексы значений переменных и аргумента в начальной и конечной точках интервала решения краевой задачи, (3.2) – граничные условия задачи. При этом для простоты записи в функции вектора разрешающих переменных опущена фактическая ее зависимость от полной совокупности функций и векторов исходных значений параметров задачи.

2) многоточечные неразветвленные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма II)

$$\frac{dy_i}{dx} = \mathbf{A}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{y}_i + \mathbf{q}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i), \quad i \in [1, N], \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) \mathbf{y}_{1,1} + \mathbf{b}_{1,1}(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) = \mathbf{0}, \quad 1 \Leftrightarrow 2, 1, 1 \Leftrightarrow N, 2, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{y}_j(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1}(x_{j+1,1}) + \mathbf{C}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}), \quad j \in [1, N-1]. \quad (3.5)$$

Здесь N – число сегментов краевой задачи, условия (3.4) являются граничными, а (3.5) – условия сопряжения сегментов краевой задачи.

3) многоточечные разветвленные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма III)

$$\frac{dy_i}{dx} = \mathbf{A}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{y}_i + \mathbf{q}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i), \quad i \in [1, N], \quad (3.6)$$

$$\mathbf{B}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}) \mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{b}_{j,1}(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}) = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,1}) \mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{D}_m(x_{m,2}) \mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,1}) \mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{D}_m(x_{m,1}) \mathbf{y}_{m,1} = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,2}) \mathbf{y}_{j,2} + \mathbf{D}_m(x_{m,2}) \mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

$$\sum_{m=1}^l \mathbf{D}_m(x_{m,1}) \mathbf{y}_{m,1} + \sum_{n=1}^p \mathbf{D}_n(x_{n,2}) \mathbf{y}_{n,2} + \mathbf{C}_q(x_q, \boldsymbol{\mu}_q) = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Здесь вне знаков суммирования значения индексов j, m, n, l, p, q определяются топологией конкретной краевой задачи и могут быть любыми из диапазона $[1, N]$. Условия (3.7) являются граничными, (3.8)-(3.10) – условия неразрывности обобщенных перемещений, (3.11) – условия равновесия внутренних узлов конструкции.

Распространение области деформирования конструкций на большие перемещения, повороты и деформации в принципе не изменяет структуры соотношений (3.1)-(3.11), но все линейные функции в дифференциальных уравнениях становятся нелинейными. Тогда получаем нелинейные краевые задачи со следующими основными формами дифференциальных уравнений:

1) двухточечные нелинейные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма IV)

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}), \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x_1, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{q}_1) = \mathbf{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2. \quad (3.13)$$

Здесь и далее $\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2$ – вектор-функции заданных граничных условий с числом компонент соответственно p и s , где $p + s = n$; \mathbf{f} – вектор-функция из n компонент правых частей разрешающей системы уравнений.

2) многоточечные неразветвленные нелинейные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма V)

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i), \quad i \in [1, N], \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x_{1,1}, \mathbf{y}_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}, \mathbf{q}_{1,1}) = \mathbf{0}, \quad 1, 1 \rightleftharpoons N, 2, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{y}_{j,2}(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1,1}(x_{j+1,1}) + \mathbf{C}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}), \quad j \in [1, N-1]. \quad (3.16)$$

Здесь, аналогично канонической форме II, условия (3.15) являются граничными, а (3.16) – условия сопряжения сегментов краевой задачи.

3) многоточечные разветвленные нелинейные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма VI)

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i), \quad i \in [1, N], \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_j(x_{j,1}, \mathbf{y}_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}, \mathbf{q}_{j,1}) = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,1})\mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{D}_m(x_{m,2})\mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,1})\mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{D}_m(x_{m,1})\mathbf{y}_{m,1} = \mathbf{0}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,2})\mathbf{y}_{j,2} + \mathbf{D}_m(x_{m,2})\mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

$$\sum_{m=1}^l \mathbf{D}_m(x_{m,1})\mathbf{y}_{m,1} + \sum_{n=1}^p \mathbf{D}_n(x_{n,2})\mathbf{y}_{n,2} + \mathbf{C}_q(x_q, \boldsymbol{\mu}_q) = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Здесь смысл соотношений (3.18)-(3.22) аналогичен смыслу условий (3.7)-(3.11).

Введенные в итоге шесть форм краевых задач считаются каноническими. При этом вектор u искомым переменных, дифференцируемый по координате x , считается в простейшем случае разрешающим, так как как дифференциальные уравнения, так и граничные условия, кроме него и координаты x , зависят только от исходных данных краевой задачи, описываемых векторной функцией $\mu(x)$ и её дискретными значениями на краях μ_1, μ_2 . Векторные величины $\mu(x), \mu_1, \mu_2$, хотя и должны быть заданы до решения краевой задачи, специально выделяются в канонической форме: во-первых, от их конкретных значений зависит обусловленность матрицы Якоби разрешающей системы уравнений краевой задачи, а во-вторых, они являются принципиально необходимыми структурными величинами для параметрического анализа решения краевых задач.

Необходимо подчеркнуть, что в доступной литературе в большинстве работ, использующих рассматриваемое описание моделей задач механики тонкостенных конструкций, формулируются постановки и разрабатываются алгоритмы решения лишь двухточечных краевых задач. Полная совокупность задач, описывающих поведение как неразветвленных, так и разветвленных конструкций, рассмотрена, по-видимому, только в работе [101]. Однако предлагаемая в диссертации каноническая форма III отличается от принятой в работе [101] формы строгим разделением исходных векторно-матричных соотношений, не связанных с граничными условиями (3.7), на два типа: условия неразрывности обобщенных перемещений (3.8)-(3.10) и условия равновесия узлов (3.11).

3.3. Формы одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций с дополнительными алгебраическими соотношениями

На основании введенных шести канонических форм краевых задач могут быть построены еще шесть форм краевых задач с дополнительными алгебраическими соотношениями [65]. Хотя новые формы краевых задач могут быть приведены к каноническим, их выделение является необходимым, так как именно они характерны для рассматриваемых задач деформирования мягкооболочечных конструкций:

1) линейная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x, \boldsymbol{\mu})\mathbf{y} + \mathbf{C}(x, \boldsymbol{\mu})\mathbf{z} + \mathbf{a}(x, \boldsymbol{\mu}), \quad (3.23)$$

$$\mathbf{D}(x, \boldsymbol{\mu})\mathbf{y} + \mathbf{E}(x, \boldsymbol{\mu})\mathbf{z} + \mathbf{d}(x, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{B}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1)\mathbf{y}_1 + \mathbf{G}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1)\mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1) = \mathbf{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{H}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1)\mathbf{y}_1 + \mathbf{K}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1)\mathbf{z}_1 + \mathbf{h}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1) = \mathbf{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2. \quad (3.26)$$

Здесь и далее \mathbf{z} – вектор дополнительных переменных, т.е. переменных, которые не входят под знак производной в дифференциальных уравнениях задачи, а рассчитываются по соотношениям линейной алгебры (3.24). Размерность вектора \mathbf{z} в общем случае отличается от размерности вектора \mathbf{y} . Условия (3.25)-(3.26) являются граничными.

2) линейная многоточечная неразветвленная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{y}_i + \mathbf{C}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) \cdot \mathbf{z}_i + \mathbf{a}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i), \quad i \in [1, N], \quad (3.27)$$

$$\mathbf{D}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{y}_i + \mathbf{E}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{z}_i + \mathbf{d}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{B}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1})\mathbf{y}_{1,1} + \mathbf{G}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1})\mathbf{z}_{1,1} + \mathbf{b}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) = \mathbf{0}, \quad 1, 1 \rightleftharpoons N, 2, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{H}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1})\mathbf{y}_{1,1} + \mathbf{K}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1})\mathbf{z}_{1,1} + \mathbf{h}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) = \mathbf{0}, \quad 1, 1 \rightleftharpoons N, 2, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{y}_j(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1}(x_{j+1,1}) + \mathbf{C}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}), \quad j \in [1, N-1]. \quad (3.31)$$

Здесь (3.29)-(3.30) – граничные условия, а (3.31) – условия сопряжения сегментов краевой задачи.

3) линейная многоточечная разветвленная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)y_i + \mathbf{C}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{z}_i + \mathbf{a}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i), \quad i \in [1, N], \quad (3.32)$$

$$\mathbf{D}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)y_i + \mathbf{E}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{z}_i + \mathbf{d}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) = \mathbf{0}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{B}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1})y_{j,1} + \mathbf{G}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1})\mathbf{z}_{j,1} + \mathbf{b}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}) = \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{H}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1})y_{j,1} + \mathbf{K}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1})\mathbf{z}_{j,1} + \mathbf{h}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}) = \mathbf{0}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,1})y_{j,1} + \mathbf{D}_m(x_{m,2})y_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,1})y_{j,1} + \mathbf{D}_m(x_{m,1})y_{m,1} = \mathbf{0}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,2})y_{j,2} + \mathbf{D}_m(x_{m,2})y_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (3.38)$$

$$\sum_{m=1}^l \mathbf{D}_m(x_{m,1})y_{m,1} + \sum_{n=1}^p \mathbf{D}_n(x_{n,2})y_{n,2} + \mathbf{C}_q(x_q, \boldsymbol{\mu}_q) = \mathbf{0}. \quad (3.39)$$

Здесь (3.34)-(3.35) – граничные условия, а смысл соотношений (3.36)-(3.39) аналогичен смыслу условий (3.8)-(3.11).

Для нелинейных задач дополнительные соотношения как в дифференциальных уравнениях, так и в граничных условиях заменяются на нелинейные функциональные соотношения:

1) нелинейная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}, \alpha), \quad (3.40)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}, \alpha) = \mathbf{0}, \quad (3.41)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1(x_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1, \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{q}_1, \alpha) = \mathbf{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2. \quad (3.42)$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор-функция нелинейных дополнительных алгебраических соотношений, а остальные обозначения аналогичны принятым выше.

2) нелинейная многоточечная неразветвленная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha), \quad i \in [1, N], \quad (3.43)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) = \mathbf{0}, \quad (3.44)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x_{1,1}, \mathbf{y}_{1,1}, \mathbf{z}_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}, \mathbf{q}_{1,1}, \alpha) = \mathbf{0}, \quad 1, 1 \rightleftharpoons N, 2, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{y}_{j,2}(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1,1}(x_{j+1,1}) + \mathbf{C}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}), \quad j \in [1, N-1]. \quad (3.46)$$

3) нелинейная многоточечная разветвленная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha), \quad i \in [1, N],$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\Psi}_j(x_{j,1}, \mathbf{y}_{j,1}, \mathbf{z}_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}, \mathbf{q}_{j,1}, \alpha) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,1})\mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{D}_m(x_{m,2})\mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,1})\mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{D}_m(x_{m,1})\mathbf{y}_{m,1} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D}_j(x_{j,2})\mathbf{y}_{j,2} + \mathbf{D}_m(x_{m,2})\mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0},$$

$$\sum_{m=1}^l \mathbf{D}_m(x_{m,1})\mathbf{y}_{m,1} + \sum_{n=1}^p \mathbf{D}_n(x_{n,2})\mathbf{y}_{n,2} + \mathbf{C}_q(x_q)\mathbf{a}_q(x_q, \boldsymbol{\mu}_q)\alpha = \mathbf{0}.$$

Отметим, что формы краевых задач с дополнительными алгебраическими соотношениями применительно к нелинейным краевым задачам позволяют описать поведение исследуемых в диссертации конструкций из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях.

3.4. Приведение разрешающей системы уравнений теории мягких оболочек к канонической форме

Соотношения (2.33)-(2.41) теории больших деформаций мягких оболочек и (2.52) технической теории мягких оболочек вместе с граничными условиями образуют нелинейную двухточечную краевую задачу. Для ее

записи в векторной форме введем вектор разрешающих переменных, имеющий одинаковую запись для обеих рассматриваемых систем уравнений,

$$\mathbf{y} = \{T_{1x}; T_{1z}; u; w\}^T,$$

и вектор дополнительных переменных, имеющий вид для соотношений (2.33)-(2.41)

$$\mathbf{z} = \{\varepsilon_1; e_1; e_2; \mathcal{Q}_1; T_{2y}; T_1^*; T_2^*; T_1; T_2\}^T,$$

а для соотношений (2.52)

$$\mathbf{z} = \{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \mathcal{Q}_1; T_{2y}; T_1; T_2; \bar{T}_1; \bar{T}_2\}^T.$$

Также введем функцию из двух компонент заданных обобщенных распределенных нагрузок $\mathbf{q}(x)$ и вектор исходных данных $\boldsymbol{\mu}$.

Тогда соотношения (2.33)-(2.41) запишутся в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}); \quad (3.47)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (3.48)$$

а граничные условия (2.42) – в виде

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1, \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{q}_1) = \mathbf{0}, \quad 1 \iff 2. \quad (3.49)$$

Здесь для уравнений теории больших деформаций мягких оболочек

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \begin{cases} \alpha T_{2y} + \beta T_{1z} - f_1^* \gamma R \\ -\beta T_{1x} - \delta T_{2y} + f_3^* \gamma R \\ \chi \varepsilon_1 - \beta w \\ -\chi \mathcal{Q}_1 + \beta u \end{cases},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -e_2 + \chi(\alpha u + \delta w) / \gamma \\ T_1(1+e_1)(1+e_2) \frac{\gamma}{\chi} - T_{1x}(1+\varepsilon_1) - T_{1z} \mathcal{G}_1 \\ T_1^*(1+\varepsilon_1) \frac{\gamma}{\chi} - T_{1x} \\ T_2^*(1+e_2) \chi - T_{2y} \\ T_1^* \mathcal{G}_1 \frac{\gamma}{\chi} - T_{1z} \\ T_1(1+e_2) - T_1^*(1+e_1) \\ T_2(1+e_1) - T_2^*(1+e_2) \\ \frac{\partial T_1}{\partial e_1} e_1 + \frac{\partial T_1}{\partial e_2} e_2 - T_1 \\ \frac{\partial T_2}{\partial e_1} e_1 + \frac{\partial T_2}{\partial e_2} e_2 - T_2 \end{pmatrix}$$

Для соотношений технической теории, в соответствии с рекомендациями [114], примем $\bar{f}_1 = \bar{f}_3 = 0$. Тогда

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \begin{cases} \alpha T_{2y} + \beta T_{1z} - f_{10}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma R \\ -\beta T_{1x} - \delta T_{2y} + f_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma R; \\ \chi \varepsilon_1 - \beta w \\ -\chi \mathcal{G}_1 + \beta u \end{cases};$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \left(T_1 - \frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon_2} \varepsilon_2 \right) / \frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon_1} - 1 \\ \chi(\alpha u + \delta w) / \gamma - \varepsilon_2 \\ \frac{\chi T_{1z}}{\gamma T_{10}} - \mathcal{G}_1 \\ (\bar{T}_2 + T_{20} \varepsilon_1) \chi - T_{2y} \\ T_{10} + \bar{T} - T_1 \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon_2} \varepsilon_2 - T_2 \\ T_{1x} \frac{\chi}{\gamma} - T_{10} \varepsilon_2 - \bar{T}_1 \\ T_{20} + \bar{T}_2 - T_2 \end{pmatrix}$$

Примем вектор исходных данных $\boldsymbol{\mu} = \{\alpha; \beta; \chi; \delta; \gamma; R; C_1; \dots; C_N\}^T$, где $C_1; \dots; C_N$ - физические постоянные материала, число которых определяется рассматриваемой моделью материала; вектор нагрузок для соотношений теории больших деформаций $\mathbf{q} = \{f_1^*; f_3^*\}^T$, для технической теории - $\mathbf{q} = \{f_{10}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2); f_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\}^T$, а функции $\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2$ определяются граничными условиями каждой конкретной задачи.

Таким образом, разрешающие уравнения теории мягких оболочек при больших деформациях приводятся к канонической форме IV с дополнительными алгебраическими соотношениями.

Т.к. задача деформирования мягкой оболочки в общем случае может являться плохо обусловленной, для ее численного решения необходимо использование метода сегментации. При этом меридиан оболочки разбивается на сегменты, что с точки зрения математической формулировки приводит двухточечную краевую задачу к многоточечной неразветвленной. Тогда для записи разрешающих соотношений, характеризующих осесимметричное деформирование мягких оболочек при больших деформациях, даже в случае однородного по форме меридиана оболочки необходимо использовать каноническую форму V нелинейной многоточечной неразветвленной краевой задачи с дополнительными алгебраическими соотношениями.

При рассмотрении задач динамики уравнения движения (2.63), (2.35)-(2.41) также приводятся к виду канонической формы IV с дополнительными алгебраическими соотношениями, а в правую часть дифференциального уравнения вводится вектор сил инерции:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) + M \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2},$$

где M – матрица масс.

Аналогично задачам статики, при рассмотрении составной (многосегментной) оболочки, уравнения движения сводятся к виду

канонической формы V с дополнительными алгебраическими соотношениями, а матрица масс M_i составляется для каждого сегмента.

Таким образом, многообразие формулировок задач осесимметричного деформирования мягких оболочек вращения из высокоэластичных материалов сводится лишь к двум формам нелинейных краевых задач с дополнительными алгебраическими соотношениями. Для последующей формулировки вычислительного алгоритма выберем наиболее рациональную форму, которая позволяла бы учесть максимально особенности рассматриваемых в работе конструкций, при этом не усложняя чрезмерно и необоснованно вид разрешающих соотношений. Таковой является каноническая форма V с дополнительными алгебраическими соотношениями.

3.5. Выводы по главе 3

- 1) Предложена систематизация постановок одномерных краевых линейных и нелинейных задач механики, характерных для моделирования поведения мягкооболочечных конструкций.
- 2) Показано, что многообразие постановок задач осесимметричного деформирования мягких оболочек вращения из высокоэластичных материалов сводится лишь к двум предложенным в рамках систематизации каноническим формам.

Глава 4. Исследование осесимметричного статического деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов

4.1. Базовый алгоритм решения задач статического деформирования мягких оболочек вращения

Среди широкого круга возможных алгоритмов решения многоточечной нелинейной краевой задачи (3.43)-(3.46) выберем метод дифференцирования по параметру, впервые предложенный Д.Ф. Давиденко для решения систем нелинейных алгебраических уравнений [43]. При этом в соотношениях нелинейных краевых задач в соответствии с шаговой концепцией решения параметризуется внешняя нагрузка. Расчетная нагрузка определяется соотношением $\mathbf{q}^* = \alpha \mathbf{q}$, где $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x)$ считается заданной нагрузкой или её распределением, а α – либо заданным параметром нагрузки при продолжении решения нелинейной краевой задачи по параметру нагрузки, либо искомым значением параметра нагрузки при продолжении решения по другому параметру.

Для решения задачи (3.43)-(3.46) продифференцируем её соотношения по некоторому параметру продолжения решения T , выбор которого будет оговорен ниже:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\mathbf{y}}_i}{dx_i} &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \dot{\mathbf{z}}_i + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i \dot{\alpha}, \quad i \in [1, N], \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{y}_i} \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{z}_i} \dot{\mathbf{z}}_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i \dot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по параметру T .

Выражая скорость вектора дополнительных переменных по параметру $\dot{\mathbf{z}}_i = \frac{d\mathbf{z}_i}{dT}$ из соотношений (4.1), получаем квазилинейную краевую задачу в скоростях переменных по параметру T

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{a}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) \dot{\alpha} \quad (4.2)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_1^*(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) \dot{\mathbf{y}}_{1,1} + \mathbf{b}_{1,1}^*(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) \dot{\alpha} = \mathbf{0}, \quad x_{1,1} \rightleftharpoons x_{N,2} \quad (4.3)$$

и условиями сопряжения сегментов

$$\dot{\mathbf{y}}_j(x_{j,2}) = \dot{\mathbf{y}}_{j+1}(x_{j+1,1}) + \dot{\alpha} \mathbf{d}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}); \quad j \in [1, N-1]. \quad (4.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{y}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \mathbf{y}_i}, \\ \mathbf{a}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i, \\ \mathbf{B}_1^*(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{y}_1} \right)_1 - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_1}{\partial \mathbf{y}_1} \right)_1, \\ \mathbf{b}_1^*(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)_1 \mathbf{q}_{1,1} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)_1 \mathbf{q}_{1,1}. \end{aligned}$$

Таким образом, V форма нелинейной краевой задачи с дополнительными соотношениями при составлении алгоритма решения, основанного на использовании метода дифференцирования по параметру, приводится к квазилинейной канонической форме II относительно скоростей разрешающих переменных в итерационном процессе метода. Аналогично IV и VI канонические формы нелинейных краевых задач могут быть приведены к I и III квазилинейным каноническим формам. Таким образом, минимально возможный круг алгоритмов решения одномерных задач МДТТ связан с шестью введенными каноническими формами, а при программировании алгоритмов решения всех рассматриваемых типов краевых задач базовыми являются лишь три программы для решения линейных задач, соответствующих первым трем каноническим формам.

При решении полученной краевой задачи (4.2)-(4.4) канонической формы II разобьем вектор разрешающих переменных в начале первого сегмента $\dot{\mathbf{y}}_{1,1}$ на две составляющих

$$\dot{\mathbf{y}}_{1,1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_{11,1} \\ \dot{\mathbf{y}}_{12,1} \end{bmatrix},$$

где $\dot{\mathbf{y}}_{11,1}$ - известный подвектор из граничных условий левого края. Тогда вектор $\dot{\mathbf{y}}_{1,1}$ связан с вектором $\dot{\mathbf{y}}_{12,1}$ соотношением

$$\dot{\mathbf{y}}_{1,1} = \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{y}}_{12,1} + \mathbf{h}_1 \dot{\alpha},$$

где $\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}$; $\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, а \mathbf{B}_{11} , \mathbf{B}_{12} - блоки матрицы \mathbf{B}_1 , причем

матрица \mathbf{B}_{11} предполагается квадратной и невырожденной.

Используя метод начальных параметров для всех сегментов нелинейной краевой задачи, запишем

$$\dot{\mathbf{y}}_i(x_i) = \mathbf{M}_i(x_i) \dot{\mathbf{y}}_{i2,1} + \mathbf{H}_i \dot{\alpha}, \quad i \in [1, N] \quad (4.5)$$

Подстановка соотношений (4.5) в соотношения (4.2) приводит к системе N однородных матричных

$$\frac{d\mathbf{M}_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i^* \mathbf{M}_i; \quad i \in [1, N] \quad (4.6)$$

и N неоднородных векторных задач Коши

$$\frac{d\mathbf{H}_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i^* \mathbf{H}_i + \mathbf{a}_i^*; \quad i \in [1, N] \quad (4.7)$$

Начальные условия для задач (4.6)-(4.7) для первого сегмента имеют вид соответственно

$$\mathbf{M}_{1,1} = \mathbf{L}_1; \quad (4.8)$$

$$\mathbf{H}_{1,1} = \mathbf{h}_1 \quad (4.9)$$

Для расчета матриц \mathbf{M}_i и вектора \mathbf{H}_i на последующих сегментах используем метод ортогонализации Годунова [28]. Решение задач Коши (4.6), (4.8) и (4.7), (4.9) позволяет определить значения матрицы $\mathbf{M}_{1,2}$ и вектора $\mathbf{H}_{1,2}$ в конце первого сегмента. Эти величины ортогонализируются с использованием метода Грама-Шмидта по соотношениям

$$[\mathbf{M}_{i,2} \quad \mathbf{H}_{i,2}] = [\mathbf{K}_i \quad \mathbf{r}_i] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_i & \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad i \in [1, N-1], \quad (4.10)$$

где $\boldsymbol{\Omega}_i$, $\boldsymbol{\omega}_i$ - матрица и вектор коэффициентов ортогонализации, \mathbf{K}_i - ортогонализированная матрица $\mathbf{M}_{i,2}$, \mathbf{r}_i - ортогонализированный вектор $\mathbf{H}_{i,2}$.

Подставляя в условия (4.4) соотношения (4.5) и (4.10), получаем условия сопряжения $N-1$ сегментов следующего вида:

$$\mathbf{K}_i \boldsymbol{\Omega}_i \dot{\mathbf{y}}_{i2,1} + (\mathbf{K}_i \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{r}_i) \dot{\alpha} = \mathbf{M}_{i+1,1} \dot{\mathbf{y}}_{i+1,2,1} + \mathbf{H}_{i+1,1} \dot{\alpha} + \dot{\alpha} \mathbf{d}_{i+1,1}; \quad i \in [1, N-1]. \quad (4.11)$$

Принимая условия для формирования прогоночных матриц $\mathbf{M}_{i+1,1}$ и векторов $\mathbf{H}_{i+1,1}$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i+1,1} &= \mathbf{K}_i, \\ \mathbf{H}_{i+1,1} &= \mathbf{r}_i - \mathbf{d}_{i+1,1}, \quad i \in [1, N-1]. \end{aligned}$$

получаем из (4.11) систему квазилинейных алгебраических уравнений по расчету векторов $\dot{\mathbf{y}}_{i2,1}$:

$$\boldsymbol{\Omega}_i \dot{\mathbf{y}}_{i2,1} + \boldsymbol{\omega}_i \dot{\alpha} = \dot{\mathbf{y}}_{i+1,2,1}; \quad i \in [1, N-1]. \quad (4.12)$$

После расчета значений $\mathbf{M}_{N,2}$ и $\mathbf{H}_{N,2}$ граничные условия правого края (4.3) приобретают вид

$$\mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,2} \dot{\mathbf{y}}_{N2,1} + \dot{\alpha} [\mathbf{B}_2^* \mathbf{H}_{N,2} + \mathbf{b}_{2,2}^*] = \mathbf{0}. \quad (4.13)$$

Для замыкания разрешающей системы квазилинейных алгебраических уравнений (4.12)-(4.13) по расчету векторов $\dot{\mathbf{y}}_{N2,1}$ и параметра $\dot{\alpha}$ используется условие связи компонент векторов $\mathbf{y}_{i2,1}$ и параметра нагрузки α с параметром T продолжения решения нелинейной краевой задачи. При этом в зависимости от выбора указанного условия связи, т.е. вида параметра продолжения $T = T(\mathbf{y}_{i2,1}, \alpha)$, возникает ряд особенностей решения системы уравнений (4.12)-(4.13). “Простейший” подход к выбору вида параметра T , предложенный Н.В. Валишвили [12], связан с реализацией продолжения по наиболее изменяющейся компоненте. Однако реализация данной идеи в многосегментных задачах является действительно простейшей только при

продолжении решения по параметру нагружения α . Тогда $T = \alpha$, а сама система алгебраических уравнений (4.12)-(4.13) полностью совпадает с таковой для линейных краевых задач. Если же вместо α используется произвольная j -тая компонента $y_{i2,1}^{(j)}$ произвольного вектора $\mathbf{y}_{i2,1}$, то

$$T = y_{i2,1}^{(j)},$$

а структура разрешающей системы квазилинейных алгебраических уравнений изменяется принципиально: в ней появляется столбец, в общем случае, переменного положения. Причем в структуре разрешающей системы место столбца, соответствующего $y_{i2,1}^{(j)}$ -той компоненте среди совокупности векторов $\mathbf{y}_{i2,1}$, $i \in [1, N]$ и параметра нагружения α , занимает столбец, соответствующий параметру нагружения α , образованный векторами $\boldsymbol{\omega}_i$, $i \in [1, N-1]$ (рис. 4.1). Для решения системы квазилинейных алгебраических уравнений, имеющей в своей структуре столбец переменного положения, необходимо использовать специальный метод прогонки.

$$\left(\begin{array}{cccccccc} \boldsymbol{\Omega}_1 & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_2 & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\Omega}_{N-1} & -\mathbf{E} & \boldsymbol{\omega}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{V}_2^* \mathbf{M}_{N,2} & \mathbf{V}_2^* \mathbf{H}_{N,2} + \mathbf{b}_{2,2}^* \end{array} \right)$$

Рис. 4.1. Структура матрицы системы алгебраических уравнений при использовании параметра продолжения в форме, предложенной Н.В.

Валишвили

Исключение появления столбца переменного положения в матрице системы уравнений (4.12)-(4.13) возможно при выборе в качестве параметра продолжения решения T длины кривой множества решений исходной нелинейной системы (3.43)-(3.44). Такая форма параметра продолжения была впервые предложена И.И. Воровичем, В.Ф. Зипаловой [13], а в наиболее

обоснованном виде представлена В.И. Шалашилиным [33]. В общем случае для описываемого алгоритма она имеет вид

$$T = \sum_{i=1}^m \mathbf{y}_{i2,1}^T \dot{\mathbf{y}}_{i2,1} + \alpha \dot{\alpha} \quad (4.14)$$

Тогда при дифференцировании соотношения (4.14) по T получаем уравнение, замыкающее систему (4.12)-(4.13)

$$\sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{y}}_{i2,1}^T \dot{\mathbf{y}}_{i2,1} + \dot{\alpha}^2 = 1 \quad (4.15)$$

и структура матрицы системы разрешающих алгебраических уравнений (4.15) имеет вид, представленный на рис. 4.2.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_2 & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{\Omega}_{N-1} & -\mathbf{E} & \boldsymbol{\omega}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,2} & \mathbf{B}_2^* \mathbf{H}_{N,2} + \mathbf{b}_{2,2}^* \\ \dot{\mathbf{y}}_{12,1}^T & \dot{\mathbf{y}}_{22,1}^T & \dot{\mathbf{y}}_{32,1}^T & \dots & \dot{\mathbf{y}}_{N-1,2,1}^T & \dot{\mathbf{y}}_{N2,1}^T & \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

Рис. 4.2. Структура матрицы системы алгебраических уравнений при использовании параметра продолжения в форме, предложенной В.И.

Шалашилиным

$$\mathbf{\Omega}_i \dot{\mathbf{y}}_{i2,1} + \boldsymbol{\omega}_i \dot{\alpha} = \dot{\mathbf{y}}_{i+1,2,1}; \quad i \in [1, N-1]. \quad (4.16)$$

После расчета значений $\mathbf{M}_{N,2}$ и $\mathbf{H}_{N,2}$ граничные условия правого края (4.3) приобретают вид

$$\mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,2} \dot{\mathbf{y}}_{N2,1} + \dot{\alpha} [\mathbf{B}_2^* \mathbf{H}_{N,2} + \mathbf{b}_{2,2}^*] = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

Анализ структуры матриц разрешающих систем алгебраических уравнений, представленных на рис. 4.1, 4.2, подсказывает с целью упрощения решения последних ограничить выбор компонент, включаемых в параметр продолжения T и считать при выборе вида параметра продолжения решения в форме, предложенной Н.В. Валишвили,

$$T = y_{N2,1,j} \quad (4.18)$$

а при выборе вида параметра T в форме, предложенной В.И. Шалашилиным,

$$T = \mathbf{y}_{m2,1}^T \dot{\mathbf{y}}_{m2,1} + \alpha \dot{\alpha}. \quad (4.19)$$

Тогда в последнем случае структура матрицы разрешающих алгебраических уравнений имеет вид, представленный на рис. 4.3.

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} & \Omega_2 & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Omega_{N-1} & -\mathbf{E} & \boldsymbol{\omega}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,2} & \mathbf{B}_2^* \mathbf{H}_{N,2} + \mathbf{b}_{2,2}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{y}}_{N2,1}^T & \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

Рис. 4.3. Структура матрицы системы алгебраических уравнений при рациональном выборе параметра продолжения в форме, предложенной В.И. Шалашилиным

Тогда при выборе параметра продолжения в виде (4.18) вместо использования специальных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицей, содержащей столбец переменного положения, последовательно решаются системы уравнений (4.13), (4.12). При выборе параметра T в виде (4.19) замкнутая система квазилинейных алгебраических уравнений для расчета скорости параметра нагрузки $\dot{\alpha}$ и вектора $\dot{\mathbf{y}}_{N2,1}$ последнего сегмента имеет вид

$$\mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,2} \dot{\mathbf{y}}_{N2,1} + \dot{\alpha} [\mathbf{B}_2^* \mathbf{H}_{N,2} + \mathbf{b}_{2,2}^*] = \mathbf{0};$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{N2,1}^T \dot{\mathbf{y}}_{N2,1} + \dot{\alpha}^2 = 1.$$

Последующий расчет векторов скоростей $\dot{\mathbf{y}}_{i2,1}$ по параметру T по уравнениям (4.16) позволяет найти по соотношениям (4.5) совокупность значений векторов $\dot{\mathbf{y}}_i(x_i)$, $i \in [1, N]$. При этом значения аргументов x_i связаны с заранее заданным числом N_i участков разбиения совокупности

интервалов $x_i \in [x_{i,1}; x_{i,2}]$, $i \in [1, N]$ на части для иллюстрации решения исходной нелинейной краевой задачи (3.43)-(3.46).

Совокупность векторов скоростей дополнительных переменных $\dot{\mathbf{z}}_i(x_i)$ рассчитывается по соотношениям (4.1).

Начальные задачи расчета соответствующих значений переменных имеют дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_{i,j}}{dT} &= \dot{\mathbf{y}}_{i,j}(\mathbf{y}_{i,j}, x_{i,j}, T), & i \in [1, N], j \in [1, N_i] \\ \frac{d\mathbf{z}_{i,j}}{dT} &= \dot{\mathbf{z}}_{i,j}(\mathbf{y}_{i,j}, x_{i,j}, T), \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \dot{\alpha}(\mathbf{y}_{i,j}, T). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь индекс i соответствует номеру сегмента краевой задачи, j - номеру точки $x_{i,j}$ на i -том сегменте.

Задача Коши (4.20) является принципиально нелинейной, причем с правой частью, известной только в дискретной форме. Поэтому для ее решения используются методы решения задач Коши с правыми частями, заданными на дискретной сетке переменного шага.

Взаимосвязанность задач (4.2)-(4.4) и (4.20) при использовании неявного метода решения задач Коши (4.20) приводит к следующему итерационному алгоритму решения:

1) расчет скоростей изменения переменных $\dot{\mathbf{y}}_i^{(K,0)}$, $\dot{\mathbf{z}}_i^{(K,0)}$, $\dot{\alpha}^{(K,0)}$ решением задачи (4.2)-(4.4) при прогнозированных значениях самих переменных и параметра продолжения решения $\mathbf{y}_i^{(K,0)}$, $\mathbf{z}_i^{(K,0)}$, $\alpha^{(K,0)}$ (здесь K - номер шага по параметру, 0 - номер итерации);

2) расчет переменных задачи и параметра продолжения решения путем решения задач Коши (4.20) для использования полученных значений $\mathbf{y}_i^{(K,1)}$, $\mathbf{z}_i^{(K,1)}$, $\alpha^{(K,1)}$ как скорректированных значений при последующем решении (4.2)-(4.4) на следующей итерации;

3) расчет переменных $\mathbf{y}_i^{(K,M)}$, $\mathbf{z}_i^{(K,M)}$ и параметра $\alpha^{(K,M)}$ на текущем K -том шаге по параметру продолжается до достижения необходимой близости переменных $\mathbf{y}_i^{(K,M)}$ на M -той и $(M-1)$ -ой итерациях.

При этом близость оценивается следующим образом. В конце каждого сегмента запоминаются значения вектора разрешающих переменных $\mathbf{y}_i^{(K,M)}$, $\mathbf{y}_i^{(K,M-1)}$, $i \in [1, N]$. Для каждого сегмента рассчитывается относительная погрешность определения вектора $\mathbf{y}_i^{(K,M)}$ по соотношению

$$\delta_i = \frac{\|\mathbf{y}_i^{(K,M)} - \mathbf{y}_i^{(K,M-1)}\|}{\|\mathbf{y}_i^{(K,M)}\|},$$

где символом $\|\cdot\|$ обозначена чебышевская норма вектора, т.е. величина, равная максимальному из всех значений модулей каждой компоненты вектора. Близость векторов, определенных на двух ближайших итерациях, считается удовлетворительной, если на всех сегментах выполняется условие $\delta_i > \delta_{\max}$. При проведении вычислений далее везде было принято $\delta_{\max} = 0.01$.

В связи с зависимостью скорости сходимости от точности прогноза решения для текущего значения параметра Н.В. Валишвили предложил назначить величину шага по параметру в зависимости от скорости сходимости процесса коррекции подобно тому, как изменяется шаг численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений в простейших алгоритмах неявных схем [12]. Если сходимость достигается за число итераций, менее заданного контрольного числа, шаг по параметру удваивается, если сходимость не достигается за максимально допустимое принятое число итераций I_{\max} , шаг уменьшается вдвое. При вычислениях было принято $I_{\max} = 6$.

Описанный алгоритм решения задач статического деформирования мягкооболочечных конструкций при больших перемещениях и деформациях реализован в программном комплексе для ЭВМ, написанном в среде Matlab [74].

4.2. Особенности построения численного решения задач о деформировании мягких оболочек при больших деформациях

Для решения краевых задач по выбранным соотношениям с использованием изложенного в п. 4.1 алгоритма функции правых частей \mathbf{f} системы (3.43) и матрицы $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$, $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$, $\partial \Phi / \partial \mathbf{y}$, $\partial \Phi / \partial \mathbf{z}$ должны быть непрерывны в области интегрирования, а матрица $\partial \Phi / \partial \mathbf{z}$ должна быть невырождена. Но для задач теории мягких оболочек при отсутствии предварительного напряженно-деформированного состояния последнее условие не выполняется, т.к. матрица $\partial \Phi / \partial \mathbf{z}$ имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1+\varepsilon_1) & 1+e_1 & 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1^* \frac{\gamma}{\chi} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\varepsilon_1)\gamma}{\chi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_2^* \chi & 0 & 1 & 0 & -(1+e_2)\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1^* \frac{\gamma}{\chi} & 0 & g_1 \frac{\gamma}{\chi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_1^* & T_1 & 0 & 0 & -(1+e_1) & 0 & 1+e_2 & 0 \\ 0 & -T_2 & T_2^* & 0 & 0 & 0 & 1+e_2 & 0 & -(1+e_1) \\ 0 & \frac{\partial T_1}{\partial e_1} & \frac{\partial T_1}{\partial e_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial T_2}{\partial e_1} & \frac{\partial T_2}{\partial e_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Из анализа структуры представленной матрицы видно, что при отсутствии предварительного напряженного состояния все компоненты пятой строки обращаются в нули. Таким образом, для задач теории мягких оболочек расчет матрицы $(\partial \Phi / \partial \mathbf{z})^{-1}$ на первом шаге решения по предложенному выше алгоритму затруднителен. В отличие от расчета моментных оболочек, в данном случае на первом шаге по параметру тривиальное решение применять нельзя. Поэтому на начальном участке построения решения системы уравнений (3.43)-(3.46) для мягких оболочек

необходима регуляризация решения, состоящая в построении разрешающей системы уравнений теории мягких оболочек с решением, близким к решению исходной задачи, но с невырожденной матрицей $\partial\Phi/\partial\mathbf{z}$. В частности, таковой является система уравнений технической теории мягких оболочек, сформулированная в п. 2.4. Приняв для указанной системы вектор дополнительных переменных в виде $\mathbf{z} = \{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \mathcal{G}_1; T_{2y}; T_1; T_2; \bar{T}_1; \bar{T}_2\}^T$, получим

$$\partial\Phi/\partial\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 & -\left(\frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon_2} / \frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon_1}\right) & 0 & 0 & \left(\frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon_1}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{20}\chi & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon_2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -T_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Как видно, представленная матрица $\partial\Phi/\partial\mathbf{z}$ системы уравнений технической теории мягких оболочек вырожденной не является. Поэтому в проведенных в диссертации вычислениях для регуляризации решения на первых шагах по параметру продолжения решения использовалась указанная система разрешающих соотношений.

Для получения достоверного решения исходной нелинейной краевой задачи (3.43)-(3.46) существенное значение имеет точность решения каждой из квазилинейных задач (4.2)-(4.4) и задачи Коши (4.20) в отдельности. Получение численного решения необходимой точности является сложной самостоятельной задачей, имеющей мало общего с построением алгоритма решения. Анализ влияния различных параметров вычислительного алгоритма или свойств уравнений теории мягких оболочек на результаты расчета в аналитической форме трудно осуществим. Поэтому для исследования этих

вопросов используем численные эксперименты на ЭВМ при решении задачи о раздувании полусферы с различными условиями закрепления края [64, 81, 91]. Решение этой задачи при подвижном закреплении края возможно не только численно, но и аналитически, что делает ее хорошим тестовым примером в большом диапазоне деформаций.

Рассмотрим оболочку из неогуковского материала, физические свойства которого описываются соотношениями (2.60), нагруженную равномерно распределенным по меридиану давлением.

Для иллюстрации получаемых результатов из всей информации о напряженно-деформированном состоянии оболочки используем только графики, отражающие взаимосвязь раздувающего оболочку давления от прогиба ее полюса. Во всех расчетах отношение радиуса недеформированной полусферы к ее толщине принято равным $R_0/h_0 = 200$. Интегрирование квазилинейной краевой задачи (3.42)-(3.44) проводится методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Одним из первых вопросов, связанным с особенностями расчета мягких оболочек, является вопрос назначения предварительного давления p_0 , соответствующего основному напряженному состоянию при использовании системы уравнений технической теории мягких оболочек в качестве регуляризирующей. Подбор величины предварительного давления проводится численно. На первом шаге решения за основное напряженное состояние принимается состояние, соответствующее значению давления p_0 , уменьшение которого не изменяет диаграмму нагружения. Следует отметить, что назначение чрезмерно малой величины предварительного давления ($p_0 \leq 10^{-5}$) может привести к отсутствию сходимости коррекции решения на первом же шаге. На рис. 4.4 показаны диаграммы нагружения полусферы, закрепленной на экваторе подвижным шарниром, полученные для разных значений p_0 за одно и то же число шагов по параметру продолжения решения, выбранному в соответствии с подходом Н.В. Валишвили. Графики,

полученные для величин $p_0 = 10^{-3}$ и $p_0 = 10^{-4}$, практически совпадают, при этом соответствуя кривой, описываемой представленной в работе [37] аналитической зависимостью $p(w_0)$.

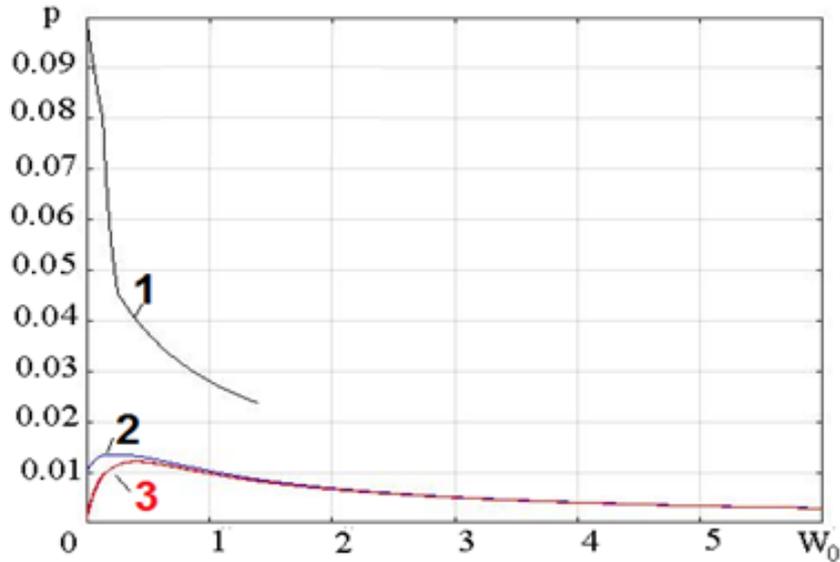


Рис. 4.4. Диаграмма нагружения полусферы с подвижным закреплением экватора при значениях предварительного давления: 1 - $p_0 = 10^{-1}$, 2 - $p_0 = 10^{-2}$, 3 - $p_0 = 10^{-3}$, $p_0 = 10^{-4}$

Важным вопросом, определяющим получение однозначного решения нелинейной задачи, является вопрос выбора параметра продолжения. Из множества существующих подходов к этому выбору рассмотрим для сравнения два, следуя Н.В. Валишвили [12] и В.И. Шалашилину [33]. При этом в первом случае в качестве параметра продолжения выберем прогиб в точке меридиана оболочки, соответствующей началу последнего сегмента, $T = w_{N,1}$, во втором случае

$$T = (T_{1x,N,1} \dot{T}_{1x,N,1} + w_{N,1} \dot{w}_{N,1}) + \alpha \dot{\alpha}.$$

Здесь индекс N обозначает номер последнего сегмента меридиана оболочки, а индекс 1 соответствует началу сегмента.

Сравнение решений, получаемых при описанном выборе параметров продолжения решения задачи, проведем по скорости сходимости итерационных процессов. В реализации используемого алгоритма принято описанное в п. 4.1 увеличение шага по параметру продолжения в случае, если итерационный процесс сходится за некоторое заданное вычислителем количество итераций. Увеличению шага по параметру будет соответствовать увеличение определяемого в расчетах прогиба оболочки при ее раздувании. Поэтому примем в качестве графической иллюстрации скорости сходимости итерационных процессов зависимость величины прогиба полюса оболочки, полученной на данном шаге по параметру T , от номера этого шага (кривые аппроксимируют функции целочисленного аргумента). На рис. 4.5 представлены соответствующие графики. Кривая 1 соответствует подходу В.И. Шалашилина, кривая 2 – подходу Н.В. Валишвили. Характерной является значительно большая эффективность первого из подходов, позволяющего за 60 шагов по параметру продолжения получить значение безразмерного, т.е. отнесенного к радиусу недеформированной оболочки, прогиба полюса $w_0 = 34,8$, в то время как при использовании второго подхода за указанное число шагов удалось получить значение прогиба лишь $w_0 = 0,585$.

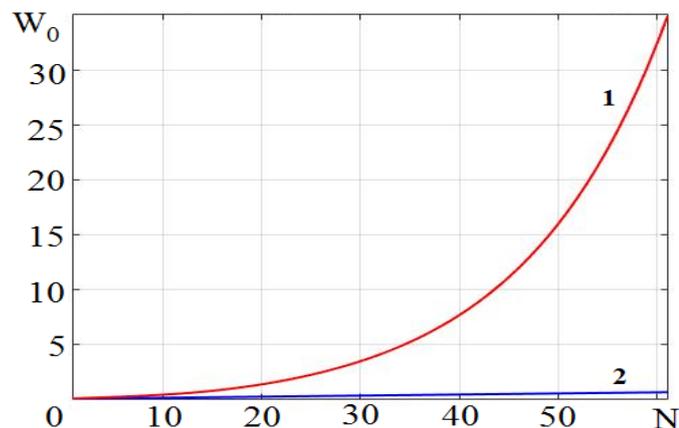


Рис. 4.5. Иллюстрация скорости сходимости шагового процесса при использовании параметра продолжения в соответствии с подходами В.И. Шалашилина (кривая 1) и Н.В. Валишвили (кривая 2)

Необходимо отметить, что погрешность получения диаграммы нагружения с использованием подхода В.И. Шалашилина, при прочих одинаковых значениях параметров вычислительного алгоритма, не превышает допустимых для инженерного расчета пределов (рис. 4.6), однако несколько выше погрешности, получаемой при использовании подхода Н.В. Валишвили. Для построения графиков рис. 4.6 проводилось сравнение результатов численного решения с представленной в работе [37] аналитической зависимостью $p(w_0)$.

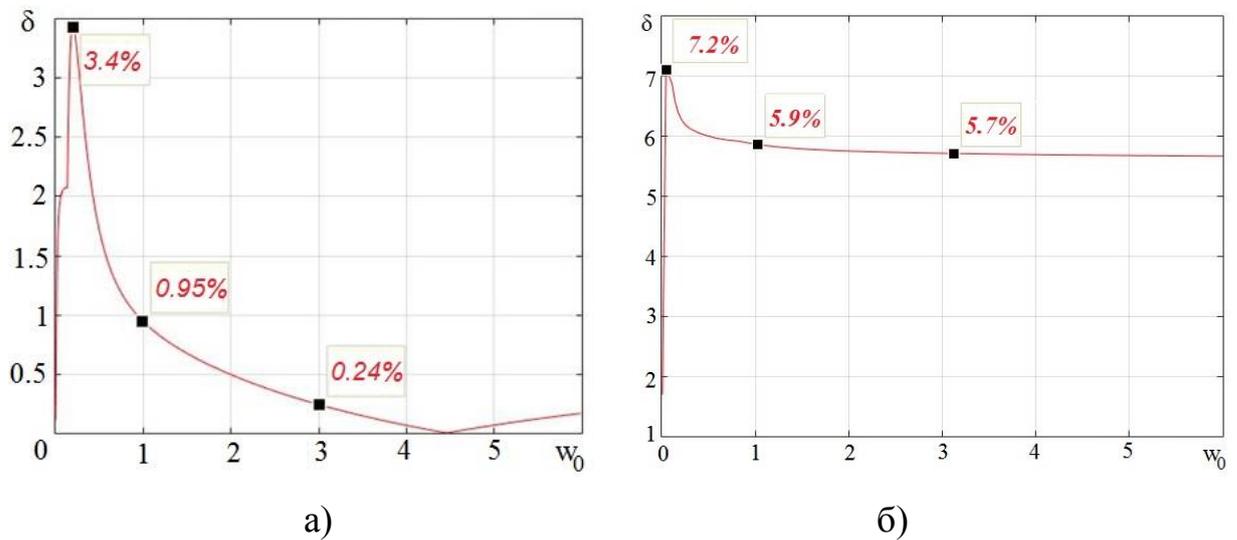


Рис. 4.6. Погрешность решения задачи о раздувании полусферы с подвижным закреплением экватора при использовании параметра продолжения в соответствии с подходами Н.В. Валишвили (а) и В.И. Шалашилина (б)

Повысить точность расчетов можно уменьшением задаваемых перед проведением вычислений начального и максимального значений шага по параметру продолжения. При этом скорость сходимости шагового процесса замедляется, но даже в этом случае можно добиться получения решений одинаковой точности за меньшее время при использовании подхода В.И. Шалашилина. При этом для обоих подходов число коррекций решения нелинейной задачи (4.20) превышало единицу лишь на первых пяти шагах по

параметру, изменяясь в пределах от 2 до 4 в зависимости от назначения ряда других параметров вычислительного процесса, рассматриваемых ниже.

Благодаря высокой скорости сходимости итерационных процессов подхода В.И. Шалашилина к выбору параметра продолжения, при исследовании поведения решения рассматриваемой задачи удалось впервые получить значения удлинений оболочки $e_1 \approx e_2 = 1.2 \cdot 10^8$ (рис. 4.7) с точностью 5%, причем последовавшая потеря устойчивости счета обусловлена, по-видимому, не недостатками вычислительного алгоритма, а особенностями машинной арифметики. Число сошедшихся шагов по параметру при этом $N=280$.

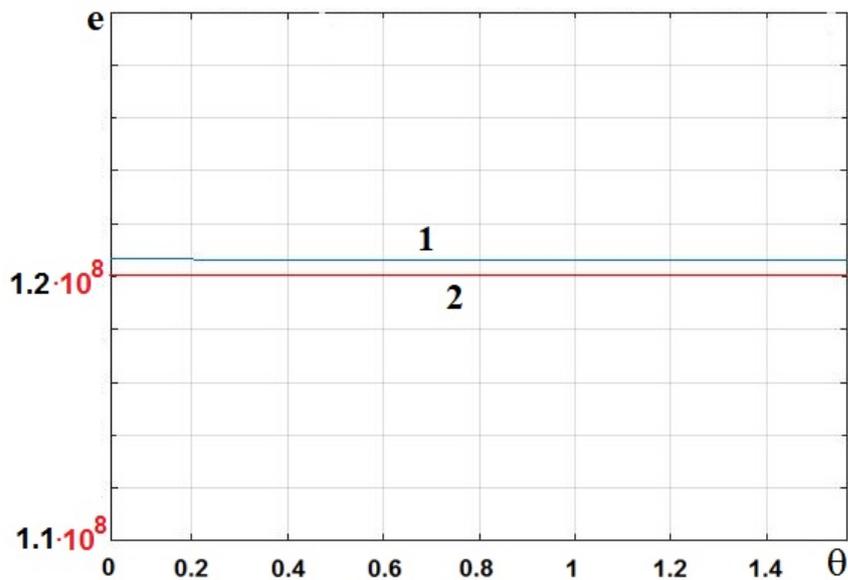


Рис. 4.7. Распределение деформаций полусферы по меридиану (1 - e_1 , 2 - e_2), полученное до момента потери устойчивости счета

Далее приводимые в тексте графики соответствуют расчетам, полученным с использованием подхода Н.В. Валишвили, если не указано иное.

Существенной характеристикой вычислительного алгоритма, определяющей корректное получение решения задачи (3.43)-(3.46), является величина начального шага по параметру продолжения. На рис. 4.8

представлена диаграмма нагружения полусферы при значениях начального шага $\Delta T_0 = 10^{-1}$ (кривая 1) и $\Delta T_0 = 10^{-2}$ (кривая 2). При этом кривая 2 соответствует аналитическому решению задачи.

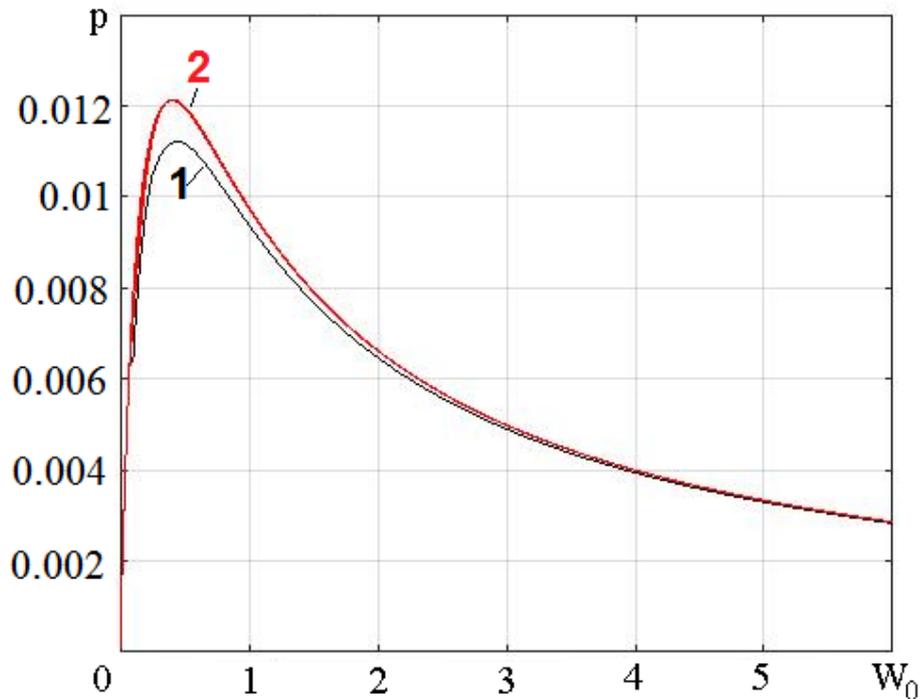


Рис. 4.8. Иллюстрация влияния выбора начального шага по параметру на решение задачи раздувания полусферы (кривая 1 – $\Delta T_0 = 10^{-1}$, кривая 2 – $\Delta T_0 = 10^{-2}$)

Из графиков видно, что слишком большое значение начального шага может привести к значительному искажению результатов. Вместе с тем в результате численных экспериментов было установлено, что дальнейшее уменьшение начального шага в диапазоне $10^{-2} \div 10^{-5}$ позволяет получить решение с одинаковой точностью без существенного замедления скорости сходимости итерационных процессов.

Более значительное влияние на результат решения оказывает ограничение величины шага по параметру продолжения, изменяемой в зависимости от скорости сходимости итерационных процессов в соответствии с описанным в п. 4.1 подходом. Для выявления важности этого

фактора проведены расчеты при значениях ΔT_{\max} соответственно номерам кривых 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} , 1 (рис. 4.9), при этом было принято $\Delta T_0 = 10^{-3}$. Кривая 2 соответствует точному решению.

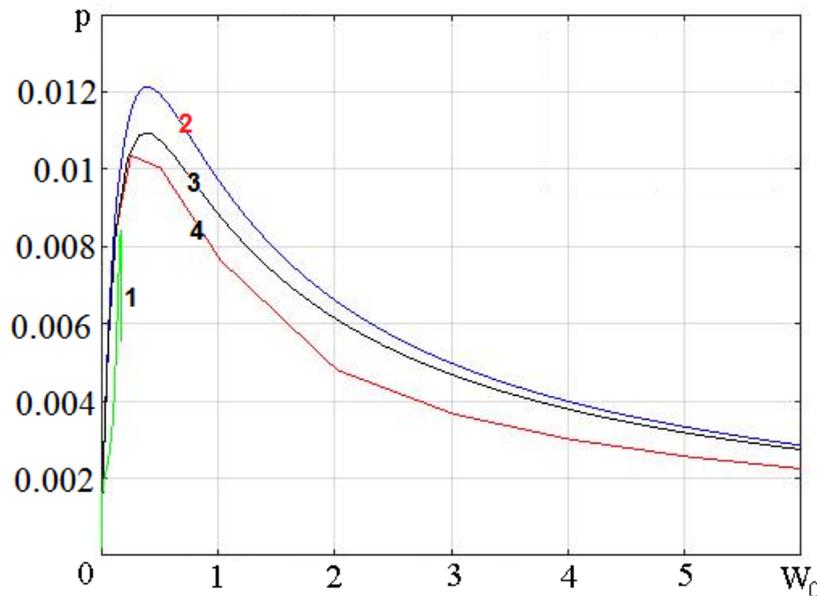


Рис. 4.9. Иллюстрация влияния выбора максимального шага по параметру на решение задачи раздувания полусферы (1 – $\Delta T_{\max} = 10^{-3}$, 2 – $\Delta T_{\max} = 10^{-2}$, 3 – $\Delta T_{\max} = 10^{-1}$, 4 – $\Delta T_{\max} = 1$)

Обрыв кривой 1 на рис. 4.9 обусловлен потерей устойчивости счета при назначении слишком малого значения максимального шага по параметру. При этом чрезмерное его увеличение существенно снижает точность решения.

Решение задачи о раздувании полусферы с подвижно закрепленным экватором при варьировании таких параметров, как число шагов по параметру, на которых проводится регуляризация, и способ расчета предварительного напряженного состояния, показало весьма несущественное их влияние на результат. Однако такой вывод оказался приемлемым лишь в случае указанного закрепления экватора полусферы при выборе параметра продолжения решения в соответствии с подходом Н.В. Валишвили.

Приведем результаты, полученные при решении задачи о раздувании полусферы с неподвижно закрепленным экватором. При этом при использовании регуляризующих уравнений технической теории мягких оболочек рассмотрим три способа расчета основного напряженного состояния полусферы:

1) По уравнениям равновесия, составленным для недеформированного состояния оболочки: $T_1^0 = \frac{p_0 R_0}{2}$; $1 \rightleftharpoons 2$;

2) По уравнениям равновесия, составленным для деформированного состояния оболочки: $T_1^0 = \frac{p_0 R^*}{2}$; где $R^* = R_0(1 + e_1)$; $1 \rightleftharpoons 2$;

3) По физическим соотношениям (2.60), в которых деформации определяются по геометрическим параметрам деформированной предварительным давлением p_0 оболочки в зоне полюса, т.е. $T_1^0 = T_1(e_1^0; e_2^0)$; $1 \rightleftharpoons 2$.

Результаты решения задачи, соответствующие каждому из указанных способов, приведены на рис. 4.10, 4.11, 4.12 соответственно. На каждом рисунке приведены диаграммы нагружения, полученные при числе шагов по параметру, на которых проводилась регуляризация системы уравнений, равном 5, 15, 50 и 600 соответственно номерам кривых. При этом 600 шагов по параметру соответствуют использованию системы уравнений технической теории мягких оболочек на всём интервале решения задачи.

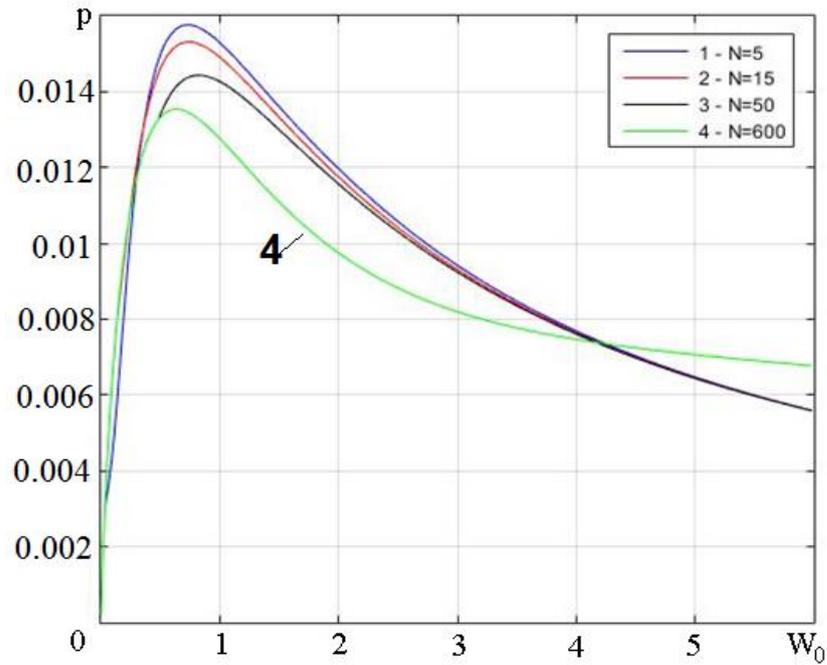


Рис. 4.10. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия недеформированной полусферы с неподвижно закрепленным экватором (параметр продолжения Н.В. Валишвили)

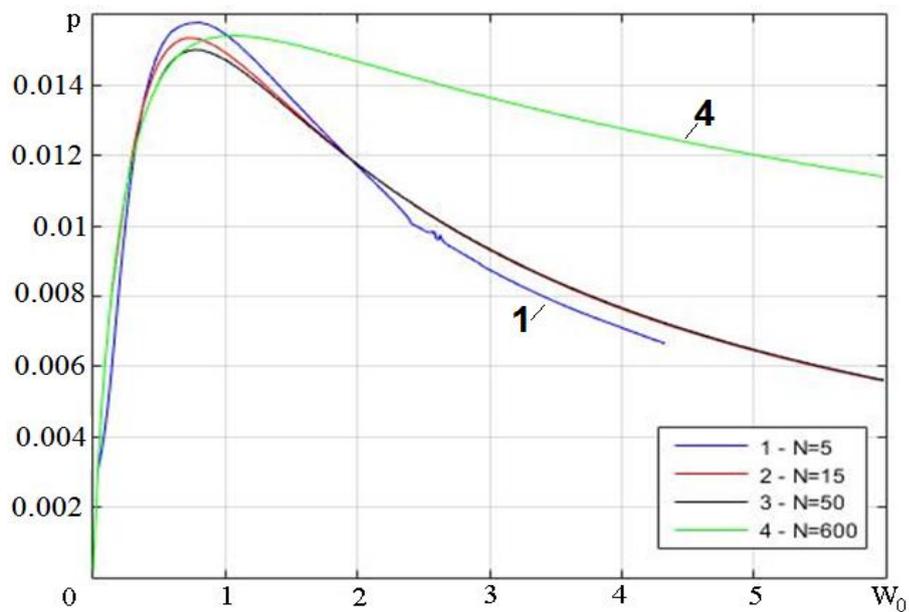


Рис. 4.11. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия деформированной полусферы с неподвижно закрепленным экватором (параметр продолжения Н.В. Валишвили)

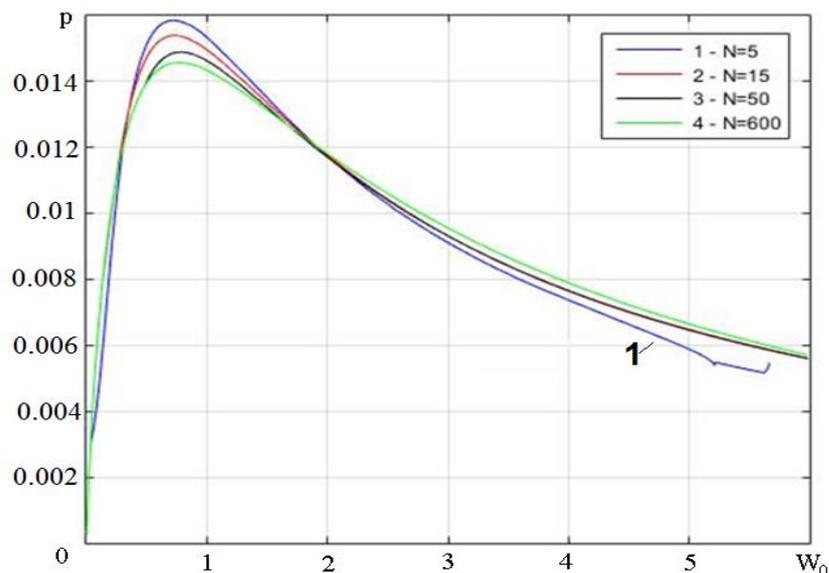


Рис. 4.12. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по физическим соотношениям для полусферы с неподвижно закрепленным экватором (параметр продолжения Н.В. Валишвили)

Обрыв кривых 1 на рис. 4.11, 4.12 характеризует потерю устойчивости счета.

Анализируя рис. 4.10-4.12, можно сделать следующие выводы [64]:

1) Результаты решения задачи о раздувании полусферы с неподвижно закрепленным экватором зависят от способа расчета основного напряженного состояния и числа шагов по параметру, на которых проводится регуляризация системы уравнений;

2) Слишком малое число шагов регуляризации может привести к потере устойчивости счета, а неоправданно большое – к неверному решению задачи;

3) Так как наименьший разброс кривых на приведенных графиках характерен для расчета основного напряженного состояния по физическим соотношениям, следует рекомендовать именно этот способ при решении задач теории мягких оболочек при больших деформациях.

Необходимо подчеркнуть, что, судя по проведенным исследованиям, при решении сильно нелинейных задач следует проверять применимость любых ранее выработанных рекомендаций в каждом конкретном случае. Так, описанное выше предположение о независимости результатов решения задачи о раздувании полусферы с подвижным закреплением экватора от способа регуляризации соотношений теории мягких оболочек может оказаться неверным при использовании подхода В.И. Шалашилина к выбору параметра продолжения решения. Графики, подтверждающие указанный тезис, представлены на рис. 4.13-4.15 для трех указанных выше способов расчета основного напряженного состояния оболочки в порядке, аналогичном представлению графиков на рис. 4.10-4.12. На каждом рисунке приведены диаграммы нагружения, полученные при числе шагов по параметру, на которых проводилась регуляризация системы уравнений, равном 5, 15 и 37 соответственно номерам кривых. Здесь 37 шагов по параметру продолжения, выбранному с использованием подхода В.И. Шалашилина, соответствуют использованию системы уравнений технической теории мягких оболочек на всём интервале решения задачи. Цифрой 4 обозначена диаграмма нагружения для аналитического решения задачи.

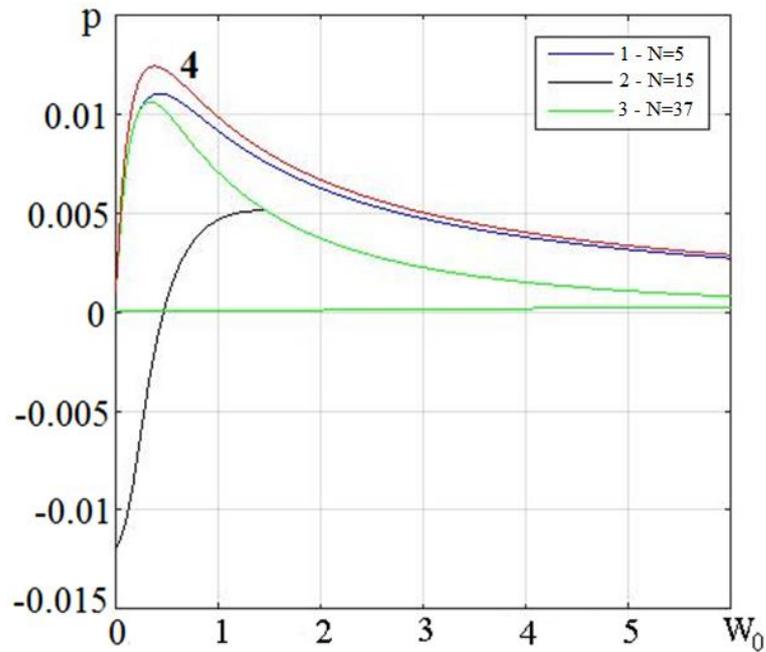


Рис. 4.13. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия недеформированной полусферы с подвижно закрепленным экватором (параметр продолжения В.И. Шалашилина)

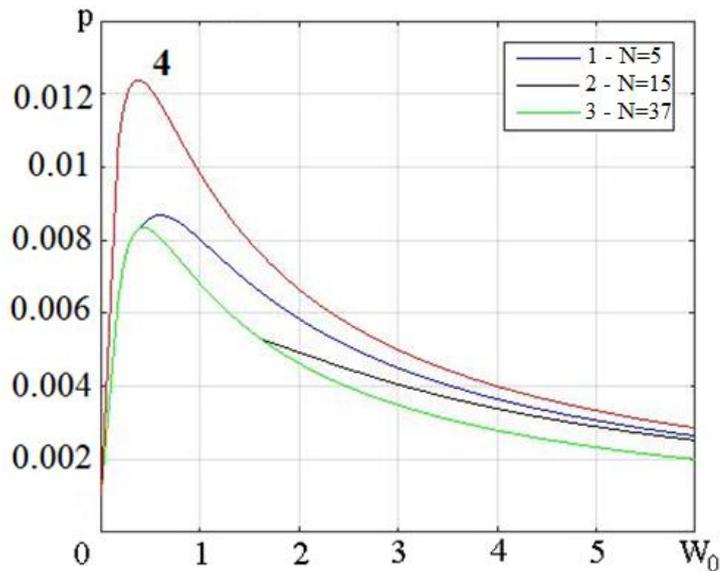


Рис. 4.14. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия деформированной полусферы с подвижно закрепленным экватором (параметр продолжения В.И. Шалашилина)

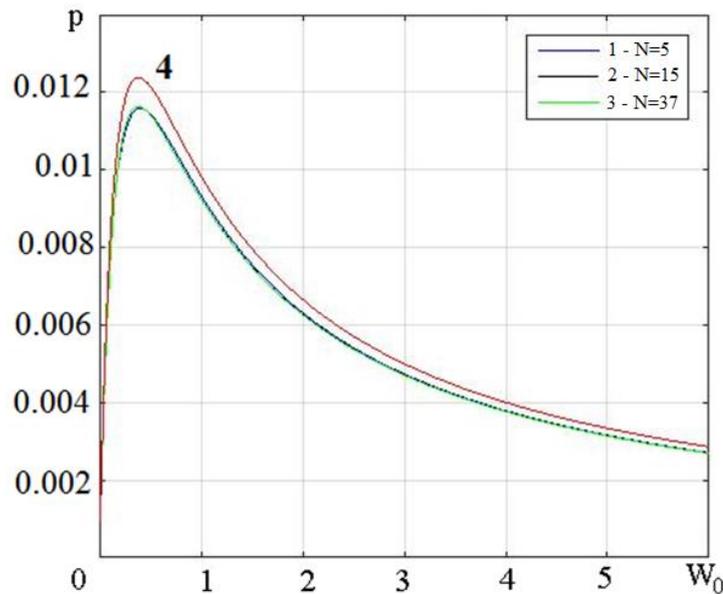


Рис. 4.15. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по физическим соотношениям для полусферы с подвижно закрепленным экватором (параметр продолжения В.И. Шалашилина)

Очевидно, что при выборе параметра продолжения в форме, предложенной В.И. Шалашилиным, выводы об отсутствии влияния способа регуляризации соотношений теории мягких оболочек на результаты решения рассматриваемой задачи, сделанные при выборе параметра продолжения в соответствии с подходом Н.В. Валишвили, несправедливы. При этом прослеживается характер поведения решения, аналогичный выявленному по рис. 4.10-4.12: наименьший разброс кривых при разном числе шагов по параметру, на которых проводится регуляризация, соответствует способу расчета основного напряженного состояния по физическим соотношениям, что позволяет считать указанный способ наиболее корректным для использования при решении задач.

Таким образом, исследование влияния различных параметров вычислительного алгоритма и исходных данных задачи на результат решения даже простейших задач теории мягких оболочек при больших деформациях выявляет существенную, трудно предсказуемую его зависимость от рассмотренных параметров. По-видимому, аналитическое исследование

этого влияния неосуществимо, и при решении задач анализа напряженно-деформированного состояния, сопровождающегося большими перемещениями и деформациями, нельзя ограничиваться одним способом реализации выбранного алгоритма решения либо назначения его параметров. Необходимо исследование поведения решения задачи в широком диапазоне изменения возможных параметров алгоритма, а при отсутствии аналитического решения показателем достоверности получаемых результатов может являться их повторяемость при различных величинах назначаемых параметров.

4.3. Использование метода автоматической сегментации для повышения точности решения задач статического деформирования мягких оболочек из гиперупругих материалов

В п. 4.2 назначение величин параметров вычислительного алгоритма, при которых становится возможным получение корректного решения задачи, проводится методом перебора. Вместе с тем представляется возможным внести в этот процесс большую определенность при использовании метода автоматической сегментации при решении квазилинейной краевой задачи (4.2)-(4.4) [61, 62, 77]. Принцип работы данного алгоритма заключается в проверке выполнения равенства, доказанного в теории дифференциальных уравнений.

В теории дифференциальных уравнений при изучении свойств решений однородных уравнений наряду с исходными системами

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x)y \quad (4.21)$$

используются сопряженные системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\mathbf{A}^T(x)y, \quad (4.22)$$

а также вводится понятие нормированной интегральной матрицы $\mathbf{M}(x)$ однородной системы дифференциальных уравнений, определяемой как частное решение такой системы, найденное при начальном условии $\mathbf{M}(x_0) = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} - единичная матрица.

Доказано [120], что если в начальной точке расчета нормированных интегральных матриц $\mathbf{M}(x)$, $\mathbf{N}(x)$ систем (4.21), (4.22) выполнено условие их ортогональности

$$\mathbf{M}^T(x_0)\mathbf{N}(x_0) = \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, то оно должно быть выполнено и при любом значении аргумента интегрирования x_i систем (4.21), (4.22). Основываясь на этом факте, в диссертации предлагается использовать для обеспечения необходимой точности расчета матрицы $\mathbf{M}_i(x_i)$ контроль неортогональности нормированных интегральных матриц исходной и сопряженной систем

$$\left\| \mathbf{M}_i^T(x_i)\mathbf{N}_i(x_i) - \mathbf{E} \right\| \leq \delta,$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, δ – принятое допустимое значение нормы неортогональности нормированных интегральных матриц.

Данный подход применяется на этапе препроцессирования задачи. Для этого в каждой точке интервала интегрирования вычисляются нормированные интегральные матрицы исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи $\mathbf{M}(x)$ и $\mathbf{N}(x)$ при начальных условиях $\mathbf{M}(x_0) = \mathbf{E}$, $\mathbf{N}(x_0) = \mathbf{E}$ и определяется первая норма произведения этих матриц. Если в какой-либо точке интервала интегрирования эта норма отличается от единицы на величину, большую некоторой заданной вычислителем погрешности δ , то эта точка считается концом текущего сегмента интервала интегрирования. Тогда следующая точка интервала считается началом нового сегмента, начальные значения матриц $\mathbf{M}(x)$, $\mathbf{N}(x)$ в этой точке снова задаются равными единичной матрице, и продолжается их вычисление по прежней системе

дифференциальных уравнений, расчет первой нормы их произведения и контроль отклонения этой нормы от единицы.

Таким образом, число условий сопряжения сегментов в случае изначальной постановки задачи как многоточечной неразветвленной (каноническая форма II) увеличивается, а каноническая форма I переходит в каноническую форму II с автоматически определяемым числом сегментов.

Для исследования результатов применения метода автоматической сегментации рассмотрим задачу о раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением цилиндра, закрепленного на торцах скользящей заделкой [69]. Пусть длина цилиндра $L_0 = 2R_0$, где R_0 - радиус недеформированного цилиндра. Рассмотрим материал Муни-Ривлина с соотношением коэффициентов $\frac{C_{01}}{C_{10}} = 0.00715$. Пусть отношение радиуса к толщине недеформированного цилиндра $R_0/h_0 = 100$. Аналитическое решение рассматриваемой задачи представлено в [196]. Выберем в качестве параметров обезразмеривания $R_0 = L_0$, $C = C_{10}$, где C_{10} - параметр материала Муни-Ривлина.

На рис. 4.16 показан график, демонстрирующий зависимость первой нормы произведения $\Delta = \left\| \mathbf{M}_i^T(x_i) \mathbf{N}_i(x_i) \right\|$ фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений от координаты точки меридиана оболочки при использовании метода автоматической сегментации задачи при допустимой погрешности расчета указанной нормы $\delta = 5\%$. Полученное рекомендуемое число сегментов, на которые следует разбить интервал интегрирования, составляет $N_{segm} = 17$. Отметим, что интервал интегрирования на рис. 4.16 соответствует половине длины цилиндра, т.к. условия нагружения и закрепления цилиндра симметричны.

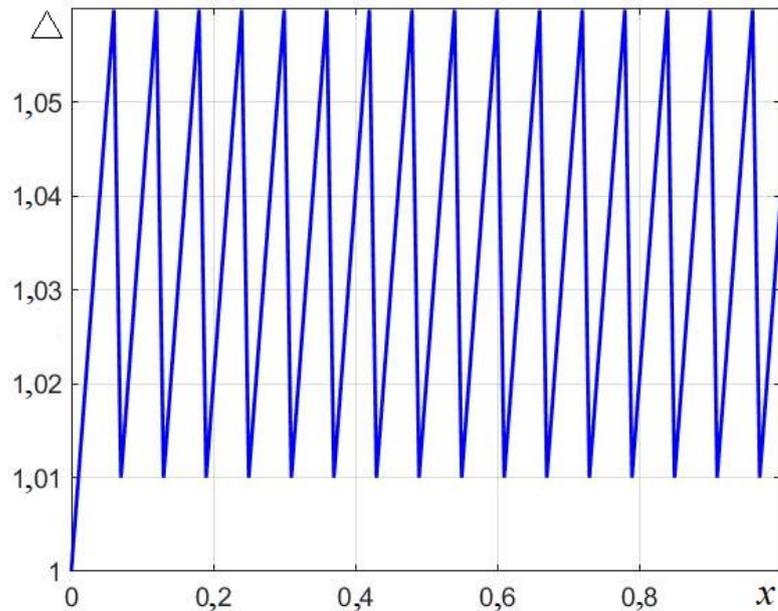


Рис. 4.16. Зависимость первой нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений Δ от координаты точки меридиана при выполнении автоматической сегментации интервала интегрирования

Выполним сравнение результатов численного решения задачи с аналитическим на основании анализа диаграммы нагружения цилиндра. Для проведения расчетов выберем следующие варианты сегментации интервала интегрирования: а) сегментация отсутствует ($N_{segm}=1$); б) $N_{segm}=2$; в) $N_{segm}=10$; г) автоматическая сегментация ($N_{segm}=17$).

На рис. 4.17 представлена диаграмма нагружения цилиндра, полученная при расчетах по указанным четырем вариантам сегментации цилиндра за 30 шагов по параметру продолжения решения задачи. Полученные графики визуально неотличимы, за исключением расчета при числе сегментов $N_{segm}=2$ (максимальная величина радиального перемещения превышает полученную в остальных рассмотренных вариантах сегментации за указанное число шагов по параметру в 3,5 раза).

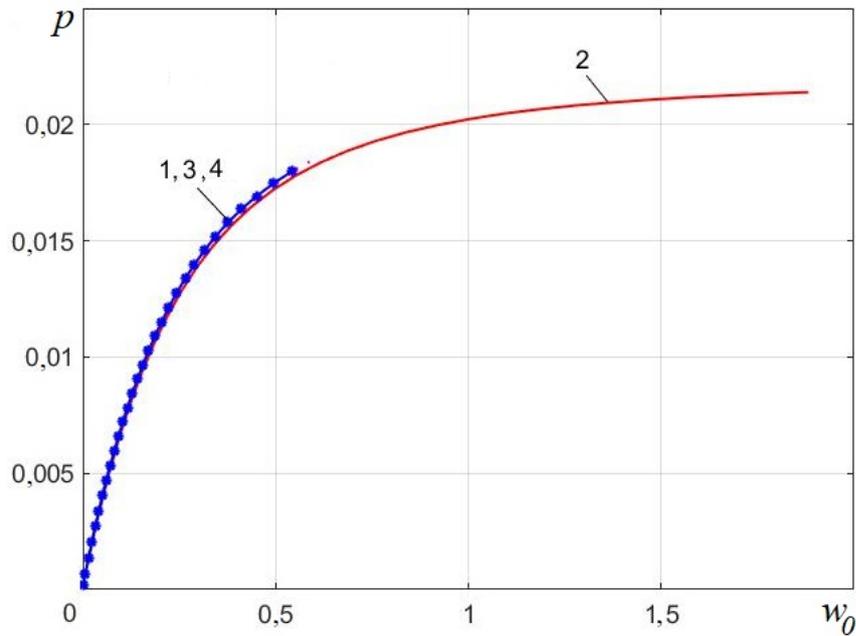


Рис. 4.17. Диаграмма нагружения цилиндра (1 – $N_{\text{segm}}=1$; 2 – $N_{\text{segm}}=2$; 3 – $N_{\text{segm}}=10$; 4 – автоматическая сегментация)

На рис. 4.18 представлены зависимости погрешности получения диаграммы нагружения δ от номера N шага по параметру продолжения решения задачи для рассмотренных вариантов сегментации. Для построения графиков проводилось сравнение результатов численно определенного на N -ом шаге значения давления p_N с получаемым аналитически по соотношению работы [196] значением давления $p_a(w_{0,N})$, где $w_{0,N}$ - величина прогиба цилиндра на рассматриваемом шаге по параметру:
$$\delta_N = \frac{|p_N - p_a(w_{0,N})|}{p_a(w_{0,N})} \cdot 100.$$

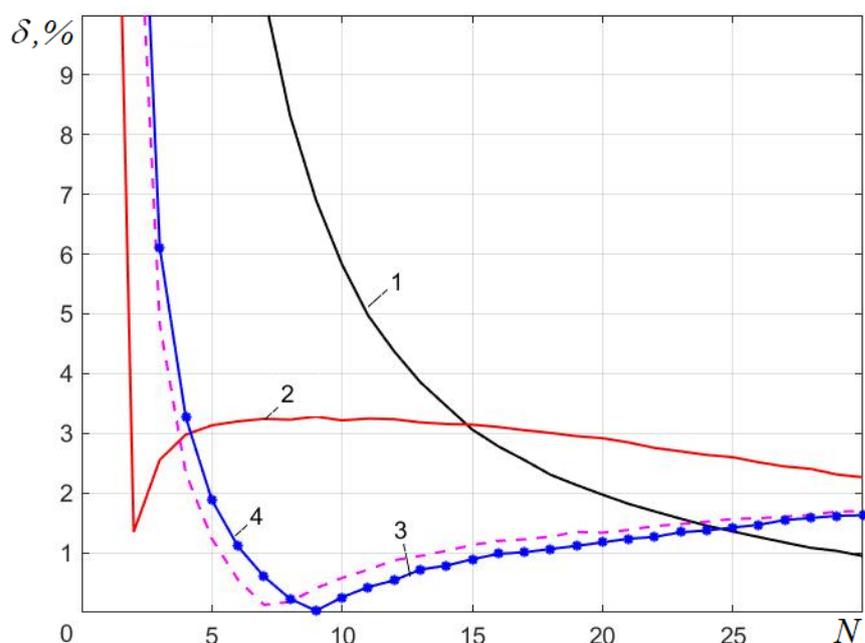


Рис. 4.18. Зависимость погрешности получения диаграммы нагружения от номера шага по параметру продолжения решения задачи (1 – $N_{segm}=1$; 2 – $N_{segm}=2$; 3 – $N_{segm}=10$; 4 – автоматическая сегментация)

Из графика видно, что наименьшая точность расчета диаграммы нагружения на большей части рассматриваемого диапазона нагружения соответствует случаю отсутствия сегментации либо варианту сегментации $N_{segm}=2$.

Помимо обеспечения необходимой точности решения, важнейшим требованием, предъявляемым к вычислительным алгоритмам, является удовлетворительная скорость сходимости итерационных процессов. В качестве ее графической иллюстрации для рассматриваемых четырех случаев сегментации цилиндра примем зависимость величины прогиба цилиндра, полученного на текущем шаге по параметру продолжения решения задачи, от номера этого шага (рис. 4.19). Наибольшая скорость сходимости соответствует варианту сегментации $N_{segm}=2$, однако точность решения в этом случае одна из низших (см. рис. 4.18). Отметим, что при кажущейся незначительной разнице случаев отсутствия сегментации оболочки ($N_{segm}=1$) и разбиения интервала интегрирования лишь на два сегмента $N_{segm}=2$ разница

в скоростях сходимости принципиальна – в первом случае она существенно ниже (рис. 4.19).

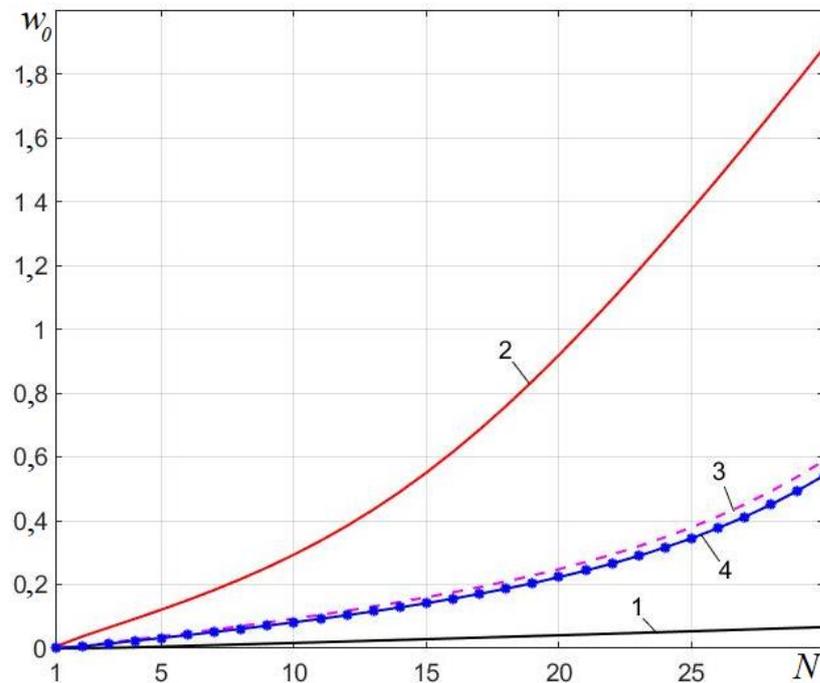


Рис. 4.19. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{segm}=1$; 2 – $N_{segm}=2$; 3 – $N_{segm}=10$; 4 – автоматическая сегментация)

Судя по графикам рис. 4.18 и рис. 4.19, случаи сегментации $N_{segm}=10$ и автоматической сегментации ($N_{segm}=17$) приводят к практически одинаковым результатам расчета при одинаковой скорости сходимости шаговых процессов. Однако следует подчеркнуть, что число сегментов $N_{segm}=10$ было назначено произвольно и при других исходных данных задачи могло привести к иным результатам.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере решения задачи о раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением сферической оболочки из неогукковского материала [69, 86]. Примем отношение радиуса к толщине недеформированной оболочки $R_0/h_0 = 100$.

Отметим, что использование метода автоматической сегментации для сферической оболочки представляется нецелесообразным в связи с тем, что в полюсе такой оболочки матрица Якоби разрешающей системы уравнений

имеет сингулярные элементы, что приводит к нарушению выполнения условия ортогональности фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений на достаточно большом участке в окрестности полюса. На рис. 4.20 представлена зависимость первой нормы произведения указанных фундаментальных матриц Δ от координаты точки меридиана полусферы. Масштаб графика выбран необходимым для хорошего визуального восприятия результата, т.к. в окрестности полюса в каждой точке меридиана величина Δ многократно превышает единицу, достигая значений порядка десятков. Лишь при значениях координат точек меридиана $x \geq 1.183$ удалось получить величину $\Delta \leq 1.05$ хотя бы в двух точках подряд. Вследствие этого число сегментов, на которые необходимо разбить меридиан рассматриваемой оболочки, оказалось велико – $N_{сегм} = 132$.

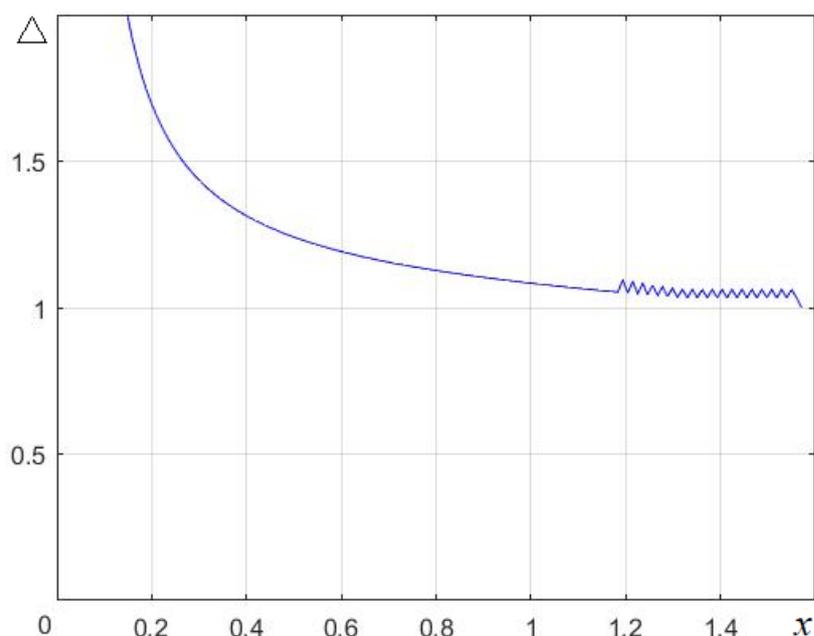


Рис. 4.20. Зависимость нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений Δ от координаты при выполнении автоматической сегментации интервала интегрирования

Поэтому для данной задачи, помимо вышеописанного варианта сегментации меридиана сферы, было предложено назначить число сегментов

разбиения интервала интегрирования на основании использования метода автоматической сегментации применительно к оболочке вращения, имеющей ту же длину меридиана, параметр тонкостенности и свойства материала, что и рассматриваемая сферическая оболочка, но иной формы меридиана, исключая появление сингулярных элементов в матрице Якоби системы уравнений, т.е. к цилиндру. Ниже в тексте указанный вариант сегментации назван «сфера как цилиндр». Всего было рассмотрено 6 вариантов сегментации сферической оболочки: а) сегментация отсутствует; б) $N_{segm} = 2$; в) $N_{segm} = 3$; г) $N_{segm} = 10$; д) «сфера как цилиндр» ($N_{segm} = 34$); е) «сфера как сфера» ($N_{segm} = 132$).

В первых двух случаях на первом же шаге по параметру продолжения решения вычисления сопровождались потерей устойчивости счета. Таким образом, использование сегментации является необходимым условием получения решения задачи.

На рис. 4.21 показана диаграмма нагружения сферической оболочки, полученная при расчетах по разным вариантам сегментации интервала интегрирования. В случае $N_{segm} = 10$ после достижения значения прогиба оболочки $w_0 = 1.83$ продолжение решения являлось ошибочным, сопровождаясь уменьшением прогиба.

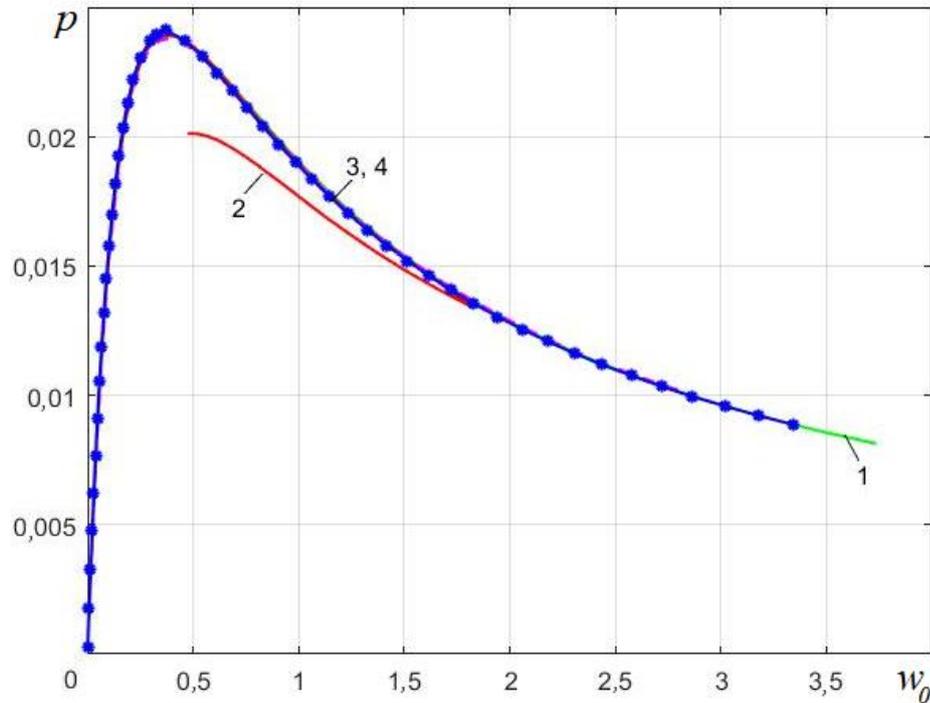


Рис. 4.21. Диаграмма нагружения сферической оболочки (1 – $N_{segm}=3$; 2 – $N_{segm}=10$; 3 – «сфера как цилиндр»; 4 – «сфера как сфера»)

На рис. 4.22 представлена зависимость погрешности расчета диаграммы нагружения сферы от номера шага по параметру продолжения решения задачи для рассмотренных вариантов сегментации, определяемая аналогично представленной на рис. 4.18, на рис. 4.23 – иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов для рассматриваемых случаев сегментации оболочки, аналогичная представленной на рис. 4.19.

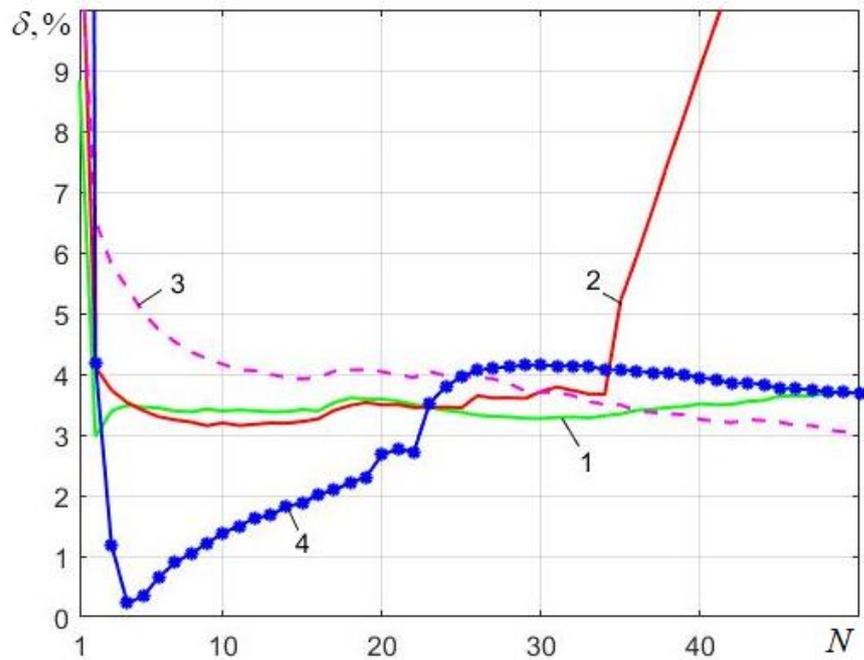


Рис. 4.22. Зависимость погрешности расчета давления от номера шага по параметру (1 – $N_{segm}=3$; 2 – $N_{segm}=10$; 3 – «сфера как цилиндр»; 4 – «сфера как сфера»)

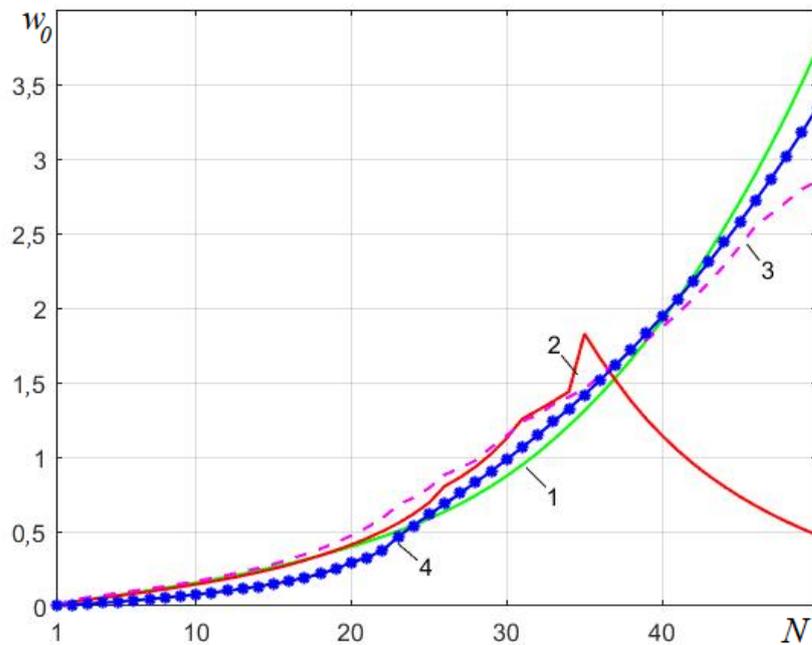


Рис. 4.23. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{segm}=3$; 2 – $N_{segm}=10$; 3 – «сфера как цилиндр»; 4 – «сфера как сфера»)

Полученные результаты оказались труднопредсказуемыми. Так, наилучшая точность вычислений при наивысшей скорости сходимости

соответствует значению $N_{segm}=10$ до 35-ого шага по параметру, после которого продолжение решения становится ошибочным. Использование метода автоматической сегментации меридиана сферы позволяет получить наилучшую точность вычислений среди всех рассмотренных вариантов, но лишь до 23-го шага по параметру.

В случае использования метода автоматической сегментации при замене формы меридиана со сферической на цилиндрическую погрешность вычислений на большей части шагов по параметру оказалась выше, чем в случае произвольного назначения количества сегментов, при несущественно отличающейся скорости сходимости итерационных процессов.

Таким образом, наилучшими с точки зрения оптимального сочетания точности и скорости сходимости оказались результаты расчета при вариантах сегментации оболочки $N_{segm}=3$ и «сфера как цилиндр», а применение метода автоматической сегментации непосредственно к сфере не привело к принципиальному улучшению результатов вычислений по сравнению с остальными рассмотренными вариантами.

Особенностью рассмотренных задач является независимость компонент напряженно-деформированного состояния от координаты, что может облегчать проведение вычислений. Поэтому рассмотрим не имеющую указанного недостатка задачу деформирования полусферы, закрепленной на экваторе неподвижным шарниром. Данная задача не имеет аналитического решения, и необходима выработка критериев, на основании которых можно рекомендовать выбор параметров вычислительного алгоритма, а также судить о достоверности получаемых результатов расчета. Геометрические и физические параметры оболочки примем такими же, что и в предыдущей задаче в случае закрепления полусферы подвижным шарниром. Рассмотрим те же варианты сегментации оболочки. Отметим, что результат использования метода автоматической сегментации не зависит от граничных условий задачи, т.к. определяется решением задач Коши для исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений при начальных условиях,

не связанных с граничными условиями рассматриваемой нелинейной краевой задачи. Таким образом, вариантам сегментации меридиана «сфера как сфера» и «сфера как цилиндр», как и при рассмотрении предыдущей задачи, соответствуют $N_{segm}=132$ и $N_{segm}=34$.

В рассматриваемом случае процесс вычислений сопровождался потерей устойчивости счета на первом же шаге по параметру в случае отсутствия сегментации и при $N_{segm}=2$. Минимальное число сегментов разбиения меридиана оболочки, при котором удалось получить решение, оказалось $N_{segm}=3$.

Диаграмма нагружения оболочки, полученная в случаях сегментации $N_{segm}=3$, $N_{segm}=10$, «сфера как цилиндр», «сфера как сфера», показана на рис. 4.24 (здесь w_0 – прогиб полюса оболочки). При этом решение сопровождалось потерей устойчивости счета при $N_{segm}=132$ на 83-м шаге по параметру продолжения решения.

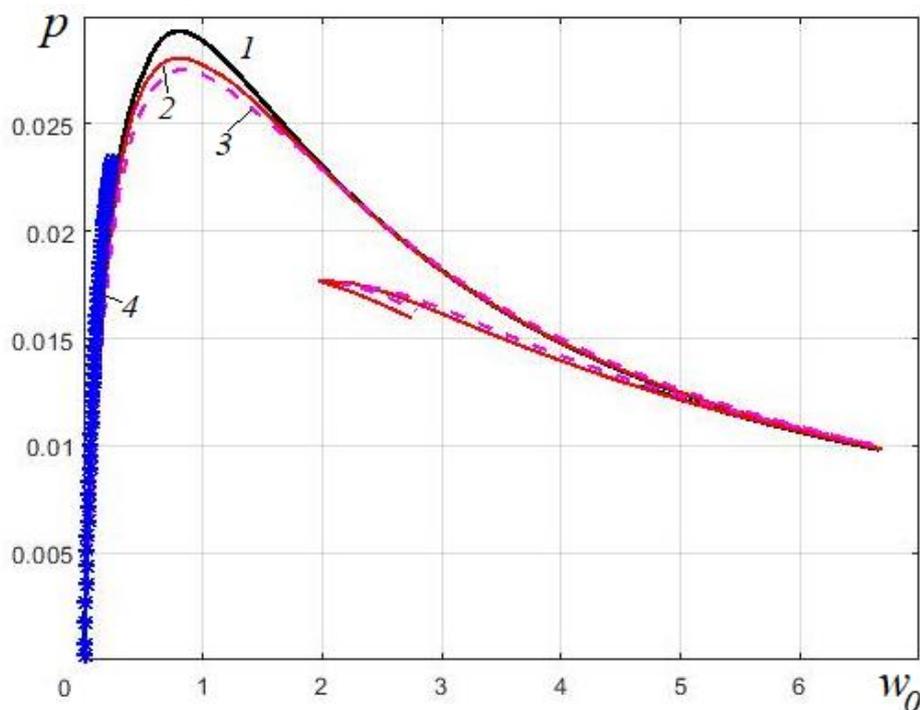


Рис. 4.24. Диаграмма нагружения полусферы, закрепленной неподвижным шарниром на экваторе (1 – $N_{segm}=3$; 2 – $N_{segm}=10$; 3 – «сфера как цилиндр»; 4 – «сфера как сфера»)

Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов показана на рис. 4.25.

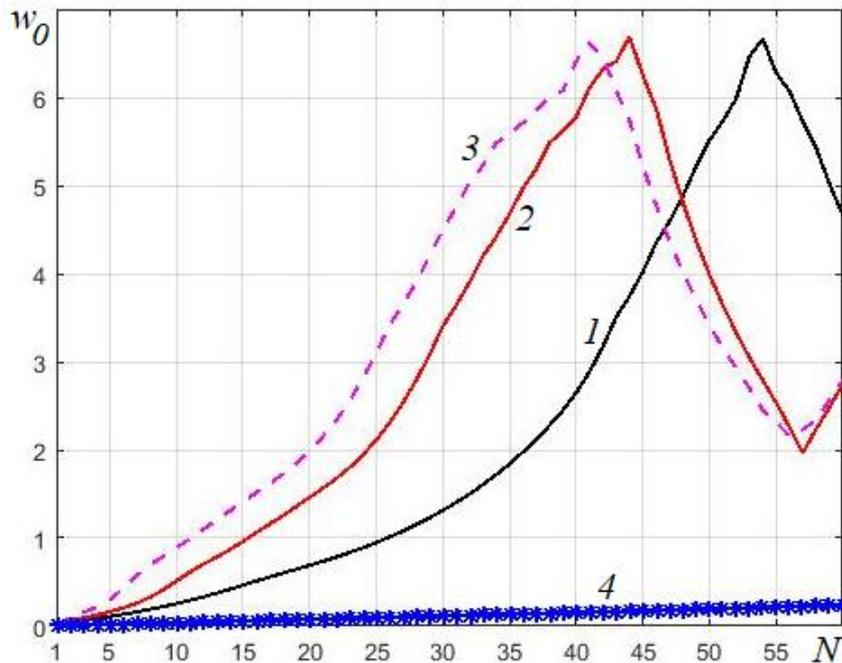


Рис. 4.25. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{segm}=4$; 2 – $N_{segm}=10$; 3 – «сфера как цилиндр»; 4 – «сфера как сфера»)

Из представленных графиков видно, что варианты сегментации меридиана оболочки, аналогичные назначенным в предыдущей задаче, влияют на результат решения иначе. Так, минимальное и максимальное число сегментов обеспечивают наименьшую скорость сходимости итерационных процессов, а вариант сегментации «сфера как цилиндр» – наивысшую. Случай сегментации «сфера как сфера» не позволяет провести расчет даже до критического значения давления, а иные варианты сегментации обеспечивают однозначное соответствие прогиба полюса оболочки давлению до одного и того же значения прогиба.

Необходимо подчеркнуть, что аналитическое решение задачи, так же как и численное, полученное в работах других авторов, в данном случае отсутствует, поэтому о корректности представленных результатов можно судить лишь по их близости при назначении различных величин параметров вычислительного алгоритма (в данном случае – числа сегментов на отрезке

интегрирования). Тогда можно заключить, что решение задачи можно считать достоверным по крайней мере до получения точки на диаграмме нагружения, соответствующей значению прогиба полюса оболочки $w_0 = 6.67$ при сравнении кривых 1-3 на рис. 4.24, а случай сегментации «сфера как сфера» исключить из рассмотрения вследствие низкой скорости сходимости и ограниченности диапазона деформирования оболочки, в котором возможно получение решения. При этом с точки зрения обеспечения наивысшей скорости сходимости наилучшим вариантом сегментации меридиана оболочки является случай «сфера как цилиндр» ($N_{segm}=34$).

Исходя из анализа расчетов, проведенных при различном числе сегментов разбиения меридиана оболочки, можно сделать следующие выводы [69]:

1) неоднозначность решения задачи может быть обусловлена не только ее нелинейностью, но и свойствами вычислительного алгоритма и некорректным выбором его параметров;

2) использование метода автоматической сегментации является желательным для повышения точности решения, для минимизации необоснованных действий вычислителя;

3) использование метода автоматической сегментации может являться нецелесообразным при наличии сингулярных коэффициентов в разрешающей системе уравнений на интервале интегрирования. В этом случае необходима разработка альтернативных рекомендаций по сегментации.

4.4. Критерий однозначности решения задач деформирования мягких оболочек методом продолжения по параметру

Вопрос существования решения нелинейных задач, а также возможности и однозначности продолжения решения по параметру, как

правило, рассматривается в литературе на примере некоторого нелинейного операторного уравнения, записанного в векторной форме и содержащего параметр p [33]

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, p) = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

где \mathbf{x} - вектор искомых функций размерности n , $\boldsymbol{\mu}$ - вектор исходных данных операторного уравнения, \mathbf{f} - вектор-функция размерности n .

Пусть необходимо изучить поведение решения системы (4.23) при изменении параметра p . По теореме о неявных функциях, если известно некоторое решение \mathbf{x}_0, p_0 системы (4.23) и выполнены следующие условия в окрестности A точки $[\mathbf{x}_0, p_0] \in \mathbb{R}_{n+1}$:

1) Вектор-функция \mathbf{f} определена и непрерывна в A ;

2) в A существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ и $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p}$;

3) в точке $[\mathbf{x}_0, p_0]$ отличен от нуля якобиан $\det(\mathbf{J}) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)$ функции \mathbf{f} ;

то в некоторой окрестности B точки $[\mathbf{x}_0, p_0]$ решения \mathbf{x} системы (4.23) являются однозначными непрерывными функциями параметра p : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p)$, такими, что $\mathbf{x}(p_0) = \mathbf{x}_0$, и производные $\frac{d\mathbf{x}}{dp}$ также непрерывны в этой окрестности.

Таким образом, при выполнении условий 1)-3) решение системы (4.23) может быть однозначно продолжено из точки $[\mathbf{x}_0, p_0]$ в пределах окрестности B этой точки. Вводя некоторый параметр продолжения решения λ и дифференцируя соотношения (4.23) по этому параметру, получим систему n линейных однородных уравнений для скоростей по параметру

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}, \dot{p} = \frac{dp}{d\lambda}:$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Для исследования вопроса однозначности продолжения решения (4.23) по параметру λ наряду с матрицей Якоби системы (4.23) рассматривается матрица системы (4.24) $\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p} \end{bmatrix}$.

Точки, в которых выполняется условие $\det(\mathbf{J}) \neq 0$, называются регулярными [33]. В этих точках $\text{rang}(\bar{\mathbf{J}}) = \text{rang}(\mathbf{J}) = n$. Точки, в которых $\det(\mathbf{J}) = 0$, называются особыми, а поведение решения в окрестности этих точек может быть различным в зависимости от значений рангов расширенной $\bar{\mathbf{J}}$ и исходной \mathbf{J} матриц Якоби системы (4.23).

Если в особой точке $\text{rang}(\bar{\mathbf{J}}) = n$, $\text{rang}(\mathbf{J}) = n - 1$, то особая точка является предельной, то есть касательная к кривой в пространстве $\{\mathbf{x}, p\}$ ортогональна к оси p . В предельной точке и ее окрестности возможно успешное продолжение решения уравнения (4.23) после изменения параметра продолжения решения T (в общем случае не являющегося параметром задачи p). При этом выбор параметра продолжения решения (в частности, в форме, которая позволяет избежать необходимости изменения параметра продолжения T) может оказать существенное влияние на возможность и эффективность продолжения решения в окрестности предельной точки.

В тех случаях, когда $\text{rang}(\bar{\mathbf{J}}) = \text{rang}(\mathbf{J}) = n - 1$, возможна бифуркация решения. Особые точки пространства $\{\mathbf{x}, p\}$, соответствующие ему, могут быть изолированы, могут быть точками ветвления решения или точками возврата.

Переходя к описанию условий существования решения нелинейных дифференциальных уравнений и однозначности продолжения решения по

некоторому параметру [70], [92], на интервале $x \in [x_1; x_2]$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, p), \quad (4.25)$$

где \mathbf{y} – вектор искомых функций размерности n , $\boldsymbol{\mu}$ – вектор исходных данных операторного уравнения, \mathbf{f} – вектор-функция правых частей системы дифференциальных уравнений размерности n , p – параметр задачи. Начальные условия для системы (4.25) примем в виде

$$\mathbf{y}(x_1, p) = \mathbf{a}, \quad (4.26)$$

Пусть при $p = p_0$ $\mathbf{y}(x_1, p_0) = \mathbf{a}_0$. Тогда можно применить следующую теорему [56]. Если $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, p)$, $\frac{\partial \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, p)}{\partial \mathbf{y}}$ определены и непрерывны по переменным x, \mathbf{y}, p на интервале $x \in [x_1; x_2]$ в некоторой окрестности точки $[\mathbf{a}_0, p_0]$, то уравнение (4.25) имеет единственное решение $\mathbf{y}(x, p, \mathbf{a})$, определенное при $x \in [x_1; x_2]$, непрерывное по x, p, \mathbf{a} и удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{y}(x_1, p, \mathbf{a}) = \mathbf{a}. \quad (4.27)$$

Для простоты вывода условий оценки возможности однозначного продолжения решения (4.25) по параметру рассмотрим соотношения нелинейной краевой задачи канонической формы IV. Тогда необходимо систему уравнений (4.25) дополнить граничными условиями вида

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{y}(x_1) = \mathbf{b}_1, \quad 1 \Leftrightarrow 2. \quad (4.28)$$

Пусть при некотором значении параметра $p = p_0$ известно решение задачи $\mathbf{y}(x_1, p_0) = \mathbf{y}_0(x)$.

Пусть неизвестная функция $\mathbf{y}(x, p, \mathbf{a})$ и параметр p являются непрерывными и дифференцируемыми функциями некоторого параметра λ , выбранного так, что при $\lambda = \lambda_0$ $\mathbf{y}(x, \lambda_0) = \mathbf{y}_0(x)$, $p(0) = p_0$.

Продифференцировав по λ нелинейную краевую задачу (4.25), (4.28), получим квазилинейную краевую задачу

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx} = \mathbf{A}(\mathbf{y}, p)\dot{\mathbf{y}} + \dot{p}\mathbf{b}(\mathbf{y}, p), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{y}}(x_1) = \mathbf{0}, \quad 1 \Leftrightarrow 2. \quad (4.30)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{y}, p) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{y}, p) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p}.$

Разбивая вектор разрешающих переменных на левом краю задачи $\dot{\mathbf{y}}_{1,1}$ на две составляющих $\dot{\mathbf{y}}_1 = [\dot{\mathbf{y}}_{11} \quad \dot{\mathbf{y}}_{12}]^T$, где $\dot{\mathbf{y}}_{11}$ - известный подвектор из граничных условий левого края размерности $n/2$, получаем соотношение для связи вектора $\dot{\mathbf{y}}_1$ с вектором $\dot{\mathbf{y}}_{12}$ вида

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{A}_1^*\dot{\mathbf{y}}_{12} + \mathbf{b}_1^*\dot{p}, \quad (4.31)$$

где $\mathbf{A}_1^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_1^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$ а $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}$ - блоки матрицы \mathbf{A}_1

размерности $n/2 \times n/2$, причем матрица \mathbf{A}_{11} предполагается квадратной и невырожденной.

Используя метод начальных параметров для построения решения краевой задачи, запишем

$$\dot{\mathbf{y}}(x) = \mathbf{M}(x)\dot{\mathbf{y}}_{12} + \mathbf{H}\dot{p}, \quad (4.32)$$

Подстановка соотношений (4.32) в соотношения (4.29), (4.30) приводит к системе однородной матричной

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{M}; \quad \mathbf{M}(x_1) = \mathbf{B}_1^* \quad (4.33)$$

и неоднородной векторной задач Коши

$$\frac{d\mathbf{H}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{b}; \quad \mathbf{H}(x_1) = \mathbf{b}_1^*. \quad (4.34)$$

Решение задач (4.33), (4.34) позволяет сформировать вектор $\dot{\mathbf{y}}(x_2) = \mathbf{M}(x_2)\dot{\mathbf{y}}_{12} + \mathbf{H}(x_2)\dot{p}$. Тогда из граничного условия на правом краю задачи получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$[\mathbf{A}_2\mathbf{M}(x_2) \quad \mathbf{A}_2\mathbf{H}(x_2)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_{12} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.35)$$

Это уравнение для нелинейной краевой задачи (4.25), (4.28) имеет тот же смысл, что и уравнение продолжения (4.24) для системы (4.23). Поэтому матрицы $\bar{\mathbf{J}} = [\mathbf{A}_2\mathbf{M}(x_2) \quad \mathbf{A}_2\mathbf{H}(x_2)]$, $\mathbf{J} = \mathbf{A}_2\mathbf{M}(x_2)$ аналогичны расширенной и исходной матрицам Якоби системы нелинейных алгебраических уравнений (4.23), и для оценки однозначности продолжения решения задачи (4.25), (4.28) по параметру λ можно использовать свойства указанных матриц: в регулярных точках $\det(\mathbf{J}) \neq 0$, $\text{rang}(\bar{\mathbf{J}}) = \text{rang}(\mathbf{J}) = n/2$, в предельных точках $\det(\mathbf{J}) = 0$, $\text{rang}(\bar{\mathbf{J}}) = n/2$, $\text{rang}(\mathbf{J}) = n/2 - 1$.

При решении нелинейной многоточечной краевой задачи канонической формы V из N сегментов в соответствии с описанным в п. 4.1 алгоритмом, основанным на использовании метода ортогонализации, матрица разрешающей системы алгебраических уравнений относительно векторов $\dot{\mathbf{y}}_{12,i}$, $i \in [1, N]$, аналогичной системе (4.35), имеет вид,

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \Omega_1 & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} & \Omega_2 & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Omega_{N-1} & -\mathbf{E} & \boldsymbol{\omega}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^*\mathbf{M}_{N,K} & \mathbf{B}_2^*\mathbf{H}_{N,K} + \mathbf{b}_{2,K}^* \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размерности $n/2 \times n/2$, Ω_i , $i \in [1, N-1]$ – матрица коэффициентов ортогонализации такой же размерности.

Анализируя структуру матрицы $\bar{\mathbf{J}}$ (4.36), можно сделать вывод [70] о преимуществе использования метода ортогонализации для решения многосегментной краевой задачи, заключающемся в обеспечении линейной независимости всех строк матрицы $\bar{\mathbf{J}}$, за исключением соответствующих

последнему сегменту задачи. Тогда для краевой задачи канонической формы V при исследовании однозначности продолжения ее решения по параметру λ достаточно вычислить определитель и ранги матриц $\bar{\mathbf{J}}_N = (\mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,K} \quad \mathbf{B}_2^* \mathbf{H}_{N,K} + \mathbf{b}_{2,K}^*)$ и $\mathbf{J}_N = \mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,K}$. Тогда в точках, в которых выполняются условия $\det(\mathbf{J}_N) \neq 0, \text{rang}(\bar{\mathbf{J}}_N) = \text{rang}(\mathbf{J}_N) = n/2$ (регулярных точках), продолжение решения будет однозначным, а в точках, в которых $\det(\mathbf{J}_N) = 0, \text{rang}(\bar{\mathbf{J}}_N) = n/2, \text{rang}(\mathbf{J}_N) = n/2 - 1$ (предельных точках), необходима смена параметра продолжения. При этом, как указано в [33], параметр продолжения решения может быть выбран в такой форме, что становится возможным избежать его смены. Однако анализ свойств матриц, характеризующих попадание в предельную точку в процессе построения решения методом продолжения по параметру, в доступной литературе не производился.

Подводя итог, сформулируем следующую последовательность действий, необходимых для проверки существования решения многосегментной краевой задачи и однозначности его продолжения по параметру [70]:

1) Исследование определенности и непрерывности по переменным x, \mathbf{y}, p вектора правых частей системы дифференциальных уравнений

$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, p)$ и матрицы $\frac{\partial \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, p)}{\partial \mathbf{y}}$ на интервале интегрирования соотношений краевой задачи;

2) Вычисление определителя $\det(\mathbf{J}_N)$ и рангов $\text{rang}(\bar{\mathbf{J}}_N), \text{rang}(\mathbf{J}_N)$, где $\bar{\mathbf{J}}_N = (\mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,K} \quad \mathbf{B}_2^* \mathbf{H}_{N,K} + \mathbf{b}_{2,K}^*)$ и $\mathbf{J}_N = \mathbf{B}_2^* \mathbf{M}_{N,K}$. В точках, где продолжение решения однозначно, должны выполняться условия, $\det(\mathbf{J}_N) \neq 0, \text{rang}(\bar{\mathbf{J}}_N) = \text{rang}(\mathbf{J}_N) = n/2$, где n – порядок вектора разрешающих переменных краевой задачи.

При численном решении задач деформирования мягких оболочек заранее предсказать нарушение условий существования решения или однозначности продолжения решения по параметру не представляется возможным, так как, как показала практика расчетов, поведение решения может существенно изменяться в зависимости от выбора параметров вычислительного алгоритма и, в свою очередь, изменять вектор правых частей разрешающей системы дифференциальных уравнений. Поэтому необходим постоянный текущий контроль выполнения указанных условий непосредственно в процессе вычислений.

При этом следует сформулировать критерий определенности и непрерывности функции, получаемой при расчетах, так как использование теоретических определений этих понятий в вычислениях затруднительно. С другой стороны, использование такого критерия в практике расчетов не должно быть трудоемким и превращаться в отдельную задачу, сопоставимую по затратам машинного времени с основной задачей построения решения. Поэтому было принято в качестве критерия непрерывности вектор-функции правых частей системы дифференциальных уравнений $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, p)$ и матрицы $\frac{\partial \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, p)}{\partial \mathbf{y}}$ по координате x принять сопоставление значений компонент этих вектор-функции и матрицы на данном шаге по параметру в текущей точке меридиана $x = x_i$ и в двух предыдущих точках $x = x_{i-1}$, $x = x_{i-2}$, а в качестве критерия непрерывности по вектору \mathbf{y} - сопоставление таких значений на этапах прогноза и коррекции решения на данном шаге по параметру.

Кроме того, получение строгого нуля или бесконечного значения, которые могут использоваться в теоретических выкладках для характеристики определенности или непрерывности, в вычислениях невозможно. Однако в вычислениях возможно получение значений чисел, которые используемая среда программирования оценивает как бесконечные

или неопределенные. Практика расчетов показала, что достижению этих значений предшествует непрерывный рост порядков рассчитываемых величин. Представляется обоснованным остановить процесс вычислений раньше, чем среда программирования выдаст сообщение об ошибке, связанной с появлением недопустимо больших чисел. По результатам вычислительных экспериментов в качестве величин, при получении которых следует прекратить расчеты, назначим $K_{\max} = 10^{14} \div 10^{16}$. При оценке же равенства нулю определителя матрицы будем считать нулевым значение $K_{\min} \leq 10^{-6} \div 10^{-4}$, а сравнение величин компонент матрицы, необходимое для определения числа линейно независимых строк, будем проводить с точностью до четырех значащих цифр.

Рассмотрим задачу о раздувании шарнирно опертой полусферы из неогукковского материала равномерно распределенным по меридиану давлением. Пусть для некоторого базового расчета число сегментов, на которые разбит меридиан оболочки, $N_{\text{сегм}} = 3$, число шагов интегрирования на каждом сегменте $N = 25$, начальное значения шага по параметру продолжения $dw_0 = 0.001$, максимальное значение $dw_{\max} = 0.01$, величина предварительного давления $p_0 = 10^{-4}$. В качестве параметра продолжения выберем прогиб оболочки в начале последнего сегмента.

Как было показано в п. 4.2 диссертации, при назначении иных величин указанных параметров в ряде случаев возникают вычислительные сложности, связанные с получением либо недопустимо больших чисел, либо ошибочного решения, либо большой погрешности решения. Представляется целесообразной проверка выполнения условий существования решения используемой в расчетах системы уравнений, а также условий однозначности продолжения решения, описанных выше.

С этой целью введем:

1) при каждом обращении к вектору правых частей разрешающей системы уравнений контроль и сравнение величин его компонент, а также

компонент соответствующей матрицы Якоби. При превышении этими величинами значения K_{\max} будем считать условие определенности вектора правых частей нарушенным.

2) при формировании матрицы вида (4.36) контроль значений определителя $\det(\mathbf{J}_N)$ и рангов $\text{rang}(\bar{\mathbf{J}}_N)$, $\text{rang}(\mathbf{J}_N)$. При этом значение $\det(\mathbf{J}_N) \leq K_{\min}$ будем считать нулевым.

Таким образом в процессе проведения расчетов при назначении величин параметров вычислительного алгоритма, отличных от указанных выше, были выявлены следующие случаи нарушения условий существования решения, которые предвещали непрерывное возрастание величин компонент искомого вектора разрешающих переменных, в тексте называвшееся потерей устойчивости счета:

1) при $p_0 = 10^{-5}$ на первом шаге по параметру продолжения решения в точке меридиана $x = 0.4688$ третья компонента вектора правых частей системы дифференциальных уравнений $f_3 = 1.61 \cdot 10^{16} > K_{\max}$.

2) при $dw_{\max} = 10^{-3}$ на 177 шаге по параметру продолжения решения в точке $x = 0.1127$ третья компонента вектора правых частей системы дифференциальных уравнений $f_3 = 2.61 \cdot 10^{16} > K_{\max}$.

3) При регуляризации системы уравнений теории мягких оболочек на первых $N_{\text{pez}} = 5$ шагах по параметру продолжения и расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия деформированной оболочки на 47-м по параметру продолжения решения в точке меридиана $x = 0.0579$ первая компонента вектора правых частей системы дифференциальных уравнений $f_1 = 1.1 \cdot 10^{18} > K_{\max}$. При этом при использовании уравнений технической теории мягких оболочек на всем интервале решения задачи условия существования решения и единственности его продолжения не нарушаются, т.е. получаемая в этом

случае большая погрешность решения обусловлена лишь некорректным использованием системы уравнений технической теории мягких оболочек.

Аналогичные расчеты были проведены при назначении параметра продолжения решения задачи в форме, предложенной В.И. Шалашилиным. Было установлено, что при регуляризации системы уравнений теории больших деформаций мягких оболочек на первых $N_{reg} = 15$ шагах по параметру продолжения и расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия недеформированной оболочки на 52-м шаге по параметру продолжения решения в точке $x = 0.5934$ вторая компонента вектора правых частей системы дифференциальных уравнений $f_2 = 1.53 \cdot 10^{16} > K_{max}$. При $N_{reg} = 37$ все условия существования решения и однозначности его продолжения выполняются, но при переходе к расчету по системе уравнений теории больших деформаций мягких оболочек по окончании процесса регуляризации решение становится ошибочным.

Таким образом, к неограниченному возрастанию решения приводило лишь нарушения условий, связанных с определенностью функции правых частей системы дифференциальных уравнений.

Особо отметим случаи назначения параметров вычислительного алгоритма, для которых решение было получено с большой погрешностью, однако ни одно из условий существования решения и однозначности его продолжения не нарушалось в процессе вычислений:

1) При назначении параметра продолжения решения задачи в форме, предложенной Н.В. Валишвили и $dw_{max} = 1$.

2) При назначении параметра продолжения решения задачи в форме, предложенной В.И. Шалашилиным и расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия недеформированной оболочки при любом числе шагов по параметру, на которых проводится регуляризация решения.

4.5. Влияние формы меридиана на поведение оболочки из гиперупругого материала при раздувании

На основании приведенного в гл. 1 обзора исследований статического деформирования мягких оболочек можно заключить, что большинство алгоритмов и методик расчета не являются универсальными, а ориентированы на тот или иной класс задач, определяемый конкретной формой меридиана. Также следует отметить крайне ограниченное число исследований поведения тороидальной мягкой оболочки и отсутствие работ, посвященных анализу напряженно-деформированного состояния конической оболочки при больших деформациях. Поэтому представляет интерес сравнение поведения мягких оболочек канонических форм меридиана (полусфера, круговой цилиндр, тор, усеченный конус) при раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением в предположении одинаковых условий закрепления и свойств материала, а также по единому алгоритму [71, 85, 90].

Будем считать, что оболочки изготовлены из неогуковского материала. Условия их закрепления обеспечивают возможность свободного перемещения в направлении нормали к меридиану на левом торце, а на правом торце оболочки закреплены неподвижным шарниром. Геометрические размеры подобраны исходя из следующих условий:

- 1) Равенство площадей поверхности оболочек в недеформированном состоянии;
- 2) Равенство площадей оболочек в плане в недеформированном состоянии;
- 3) Равенство толщин оболочек.

При этих условиях были получены следующие геометрические параметры оболочек, выраженные в долях радиуса недеформированной полусферы R_0 :

- 1) Цилиндр: длина образующей $L_0 = R_0$, радиус основания $R_c = R_0$;
- 2) Тор: радиус средней окружности $d_T = 0.8014R_0$, радиус образующей окружности $R_T = 0.1986R_0$;
- 3) Конус: угол полураствора $\gamma = 0.4812$, длина образующей $L = \pi/2$, радиус основания $R_k = R_0$.

Во всех расчетах отношение радиуса недеформированной полусферы к ее толщине принято равным $R_0/h_0 = 100$. В качестве параметров обезразмеривания выбраны величины R_0 , h_0 и C – параметр неогукковского материала.

На рис. 4.26 представлены диаграммы нагружения оболочек в виде зависимостей раздувающего оболочку давления от относительного изменения площади поверхности оболочки F : $\Delta F = (F - F_0)/F_0$, где F_0 – площадь поверхности недеформированной оболочки. Здесь и далее на рисунках цифрами обозначены: 1 – полусфера; 2 – цилиндр; 3 – тор; 4 – конус.

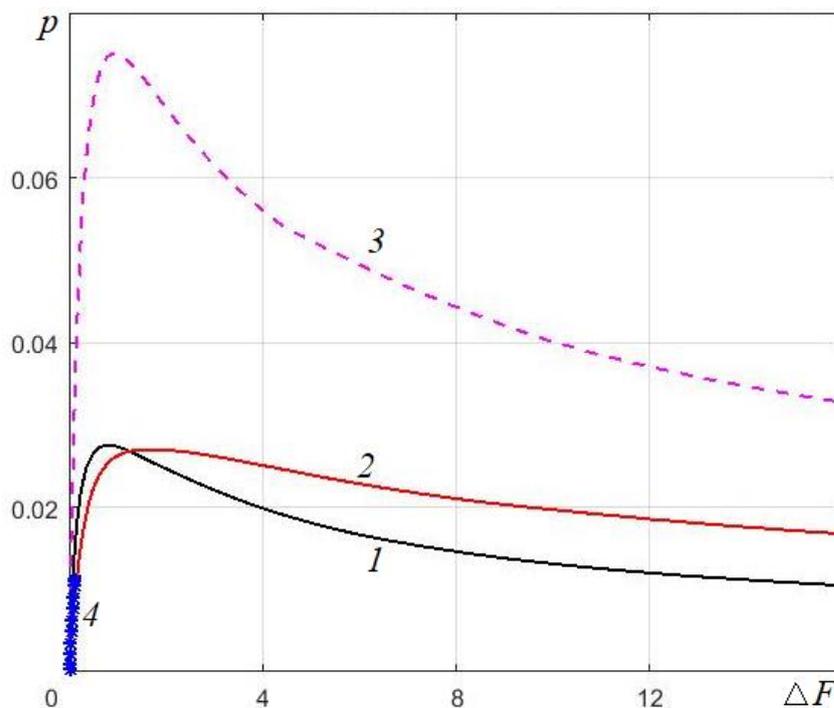


Рис. 4.26. Диаграммы нагружения оболочек (1 – полусфера; 2 – цилиндр; 3 – тор; 4 – конус)

В результате расчетов было установлено, что коническая оболочка деформируется лишь в малом диапазоне перемещений и деформаций. При достижении значения давления $p \approx 0.011$ итерационные процессы перестают сходиться, причем указанный результат повторяется при всех рассмотренных изменениях параметров вычислительного алгоритма.

Сравнение диаграмм деформирования рассмотренных оболочек позволяет отметить следующие различия в их поведении:

- 1) Для раздувания тора требуется давление наибольшей величины;
- 2) Деформирование конуса возможно при наименьшем давлении до наименьших значений перемещений и деформаций.

На рис. 4.27 представлена иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов решения задачи в виде зависимости величины относительного изменения площади поверхности оболочки ΔF от номера шага по параметру продолжения решения N .

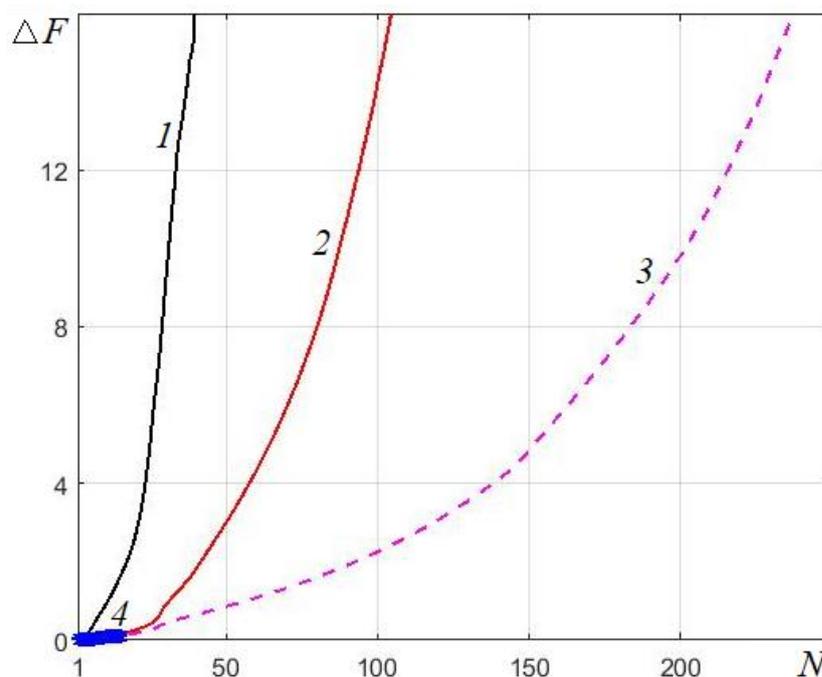


Рис. 4.27. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – полусфера; 2 – цилиндр; 3 – тор; 4 – конус)

Наибольшая и наименьшая скорости сходимости соответствуют вычислительным процессам решения задач о деформировании полусферы и тороидальной оболочки соответственно.

Т.к. коническая оболочка деформируется в малом диапазоне, в котором свойства поведения иных оболочек в области больших деформаций и перемещений проявлены еще не в полной мере, далее в работе выполним сравнение характера напряженно-деформированного состояния лишь сферической, цилиндрической и тороидальной оболочек. Для сравнения рассмотрим значение давления $p = 0.0178$, при котором оболочки деформируются как в докритической (т.е. на восходящей ветви диаграммы нагружения), так и в закритической (на нисходящей ветви диаграммы нагружения) областях.

В докритической области при значении $p = 0.0178$ распределения меридиональных и окружных деформаций и меридиональных и окружных напряжений в полусферической, цилиндрической и тороидальной оболочках представлены на рис. 4.28–4.31 соответственно. При этом, с учетом симметрии геометрии, закрепления и нагружения, для полусферы переменная интегрирования изменяется в пределах $S \in (0; \pi/2]$, для тора $S \in [\pi/2; 3\pi/2]$.

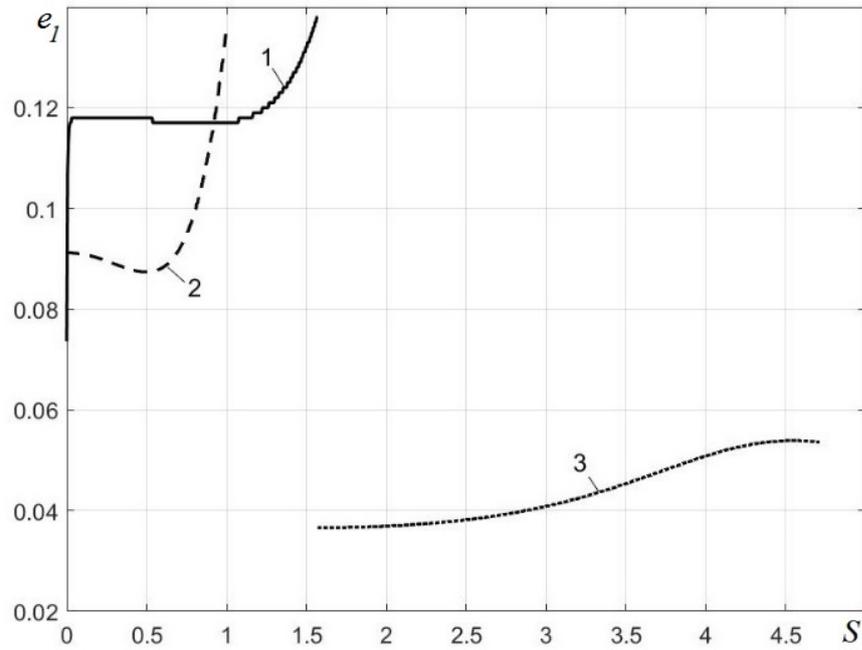


Рис. 4.28. Распределение по меридиану меридиональных деформаций в докритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

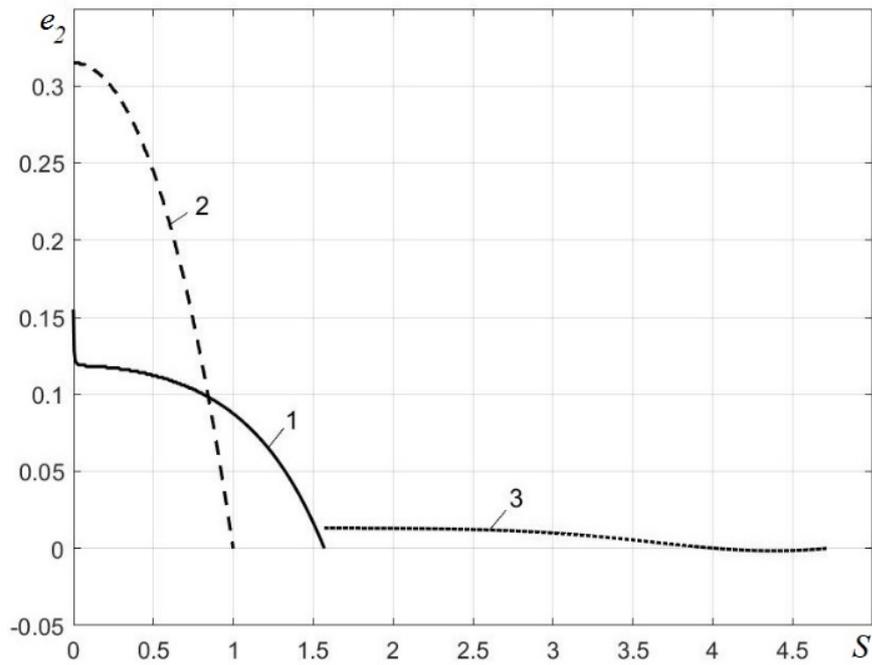


Рис. 4.29. Распределение по меридиану окружных деформаций в докритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

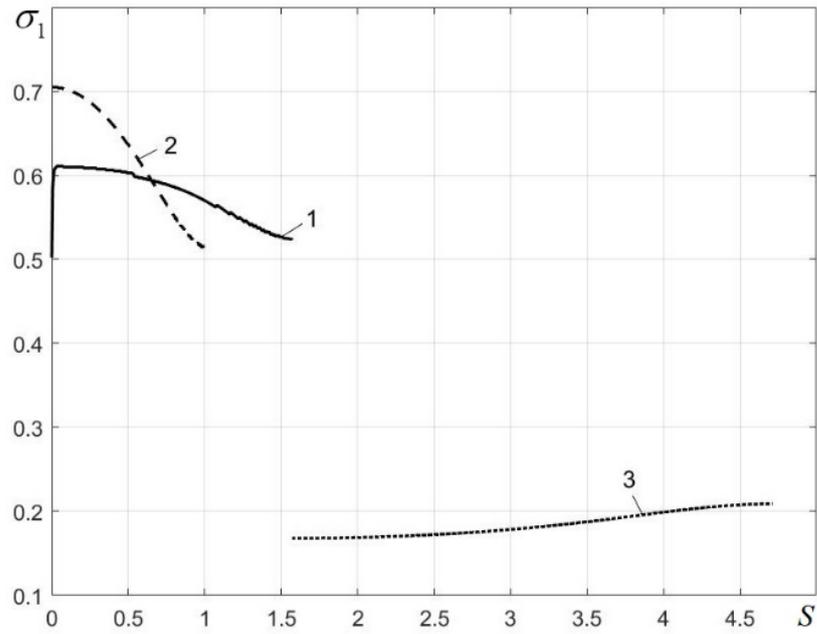
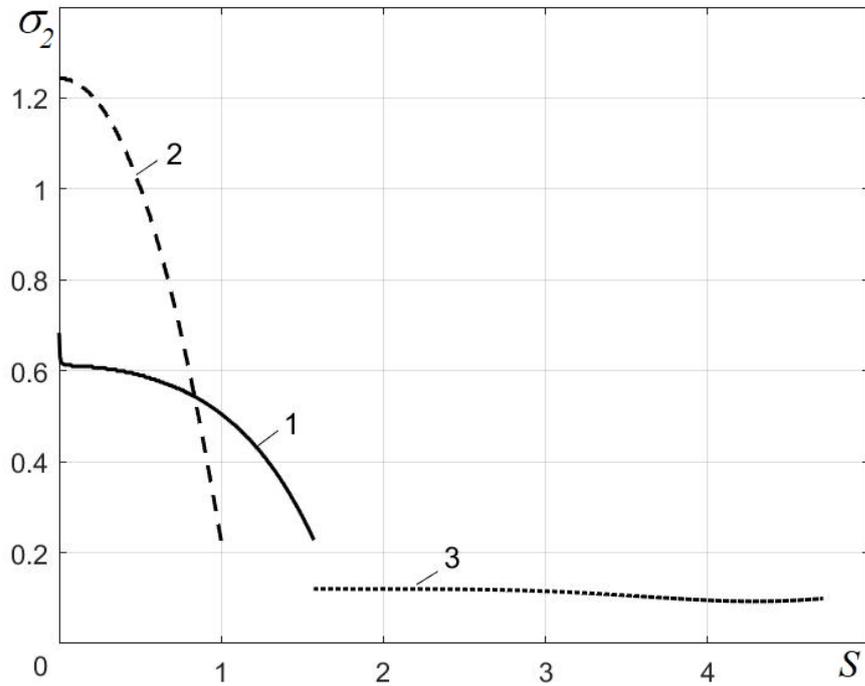


Рис. 4.30. Распределение по меридиану меридиональных напряжений в докритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$



б)

Рис. 4.31. Распределение по меридиану окружных напряжений в докритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

Для докритической области деформирования характерно возрастание меридиональных и убывание окружных компонент деформаций по мере приближения к неподвижному краю оболочки, причем для цилиндрической оболочки оно выражено более интенсивно. При этом окружные деформации на большем участке меридиана цилиндрической оболочки превышают окружные деформации сферической оболочки, а для тороидальной оболочки обе компоненты оказались наименьшими.

Меридиональное и окружное напряжения в цилиндрической оболочке превышают напряжения в сферической оболочке на большем участке меридиана. В обоих случаях напряжения убывают по мере приближения к неподвижному краю оболочек. Напряжения в тороидальной оболочке, как и деформации, остаются минимальными, а по мере приближения к неподвижному краю меридиональные напряжения возрастают.

Форма оболочек при рассматриваемой величине давления показана на рис. 4.32, где штриховые линии соответствуют недеформированной, а сплошные – деформированной форме.

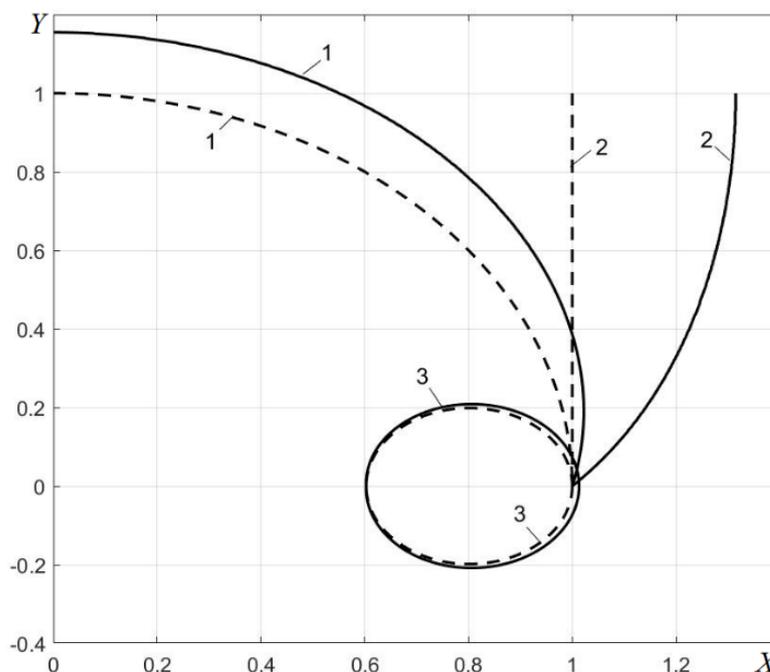


Рис. 4.32. Формы оболочек в докритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

По осям абсцисс и ординат отложены глобальные координаты X, Y , выраженные в долях радиуса недеформированной полусферы R_0 . При этом относительные изменения площадей поверхности оболочек составляют $\Delta F = 0.199$ для сферы, $\Delta F = 0.313$ для цилиндра и $\Delta F = 0.051$ для тора. В целом в докритической области деформирование тора выражено наиболее слабо.

В закритической области при том же значении давления $p = 0.0178$ различия в характере напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек проявляются иначе. На рис. 4.33-4.36 соответственно представлены распределения меридиональных и окружных деформаций и меридиональных и окружных напряжений.

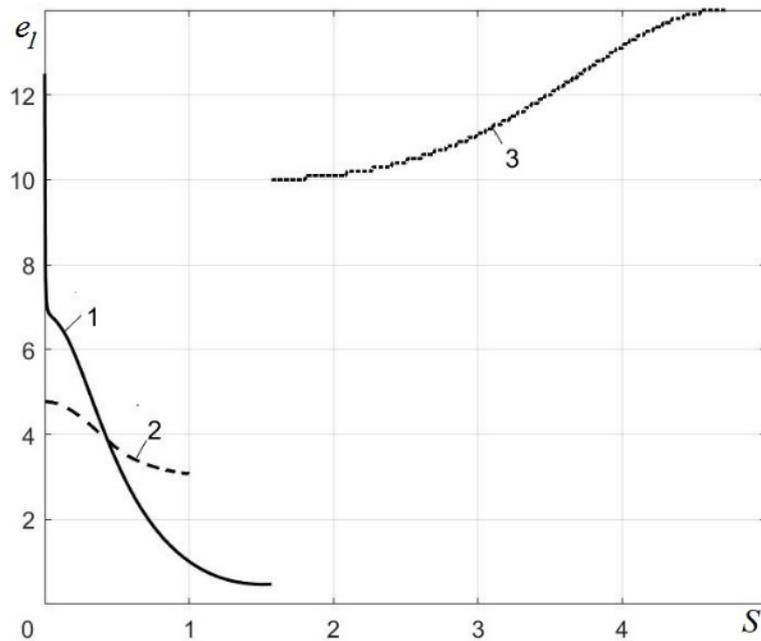


Рис. 4.33. Распределение по меридиану меридиональных деформаций в закритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

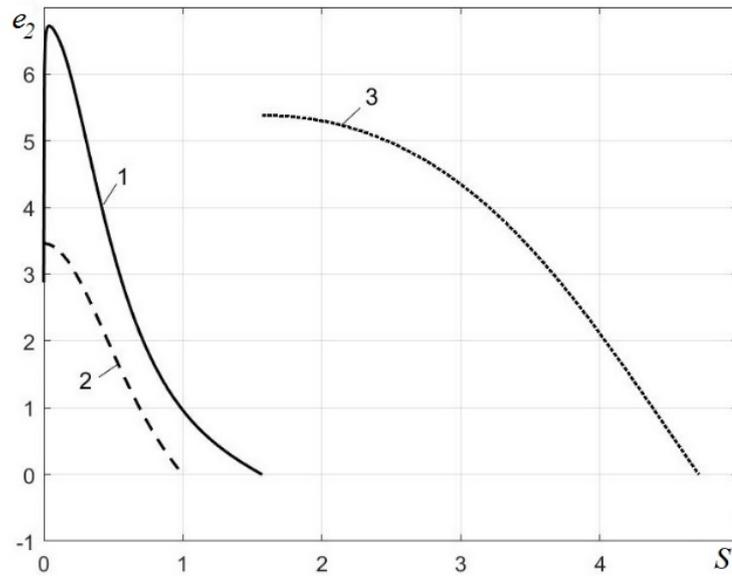


Рис. 4.34. Распределение по меридиану окружных деформаций в закритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

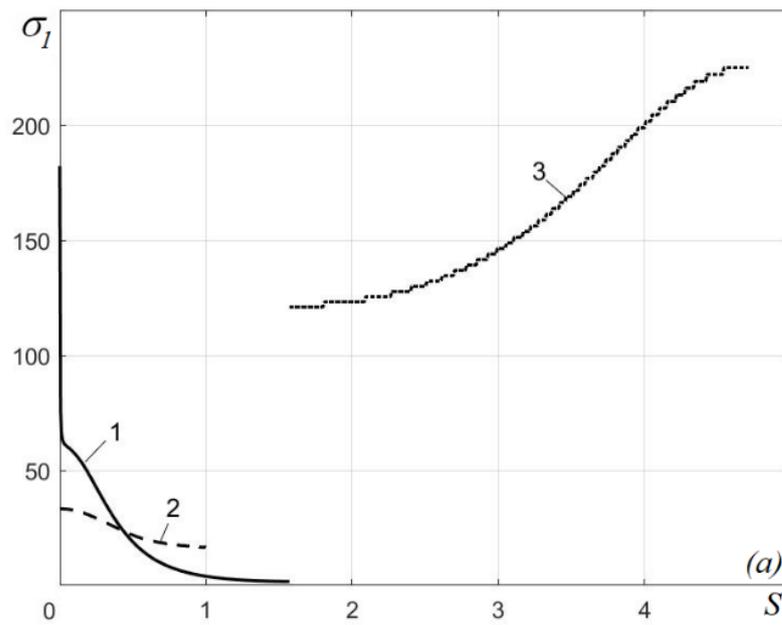


Рис. 4.35. Распределение по меридиану меридиональных напряжений в закритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

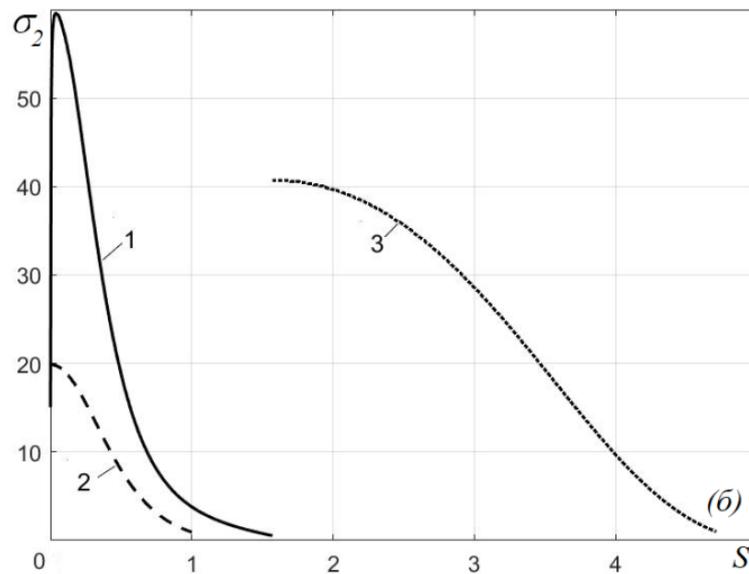


Рис. 4.36. Распределение по меридиану окружных напряжений в закритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

В закритической области характер распределения меридиональных деформаций в цилиндрической и сферической оболочках меняется – их величины убывают по мере приближения к неподвижному торцу. Деформации в цилиндрической оболочке становятся наименьшими, а меридиональные деформации в тороидальной оболочке – наибольшими. Аналогичное поведение характерно для распределения напряжений по меридиану оболочек.

На рис. 4.37 показаны формы меридианов рассматриваемых оболочек при закритическом деформировании давлением $p = 0.0178$. При этом относительные изменения площадей поверхности оболочек составляют $\Delta F = 7.13$ для полусферы, $\Delta F = 13.5$ для цилиндра и $\Delta F = 57$ для тора. Характерно резкое увеличение размеров тороидальной оболочки. Следует также отметить раздувание цилиндра в область ниже плоскости, на которой он находился в недеформированном состоянии.

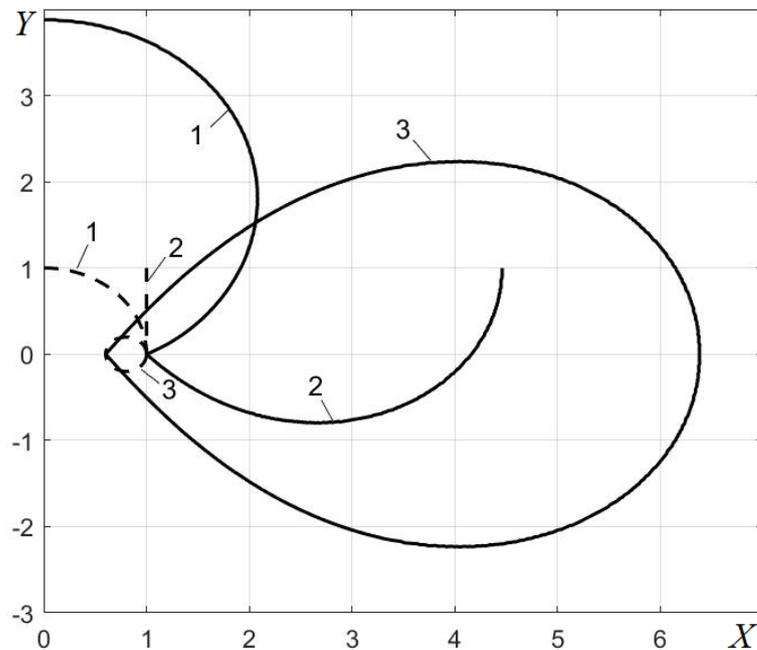


Рис. 4.37. Формы оболочек в закрытом критическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

4.6. Расчет цилиндрической оболочки с местным утонением из гиперупругих материалов различных моделей

Задача о раздувании высокоэластичной цилиндрической оболочки с местным утонением является модельной для исследования вопроса формирования локального выпучивания меридиана оболочки, условия нагружения и закрепления которой изначально обеспечивают однородное напряженно-деформированное состояние. Несмотря на то, что математическое и экспериментальное моделирование указанного явления являлось предметом изучения многих авторов [149], вопросы теоретического определения возможности его возникновения для произвольной функции упругого потенциала материала оболочки, а также исследования дальнейшего поведения оболочки в глубокой закрытой области в доступной литературе не раскрыты.

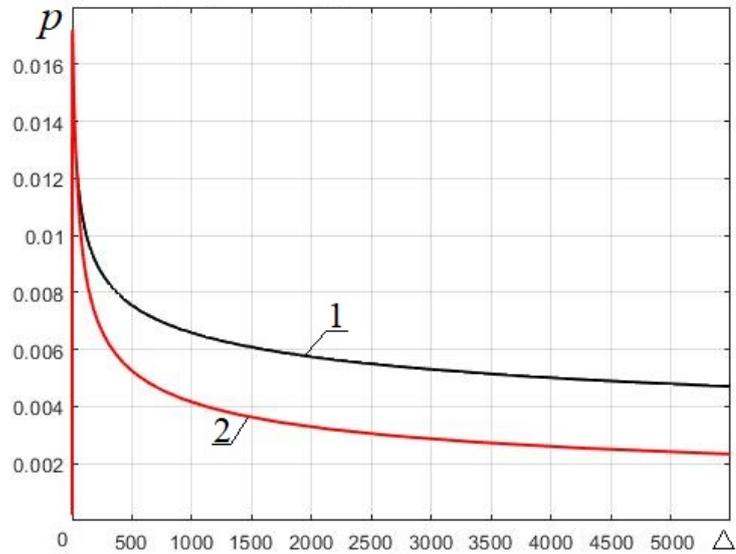
Вместе с этим можно предположить, что анализ образования локального выпучивания меридиана цилиндрической оболочки из

высокоэластичного материала при раздувании подобен исследованиям образования шейки в цилиндрических образцах из пластичных материалов при их растяжении. Теоретическое изучение такого процесса проводится либо путем корректного моделирования головки и способа нагружения образца [8], либо, при отсутствии головки, путем введения предположения о наличии в цилиндрическом образце местного утонения [6].

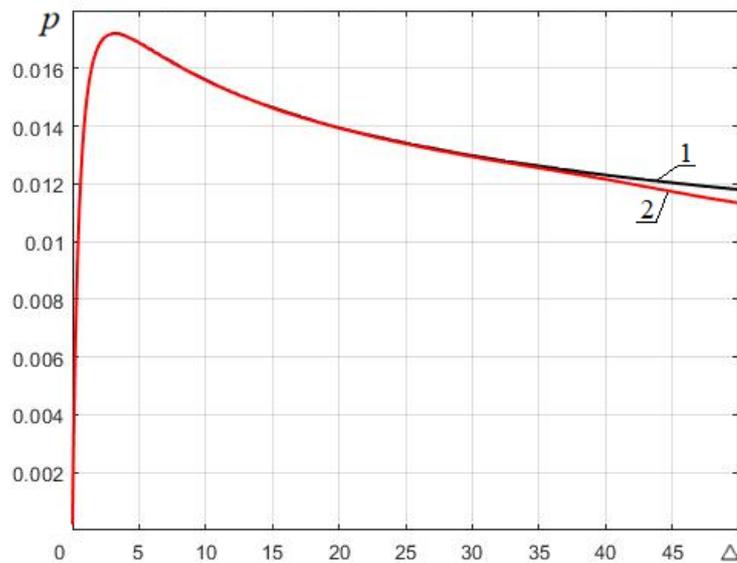
Воспользуемся последним из описанных подходов для исследования процесса глубокого закритического деформирования раздуваемой равномерным давлением цилиндрической оболочки из гиперупругих материалов различных типов [73].

Пусть цилиндрическая оболочка изготовлена из неогукковского материала, длина оболочки до деформации $L_0 = 2R_0$, толщина центрального участка длиной $L_c = 0.1R_0$ изменяется по закону $h_0 = 0.995 - 0.005 \cos(\pi x / 0.05)$, где x отсчитывается от центрального сечения цилиндра, толщина остальной части оболочки составляет $h_0 = 0.01R_0$. Оболочка нагружена внутренним давлением, а на торцах приложена растягивающая сила, величина которой соответствует силе давления в меридиональном направлении. На рис. 4.38 а, б представлена диаграмма деформирования оболочки в координатах «давление – относительное изменение объема внутренней полости оболочки», на рис. 4.39 – диаграмма в координатах «давление – максимальная поперечная деформация оболочки». Относительное изменение объема V определялось соотношением $\Delta = (V - V_0) / V_0$. На рис. 4.38, а график представлен для всего рассмотренного диапазона изменения объема ($\Delta_{\max} = 5500$), на рис. 4.38, б график показан в увеличенном масштабе. Кривые 1 и 2 описывают поведение оболочки постоянной и переменной толщины соответственно. Различия в изменении объемов рассматриваемых оболочек начинают проявляться при достижении величины давления $p \approx 0.0125$, а величины относительного изменения объема $\Delta = 36$ (рис. 4.38, б), после чего для раздувания оболочки с

ослабленным сечением до некоторого значения объема требуется давление меньшей величины.



а)



б)

Рис. 4.38. Диаграмма «давление – относительное изменение объема внутренней полости цилиндра»

Расчеты проводились до достижения абсолютного значения поперечной деформации оболочки $\epsilon_3 = 0.99$ (рис. 4.39). В закритической области деформирования характерно замедление роста поперечной

деформации для оболочек как постоянной толщины, так и с ослабленным сечением.

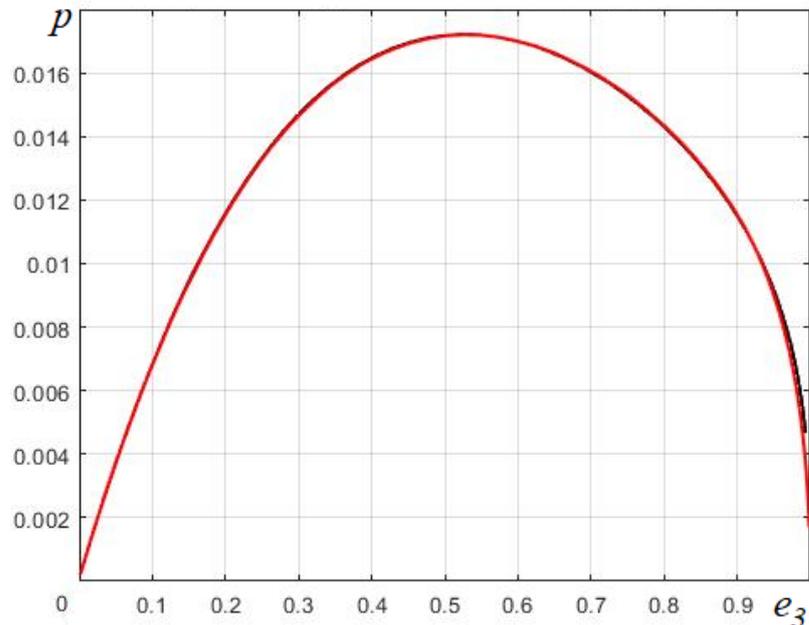


Рис. 4.39. Диаграмма «давление – максимальная по модулю поперечная деформация»

В закритической области по мере уменьшения внутреннего давления проявляется влияние локального утонения оболочки на распределение компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану. На рис. 4.40-4.46 представлено распределение компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану оболочки для закритического значения давления $p = 0.009$. Так как условия нагружения и закрепления симметричны относительно центрального сечения цилиндра, графики характеризуют распределение искомых величин лишь по меридиану правой половины цилиндра.

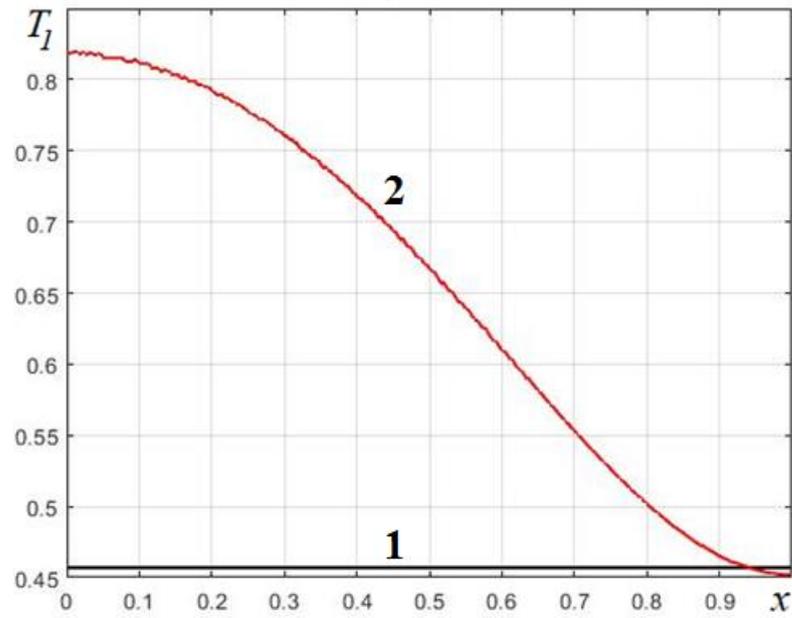


Рис. 4.40. Распределение меридиональных усилий для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

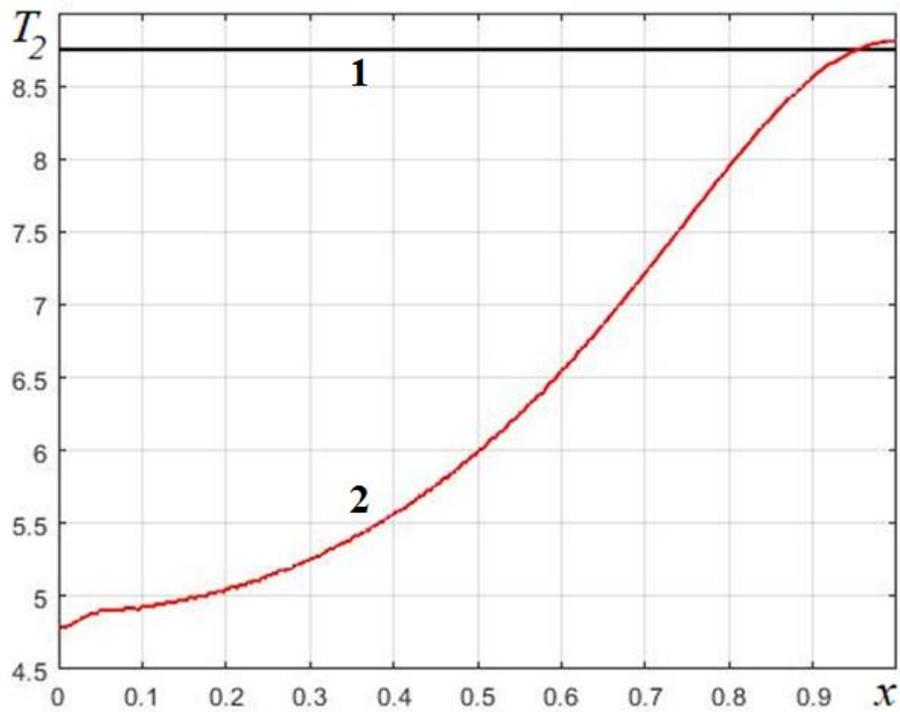


Рис. 4.41. Распределение окружных усилий для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

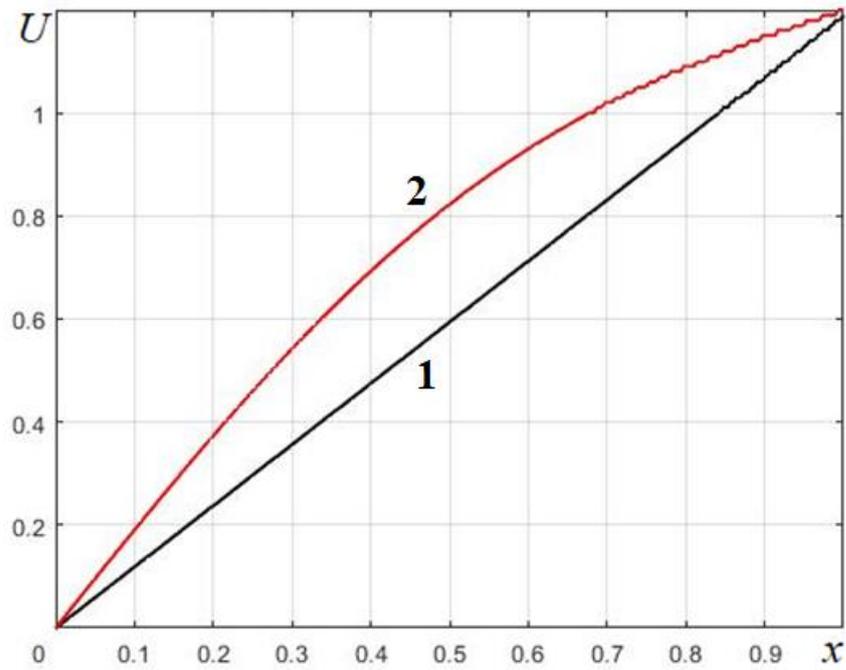


Рис. 4.42. Распределение осевых перемещений для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

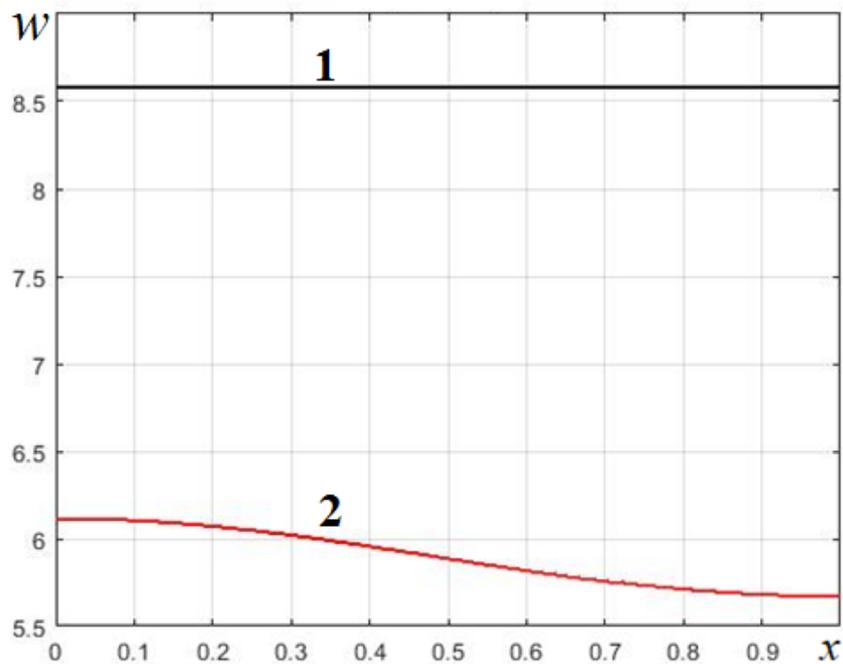


Рис. 4.43. Распределение нормальных перемещений для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

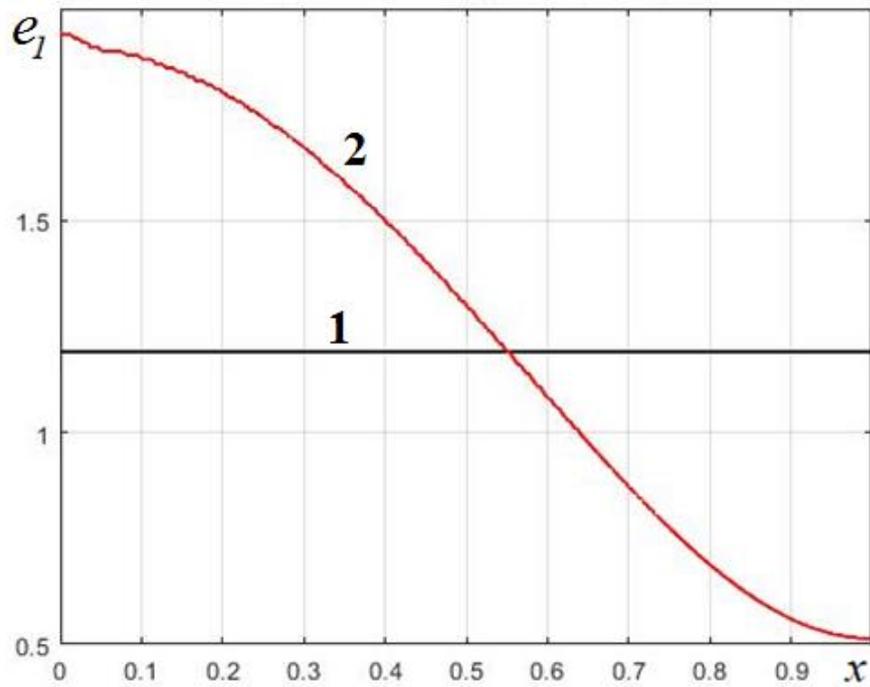


Рис. 4.44. Распределение меридиональных деформаций для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

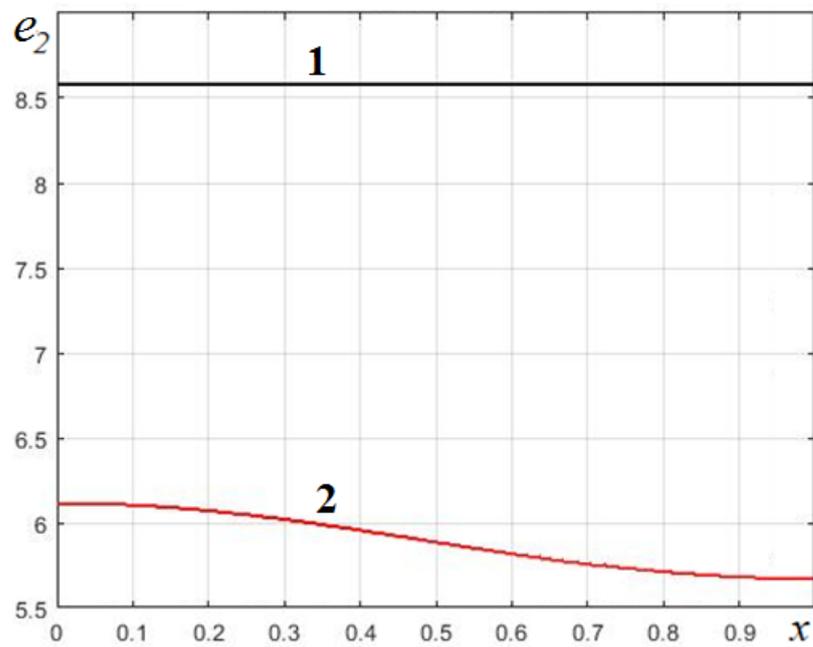


Рис. 4.45. Распределение окружных деформаций для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

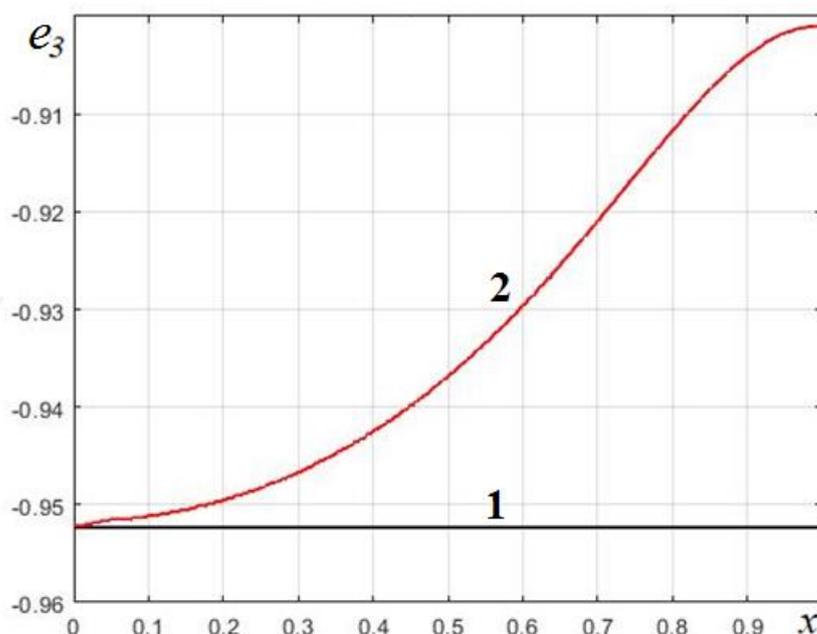


Рис. 4.46. Распределение поперечных деформаций для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогуковского материала

Характерной для закритического деформирования рассматриваемой оболочки является нелинейная зависимость осевых перемещений от координаты, а также увеличение меридиональных деформаций в области, примыкающей к участку с истонченной стенкой, и уменьшение их в области, примыкающей к торцу, по сравнению с деформациями оболочки постоянной толщины. Величина окружных деформаций оболочки с ослабленным сечением при этом по всей длине меридиана остается меньше величины окружных деформаций оболочки постоянной толщины. Также характерно более интенсивное изменение окружных усилий, меридиональных и поперечных деформаций на участке меридиана с истонченной стенкой.

На рис. 4.47-4.51 показано распределение перемещений и деформаций оболочки с местным утонением в закритической области для значений давления

$$p = 1.504 \cdot 10^{-2}, 1.235 \cdot 10^{-2}, 1.023 \cdot 10^{-2}, 7.49 \cdot 10^{-3}, 5.823 \cdot 10^{-3}$$

(соответствующие кривые на рисунках обозначены цифрами от 1 до 5).

Принципиальным отличием от поведения оболочки постоянной толщины в глубокой закритической области является не только переход от линейной к

нелинейной зависимости осевого перемещения оболочки от координаты, но и переменность всех компонент напряженно-деформированного состояния оболочки по длине меридиана.

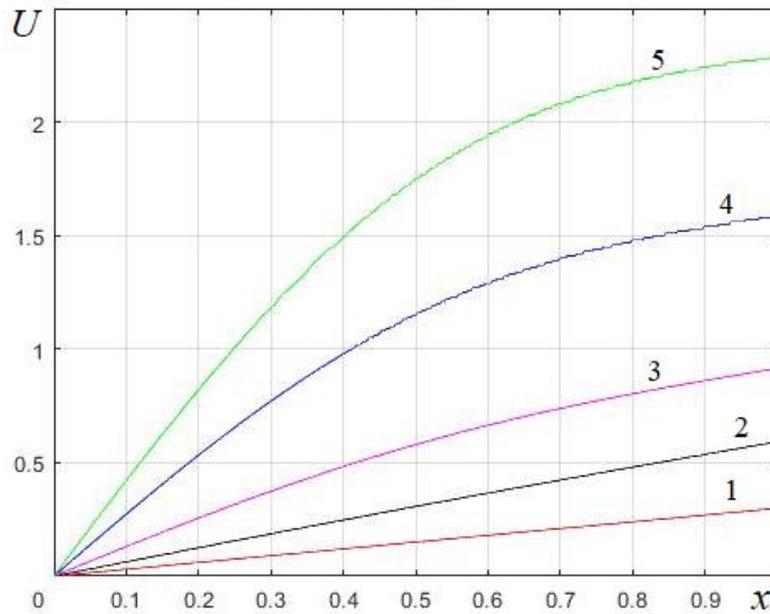


Рис. 4.47. Распределение осевых перемещений при различных степенях раздувания цилиндра из неогукковского материала

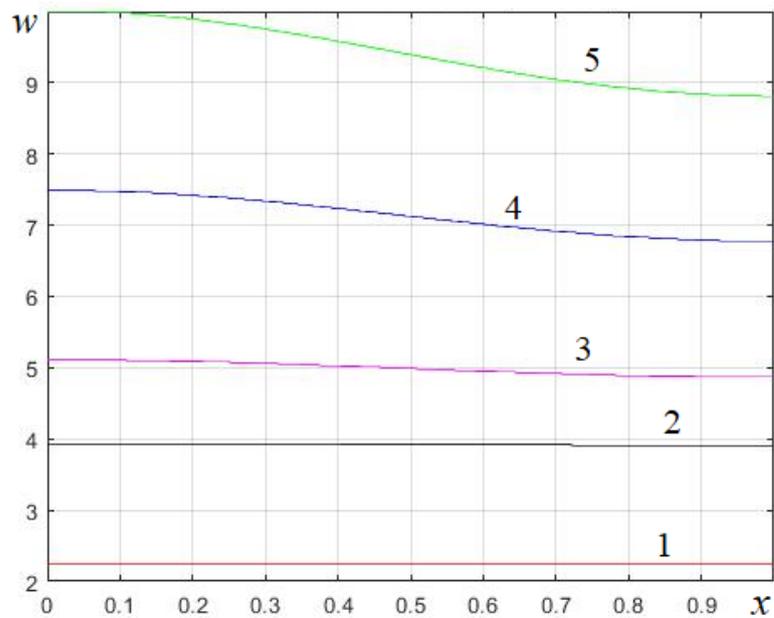


Рис. 4.48. Распределение нормальных перемещений при различных степенях раздувания цилиндра из неогукковского материала

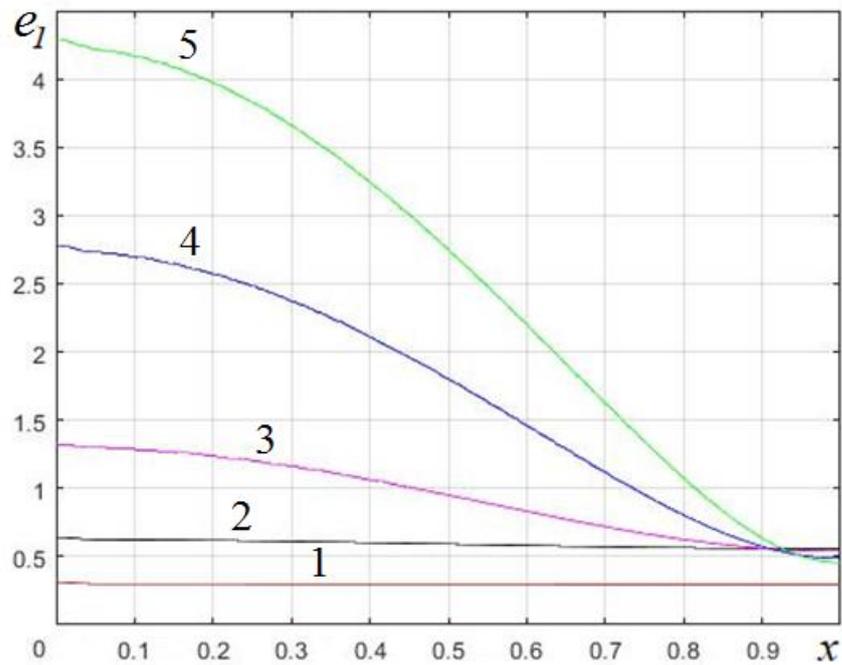


Рис. 4.49. Распределение меридиональных деформаций при различных степенях раздувания цилиндра из неогуковского материала

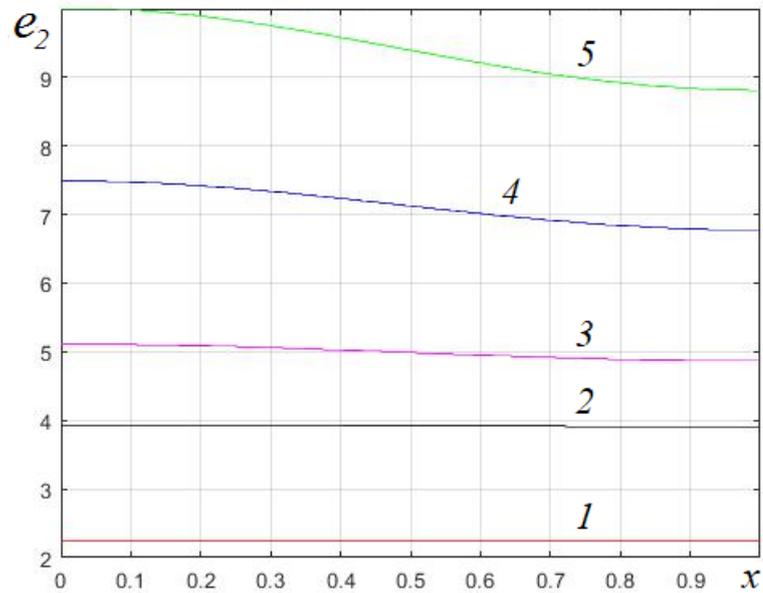


Рис. 4.50. Распределение окружных деформаций при различных степенях раздувания цилиндра из неогуковского материала

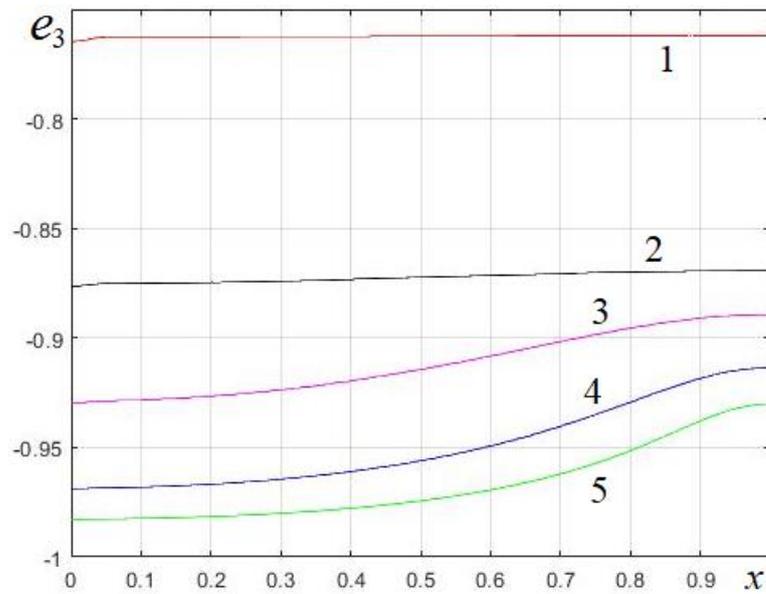


Рис. 4.51. Распределение поперечных деформаций при различных степенях раздувания цилиндра из неогоуковского материала

На рис. 4.52 показаны формы меридиана цилиндра с местным утонением при рассматриваемых значениях давления. При глубоком закритическом деформировании наблюдается выпучивание меридиана оболочки, при этом абсолютные значения поперечной деформации в области выпучивания соответствуют 92-98% в зависимости от величины давления.

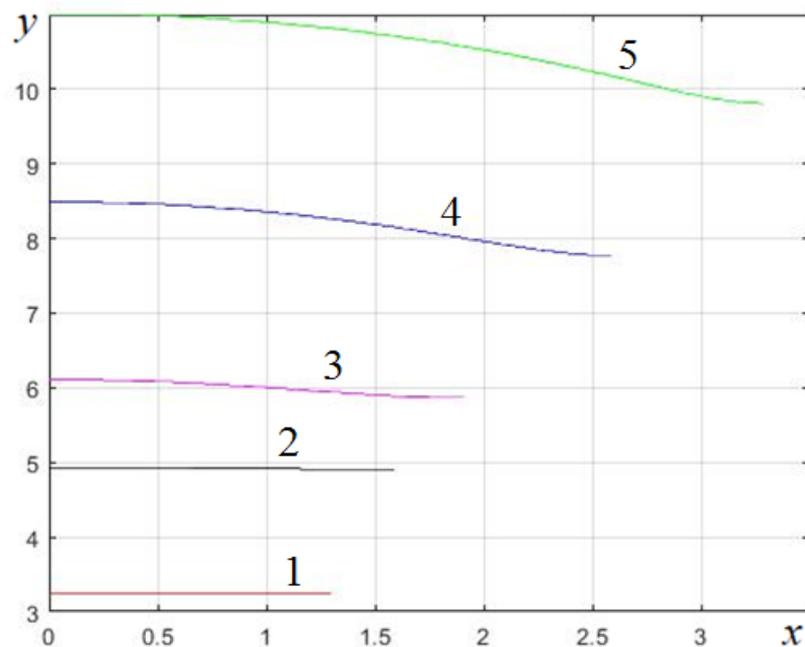


Рис. 4.52. Формы меридиана цилиндра при различных степенях раздувания

Для диаграммы «нагрузка-относительное изменение объема» цилиндра из материала Муни-Ривлина с соотношением коэффициентов $C_{10}/C = 1.097$; $C_{01}/C = 0.00784$, где C – параметр неогуковского материала, оказалось характерным наличие верхнего и нижнего критического давления (рис. 4.53). При этом в случае постоянной толщины стенки цилиндра наличие экстремума на диаграмме (кривая 1 рис. 4.53), соответствующего нижнему критическому давлению, выражено слабо, а характер кривой подобен площадке текучести для пластичных материалов. Более выражено наличие нижнего критического давления для случая деформирования цилиндра с местным утонением (кривая 2 рис. 4.53), при этом величина этого давления ниже величины, необходимой для раздувания цилиндра со стенкой постоянной толщины до такого же объема. Разница в изменениях объема полости, ограниченной цилиндром, для рассматриваемых случаев толщины стенки, проявляется в закритической области при значениях давления ниже $p = 0.0135$ (рис. 4.53).

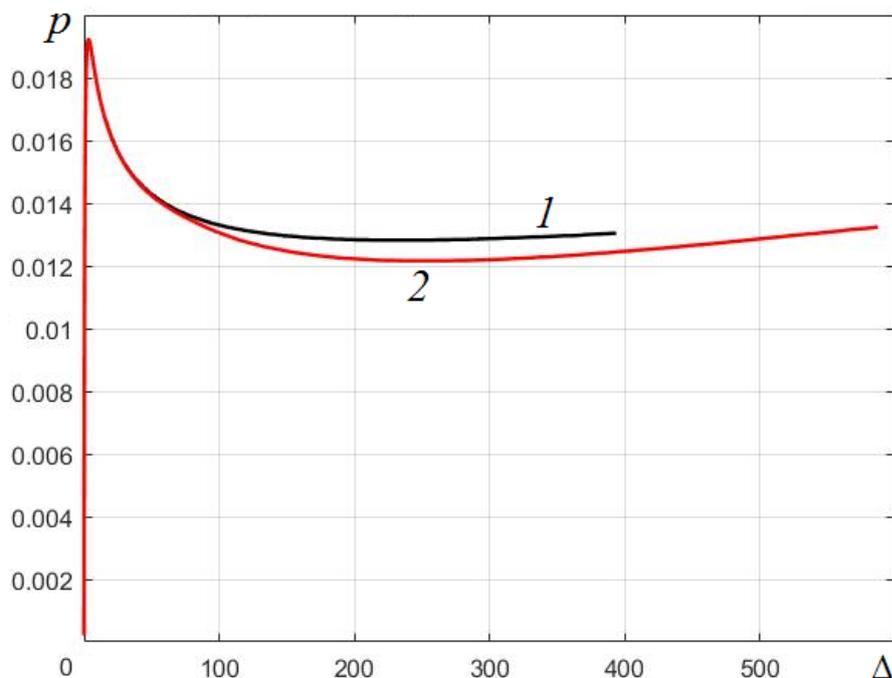


Рис. 4.53. Диаграмма «давление – относительное изменение объема внутренней полости цилиндра»

Вследствие описанной особенности диаграммы рис. 4.53, диаграмма «нагрузка- максимальная по модулю поперечная деформация» для цилиндра из материала Муни-Ривлина также отличается от аналогичных зависимостей в случае неогукковского материала (рис. 4.54). При этом утонение стенки цилиндра происходит преимущественно до достижения нижней критической нагрузки (модуль поперечной деформации $e_3 \approx 95\%$).

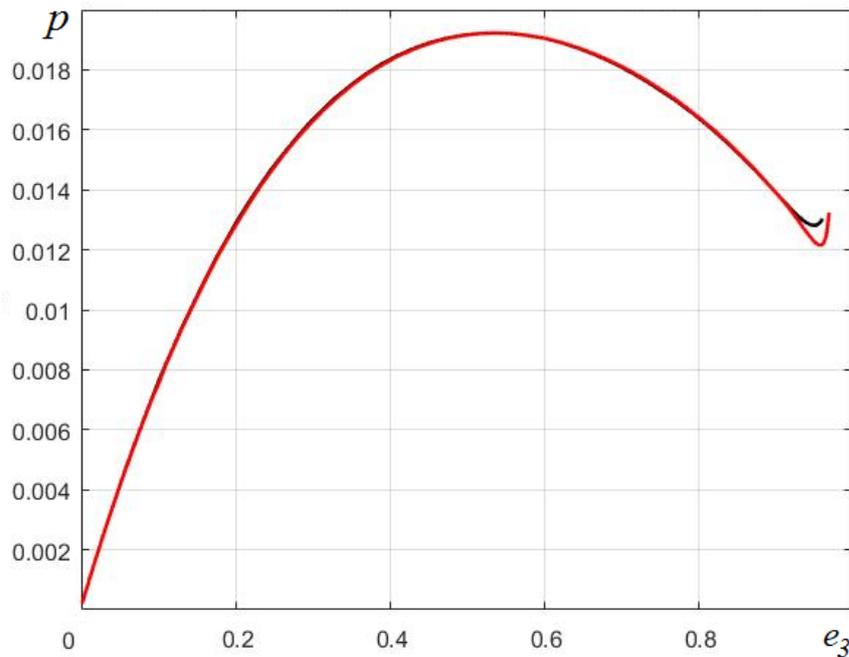


Рис. 4.54. Диаграмма «давление – максимальная по модулю поперечная деформация»

Как и в случае неогукковского материала, для цилиндра из материала Муни-Ривлина при постоянной толщине стенки компоненты напряженно-деформированного состояния распределяются равномерно по меридиану цилиндра при всех рассматриваемых значениях внешней нагрузки. Однако наличие местного утонения после достижения нагрузкой верхнего критического значения существенно влияет лишь на распределение усилий и меридиональных деформаций. На рис. 4.55-4.57 показано распределение указанных компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану цилиндра для случая постоянной (кривая 1) и переменной (кривая 2) толщины стенки для значения закритического давления $p \approx 0.0128$.

Необходимо отметить, что аналогичная картина наблюдается и при иных величинах закритического давления.

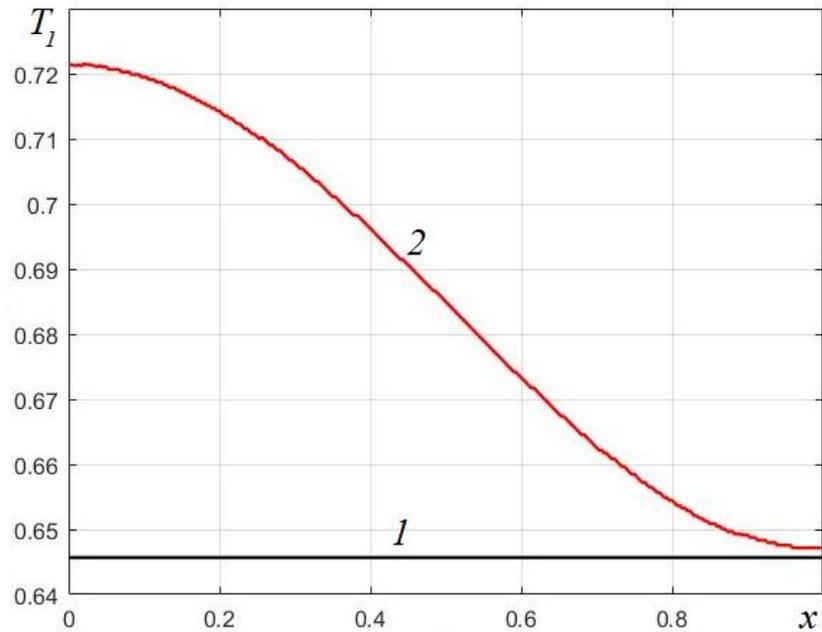


Рис. 4.55. Распределение меридиональных усилий для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из материала Муни-Ривлина

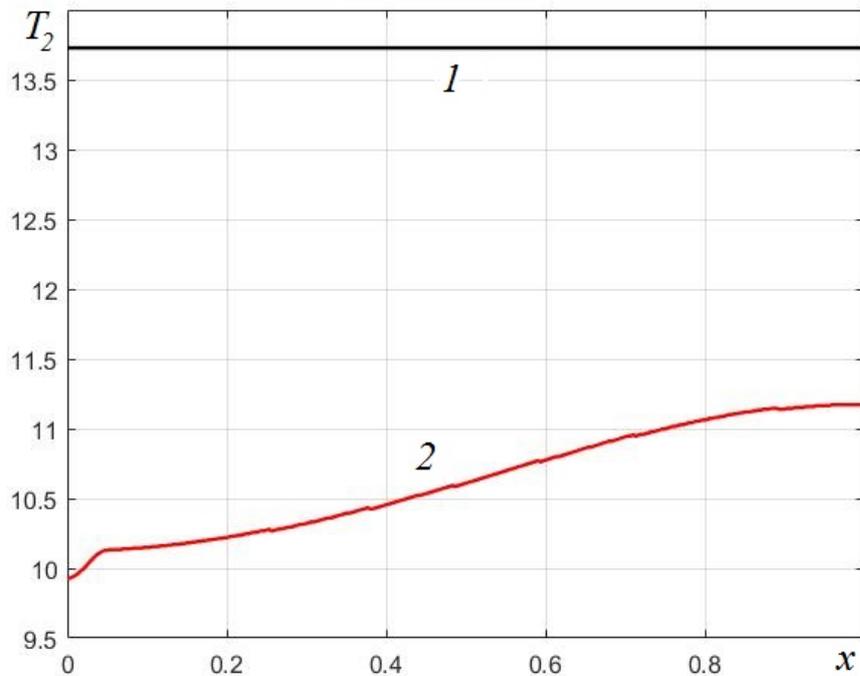


Рис. 4.56. Распределение окружных усилий для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из материала Муни-Ривлина

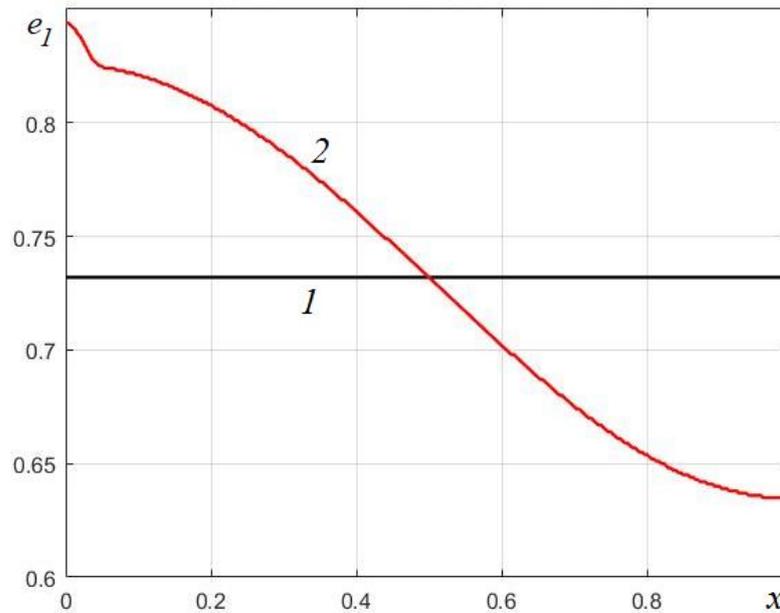


Рис. 4.57. Распределение меридиональных деформаций для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из материала Муни-Ривлина

Рассмотрим случай раздувания цилиндра из материала Йео. Параметры материала Йео, выраженные в долях постоянной C неогуковского материала, примем равными $C_1 = 0.993$, $C_2 = -0.00852$, $C_3 = 0.000214$. На рис. 4.58 представлена полученная для данной задачи диаграмма «нагрузка – относительное изменение объема». Установлено, что наличие местного утонения стенки цилиндра не влияет на характер указанной диаграммы (кривые, соответствующие задачам о деформировании цилиндра постоянной и переменной толщины, совпадают). При этом вычисления проводились до значения модуля поперечной деформации 95%.

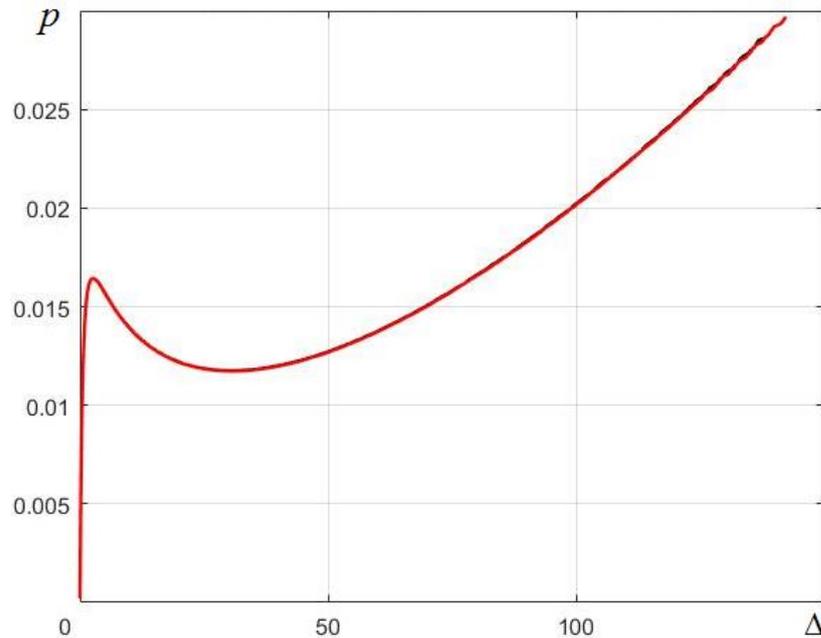


Рис. 4.58. Диаграмма «давление – относительное изменение объема внутренней полости цилиндра»

Для случая деформирования цилиндра из материала Йео местное утонение стенки оболочки практически не влияет на характер напряженно-деформированного состояния. Распределение всех его компонент по меридиану остается постоянным во всей закритической области деформирования, несущественно изменяясь лишь на участке утонения для функций усилий, а также меридиональных и поперечных деформаций. На рис. 4.59-4.62 представлены соответствующие графики для значений давления $p = 1.4 \cdot 10^{-2}, 1.175 \cdot 10^{-2}, 1.4 \cdot 10^{-2}, 2.01 \cdot 10^{-3}, 2.6 \cdot 10^{-2}$ (кривые обозначены цифрами соответственно от 1 до 5). Вторая из величин давления в рассматриваемом диапазоне соответствует нижней критической нагрузке.

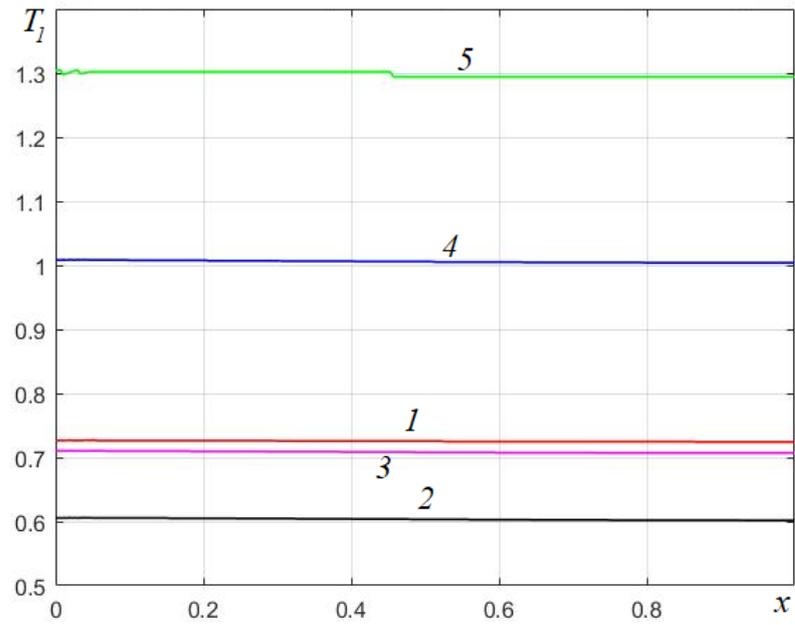


Рис. 4.59. Распределение истинных меридиональных усилий при различных степенях раздувания цилиндра из материала Йео с местным утонением

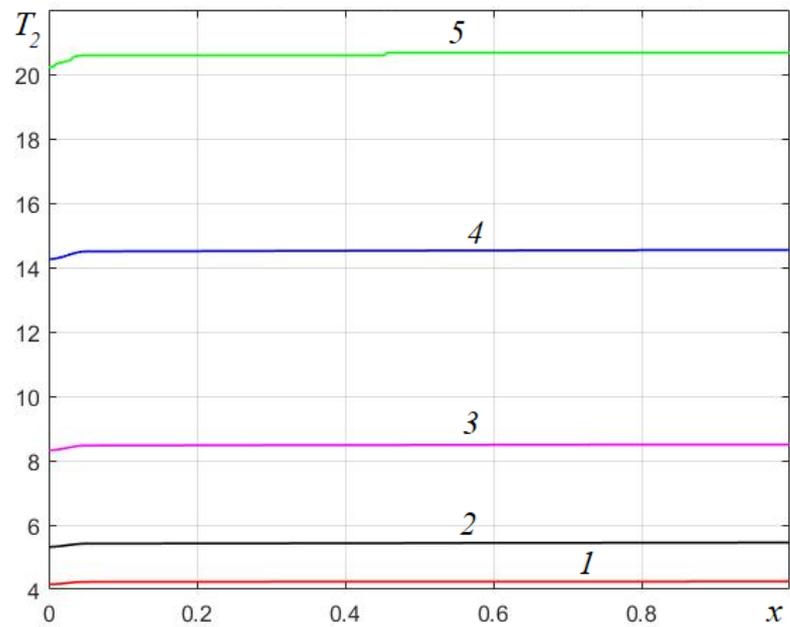


Рис. 4.60. Распределение истинных окружных усилий при различных степенях раздувания цилиндра из материала Йео с местным утонением

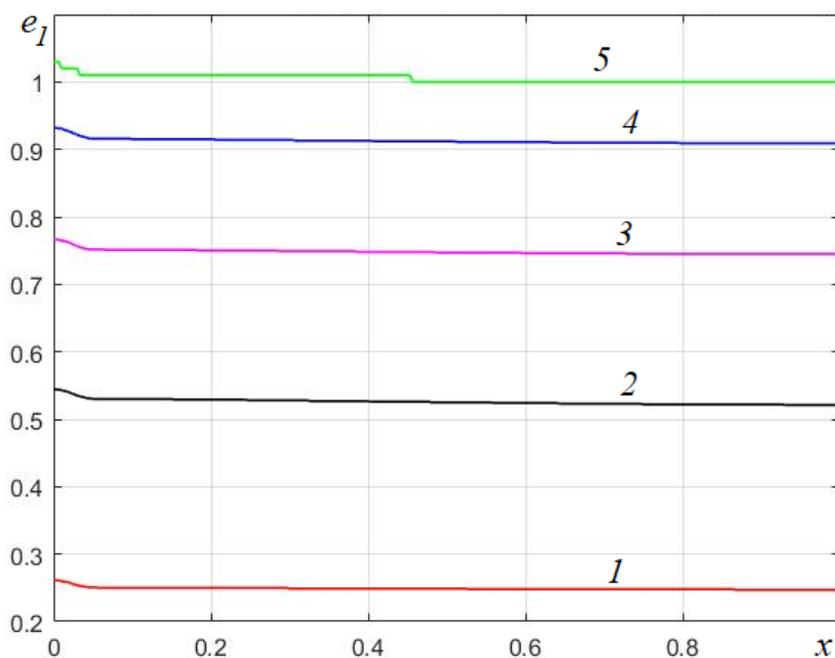


Рис. 4.61. Распределение меридиональных деформаций при различных степенях раздувания цилиндра из материала Йео с местным утонением

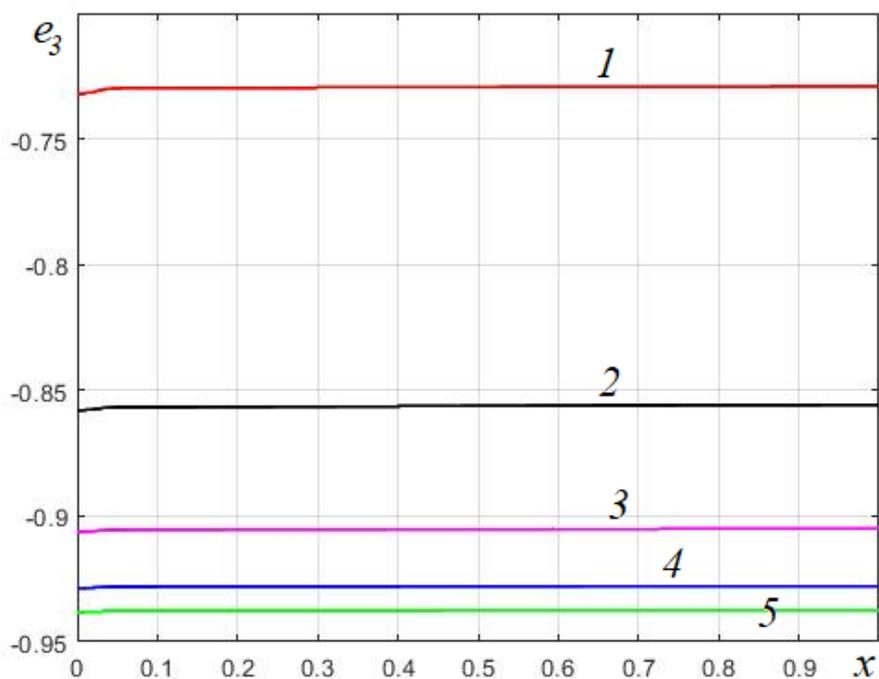


Рис. 4.62. Распределение поперечных деформаций при различных степенях раздувания цилиндра из материала Йео с местным утонением

На рис. 4.63 показана форма меридиана деформированного цилиндра при рассматриваемых значениях давления. Как и в случае материала Муни-

Ривлина, меридиан остается прямым, однако при превышении нагрузки нижнего критического значения оболочка продолжает удлиняться.

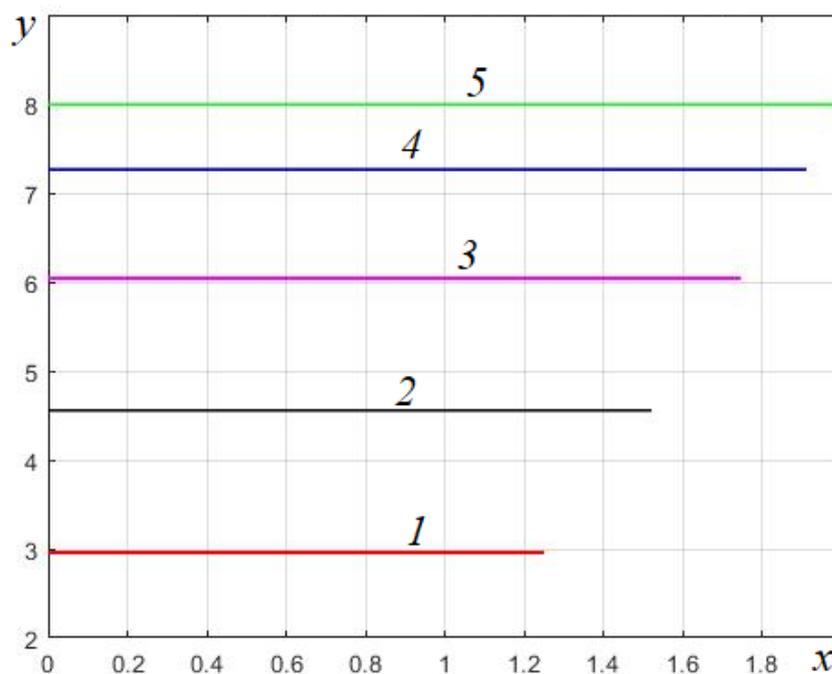


Рис. 4.63. Формы меридиана цилиндра из материала Йео при различных степенях раздувания

Таким образом, введение локального малого изменения толщины цилиндрической оболочки из высокоэластичного материала приводит к существенному изменению ее закритического поведения, а при решении краевой задачи о статическом деформировании такой оболочки позволяет определить тип потери устойчивости – образование «пузыря» или образование шейки.

При скачкообразном изменении геометрических параметров оболочки или иных граничных условиях более корректным может являться использование соотношений моментной теории оболочек. Из всего многообразия таких соотношений выберем уравнения В.Н. Паймушина [110], сформулированные для случая конечных перемещений и деформаций на основании модифицированной модели Кирхгофа-Лява, как наиболее адекватно описывающие поведение оболочки из высокоэластичного

материала. В статье [110] уравнения представлены в тензорной форме, поэтому для приведения их к виду, требуемому для применения к ним разработанного вычислительного алгоритма, необходимо записать их в скалярной форме. Вводя безразмерные параметры для указанной системы соотношениями (2.32) и дополняя их безразмерными параметрами для изгибающих моментов M_1, M_2 и изменений кривизны K_1, K_2 в виде $\{M_1 \ M_2\}^* = \{M_1 \ M_2\} / Ch_0^2 / 12$; $\{K_1 \ K_2\}^* = \{K_1 \ K_2\} h_0$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dT_{1x}}{dx} &= -\mathcal{G}_1(1+e_2)pR; \\ \frac{dT_{1z}}{dx} &= \frac{T_{2y}}{R_c} - (1+e_2)(1+\varepsilon_{11})pR; \\ \frac{dM_1}{dx} &= \frac{(1+e_1)\sin\Phi}{(1+e_2)R_c}M_1 + \frac{(1+e_2)\sin\Phi}{(1+e_1)R_c}M_2 + 12\frac{Q}{(1+e_3)}R; \\ \frac{du}{dx} &= \varepsilon_{11}; \quad \frac{dw}{dx} = -\mathcal{G}_1; \quad \frac{d\Phi}{dx} = -(1+e_2)K_1R \end{aligned}$$

и дополнительных алгебраических соотношений

$$\begin{aligned} Q &= T_{1z}\cos\Phi - T_{1x}\sin\Phi; \\ T_1(1+e_1) + \frac{1}{12}M_1\frac{K_1}{1+e_1} &= T_{1x}\cos\Phi + T_{1z}\sin\Phi; \\ T_{2y} &= T_2(1+e_2) + \frac{1}{12}M_2\frac{\cos^2\Phi(1+e_3)}{R_cR}; \\ e_2 &= \frac{w}{R_c}; \quad K_2 = \frac{1}{R_cR} \cdot \left(\frac{\cos^2\Phi}{1+e_1} - 1 \right); \\ \cos\Phi &= \frac{1+\varepsilon_{11}}{1+e_1}; \quad \sin\Phi = -\frac{\mathcal{G}_1}{1+e_1}. \end{aligned}$$

Здесь все обозначения соответствуют принятым выше, причем e_i - удлинения меридиана на срединной поверхности оболочки. Кроме того, введены обозначения M_1, M_2 - меридиональный и окружной моменты соответственно, K_1, K_2 - изменения кривизны меридиана на срединной

поверхности; Φ - угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки; R_c - радиус кривизны меридиана цилиндрической оболочки. Также необходимо ввести физические соотношения для высокоэластичного материала, связывающие изгибающие моменты с изменениями кривизн. В работе такие соотношения построены для случая несжимаемого неогуковского материала в предположении линейного распределения деформаций по толщине оболочки $e_i^M(z) = e_i + zK_i$ и в безразмерной форме имеют вид

$$M_1 = 2h^2 \left[K_1 \left(\frac{1}{(1+e_1)^2} + \frac{3}{(1+e_1)^6 \cdot (1+e_2)^2} \right) + 2K_2(1+e_3)^4 \right], \quad 1 \Leftrightarrow 2.$$

Характерной особенностью физических соотношений для изгибающих моментов в случае высокоэластичного материала является зависимость не только от изменений кривизны, но и от удлинений меридиана, а также от поперечной деформации.

Рассмотрим задачу о раздувании цилиндрической оболочки из неогуковского материала. Пусть длина оболочки $L = 10R$, толщина центрального участка длиной $L_0 = 2R$ составляет $h_0 = 0.01R$, толщина остальной части оболочки $h = 0.02R$ (рис. 4.64).

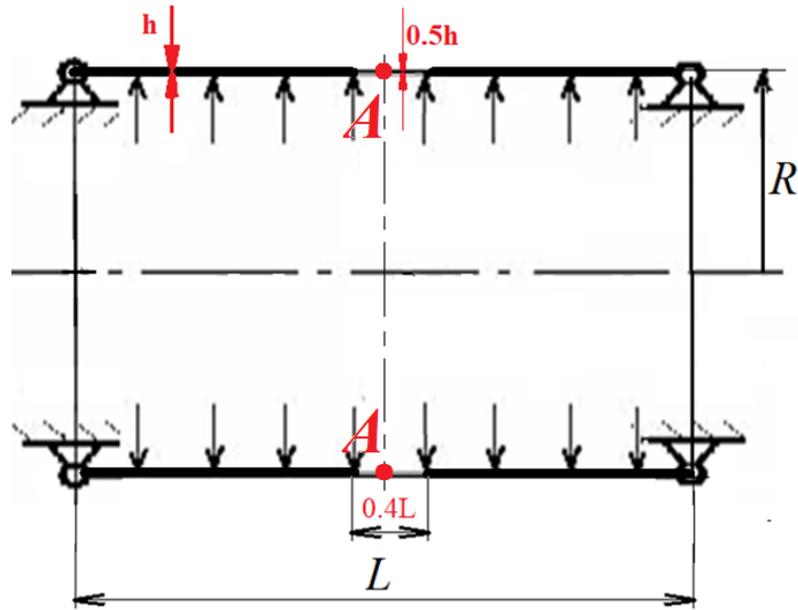
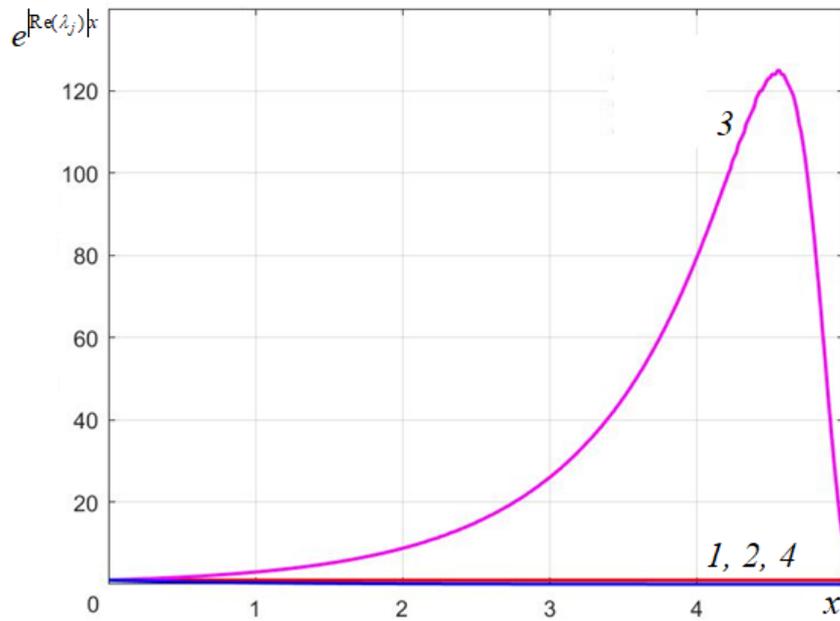


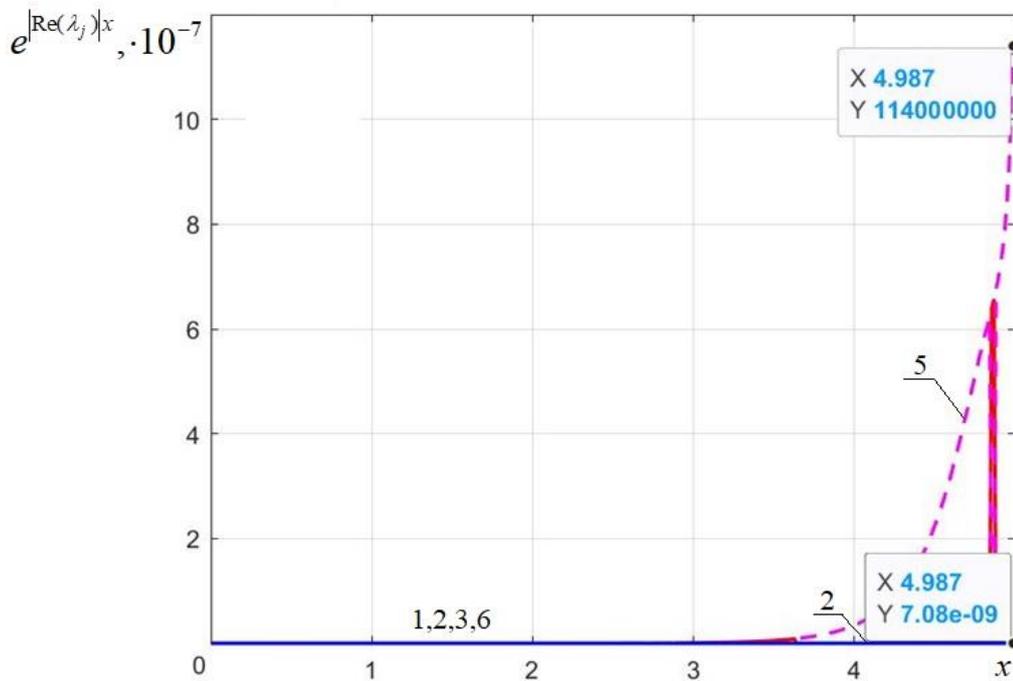
Рис. 4.64. Расчетная схема цилиндрической оболочки кусочно-постоянной толщины

Одним из существенных преимуществ использования моментной теории оболочек по сравнению с безмоментной является ее хорошая обусловленность при малых значениях нагрузки, что позволяет на первом шаге по параметру продолжения использовать тривиальное решение в качестве прогнозируемого и отказаться от регуляризации разрешающей системы уравнений. Однако при больших значениях нагрузки обусловленность системы уравнений моментной теории ухудшается. На рис. 4.65 а, б показан типичный пример распределения характеризующих обусловленность задачи величин $e^{|\operatorname{Re}(\lambda_j)|x}$, где λ_j - j -ое собственное число матрицы Якоби системы нелинейных дифференциальных уравнений рассматриваемой краевой задачи. Рисунки демонстрируют свойства систем уравнений безмоментной (рис. 4.65, а) и моментной (рис. 4.65, б) теории оболочек. Оба рисунка характеризуют системы уравнений для одного и того же значения раздувающего оболочку давления. Цифры, нумерующие кривые, соответствуют номерам собственных чисел матриц Якоби. Типичным является различие максимальных и минимальных значений

величин $e^{|\operatorname{Re}(\lambda_j)|x}$ систем уравнений безмоментной и моментной теории оболочек на 5-15 порядков.



а)



б)

Рис. 4.65. Характеристики обусловленности систем уравнений безмоментной (а) и моментной (б) теории оболочек

Числа обусловленности систем линейных алгебраических уравнений используемого в вычислительном алгоритме метода ортогонализации при проведении расчетов на основании соотношений моментной теории оболочек превышают на величину от 3 до 30 порядков соответствующие числа, получаемые при вычислениях по уравнениям безмоментной теории. Описанные особенности расчетов обуславливают большую сложность получения решений задач о раздувании оболочек при больших деформациях на основании соотношений моментной теории, поэтому использование последней должно быть обосновано. Так, при решении рассматриваемой задачи применение уравнений моментной теории оболочек позволяет уточнить картину распределения напряжений в окрестности торца и скачкообразного изменения толщины оболочки (рис. 4.66-4.67).

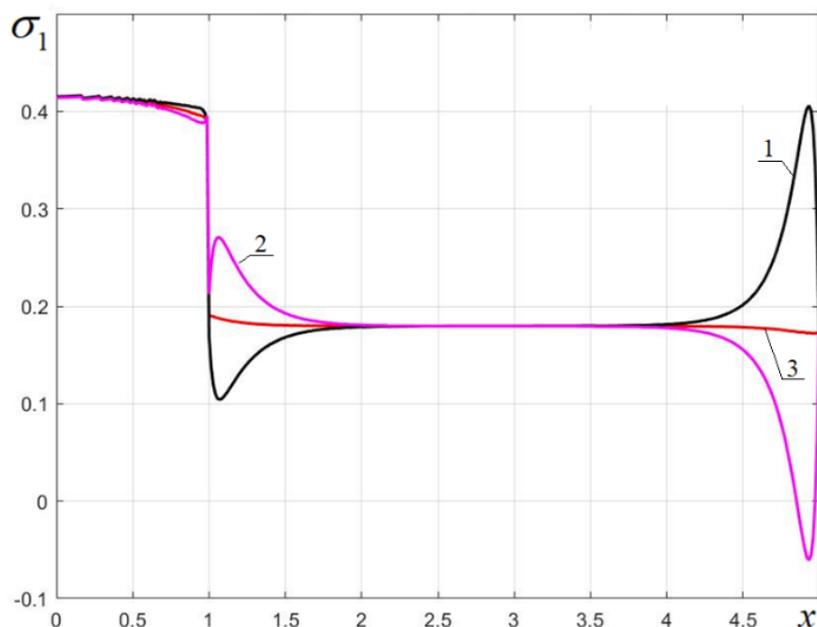


Рис. 4.66. Распределение меридиональных напряжений для цилиндра кусочно-постоянной толщины

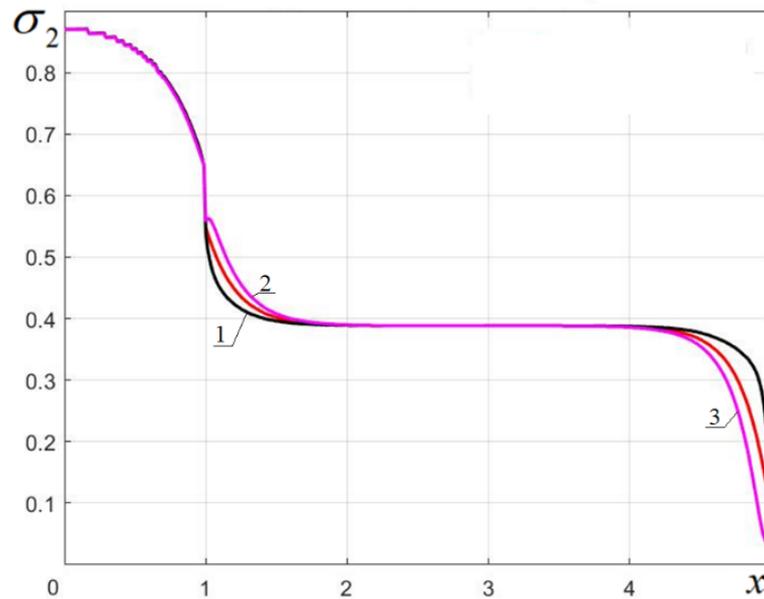


Рис. 4.67. Распределение окружных напряжений для цилиндра кусочно-постоянной толщины

На рис. 4.66-4.67 представлены результаты расчетов меридионального (рис. 4.66) и окружного (рис. 4.67) напряжений при использовании соотношений моментной теории на наружной, внутренней и срединной поверхностях оболочки (кривые обозначены соответственно цифрами 1, 2, 3). В областях закреплений и изменения толщины оболочки учет моментного состояния оболочки вносит значительный вклад в картину распределения напряжений. При этом существенным преимуществом использования соотношений моментной теории является возможность получения отрицательных значений напряжений (рис. 4.66) без перехода к иным физическим соотношениям, необходимого при использовании соотношений безмоментной теории и зачастую приводящего к непреодолимым вычислительным трудностям.

4.7. Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки вращения из гиперупругого материала

В связи с тем, что задача расчета мягкой оболочки из высокоэластичного материала подразумевает учет и физической, и геометрической нелинейности, особый интерес представляет исследование влияния параметров исходных данных на поведение оболочки. К таким параметрам можно отнести как коэффициенты, характеризующие свойства материала, так и геометрические размеры оболочки. Как правило, анализ влияния тех или иных характеристик на напряженно-деформированное состояние конструкций проводится методом перебора величин интересующей характеристики в некотором диапазоне и решения задачи заново для каждой величины. Однако использование рассматриваемого в диссертации метода непрерывного продолжения по параметру позволяет разработать более эффективный алгоритм параметрического анализа конструкции, обобщая алгоритм работы [60] для возможности расчета оболочек из высокоэластичных материалов [72]. При этом вместо параметра продолжения решения T , выбираемого исходя из условий однозначности продолжения и в общем случае не имеющего физического смысла, для дифференцирования разрешающих соотношений рассматриваемой задачи может быть выбран любой из параметров исходных задачи (физическая постоянная, геометрический параметр и т.п.). Тогда при использовании алгоритма метода непрерывного продолжения по параметру будет сформулирована система уравнений метода, аналогичная представленной в п. 4.1 для задач исследования статического поведения мягких оболочек. Решение такой системы при изменении выбранного параметра исходных данных в некотором диапазоне позволяет проанализировать зависимость напряженно-деформированного состояния оболочки от указанного параметра. При этом предполагается, что исследуемая зависимость не имеет

особых точек.

Однако вследствие того, что параметр дифференцирования приобретает смысл параметра исходных данных задачи, из системы разрешающих соотношений метода дифференцирования по параметру исключается уравнение, связывающее параметр продолжения с искомыми компонентами вектора разрешающих переменных. Поэтому необходимо задать некоторое условие, заменяющее указанное уравнение. Назовем его условием параметрического анализа, смысл которого в общем случае – отражение взаимосвязи исследуемого параметра исходных данных с фиксированными значениями этих параметров, параметром нагрузки и искомыми компонентами напряженно-деформированного состояния оболочки. Запишем это условие для многосегментной краевой задачи в виде скалярной функции векторных аргументов $\mathbf{y}_{i,k}, \mathbf{q}_{i,k}, \mu_i$, где $\mathbf{y}_{i,k}, \mathbf{q}_{i,k}$ – дискретные значения функций $\mathbf{y}_i(x), \mathbf{q}_i(x)$:

$$\Psi(\mathbf{y}_{i,k}, \mathbf{q}_{i,k}, \mu_i) = 0, \quad i \in [1, N]. \quad (4.37)$$

Здесь N – число сегментов разбиения интервала интегрирования краевой задачи. На первом этапе предлагаемого алгоритма проводится дифференцирование по выбранному параметру P соотношений исходной нелинейной краевой задачи (3.43)-(3.46). При этом рассмотрим общий случай параметрического анализа, когда условие, при котором он выполняется, накладывается не только на действующую на оболочку нагрузку, но и на любые компоненты напряженно-деформированного состояния. Тогда для случая V канонической формы с дополнительными алгебраическими соотношениями, соответствующего рассматриваемому в диссертации комплексу задач, они приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\mathbf{y}}_i}{dx_i} &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \dot{\mathbf{z}}_i + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i \dot{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mu_i} \dot{\mu}_i; \quad i \in [1, N], \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{y}_i} \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{z}_i} \dot{\mathbf{z}}_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i \dot{\alpha} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu_i} \dot{\mu}_i &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Здесь необходимо подчеркнуть отличие продифференцированных соотношений от представленных в п. 4.1 – дополнительное слагаемое $\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} \dot{\boldsymbol{\mu}}_i$, характеризующее зависимость решения от исследуемого параметра.

Выражая скорость вектора дополнительных переменных по параметру $\dot{\mathbf{z}}_i = \frac{d\mathbf{z}_i}{dP}$ из соотношений (4.38), получаем квазилинейную краевую задачу в скоростях переменных по параметру P

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i^* \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{C}_i^* \dot{\boldsymbol{\mu}}_i + \mathbf{a}_i^* \dot{\alpha} \quad (4.39)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_{1,1}^* \dot{\mathbf{y}}_{1,1} + \mathbf{D}_{1,1}^* \dot{\boldsymbol{\mu}}_{1,1} + \mathbf{b}_{1,1}^* \dot{\alpha} = \mathbf{0}, \quad 1,1 \rightleftarrows N,2 \quad (4.40)$$

и условиями сопряжения сегментов

$$\dot{\mathbf{y}}_j(x_{j,2}) = \dot{\mathbf{y}}_{j+1}(x_{j+1,1}) + \dot{\alpha} \mathbf{d}_{j+1,1}; \quad j \in [1, N-1]. \quad (4.41)$$

Здесь

$$\mathbf{A}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{y}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{y}_i},$$

$$\mathbf{C}_i^* = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \boldsymbol{\mu}_i},$$

$$\mathbf{a}_i^* = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i,$$

$$\mathbf{B}_{1,1}^* = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{y}_1} \right)_1 - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{y}_1} \right)_1,$$

$$\mathbf{D}_{1,1}^* = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)_1 - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)_1,$$

$$\mathbf{b}_{1,1}^* = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)_1 \mathbf{q}_{1,1} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)_1 \mathbf{q}_{1,1}.$$

Дифференцируя условие параметрического анализа (4.37) по выбранному параметру P , получаем

$$\sum_{k=1}^l \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{y}_{i,k}} \dot{\mathbf{y}}_{i,k} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q}^* \dot{\alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\mu}} \dot{\boldsymbol{\mu}} = 0. \quad (4.42)$$

Приведенные выкладки наглядно демонстрируют необходимость введения вектора параметров задачи $\boldsymbol{\mu}$ наравне с координатой x как аргумента вектора разрешающих переменных \mathbf{y} для разработки алгоритма анализа зависимости решения задачи от ее параметров.

Сформулированная краевая задача (4.39)-(4.41) является линейной относительно как вектора скоростей разрешающих переменных \mathbf{y}_i , так и скорости изменения параметра нагрузки $\dot{\alpha}$. Поэтому, используя возможность суперпозиции решения линейных задач, представим решение в виде двух составляющих

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \dot{\mathbf{y}}_i^1 + \dot{\mathbf{y}}_i^2 \dot{\alpha}, \quad i \in [1, N]. \quad (4.43)$$

В результате краевая задача разбивается на две задачи в относительных $\dot{\mathbf{y}}_i^2$ и абсолютных скоростях $\dot{\mathbf{y}}_i^1$ изменения разрешающих переменных по параметру дифференцирования

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}_i^1}{dx} = \mathbf{A}_i^* \dot{\mathbf{y}}_i^1 + \mathbf{C}_i^* \dot{\boldsymbol{\mu}}, \quad i \in [1, N] \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_{j,1}^1 &= \dot{\mathbf{y}}_{j+1,2}^1; & j \in [2, N] \\ \mathbf{B}_{1,1}^* \dot{\mathbf{y}}_{1,1}^1 + \mathbf{D}_{1,1}^* \dot{\boldsymbol{\mu}}_1 &= \mathbf{0}; & 1,1 \rightleftharpoons N,2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Аналогично краевая задача в относительных скоростях $\dot{\mathbf{y}}_i^2$ имеет вид

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}_i^2}{dx} = \mathbf{A}_i^* \dot{\mathbf{y}}_i^2 + \mathbf{a}_i^*; \quad i \in [1, N] \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_{j,1}^2 &= \dot{\mathbf{y}}_{j+1,2}^2; & j \in [2, N] \\ \mathbf{B}_{1,1}^* \dot{\mathbf{y}}_{1,1}^2 + \mathbf{b}_{1,1}^* &= \mathbf{0}; & 1,1 \rightleftharpoons N,2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

После решения указанных двух линейных краевых задач по условию параметрического анализа (4.42) определяется скорость изменения параметра

нагрузки $\dot{\alpha}$, а по (4.43) – суммарное значение вектора скоростей разрешающих переменных.

В частном случае исследования зависимости поведения оболочки из высокоэластичного материала от какого-либо параметра при условии постоянства внешней нагрузки имеем $\dot{\alpha} = 0$. Тогда необходимость в расчете $\dot{\alpha}$ пропадает, а при использовании метода дифференцирования по параметру формируется лишь одна квазилинейная краевая задача вида

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i^* \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{C}_i^* \dot{\boldsymbol{\mu}}_i \quad (4.48)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_{1,1}^* \dot{\mathbf{y}}_{1,1} + \mathbf{D}_{1,1}^* \dot{\boldsymbol{\mu}}_{1,1} = \mathbf{0}, \quad 1, 1 \Leftrightarrow N, 2 \quad (4.49)$$

и условиями сопряжения сегментов

$$\dot{\mathbf{y}}_j(x_{j,2}) = \dot{\mathbf{y}}_{j+1}(x_{j+1,1}); \quad j \in [1, N-1]. \quad (4.50)$$

При любом из описанных вариантов условия параметрического анализа после определения вектора скоростей разрешающих переменных $\dot{\mathbf{y}}_i$, $i \in [1; N]$ из соотношений (4.38) находится значение вектора скоростей дополнительных переменных $\dot{\mathbf{z}}_i$, после чего решаются начальные задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_{i,j}}{dP} &= \dot{\mathbf{y}}_{i,j}(\mathbf{y}_{i,j}, x_{i,j}, P), \\ \frac{d\mathbf{z}_{i,j}}{dP} &= \dot{\mathbf{z}}_{i,j}(\mathbf{y}_{i,j}, x_{i,j}, P), \quad i \in [1, N], \quad j \in [1, N_i] \\ \frac{d\alpha}{dP} &= \dot{\alpha}(\mathbf{y}_{i,j}, P). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Решение взаимосвязанных квазилинейных краевых (4.44)-(4.45), (4.46)-(4.47) или (4.48)-(4.50) и начальных (4.51) задач проводится в требуемом диапазоне изменения параметра, для которого выполняется анализ поведения оболочки, по описанному в п. 4.1 итерационному алгоритму.

Описанная методика параметрического анализа реализована в комплексе программ для ЭВМ, написанном в среде Matlab [76].

В качестве конкретного примера рассмотрим влияние параметра материала Муни-Ривлина $\alpha = C_{01}/C_{10}$ на напряженно-деформированное состояние полусферической оболочки, закрепленной на экваторе подвижным шарниром, т.е. в соотношениях представленного в п. 4.1 алгоритма принимаем в качестве параметра дифференцирования $P = \alpha$ [87]. Пусть значение параметра тонкостенности $R_0/h_0 = 100$. Назначим следующие параметры обезразмеривания: $R_0 = R_0$, $h_0 = h_0$, $C = C_{10}$.

Условие параметрического анализа примем в виде

$$w_0 = w_0^*,$$

где w_0^* – некоторый заранее заданный прогиб полюса полусферы, не изменяющийся при изменении параметра материала α .

Перед выполнением параметрического анализа расчет статического деформирования полусферы проводится методом дифференцирования по параметру при значении параметра $\alpha = 0$, соответствующем физическим соотношениям неогукковского материала. При этом в расчете задается число шагов по параметру продолжения решения T (назначаемому обычным способом, используемым при исследовании статического деформирования конструкции), после выполнения которых начинается параметрический анализ при фиксированном значении прогиба w_0^* , соответствующем заданному числу шагов базового расчета статического деформирования. На первом шаге параметрического анализа задается шаг по параметру анализа состояния оболочки $P = \alpha$, затем он изменяется автоматически в зависимости от скорости сходимости итерационного процесса решения при обеспечении требуемой близости функций напряженно-деформированного состояния оболочки при текущем значении параметра анализа для двух последовательных шагов итерационного процесса.

Одной из важных характеристик оболочечной конструкции является величина критической нагрузки, под которой будем понимать значение раздувающего оболочку давления, при достижении которого появляется

неоднозначность форм статического равновесия оболочки. На диаграммах зависимости давления от прогиба полюса сферической оболочки (диаграммах нагружения) критической нагрузке соответствует максимальное значение давления, которое способна воспринимать оболочка. До достижения этого значения (точки бифуркации) ветвь диаграммы является возрастающей, после – убывающей. Описанное изменение поведения диаграммы было использовано для определения верхней критической нагрузки p_{cr} рассматриваемой полусферической оболочки при исследовании зависимости p_{cr} от параметра материала Муни-Ривлина α .

При этом была проведена серия 12 расчетов по предлагаемой методике параметрического анализа, для которых базовыми являлись расчеты статического деформирования оболочки до значений прогиба полюса оболочки w_0^* , соответствующих 12 последовательно расположенным друг за другом в окрестности точки бифуркации точкам на диаграмме нагружения полусферы из материала Муни-Ривлина при значении параметра материала $\alpha = 0$. Для каждого из расчетов параметрического анализа величина α варьировалась в диапазоне $\alpha = [0; 0.125]$. Таким образом в каждом расчете были получены зависимости значения нагрузки, при которых оболочка раздувается до исследуемого значения прогиба полюса w_0^* , от величины параметра α . Тогда для каждого значения параметра материала α за критическое было принято экстремальное значение нагрузки, полученное в указанной серии 12 расчетов, при условии, что в этой серии величины нагрузки как возрастали, так и убывали. В противном случае при непрерывном возрастании величин нагрузки следует сделать вывод, что рассматриваемый их диапазон соответствует устойчивой ветви диаграммы нагружения, а при непрерывном убывании этих величин – неустойчивой ветви.

На рис. 4.68 представлена зависимость определенных таким образом критических нагрузок от значения параметра материала α .

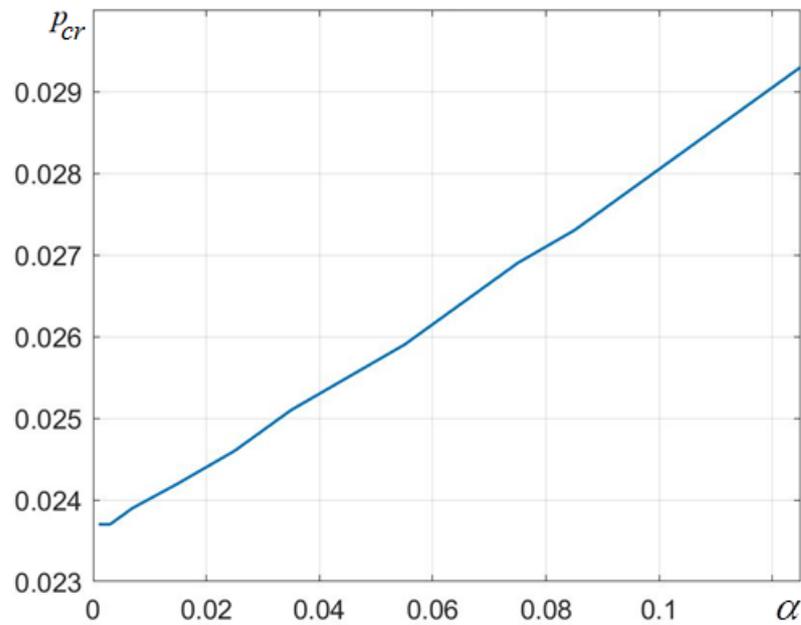


Рис. 4.68. Зависимость критического давления от параметра материала Муни-Ривлина α

Проведенные контрольные расчеты статического деформирования оболочки при промежуточных значениях параметра $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$ показали совпадение значений критических нагрузок со значениями, полученными при выполнении параметрического анализа, с погрешностью не более 5%.

Продемонстрируем возможности параметрического анализа на примере исследования влияния параметра материала Муни-Ривлина α на характеристики напряженно-деформированного состояния оболочек, имеющих указанные в п. 4.5 форму меридиана, геометрические размеры и условия закрепления [87]. Примем такое значение внешней нагрузки, при котором оболочки всех форм меридиана находятся в докритическом состоянии и при этом испытывают достаточно большие деформации – $p = 0.0178$. Необходимо учесть специфику деформирования конической оболочки, для которой удалось провести расчеты лишь до значения нагрузки $p = 0.011$.

На рис. 4.69-4.78 представлены зависимости максимальных касательных и нормальных перемещений, меридиональных, окружных и поперечных деформаций, меридиональных, окружных и эквивалентных напряжений, меридиональных и окружных усилий от параметра материала α . На всех графиках цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены кривые соответствующие полусферической, цилиндрической, торовой и конической оболочкам соответственно.

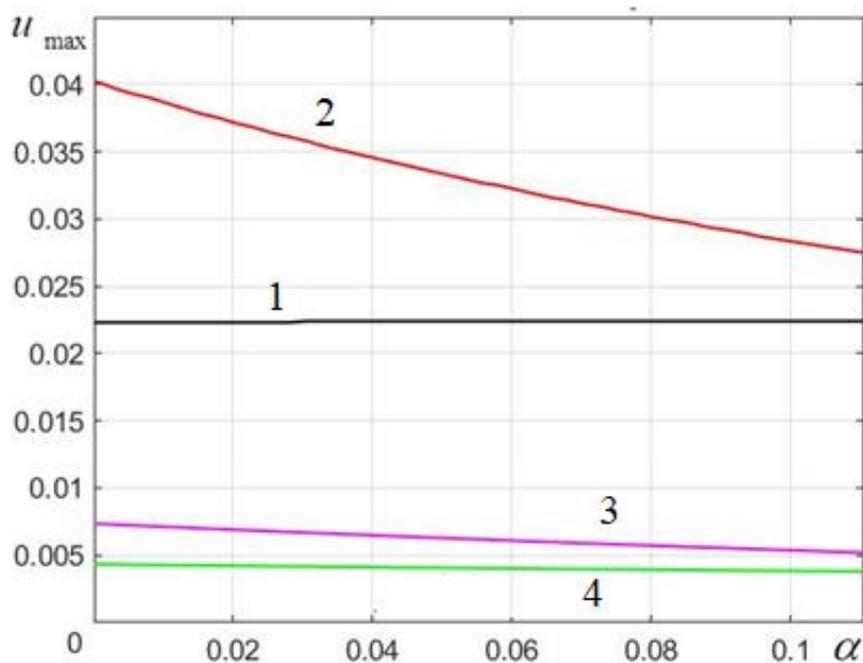


Рис. 4.69. Зависимость максимальных касательных перемещений от параметра материала α

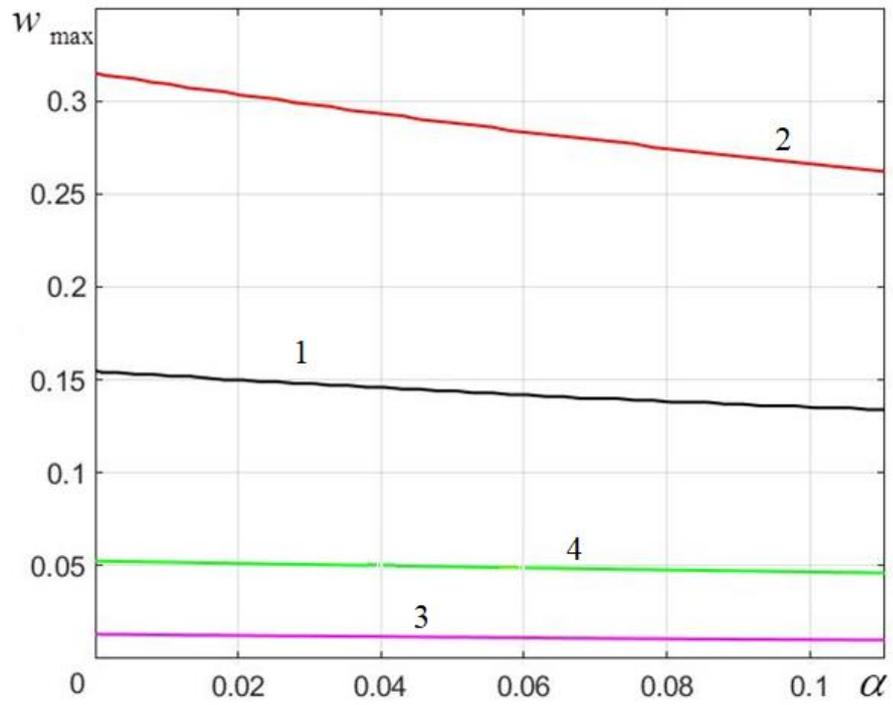


Рис. 4.70. Зависимость максимальных нормальных перемещений от параметра материала α

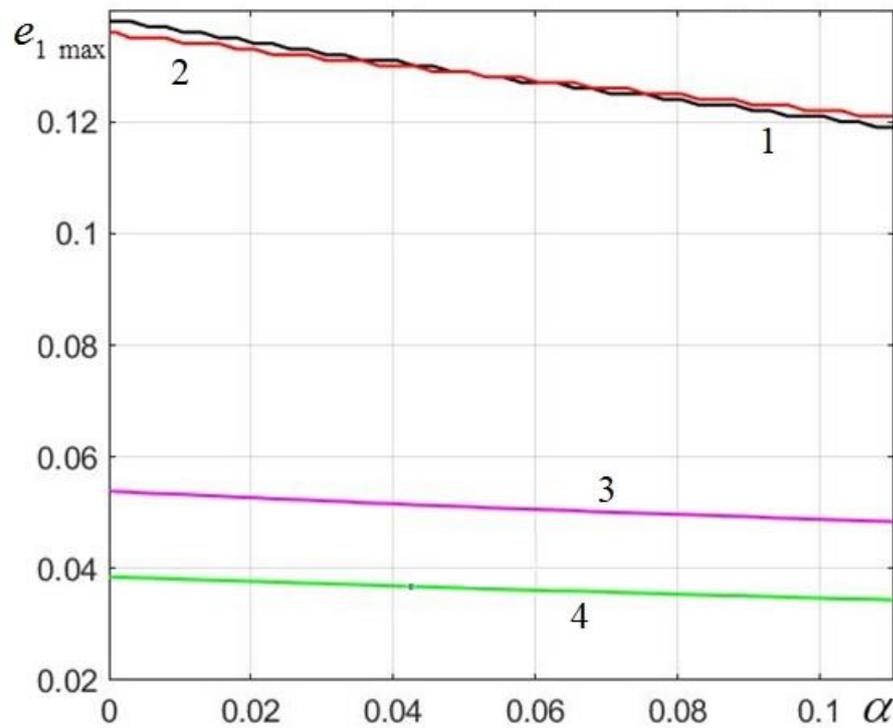


Рис. 4.71. Зависимость максимальных меридиональных деформаций от параметра материала α

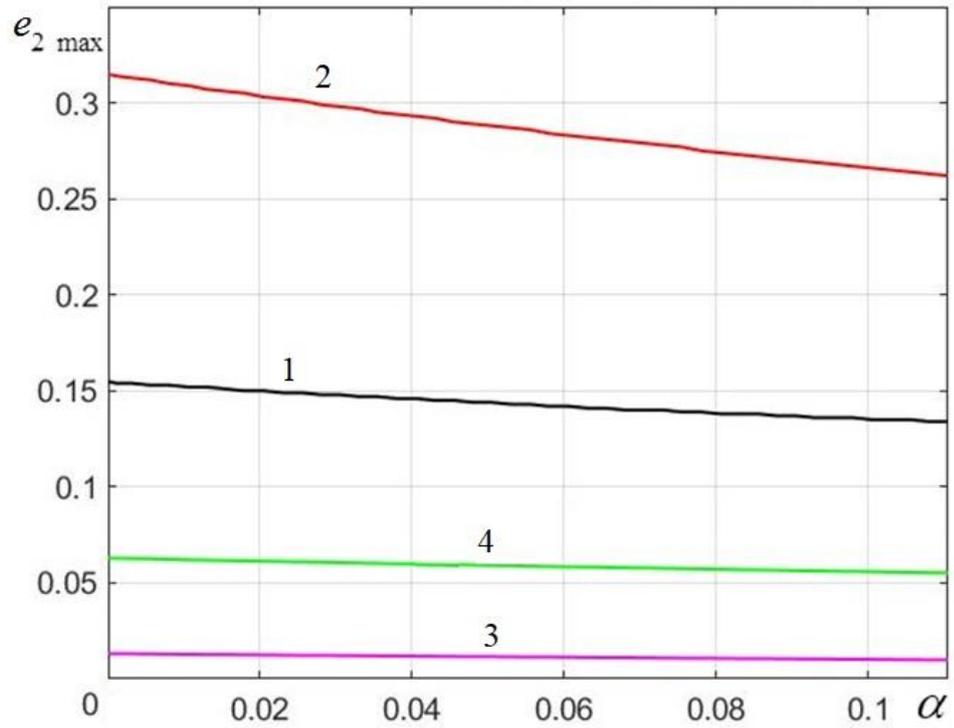


Рис. 4.72. Зависимость максимальных окружных деформаций от параметра материала α

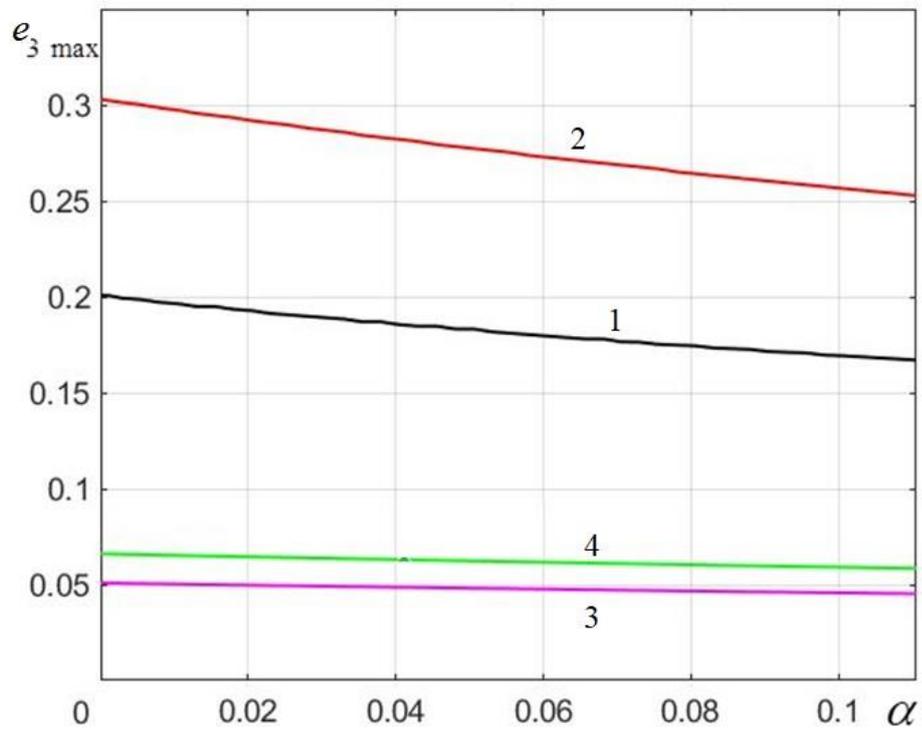


Рис. 4.73. Зависимость максимальных поперечных деформаций от параметра материала α

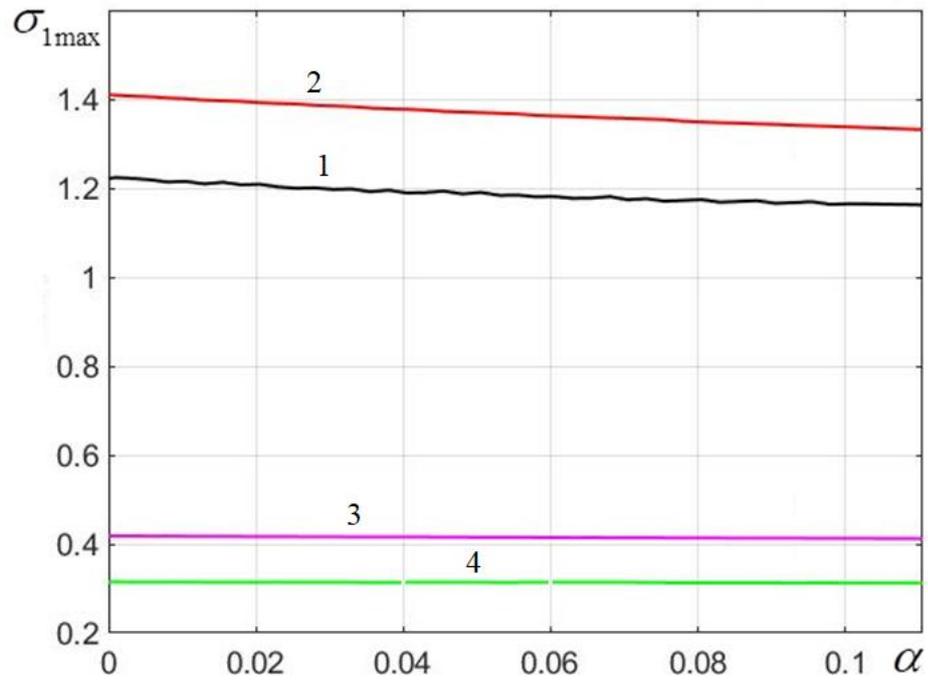


Рис. 4.74. Зависимость максимальных меридиональных напряжений от параметра материала α

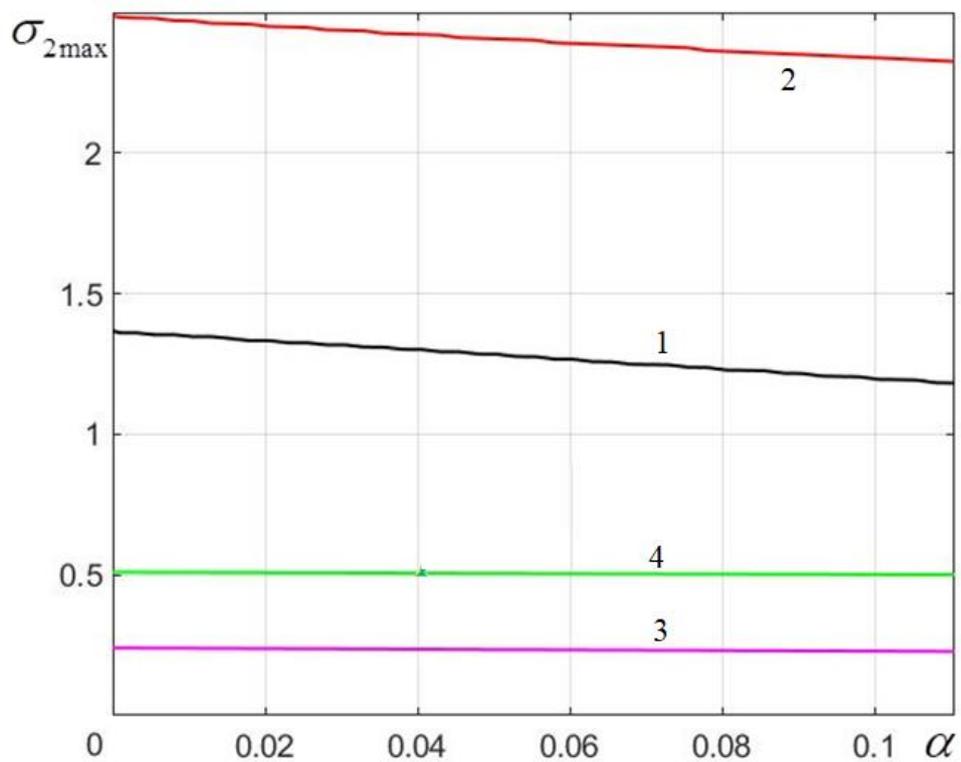


Рис. 4.75. Зависимость максимальных окружных напряжений от параметра материала α

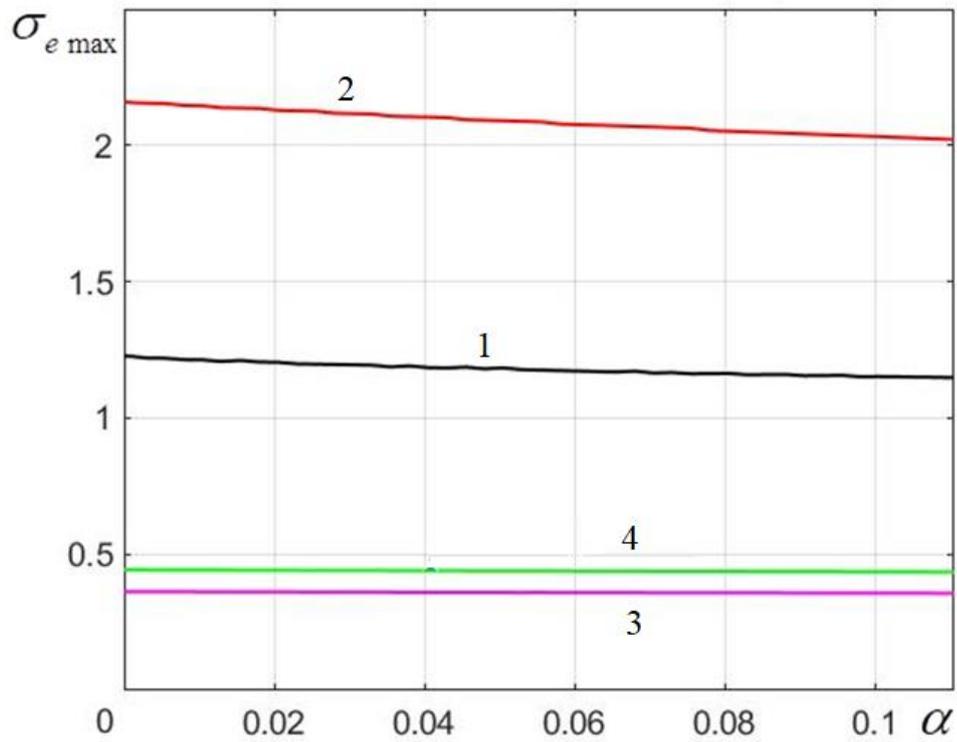


Рис. 4.76. Зависимость максимальных эквивалентных напряжений от параметра материала α

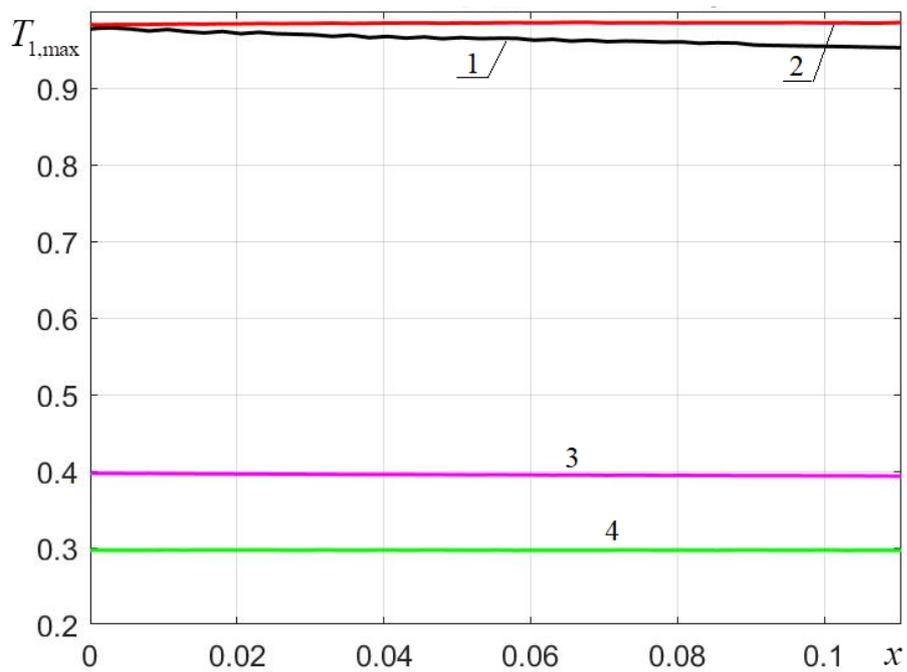


Рис. 4.77. Зависимость максимальных меридиональных усилий от параметра материала α

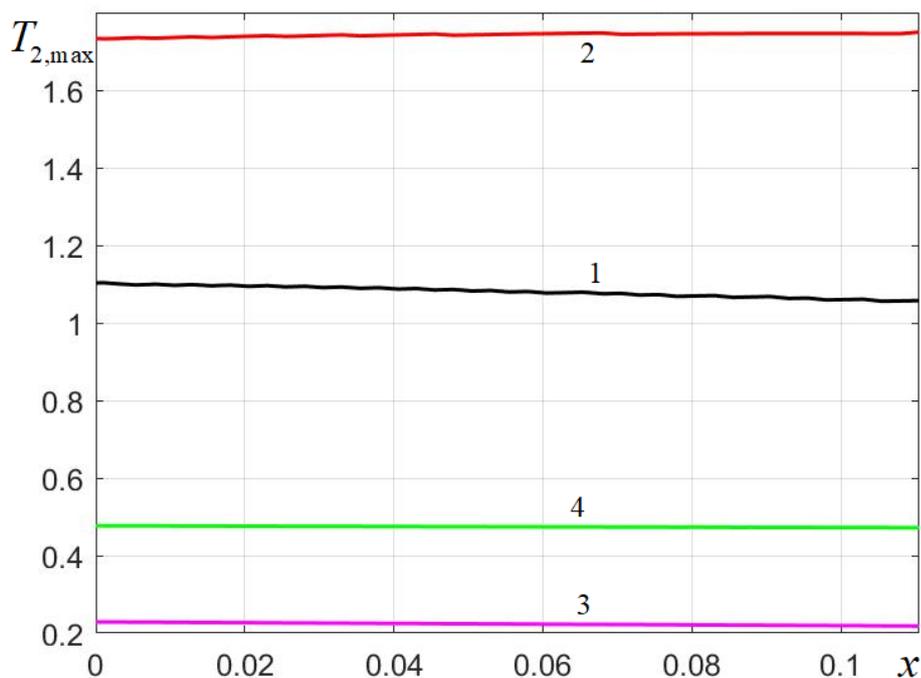


Рис. 4.78. Зависимость максимальных окружных усилий от параметра материала α

Как видно из представленных графиков, максимальные значения компонент напряженно-деформированного состояния для торовой и конической оболочек практически нечувствительны к изменению параметра материала Муни-Ривлина. Для сферической и цилиндрической оболочек анализируемые характеристики уменьшаются с ростом параметра α . Наибольшие нормальные перемещения для сферической, цилиндрической и конической оболочек превышают касательные перемещения на порядок, а для торовой оболочки – лишь в два раза во всем рассмотренном диапазоне изменения параметра материала α . При этом максимальное значение поперечной деформации сопоставимо по величине с максимальными величинами окружной деформации для сферической, цилиндрической и конической оболочек, и меридиональной деформации для торовой оболочки.

На рис. 4.79-4.88 представлены графики, характеризующие распределение компонент напряженно-деформированного состояния по длине меридиана оболочек для неогуковского материала (штриховая линия)

и для материала Муни-Ривлина при максимальном из рассматриваемых значений параметра $\alpha = 0.0155$.

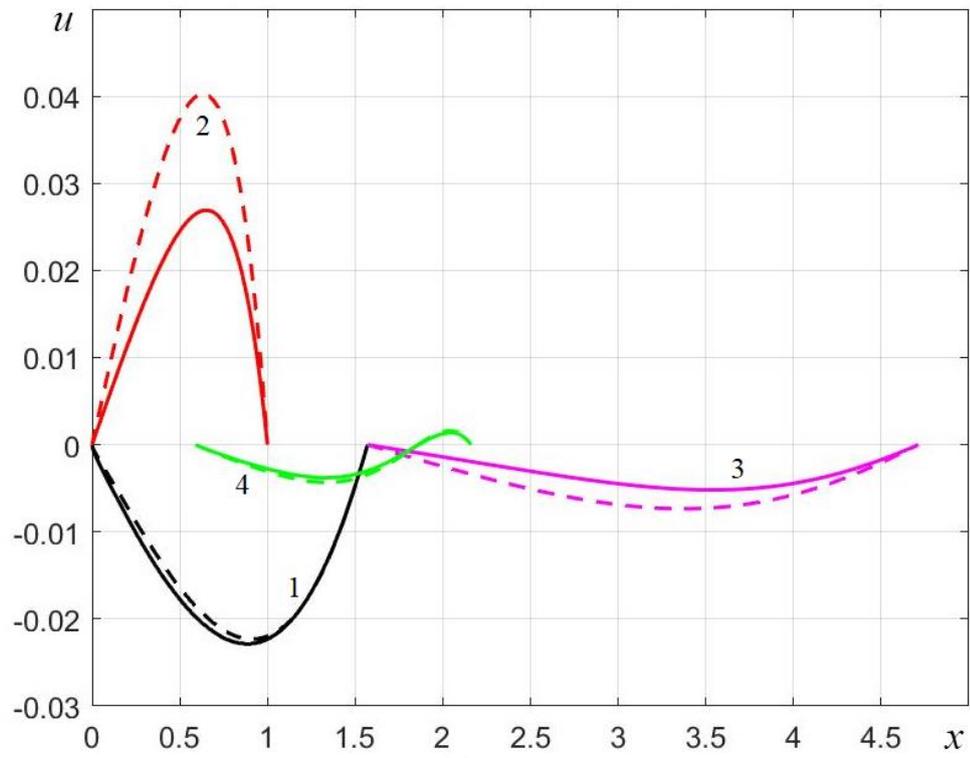


Рис. 4.79. Распределение касательных перемещений по меридиану оболочек

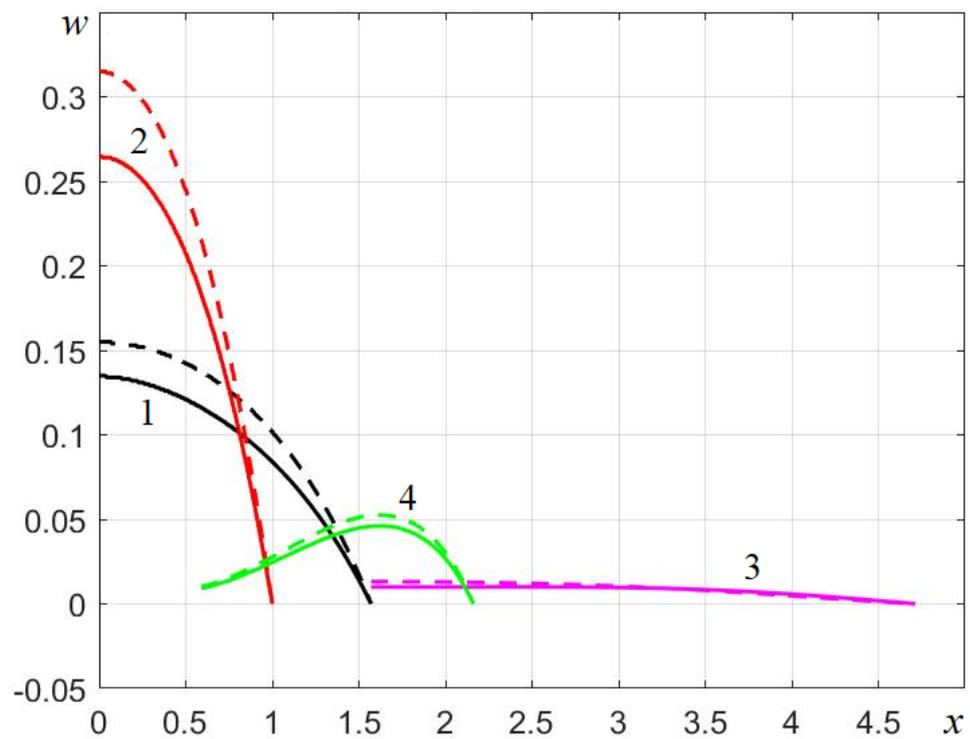


Рис. 4.80. Распределение нормальных перемещений по меридиану оболочек

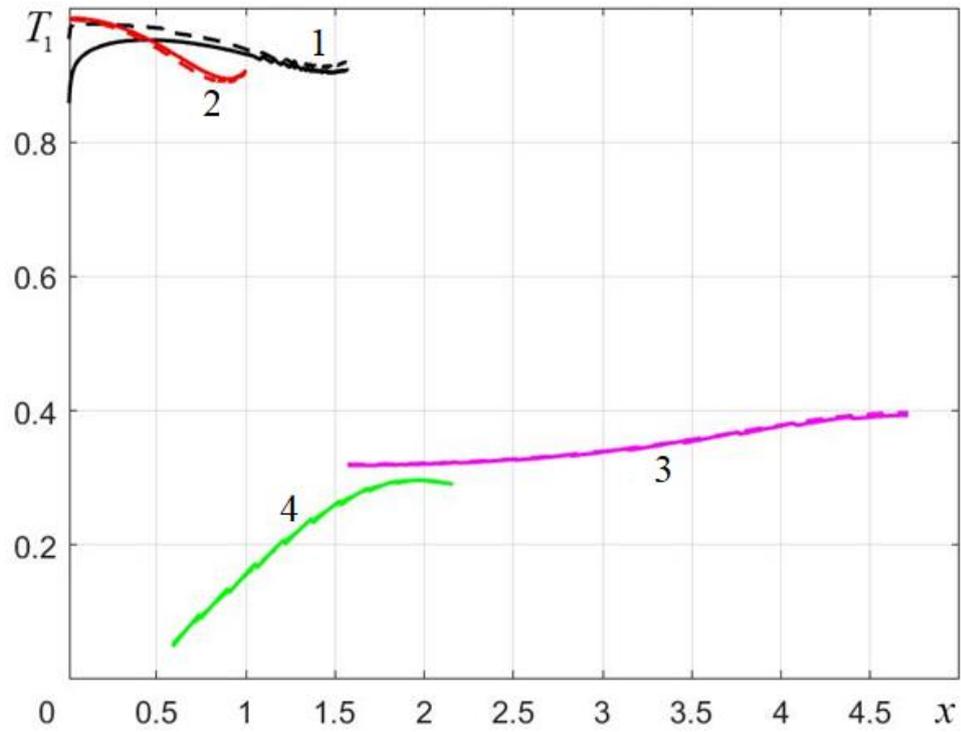


Рис. 4.81. Распределение меридиональных усилий по меридиану оболочек

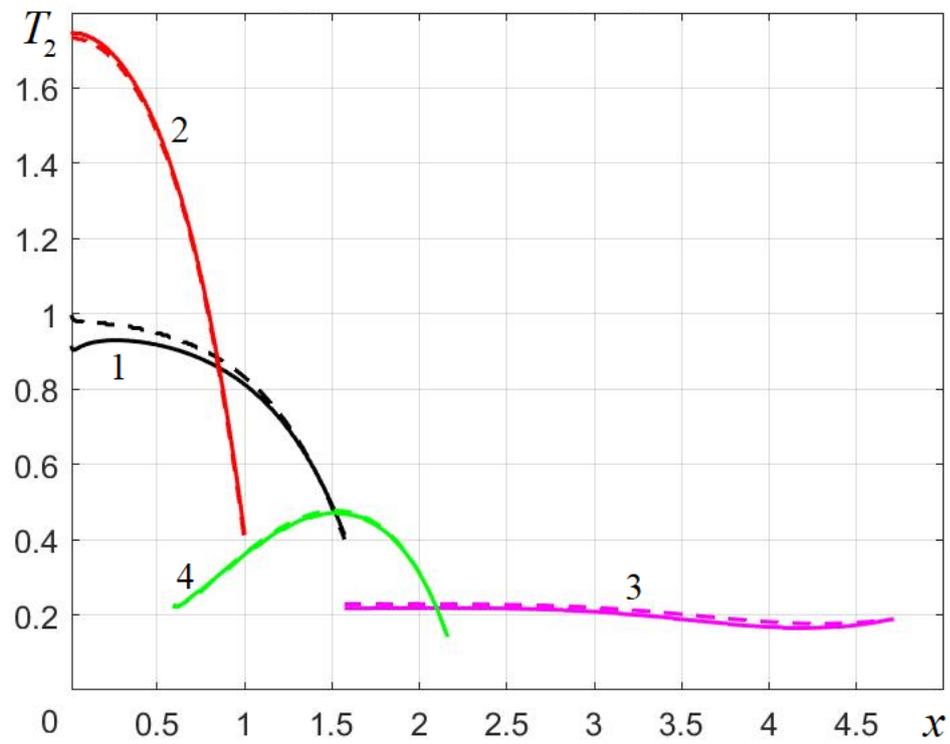


Рис. 4.82. Распределение окружных усилий по меридиану оболочек

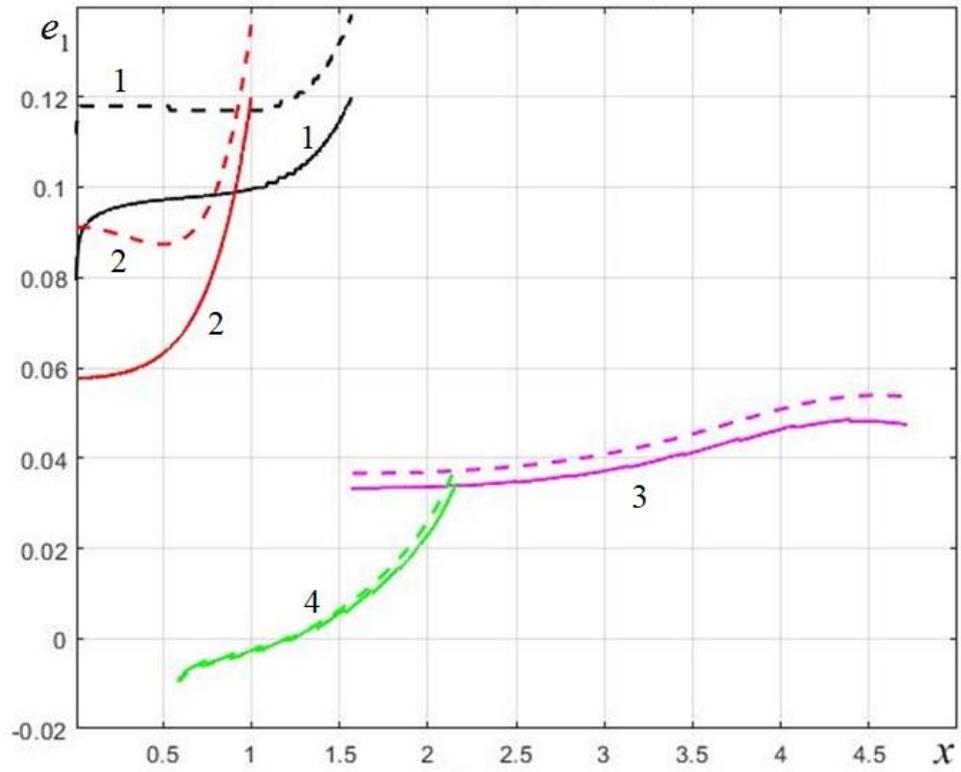


Рис. 4.83. Распределение меридиональных деформаций по меридиану оболочек

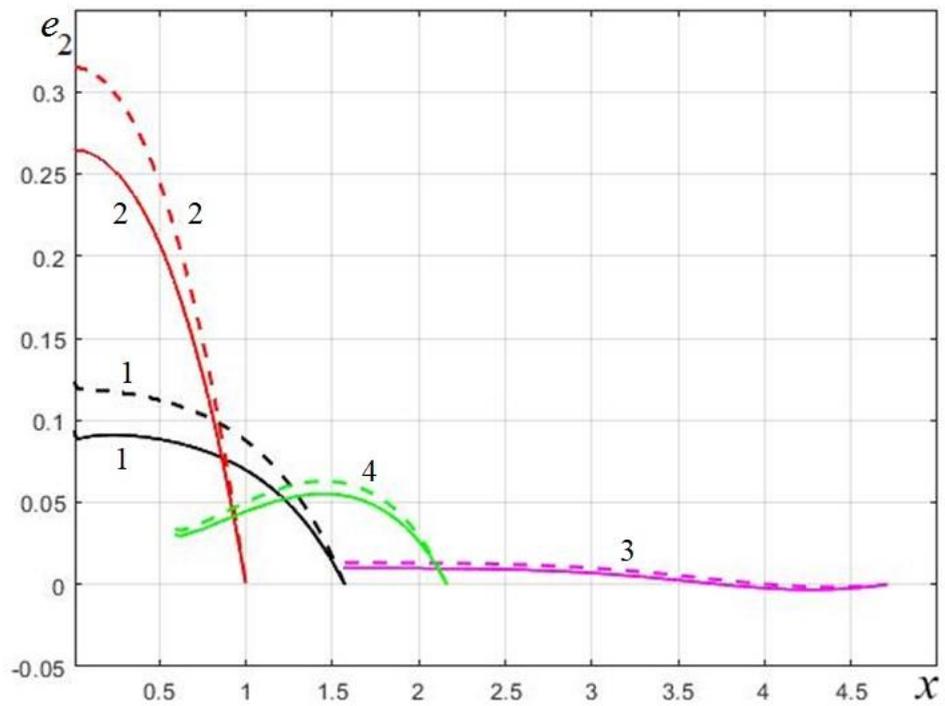


Рис. 4.84. Распределение окружных деформаций по меридиану оболочек

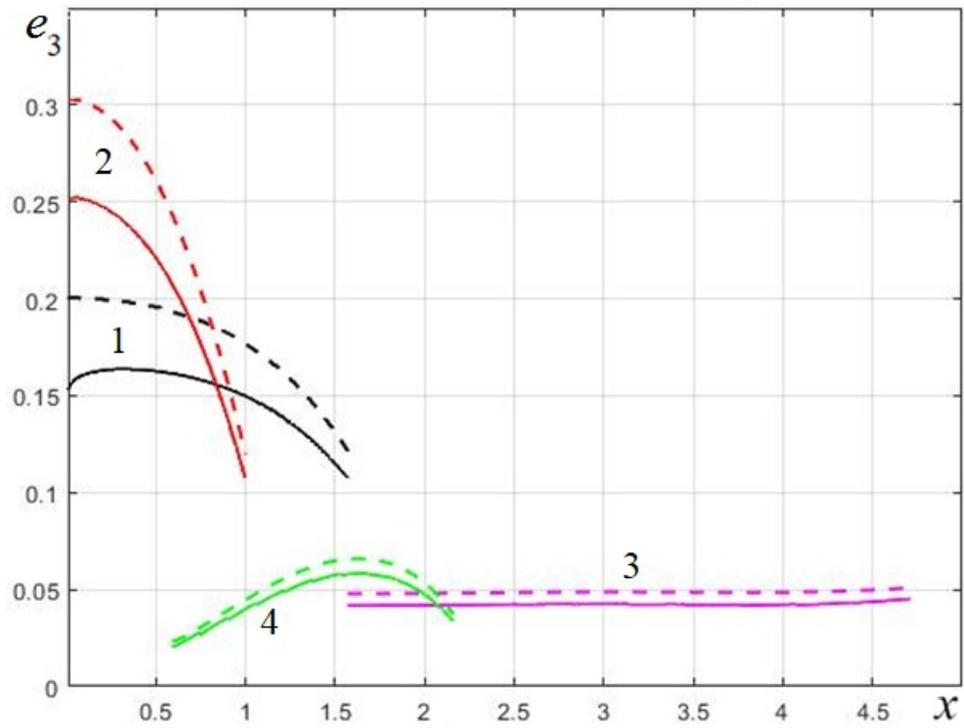


Рис. 4.85. Распределение поперечных деформаций по меридиану оболочек

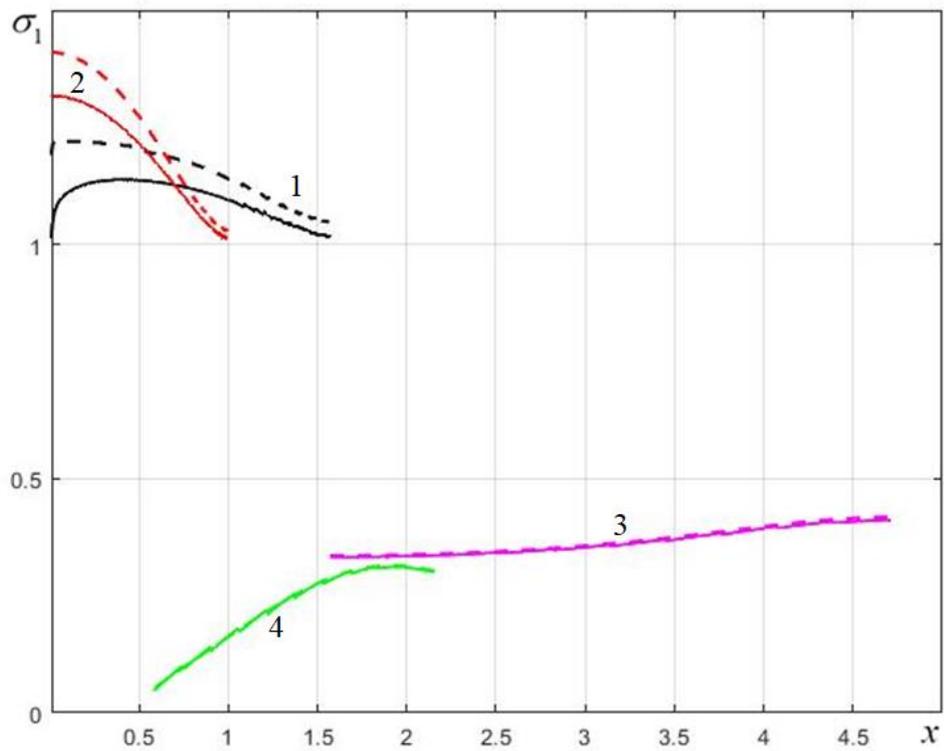


Рис. 4.86. Распределение меридиональных напряжений по меридиану оболочек

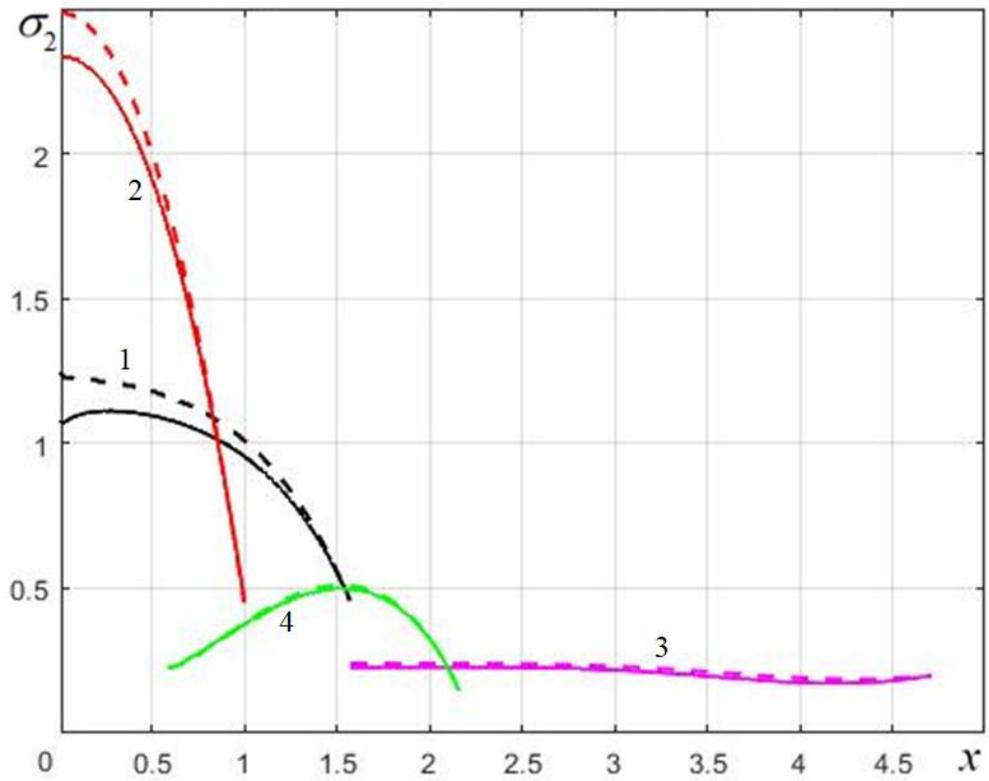


Рис. 4.87. Распределение окружных напряжений по меридиану оболочек

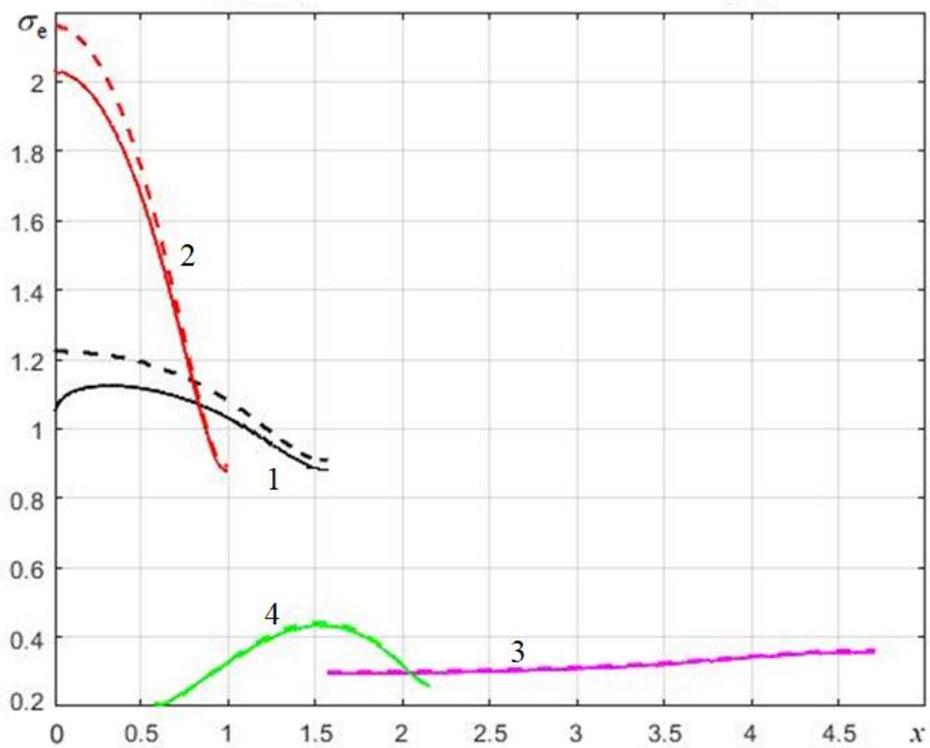


Рис. 4.88. Распределение эквивалентных напряжений по меридиану оболочек

Судя по представленным графикам, увеличение параметра материала Муни-Ривлина не приводит к изменению характера распределения

перемещений, усилий, деформаций и напряжений. Наименее чувствительными к изменению параметра α являются коническая и торовая оболочки, а для сферической и цилиндрической оболочек различие всех компонент напряженно-деформированного состояния, за исключением касательных перемещений, наиболее выражено в области, удаленной от закрепленного торца.

Рассмотрим влияние радиуса заделанной по торцам раздуваемой равномерно распределенным по меридиану давлением цилиндрической оболочки из неогуковского материала на характеристики ее напряженно-деформированного состояния [88, 89]. Пусть для недеформированной оболочки отношение радиуса к толщине $R_{c,0}/h_0 = 20$, отношение радиуса к длине – $R_{c,0}/L_0 = 1/10$. Назначим следующие параметры обезразмеривания: $R_0 = L_0$, $h_0 = h_0$, C – параметр неогуковского материала. Зависимость нагрузка – прогиб точки на оси симметрии оболочки представлена на рис. 4.89.

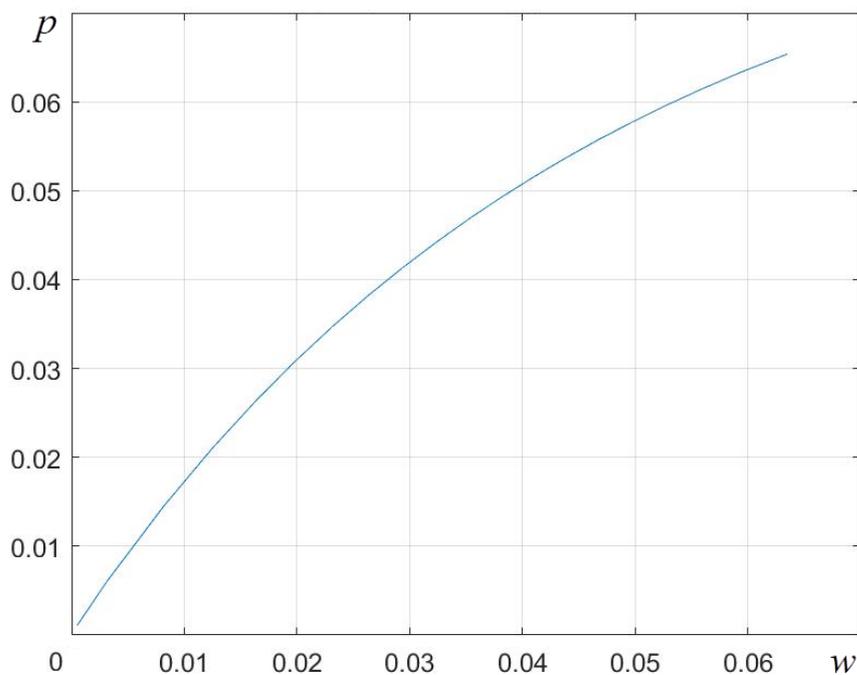


Рис. 4.89. Диаграмма нагружения оболочки

Рассмотрим влияние радиуса оболочки $R_{c,0}$ на ее поведение при величине нагрузки $p = 0.021$. Диапазон изменения радиуса недеформированной оболочки примем $R_{c,0} \in [1/10; 1]$.

На рис. 4.90-4.94 показаны зависимости максимальных перемещений, деформаций, напряжений, эквивалентных напряжений и усилий от радиуса цилиндра. Характерно наличие экстремума для зависимостей окружных деформаций, напряжений и усилий. При этом для малых значений радиуса соотношение максимальных окружных усилий к меридиональным соответствует характерному для теории безмоментных оболочек при малых деформациях.

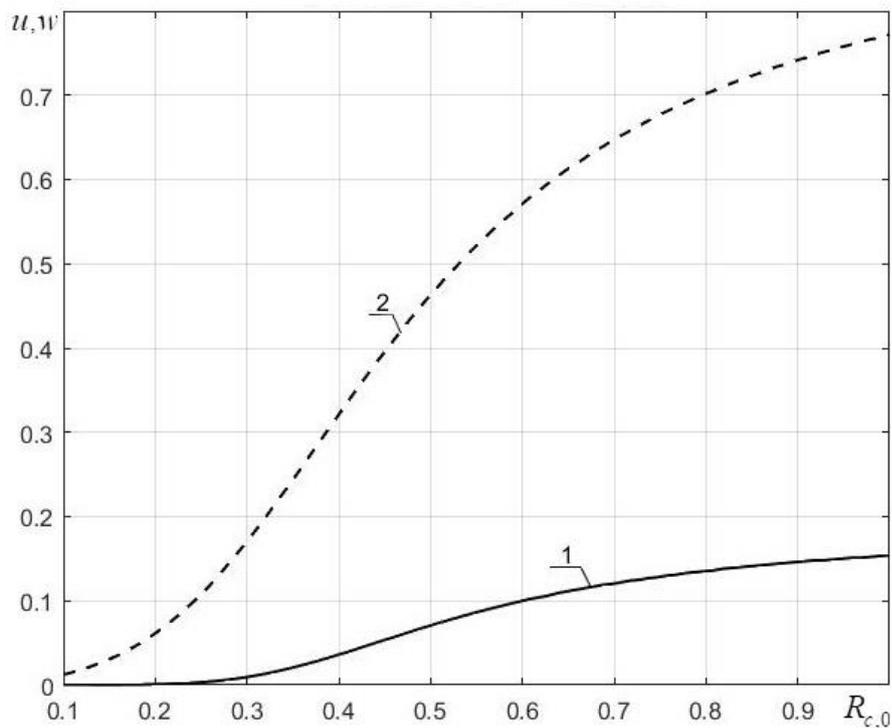


Рис. 4.90. Зависимость максимальных перемещений от радиуса цилиндра (1 – касательное перемещение, 2 – нормальное перемещение)

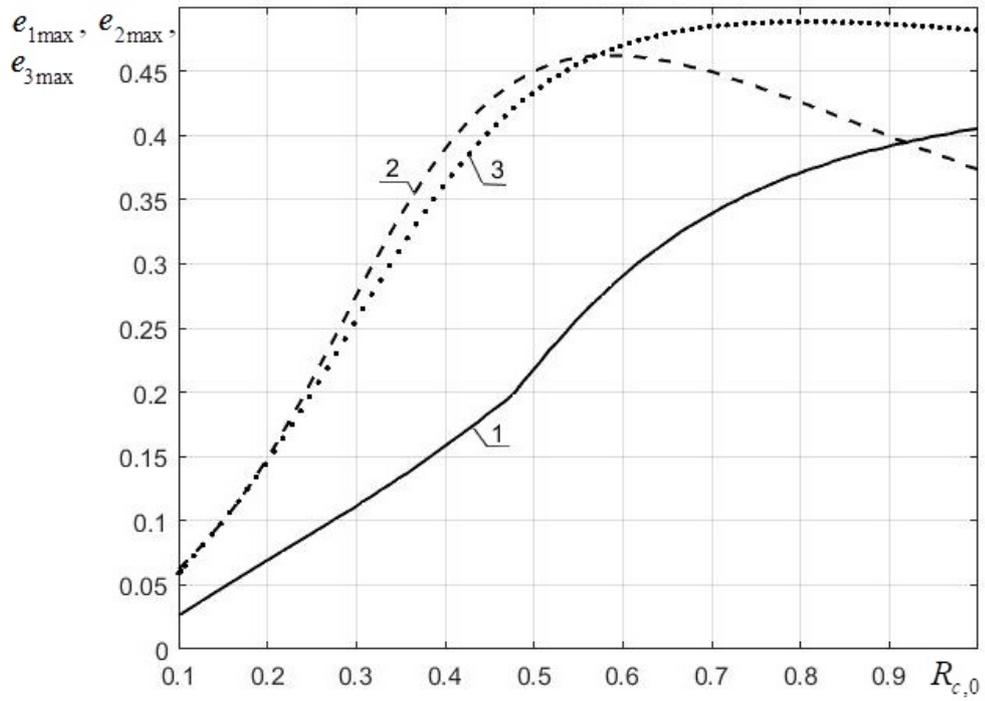


Рис. 4.91. Зависимость максимальных деформаций от радиуса цилиндра (1 – меридиональная деформация, 2 – окружная деформация, 3 – модуль поперечной деформации)

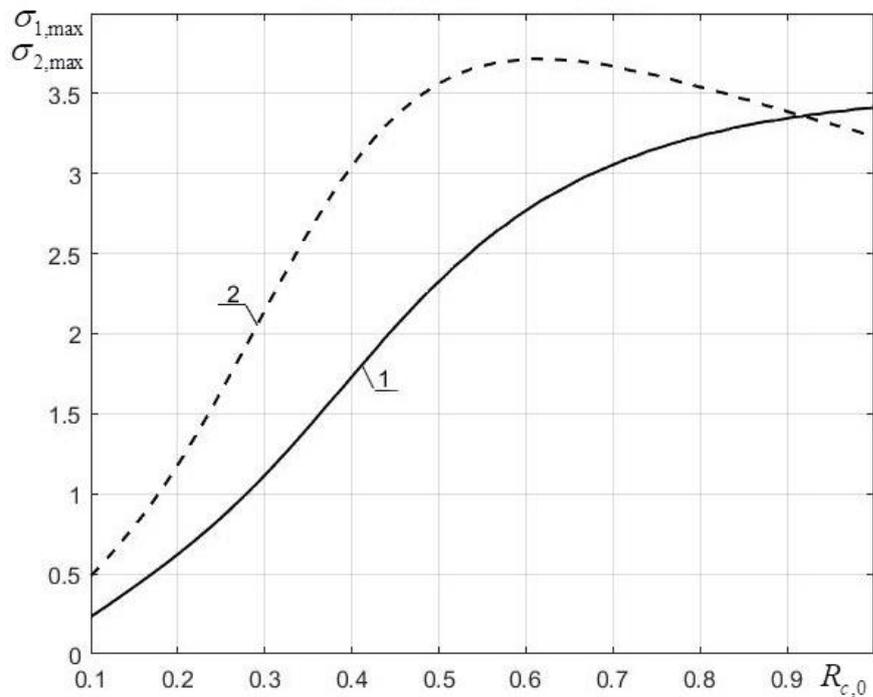


Рис. 4.92. Зависимость максимальных напряжений от радиуса цилиндра (1 – меридиональное напряжение, 2 – окружное напряжение)

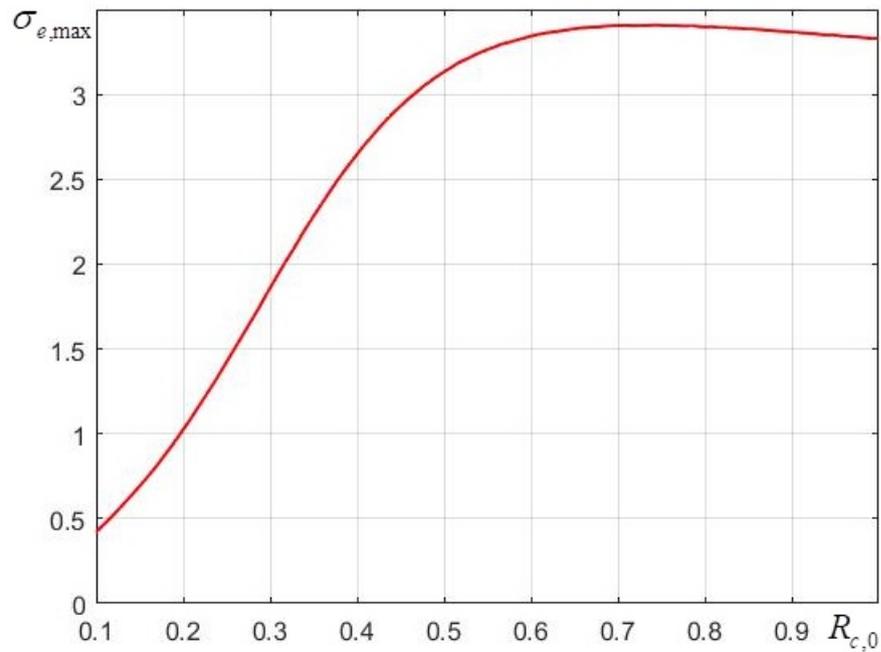


Рис. 4.93. Зависимость максимальных эквивалентных напряжений от радиуса цилиндра

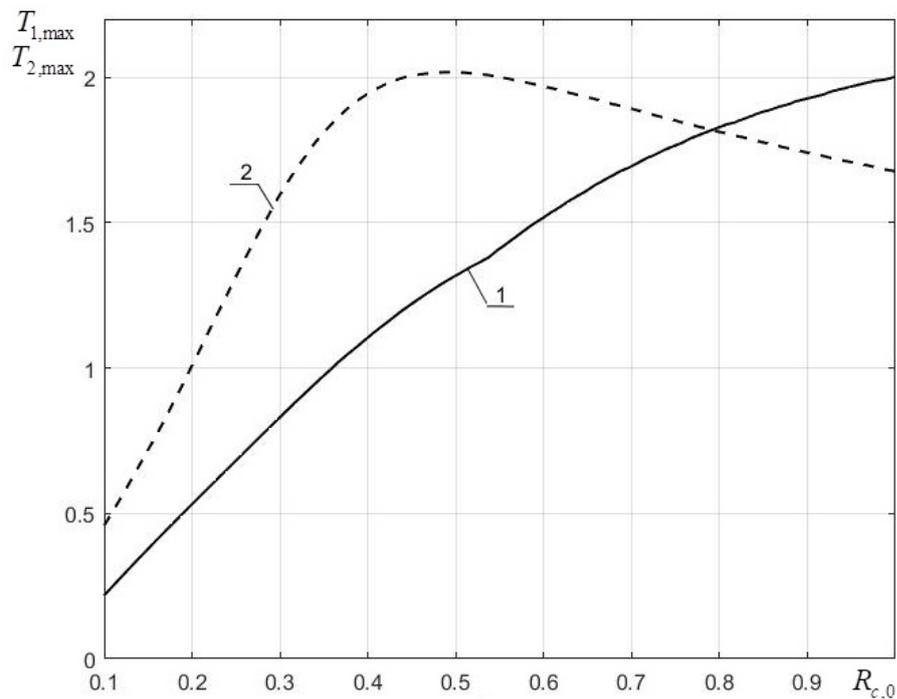


Рис. 4.94. Зависимость максимальных приведенных усилий от радиуса цилиндра (1 – меридиональное усилие, 2 – окружное усилие)

На рис. 4.95-4.104 показано распределение компонент напряженно-деформированного состояния цилиндра по меридиану для значений радиуса

$R_{c,0} = 0.1$, $R_{c,0} = 0.3$, $R_{c,0} = 0.5$, $R_{c,0} = 0.75$, $R_{c,0} = 1$ (кривые на графиках обозначены соответственно цифрами 1, 2, 3, 4, 5).

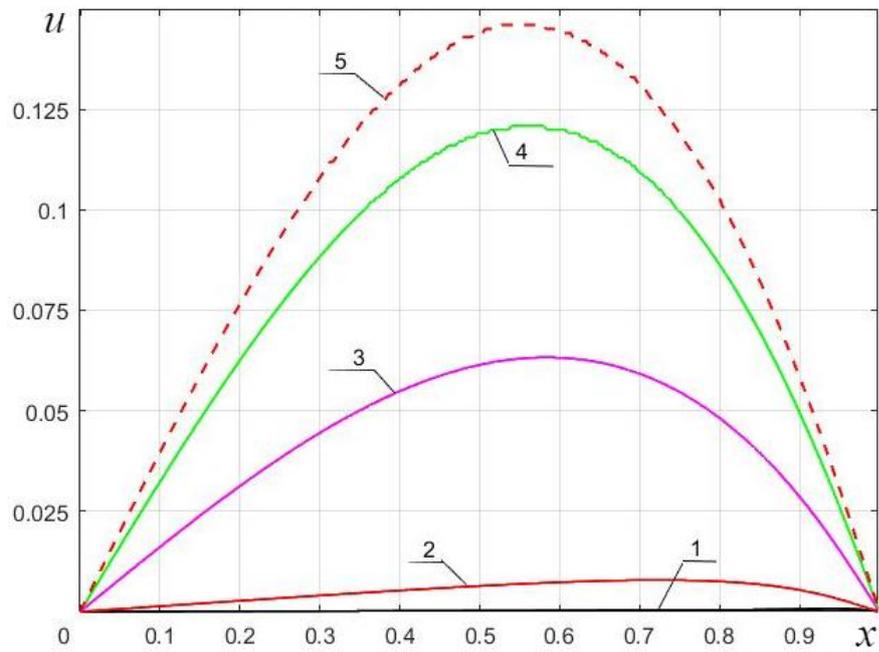


Рис. 4.95. Распределение касательных перемещений по меридиану цилиндра

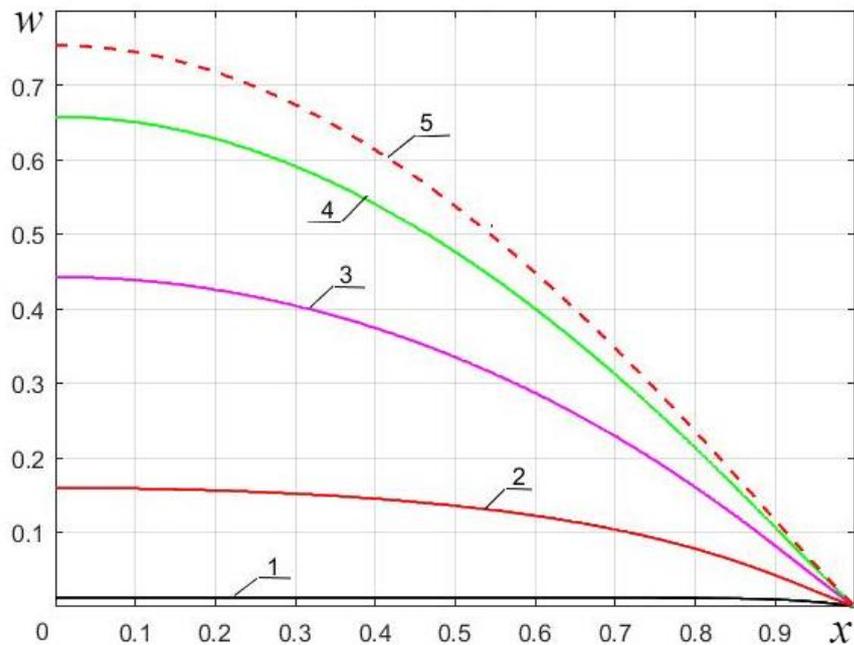


Рис. 4.96. Распределение нормальных перемещений по меридиану цилиндра

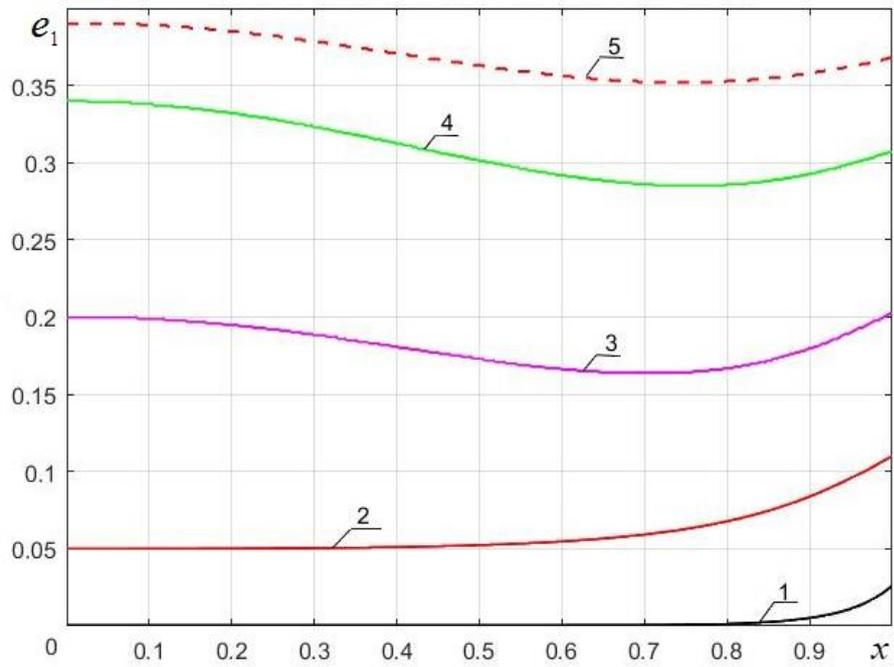


Рис. 4.97. Распределение меридиональных деформаций по меридиану цилиндра

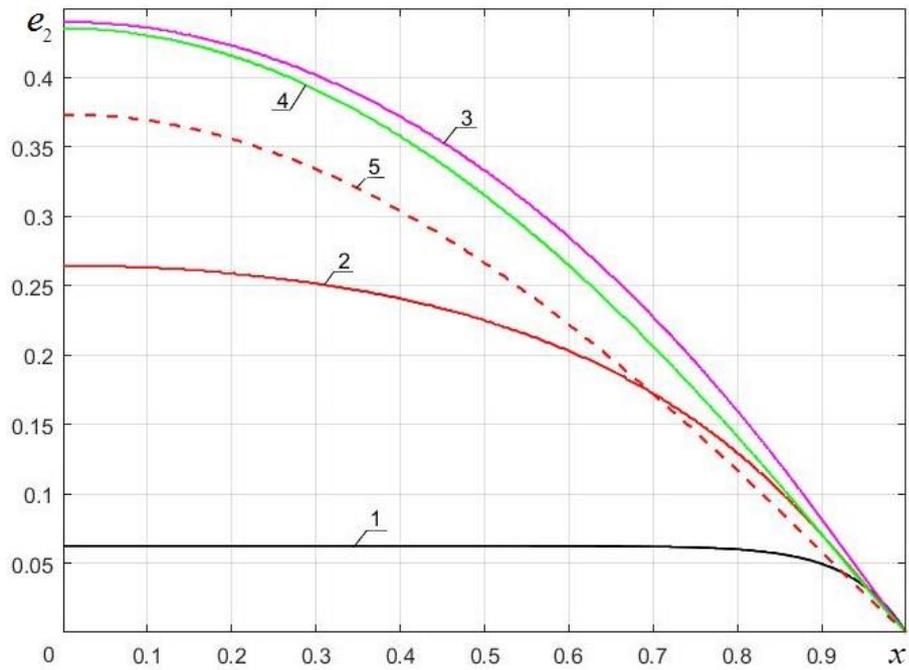


Рис. 4.98. Распределение окружных деформаций по меридиану цилиндра

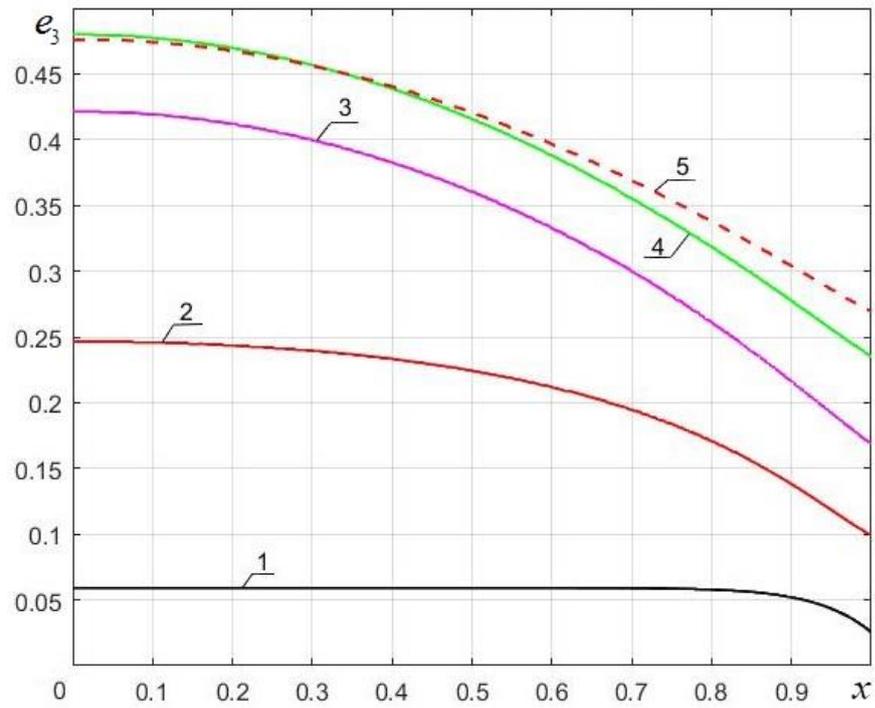


Рис. 4.99. Распределение модулей поперечных деформаций по меридиану цилиндра

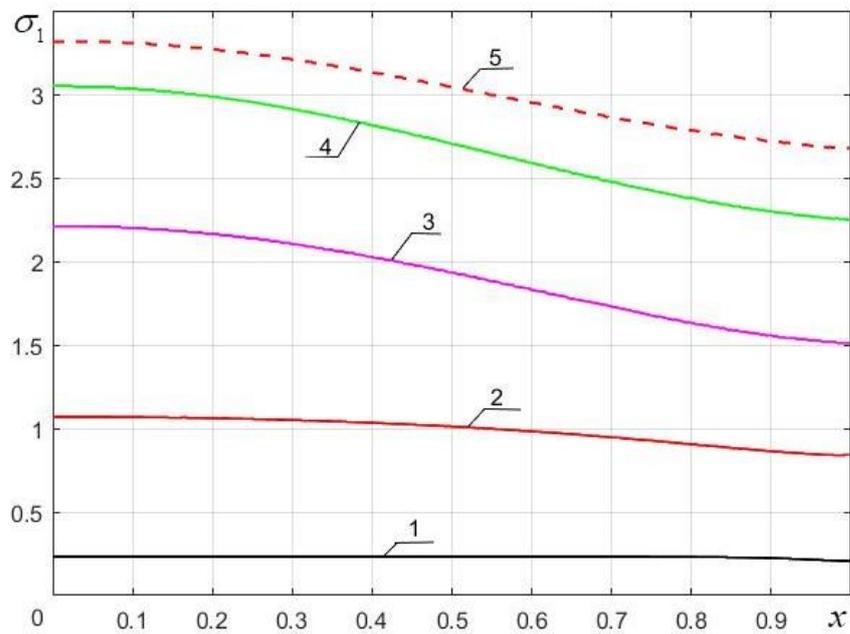


Рис. 4.100. Распределение меридиональных напряжений по меридиану цилиндра

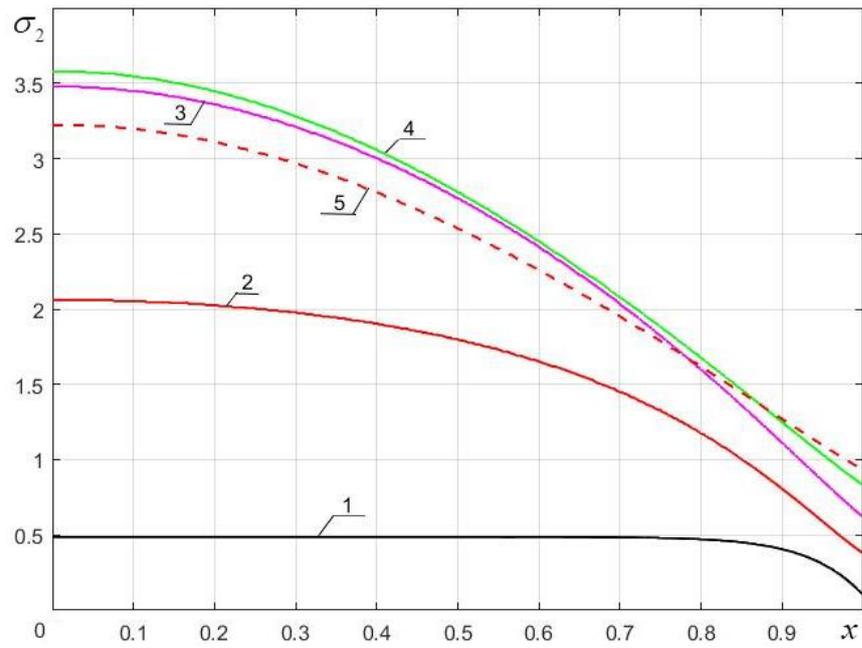


Рис. 4.101. Распределение окружных напряжений по меридиану цилиндра

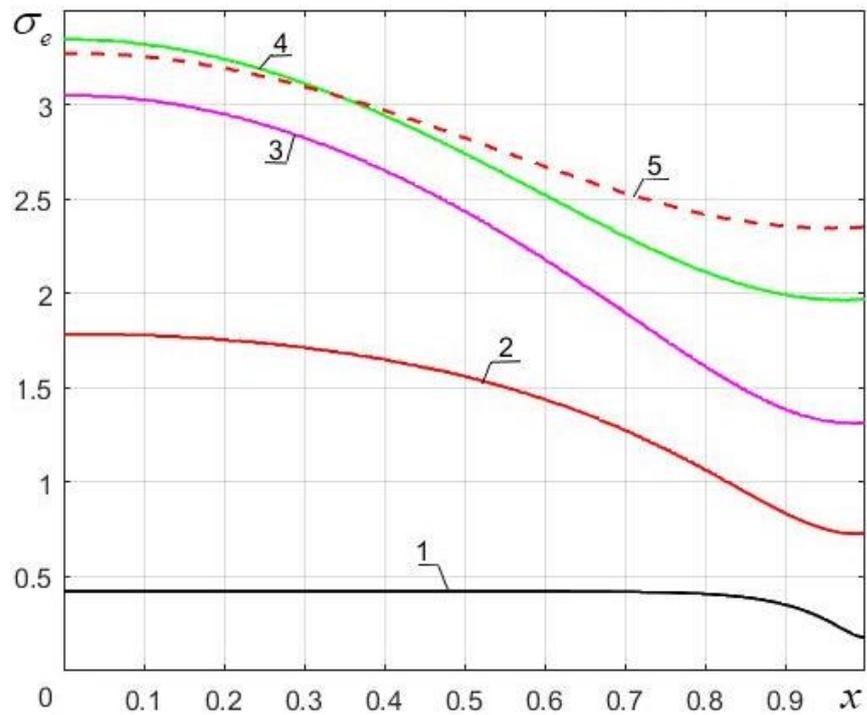


Рис.4.102. Распределение эквивалентных напряжений по меридиану цилиндра

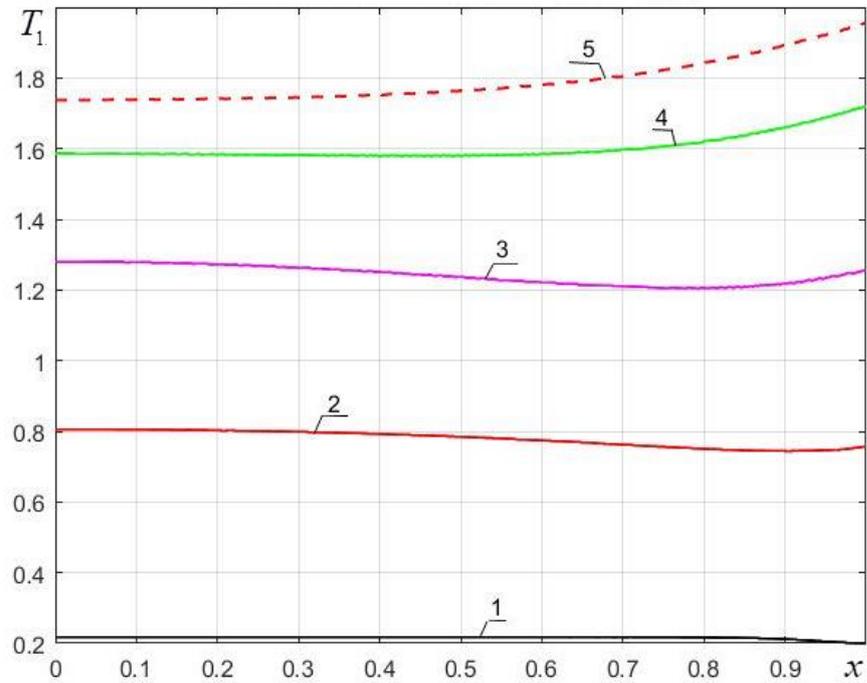


Рис. 4.103. Распределение меридиональных приведенных усилий по меридиану цилиндра

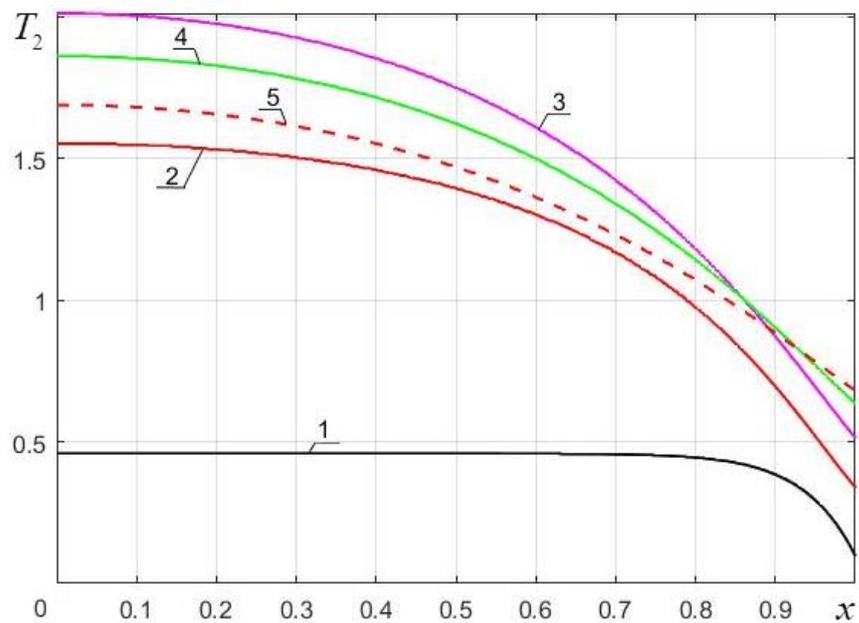


Рис. 4.104. Распределение окружных приведенных усилий по меридиану цилиндра

Из представленных графиков видно, что при малых значениях $R_{c,0}$ все компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки остаются

постоянными на большей части длины меридиана, за исключением окрестности неподвижного шарнира. Окружные деформации монотонно убывают при любом из рассмотренных значений радиуса цилиндра, причем область меридиана, в которой они остаются постоянными, существенно сокращается с увеличением радиуса. Распределение меридиональных деформаций, напротив, с ростом $R_{c,0}$ становится немонотонным, меняясь от непрерывно возрастающего к убывающему, причем в области, близкой к закрепленному торцу оболочки, появляется участок, в котором деформации остаются постоянными. Следует подчеркнуть, что величина поперечных деформаций при любом значении $R_{c,0}$ остается сопоставимой с e_1 или e_2 по всей длине меридиана оболочки. Таким образом, в задачах расчета мягких оболочек пренебрегать поперечными деформациями нельзя.

Окружные напряжения изменяются по длине цилиндра подобно окружным деформациям, в то время как меридиональные напряжения сохраняют монотонность убывания. Для эквивалентных напряжений с ростом $R_{c,0}$ характерно образование двух зон, в которых они остаются постоянными – вблизи оси симметрии и вблизи закрепленного торца.

Приведенные окружные усилия, как и окружные напряжения и деформации, монотонно убывают по длине меридиана цилиндра, в то время как приведенные меридиональные усилия при средних значениях радиуса образуют зоны постоянного максимального (вблизи оси симметрии цилиндра) и минимального (вблизи закрепленного торца) значений, а при больших значениях вновь образуется лишь одна зона постоянного усилия за исключением примыкающей к закрепленному торцу области, однако характер распределения усилия меняется с убывающего на возрастающий.

4.8. Выводы по главе 4

1) Сформулирован алгоритм решения задач осесимметричного статического деформирования мягких оболочек вращения из

высокоэластичных материалов, основанный на использовании метода продолжения по параметру применительно к соотношениям введенной в гл.3 канонической формы одномерной многоточечной нелинейной краевой задачи с дополнительными алгебраическими соотношениями.

2) Исследовано влияние назначения различных параметров вычислительного алгоритма на результаты решения задач о раздувании сферической оболочки при больших деформациях.

3) Предложен алгоритм автоматической сегментации интервала интегрирования краевой задачи, позволяющий минимизировать число произвольно назначаемых вычислителем параметров алгоритма и повысить точность решения задачи.

4) Предложен метод контроля единственности решения и однозначности его продолжения по параметру, реализуемый в процессе проведения вычислений.

5) Предложен способ исследования возможности локального раздувания цилиндрической оболочки из высокоэластичного материала при ее нагружения равномерно распределенным давлением и растягивающей силой и установлены особенности ее глубокого закритического деформирования в зависимости от вида упругого потенциала материала.

6) Впервые использованы соотношения моментной теории оболочек для решения задачи о раздувании цилиндрической оболочки из неогуковского материала кусочно-постоянной толщины.

7) Сформулированный алгоритм решения задачи статики применен к задачам исследования влияния параметров исходных данных на механическое поведение оболочек вращения из высокоэластичных материалов.

Глава 5. Исследование осесимметричного динамического деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов

5.1. Базовый алгоритм решения задач динамического деформирования мягких оболочек вращения

Для формулирования алгоритма решения приведем систему уравнений динамического деформирования мягкой оболочки вращения (2.63), (2.35)-(2.41) к канонической форме V с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x_i} = \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) + \mathbf{M}_i \frac{\partial^2 \mathbf{y}_i}{\partial t^2}, \quad i \in [1, N] \quad (5.1)$$

и системой дополнительных алгебраических соотношений

$$\boldsymbol{\Phi}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

Соотношения (5.1)-(5.2) дополняются начальными условиями

$$\mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{y}_0; \quad \mathbf{y}'(x, 0) = \mathbf{y}_0' \quad (5.3)$$

условиями сопряжения сегментов конструкции

$$\mathbf{y}_j(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1}(x_{j+1,1}) + \mathbf{d}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}); \quad j \in [1, N-1] \quad (5.4)$$

и граничными условиями

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}, t) = \mathbf{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2. \quad (5.5)$$

Здесь все обозначения соответствуют принятым в гл. 2 и 3.

При построении алгоритма решения задачи (5.1)-(5.5) представим нагрузку, действующую на деформируемый элемент, суммой заданных поверхностных и инерционных нагрузок [66]:

$$\mathbf{q}_i^*(x, t) = \mathbf{q}_i(x, t) + \mathbf{M}_i \frac{\partial^2 \mathbf{y}_i}{\partial t^2}. \quad (5.6)$$

При использовании метода дифференцирования по параметру для решения задачи (5.1)-(5.5), как и в случае решения статической задачи, вводится параметр нагрузки α , т.е. нагрузка (5.6) записывается в виде

$$\mathbf{q}_i^{**}(x, t) = \alpha \mathbf{q}_i^*(x, t). \quad (5.7)$$

Для решения начально-краевой задачи (5.1)-(5.5) применим метод прямых. Используя m -точечную аппроксимацию вектора ускорений для момента времени $t = t_k$, $k \geq m$, имеем:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{y}_i}{\partial t^2} \right|_{t=t_k} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{y}_{m+1-j}.$$

Тогда с учетом представления (5.7) система уравнений (5.1) для моментов времени $t_1 \leq t_k \leq t_m$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{y}_{i,1}}{dx_i} = \mathbf{F}_{i,1}(x_i, \mathbf{y}_{i,1}, \mathbf{z}_{i,1}, \boldsymbol{\mu}_{i,1}, \mathbf{q}_{i,1}, t_1, \alpha), \quad i \in [1, N];$$

...

$$\frac{d\mathbf{y}_{i,m-1}}{dx_i} = \mathbf{F}_{i,m-1}(x_i, \mathbf{y}_{i,m-1}, \mathbf{y}_{i,m-2}, \dots, \mathbf{y}_{i,1}, \mathbf{z}_{i,m-1}, \boldsymbol{\mu}_{i,m-1}, \mathbf{q}_{i,m-1}, t_{m-1}, \alpha), \quad i \in [1, N];$$

а для моментов времени $t_k \geq t_m$

$$\frac{d\mathbf{y}_{i,k}}{dx_i} = \mathbf{F}_{i,k}(x_i, \mathbf{y}_{i,k}, \mathbf{y}_{i,k-1}, \mathbf{y}_{i,k-2}, \dots, \mathbf{y}_{i,1}, \mathbf{z}_{i,k}, \boldsymbol{\mu}_{i,k}, \mathbf{q}_{i,k}, t_k, \alpha), \quad i \in [1, N]$$

При этом на первых $(m-1)$ шагах по времени для аппроксимации вектора ускорений используются законтурные точки [167]. Таким образом, для k -го регулярного шага по времени полная система уравнений, описывающих динамическое поведение конструкции, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{y}_{i,k}}{dx_i} = \mathbf{F}_{i,k}(x_i, \mathbf{y}_{i,k}, \mathbf{y}_{i,k-1}, \mathbf{y}_{i,k-2}, \dots, \mathbf{y}_{i,1}, \mathbf{z}_{i,k}, \boldsymbol{\mu}_{i,k}, \mathbf{q}_{i,k}, t_k, \alpha), \quad i \in [1, N] \quad (5.8)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{i,k}(x_i, \mathbf{y}_{i,k}, \mathbf{z}_{i,k}, \boldsymbol{\mu}_{i,k}, \mathbf{q}_{i,k}, \alpha) = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

с условиями сопряжения сегментов конструкции

$$\mathbf{y}_{j,k}(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1,k}(x_{j+1,1}) + \mathbf{d}_{j+1,k}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}); \quad j \in [1, N-1]$$

и граничными условиями

$$\boldsymbol{\Psi}_{1,k}(x_1, \mathbf{y}_{1,k}, \mathbf{q}_k, \boldsymbol{\mu}_k, t_k) = \mathbf{0}, \quad 1 \Leftrightarrow 2.$$

Тогда при дифференцировании по некоторому заранее выбранному параметру T системы уравнений (5.8) получим

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}_{i,k}}{dx_i} = \frac{\partial \mathbf{F}_{i,k}}{\partial \mathbf{y}_{i,k}} \dot{\mathbf{y}}_{i,k} + \frac{\partial \mathbf{F}_{i,k}}{\partial \mathbf{z}_{i,k}} \dot{\mathbf{z}}_{i,k} + \frac{\partial \mathbf{F}_{i,k}}{\partial q_{i,k}^{**}} \frac{\partial q_{i,k}^{**}}{\partial T},$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{q}_{i,k}^{**}}{\partial T} = \dot{\alpha} \left(\mathbf{q}_{i,k} + \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{y}_{k+1-j} \right) + \alpha (\dot{\mathbf{q}}_{i,k} + \beta_1 \dot{\mathbf{y}}_k).$$

Точка обозначает дифференцирование по параметру T .

Отметим, что решение задачи проводится последовательно на каждом временном слое, поэтому при дифференцировании по параметру аппроксимированного вектора ускорений скорости векторов разрешающих переменных по параметру предыдущих шагов по времени полагаются равными нулю.

Таким образом, при дифференцировании по параметру T системы (5.1)-(5.5), выражая из продифференцированного соотношения (5.9) скорости дополнительных переменных по параметру $\dot{\mathbf{z}}_{i,k}$, получим квазилинейную краевую задачу, которую можно представить в виде

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}_{i,k}}{dx_i} = \mathbf{A}_{i,k}(x_i, \mathbf{y}_{i,k}, \mathbf{z}_{i,k}, \mathbf{q}_{i,k}, \boldsymbol{\mu}_{i,k}, \alpha) \dot{\mathbf{y}}_{i,k} + \mathbf{b}_{i,k}(x_i, \mathbf{y}_{i,k}, \mathbf{z}_{i,k}, \mathbf{q}_{i,k}, \boldsymbol{\mu}_{i,k}, \mathbf{y}_{i,k-1}, \dots, \mathbf{y}_{i,1}) \dot{\alpha}; \quad (5.10)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{j,k}(x_{j,2}) = \dot{\mathbf{y}}_{j+1,k}(x_{j+1,1}) + \dot{\mathbf{d}}_{j+1,k}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}); \quad j \in [1, N-1]; \quad (5.11)$$

$$\mathbf{B}_{1,k}(x_1, \mathbf{y}_{1,k}, \mathbf{z}_{1,k}, \mathbf{q}_{1,k}, \boldsymbol{\mu}_{1,k}, \alpha) \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{b}_{1,k}(x_1, \mathbf{y}_{1,k}, \mathbf{z}_{1,k}, \mathbf{q}_{1,k}, \boldsymbol{\mu}_{1,k}) \dot{\alpha} = \mathbf{0}; \quad 1 \Leftrightarrow 2. \quad (5.12)$$

Как и обычно, при использовании метода дифференцирования по параметру квазилинейная краевая задача дополняется задачей Коши относительно искомым векторам разрешающих и дополнительных переменных и параметра нагрузки α :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_{i,j}}{dT} &= \dot{\mathbf{y}}_{i,j}(\mathbf{y}_{i,j}, x_{i,j}, T); \\ \frac{d\mathbf{z}_{i,j}}{dT} &= \dot{\mathbf{z}}_{i,j}(\mathbf{y}_{i,j}, x_{i,j}, T); \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \dot{\alpha}(\mathbf{y}_{i,j}, T); \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь $j \in [1, M_i]$ где M_i – число точек дискретизации i -го сегмента конструкции, а индекс момента времени k опущен.

Алгоритм решения взаимосвязанных задач (5.10)-(5.12) и (5.13) представлен в п. 4.1. Для задач динамики поиск решения проводится при значениях параметра $\alpha \in [0, 1]$, где решение при $\alpha = 1$ соответствует решению исходной задачи (5.1)-(5.5) с точностью до принятой аппроксимации вектора ускорений [80].

Описанный алгоритм решения задач динамического деформирования мягкооболочечных конструкций при больших перемещениях и деформациях реализован в комплексе программ для ЭВМ, написанном в среде Matlab [75].

5.2. Особенности построения численного решения задач о динамическом деформировании мягких оболочек при больших деформациях

1. Динамическое деформирование прямого стержня.

Совместный учет физической и геометрической нелинейностей вносит дополнительные сложности в являющийся сам по себе непростым процесс получения численного решения начально-краевой задачи. Поэтому для исследования свойств предложенного алгоритма, максимально свободного от необходимости учета особенностей задачи с произвольной нелинейностью, выберем задачу нагружения плоского консольно закрепленного стержня из линейно упругого материала внезапно приложенной нормальной распределенной нагрузкой постоянной интенсивности по длине. При этом используем систему уравнений сильного цилиндрического изгиба моментных оболочек вращения [33], а для аппроксимации ускорения применим четырехточечную схему метода Хуболта [163] и трехточечную схему центральных разностей.

На рис. 5.1 представлено изменение прогиба конца консольного стержня во времени для значений шага по времени $\Delta t = 0.1; 0.05; 0.036$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) при четырехточечной аппроксимации ускорения, на рис. 5.2 – аналогичные результаты при трехточечной аппроксимации. Значение $\Delta t = 0.036$ является минимальным, при котором оказалось возможным провести расчет. Кривая 4 соответствует аналитическому решению задачи о свободных изгибных колебаниях балки.

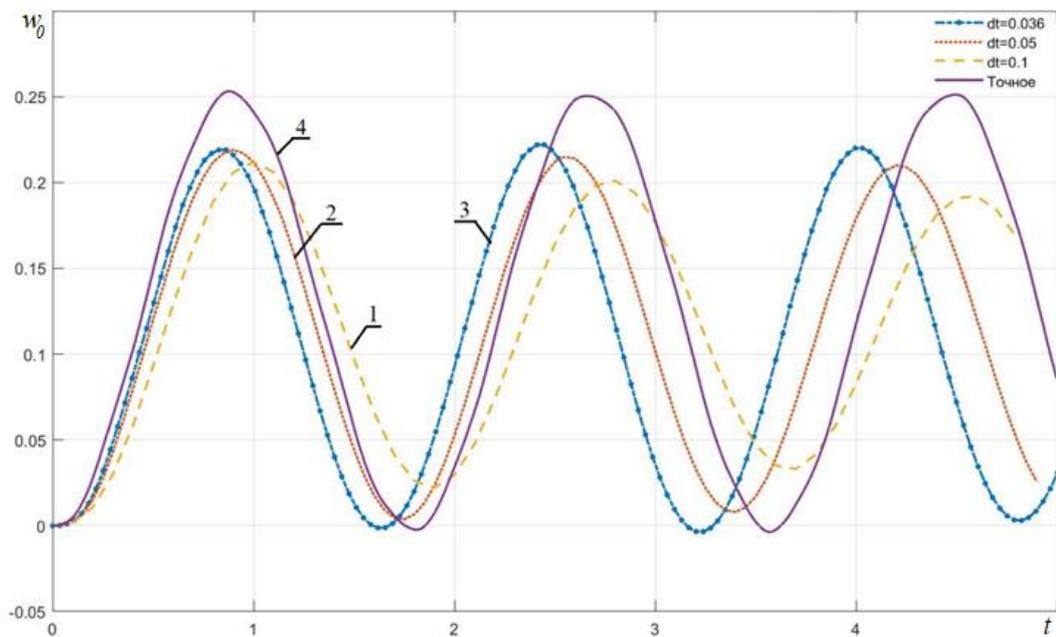


Рис. 5.1. Зависимость прогиба конца консоли от времени при внезапно приложенной постоянной нагрузке для четырехточечной аппроксимации ускорения

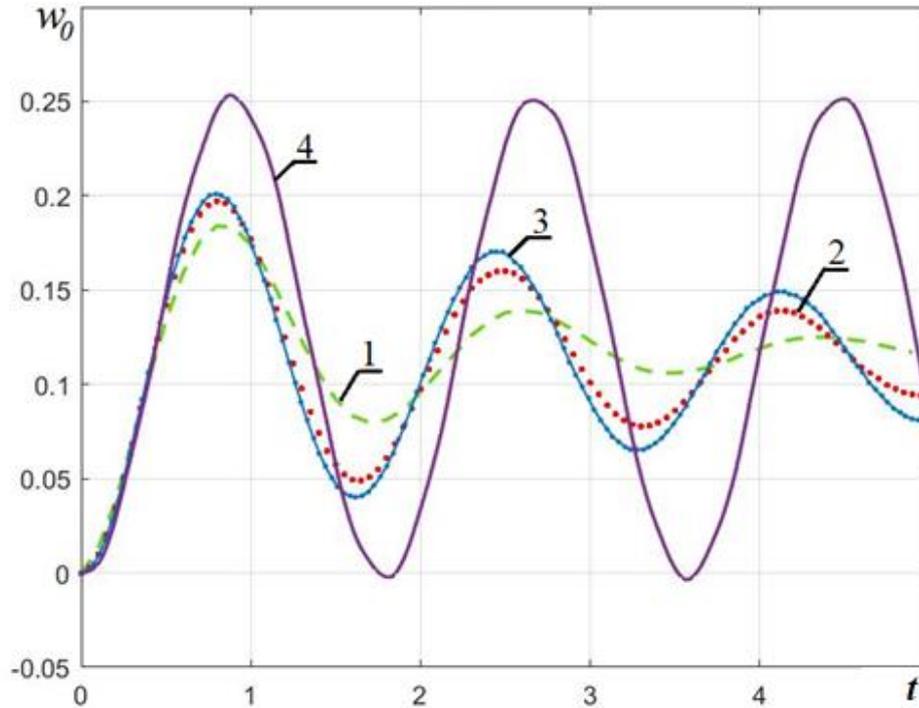


Рис. 5.2. Зависимость прогиба конца консоли от времени при внезапно приложенной постоянной нагрузке для трехточечной аппроксимации ускорения

В табл. 5.1 представлены полученные значения периода колебаний балки. Точная величина периода изгибных колебаний, соответствующих первой форме, составляет $T = 1.79$.

Табл. 5.1. Расчетные значения периода колебаний консоли

Δt	T для аппроксимации ускорения	
	4-точечной	3-точечной
0.1	1.8	1.8
0.05	1.65	1.7
0.036	1.58	1.65

Отметим, что в системе уравнений, по которой проводится расчет, учитывается нормальная сила и инерция продольных колебаний. В результате вычислений получается ненулевое значение нормальной силы,

что, очевидно, приводит к отличию получаемой величины периода колебаний консоли от величины, соответствующей периоду чисто изгибных колебаний первого тона. Помимо этого, на результаты расчета влияет выбор шага по времени и схемы аппроксимации ускорения. Рис. 5.1 и 5.2 демонстрируют особенности численного решения задач динамики, проявляющиеся при использовании конечно-разностной аппроксимации ускорения, отмеченные в работах [167, 173], т.е. затухание амплитуды колебаний при использовании слишком большого шага по времени и уменьшение периода колебаний при уменьшении шага, причем затухание является наиболее выраженным для случая трехточечной аппроксимации. При этом решение затухает к решению статической задачи при приложении постоянной нагрузки рассматриваемой величины. Такие результаты представляются обоснованными, т.к. в предлагаемом алгоритме инерционное слагаемое в разрешающей системе уравнений рассматривается как внешняя нагрузка, действующая на стержень, и, следовательно, вносит вклад в значение амплитуды колебаний. Чем больше выбранная величина шага по времени, тем большая погрешность вносится в аппроксимацию ускорения в сторону уменьшения его величины и, следовательно, тем с большей погрешностью определяется амплитуда, также в сторону уменьшения. Решение задачи проводится последовательно на каждом шаге по времени, и, таким образом, с каждым шагом происходит накопление погрешностей расчета, обусловленных аппроксимацией ускорения. Очевидно, что чем больше величина шага по времени, тем быстрее произойдет уменьшение амплитуд колебаний и, как следствие, аппроксимированного значения ускорения вплоть до нуля, что соответствует системе уравнений статического деформирования стержня.

При этом, как показала практика вычислений, существует некоторое минимально допустимое для расчетов значение шага по времени, определяемое в результате численного эксперимента. Выбор меньшего значения приводит либо к потере устойчивости счета, либо к отсутствию

сходимости итераций, либо к неверному решению. По-видимому, отмеченные особенности являются следствием ухудшения обусловленности матрицы Якоби разрешающей системы уравнений при уменьшении шага по времени.

Таким образом, использование предлагаемого алгоритма решения нелинейных задач динамики тонкостенных конструкций требует обоснованного выбора шага интегрирования по времени, а также предваряющего расчет анализа свойств разрешающей системы уравнений, которые могут привести к тем или иным вычислительным трудностям.

2. Динамическое деформирование мягкой оболочки вращения.

Рассмотрим раздувание шарнирно опертой полусферы внезапно приложенным постоянным во времени равномерно распределенным по меридиану давлением [66]. Для определенности примем, что материал оболочки является неогуковским.

При реализации предлагаемого алгоритма необходимо учесть особенности расчета статического поведения мягких оболочек, указанные в гл. 4. В частности, необходимо задать малое предварительное давление, действующее на оболочку в начальный момент времени, и выполнить регуляризацию системы уравнений движения оболочки. Численные эксперименты показали, что при решении задачи динамики достаточно провести регуляризацию лишь на первом шаге по времени. Параметр продолжения решения был выбран в форме, предложенной В.И. Шалашилиным.

На рис. 5.3 показана зависимость прогиба полюса полусферы, раздуваемой равномерно распределенной по меридиану нагрузкой $p = 0.02$, отнесенного к ее начальному радиусу, от времени для значений шагов по времени $\Delta t = 0.5, 0.25, 0.125, 0.08$ при четырехточечной аппроксимации ускорения; на рис. 5.4 — аналогичные результаты при трехточечной

аппроксимации. Отношение радиуса оболочки к ее толщине в начальном состоянии принято равным $R_0/h_0 = 100$.

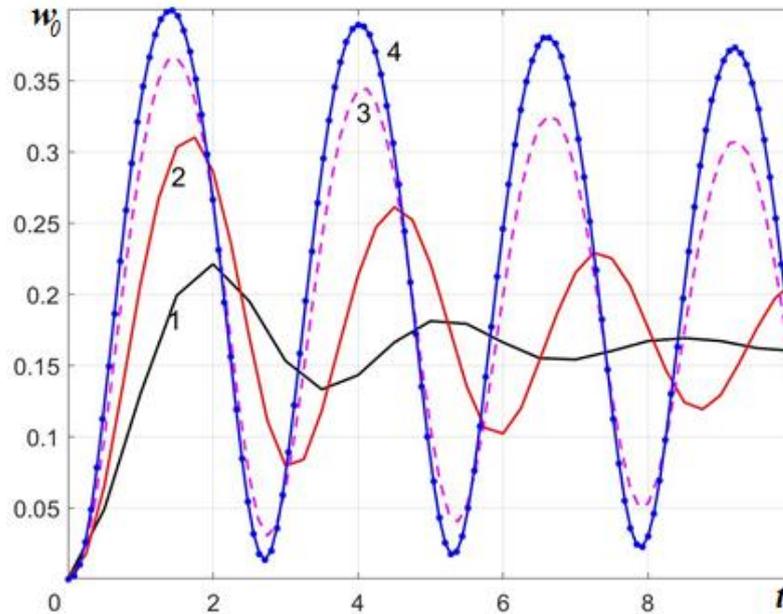


Рис. 5.3. Зависимость прогиба полюса раздуваемой постоянным давлением полусферы от времени при четырехточечной аппроксимации ускорения: 1 — $\Delta t = 0.5$; 2 — $\Delta t = 0.25$; 3 — $\Delta t = 0.125$; 4 — $\Delta t = 0.08$

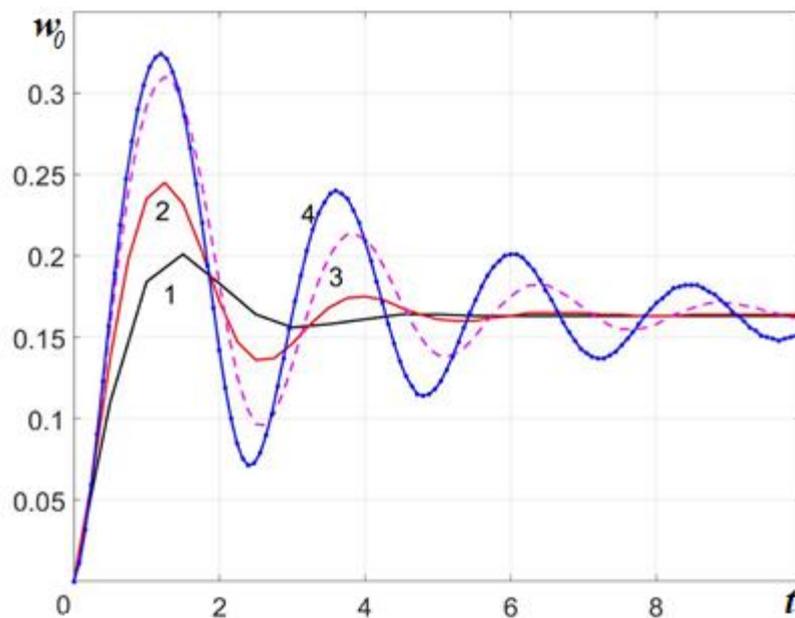


Рис. 5.4. Зависимость прогиба полюса раздуваемой постоянным давлением полусферы от времени при трехточечной аппроксимации ускорения: 1 — $\Delta t = 0.5$; 2 — $\Delta t = 0.25$; 3 — $\Delta t = 0.125$; 4 — $\Delta t = 0.08$

В таблице 5.2 указаны значения периода колебаний оболочки, полученные в результате расчетов. При этом точное значение безразмерного периода колебаний оболочки для данной задачи составляет $T = 2.33$, а величины амплитуды прогиба, отнесенного к начальному радиусу оболочки, — $w_0 = 0.39$.

Таблица 5.2. Значения периода колебаний полусферы при различных шагах по времени

Δt	Значения T для аппроксимации ускорения	
	Для четырехточечной	Для трехточечной
0.5	3	-
0.25	2.75	2.75
0.125	2.625	2.5
0.08	2.56	2.4

Как и в случае исследования колебаний консоли, в рассматриваемой задаче использование трехточечной аппроксимации ускорения приводит к еще большему затуханию амплитуды колебаний, чем в случае четырехточечной аппроксимации.

В результате расчета были подтверждены особенности предлагаемого алгоритма, указанные выше, т.е. затухание амплитуды к значению, соответствующему статическому решению задачи о раздувании полусферы равномерной нагрузкой рассматриваемой величины, при чрезмерно большой величине шага, и уменьшение периода колебаний с уменьшением шага.

При этом, как показала практика вычислений, как и в случае исследования колебаний консоли, существует некоторое минимально допустимое для расчетов значение шага по времени, определяемое в результате численного эксперимента. Так, для рассматриваемой задачи наиболее близкие к теоретически определенным значения указанный величин получены в результате расчета по четырехточечной схеме аппроксимации

ускорения при величине шага по времени $\Delta t = 0.08$ и составляют $T = 2.56$, $w_0 = 0.4$ соответственно (амплитуда прогиба определяется на первом периоде колебаний, когда ее затухание, обусловленное особенностями вычислительного алгоритма, минимально). Отметим, что даже при этом значении шага не удастся получить незатухающее решение. Однако провести расчеты при значении шага $\Delta t < 0.08$ оказалось невозможным вследствие либо потери устойчивости счета, либо отсутствия сходимости итераций. По-видимому, отмеченные особенности являются следствием ухудшения обусловленности матрицы Якоби разрешающей системы уравнений при уменьшении шага по времени. Таким образом, ввиду вычислительной сложности рассматриваемой задачи возможность получения незатухающего решения ограничена ее обусловленностью, а использование предлагаемого алгоритма требует обоснованного выбора шага интегрирования по времени.

Отметим, что предлагаемый алгоритм впервые позволяет определить как временное, так и пространственное распределение компонент напряженно-деформированного состояния оболочки. Для рассматриваемой задачи последнее является простейшим, т.е. зависимость компонент от меридиональной координаты отсутствует, но выбор такой задачи обусловлен лишь необходимостью тестирования алгоритма и сравнения с имеющимися в литературе результатами аналитического решения.

Для исследования возможных особенностей применения разработанного вычислительного алгоритма при различных функциях упругого потенциала, характеризующих физическую нелинейность материала, выполним сравнительный анализ результатов расчета колебаний оболочек из материалов неогукковского, Муни-Ривлина и Йео [83]. Примем те же значения раздувающего оболочку давления и параметра тонкостенности, что и в ранее рассмотренном примере. Соотношения параметров материала на основании экспериментальных данных [186] примем следующими:

- для материала Муни-Ривлина $C_{10} / C = 1.097$, $C_{01} / C = 0.00784$,

- для материала Йео $C_{10}^{m3}/C=0.993$, $C_{20}^{m3}/C=-0.00852$, $C_{30}^{m3}/C=0.000214$.

Здесь C – параметр неогукковского материала.

Приведем результаты вычислений, полученные при минимальном значении шага по времени Δt , при котором удалось провести расчет. Для всех рассматриваемых моделей материала в результате вычислительного эксперимента установлено значение $\Delta t_{\min} = 0.08$.

На рис. 5.5 представлены графики зависимости прогиба полюса полусферы от времени для материалов трех типов, в таблице 5.3 – значения периода и амплитуды колебаний, определенные в результате проведенных вычислений, а также полученные аналитически в работе [192]. Как и для случая колебаний полусферы из неогукковского материала, для вариантов материалов Муни-Ривлина и Йео наблюдается затухание амплитуды колебаний, присущее использованию аппроксимации ускорения в соответствии с четырехточечной схемой метода Хуболта. Вместе с этим соотношение амплитуд и периодов колебаний оболочки для рассмотренных трех типов материала соответствует полученному в работе [192].

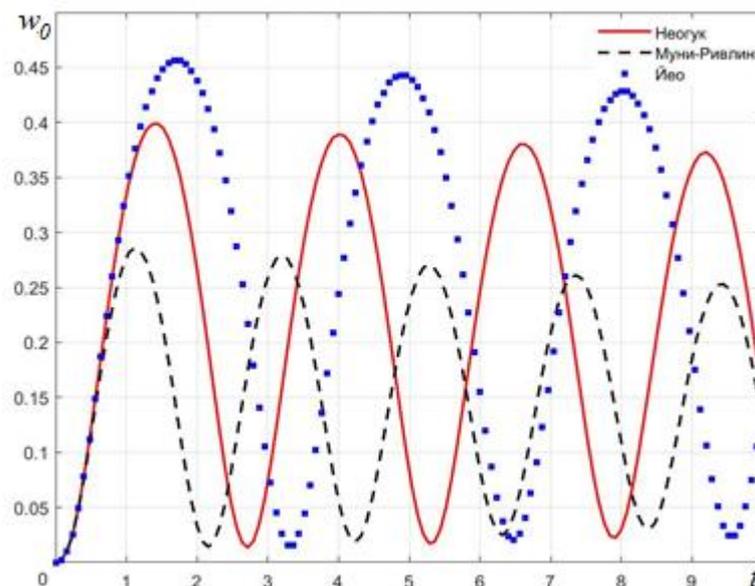


Рис. 5.5. Графики зависимости прогиба полюса полусферы от времени для материалов неогукковского, Муни-Ривлина и Йео

Таблица 5.3. Значения периода колебаний полусферы для материалов неогуковского, Муни-Ривлина и Йео

Материал	$T_{числ}$	$T_{теор}$	$A_{числ}$	$A_{теор}$
Неогуковский	2.56	2.31	0.399	0.38
Муни-Ривлина	2.08	1.9	0.286	0.29
Йео	3.16	2.38	0.44	0.4

Судя по результатам вычислительных экспериментов, затухание колебаний, обусловленное погрешностью, вносимой аппроксимацией ускорения в рассматриваемом алгоритме решения задач динамики, может быть существенно снижено в случае анализа колебаний с достаточно большим периодом. Тогда минимально допустимая величина шага по времени, определяемая обусловленностью разрешающей системы уравнений, оказывается достаточной для наиболее точной аппроксимации ускорения. На рис. 5.6 приведен пример анализа поведения шарнирно опертой по экватору полусферы из материала Муни-Ривлина при соотношении его параметров $\alpha = 0.18$ [82]. Минимально допустимое значение шага по времени в этом случае $\Delta t = 0.07$, при этом расчетное значение периода колебаний составляет $T_{числ} = 5.81$, амплитуды прогиба $A_{числ} = 2.61$ при аналитически определяемых значениях $T_{теор} = 5.64$, $A_{теор} = 2.28$. Из графика видно существенно меньшее затухание колебаний, чем на рис. 5.5.

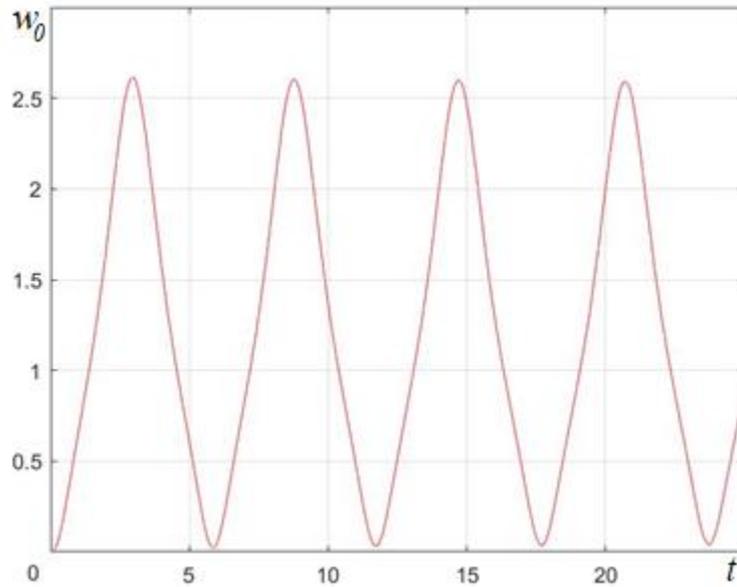
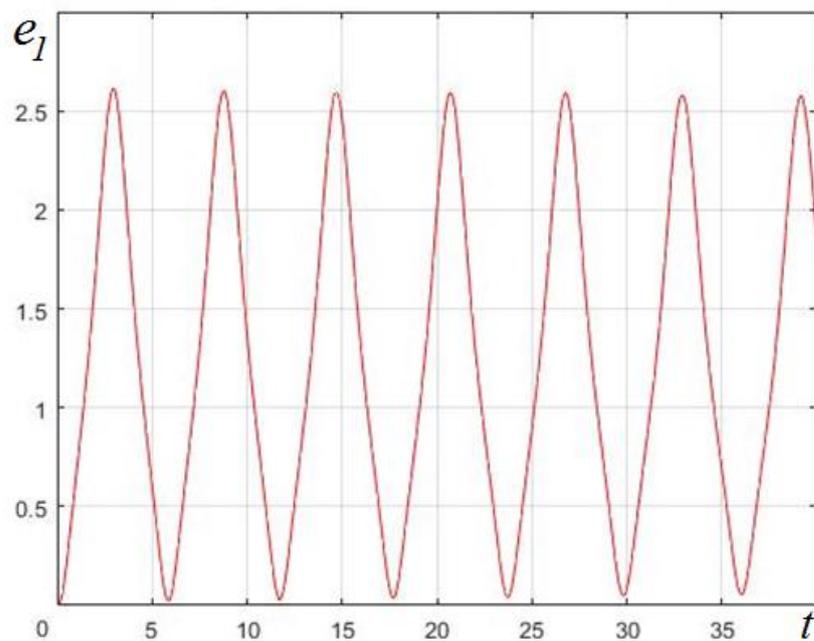
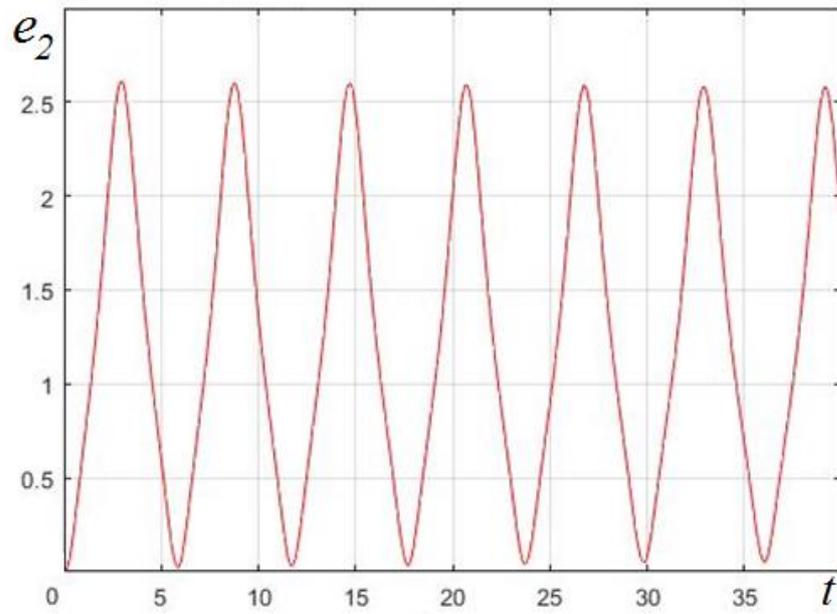


Рис. 5.6. Зависимость прогиба полюса полусферы от времени для материала Муни-Ривлина при $\alpha = 0.18$

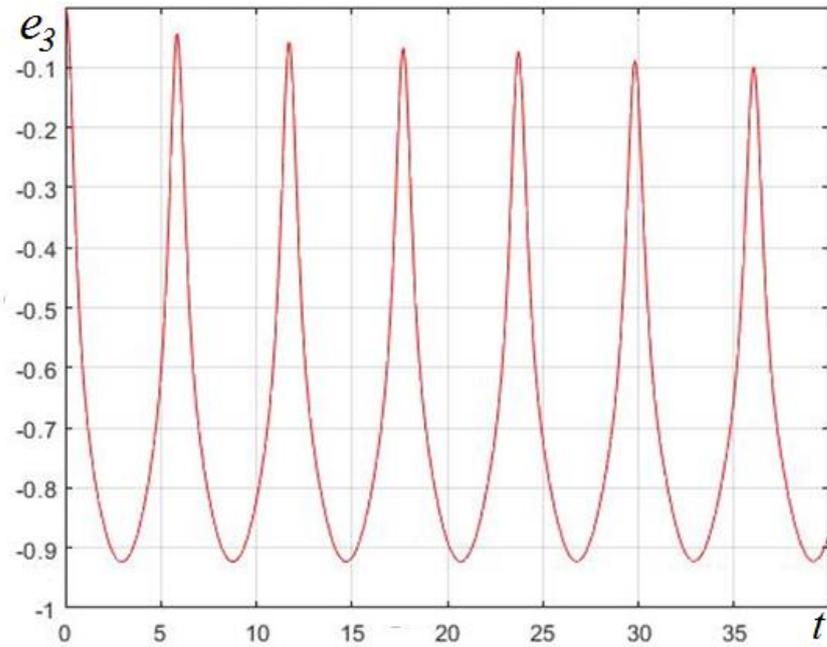
Величина поперечной деформации в полюсе полусферы при этом достигает -92%. На рис. 5.7 а-в представлены зависимости меридиональной, окружной и поперечной соответственно деформаций в полюсе оболочки от времени. Характер зависимости поперечной деформации отражает нелинейность динамического поведения оболочки.



а)



б)



в)

Рис. 5.7. Зависимости истинных деформаций в полусе сферической оболочки от времени: а) меридиональные деформации; б) окружные деформации; в) поперечные деформации

Вместе с этим следует отметить, что соотношение периода колебаний и шага по времени не определяет точность определения периода. Так, в последнем рассмотренном случае соотношение рассчитанного периода

колебаний и шага по времени составляет $T_{\text{числ}}/\Delta t = 83$, а для результатов, приведенных на рис. 5.5, для случая неогоуковского материала $T_{\text{числ}}^{\text{неогук}}/\Delta t = 32$, $T_{\text{числ}}^{\text{муни}}/\Delta t = 26$, $T_{\text{числ}}^{\text{йео}}/\Delta t = 40$. Наибольшее отклонение в определении периода колебаний от аналитически определяемого отмечается для материала Йео, несмотря на то, что величина шага по времени в этом случае не является наибольшей по отношению к величине периода из рассмотренных случаев расчета. Кроме того, как показали численные эксперименты, величина периода колебаний оболочки из материала Йео нелинейно зависит от шага по времени (табл. 5.4) – при минимально допустимом для получения результатов расчете значения шага по времени вместо ожидаемого снижения расчетного значения периода колебаний и стремления его к аналитически определяемому отмечается его рост. Можно предположить, что указанная особенность связана с тем, что для материала Йео рассматриваемое значение нагрузки является наиболее близким к верхнему критическому, т.е. к максимальной величине статической нагрузки, которую способна воспринимать оболочка без потери устойчивости [192].

Таблица 5.4. Значения периода колебаний полусферы из материала Йео при разных величинах шага по времени

Δt	T
0.5	3.25
0.25	3
0.125	2.75
0.08	3.16

Отметим, что, на наш взгляд, не следует считать недостатком используемого алгоритма решения задач динамики мягких оболочек невозможность корректного сравнения с результатами аналитического определения периода радиальных колебаний сферической оболочки, связанную с необходимостью задания некоторого предварительного

давления для регуляризации решения. Обе постановки задачи, как для аналитического, так и для численного решения, являются модельными и описывают реальное поведение оболочки в той или иной степени приближенно.

5.3. Использование метода автоматической сегментации для повышения точности решения задач динамического деформирования мягких оболочек из гиперупругих материалов

Как было показано в п. 5.2, решение задач динамического деформирования мягких оболочек может сопровождаться еще большими вычислительными сложностями, чем решение задач статики. Поэтому разработка критериев назначения параметров вычислительного алгоритма для исследования динамического поведения оболочек представляется особенно необходимой.

В качестве одного из таких критериев предлагается использование описанного в п. 4.3 метода автоматической сегментации [68]. В рамках применяемого в диссертации алгоритма решения задачи динамики указанный метод реализуется в начале первого шага по времени. При этом сегментация интервала интегрирования краевой задачи выполняется на основании контроля величины первой нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем квазилинейных дифференциальных уравнений.

1. Динамическое раздувание цилиндра внезапно приложенным давлением.

Рассмотрим задачу о раздувании равномерно распределенным по меридиану внезапно приложенным давлением цилиндра длиной $L_0 = 2R_0$, где R_0 - радиус недеформированного цилиндра, из материала Муни-Ривлина. Примем параметр материала $\alpha = C_{01}/C_{10} = 0.18$ [84]. Пусть отношение радиуса к толщине недеформированного цилиндра $R_0/h_0 = 100$.

Предположим, что граничные условия обеспечивают возможность свободного перемещения торцев цилиндра по нормали к его меридиану, что приводит к независимости компонент напряженно-деформированного состояния от осевой координаты и позволяет сравнить результаты расчета с аналитическим решением задачи [171, 196]. Выберем в качестве параметров обезразмеривания $R_0 = L_0$, $C = C_{10}$, где C_{10} - параметр материала Муни-Ривлина. Пусть величина давления $p = 0.02$.

Рассмотрим величины шагов по времени $\Delta t = 0.25$, $\Delta t = 0.125$, $\Delta t = 0.11$. Так как компоненты матрицы Якоби формируемой в рамках используемого вычислительного алгоритма системы уравнений зависят от шага по времени, то при использовании метода автоматической сегментации число сегментов, на которое нужно разбить интервал интегрирования, также зависит от выбора величины Δt . Для перечисленных выше значений шагов по времени в соответствии с описанным выше алгоритмом были получены следующие рекомендации по сегментации цилиндра соответственно: $N_{segm}=5$, $N_{segm}=10$, $N_{segm}=11$. Так, на рис. 5.8 показан график, демонстрирующий результаты использования метода автоматической сегментации при допустимой норме неортогональности фундаментальных матриц $\delta = 0.05$ для шага по времени $\Delta t = 0.25$. Здесь по оси абсцисс отложена координата x_j j -той точки меридиана цилиндра, по оси ординат – значение нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений $\Delta = \|\mathbf{M}^T(x_j)\mathbf{N}(x_j)\|$, соответствующих уравнению (5.10). В тех точках, в которых отклонение этой нормы от 1 превышает 5%, выполняется сегментация интервала интегрирования.

Отметим, что интервал интегрирования на рис. 5.8 соответствует половине длины цилиндра, т.к. условия нагружения и закрепления цилиндра симметричны.

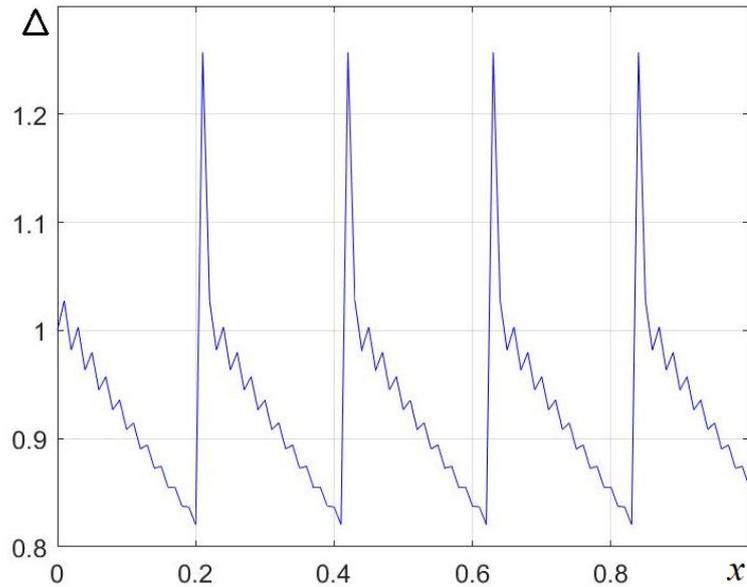


Рис. 5.8. Иллюстрация к использованию алгоритма метода автоматической сегментации

Для исследования влияния сегментации меридиана оболочки на результаты расчетов, помимо различных значений шага по времени, были рассмотрены различные варианты сегментации: а) сегментация отсутствует; б) $N_{segm}=2$; в) $N_{segm}=20$; г) автоматическая сегментация.

В случае отсутствия сегментации меридиана решение сопровождалось потерей устойчивости счета уже на первом шаге по времени. Таким образом, сегментация является необходимым условием получения решения задачи.

На рис. 5.9 показана иллюстрация зависимости прогиба оболочки от времени, полученная для разных значений шага по времени в случае сегментации $N_{segm}=20$. Минимальное значение шага по времени, при котором в данном случае возможно получение численного решения, $\Delta t = 0.11$. При дальнейшем уменьшении шага по времени в процессе вычислений происходит потеря устойчивости счета.

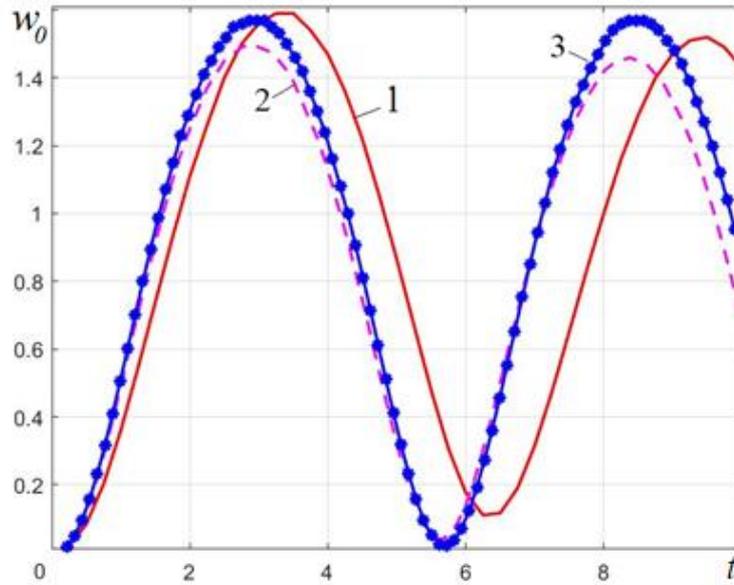


Рис. 5.9. Зависимость прогиба оболочки от времени в случае сегментации $N_{сегм}=20$ (1 – $\Delta t = 0.25$; 2 – $\Delta t = 0.125$; 3 – $\Delta t = 0.11$)

В таблице 5.5 приведены значения погрешности δ_T расчета периода колебаний цилиндра, в таблице 5.6 – значения погрешности δ_A расчета амплитуды колебаний. Черточки в таблицах соответствуют случаям, когда получение результата оказалось невозможным вследствие потери устойчивости счета.

Таблица 5.5. Погрешность δ_T расчета периода T колебаний цилиндра, %

Δt	$N_{сегм}=20$	Автоматическая сегментация	$N_{сегм}=2$
0.25	17.6	19.2	23.7
0.125	6.36	1.9	-
0.11	6.36	-	-

Таблица 5.6. Погрешность δ_A расчета амплитуды A колебаний цилиндра, %

Δt	$N_{сегм}=20$	Автоматическая сегментация	$N_{сегм}=2$
0.25	4.15	2.93	20.9
0.125	1.97	0.65	-
0.11	2.93	-	-

Анализируя представленные в таблицах 5.5 и 5.6 данные, можно сделать вывод, что разбиение оболочки на сегменты не должно быть произвольным, т.к. в противном случае возможно возникновение вычислительных сложностей, приводящих к потере устойчивости счета. Вместе с этим при использовании автоматической сегментации также возможно возникновение подобных проблем в случае чрезмерно малого значения шага по времени. Однако именно при использовании автоматической сегментации удалось получить минимальные значения погрешности расчета при оптимальном значении шага по времени.

На рис. 5.10 представлен иной параметр, характеризующий качество построенного алгоритма решения задачи – иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов, выражающаяся в зависимости N_p – числа шагов по параметру продолжения решения краевых задач, решаемых на каждом шаге по времени, необходимого для сходимости решения на разных итерациях с требуемой точностью, от номера шага по времени N_t для случая $\Delta t = 0.25$. Очевидно, итерационные процессы сходятся тем быстрее, чем меньше требуется шагов по параметру продолжения для решения краевой задачи.

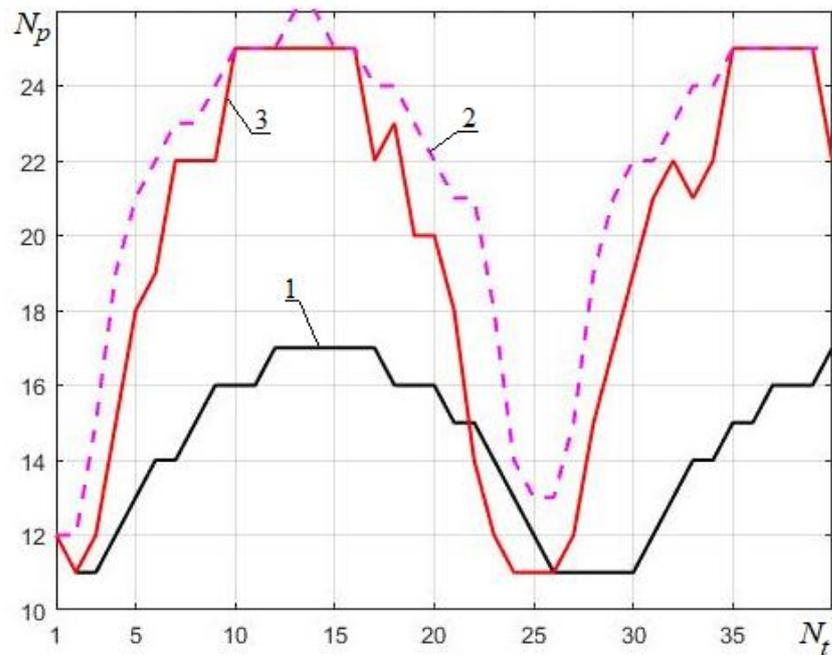


Рис. 5.10. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{segm}=2$; 2 – $N_{segm}=20$; 3 – автоматическая сегментация)

Из анализа данных таблиц 5.6, 5.7 и рис. 5.10 можно заключить, что, хотя случай $N_{segm}=2$ соответствует наивысшей скорости сходимости, т.к. необходимое для достижения требуемой близости решений на соседних итерациях число шагов по параметру продолжения решения краевых задач в этом случае минимально, его нельзя рекомендовать для проведения вычислений, т.к. при этом получается наибольшая погрешность расчетов. Таким образом, при выборе оптимальных значений параметров вычислительного алгоритма необходимо руководствоваться одновременно соображениями сходимости и точности результатов. С этой точки зрения наилучшим вариантом сегментации меридиана оболочки является вариант, соответствующий автоматической сегментации.

2. Динамическое раздувание полусферы, закрепленной на экваторе подвижным шарниром, внезапно приложенным давлением.

Рассмотрим задачу о раздувании равномерно распределенным по меридиану внезапно приложенным давлением полусферы из неогукковского

материала, закрепленной на экваторе подвижным шарниром [68]. Примем отношение радиуса к толщине недеформированной оболочки $R_0/h_0 = 100$. Пусть величина давления $p = 0.02$.

Как было отмечено в п. 4.3, использование метод автоматической сегментации для сферической оболочки оказывается невозможным в связи с тем, что в полюсе такой оболочки матрица Якоби разрешающей системы уравнений имеет сингулярные элементы, что приводит к нарушению выполнения условия ортогональности фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем квазилинейных дифференциальных уравнений (5.10) на достаточно большом участке в окрестности полюса. На рис. 5.11 представлена зависимость нормы произведения упомянутых фундаментальных матриц от координаты точки меридиана оболочки для шага по времени $\Delta t = 0.25$. Масштаб графика выбран достаточным для хорошего визуального восприятия результата, так как в окрестности полюса оболочки величина Δ значительно превышает единицу в каждой точке меридиана. Лишь для значений координат точек меридиана $x \geq 1$ удалось получить величину $\Delta \leq 1.05$ по крайней мере в двух соседних точках. Вследствие этого число сегментов, на которое необходимо разбить меридиан рассматриваемой оболочки, оказалось достаточно большим – $N_{segm} = 137$.

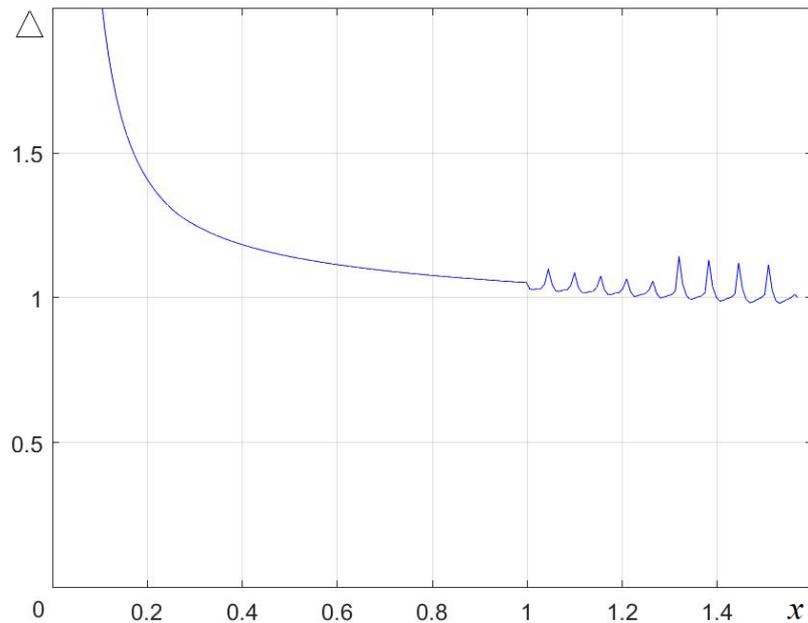


Рис. 5.11. Зависимость нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений от координаты точки меридиана при выполнении автоматической сегментации интервала интегрирования

Поэтому для данной задачи, помимо описанного выше варианта сегментации меридиана полусферы, было принято назначить число сегментов разбиения интервала интегрирования на основании использования метода автоматической сегментации применительно к оболочке вращения, имеющей те же длину меридиана, параметр тонкостенности и свойства материала, что и рассматриваемая сферическая оболочка, но иной формы меридиана, исключающей появление сингулярных элементов в матрице Якоби системы уравнений, т.е. к цилиндру. Ниже в тексте описанный вариант сегментации назван «сфера как цилиндр». Всего было рассмотрено 6 вариантов сегментации сферической оболочки: а) сегментация отсутствует; б) $N_{segm}=2$; в) $N_{segm}=3$; г) $N_{segm}=10$; д) «сфера как цилиндр»; е) «сфера как сфера», т.е. автоматическая сегментация меридиана полусферы. Число сегментов, на которые необходимо разбить меридиан оболочки в последних двух случаях, в зависимости от выбранного шага по времени, представлено в таблице 5.7.

Таблица 5.7. Число сегментов N_{segm} для особых случаев сегментации полусферы при различных шагах по времени

Δt	«сфера как цилиндр»	«сфера как сфера»
0.25	8	137
0.125	15	157
0.11	21	248

Для вариантов отсутствия сегментации и $N_{segm}=2$ на первом же шаге по времени вычисления сопровождались потерей устойчивости счета. Таким образом, как и в случае решения задачи о динамическом раздувании цилиндра, использование сегментации является необходимым условием получения решения задачи.

На рис. 5.12 показана зависимость прогиба полюса рассматриваемой оболочки от времени для случая сегментации «сфера как цилиндр» при разных значениях шагов по времени. При этом рис. 5.12 демонстрирует отмеченные ранее особенности численного решения задач динамики, проявляющиеся при использовании конечно-разностной аппроксимации ускорения, т.е. затухание амплитуды колебаний при использовании слишком большого шага по времени и уменьшение периода колебаний при уменьшении шага.

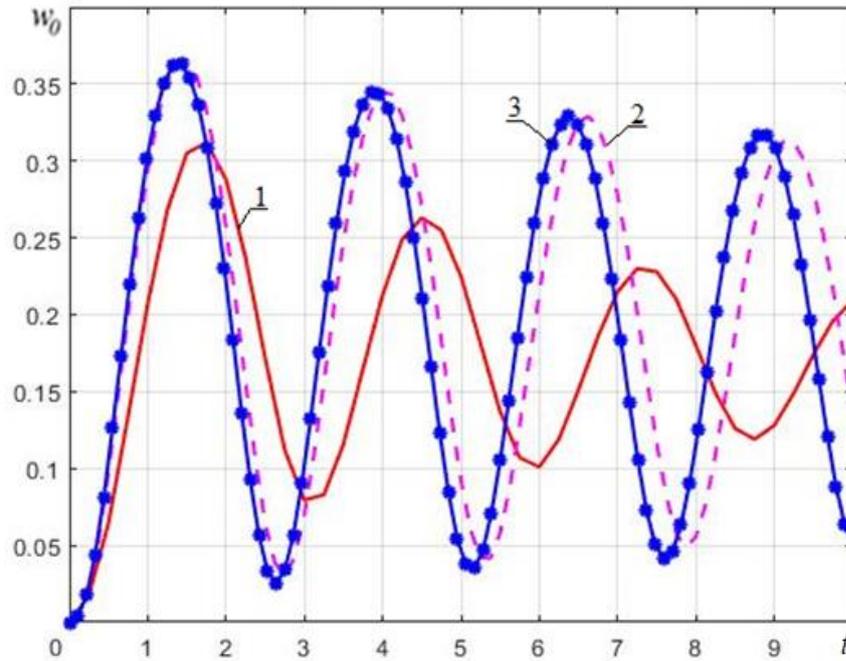


Рис. 5.12. Зависимость прогиба оболочки от времени в случае сегментации «сфера как цилиндр» (1 – $\Delta t = 0.25$; 2 – $\Delta t = 0.125$; 3 – $\Delta t = 0.11$)

В таблице 5.8 приведены значения погрешности δ_T расчета периода колебаний полусферы, в таблице 5.9 – значения погрешности δ_A расчета амплитуды колебаний, полученные в разных случаях сегментации при различных значениях шагов по времени. Черточки в таблицах соответствуют случаям, когда получение результата оказалось невозможным вследствие потери устойчивости счета.

Таблица 5.8. Погрешность δ_T расчета периода T колебаний полусферы, %

Δt	$N_{segm}=3$	$N_{segm}=10$	«сфера как цилиндр»	«сфера как сфера»
0.25	19.7	16	16	20
0.125	-	13.7	9.13	35.2
0.11	-	13.7	5.98	-

Таблица 5.9. Погрешность δ_A расчета амплитуды A колебаний полусферы, %

Δt	$N_{segm}=3$	$N_{segm}=10$	«сфера как цилиндр»	«сфера как сфера»
0.25	14.5	18.1	17.9	16
0.125	-	1.04	3.68	24.5
0.11	-	3.31	4.47	-

Представленные в таблицах 5.8 и 5.9 данные вновь подтверждают необходимость обоснованной сегментации меридиана оболочки при проведении вычислений. В случае сегментации «сфера как цилиндр» удалось добиться точности определения периода колебаний полусферы в 2 раза выше, чем при произвольном назначении числа сегментов. Случай «сфера как сфера» оказался наихудшим, приводя к наибольшей погрешности, увеличивающейся с уменьшением шага по времени. При этом в случае недостаточного числа сегментов разбиения меридиана оболочки процесс вычислений может оказаться устойчивым лишь при достаточно больших величинах шага по времени.

На рис. 5.13 показана иллюстрация скорости сходимости итерационного процесса, выражающаяся в тех же параметрах N_p и N_t , что и на рис. 5.10, для значения шага по времени $\Delta t = 0.125$.

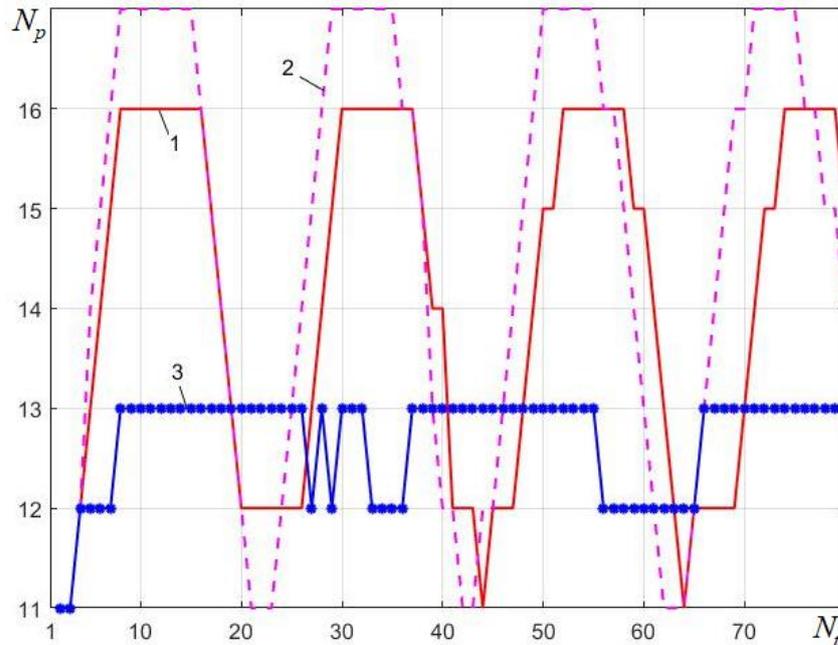


Рис. 5.13. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{segm}=10$; 2 – «сфера как цилиндр»; 3 – «сфера как сфера»)

Из представленных на рис. 5.13 графиков следует, что наивысшая скорость сходимости соответствует случаю «сфера как сфера», однако в этом случае погрешность расчета периода колебаний оболочки достаточно велика (см. таблицу 5.8). Скорости сходимости для случаев $N_{segm}=10$ и «сфера как цилиндр» практически одинаковы, поэтому можно заключить, что вариант сегментации «сфера как цилиндр» является наилучшим, так как он обеспечивает наивысшую точность расчета периода колебаний без принципиального снижения точности расчета амплитуды колебаний.

Анализируя полученные результаты, как и в случае решения задач статического деформирования мягких оболочек, можно заключить, что использование метода автоматической сегментации является желательным для повышения точности решения и минимизации необоснованных действий вычислителя. Вместе с этим при наличии сингулярных коэффициентов в разрешающей системе уравнений на интервале интегрирования необходима разработка альтернативных рекомендаций по сегментации.

3. Динамическое раздувание полусферы, закрепленной на экваторе неподвижным шарниром, внезапно приложенным давлением.

Как и в случае исследования задач статического деформирования мягких оболочек, данная задача выбрана в связи с тем, что у нее отсутствует аналитическое решение, и необходима выработка критериев, на основании которых можно рекомендовать выбор параметров вычислительного алгоритма [68]. Геометрические и физические параметры оболочки примем такими же, что и в предыдущей задаче. Рассмотрим те же случаи сегментации оболочки.

На рис. 5.14 показана зависимость прогиба полюса полусферы от времени для случая сегментации «сфера как цилиндр» при разных значениях шагов по времени.

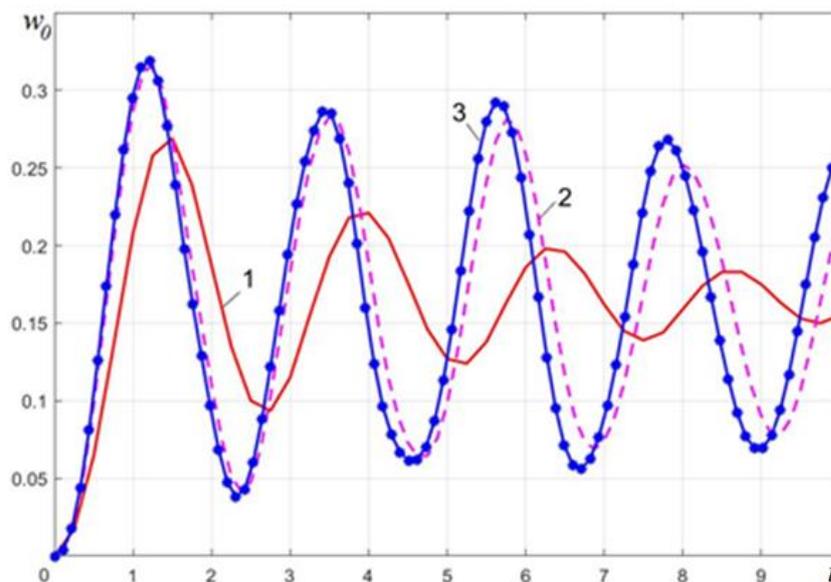


Рис. 5.14. Зависимость прогиба полюса полусферы от времени в случае сегментации «сфера как цилиндр» (1 – $\Delta t = 0.25$; 2 – $\Delta t = 0.125$; 3 – $\Delta t = 0.11$)

В связи с отсутствием аналитического решения данной задачи критерием оценки достоверности полученного решения может являться близость результатов, полученных на разных шагах по времени при одном и том же числе сегментов, либо полученных при одном и том же шаге по времени для разного числа сегментов. Поэтому в таблице 5.10 представлены

значения периода колебаний, в таблице 5.11 – амплитуды колебаний полюса полусферы для различных случаев величин шага по времени и числа сегментов. Как и в таблицах 5.8 и 5.9, черточки в таблицах соответствуют случаям, когда получение результата оказалось невозможным вследствие потери устойчивости счета.

Таблица 5.10. Период колебаний T полусферы с неподвижным экватором

Δt	$N_{segm}=3$	$N_{segm}=10$	«сфера как цилиндр»	«сфера как сфера»
0.25	2.33	2.33	2.33	-
0.125	-	2.25	2.25	-
0.11	-	-	2.2	-

Таблица 5.11. Амплитуда колебаний A полюса полусферы с неподвижным экватором

Δt	$N_{segm}=3$	$N_{segm}=10$	«сфера как цилиндр»	«сфера как сфера»
0.25	0.2702	0.271	0.269	-
0.125	-	0.323	0.316	-
0.11	-	-	0.319	-

Получить решение задачи для случая сегментации «сфера как сфера» оказалось невозможным вследствие потери устойчивости счета при всех рассмотренных значениях шага по времени. Таким образом, как и в предыдущем примере, вычисления с использованием слишком большого числа сегментов приводят к неудовлетворительному результату. Судя по результатам, представленным на рис. 5.14 и в таблицах 5.10, 5.11, можно заключить, что наиболее предпочтительным является вариант сегментации «сфера как цилиндр» при значении шага по времени $\Delta t = 0.11$, т.к. уменьшение амплитуды, вызванное особенностями вычислительного процесса, является наименьшим в этом случае, в то время как конечно-разностная аппроксимация ускорения является наиболее точной.

Сравнение результатов решения для значений шага по времени $\Delta t = 0.125$ и $\Delta t = 0.11$ с точки зрения скорости сходимости итерационных процессов, выраженное зависимостью параметра N_p от N_t (см. рис. 5.10, 5.13), проиллюстрировано рис. 5.15.

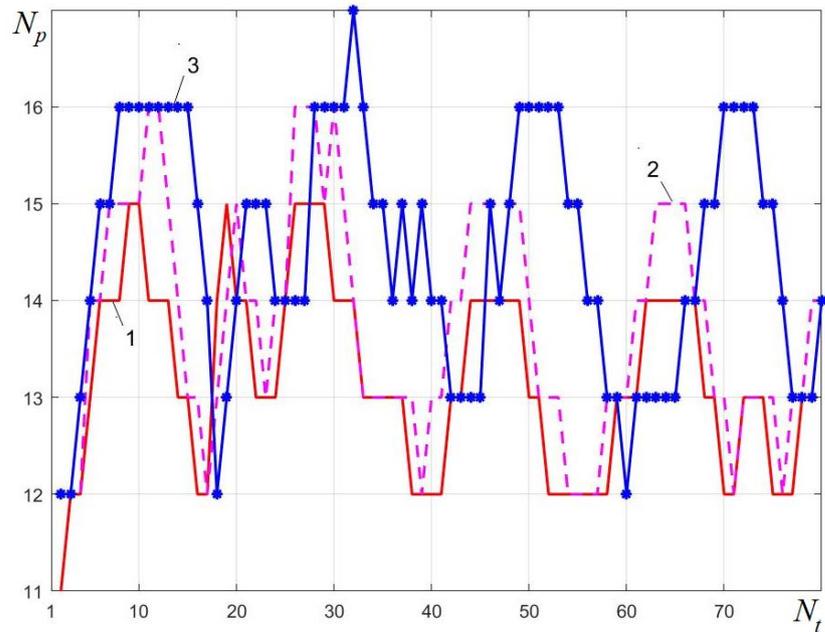


Рис. 5.15. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{segm}=10$, $\Delta t = 0.125$, 2 – «сфера как цилиндр», $\Delta t = 0.125$; 3 – «сфера как цилиндр», $\Delta t = 0.11$)

Из представленных на рис. 5.15 графиков следует, что скорости сходимости итерационных процессов принципиально не различаются, и, следовательно, единственным критерием выбора решения среди различных полученных результатов является описанный выше, основанный на сравнении графиков и характеристик параметров колебательного процесса.

5.4. Исследование динамического раздувания сферической оболочки из гиперупругих материалов различных моделей линейно возрастающим давлением

В работах, посвященных исследованию динамики раздувания мягкой сферической оболочки, при рассмотрении задач, для которых авторами вводится понятие критического давления, указывается, что при превышении давлением этого значения либо «решение физически неприемлемо», либо «оболочка через некоторое время разрушается» [183, 192, 217]. При этом полного анализа напряженно-деформированного состояния оболочки ни в одной из работ не проводится, и понятие критической нагрузки определяется лишь как некое экстремальное ее значение, которое является допустимым для рассматриваемой оболочки при заданных начальных условиях. Физически поведение оболочки при стремлении нагрузки к критическому значению не описывается.

Восполнение указанного недостатка оказывается возможным в случае рассматриваемой в диссертации полной постановки задачи деформирования мягкой оболочки как начально-краевой задачи [67]. Примем, что равномерно распределенное по меридиану оболочки давление линейно возрастает во времени по закону $p = \gamma t$, где $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-3}$. Параметр тонкостенности оболочки примем равным $R_0/h_0 = 100$, а параметры материалов Муни-Ривлина и Йео положим теми же, что и в п. 4.7.

Необходимо отметить, что вследствие симметрии геометрии и нагружения сферической оболочки ее напряженно-деформированное состояние не зависит от координаты точки меридиана, и, следовательно, возможна постановка данной задачи как задачи Коши по уравнениям, аналогичным представленным в работе [192]. Представим их в безразмерной форме:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -2 \frac{\sigma}{1+w} + (1+w)^2 pR. \quad (5.14)$$

Начальные условия примем в виде $w(0) = 0; \left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} = 0$.

Здесь функция напряжений σ определяется обезразмеренными соотношениями (2.59)-(2.61), при этом в качестве параметра обезразмеривания принимается параметр неогукковского материала C .

На рис. 5.16 представлена диаграмма «нагрузка – прогиб» для рассматриваемого случая динамического нагружения оболочки из неогукковского материала (кривая 1 соответствует расчетам с шагом по времени $\Delta t = 0.25$ по сформулированным в данной работе соотношениям и алгоритмам, кривая 2 – решению задачи как задачи Коши с использованием функции ode45 среды Matlab, реализующей метод Рунге-Кутты 4 порядка точности) и для случая статического нагружения (кривая 3).

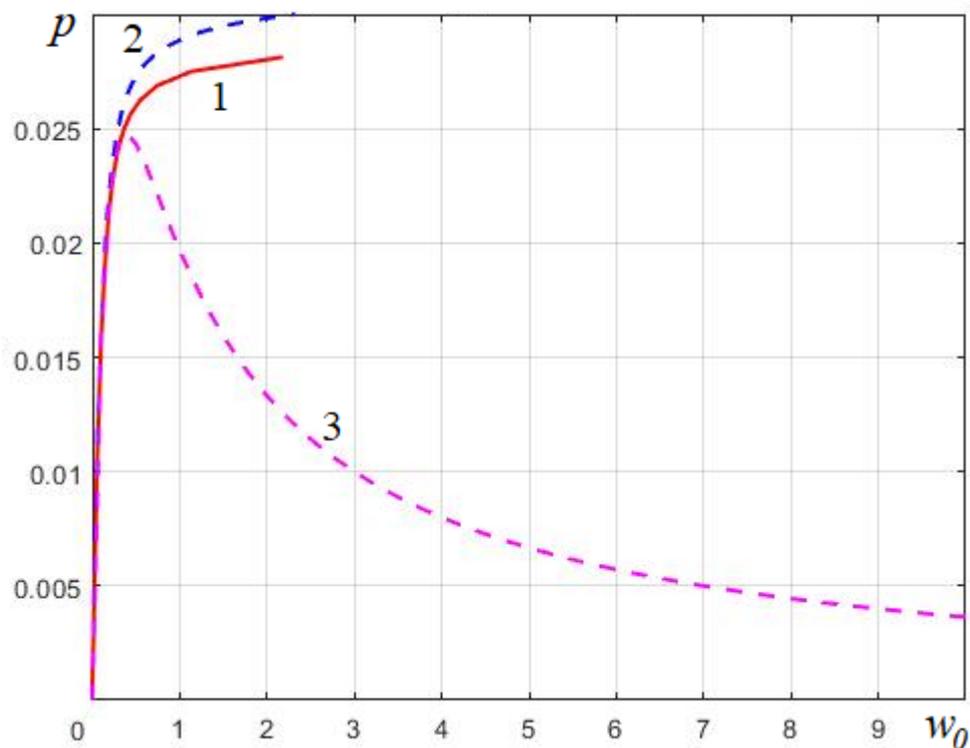


Рис. 5.16. Диаграмма «нагрузка – прогиб» для случаев динамического (кривые 1-2) и статического (3) нагружения оболочки

При проведении расчетов динамического раздувания сферической оболочки по сформулированным в работе соотношениям и алгоритмам

итерационный процесс переставал сходиться при значении нагрузки $p = 0.0281$, а при решении задачи Коши (5.14) - при значении $p = 0.032$. Графики на рис. 5.16 демонстрируют хорошее совпадение результатов вычислений, а также совпадение кривых для случаев статического и динамического деформирования до значения нагрузки, приблизительно соответствующего критическому значению нагрузки при статическом нагружении.

На рис. 5.17-5.19 приведены графики изменения во времени прогиба, скорости и ускорения движения оболочки. На всех графиках кривые, полученные с использованием разработанных в диссертации соотношений и алгоритмов, обозначены цифрой 1, а полученные на основании соотношений (5.14) – цифрой 2.

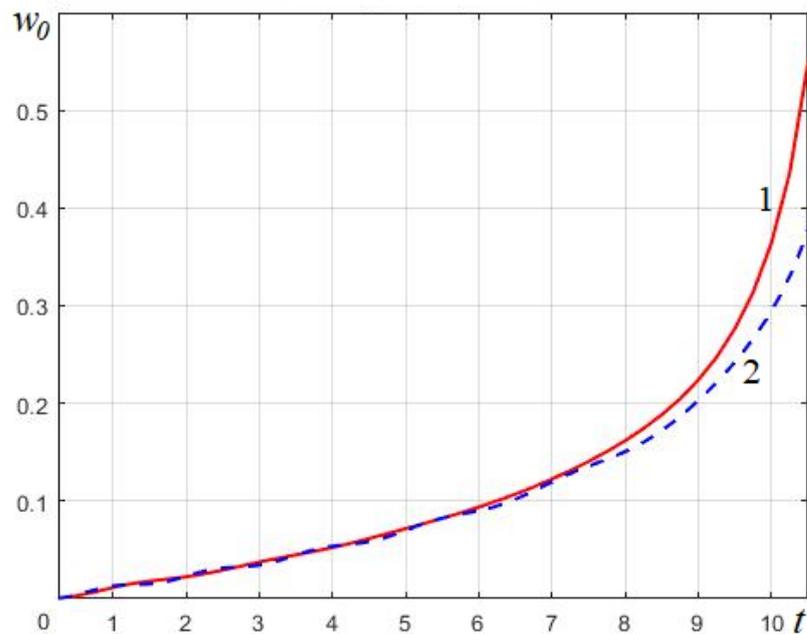


Рис. 5.17. Зависимость прогиба сферической оболочки от времени

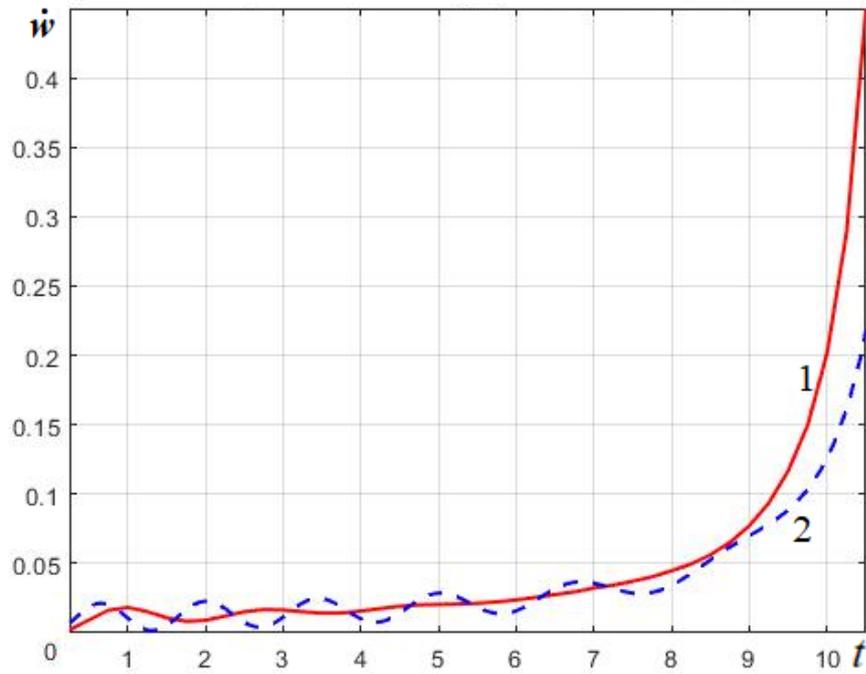


Рис. 5.18. Зависимость скорости движения сферической оболочки от времени

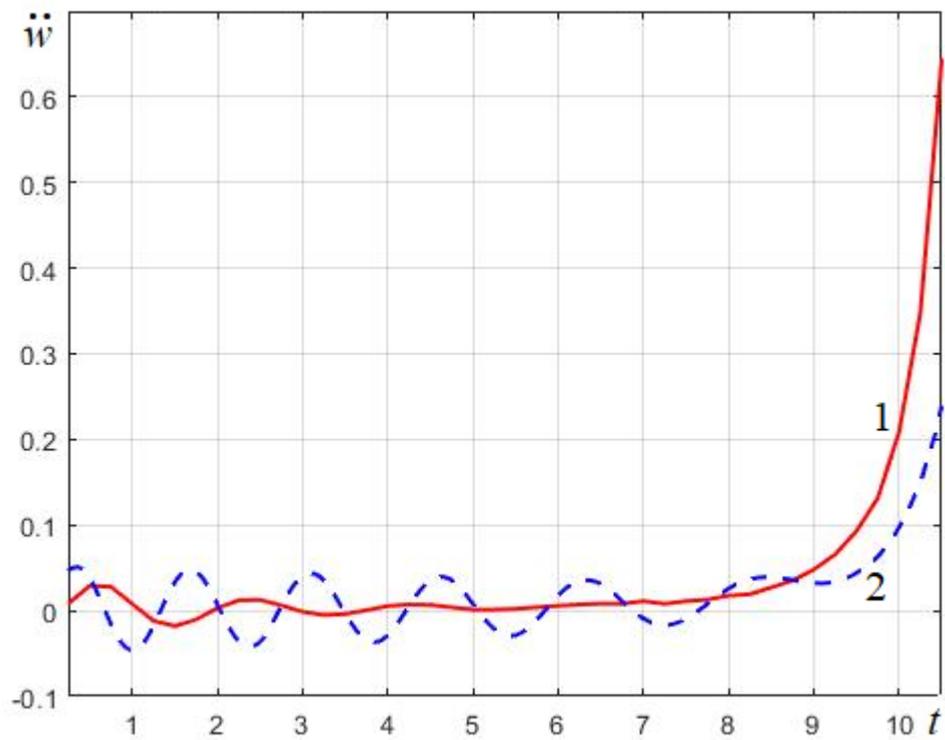


Рис. 5.19. Зависимость ускорения движения сферической оболочки от времени

Представленные графики иллюстрируют совпадение результатов расчетов по различным системам уравнений и с использованием разных методов, наиболее ярко проявляющееся на начальном этапе процесса раздувания оболочки. Наличие точек перегиба на этом этапе более отчетливо выражено в случае решения данной задачи как задачи Коши.

На рис. 5.20-5.21 представлены графики изменения во времени поперечной деформации и относительного изменения объема полости, ограниченной оболочкой, $\Delta = (V - V_0)/V_0$, полученные при решении данной задачи как начально-краевой по разработанному в диссертации алгоритму.

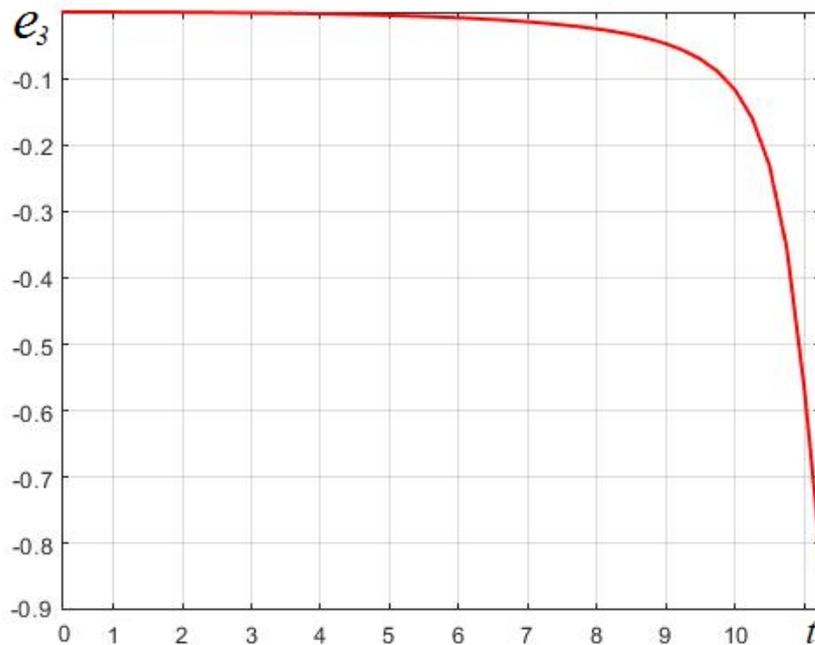


Рис. 5.20. Зависимость поперечной деформации сферической оболочки от времени

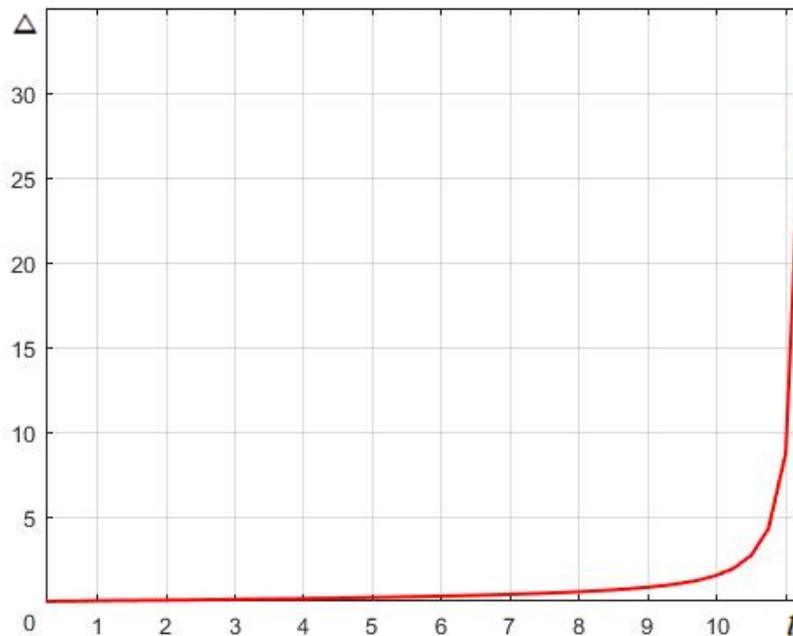


Рис. 5.21. Зависимость относительного изменения объема сферической оболочки от времени

Перед наступлением момента отсутствия сходимости итерационных процессов расчет удается провести до значения поперечной деформации $e_3 = 83\%$, при этом относительное изменение объема оболочки составляет $\Delta = 31$.

В целях исследования влияния скорости роста нагрузки γ на кинематику оболочки было выполнено сравнение результатов расчетов при значениях параметра $\gamma = 1 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-3}$ для шага по времени $\Delta t = 0.25$. Указанная величина шага оказалась минимально допустимой для обоих рассмотренных значений скорости роста нагрузки. На рис. 5.22 представлена диаграмма «нагрузка – прогиб» для случаев динамического (кривые 1-2 соответствуют значениям $\gamma = 1 \cdot 10^{-2}$ и $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-3}$) и статического (кривая 3) нагружения оболочки. При любой скорости роста нагрузки и любом шаге по времени вычислительный процесс заканчивался при некотором значении нагрузки отсутствием сходимости итераций.

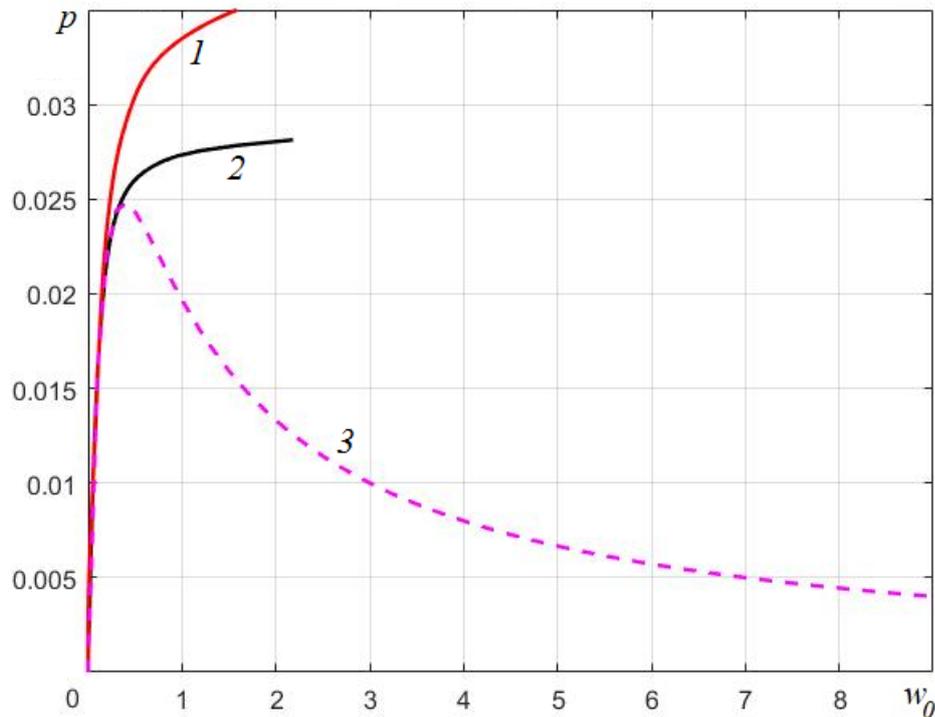


Рис. 5.22. Диаграмма «нагрузка – прогиб» для случаев динамического (кривые 1-2) и статического (3) нагружения оболочки

Решение задачи о раздувании линейно возрастающим во времени давлением сферической оболочки из материала Муни-Ривлина с указанными выше параметрами привело к результатам, аналогичным представленным на рис. 5.16-5.22 с незначительно отличающимися величинами максимальных нагрузок, до которых вычисления не характеризовались отсутствием сходимости итераций. Так, на рис. 5.23 представлена диаграмма «нагрузка – прогиб» для случая раздувания сферической оболочки из материала Муни-Ривлина давлением, изменяющимся во времени по закону $p = 2.5 \cdot 10^{-3} t$. Нумерация кривых 1-3 соответствует принятой на рис. 5.16. В отличие от решения задачи о раздувании сферы из неогукковского материала, в данном случае при решении задачи Коши с использованием функции `ode45` среда Matlab не выдает сообщения об отсутствии сходимости итерационного процесса, однако значения прогибов при превышении давлением величины $p = 0.33$ увеличиваются на порядок при почти постоянном значении давления. Так как исследование достоверности решения задач Коши

встроенными функциями Matlab не является предметом данной работы, анализ результатов такого решения не производился, а на графике рис. 5.23 представлена лишь часть решения (кривая 2), позволяющая провести сравнение с результатами расчетов по соотношениям и алгоритму, сформированным в настоящей диссертации (кривая 1).

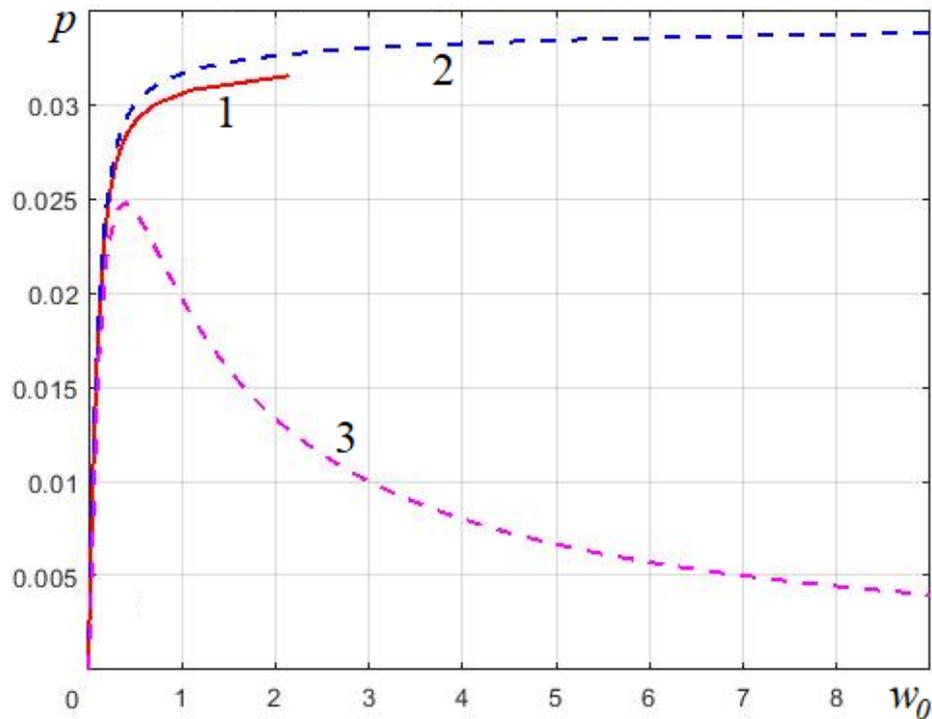


Рис. 5.23. Диаграмма «нагрузка – прогиб» для случаев динамического (кривые 1-2) и статического (3) нагружения оболочки из материала Муни-Ривлина

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что в случае наличия лишь одной особой точки на диаграмме статического нагружения оболочки решение задачи об ее динамическом нагружении линейно возрастающим давлением будет характеризоваться некоторым максимально допустимым значением давления. Поперечная деформация оболочки при этом в общем случае не будет являться предельно допустимой, т.е. стремящейся к 100%, а анализ величин напряжений для данной задачи не является принципиальным, т.к. материалы рассматриваемых моделей не

имеют характеристик, определяющих разрушение. Таким образом, о разрушении оболочки при значениях нагрузки, превышающих максимально допустимые для расчетов, речь идти не может, а с точки зрения механики полученные результаты можно объяснить физической недопустимостью воздействия нагрузок определенной величины на оболочку из рассматриваемого материала и недостаточной корректностью самой модели материала. Следует отметить, что, несмотря на то, что решение рассмотренных задач удалось провести лишь до значений поперечной деформации 80% вместо полученных в работе [18] 95%, однако указанное решение, в отличие от [18], получено не при кусочно-линейном, а при непрерывно возрастающем во времени законе изменения раздувающего оболочку давления, а также без введения предположения о наличии внутреннего трения в материале оболочки и подбора коэффициента внутреннего трения на основании численного эксперимента, т.е. используемый в диссертации вычислительный алгоритм является более устойчивым по сравнению со сформулированным в [18].

Наиболее интересной с точки зрения кинематики процесса деформирования является задача о раздувании сферической оболочки из материала Йео. Примем закон изменения нагрузки $p(t) = 2 \cdot 10^{-2} t$. На рис. 5.24 представлена диаграмма «нагрузка-прогиб» для случаев решения данной задачи как начально-краевой по представленному в работе алгоритму с шагом по времени $\Delta t = 0.125$ (кривая 1) и как начальной (кривая 2). Кривая 3 соответствует решению задачи о статическом раздувании рассматриваемой оболочки.

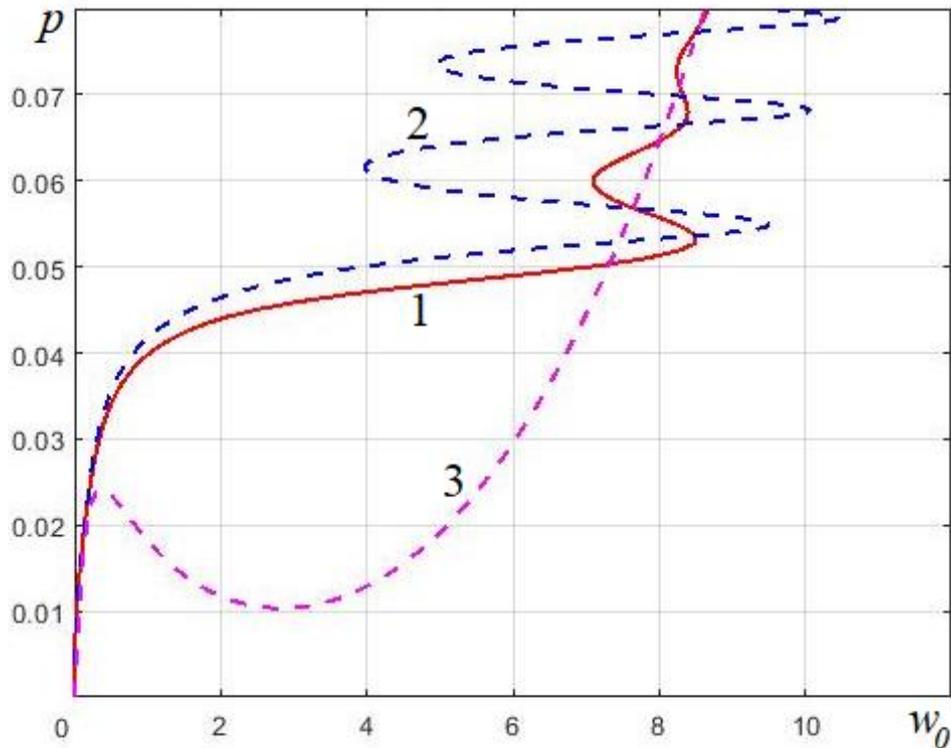


Рис. 5.24. Диаграмма «нагрузка-прогиб» для случаев динамического (кривые 1-2) и статического (3) нагружения оболочки

Представленные графики иллюстрируют явление динамического хлопка оболочки, сопровождающегося переходом с одной на другую ветвь диаграммы, соответствующей случаю устойчивого статического деформирования, и последующими колебаниями. Подчеркнем, что традиционно понятие хлопка используется для характеристики поведения моментных оболочек или арок из линейно-упругого материала при воздействии на них внешнего давления. В настоящей диссертации термин «динамический хлопок» впервые применен к задаче о раздувании внутренним давлением оболочки из нелинейно-упругого материала. Анализируя рис. 5.24, можно заключить, что результаты расчета самого процесса хлопка двумя рассматриваемыми способами хорошо согласуются, однако при решении начально-краевой задачи по представленному в диссертации алгоритму колебания, возникающие после хлопка, затухают к статическому решению, в то время как при решении задачи Коши ярко

выраженного затухания таких колебаний не наблюдается. Очевидно, подобная особенность алгоритма аналогична отмеченной в п. 5.2 и связана с явлением численного демпфирования. Однако, по-видимому, именно благодаря указанному явлению впервые оказалось возможным решение рассматриваемой задачи при задании непрерывно возрастающего во времени раздувающего оболочку давления без искусственного введения демпфирования в физические соотношения, описывающие поведение материала.

На рис. 5.25-5.27 приведены графики изменения во времени прогиба, скорости и ускорения движения оболочки. На всех графиках кривые, полученные с использованием разработанных в диссертации соотношений и алгоритмов, обозначены цифрой 1, а полученные на основании соотношений (5.14) – цифрой 2.

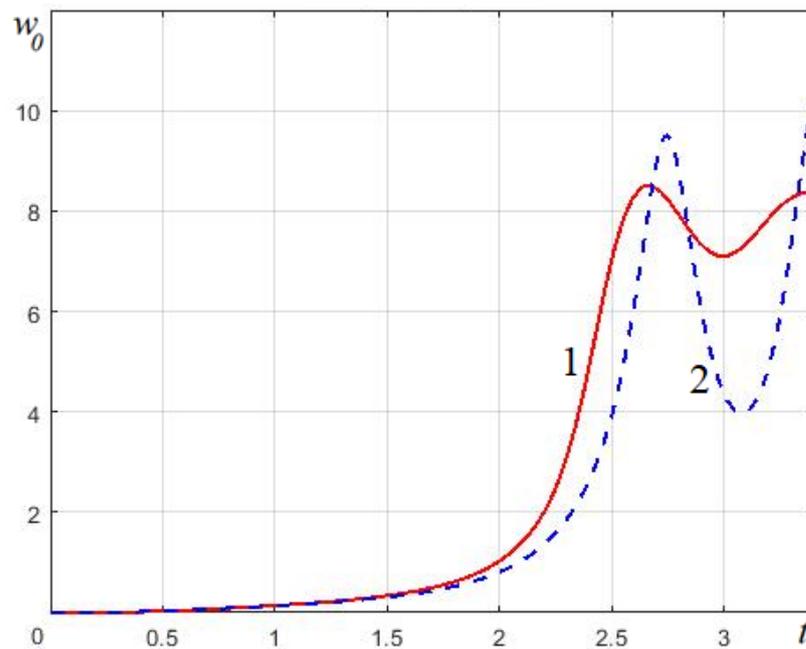


Рис. 5.25. Зависимость прогиба сферической оболочки из материала Йео от времени

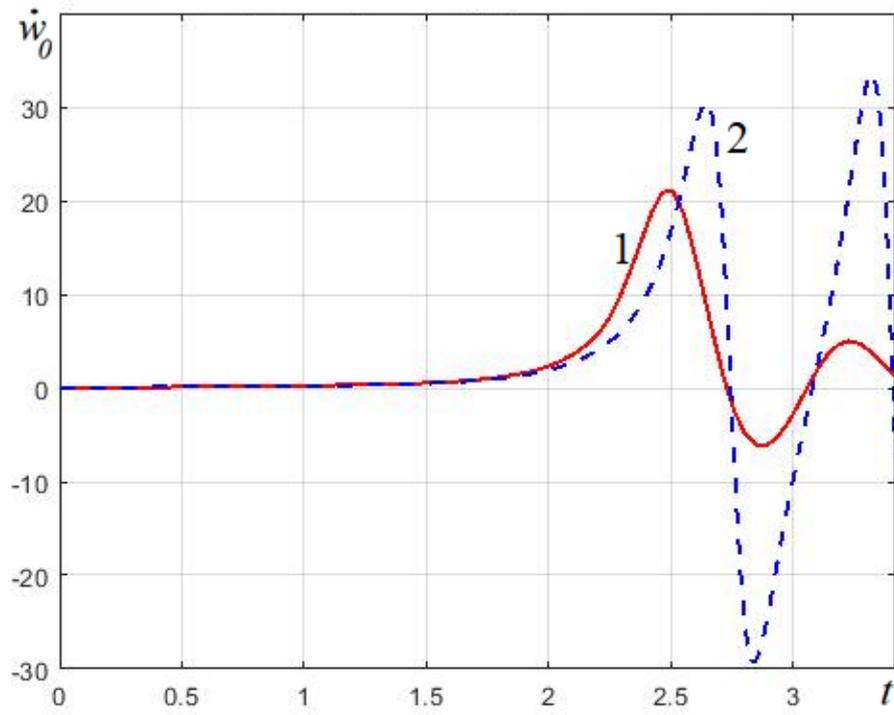


Рис. 5.26. Зависимость скорости движения сферической оболочки из материала Йео от времени

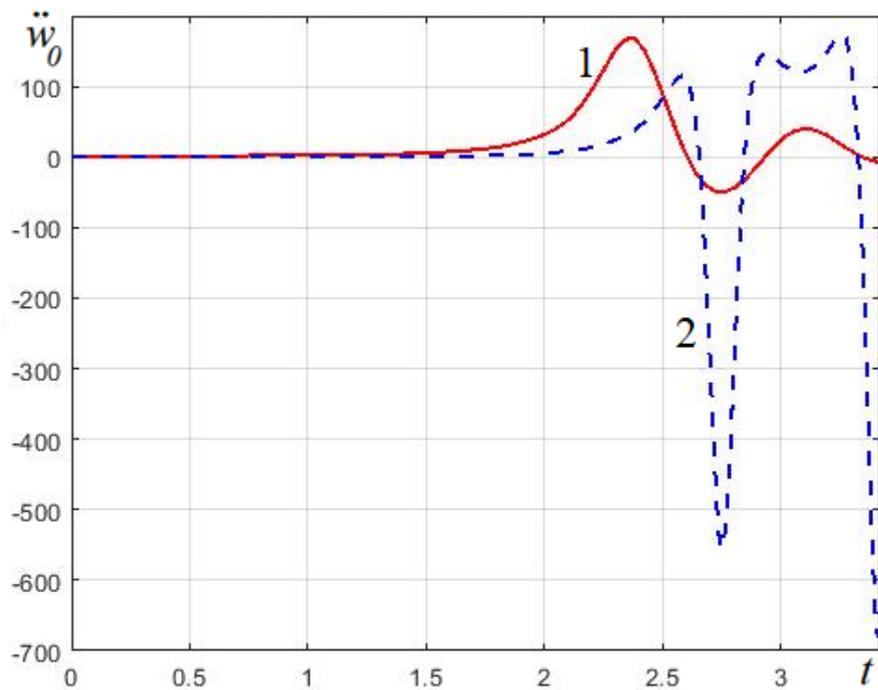


Рис. 5.27. Зависимость ускорения движения сферической оболочки из материала Йео от времени

В рассматриваемом случае отмечается большее совпадение результатов расчетов по различным системам уравнений на начальном этапе процесса раздувания сферы, чем в случае изготовления ее из неогуковского материала.

На рис. 5.28-5.29 представлены графики изменения во времени поперечной деформации и относительного изменения объема полости, ограниченной оболочкой, $\Delta = (V - V_0)/V_0$, полученные при решении данной задачи как начально-краевой по разработанному в диссертации алгоритму.

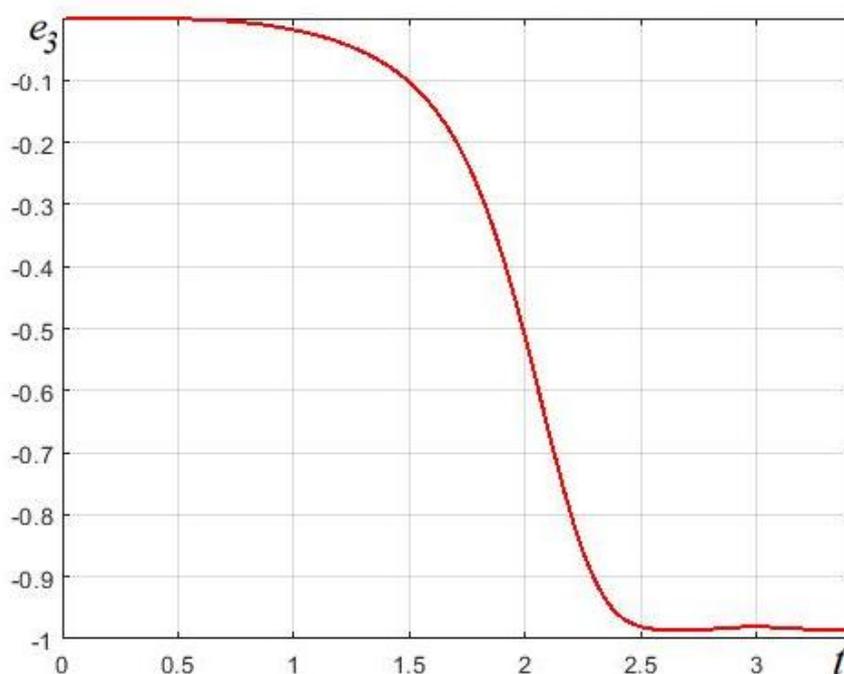


Рис. 5.28. Зависимость поперечной деформации сферической оболочки из материала Йео от времени

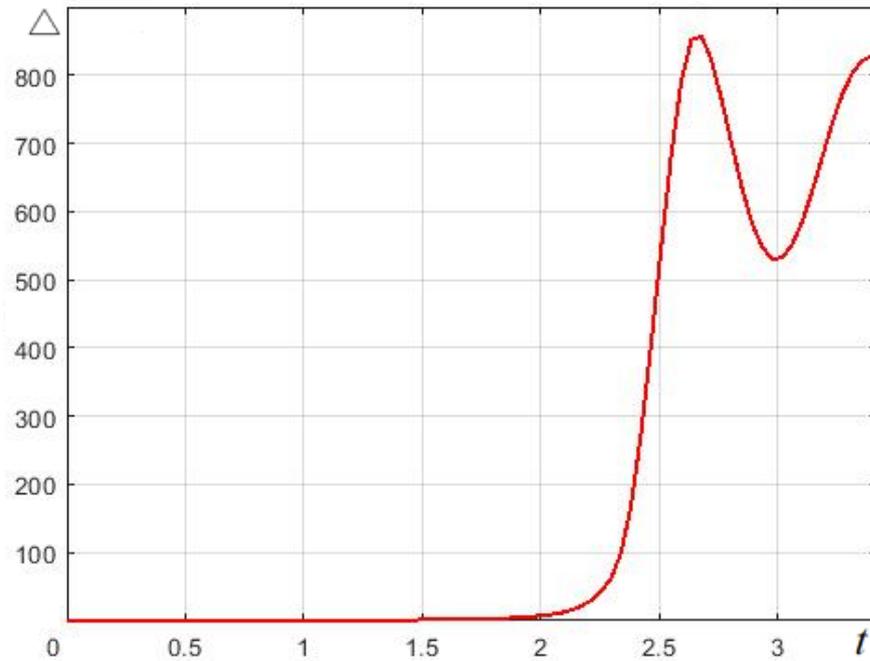


Рис. 5.29. Зависимость относительного изменения объема сферической оболочки из материала Йео от времени

По окончании процесса хлопка значение поперечной деформации составляет $e_3 \approx 97\%$, при этом относительное изменение объема оболочки достигает значения $\Delta = 824$.

В целях исследования влияния скорости роста нагрузки γ на кинематику оболочки было выполнено сравнение результатов расчетов при значениях параметра $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 1 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ для шага по времени $\Delta t = 0.25$ (указанная величина шага является минимально допустимой для первого из рассматриваемых значений скорости роста нагрузки). На рис. 5.30 представлена диаграмма «нагрузка – прогиб» для случаев динамического (кривые 1-3 соответствуют значениям $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 1 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$) и статического (кривая 4) нагружения оболочки.

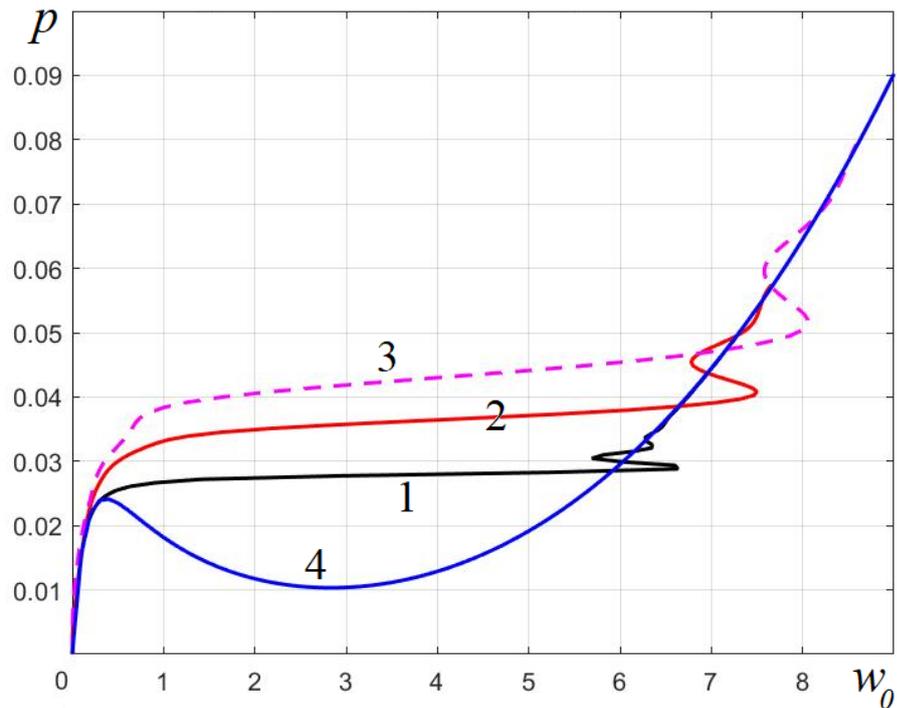


Рис. 5.30. Диаграмма «нагрузка – прогиб» для случаев динамического (кривые 1-3) и статического (4) нагружения оболочки из материала Йео

С увеличением параметра γ увеличивается величина нагрузки, при которой происходит хлопок, возникающие после которого колебания вследствие численного демпфирования используемого алгоритма затухают, однако затухание происходит к виду диаграммы «нагрузка-прогиб», совпадающему с диаграммой статического нагружения оболочки, что является косвенным подтверждением правильности расчета явления хлопка.

На рис. 5.31-5.35 приведены графики изменения во времени прогиба, скорости и ускорения движения, поперечной деформации и относительного изменения объема полости, ограниченной оболочкой из материала Йео. На всех графиках кривые, полученные для значений скорости роста нагрузки $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 1 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ обозначены номерами 1, 2, 3 соответственно.

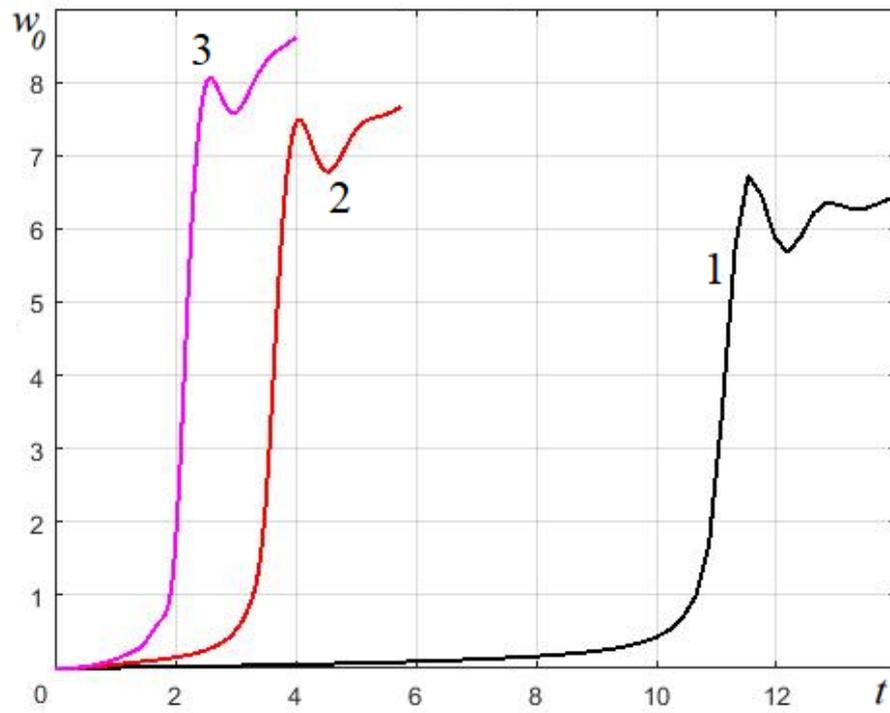


Рис. 5.31. Зависимость прогиба сферической оболочки из материала Йео от времени

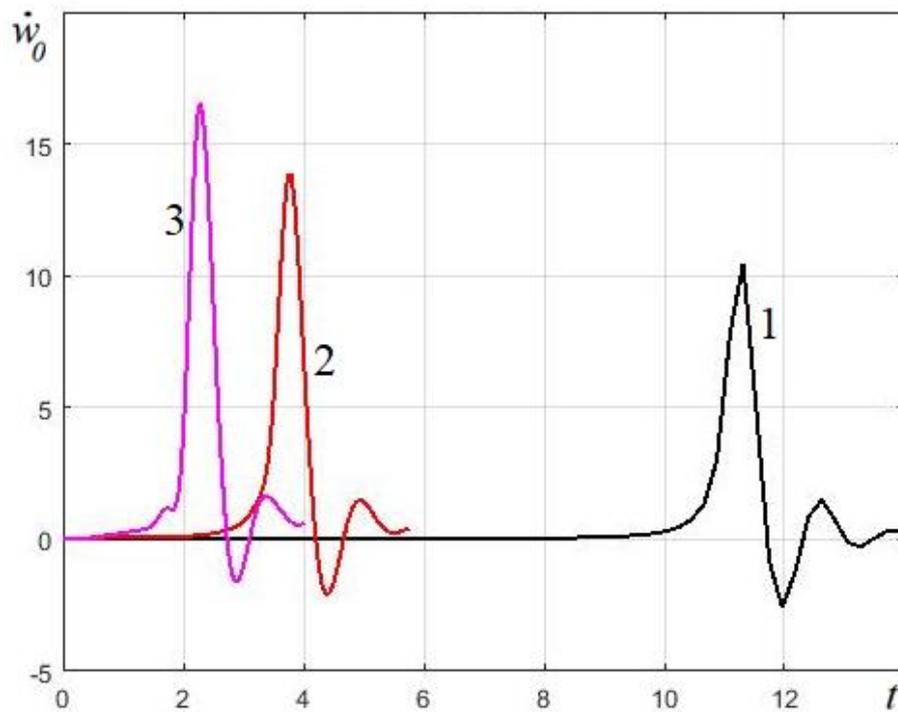


Рис. 5.32. Зависимость скорости движения сферической оболочки из материала Йео от времени

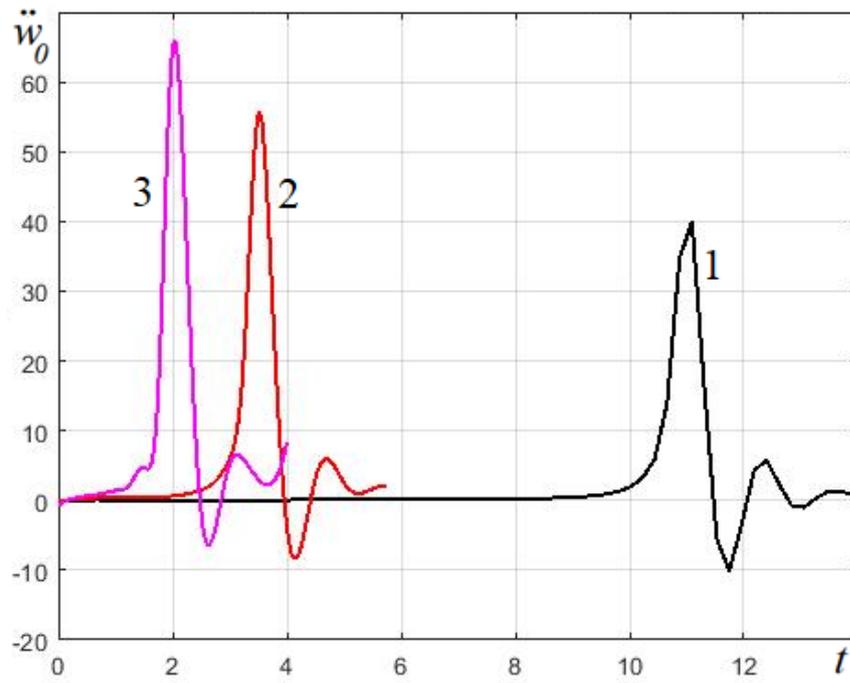


Рис. 5.33. Зависимость ускорения движения сферической оболочки из материала Йео от времени

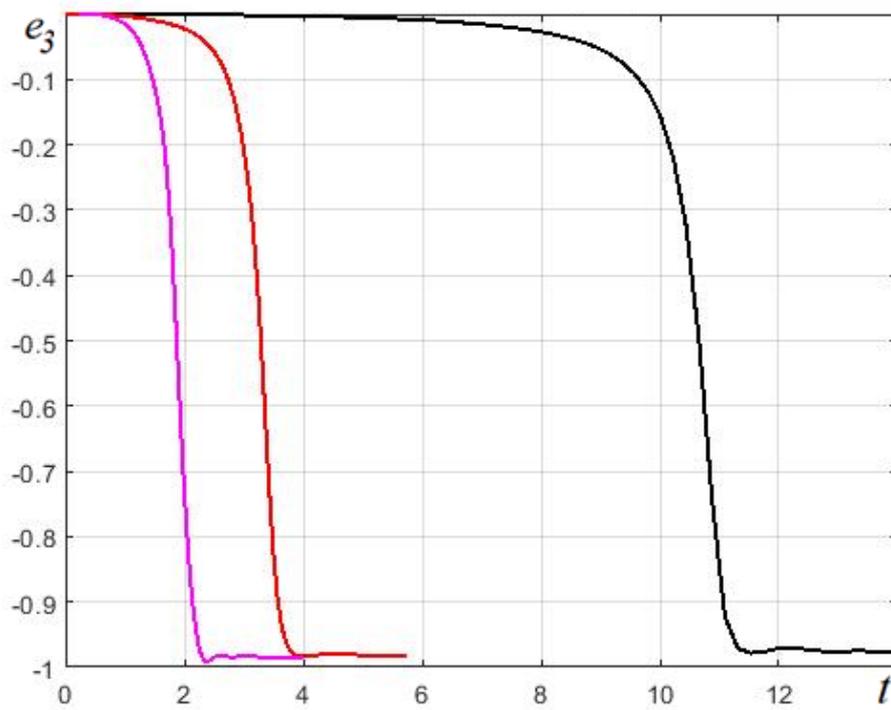


Рис. 5.34. Зависимость абсолютной величины поперечной деформации сферической оболочки из материала Йео от времени

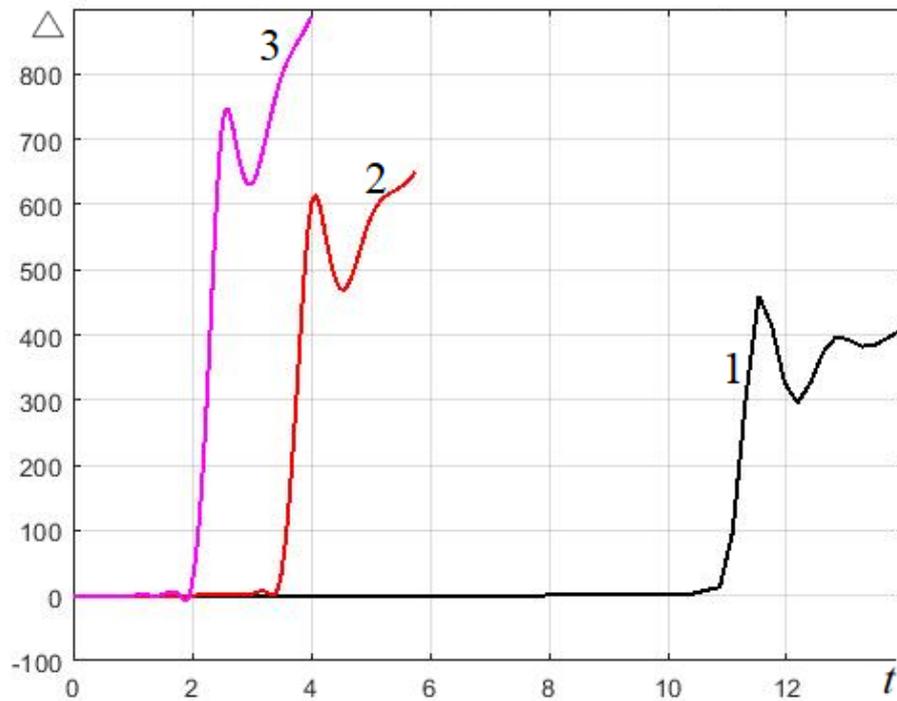


Рис. 5.35. Зависимость относительного изменения объема сферической оболочки из материала Йео от времени

Величины прогибов, скоростей и ускорений после хлопка несущественно зависят от скорости роста нагрузки, модуль поперечной деформации во всех рассмотренных случаях после хлопка достигает величины $e_3 \approx 97\%$. Наибольшая зависимость от скорости роста нагрузки характерна для изменения объема Δ (рис. 5.35).

5.5. Исследование деформирования цилиндрической оболочки из гиперупругого материала под действием давления, изменяющегося по гармоническому закону

Рассмотрим воздействие на оболочку из высокоэластичного материала внутреннего давления, гармонически изменяющегося во времени. При этом вследствие нелинейности разрешающих соотношений, описывающих поведение оболочки, следует ожидать, что динамический отклик оболочки будет квазипериодическим.

Пусть цилиндрическая оболочка из неогуковского материала закреплена на торцах, длина оболочки $L = 10R$, толщина $h = 0.02R$. Внутреннее давление изменяется во времени по закону $p = 0.015 + 0.005\sin(0.25t)$ (рис. 5.36). При этом амплитудное значение нагрузки меньше критического.

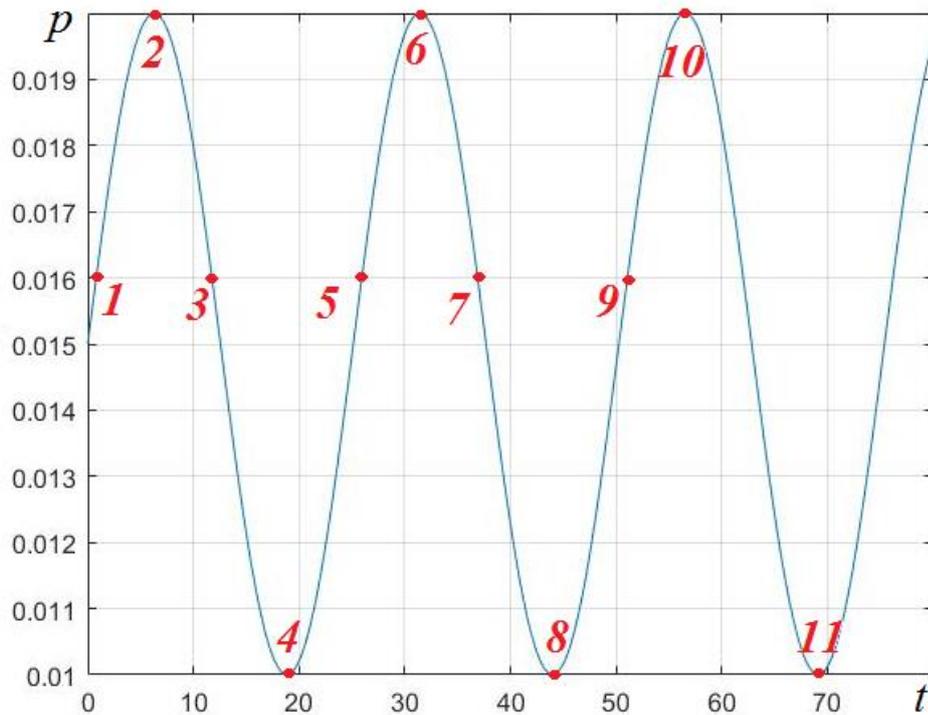


Рис. 5.36. Зависимость раздувающего цилиндрическую оболочку давления от времени

Отклик цилиндрической оболочки на гармоническое воздействие непредсказуем вследствие нелинейности рассматриваемой начально-краевой задачи. В частности, возможно возникновение в оболочке отрицательных напряжений и прогибов, расчет которых по соотношениям безмоментной теории оболочек затруднителен. Поэтому для решения задачи были использованы как соотношения безмоментной теории, так и моментной теории В.Н. Паймушина [93, 110].

На рис. 5.37 представлена зависимость «нагрузка – прогиб центрального сечения цилиндра». Сложный характер зависимости является следствием нелинейности рассматриваемой динамической системы.

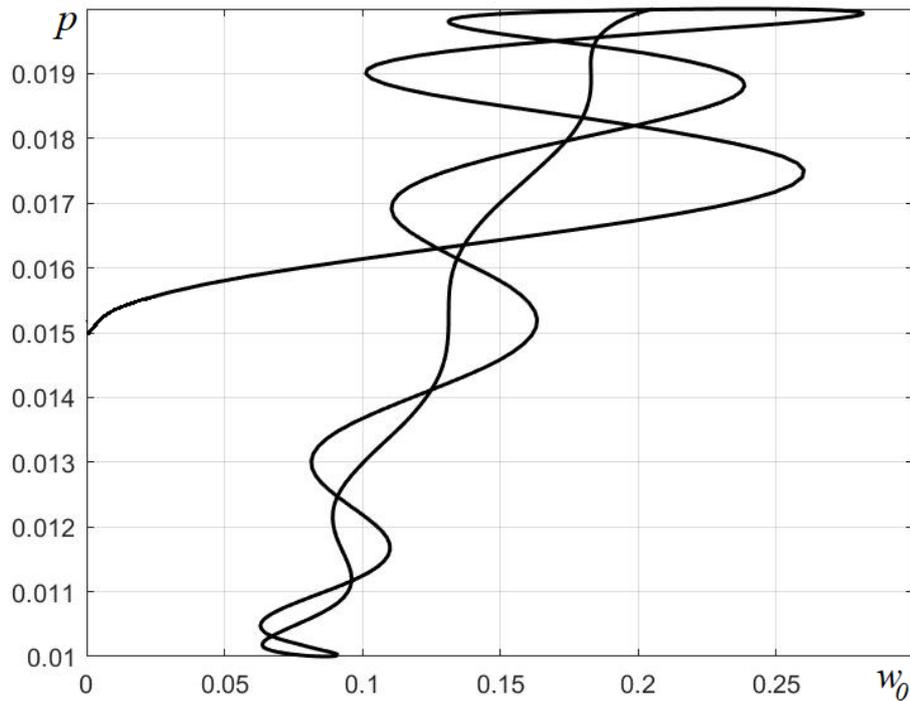


Рис. 5.37. Диаграмма «нагрузка – прогиб центрального сечения цилиндра»

На рис. 5.38-5.48 показаны зависимости компонент напряженно-деформированного состояния в центральном сечении цилиндра (красными кривыми) и в сечении $x = 4.95$ (координата x отсчитывается от центрального сечения цилиндра), в котором изгибающие моменты достигают максимальных величин за весь рассматриваемый временной интервал (синими кривыми), от времени, полученные при расчетах с шагом по времени $\Delta t = 0.3$. Сплошными и штриховыми линиями обозначены графики, полученные по результатам расчетов с использованием моментной и безмоментной теории соответственно.

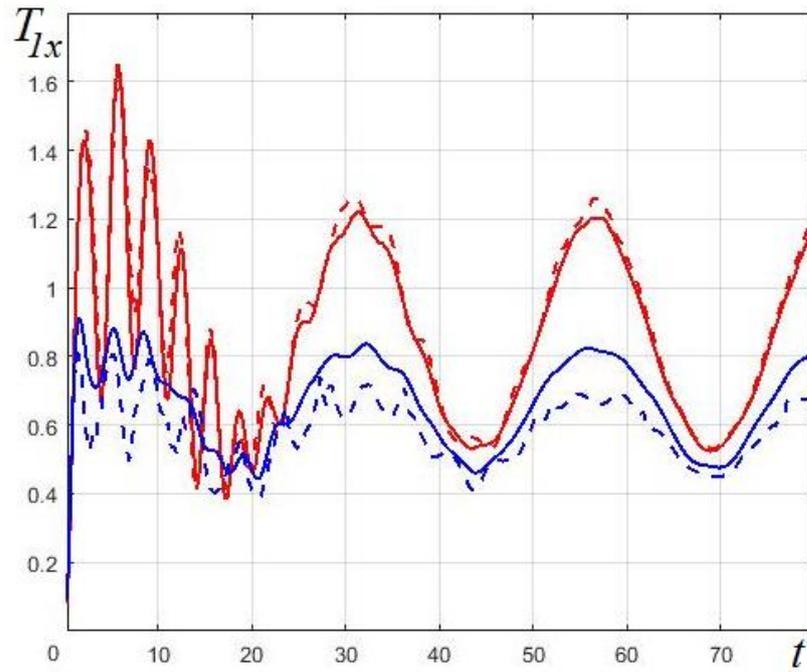


Рис. 5.38. Зависимость от времени приведенных усилий T_{lx} (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

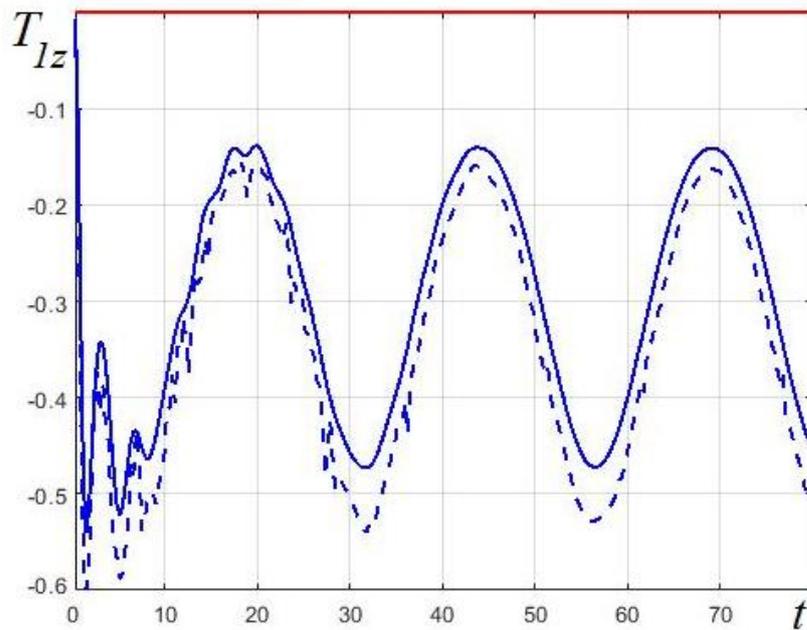


Рис. 5.39. Зависимость от времени приведенных усилий T_{lz} (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

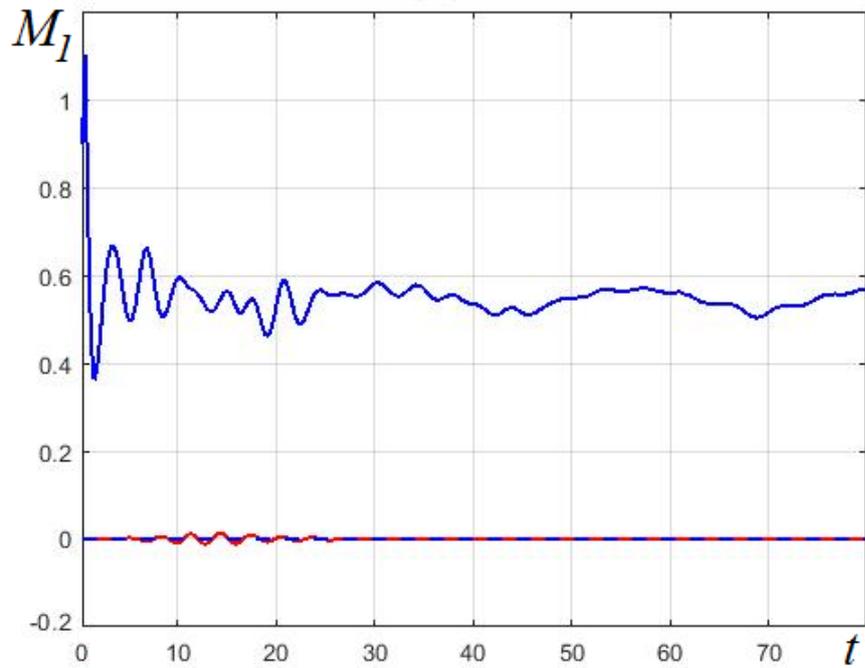


Рис. 5.40. Зависимость от времени меридиональных моментов M_I (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

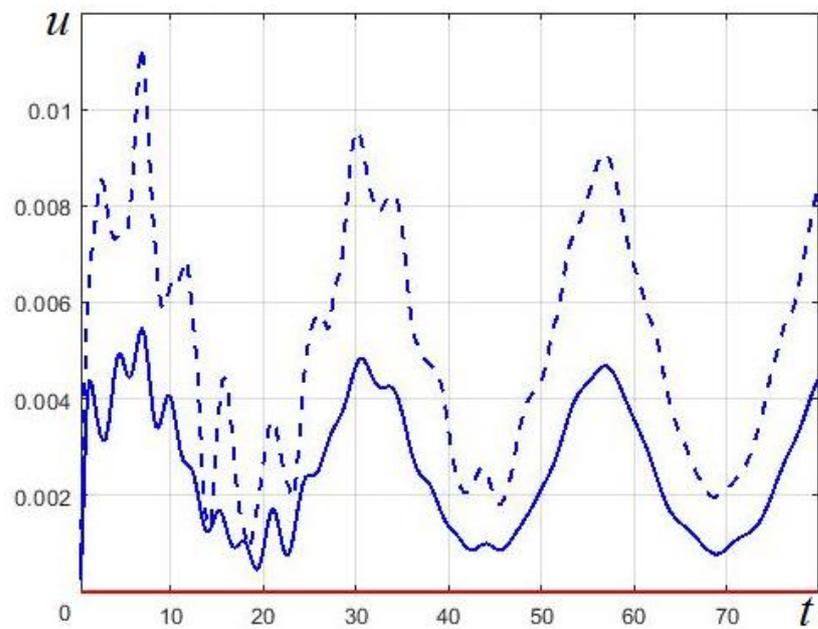


Рис. 5.41. Зависимость от времени касательных перемещений (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

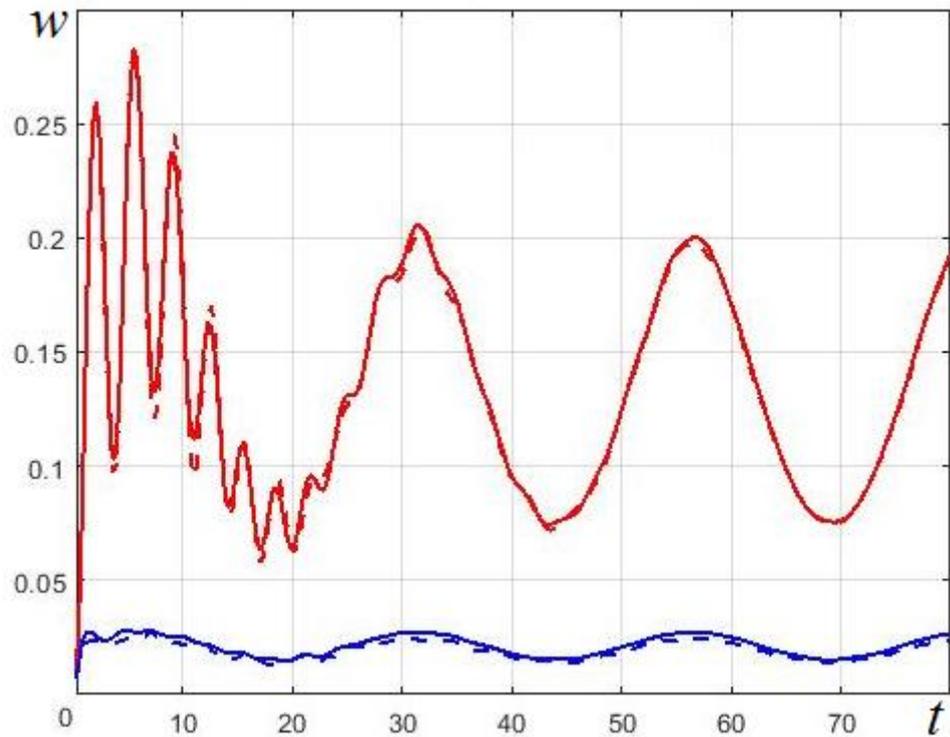


Рис. 5.42. Зависимость от времени прогибов (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

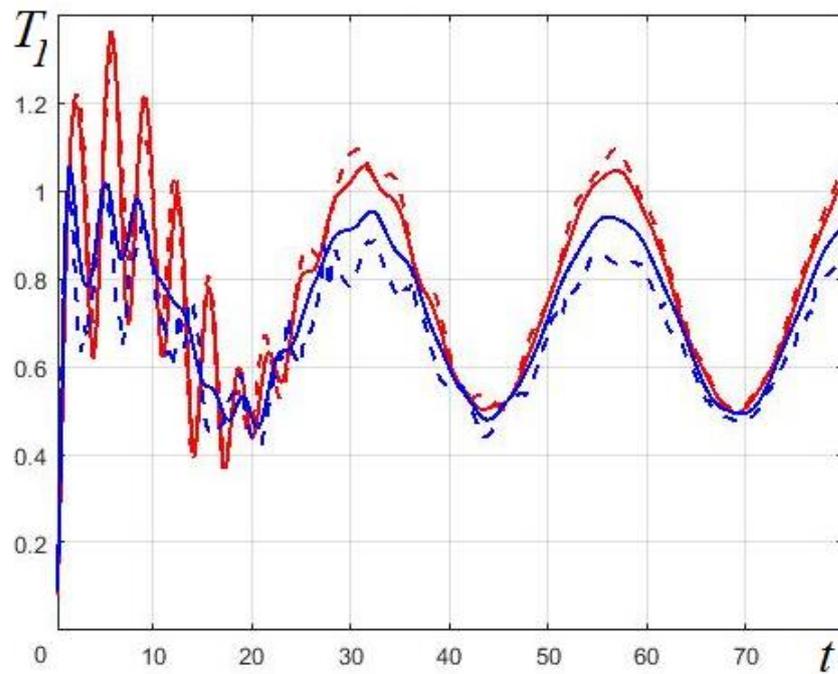


Рис. 5.43. Зависимость от времени меридиональных усилий (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

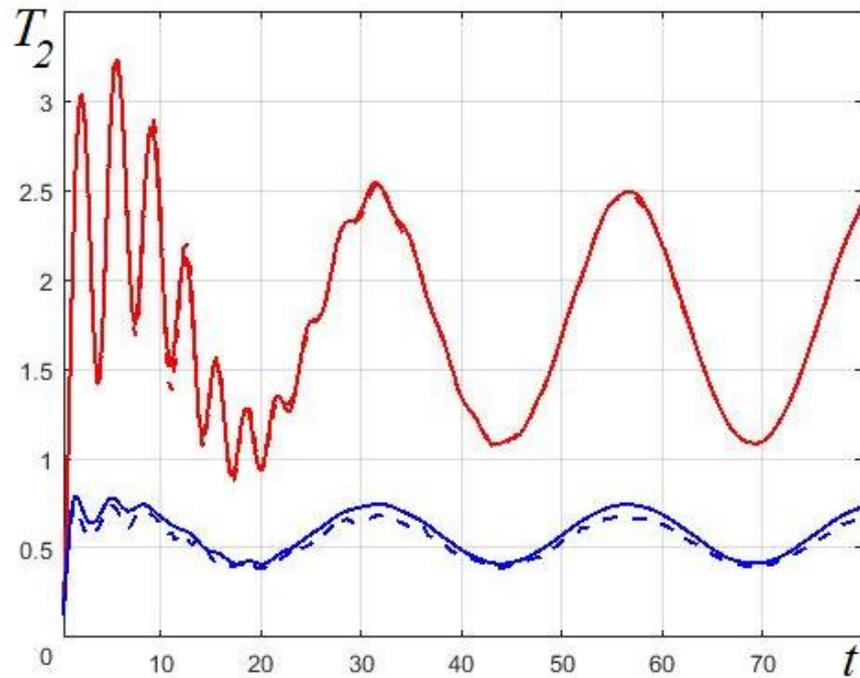


Рис. 5.44. Зависимость от времени окружных усилий (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

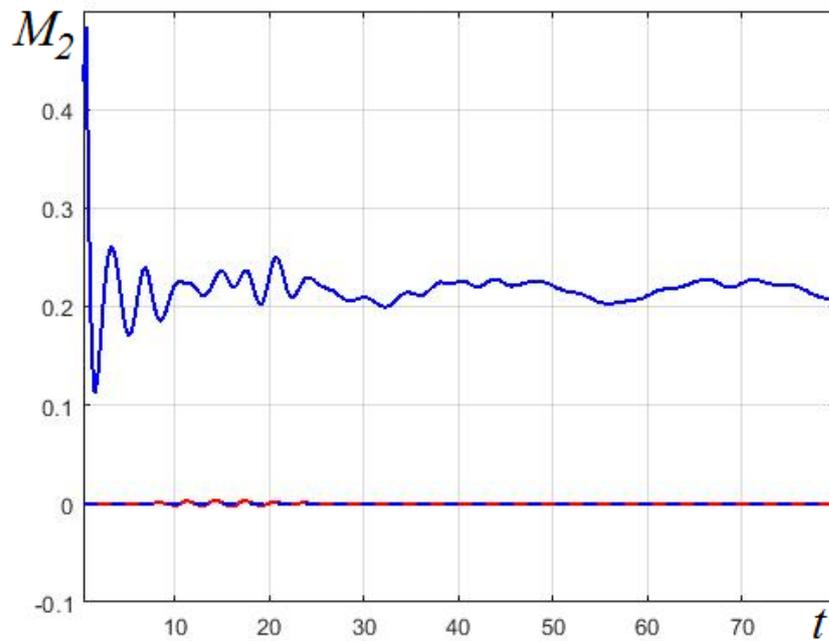


Рис. 5.45. Зависимость от времени окружных моментов (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

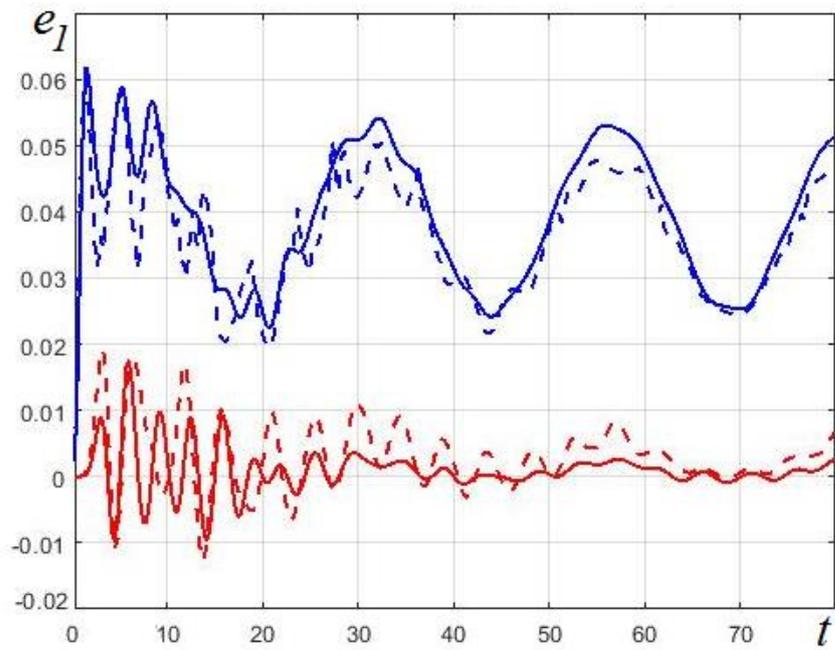


Рис. 5.46. Зависимость от времени меридиональных деформаций (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

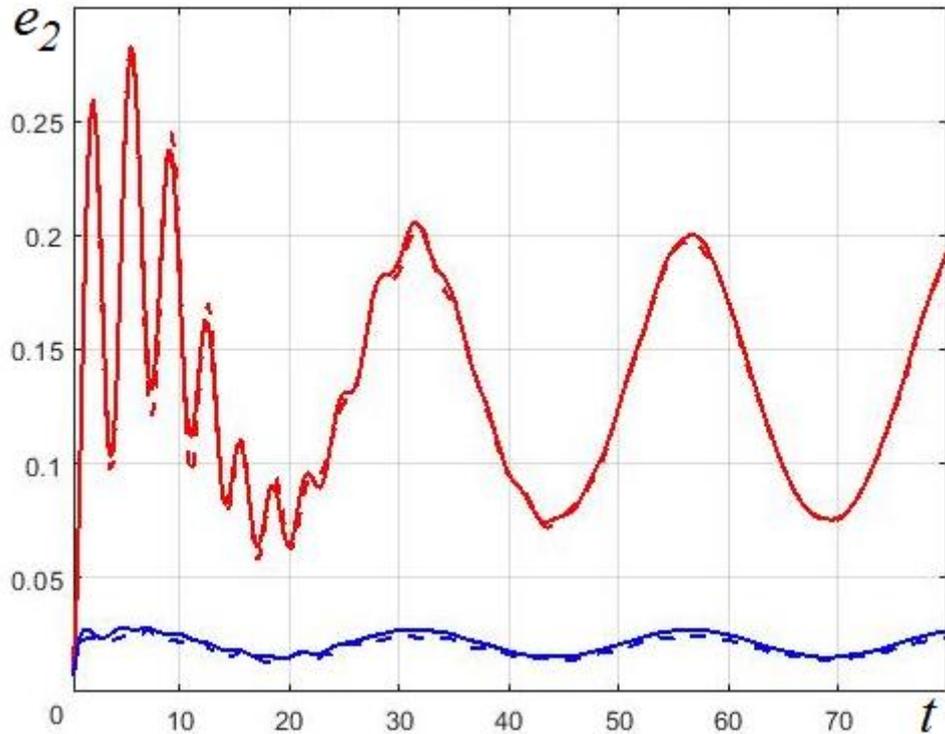


Рис. 5.47. Зависимость от времени окружных деформаций (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

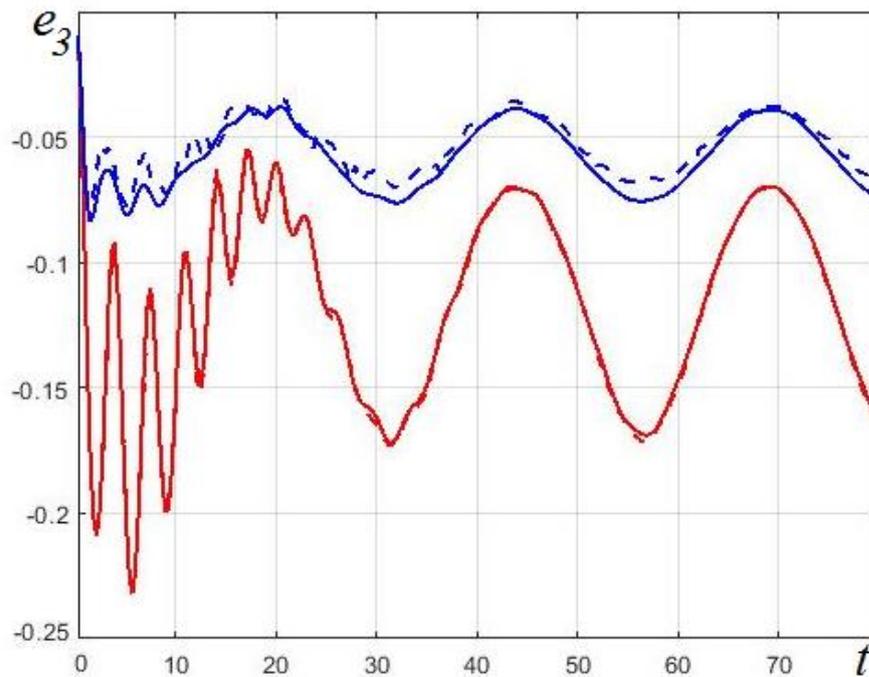


Рис. 5.48. Зависимость от времени поперечных деформаций (красные линии – центральное сечение цилиндра, синие линии – сечение с максимальным меридиональным моментом)

На всех графиках наблюдается переходный процесс отклика оболочки на внешнее воздействие, при этом в центральном сечении цилиндра отклик проявляется более интенсивно. По прошествии времени, соответствующего периоду колебаний внешней нагрузки, процесс колебаний оболочки становится установившимся. Сравнение результатов расчетов поведения цилиндра по соотношениям моментной и безмоментной теории показывает практическое их совпадение для центрального сечения цилиндра. В сечении с координатой $x = 4.95$ вследствие близости закрепленного торца различие временных распределений компонент напряженно-деформированного состояния оболочки становится существенным. Кроме того, расчеты по соотношениям моментной теории позволили выявить возникновение нулевых и сжимающих напряжений на внутренней поверхности оболочки в начальный момент времени, причем соответствующие вычисления не сопровождались какими-либо затруднениями, характерными в подобных случаях для расчетов по уравнениям безмоментной теории. На рис. 5.49

представлены графики, характеризующие зависимость меридиональных напряжений в сечении с максимальным меридиональным моментом на внутренней поверхности оболочки. При этом кривые, построенные по результатам, полученным с использованием соотношений безмоментной теории, соответствуют графикам напряжений для срединной поверхности в случае расчетов по соотношениям моментной теории.

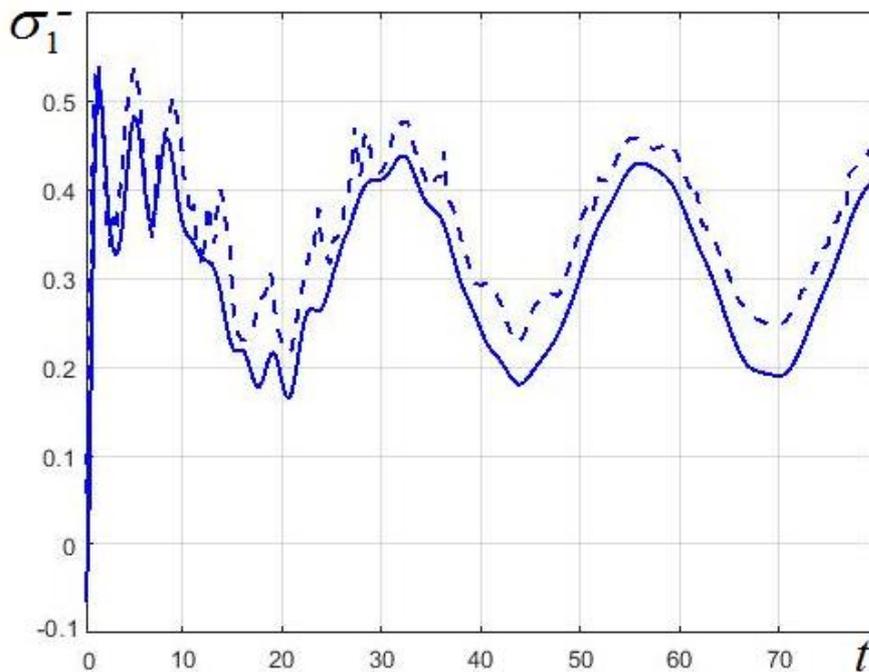


Рис. 5.49. Зависимость от времени меридиональных напряжений в сечении с максимальным изгибающим моментом

На рис. 5.50-5.56 показано распределение по меридиану цилиндра компонент напряженно-деформированного состояния в моменты времени, соответствующие максимальным (точки 2, 6, 10 на рис. 5.36), минимальным (точки 4, 8, 11 рис. 5.36) и промежуточным (точки 1, 3, 5, 7, 9 рис. 5.36) значениям давления. Кривые на рисунках помечены соответствующими номерами, при этом $t_1 = 0.9$; $t_2 = 6.3$; $t_3 = 11.7$; $t_4 = 18.9$; $t_5 = 25.8$; $t_6 = 31.5$. Графики соответствуют расчетам по соотношениям моментной теории оболочек.

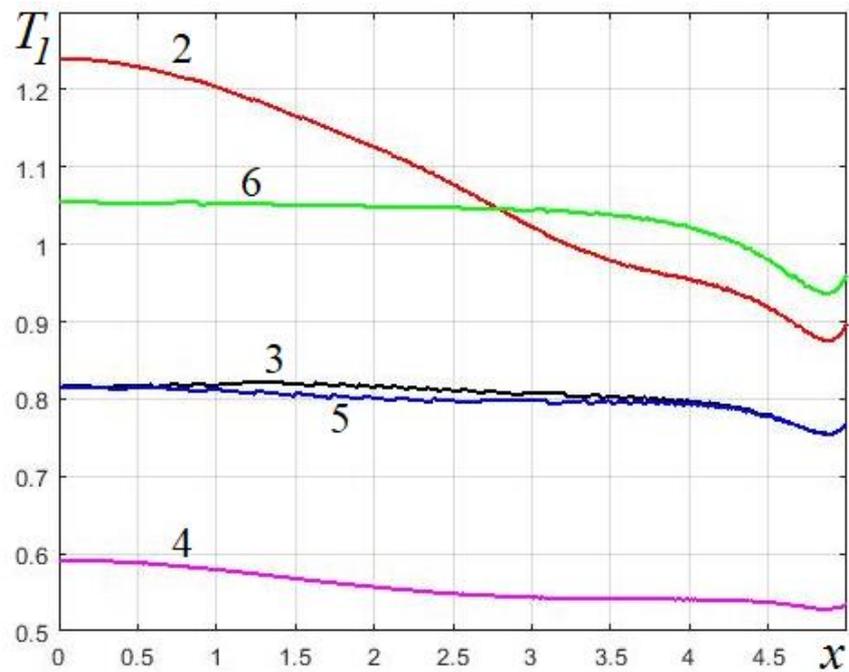


Рис. 5.50. Распределение меридиональных усилий для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2 \div t_6$

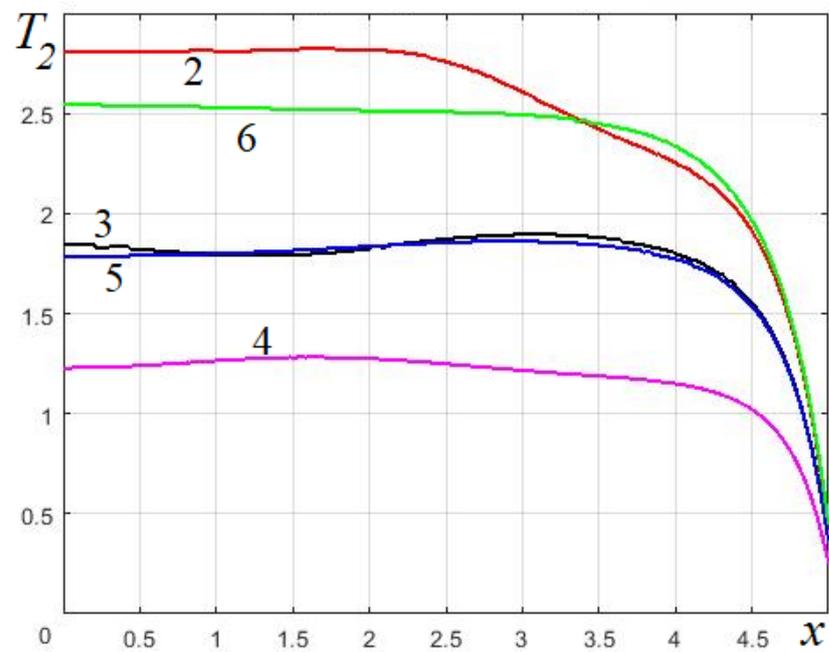


Рис. 5.51. Распределение окружных усилий для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2 \div t_6$

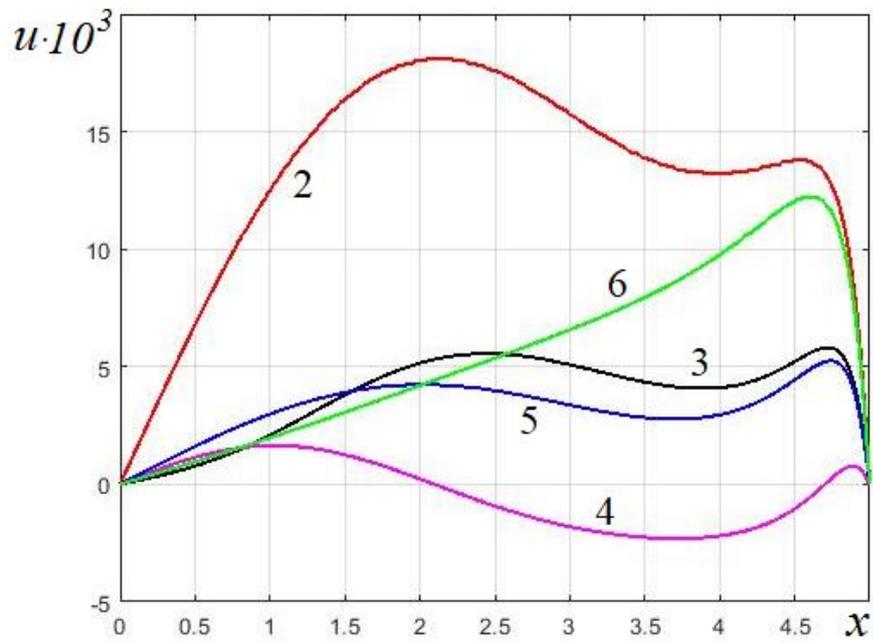


Рис. 5.52. Распределение осевых перемещений для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2 \div t_6$

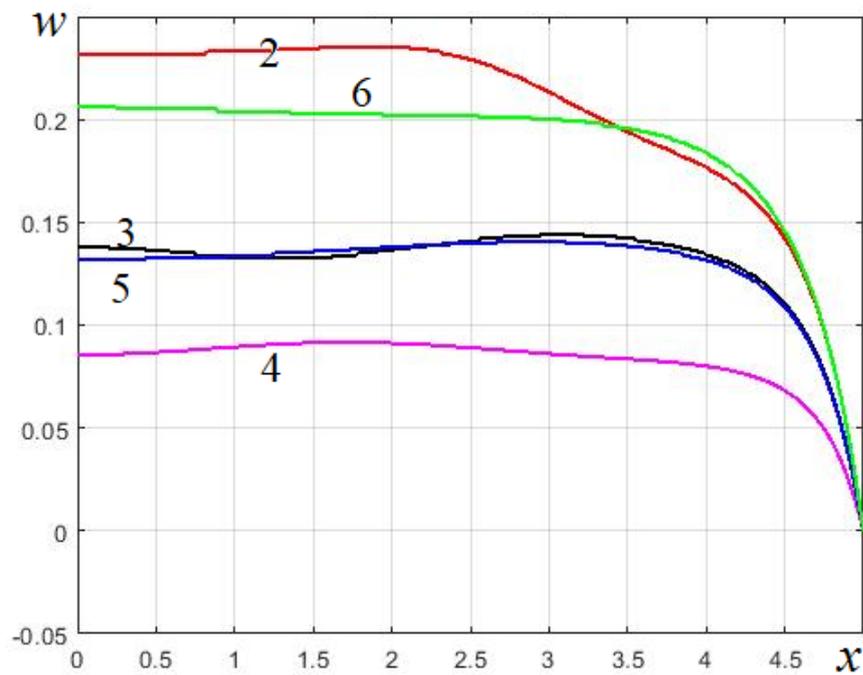


Рис. 5.53. Распределение нормальных перемещений для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2 \div t_6$

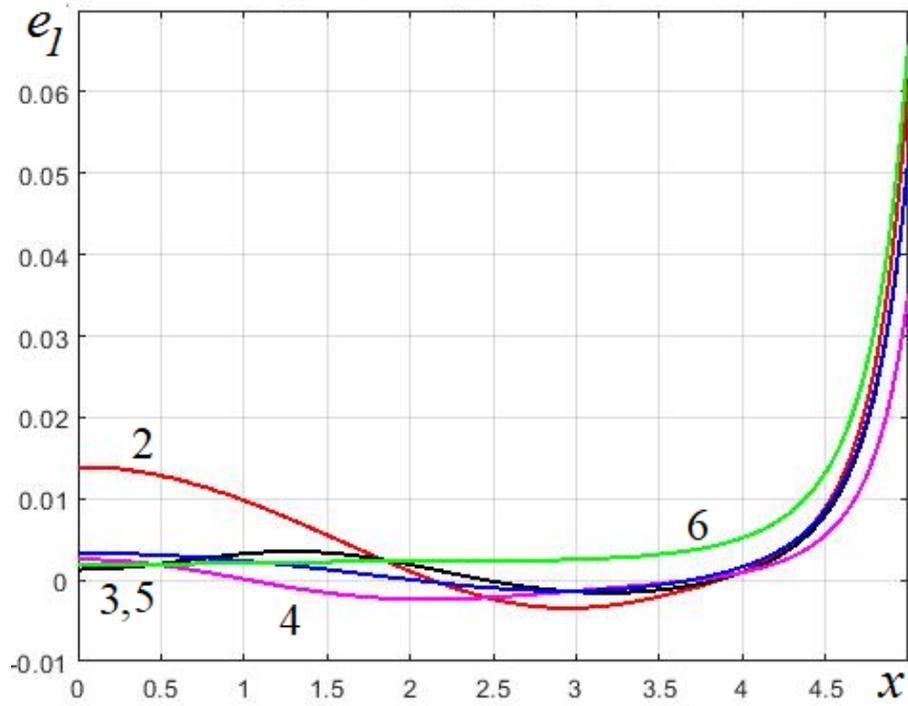


Рис. 5.54. Распределение меридиональных деформаций для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2 \div t_6$

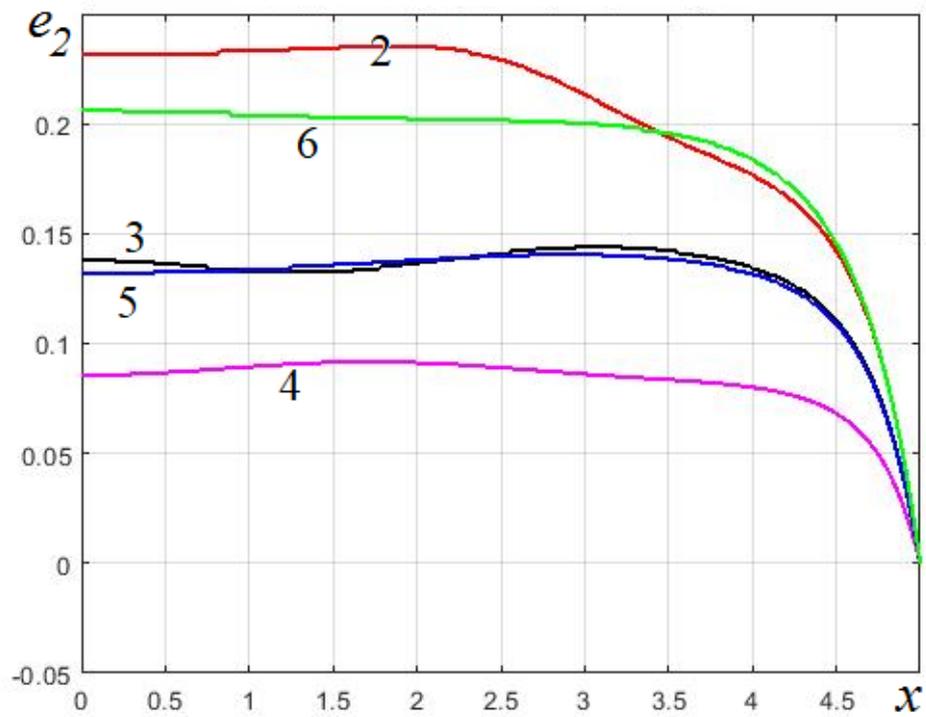


Рис. 5.55. Распределение окружных деформаций для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2 \div t_6$

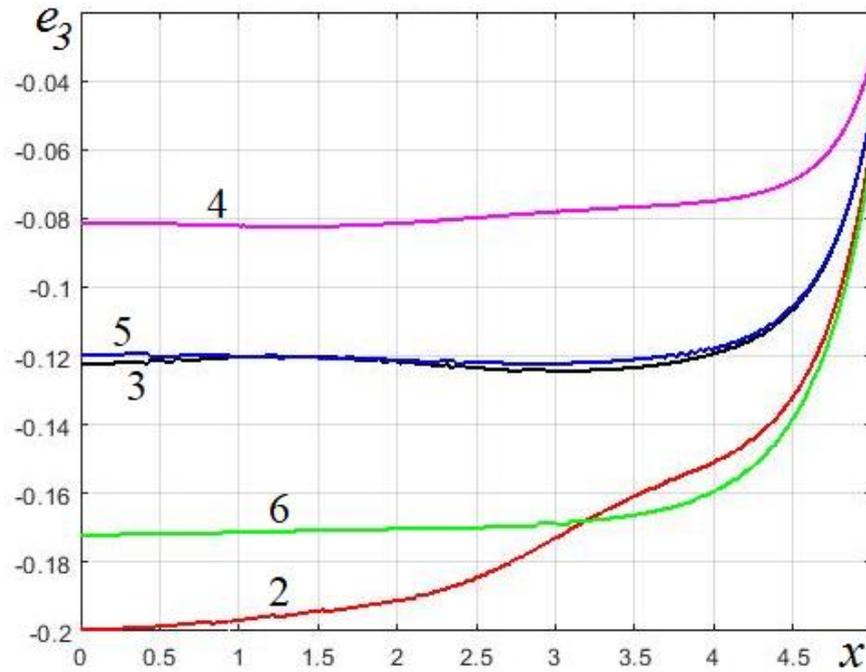


Рис. 5. 56. Распределение поперечных деформаций для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2 \div t_6$

Для начального этапа переходного процесса характерно более интенсивное изменение всех компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану цилиндра, а их абсолютные величины при максимальном значении давления $p=0.02$ выше значений, достигаемых при том же значении давления по окончании переходного процесса. На рис. 5.57-5.59 представлены распределения прогибов и окружных и поперечных деформаций как наиболее ярко демонстрирующих особенности механического состояния высокоэластичных материалов в моменты времени $t_2 = 6.3$; $t_6 = 31.5$; $t_{10} = 56.4$, соответствующие значению раздувающего оболочку давления $p=0.02$.

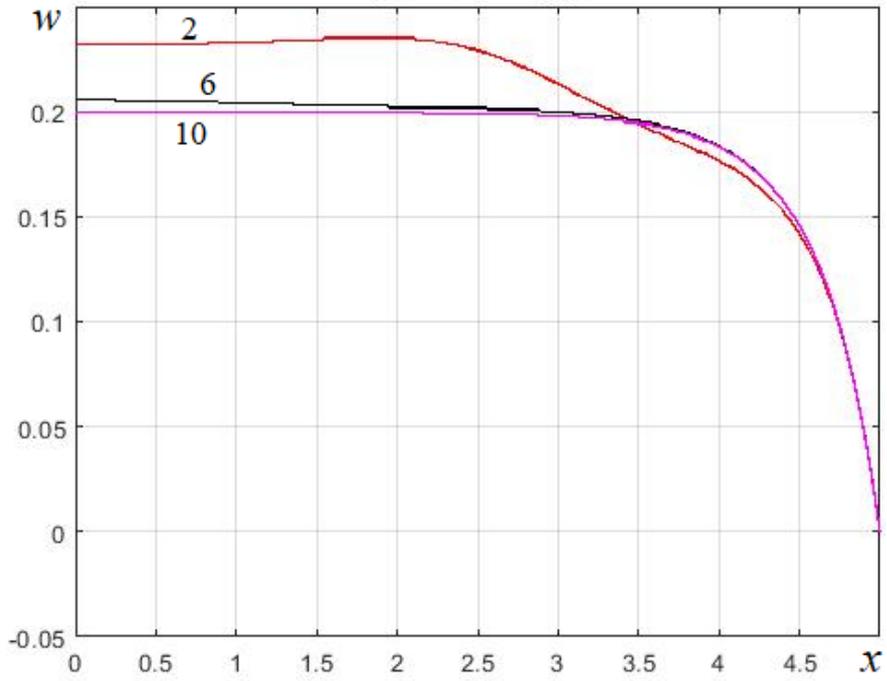


Рис. 5.57. Распределение прогибов для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2; t_6; t_{10}$ ($p = 0.02$)

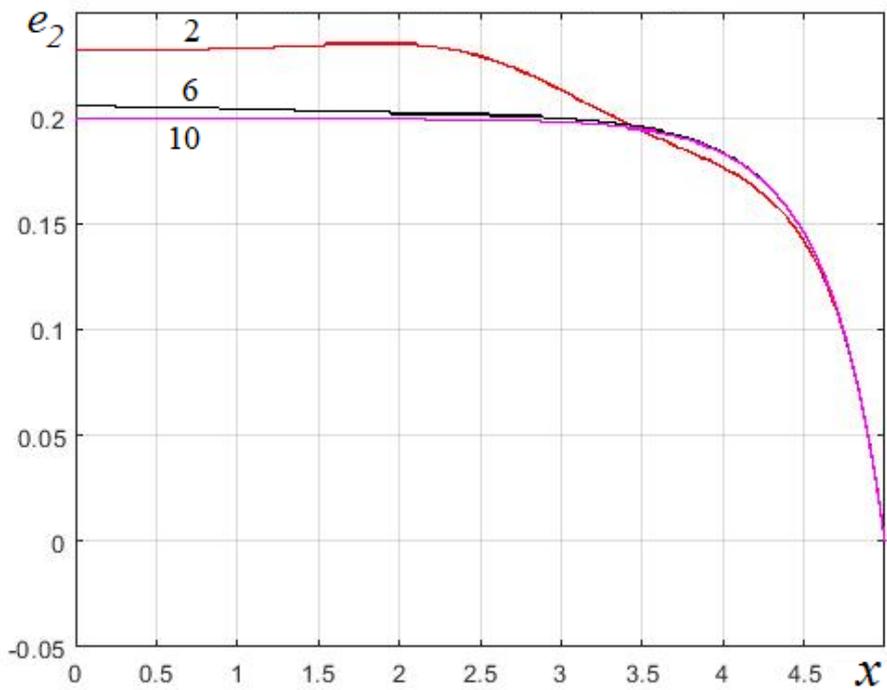


Рис. 5.58. Распределение окружных деформаций для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени $t_2; t_6; t_{10}$ ($p = 0.02$)

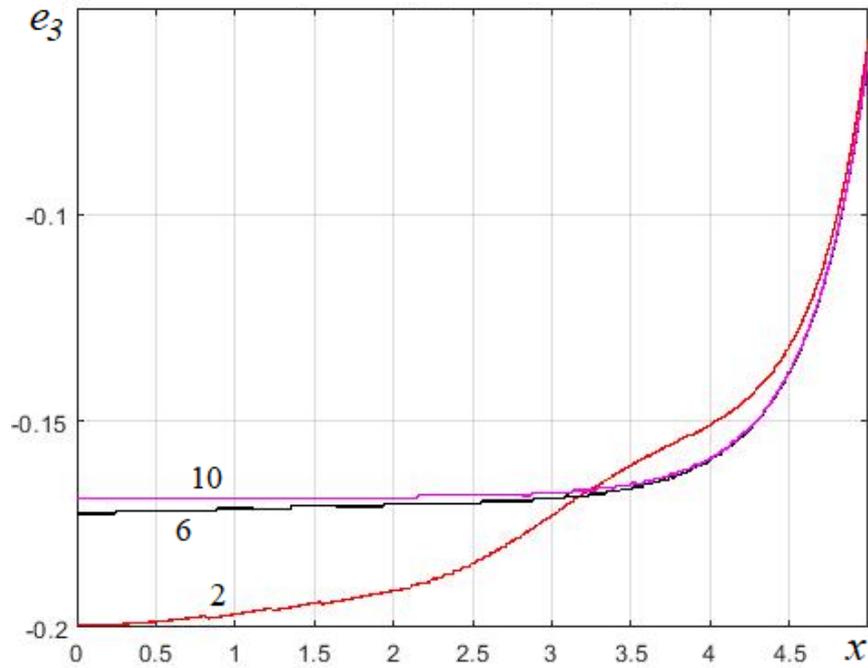


Рис. 5.59. Распределение поперечных деформаций для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени t_2 ; t_6 ; t_{10} ($p = 0.02$)

В момент времени $t_4 = 18.9$, при первом достижении нагрузкой минимального значения $p = 0.01$, переходный процесс еще наблюдается, поэтому распределения компонент напряженно-деформированного состояния в моменты $t_4 = 18.9$ и последующие моменты достижения нагрузкой значения $p = 0.01$ ($t_8 = 44.1$; $t_{11} = 69$) различаются (рис. 5.60-5.62).

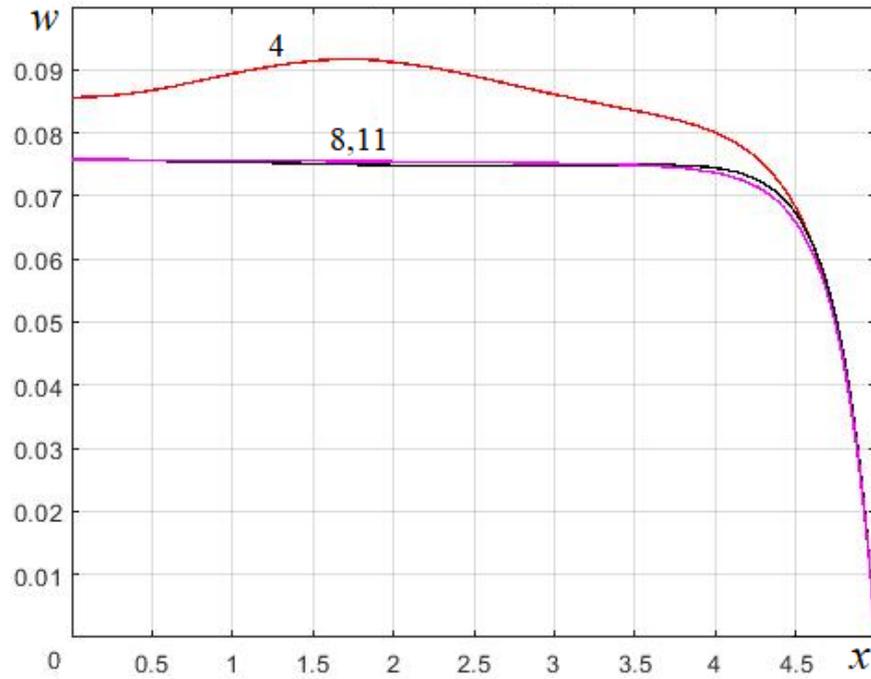


Рис. 5.60. Распределение прогибов для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени t_4 ; t_8 ; t_{11} ($p = 0.01$)

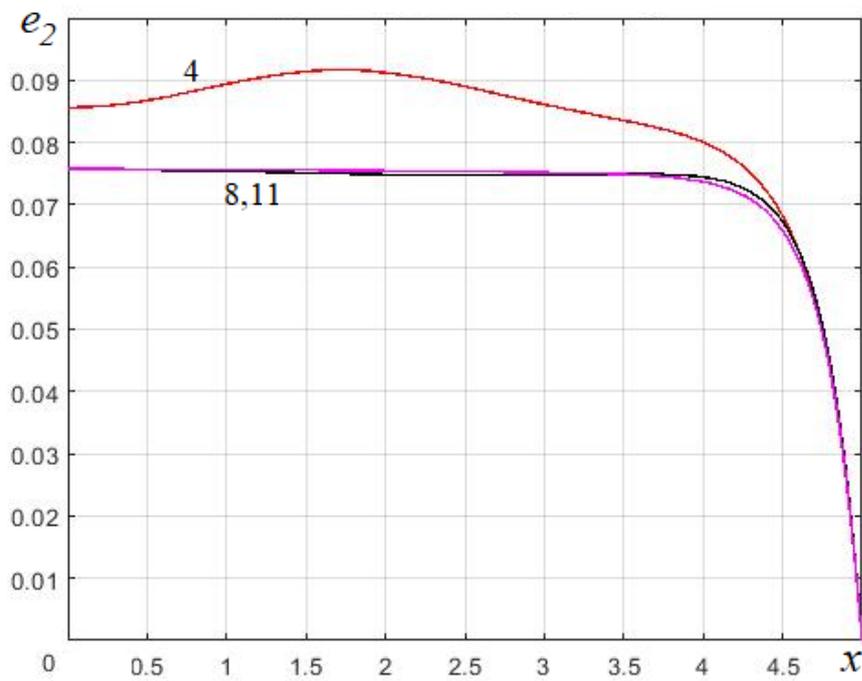


Рис. 5.61. Распределение окружных деформаций для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени t_4 ; t_8 ; t_{11} ($p = 0.01$)

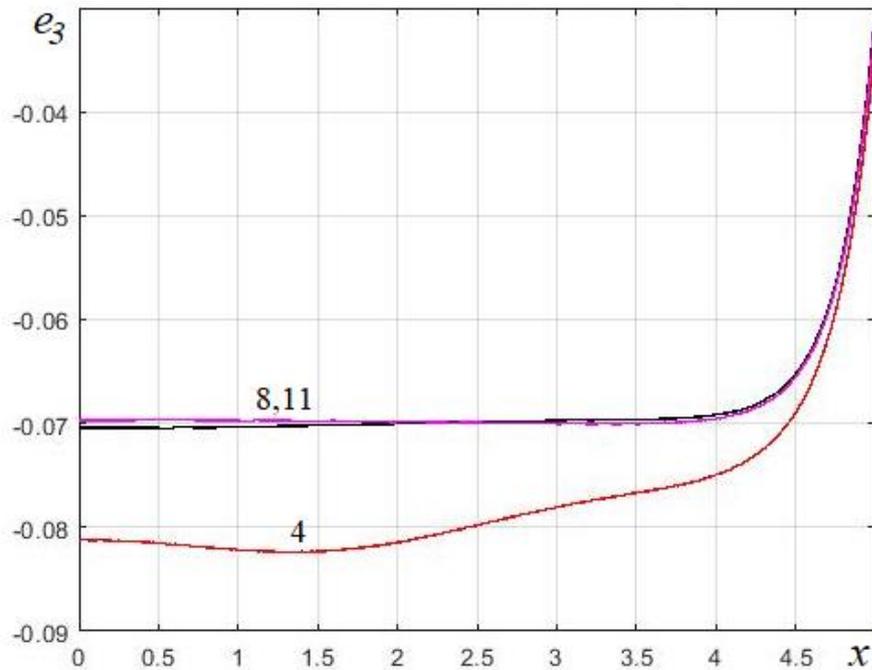


Рис. 5.62. Распределение поперечных деформаций для цилиндра под действием гармонической нагрузки в моменты времени t_4 ; t_8 ; t_{11} ($p = 0.01$)

5.6. Выводы по главе 5

- 1) Сформулирован алгоритм решения задач осесимметричного динамического деформирования мягких оболочек вращения из высокоэластичных материалов, основанный на использовании метода прямых и метода продолжения по параметру применительно к соотношениям введенной в гл.3 канонической формы одномерной нелинейной краевой задачи с дополнительными алгебраическими соотношениями.
- 2) Выявлены особенности реализации сформулированного алгоритма решения нелинейных задач динамики мягких оболочек, а также исследована эффективность применения к указанным задачам предложенного в гл.4 метода автоматической сегментации интервала интегрирования краевой задачи в целях повышения точности решения.
- 3) Впервые исследована задача раздувания сферической оболочки из высокоэластичного материала линейно возрастающим во времени давлением в полной математической постановке без упрощения разрешающих

соотношений, благодаря чему установлено явление динамического хлопка оболочки из материала Йео.

4) Впервые исследована задача динамического раздувания цилиндрической оболочки из неогуковского материала под действием гармонически изменяющегося давления при неравномерном распределении компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану оболочки, в том числе на основании соотношений моментной теории оболочек.

Заключение

В ходе выполненных в работе исследований были получены следующие основные результаты:

1. В рамках гипотез Кирхгофа-Лява впервые разработаны корректные математические модели, позволяющие исследовать процессы деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов при осесимметричном статическом и динамическом нагружении при произвольной форме меридиана и любых условиях закрепления оболочки.

2. Разработана и развита классификация одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций, позволяющая минимизировать круг рассматриваемых в работе задач на основании единства их математической формулировки и сформировать базу постановок задач для разработки вычислительных алгоритмов широкой области применения.

3. Разработанные математические модели практически реализованы в форме алгоритмов, основанных на развитии метода дифференцирования по параметру, и в комплексах программ, позволяющих проводить исследования осесимметричного статического и динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов при перемещениях, в несколько раз превышающих первоначальный характерный размер оболочки, и поперечных деформациях, близких к -100% , с единовременным анализом свойств решаемых систем уравнений.

4. Сформулирован критерий оценки однозначности продолжения решения по параметру в рамках реализации алгоритма решения нелинейных краевых и начально-краевых задач деформирования мягких оболочек. Использование предложенного критерия позволяет исследовать причины потери устойчивости счета, возникающей при решении рассматриваемого в работе класса задач.

5. Исследованы особенности реализации разработанных вычислительных алгоритмов, связанные как с произвольностью величин

исследуемых перемещений и деформаций, так и со свойствами самих алгоритмов. Выработаны рекомендации по назначению параметров вычислительного алгоритма для рассматриваемого в работе класса задач.

6. Разработан метод автоматической сегментации интервала интегрирования краевой задачи, направленный на минимизацию необоснованных действий вычислителя при назначении параметров вычислительного алгоритма. Показано, что использование указанного метода при решении как статических, так и динамических задач деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов позволяет повысить точность решения и скорость сходимости итерационных процессов реализованных в работе вычислительных алгоритмов.

7. Разработан и развит теоретический подход к исследованию особенностей процесса потери устойчивости раздуваемой равномерным давлением цилиндрической оболочки из высокоэластичных материалов различных типов.

8. Впервые установлено явление динамического хлопка сферической оболочки из высокоэластичного материала при ее нагружении линейно возрастающим давлением.

9. На основании разработанных математических моделей и алгоритмов впервые исследована задача динамического раздувания оболочки из высокоэластичного материала под действием гармонически изменяющегося давления при неравномерном распределении компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану оболочки, в том числе с использованием соотношений моментной теории оболочек.

Полученные результаты направлены на решение научной проблемы, имеющей важное хозяйственное значение и заключающейся в разработке и реализации математических моделей, описывающих поведение оболочек вращения из гиперупругих материалов при осесимметричных статическом и динамическом нагружениях, приводящих к большим перемещениям и деформациям. Разработанные вычислительные алгоритмы и комплексы

программ могут быть использованы для решения задач в рамках как безмоментной, так и моментной теории оболочек, и применимы в том числе для анализа поведения оболочек из традиционных конструкционных и перспективных композиционных материалов.

Список литературы

1. Алексеев С.А. Мягкие нерастяжимые оболочки (осесимметричная задача)// Сборник. Научно-техническая конференция 1952 года по расчету гибких пластин и оболочек. – М.: Изд во ВВИА. – 1952. – С. 73–98.
2. Алексеев С.А. Основы теории мягких осесимметричных оболочек // Расчет пространственных конструкций. – М.: Стройиздат. – 1965. – Вып. 10. – С. 5–37.
3. Алексеев С.А. Задачи статики и динамики мягких оболочек // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука. – 1966. – С. 28–37.
4. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек // Расчет пространственных конструкций. – М.: Стройиздат. – 1967. – Вып. 11. – С. 31–52.
5. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Осесимметричные задачи о геометрически нелинейном деформировании и устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с контурными подкрепляющими стержнями // Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 159, Кн. 4. – С. 395–428.
6. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Экспериментально-теоретическое исследование процесса образования шейки при растяжении стального трубчатого образца до разрыва // Проблемы прочности и пластичности. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. Ун-та. – 2001. – Вып. 63. – С. 35–41.
7. Балабух Л.И., Усюкин В.И. Приближенная теория мягких оболочек вращения // Тр. XIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ростов-на-Дону. 1970. – М. – 1971. – С. 230–235.
8. Бережной Д.В., Паймушин В.Н. О двух постановках упругопластических задач и теоретическое определение места образования шейки в образцах при растяжении // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75, Вып. 4. – С. 635–659.

9. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение. – 1977. – 488 с.
10. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1966. – № 1. – С. 81-89.
11. Бубнов И.Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды // Морской сборник. – 1902. – № 8. – С. 117-142.
12. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение. – 1976. – 278 с.
13. Ворович И. И., Зипалова В. Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29, Вып. 5. – С. 894–901.
14. Гаврюшин С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 1. – С. 115–130.
15. Галимов К.З. К теории конечных деформаций // Ученые записки Казанского университета. – 1949. – Кн.1, Т. 109. – С.35-72.
16. Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г. Основания нелинейной теории оболочек. – Казань: Фэн. – 1996. – 216 с.
17. Гениев Г.А. К вопросу расчета пневмоконструкций из мягких материалов // Труды ЦНИИСКА Исследования по расчету оболочек, стержней и массивных конструкций. – М.: Госстройиздат. – 1963. – С. 14–24.
18. Гимадиев Р. Ш., Гимадиева Т.З., Паймушин В.Н. О динамическом процессе раздувания тонких оболочек из эластомеров под действием избыточного давления // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78, Вып. 2. – С. 236–248.
19. Гимадиев Р.Ш. Моделирование динамики раздува избыточным давлением трехслойной резиноподобной оболочки // Известия Уфимского научного центра РАН. – 2018. – №1. – С. 5–10.

20. Гимадиев Р. Ш, Зарипов Р. Г. Численное и экспериментальное исследование подъема мягкого ветрозащитного устройства // Труды международной конференции Актуальные проблемы механики оболочек. Казань, 26–30 июня 2000 г. – Казань: Новое Знание. – 2000. – С. 167–172.
21. Гимадиев Р. Ш. К вопросу динамики наполнения однооболочкового мягкого крыла // Межвузовский сборник Вопросы прочности, устойчивости и колебаний конструкций летательных аппаратов. – Казань: КАИ. – 1985. – С. 86–92.
22. Гимадиев Р. Ш. К расчету динамики наполнения двухоболочкового мягкого крыла // Сборник докладов III научно-технической конференции Феодосийского филиала НИИ автоматических устройств. – Феодосия. – 1983. – С. 259–266.
23. Гимадиев Р. Ш. Математическое моделирование формы и кроя мягких крыльев // Известия вузов. Авиационная техника. – 1997. – № 3. – С. 79–83.
24. Гимадиев Р. Ш. Некоторые результаты численного исследования статики и динамики мягких оболочек // Сборник докладов НТК НИИ автоматических устройств. – М. – 1981. – Вып. 7. – С. 34–39.
25. Гимадиев Р. Ш. О форме круглого парашюта с промежуточными стропами // Сборник докладов НТК НИИ автоматических устройств. – Феодосия. – 1981. – С. 211–216.
26. Гимадиев Р. Ш., Куринская В. П., Михайловский Ю. В. Численное и экспериментальное исследование раскрытия ленточного крестообразного парашюта // Известия вузов. Авиационная техника. – 1997. – № 1. – С. 6–11.
27. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. – Казань: Казан. гос. энерг. университет. – 2006. – 208 с.
28. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16, Вып. 3. – С. 171–174.
29. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы. – 1953. – 544 с.

30. Гордеев В.М. Ривнянна для розруханку тканинних оболонки // Прикладна механіка. . – 1962. – Т. VIII, Вип. 6.
31. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит. – 2004. – 472 с.
32. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит. – 1995. – 352 с.
33. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела. – М.: Наука. – 1988. – 232 с.
34. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища школа. – 1979. – 280 с.
35. Григорьев А.С. Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях // Прикладная математика и механика. – Т. 21, № 6. – 1957. – С. 827–832.
36. Григорьев А. С. Равновесие безмоментных оболочек вращения при больших деформациях // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т.25, №6. – С. 1083–1090.
37. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир. – 1965. – 456 с.
38. Гулин Б. В., Давыдов Р. И., Ридель В. В. Численное исследование динамики мягкой оболочки в одноосном состоянии // Труды семинара Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Казан. физ.-техн. ин-т КФ АН СССР. – Казань. – 1979. – № 11. – С. 43–57.
39. Гулин Б. В., Ильгамов М. А. Обзор исследований по теории взаимодействия мягких оболочек с потоком жидкости и газа // Статика и динамика гибких систем. – М.: Наука. – 1987. – С. 5–34.
40. Гулин Б. В., Ильгамов М. А., Ридель В. В. Динамика взаимодействия мягкой оболочки с потоком газа // Труды семинара Взаимодействие оболочек

- с жидкостью. Казан. физ.-техн. ин-т КФ АН СССР. – Казань. – 1981. – № 14. – С. 96–117.
41. Гулин Б.В., Ридель В.В. Динамика парашюта // Труды семинара Гидроупругость оболочек. Казан. физ.-техн. институт КФ АН СССР. – Казань.– 1983. – № 16. – С. 116–132.
42. Гулин Б.В., Ридель В.В. К динамике мягких анизотропных оболочек // Труды семинара КФАН СССР. Нелинейные проблемы аэроупругости. – Казань. – 1979. – № 9. – С. 24–42.
43. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Доклады АН СССР. – М.: Изд-во АН СССР. – 1953. – Т. 88, № 4. – С. 601–602.
44. Друзь Б.И. Аэро- и гидроупругие колебания мягких оболочек, используемых в морских транспортных и береговых конструкциях: автореф. дис. ... д-ра тех. наук: 05.08.02. – Одесса, 1974. – 53 с.
45. Друзь Б.И. О форме поперечного сечения воздухоопорной цилиндрической оболочки // Сборник Строительная механика и расчет сооружений. – 1973. – № 4. – С. 1–9.
46. Друзь Б.И., Потутаровский А.И. Расчет погруженного мягкого цилиндрического понтона, прикрепляемого к вертикальному борту судна // Сообщения ДВИИМУ по судовым мягким оболочкам. – Владивосток. – 1975. – Вып. 33. – С. 18–38.
47. Друзь Б. И., Хованец В.А. К решению контактных задач в теории мягких оболочек // Сборник Состояние и перспективы применения пневматических конструкций из мягких оболочек в горном деле. – Днепропетровск. – 1983. – С. 57–59.
48. Друзь Б.И. и др. Постановка и численное решение задач динамики и равновесия мягких оболочек // Сборник ДВВИМУ Исследования по судовым мягким и гибким конструкциям. – Владивосток: Изд-во Дальневост. высш. инж. морского училища им. адм. Г.И. Невельского. – 1982. – С. 113–130.

49. Друзь Б. И., Огай С. А., Хованец В.А. Определение методом конечных элементов собственных частот колебаний мембраны, закрывающей прямоугольный отсек, наполненный жидкостью // Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам. – Владивосток: Изд-во Дальневост. высш. инж. морского училища им. адм. Г.И. Невельского. – 1978. - Вып. 36. - С. 156–162.
50. Друзь Б. И., Хованец В.А. Методы граничных интегральных уравнений и конечных элементов в задачах колебаний мембраны в потоке жидкости // Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам. – Владивосток: Изд-во Дальневост. высш. инж. морского училища им. адм. Г.И. Невельского. – 1979. – Вып. 37. – С. 88–96.
51. Друзь Б. И., Друзь И. Б. Аэро- и гидроупругие колебания мягких оболочек и емкостей. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного университета. – 1993. – 114 с.
52. Ильгамов М. А. Общая постановка задачи взаимодействия идеальной сжимаемой жидкости и проницаемой оболочки при ее конечных перемещениях и деформациях // Труды 12-ой Всесоюз. конференции по теории оболочек и пластин. – Ереван. – 1980. – Т. 2. – С. 177–183.
53. Ермолов В.В. Воздухоопорные здания и сооружения. – М.: Стройиздат. – 1980. – 304 с.
54. Ишии К. Расчет воздухоопорных сооружений на ветровые нагрузки // Сборник Пневматические строительные конструкции под ред. В.В. Ермолова. – М.: Стройиздат. – 1983. – С. 273–299.
55. Каюк Я.Ф., Ващенко Л.Ф. Основные соотношения геометрически нелинейной теории мягких оболочек вращения // Доклады АН УССР. Сер. А. – Киев. – 1976. – № 8. – С. 715–719.
56. Келлер Д.В. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. – М.: Мир. – 1974. – 256 с.
57. Ким А.Ю. Итерационный метод приращений параметров для расчета нелинейных мембранно-пневматических систем с учетом упругой работы воздуха: дисс. ... д-ра тех. наук: 05.23.17. – Саратов, 2005. – 561 с.

58. Колесников А.М. Большие деформации высокоэластичных оболочек: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Ростов-на-Дону, 2006. – 115 с.
59. Колпак Е.П. Устойчивость и закритические состояния безмоментных оболочек при больших деформациях: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. – СПб, 2000. – 334 с.
60. Коровайцев А.В. Параметрический анализ оболочек вращения при больших перемещениях // Изв. вузов. Машиностроение. – 1979. – № 2. – С. 5–8.
61. Коровайцев А.В., Коровайцева Е.А., Ломовской В.А. Решение прикладных линейных одномерных краевых задач с автоматической точностью. // Вестник МИТХТ. – 2012. – Т. 7, № 6. – С. 41–45.
62. Коровайцева Е.А. Об обеспечении точности решения задач модального анализа // Труды МАИ. – 2018. – № 101. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=96401>
63. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // Труды МАИ. – 2019. – № 108. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109235>
64. Коровайцева Е. А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях // Труды МАИ. – 2020. – Т. 114. – URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=118881>
65. Коровайцева Е.А. Систематизация одномерных краевых задач механики деформируемого твердого тела // Труды МАИ. – М.: Изд-во МАИ. – 2020. – Т. 110. – URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=112827>
66. Коровайцева Е. А. Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек // Вестник СамГТУ, Сер. Физ.-мат. науки. – Самара. – 2021. – Т. 25, № 3. – С. 556–570.
67. Коровайцева Е. А. Исследование особенностей решения задач нестационарной динамики мягких оболочек из высокоэластичных

материалов // Проблемы прочности и пластичности. – 2021. – Т.83, №2. – С. 151–159.

68. Коровайцева Е. А. Об использовании метода автоматической сегментации в решении нелинейных начально-краевых задач механики мягкооболочечных конструкций // Проблемы прочности и пластичности. – 2021. – Т. 83, № 4. – С. 5–13.

69. Коровайцева Е. А. Использование метода автоматической сегментации в решении задач статики мягких оболочек вращения при больших перемещениях и деформациях // Труды МАИ. – 2021. – № 121.

70. Коровайцева Е.А. К обоснованию однозначности продолжения решения задач о деформировании мягких оболочек методом дифференцирования по параметру // Проблемы прочности и пластичности. – 2022. – Т. 84, № 3. – С. 343–350.

71. Коровайцева Е.А. Сравнительный анализ статического деформирования мягких оболочек канонических форм меридиана при раздувании // Труды МАИ. – 2022. – № 123.

72. Коровайцева Е.А. Об исследовании влияния параметров исходных данных на деформирование мягких оболочек вращения // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – Т. 85, № 2. – С. 5–13.

73. Коровайцева Е.А. Исследование влияния локального утонения на закритическое поведение цилиндрической оболочки из гиперупругого материала // Труды МАИ. – 2023. – № 131. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175912>

74. Коровайцева Е.А. Свид. 2020610907 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа расчета нелинейного поведения неразветвленных тонкостенных конструкций при произвольных перемещениях, поворотах и деформациях. / Е.А. Коровайцева; заявитель и правообладатель Е.А. Коровайцева (RU) – № 2019666107; заявл. 05.12.19; опубл. 21.01.20.

75. Коровайцева Е.А. Свид. 2022613529 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа расчета нелинейного динамического поведения осесимметричных мягких оболочек при больших деформациях. / Е.А. Коровайцева; заявитель и правообладатель Е.А. Коровайцева (RU) – № 2022613028; заявл. 27.02.22; опубл. 14.03.22.
76. Коровайцева Е.А. Свид. 2022614200 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа параметрического анализа процесса статического деформирования мягких оболочек вращения из высокоэластичных материалов. / Е.А. Коровайцева; заявитель и правообладатель Е.А. Коровайцева (RU) – № 2022613364; заявл. 04.03.22; опубл. 17.03.22.
77. Коровайцева Е.А. Об обеспечении точности решения линейных краевых задач строительной механики // Материалы XXIV Международного симпозиума Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова. – М.: ООО «ТР-принт» – 2018. – Т. 2. – С. 82–85.
78. Коровайцева Е.А. Модифицированный вариант технической теории мягких оболочек // Материалы XXV Международного симпозиума Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова. – М.: ООО «ТР-принт» – 2019. – Т. 2. – С. 101.
79. Коровайцева Е.А. Модифицированные уравнения теории больших деформаций мягких оболочек // Труды конференции-конкурса молодых ученых 21-25 октября 2019 г. – М.: Изд-во МГУ. – 2020. – С. 12–19.
80. Коровайцева Е. А. Об одном алгоритме решения задач динамики мягких оболочек // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Октябрь 2020 года. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ. – 2020. – С. 120–121.

81. Коровайцев А.А., Коровайцева Е.А. Влияние параметров вычислительного алгоритма на результаты решения задач теории мягких оболочек // Материалы XXVI международного симпозиума Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред имени А.Г. Горшкова. – М.: ООО "ТРП" – 2020. – Т.2. – С. 80 – 81.
82. Коровайцева Е.А. Расчёт динамического раздувания оболочек вращения из высокоэластичных материалов при больших деформациях // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2020 (3–13 сентября 2020 г., Сочи, «Буревестник» МГУ). – М.: Изд-во МГУ. – 2020. – С. 87.
83. Коровайцева Е. А. Динамическое раздувание шарнирно опертой полусферы из высокоэластичных материалов различных типов // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 20-26 апреля 2021 года. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ. – 2021. – С. 122.
84. Коровайцева Е. А. О тестировании алгоритма решения задач динамического деформирования оболочек из высокоэластичных материалов // Материалы XXVII Международного симпозиума Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова. – ООО ТРП Москва. – 2021. – Т. 1. – С. 138.
85. Korovaytseva E. Analysis of soft shells of revolution at large deformations // 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 22-27 August 2021 Abstract Book. – Milano, Italy: Milano, Italy. – 2021. – P. 2477–2478.
86. Коровайцева Е. А. Применение метода автоматической сегментации в решении нелинейных задач механики тонкостенных конструкций // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос. (3 – 12 сентября 2021 г., Сочи, Буревестник МГУ) под ред. А. А. Афанасьева, О. О. Иванова, М. С. Макаровой, А. М. Чайка. – М.: Изд-во МГУ. – 2021. – С. 80.
87. Коровайцева Е.А. Исследование влияния параметров модели высокоэластичного материала на напряженно-деформированное состояние

мягких оболочек вращения // Материалы XXVIII Международного симпозиума Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова. – М.: ООО «ТР-принт». – 2022. – Т. 2. – С. 61.

88. Коровайцева Е.А. Применение метода дифференцирования по параметру при проектировочных расчетах мягких оболочек вращения // Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022), 4–13 сентября 2022 г., Алушта. – С. 201–202.

89. Коровайцева Е.А. О параметрическом анализе мягких оболочек вращения при больших деформациях // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 18-22 апреля 2022 года. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ. – 2022. – С. 96.

90. Коровайцева Е.А. Особенности поведения высокоэластичных оболочек вращения различных канонических форм меридиана при статическом деформировании // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д. (Гомель, 24-25 ноября 2022 г.). – Гомель: БелГУТ. – 2022. – Ч.2. – С. 198.

91. Коровайцева Е.А. Особенности алгоритма решения задач статики оболочек вращения при больших деформациях // XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред Пермь, 13-17 февраля 2023 г. Тезисы докладов. – Пермь: ПФИЦ УрО РАН. – 2023. – С. 174.

92. Коровайцева Е.А. О контроле достоверности численного решения задач деформирования оболочек из высокоэластичных материалов // Материалы XXIX Международного симпозиума Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова. – М.: ООО «ТР-принт». – 2023. – Т.1. – С. 129–130.

93. Коровайцева Е.А. О двух постановках задачи динамики цилиндрической оболочки из высокоэластичного материала // Всероссийская

- конференция молодых ученых-механиков YSM-2023 (4–14 сентября 2023 г., Сочи, «Буревестник» МГУ). – М.: Изд-во МГУ). – 2023. – С. 57.
94. Кылатчанов К.М. Некоторые задачи статики мягких оболочек при больших деформациях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Л., 1984. – 133 с.
95. В.В. Лялин, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев. Парашютные системы: проблемы и методы их решения. – М.: Физматлит. – 2009. – 575 с.
96. Магула В.Э. Основные зависимости теории мягких оболочек // Труды НКИ. – 1973. – № 78. – С. 3–15.
97. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. – Л.: Судостроение. – 1978. – 264 с.
98. Мокин Н.А. Численный анализ деформирования воздухоопорных оболочек при статических и динамических воздействиях: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17. – М., 2018. – 170 с.
99. Муштари Х.М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложением к задаче устойчивости упругого равновесия // Известия физико-математического общества и научно-исследовательского института математики и механики при Казанском университете. – 1938. – Сер. 13, Т. 11. – С. 71–160.
100. Муштари Х.М. Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях // Прикладная математика и механика. – 1949. – В. 2, Т. 13. – С.121–184.
101. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат. – 1957. – 431с.
102. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. – М.: Машиностроение. – 1981. – 216 с.
103. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат. – 1948. – 211 с.
104. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз. – 1962. – 431 с.

105. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз. – 1958. – 370 с.
106. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. Конструирование и расчет сооружений из тросов, сеток и мембран. – М.: Стройиздат. – 1967. – 320 с.
107. Паймушин В.Н. Об уравнениях геометрически нелинейной теории упругости и безмоментных оболочек при произвольных перемещениях // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, №.5. – С. 822–841.
108. Паймушин В.Н. Соотношения теории тонких оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, №.5. – С. 135–149.
109. Паймушин В.Н. Статические и динамические формы потери устойчивости сферической оболочки при действии внешнего давления // Известия вузов. Математика. – 2016. – №4. – С. 46–56.
110. Паймушин В.Н. Теория тонких оболочек при конечных перемещениях и деформациях, основанная на модифицированной модели Кирхгофа-Лява // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75, вып.5. – С. 813–829.
111. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия. – 2014. – 480 с.
112. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ. – 1995. – 366 с.
113. Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. – М.: Изд-во МГТУ. – 1993. – 294 с.
114. Рахматуллин Х.А. Теория осесимметричного парашюта, ч. 1 // Научные труды института механики МГУ. – 1975. – Вып. 35. – С. 3-35.
115. Рахматуллин Х.А. Теория осесимметричного парашюта ч. II // Парашюты и проницаемые тела. – 1980. – С. 5-23.
116. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. – М.: Наука. – 1990. – 205 с.

117. Ридель В. В., Мягков А. С. Динамика формообразования и напряженно-деформированного состояния двухоболочкового планирующего парашюта // Нестационарные задачи механики: Труды семинара. Казан. физ.- техн. ин-т КФ АН СССР. – 1989. – № 22. – С. 37–47.
118. Светлицкий В.А. Механика стержней. Часть 1. Статика. – М.: Высшая школа. – 1987. – 320 с.
119. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2006. – 379 с.
120. Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. – М.: Машиностроение. – 1973. – 260 с.
121. Стрекозов Н.П. Некоторые вопросы прочности конических и цилиндрических оболочек из мягких материалов // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – 1966. – С. 703-706.
122. Тимошенко С.П. О больших прогибах круглых пластинок // Сборник института инженеров путей сообщения. – 1915. – Вып. 89. – С.1-10.
123. Усюкин В.И. Деформация мембранных торовых оболочек // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Баку, 1966. – 1966. – С. 766-771.
124. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 1. – С. 70-75.
125. Усюкин В.И. Техническая теория мягких оболочек: дис. ... д-ра тех. наук: 05.00.00. – М., 1971. – 361 с.
126. Усюкин В. И., Терещенко В. А., Борсов Р. Г. Разностные методы решения двумерных задач статики мягких оболочек // В сб.: Расчет пространственных конструкций. – 1979. – Вып. XVIII. – С. 69-84.
127. Усюкин В. И., Терещенко В. А., Сдобников А. Н., Панов С. В. Расчет пневматических строительных конструкций с использованием ЭВМ //

Доклады Международной конференции по облегченным пространственным конструкциям ИАСС. – 1977. – М.: Стройиздат.

128. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. – М.: Машиностроение. – 1988. – 392 с.

129. Харнах Р. Расчет воздухоопорных сооружений на ветровые нагрузки // В сб.: Пневматические строительные конструкции. – 1983. – С. 383-436.

130. Хованец В.А. Взаимодействие пневмонапряженных мягких оболочек с жесткими преградами: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Владивосток, 2004. – 133 с.

131. Черных К.Ф. Нелинейная теория изотропно упругих тонких оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. - №2. – С. 148-159.

132. Черных К.Ф. Нелинейная теория тонких упругих оболочек из эластомеров // Устойчивость пластин и оболочек. – Саратов: Издательство Саратовского университета. – 1981. – с.8-11.

133. Черных К.Ф. Теория тонких оболочек из эластомеров и резиноподобных материалов // Успехи механики. – 1983. – Т. 6, № 1-2. – С. 111-127.

134. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение. – 1986. – 336 с.

135. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). – М.: Эдиториал УРСС. – 1999. – 224 с.

136. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 1. – С. 56-62.

137. Шаповалов Л. А. Уравнения эластики тонкой оболочки при неосесимметричной деформации // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 3. – С. 62–72.

138. Якушев В.Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. – М.: Наука. – 2004. – 276 с.

139. J.E. Adkins, R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials. IX. The deformation of thin shells // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. – 1952. – A 244. – P. 505-531.
140. Akkas N. On the dynamic snap-out instability of inflated non-linear spherical membranes // *International Journal of Nonlinear Mechanics*. – 1978. – Vol.13. – P. 177-183.
141. Akyuz U., Ertepinar A. Stability and asymmetric vibrations of pressurized compressible hyperelastic cylindrical shells // *International Journal of Nonlinear Mechanics*. – 1999. – Vol. 34, No. 3. – P. 391– 404.
142. Alexander H. Tensile instability of initially spherical balloons // *International Journal of Engineering Science*. – 1971. – Vol. 9. – P. 151-162.
143. Alibakhshi A., Heidari H. Nonlinear dynamics of dielectric elastomer balloons based on the Gent-Gent hyperelastic model // *European Journal of Mechanics / A Solids*. – 2020. – Vol. 82. – Article No. 103986. URL: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.103986>.
144. Amabili M. *Nonlinear mechanics of shells and plates in composite, soft and biological materials*. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2018.
145. Antman S.S. *Nonlinear problems of elasticity*. – New York: Springer-Verlag New York, Inc. 1995.
146. Beatty M.F. Introduction to nonlinear theory of elasticity // In: *Nonlinear effects in fluids and solids*, eds. M.M. Carroll et. al. – New York: Plenum Press. – 1996. – P. 13-112.
147. Beatty M.F. Seven lectures in finite elasticity // In: *Topics in Finite Elasticity*. Eds. Hayes M., Saccomandi G. – Springer-Verlag Wien. – 2001. – P. 31-93.
148. Biezeno C.B. Über die Bestimmung der «Durchschlagkraft» einer schwachgekrümmten krasformigen Platte // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. – 1935. – H. 1/2, B.15. – S. 10-22.

149. Bucchi A., Grant E. H. Predictions of aneurysm formation in distensible tubes: part B - application and comparison of alternative approaches // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2013. – Vol. 70. – P. 155-170.
150. Calderer C. The dynamical behaviour of nonlinear elastic spherical shells // *Journal of Elasticity*. 1983. – V.13. – P. 17-47.
151. Foppl A. *Vorlesungen uber technische mechanik*. – Leipzig: Teubner. – 1907. – 391 s.
152. Foster H.O. Very Large Deformations of Axially Symmetrical Membranes Made of neo-hookean Materials // *International Journal of Engineering Science*. – 1967. – Vol. 5. – P. 95-117.
153. Gorissen B., Milana E., Baeyens A., Broeders E., Christiaens J., Collin K., Reynaerts D., De Volder, M. Hardware Sequencing of Inflatable Nonlinear Actuators for Autonomous Soft Robots // *Advanced Materials*. – 2019. – Vol.31, No. 3. –Article ID e1804598.
154. Green A.E. Finite elastic deformation of incompressible isotropic bodies // *Proceedings of the Royal Society of London*. – 1950. – Ser. A, Vol. 202, No. 1070. – P. 407-419.
155. Green A. E., Naghdi P. M., Wainwright W. L. A general theory of a Cosserat surface // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1965. – Vol. 20. – P. 287-308.
156. Green A.E, Zerna W. *Theoretical Elasticity*. – Oxford University Press. – 1968. – 458 p.
157. Guo Z.-H. Problem of spherical membrane in the theory of large deformation // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. – 1962. – Vol.6, No. 14. – P. 921–936.
158. Haddow, J. B. et al. Application of variational principles to the axial extension of a circular cylindrical nonlinearly elastic membrane // *Journal of Engineering Mathematics*. – 2000. – Vol. 37. – P. 65-84.

159. Hart-Smith L.J., Grisp J.D. Large elastic deformations of thin rubber membranes // *International Journal of Engineering Science*. – 1967. – Vol. 5. – pp. 1-24.
160. Haughton D.M. Elastic membranes // In: *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*. Eds. Fu Y., Ogden R.W. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2001. – P. 233-267.
161. Haughton D. M., Ogden R.W. On the incremental equations in non-linear elasticity — II. Bifurcation of pressurized spherical shells // *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*. – 1978. – Vol. 26. – P. 111-138.
162. Holzapfel G. A. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. – Chishester [etc].: John Wiley & Sons. – 2014. – 456 p.
163. Houbolt J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft // *Journal of the Aeronautical Sciences*. – 1950. – Vol. 17, No. 9. – P. 540–550.
164. Janele P.T., Haddow J.B., Mioduchowski A. Finite amplitude spherically symmetric wave propagation in a compressible hyperelastic solid // *Acta Mechanica*. – 1989. – Vol.79. – P. 25-41.
165. Jiang L., Haddow J.B. A finite element formulation for finite static axisymmetric deformation of hyperelastic membranes // *Computers & Structures*. – 1995. – Vol. 57. – P. 401-405.
166. Jiao J., Xu, J., Yuan X., Chen L.-Q. Axisymmetric 3:1 internal resonance of thin-walled hyperelastic cylindrical shells under both axial and radial excitations // *Acta Mechanica Sinica*. – 2022. – Vol. 38. – Article No. 521417. – URL: <https://doi.org/10.1007/s10409-022-09006-x>
167. Johnson D. E., Greif R. Dynamic response of a cylindrical shell. Two numerical methods // *AIAA Journal*. – 1965. – Vol. 4, No. 3. – P. 486–494.
168. Ju Y., Niu D. On a class of differential equations of motion of hyperelastic spherical membranes // *Applied Mathematical Sciences*. – 2012. – Vol. 6, No. 83. – P. 4133–4136.

169. Kannan K., Rajagopal K.R., Saccomandi G. Unsteady motions of a new class of elastic solids // *Wave Motion*. – 2014. – Vol. 51. – P. 833-843.
170. Karman T. Festigkeitsprobleme in Maschinenbaue. // In: *Collected works of Theodore von Karman, 1902-1913*. – 1956. – Vol.1. – P. 141-207.
171. Knowles J.K. Large amplitude oscillations of a tube of incompressible elastic material // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1950. – Vol. 18. – P. 71-77.
172. Kydonieffs A.D., Spencer A.J. The finite inflation of an elastic torus // *International Journal of Engineering Science*. – 1965. – Vol. 3. – P. 173-195.
173. Levy S., Kroll W. D. Errors introduced by finite space and time increments in dynamic response computation // *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. – 1953. – Vol. 51, No. 1. – P. 57–68.
174. Libai A., Simmonds J. G. *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 560 p.
175. Love A. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. – Cambridge: at the University Press. – 1892.
176. Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th Ed. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1927. – 354 p.
177. Marguerre K. Zur Theorie der gekrummten Platte grosser Formänderung // In: *Proceedings 5-th International Congress for applied mechanics*. – New York. – 1939. – P. 93-101.
178. Miftahov R.N., Nam H.G. *Biomechanics of the Human Urinary Bladder*. – Springer. – 2013. – 188 p.
179. Neto E. A. de Souza et al. Finite elasticity in spatial description: Linearization aspects with 3-D membrane applications // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1995. – Vol. 38. – P. 3365-3381.
180. Osborne W.A., Sutherland W. *The Elasticity of Rubber Balloons and Hollow Viscera*. – *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character (1905-1934)*. – 1909. – Vol. 83, No. 560. – P. 148.

181. Pucci E., Saccomandi G., Vergori L. Linearly polarized waves of finite amplitude in prestrained elastic materials // *Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A.* – 2019. – Vol. 475, Issue 2226. – URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.2018.0891>.
182. Ren J. Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load // *Applied Mathematics and Mechanics.* – 2008. – Vol. 29, No. 10. – P. 1319–1327.
183. Ren J. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic spherical shells // *International Journal of Engineering Science.* – 2009. – Vol. 47, No. 7. – P. 745–753.
184. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A 240.* – 1948. – P. 459-490.
185. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. II. Some uniqueness theorems for pure, homogeneous deformation // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A 240.* – 1948. – P. 491-508.
186. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. III. Some simple problems in cylindrical polar coordinates // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A 240.* – 1948. – P. 509-525.
187. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A 241.* – 1948. – P. 379-397.
188. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. V. The problem of flexure // *Proceedings of the Royal Society of London, A 195.* – 1949. – P. 463-473.
189. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A 242.* – 1949. – P. 173-195.

190. Rivlin R.S., Saunders D.W. Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A* 243. – 1951. – P. 251-288.
191. Rivlin R.S., Thomas A.G. Large elastic deformations of isotropic materials. VIII. Strain distribution about a hole in a sheet // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A* 243. – 1951. – P. 289-298.
192. Rodríguez–Martínez J. A., Fernández–Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation // *International Journal of Engineering Science*. – 2015. – Vol. 93. – P. 31–45.
193. Rogers C., Saccomandi G., Vergori L. Helmholtz-type solitary wave solutions in nonlinear elastodynamics // *Ricerche di Matematica*. – 2019. – Vol. 69, No. 1. – P. 327–341.
194. Roxburgh D. G. Inflation of nonlinearly deformed annular elastic membranes // *International Journal of Solids and Structures*. – 1995. Vol. 32. – P. 2041-2052.
195. Saccomandi G. Some generalized pseudo-plane deformations for the neo-Hookean material // *Ima Journal of Applied Mathematics*. – 2005. – Vol. 70. – P. 550-563.
196. Shahinpoor M., Balakrishnan R. Large amplitude oscillations of thick hyperelastic cylindrical shells // *International Journal of Non-linear Mechanics*. – 1978. - Vol. 13. – P. 295–301.
197. Shahinpoor M., Nowinski J. Exact solution to the problem of forced large amplitude radial oscillations of a thin hyperelastic tube // *International Journal of Non-linear Mechanics*. – 1971. – Vol. 6. – P. 193-207.
198. Soares R.M., Amaral P.F.T., Silva F.M.A., Goncalves P.B. Nonlinear breathing motions and instabilities of a pressure-loaded spherical hyperelastic membrane // *Nonlinear Dynamics*. – 2020. – Vol. 99. – P. 351-372.

199. Soares R. M., Goncalves P. B. Large-amplitude nonlinear vibrations of a Mooney–Rivlin rectangular membrane // *Journal of Sound and Vibration*. – 2014. – Vol. 333, No. 13. – P. 2920–2935.
200. Steigmann D. J. Tension field theory // *Proceedings of the Royal Society of London, A* 429. – 1990. – P. 141-173.
201. Suh J. B. et al. Shear of rubber tube springs // *International Journal of Non-linear Mechanics*. – 2007. – Vol. 42. – P. 1116-1126.
202. Taber Larry A. Comparison of elasticity and shell theory results for large deformation of rubberlike shells // *International Journal of Non-linear Mechanics*. – 1989. – Vol. 24. – P. 237-249.
203. Treolar L. R. G. *The physics of rubber elasticity*. – Clarendon. – 1975. – 310 p.
204. Verron E., Khayat R. E., Derdouri A., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes // *Journal of Rheology*. – 1999. – Vol. 43, No. 5. – P. 1083–1097.
205. Wang R., Ding H., Yuan X., Lv N., Chen L. Nonlinear singular traveling waves in a slightly compressible thermo-hyperelastic cylindrical shell // *Nonlinear Dynamics*. – 2022. – Vol.107. – P. 1495–1509.
206. Wang A., Ertepinar A. Stability and vibrations of elastic thick-walled cylindrical and spherical shells subjected to pressure // *International Journal of Non-linear Mechanics*. – 1972. – Vol. 7. – P. 539-555.
207. Wang T., Yang Y., Fu C., Liu F., Wang K., Xu, F. Wrinkling and smoothing of a soft shell // *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*. – 2020. – Vol. 134. – Article ID 103738. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2019.103738>.
208. Wu C. H. Large finite strain membrane problems // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1979. – Vol. 36. – P. 347-359.
209. Xu J., Yuan X., Zhang H., Ma M., Zhao W. Internal resonance of hyperelastic thin-walled cylindrical shells under harmonic axial excitation and time-varying temperature field // *Thin-Walled Structures*. – 2022. – V. 175. – Article ID 109256. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109256>.

210. Xu J., Yuan X., Zhang H., Zheng F., Chen L. Nonlinear Vibrations of Thermo-Hyperelastic Moderately Thick Cylindrical Shells with 2:1 Internal Resonance // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2020. – Vol. 20, No. 5. – Article ID 2050067. – URL: <https://doi.org/10.1142/S0219455420500674>.
211. Yang W.H., Feng W.W. On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes // *Journal of Applied Mechanics*. – 1970. – Vol. 37. – P. 1002-1011.
212. Yeoh O.H. Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. – 1993. Vol. 66, No. 5. – P. 754–771.
213. Yong H., He X., Zhou Y. Dynamics of a thick-walled dielectric elastomer spherical shell // *International Journal of Engineering Science*. – 2011. – Vol. 49, No. 8. – P. 792–800.
214. Yuan X. G., Zhang R. J., Zhang H. W. Controllability conditions of finite oscillations of hyperelastic cylindrical tubes composed of a class of Ogden material models // *Computers, Materials & Continua*. – 2008. – Vol. 7, No. 3. – P. 155–166.
215. Zhang C., Hao Y., Li B., Feng X., Gao H. Wrinkling patterns in soft shells // *Soft matter*. – 2018. – Vol. 14, No. 9. – P. 1681-1688.
216. Zhao Z., Niu D., Zhang H., Yuan X. Nonlinear dynamics of loaded visco-hyperelastic spherical shells // *Nonlinear Dynamics*. – 2020. – Vol. 101. – P. 911–933.
217. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads // *Acta Mechanica*. – 2019. – Vol. 230, No. 8. – P. 3003–3018.
218. Zhu Y., Luo X., Wang H., Ogden R.W., Berry C. Three-dimensional non-linear buckling of thick-walled elastic tubes under pressure // *International Journal of Non-linear Mechanics*. – 2013. – Vol. 48. – P. 1-14.
219. Zubov L.M., Sheidakov D.N. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion and inflation // *Journal of Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 75, Issue 1. – Article ID 011002. – URL: <https://doi.org/10.1115/1.2723824>.