

Труды МАИ. 2022. № 124
Trudy MAI, 2022, no. 124

Научная статья
УДК 621.865.8
DOI: [10.34759/trd-2022-124-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-01)

ОЦЕНИВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОРНЕВОГО ЗВЕНА МАНИПУЛЯТОРА ПРИ ДЕЙСТВИИ НА НЕГО ОСЕВОЙ НАГРУЗКИ

Людмила Анатольевна Федорова¹, Алексей Петрович Софьин²,
Лев Капитонович Горшков³, Игорь Геннадьевич Уханов⁴

^{1,2,3,4}Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского,

Санкт-Петербург, Россия

^{1,2,3,4}vka@mil.ru✉

Аннотация. Рассмотрены вопросы, связанные с оценением устойчивости корневого звена в манипуляторах. На основании критериев устойчивости равновесного положения выбран алгоритм анализа устойчивого положения данного звена. Показано, что равновесие стержня корневого звена остается устойчивым до тех пор, пока значение модуля осевой силы P не выйдет за пределы обозначенного диапазона.

Ключевые слова: робот, манипулятор, устойчивость, звено, энергия, наклон, конструкция

Для цитирования: Федорова Л.А., Софьин А.П., Горшков Л.К., Уханов И.Г.
Оценивание устойчивости корневого звена манипулятора при действии на него
осевой нагрузки // Труды МАИ. 2022. № 124. DOI: [10.34759/trd-2022-124-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-01)

ASSESSMENT OF STABILITY OF THE ROOT LINK OF THE MANIPULATOR UNDER THE ACTION OF AXIAL LOAD ON IT

Lyudmila A. Fedorova¹, Alexey P. Sofin²✉, Lev K. Gorshkov³, Igor G. Uhanov⁴

^{1,2,3,4}Military space Academy named after A.F. Mozhaisky,

Saint Petersburg, Russia

^{1,2,3,4}vka@mil.ru✉

Abstract. The development of space manipulation systems is directly related with obvious expansion of the possible range of work and operations that can be carried out in difficult and dangerous conditions with technical orbital objects and equipment installed on them. By now, the main construction option used has developed - a hinge-type manipulation system of different degrees of complexity.

Modern manipulators must be carried out with condition of maintaining stability of elements. Taking into account the priority of influence of the root link on stability of the manipulator as a whole, it is proposed to investigate the equilibrium positions of the rod for stability at a range of deviations $\pi < \varphi < \pi$. Criterion of stability of equilibrium position for systems with holonomic and stationary constraints located in conservative force field is determined by Lagrange-Dirichlet theorem: According to the theorem equilibrium positions of a conservative system in which its potential energy has minimum are stable. The results

of the study of stability by taking into account angle of inclination of the link are determined by the dependence between the angle of inclination φ and the dimensionless force λ . The formation of the real appearance of a service multi-link manipulator for use in space conditions should be carried out on the basis of taking into account functional tasks and the available database on specifics of creation and use of existing devices. The studies carried out to date indicate that, along with geometric interpretation, which provides an assessment of the initial structure and approximate dimensions of the manipulator elements, it is necessary to analyze the operational loads that determine stability of circuit elements. Obviously, the actual dimensions of the manipulators will be determined by motion parameters (for example, angle of rotation) of hinge elements. The calculations performed show that to a large extent the condition and, consequently, the operability of the root link are determined by the axial load. The proposed studies allow us to assess the danger of such a load and give recommendations on the design of the manipulator, taking into account the properties of the elastic hinge and the size of the links. This will prevent monotonous departure from the considered equilibrium positions or fluctuations increasing in scope over time.

Keywords: robot, manipulator, stability, link, energy, inclination, construction.

For citation: Fedorova L.A., Sofin A.P., Gorshkov L.K., Uhanov I.G. Assessment of stability of the root link of the manipulator under the action of axial load on it. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. DOI: [10.34759/trd-2022-124-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-01)

Введение

Типичные структурно-компоновочные схемы манипуляторов применяются в земных и космических условиях и могут представлять собою сложные технические устройства [1]. В последние годы появились и широко используются аппараты с несколькими сегментами, то есть выполненные по принципу построения человеческой руки (рис. 1). Очевидно, что современные манипуляторы представляют собою сложнейшие и, одновременно, очень интересные по своей структуре устройства. К настоящему времени выполнены многочисленные исследования, позволяющие оценить работоспособность окружающих нас во всех областях жизни и техники манипуляторов. В то же время, несмотря на весьма разнообразный состав оборудования манипуляционных систем, следует отметить следующее. Рассмотрение структурно-компоновочных схем манипуляторов позволяет утверждать, что к настоящему времени сложился основной применяемый вариант построения - манипуляционная система шарнирного типа (рис. 2) различной степени сложности. При движении звеньев во вращательных парах отрабатывается необходимая программа управления, связанная с занятием установленных положений. Выбранная кинематическая схема позволяет перейти к проектированию манипулятора, но, в то же время, именно она связана с определенной чувствительностью к внешним воздействиям. Напомним, что конструирование и дальнейшее использование многозвенных манипуляторов могут проводиться с учетом множества факторов внутреннего и внешнего порядка [2], а также сложных условий работы [3-12].

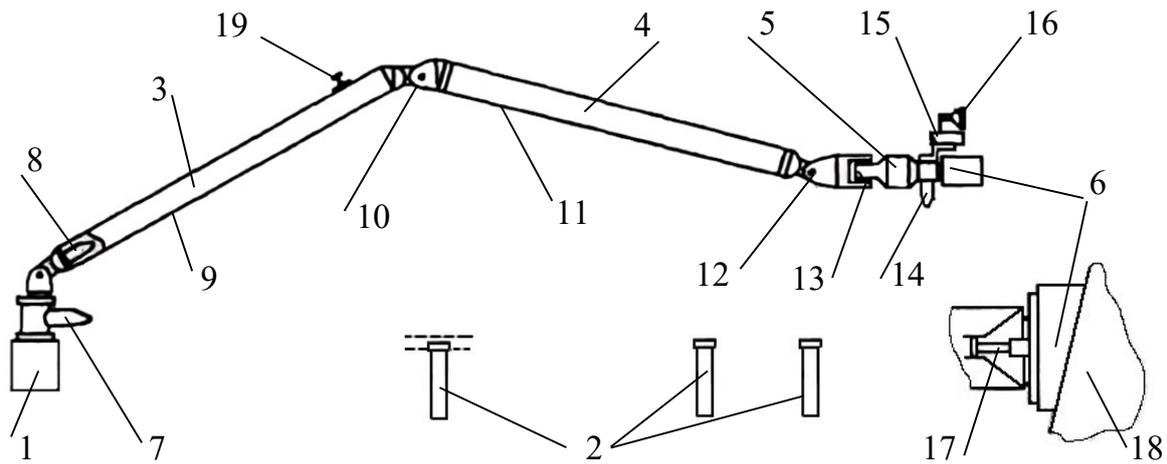


Рис. 1. Схема манипулятора:

1 – корень манипулятора; 2 – ложементы; 3 – плечевое звено; 4 – локтевое звено; 5 – кистевое звено; 6 – захватное устройство; 7 – шарнир рыскания плеча; 8 – шарнир тангажа плеча; 9 – соединительная труба; 10 – шарнир тангажа локтя; 11 – соединительная труба; 12 – шарнир тангажа кисти; 13 – шарнир рыскания кисти; 14 – шарнир ротации кисти; 15 – телекамера; 16 – светильник; 17 – такелажный элемент; 18 – объект манипулирования; 19 – такелажный элемент плечевого звена.

Наряду с влиянием внешних физико-химических факторов, представленных, в частности, в работе [2], следует отметить влияние внешних нагрузок на положение и устойчивость составляющих манипулятор стержней-звеньев (рис. 2) и, в первую очередь, корневого. При рассмотрении программы работы манипулятора чаще всего сталкиваются с проблемой устойчивости именно этого звена.

В настоящее время большой интерес может вызывать оценка состояния равновесия как раз в отклоненном положении. Оно связано с более высокой загрузкой звена, и именно от способности сохранения им равновесия зависит вероятность соответствия манипулятора своему функциональному предназначению.

Эксплуатационная составляющая вопроса однозначно выходит на появление вибрационных возмущений [13]. Отметим, что одна из основных проблем, определяющих возможность использования манипулятора, связана с позиционированием его звеньев. Необходимость обеспечения соответствующего программе управления положения каждого звена связана с необходимостью решения множества задач. В процессе движения и выхода на программное положение каждого элемента могут иметь место отскоки, деформации и колебания конструкций. Время затухания этих колебаний определит быстродействие манипулятора и точность выхода исполнительного органа в рабочую зону.



Рис. 2. Упрощенная рычажная (шарнирная) кинематическая схема

сервисного манипулятора

Создание манипуляторов требует преодоления значительных трудностей, связанных с отсутствием универсальных методик и работой со сложными уравнениями. Становится ясно, что переход к объемным математическим моделям часто осложняет процесс принятия физически осмысленных решений. На это указывают многие авторы, к примеру, [14]. В статье [15] рассмотрены основные конструктивные особенности промышленных роботов, а также выявлены основные показатели точности промышленных роботов, причины их возникновения. Очевидно, что с учетом конструктивных особенностей любого манипулятора точность

позиционирования манипулятора в наибольшей степени следует связать с устойчивостью первого в цепочке звеньев - корневого. Малейшие колебания могут инициировать значительный дисбаланс манипулятора в целом. Именно устойчивость корневого звена определит качество применения всего устройства. Поэтому предлагается рассмотреть состояния равновесия именно этого звена. Это позволит исследовать вопросы, связанные как с параметрами, так и ограничениями при использовании корневого звена.

Вопросы изучения устойчивости звеньев целесообразно начинать с земных условий. Рассмотрим наиболее типичный вариант кинематической схемы сервисного манипулятора, состоящей из вращательных пар. Как и в типовых схемах, рассматриваем начальное звено, связанное со стойкой (основанием) вращательной кинематической парой, имеющей одну степень подвижности. Несмотря на достаточную простоту, такая схема может оказаться предпочтительной в различных условиях. Это связано, в первую очередь, с тем, что создание схемы с использованием вращательных элементов потребует меньших затрат мощности, чем, к примеру, при применении в манипуляторе поступательных пар.

Современные манипуляторы должны создаваться с соблюдением требований к их устойчивости. Звено (стержень), имеющее жесткую конструкцию, закреплено одним концом в упругом шарнире корня манипулятора, а другой его конец нагружается вертикальной силой P (рис. 3). В исходном нагруженном состоянии ось стержня строго вертикальна. При отклонениях стержня сила P сохраняет вертикальное направление. Момент в упругом шарнире, как правило, считается пропорциональным углу отклонения стержня φ и равным $c\varphi$, где c - жесткость

упругого шарнира. Несомненно, что в практическом плане вызывает интерес способность конструкции принимать устойчивое положение, исключаящее дальнейшее развитие качаний и колебаний начального звена и, за счет этого, всей конструкции манипулятора в целом.

С учетом приоритета влияния корневого звена манипулятора предлагается исследовать на устойчивость равновесные положения стержня при диапазоне отклонений от $-\pi$ до π . Критерий устойчивости равновесного положения для систем с голономными и стационарными связями, находящимися в консервативном силовом поле, определяет теорема Лагранжа-Дирихле [16]. Согласно этой теореме, равновесные положения консервативной системы, в которых ее потенциальная энергия достигает минимума, устойчивы. Известно, что критерий Лагранжа-Дирихле является достаточным, но не необходимым условием устойчивости равновесного положения системы в поле консервативных сил, т.е. позволяет утверждать, что равновесное положение консервативной системы устойчиво, если ее потенциальная энергия имеет минимум в этом положении. Если потенциальная энергия системы в равновесном положении не имеет минимума, то в этом случае применяют теоремы А.М.Ляпунова или Н.Г.Четаева о неустойчивости равновесия [17, 18, 19].

Оценивание устойчивости корневого звена манипулятора

Движение звена будем рассматривать в прямоугольной декартовой системе координат (плоский вариант), представленной на рисунке 3.

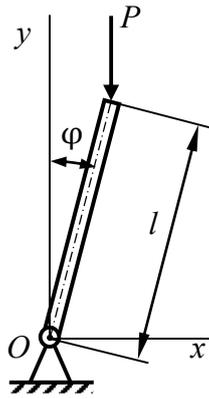


Рис. 3. Положение отклоненного стержня в системе координат (xOy)

За обобщенную координату примем угол φ , за нулевое положение системы, при котором потенциальная энергия системы равна нулю, - вертикальное положение стержня, соответствующее $\varphi = 0$. В этом случае потенциальную энергию системы найдем как работу сил при перемещении стержня из вертикального положения в нулевое.

Потенциальная энергия Π_I внешней силы \vec{P} будет равна

$$\Pi_I = \int_{M_1}^{M_0} \vec{P} d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_0} r_y a y = -P \int_{y_1}^{y_0} dy = -P y \Big|_{y_1}^{y_0}.$$

Так как $y_0 = l$, $y_1 = l \cos \varphi$, то

$$\Pi_I = -P(y_0 - y_1) = -Pl(1 - \cos \varphi). \quad (3.1)$$

Потенциальная энергия деформации Π_{II} упругого шарнира

$$\Pi_{II} = \int_{\varphi}^0 (-c\varphi) d\varphi = \frac{-c\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi}^0 = \frac{1}{2} c\varphi^2. \quad (3.2)$$

Следовательно, потенциальная энергия механической системы

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}c\varphi^2 - Pl(1 - \cos\varphi). \quad (3.3)$$

Определим первую производную от потенциальной энергии по обобщенной координате φ

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = c\varphi - Pl\sin\varphi. \quad (3.4)$$

Приравнивая нулю первую производную от потенциальной энергии по φ , приходим к уравнению, из которого определяются положения равновесия

$$c\varphi - Pl\sin\varphi = 0. \quad (3.5)$$

Полученное уравнение имеет два независимых решения:

1. $\varphi = 0$ при любом значении модуля силы \mathbf{P} ;
 2. $P = \frac{c\varphi}{l\sin\varphi}$.
- (3.6)

Исследуем устойчивость положений равновесия стержня, соответствующих двум независимым решениям (3.6). Найдем вторую производную от потенциальной энергии $\Pi(\varphi)$ по обобщенной координате φ

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = c - Pl\cos\varphi. \quad (3.7)$$

По знаку второй производной устанавливаем, какие из найденных положений равновесия устойчивы. Первое из них соответствует вертикальному положению стержня при $\varphi = 0$. Согласно выражению (3.7), для этого положения равновесия получаем

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} = c - Pl. \quad (3.8)$$

При $P < c/l$ ($c - Pl > 0$) потенциальная энергия минимальна, и вертикальное положение стержня устойчиво, при $P > c/l$ ($c - Pl < 0$) потенциальная энергия максимальна, и вертикальное положение стержня неустойчиво.

Для исследования устойчивости стержня в отклоненном положении подставим второе из решений (3.6) в выражение (3.7)

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{P=\frac{c}{l} \frac{\varphi}{\sin \varphi}} = c \left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right). \quad (3.9)$$

Если $|\varphi| < \pi$, то вторая производная от потенциальной энергии положительна, поскольку тогда $\varphi < \operatorname{tg} \varphi$, и отклоненное положение стержня, которое возможно при $P > c/l$, всегда устойчиво.

Остался невыясненным вопрос: устойчиво или неустойчиво положение равновесия, соответствующее точке пересечения решений (рис. 4)

$$\varphi=0, \quad P=c/l. \quad (3.10)$$

В этой точке вторая производная от потенциальной энергии по φ равна нулю.

Последовательно дифференцируя, находим

$$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \varphi^3} = Pl \sin \varphi, \quad \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \varphi^4} = Pl \cos \varphi, \quad (3.11)$$

Очевидно, что в исследуемой точке третья производная равна нулю, а четвертая – положительна, поэтому потенциальная энергия минимальна, и неотклоненное положение равновесия стержня (3.11) устойчиво.

Результаты оценивания устойчивости корневого звена

Кривые, соответствующие решениям (3.6) при $|\varphi| < \pi$, показаны на рис. 4. По оси ординат отложены значения безразмерной силы $\lambda = Pl / c = \varphi / \sin\varphi$. Как установлено, исходное вертикальное положение равновесия стержня остается устойчивым до тех пор, пока соблюдается неравенство $P \leq c/l$. Поэтому при нагружении до значения $\lambda = 1$ стержень звена остается в исходном вертикальном положении. При малейшем превышении указанного значения исходное вертикальное положение равновесия стержня становится неустойчивым, и любые сколь угодно малые возмущения непременно должны вывести стержень из этого состояния. Но поскольку в окрестности точки А, соответствующей $\lambda = 1$, имеется другое устойчивое отклоненное положение равновесия, то стержень и перейдет в это новое состояние.

При $\lambda > 1$ стержень не сможет остаться в исходном вертикальном положении и отклонится вправо или влево.

Результаты моделирования устойчивости по углу наклона звена определяются зависимостью между углом наклона φ и безразмерной силой λ . Результаты расчета представлены в таблице 1. Следует обратить внимание на точку А (рис. 4), в которой ось ординат, соответствующая исходному положению равновесия, пересекается с кривой $\lambda = \varphi / \sin\varphi$, соответствующей отклоненному положению. Заметим, что точки, в которых решение расщепляется на две ветви, называются точками бифуркации, или точками ветвления решения. Точки, при переходе через которые исходное состояние равновесия перестает быть устойчивым, называют критическими точками, а

соответствующие им значения нагрузок - критическими значениями нагрузок или критическими нагрузками

$$(P_{кр} = c / l).$$

таблица 1. Результаты расчета

φ (от 0 до π)	0,1	1,05	1,38	1,6	1,78	1,9	2,01	2,05	2,15	2,26
λ	1,01	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
φ (от 0 до $-\pi$)	-0,1	-1,05	-1,38	-1,6	-1,78	-1,9	-2,01	-2,05	-2,15	-2,26
λ	1,01	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
φ (от 0 до π)	2,3	2,35	2,38	2,41	2,45	2,48	2,53	2,55	2,58	
λ	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	
φ (от 0 до $-\pi$)	-2,3	-2,35	-2,38	-2,41	-2,45	-2,48	-2,53	-2,55	-2,58	
λ	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	

Таким образом, результаты исследования возможности перехода в неустойчивое состояние позволяют утверждать следующее:

- на этапе проектирования необходимо предусмотреть ограничение осевой нагрузки на корневое звено по абсолютной величине или направлению;
- при невозможности ограничения угла отклонения следует вести речь об усилении конструкции.

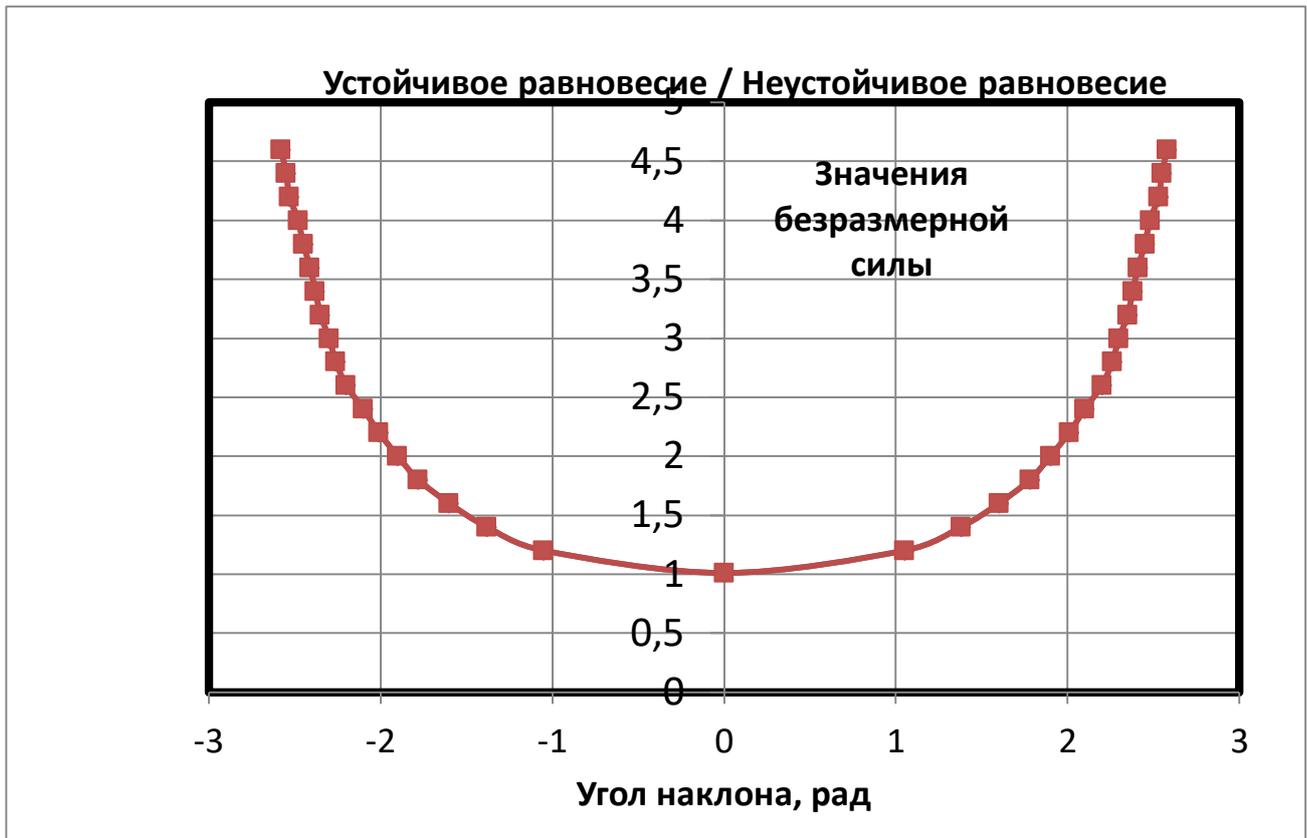


Рис. 4. Результаты моделирования устойчивости по углу наклона звена

$$(\lambda = \varphi / \sin\varphi)$$

Выводы

Анализ факторов, влияющих на точность позиционирования звеньев манипулятора, однозначно свидетельствует о том, что при потере устойчивости корневого звена невозможно позиционирование рабочего органа.

Известны работы, которые связаны с исследованием аналогичных вопросов. Так в работе [20] получено выражение для определения критической силы, определяющей условие потери устойчивости звеном. Выражение применимо только для одного положения звена при нулевом отклонении.

В работе [21] рассматривается маятник со спиральной пружиной, и определяются его возможные положения равновесия. Рассматриваются варианты определения возможных случаев равновесия. При этом, оба рассмотренных варианта не связаны с исследованием устойчивости найденных положений равновесия.

Представленная работа подтверждает необходимость сохранения устойчивости состояния равновесия корневого звена для обеспечения позиционирования манипулятора в соответствии с конкретной программой управления. В результате анализа устойчивости состояния равновесия корневого звена манипулятора определены устойчивые и неустойчивые положения во всем диапазоне изменений его угла поворота. Результаты представлены на рисунке 4.

Исследование устойчивости корневого звена можно легко соотнести с этапами и задачами моделирования динамики робототехнических систем [22]. Полученные результаты могут использоваться для дальнейшего синтеза структурной и кинематической схем манипулятора, позволяя рассматривать все возможные решения.

Список источников

1. Ардашов А.А., Сасункевич А.А., Софьин А.П., Федорова Л.А. Обоснование геометрических параметров звеньев манипулятора космического робота // Труды Военно-космической академии имени А.Ф.Можайского. 2018. № 660. С. 130-137.

2. Сасункевич А.А., Софьин А.П., Федорова Л.А. Факторы космического пространства и защита космических роботов от внешнего воздействия // Труды Военно-космической академии имени А.Ф.Можайского. 2017. № 656. С. 170-175.
3. Стогний М.В., Щеглов Г.А. Анализ динамики захвата крупногабаритного объекта космического мусора пассивным манипулятором спутника-утилизатора // XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых - пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. - С. 352-353.
4. Трофимова Г.Н., Попова Л.В. Влияние упругости звеньев на точность позиционирования манипулятора для радиотерапии // Международная научно-техническая конференция "Информатика и технологии. Инновационные технологии в промышленности и информатике" ("МНТК ФТИ-2017"): сборник трудов. – М.: Московский технологический университет, 2017. С. 186-188.
5. Ефимова П.А. Динамическая модель космического манипуляционного робота // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. №1. С. 173-179.
6. Глумов В.М., Рутковский В.Ю. Обеспечение устойчивости движения космического робота при манипуляционном функционировании // Материалы XIV Международной научной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)». – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2018. С. 112-115.
7. Нурахметов Б.К., Сартаев К.З., Мырзагельдиева Ж.М., Жумашева Ж.Т. Кинематика, устойчивость и динамика пространственного упругодеформируемого

механизма // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2017. №5 (371). С. 189-195.

8. Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Ефимова П.А. Дистанционное управление манипуляционными роботами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. №4(47). С. 34-43. DOI: [10.17072/1993-0550-2019-4-34-43](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2019-4-34-43)

9. Масанов Ж.К., Нурахметов Б.К., Сартаев К.З., Мырзагельдиева Ж.М. Упругая устойчивость манипулятора типа трипод //Международная научно-практическая конференция«Повышение качества образования, современные инновации в науке и производстве»:сборник трудов. – Прокопьевск: Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева, 2016. С. 157-159.

10. Однокурцев К.А., Власевский А.А., Лукин П.А. Расчет перемещений приводов манипуляторов при использовании различных методов позиционирования // Труды МАИ. 2013. №66. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=40286>

11. Байков А.Е. Исследование устойчивости положения равновесия трехзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой // Труды МАИ. 2015. №80. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=56951>

12. Ким Н.В., Чеботарев Ю.С. Применение роботов-манипуляторов на борту космических аппаратов // XXI Международная конференция по науке и технологиям Россия-Корея-СНГ: сборник трудов. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2021. С. 36-39.

13. Блехман И.И. Загадки теории динамических систем: на границе механики // Вестник научно-технического развития. 2008. №3(7). С. 2-8.

14. Смирнов П.А., Яковлев Р.Н. Решение прямой и обратной задач кинематики в системе позиционирования звеньев манипулятора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. №12. С. 732-739. DOI: [10.17587/mau.20.732-739](https://doi.org/10.17587/mau.20.732-739)
15. Баланев Н.В., Янов Р.А. Анализ факторов, влияющих на точность позиционирования промышленного робота и методы обеспечения заданной точности // Достижения науки и образования. 2016. №1(2). С. 11-14.
16. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Пер. с франц. - М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. Т. 2. -594 с.
17. Ляпунов А.М. Избранные труды. - М.: АН СССР, 1948. - 542 с.
18. Андреев А.С., Перегудова О.А. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с бесконечным запаздыванием // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. №4. С. 469-493. DOI: [10.31857/S0032823521040020](https://doi.org/10.31857/S0032823521040020)
19. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. - М.: Наука, 1990. - 176 с.
20. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. - М.: Наука, 1991. - 256 с.
21. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Динамика. - М.: Наука, 1979. Т. 2. - 544 с.
22. Алпатов А.П., Белоножко П.А., Белоножко П.П. и др. Моделирование динамики космических манипуляторов на подвижном основании // Экстремальная робототехника. 2013. Т. 1. №1. С. 250-264.

References

1. Ardashov A.A., Sasunkevich A.A., Sofin A.P., Fedorova L.A. *Trudy Voennokosmicheskoi akademii imeni A.F.Mozhaiskogo*, 2018, no. 660, pp. 130-137.
2. Sasunkevich A.A., Sofin A.P., Fedorova L.A. *Trudy Voennokosmicheskoi akademii imeni A.F.Mozhaiskogo*, 2017, no. 656, pp. 170-175.
3. Stognii M.V., Shcheglov G.A. *XLV Akademicheskie chteniya po kosmonavtike, posvyashchennye pamyati akademika S.P. Koroleva i drugikh vydayushchikhsya otechestvennykh uchenykh - pionerov osvoeniya kosmicheskogo prostranstva: sbornik tezisov*. Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2021, pp. 352-353.
4. Trofimova G.N., Popova L.V. *Mezhdunarodnaya nauchno-tehnicheskaya konferentsiya "Informatika i tekhnologii. Innovatsionnye tekhnologii v promyshlennosti i informatike" ("MNTK FTI-2017")*: sbornik trudov. Moscow, Moskovskii tekhnologicheskii universitet, 2017, pp. 186-188.
5. Efimova P.A. *Protsessy upravleniya i ustoichivost'*, 2015, vol. 2, no. 1, pp. 173-179.
6. Glumov V.M., Rutkovskii V.Yu. *Materialy XIV Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii «Ustoichivost' i kolebaniya nelineinykh sistem upravleniya (konferentsiya Pyatnitskogo)»*, Moscow, Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN, 2018. pp. 112-115.
7. Nurakhmetov B.K., Sartaev K.Z., Myrzagel'dieva Zh.M., Zhumasheva Zh.T. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Tekhnologiya tekstil'noi promyshlennosti*, 2017, no. 5 (371), pp. 189-195.
8. Kulakov F.M., Alferov G.V., Efimova P.A. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2019, no. 4(47), pp. 34-43. DOI: [10.17072/1993-0550-2019-4-34-43](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2019-4-34-43)

9. Masanov Zh.K., Nurakhmetov B.K., Sartaev K.Z., Myrzagel'dieva Zh.M. *Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Povyshenie kachestva obrazovaniya, sovremennye innovatsii v nauke i proizvodstve»*: sbornik trudov. Prokop'evsk, Kuzbasskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet im. T.F. Gorbacheva, 2016, pp 157-159.
10. Odnokurtsev K.A., Vlasevskii A.A., Lukin P.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 66. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=40286>
11. Baikov A.E. *Trudy MAI*, 2015, no. 80. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=56951>
12. Kim N.V., Chebotarev Yu.S. *XXI Mezhdunarodnaya konferentsiya po nauke i tekhnologiyam Rossiya-Koreya-SNG*: sbornik trudov. Novosibirsk, Novosibirskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2021, pp. 36-39.
13. Blekhman I.I. *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya*, 2008, no. 3(7), pp. 2-8.
14. Smirnov P.A., Yakovlev R.N. *Mekhanotronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 12, pp. 732-739. DOI: [10.17587/mau.20.732-739](https://doi.org/10.17587/mau.20.732-739)
15. Balanov N.V., Yanov R.A. *Dostizheniya nauki i obrazovaniya*, 2016, no. 1(2), pp. 11-14.
16. Lagranzh Zh. *Analiticheskaya mekhanika* (Analytical mechanics), Moscow, Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1950, vol. 2, 594 p.
17. Lyapunov A.M. *Izbrannye trudy* (Selected works), Moscow, AN SSSR, 1948, 542 p.
18. Andreev A.S., Peregodova O.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2021, vol. 85, no. 4, pp. 469-493. DOI: [10.31857/S0032823521040020](https://doi.org/10.31857/S0032823521040020)

19. Chetaev N.G. *Ustoichivost' dvizheniya* (Stability of movement), Moscow, Nauka, 1990, 176 p.
20. Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* (Introduction to the theory of mechanical vibrations), Moscow, Nauka, 1991, 256 p.
21. Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki. Dinamika* (Course of theoretical mechanics. Dynamics), Moscow, Nauka, 1979, vol. 2, 544 p.
22. Alpatov A.P. Belonozhko P.A., Belonozhko P.P. et al. *Ekstremal'naya robototekhnika*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 250-264.

Статья поступила в редакцию 27.04.2022

Статья после доработки 29.04.2022

Одобрена после рецензирования 15.05.2022

Принята к публикации 21.06.2022

The article was submitted on 27.04.2022; approved after reviewing on 15.05.2022; accepted for publication on 21.06.2022.