На правах рукописи

Халина Анастасия Сергеевна

# ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ, ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ

Специальность 05.13.01 —
системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016 год

Работа выполнена на кафедре «Математическая кибернетика»
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»
(Московский авиационный институт, МАИ)

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор
**Хрусталев Михаил Михайлович**

**Официальные оппоненты:** **Пакшин Павел Владимирович,**
доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика» Арзамасского политехнического института (филиал) ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева»

**Кожевников Александр Сергеевич,**
кандидат физико-математических наук,
ведущий инженер
филиала ФГУП «ГОСНИИАС «ЦОД»

**Ведущая организация:** **ФГБУН «Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН»**

Защита состоится 23 декабря 2016 года в 10-00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института или по ссылке https://goo.gl/CSWWe1

Автореферат разослан «__» __________ 2016 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Учёный совет МАИ

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04, кандидат физико-математических наук, доцент ________________ Северина Наталья Сергеевна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Объектом исследования** диссертационной работы являются линейные и квазилинейные диффузионные стохастические системы, функционирующие на неограниченном интервале времени, при неполной информации о состоянии с усредненным по времени квадратичным критерием качества.

**Актуальность** исследований в этом направлении обусловлена необходимостью наиболее точного описания объекта управления. В реальной ситуации зачастую невозможно получить полную информацию о динамике управляемого объекта и случайных факторах, действующих на него. Поэтому в теории управления стали развиваться направления, связанные с решением задач оптимизации динамических систем в условиях неопределенности, в частности управление стохастическими системами. В прикладных задачах линейные стохастические системы появляются как аппроксимация нелинейных в некоторой малой окрестности заданного движения. Но если, например, в нелинейном уравнении Ито линеаризовать коэффициенты сдвига и диффузии, то в общем случае мы получим именно квазилинейную систему, а не линейную. Квазилинейные системы, в частности, дают возможность учитывать шумы в матрицах управляемой системы и мультипликативные ошибки реализации управления. Разработка методов, позволяющих решать задачи управления квазилинейными системами, существенно расширяет класс прикладных задач применения теоретических исследований.

Существует обширный класс динамических систем, в которых информация о положении в фазовом пространстве является неполной и ограничена измерительным устройством, которым располагает система. Возможности управления такими системами существенно зависят от той информации, которая может быть получена путем измерения и обработки информации. В диссертационной работе под управлением при неполной информации о состоянии системы понимается управление по части компонент вектора состояния. Такая постановка задачи включает в себя и случай, когда вектор состояния системы состоит из компонент объекта управления, измерительного устройства, идентификатора состояния системы и формирующего фильтра возмущений. Управление по части компонент вектора состояния весьма актуально при проектировании струйных управляющих устройств, предполагающих использование минимального количества струйных элементов. Такие системы могут быть использованы в качестве резервных систем управления летательными аппаратами.

**Целью работы** является разработка методов синтеза оптимальных стратегий управления стохастическими линейными и квазилинейными системами диффузионного типа, функционирующими на неограниченном интервале времени, в случае измерения части компонент вектора состояния.

Для достижения выбранной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. получить условия оптимальности в задачах синтеза стратегий оптимального управления при неполной информации о векторе состояния:

- линейными стохастическими системами с аддитивным возмущениями;

- квазилинейными стохастическими системами, включающими возможность учета шумов в матрицах управляемой системы и мультипликативные ошибки реализации управления;

2. получить условия второго порядка в задаче оптимизации квазилинейных стохастических систем;

3. разработать численные методы решения задач п. 1 и 2;

4. провести решение нескольких прикладных задач, в том числе в области авиационной и ракетно-космической техники, с применением предложенных теоретических результатов.

**Методы исследования.** Для решения поставленных в диссертации задач используются современные методы системного анализа, математической теории управления, теории случайных процессов, вариационного исчисления, теории дифференциальных уравнений, теории оптимизации, функций Ляпунова-Лагранжа и численные методы.

**Достоверность результатов** обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены новые результаты: необходимые условия оптимальности линейного регулятора в задаче оптимизации линейной стохастической системы, достаточные условия стабильности и необходимые условия оптимальности квазилинейной стохастической системы, функционирующих на неограниченном интервале времени при неполной информации о векторе состояния. Получены условия второго порядка в задаче оптимизации параметров квазилинейных стохастических систем. Введены новые понятия: вполне возмущаемости системы, с помощью которого исследуется вопрос единственности решения задачи стабилизации линейной стохастической системы; облик системы – понятие, позволяющее рассматривать общую постановку задачи, когда оптимизируемыми параметрами могут выступать параметры объекта управления, параметры среды, в которой объект функционирует, и параметры алгоритма управления. Решена задача оптимальной стабилизации движения малого беспилотного летательного аппарата в неспокойной атмосфере.

**Практическая ценность** работы состоит в том, что ее теоретические результаты могут служить основой для разработки программно-алгоритмического обеспечения решения прикладных задач в областях авиационной и ракетно-космической техники. Представленные условия оптимальности позволяют, в частности, решать следующие задачи оптимального управления:

- решать задачи оптимального управления при наличии мультипликативных возмущений и ошибок реализации управления;
- при синтезе оптимального управления учитывать шумы в матрице управляемой системы и ошибки измерений переменных состояния;
- оценивать проигрыш по критерию в результате отказа от измерения части компонент вектора состояния;
- решать задачи оптимального управления системами, в которых управление осуществляется не с помощью компьютера, а за счет реакции конструкции системы на изменение переменных состояния.

Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 20166114945 (12.05.2016 г.), позволяющей производить расчет оптимального управления малым беспилотным летательным аппаратом в неспокойной атмосфере.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: 11-я, 12-я и 14-я международные конференции «Авиация и космонавтика» (Россия, Москва, 2012, 2013, 2015 гг.), Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике-2013» (Россия, Москва, 2013 г.), XII Всероссийское совещание по проблемам управления (Россия, Москва, 2014 г.), Международная конференция по математической теории управления и механике (Россия, Суздаль, 2015 г.), 42-я Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения-2016» (Россия, Москва, 2016 г.), XII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Россия, Москва, 2016 г.).

Материалы диссертации представлялись на конференциях: Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2013) (Украина, Алушта, 2013 г.).

Работа поддержана грантами РФФИ (13-08-01120, 15-07-09091, 16-08-00472) и государственным финансированием Минобрнауки РФ (задание №1.1191.201К).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 3 научных статьях [1–3] в журналах, входящих в перечень ВАК, в 3 статьях [5–7] в различных журналах, сборниках и материалах конференций, в сборниках тезисов докладов конференций [8–15] на русском и английском языках. Общее число публикаций — 14. Зарегистрирована программа для ЭВМ [4].

**Структура и объём диссертации.** Диссертация содержит введение, четыре главы основной части, заключение и список используемой литературы. Работа изложена на 101 странице, включая 16 рисунков, 1 таблицу и список литературы, содержащий 72 наименования.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности 05.13.01.** В диссертации методы системного анализа применены для исследования сложных технических систем, проведена разработка методов и алгоритмов решения задач стабилизации и оптимального управления стохастическими динамическими системами.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дано обоснование актуальности выбранной автором темы диссертации, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, проведен обзор известных методов оптимизации систем управления с учетом доступности информации об объекте управления.

Рассматриваются линейные и квазилинейные стохастические системы, функционирующие на неограниченном интервале времени, при неполной информации о состоянии. Квазилинейные динамические стохастические системы отличаются от линейных тем, что в описывающем их уравнении Ито не только коэффициенты сноса, но и коэффициенты диффузии (коэффициенты при дифференциале винеровского процесса) зависят линейно от переменных состояния и управлений.

Для решения поставленных в диссертационной работе задач использовался метод функций Ляпунова-Лагранжа, обобщающий метод функций Кротова В.Ф. на стохастические системы. Этот метод наметился еще в ранних работах Хрусталева М.М. при изучении проблемы оптимального управления частично наблюдаемым диффузионным процессом и получил дальнейшее развитие в его работах по стохастическим дифференциальным играм с неполной информацией.

Метод функций Ляпунова-Лагранжа состоит в использовании совокупности функций, аналогичных вектор-функциям Ляпунова в теории устойчивости. Но в рассматриваемом круге проблем эти функции играют двоякую ролью. С одной стороны, они, как и функции Ляпунова, подменяют проблему изучения поведения траекторий динамической системы изучением их поведения на этих траекториях. С другой – они являются нелинейными нелокальными аналогами классических множителей Лагранжа, предназначенных для полного снятия ограничений.

Важным результатом применения функций Ляпунова-Лагранжа является снятие всех нелокальных ограничений, в том числе и информационных, и полная локализация условий равновесия – доведение их до совокупности уравнений (или неравенств) для этих функций и семейства конечномерных задач, решаемых в фиксированный момент времени локально в каждой точке пространства состояний, аналогично тому, как это делается в условиях принципа максимума Понтрягина Л.С. или динамического программирования для классической задачи оптимального управления.

Рассматриваемые системы функционируют на неограниченном интервале времени, что упрощает исследование, как и в теории Летова А.М. В связи с этим использование стандартного квадратичного критерия малосодержательно. Если, например, критерий оптимальности представляет собой расход топлива или энергии на демпфирование отклонений от желаемого процесса, то на бесконечном интервале времени этот расход будет бесконечным вследствие постоянного действия случайных возмущений. Более содержателен критерий, характеризующий собой расход величины, определяющей оптимальность процесса, в единицу времени. Такого рода критерий для систем с непрерывным временем, по-видимому, впервые был использован Н. Винером в задаче синтеза оптимальной передаточной функции из условия минимума среднеквадратичной ошибки.

Важную роль для получения условий оптимальности процессов управления стохастическими системами на неограниченном интервале времени играет функционал Лагранжа, предложенный в работах Хрусталева М.М. Использование функционала Лагранжа дает возможность рассматривать вместо исходного критерия достаточное богатое многопараметрическое представление оптимизируемого функционала.

Диссертационная работа представляет собой часть комплекса научных исследований, проводимых под руководством Хрусталева М.М., по созданию ***теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов стохастических систем (АКОРСС)***, аналога теории АКОР для детерминированных систем.

**В первой главе** для удобства изложения приводятся используемые результаты из работ Хрусталева М.М., адаптированные для рассматриваемых в диссертации задач.

**Во второй главе** рассматривается задача синтеза оптимальных регуляторов ***линейных стохастических систем*** при неполной информации о состоянии.

Пусть поведение модели объекта управления описывается линейным дифференциальным уравнением Ито вида

$$dx = (Ax + Bu)dt + Cdw, \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$ – вектор состояния системы; $u = (u_1, ..., u_{n_u})^{\mathrm{T}} \in R^{n_u}$ – вектор управления; $w = (w_1, ..., w_{n_w})^{\mathrm{T}} \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $t \in [0, +\infty)$ – время функционирования системы; $A$, $B$, $C$ – постоянные матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times n_u)$, $(n \times n_w)$ соответственно.

Минимизируемый критерий оптимальности имеет вид

$$J_\infty = \frac{1}{2} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_{R^n} f^c(x, u) P(t, dx) dt, \quad f^c(x, u) = x^{\mathrm{T}} Q x + 2u^{\mathrm{T}} S x + u^{\mathrm{T}} D u \tag{2.2}$$

где $f^c(x, u)$ – неотрицательная квадратичная форма; $Q$, $S$, $D$ – матрицы размера $(n \times n)$, $(n_u \times n)$, $(n_u \times n_u)$ соответственно; $D$ – симметрическая, положительно определенная матрица. Внутренний интеграл в (2.2) представляет собой математическое ожидание «мгновенных потерь». Вероятностная мера $P(t, \cdot)$ задает распределение состояния $x$ системы (2.1) в момент времени $t$. Предполагается, что начальная плотность распределения $p_0(x) = p(t_0, x)$ вектора состояния $x$ задана, гауссова и невырожденная.

Измерению и, соответственно, использованию при управлении доступны не все компоненты вектора состояния. Эти ограничения будем называть информационными. В общем случае каждая компонента вектора управления $u$ может зависеть лишь от своего, назначаемого априори, набора компонент вектора состояния $x$.

Используя достаточные условия равновесия по Нэшу, Хрусталевым М.М. были получены локальные условия равновесия первого порядка, составляющие содержание метода Лагранжа. Однако, полученные условия не являются необходимыми условиями оптимальности. Они представляют собой необходимые условия выполнения предположений теоремы, которая дает достаточные условия оптимальности. Экстремальной стабилизирующей стратегией называется (согласно терминологии работ Хрусталева М.М.) стратегия, удовлетворяющая этой линеаризации достаточных условий оптимальности.

Хрусталевым М.М. было показано, что для линейных систем, функционирующих на неограниченном интервале времени, с квадратичным критерием метод Лагранжа сводит проблему построения стратегии управления к решению системы матричных уравнений. Хрусталевым М.М. была получена система уравнений для определения экстремальной стабилизирующей стратегии $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, экстремального значения критерия $\bar{\gamma}$, вспомогательной матрицы $M$ размеров $n \times n$, матрицы множителей Лагранжа $K$, отвечающей за информационные ограничения, размеров $n_u \times n$ и ковариационной матрицы $\Gamma^\infty$ предельной плотности распределения

$$\bar{p}(x) = \bar{G} exp(-x^{\mathrm{T}} (\Gamma^\infty)^{-1} x/2). \tag{2.3}$$

Это следующая система уравнений:

$$\bar{G} = 1/\sqrt{(2\pi)^n |\Gamma^\infty|}, \tag{2.4}$$

$$A_{\bar{u}} \Gamma^\infty + \Gamma^\infty A_{\bar{u}}^{\mathrm{T}} + CC^{\mathrm{T}} = 0, \tag{2.5}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2} tr(CC^{\mathrm{T}} M), \tag{2.6}$$

$$MA_{\bar{u}} + A_{\bar{u}}^{\mathrm{T}}M + \bar{L}^{\mathrm{T}}D\bar{L} - S^{\mathrm{T}}\bar{L} - \bar{L}^{\mathrm{T}}S + Q = 0, \tag{2.7}$$

$$\bar{L} = D^{-1}(B^{\mathrm{T}}M + S - K(\Gamma^{\infty})^{-1}). \tag{2.8}$$

Здесь и далее $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, $M$ – симметрическая матрица. При этом в условиях (2.4) и (2.8) предполагается, что определитель $|\Gamma^{\infty}| \neq 0$. Равенство (2.4) – это условие нормировки предельной плотности (2.3).

Если все компоненты стратегии управления $\bar{u}(x)$ зависят от одних и тех же компонент вектора $x$, то матрица Лагранжа $K$ находится по следующему алгоритму. Строится диагональная информационная матрица $\Omega = diag(\omega_1, ..., \omega_n)$, где $\omega_\alpha = 0$, если компонента $x_\alpha$ вектора $x$ доступна измерению, и $\omega_\alpha = 1$, если $x_\alpha$ не может быть измерена. Матрица $K$ задается равенством

$$K = (B^{\mathrm{T}}M + S)\Omega(\Omega(\Gamma^{\infty})^{-1}\Omega + I - \Omega)^{-1}, \tag{2.9}$$

где $I$ – единичная матрица размеров $n \times n$. Если состав измерений различен для групп компонент стратегии $\bar{u}(x)$, то уравнения (2.8), (2.9) записываются для строк матриц $\bar{L}$ и $K$, соответствующих каждой группе, с использованием своей информационной матрицы $\Omega$.

**Теорема 2.1.** [Хрусталев М.М.] Стратегия $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, где $\bar{L}$ удовлетворяет информационным ограничениям, является экстремальной стабилизирующей стратегией управления, а экстремальное значение критерия (2.2) равно числу $\bar{\gamma} = tr(CC^{\mathrm{T}}M)/2$, если величины $\bar{G}, \bar{\gamma}$ и матрицы $\Gamma^{\infty}$, $\bar{L}$, $M$, $K$, $|\Gamma^{\infty}| \neq 0$ удовлетворяют системе уравнений (2.3)–(2.9) и матрица $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$ асимптотически устойчива.

Таким образом показано, что решением задачи АКОРСС является линейный регулятор. Однако, этот вывод сделан исходя из линеаризованных достаточных условий оптимальности регулятора (метод Лагранжа) и, строго говоря, приведенные условия (2.3)-(2.9) не являются необходимыми условиями его оптимальности.

В диссертационной работе постулируется, что допустимый класс стратегий управления – это линейные регуляторы $u(x)$ неполной обратной связи удовлетворяющие информационным ограничениям

$$x \to u(x) = -Lx : R^n \to R^{n_u}, \tag{2.10}$$

где $L$ – постоянная матрица размеров $n_u \times n$. Формально наличие информационных ограничений состоит в том, что элементы $L_{ij}$, $i = \overline{1, n_u}$ матрицы $\{L_{ij}\}$ равны нулю, если компонента $x_j$ вектора состояния $x$ не может использоваться в управлении $u(x)$. Множество таких допустимых матриц $L$ обозначим через $\mathcal{L}$.

Показано, что критерий (2.2) есть дифференцируемая функция конечного числа переменных – элементов матрицы $L$. И в классе линейных регуляторов получены ***строгие необходимые условия оптимальности***, приведенные в следующей теореме.

**Теорема 2.2.** Если матрица $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$ асимптотически устойчива и $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$ оптимальный линейный регулятор, минимизирующий критерий $J_\infty$, то выполнено условие

$$\left.\frac{\partial J_\infty}{\partial L} \cdot (I - \Omega)\right|_{L=\bar{L}} = (-B^T M - S + D\bar{L})\Gamma^{\infty} \cdot (I - \Omega) = 0, \tag{2.11}$$

где $I$ - единичная матрица, матрицы $\Gamma^\infty$ и $M$ определяются двумя уравнениями Ляпунова (2.5), (2.7), а оптимальное значение критерия $\bar{\gamma}$ определяется равенством (2.6) Здесь $\Gamma^\infty$ – предельная матрица ковариаций, $M$ – матрица множителей Лагранжа.

Также показано, что в случае невырожденной предельной (при $t \to +\infty$) матрицы ковариаций $\Gamma^\infty$ полученные условия оптимальности совпадают с условиями (2.3)-(2.9).

**Теорема 2.3.** Если матрица $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$ асимптотически устойчива и $|\Gamma^\infty| \neq 0$, то условия Хрусталева М.М. (2.3)-(2.9) эквивалентны условию (2.11) и являются необходимыми условиями оптимальности линейного регулятора $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$.

Введено новое понятие ***вполне возмущаемости системы***, аналогичное свойству вполне управляемости Калмана, которое позволило исследовать вопрос единственности оптимального регулятора.

**Определение 2.1.** Замкнутую систему (2.1) с управлением $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$, обеспечивающим асимптотическую устойчивость матрицы $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, назовем вполне возмущаемой, если предельная ковариационная матрица $\Gamma^\infty$ не вырождена.

Доказана следующая теорема.

**Теорема 2.4.** Для того, чтобы замкнутая система (2.1) с управлением $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$, обеспечивающим асимптотическую устойчивость матрицы $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, была вполне возмущаемой, необходимо и достаточно выполнение условия

$$rang(C, A_{\bar{u}}C, A_{\bar{u}}^2C, ..., A_{\bar{u}}^{n-1}C) = n.$$

Полученные условия (2.11) являются более общими, так как охватывают случай вырожденной предельной матрицы ковариаций $\Gamma^\infty$.

В общем случае $(\Gamma^\infty)^{-1}$ может не существовать. Мера $P(t,\cdot)$ при всех $t \in [t_0, \infty)$ гауссова и имеет плотность $p(t,x)$, предельная же мера $\bar{P}(\cdot) = \lim_{t\to\infty} P(t,\cdot)$ может не иметь плотности. В этом случае $\Gamma^\infty$ может оказаться вырожденной, т.е. $|\Gamma^\infty| = 0$. Если $\Gamma^\infty$ вырожденная, то для определения $\bar{L}$ имеется меньше уравнений, чем искомых коэффициентов регулятора. И может оказаться, что часть компонент матрицы $\bar{L}$ может быть задана произвольно с учетом лишь требования асимптотической устойчивости матрицы $A_{\bar{u}}$. Вырожденность $\Gamma^\infty$ означает детерминированность предельных значений некоторого количества компонент вектора состояния $x$ или их линейных комбинаций.

Показано, что если замкнутая система (2.1) является вполне возмущаемой, то уравнение (2.11) имеет единственное решение $L = \bar{L}$, задающее оптимальный линейный регулятор. Исследован случай не единственности решения задачи в случае, когда система (2.1) не является вполне возмущаемой, и получено условие, при котором оптимальная стратегия управления будет не единственной. Приводится пример системы, не являющейся вполне возмущаемой.

На основе полученных необходимых условий оптимальности (теорема 2.2) разработан ***градиентный численный метод*** синтеза оптимального регулятора. Его работа продемонстрирована на модельном примере при различных составах доступных измерению компонент объекта управления. Также рассмотрена прикладная задача стабилизации орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) с гибкой штангой.

**В третьей главе** рассматривается задача стабилизации и оптимизации ***ква-***

***зилинейных стохастических систем*** при неполной информации о состоянии.

Пусть поведение модели объекта описывается квазилинейным уравнением Ито

$$dx(t) = (A_0(\lambda)x(t) + B_0(\lambda))dt + \sum_{k=1}^{n_w}(A_k(\lambda)x(t) + B_k(\lambda))dw_k(t). \tag{3.12}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^{\mathrm{T}} \in R^n$ – случайное состояние системы; $w(t) = (w_1(t), ..., w_{n_w}(t))^{\mathrm{T}} \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $t \in [0, +\infty)$ – время; $A_k$, $B_k$ $(k = \overline{0, n_w})$ – матрицы размеров $n \times n$ и векторы-столбцы длины $n$ соответственно.

Постоянные во времени матрицы $A_k$, $B_k$ зависят от векторного параметра $\lambda \in \Lambda \subset R^{n_\lambda}$. В качестве этого векторного параметра могут выступать параметры алгоритма управления, конструктивные параметры объекта (например, жесткость шасси самолета, размеры крыла), а также параметры среды, в которой функционирует объект. Поэтому будем говорить, что этот векторный параметр определяет ***облик системы*** и подлежит оптимизации.

Уравнение (3.12) порождает вероятностную меру $P^*(t) = P(t, \cdot)$, задающую распределение случайного состояния $x$ системы (3.12) в момент времени $t \in [0, +\infty)$. Начальная мера $P_0(\cdot) = P(0, \cdot)$ состояния $x_0 = x(0)$ считается заданной и выбирается из множества $\mathcal{P}_0$, задаваемого условиями:

1. борелевская мера $P_0(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в $R^n$ (имеет плотность);

2. существуют конечные вектор математического ожидания и матрица ковариаций.

В работе Параева Ю.И. показано, что в этом случае текущая мера $P(t, \cdot)$ процесса также обладает свойствами 1, 2.

**Определение 3.1.** Обозначим через $\Lambda_a \subset \Lambda$ совокупность векторов $\lambda \in \Lambda$, для которых асимптотически устойчивы первый $m(t)$ и второй центральный $\Gamma(t)$ моменты. Уравнения для их предельных значений имеют вид

$$A_0 m^\infty + B_0 = 0, \tag{3.13}$$

$$A_0\Gamma^\infty + \Gamma^\infty A_0^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} A_k \Gamma^\infty A_k^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w}(A_k m^\infty + B_k)(A_k m^\infty + B_k)^{\mathrm{T}} = 0. \tag{3.14}$$

Решения уравнений (3.13) и (3.14) существуют, и эти решения единственны, если $\lambda \in \Lambda_a$. Кроме того, матрица $\Gamma^\infty$ неотрицательна (в смысле соответствующей квадратичной формы).

Задача состоит в оптимизации облика системы (3.12), исходя из условий минимума критерия оптимальности

$$\begin{gathered} J(P^*(\cdot), \lambda) = \frac{1}{2} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{R^n} f^c(x, \lambda) P(t, dx) dt, \\ f^c(x, \lambda) = x^{\mathrm{T}} Q(\lambda) x + 2S(\lambda)x + D(\lambda), \end{gathered} \tag{3.15}$$

где $x^{\mathrm{T}}Qx$ – неотрицательная квадратичная форма при любых $\lambda \in \Lambda$; $Q$ – матрица размеров $n \times n$; $S \in R^n$ – вектор-строка длины $n$; $D \in R^1$ – скаляр. Как и в первой главе внутренний интергал в (3.15) представляет собой математическое ожидание «мгновенных потерь». Здесь и далее для краткости записи матриц системы и критерия аргумент $\lambda$ будем опускать.

**Определение 3.2.** Допустимый вектор параметров $\lambda \in \Lambda$ назовем стабилизирующим, если для любого начального распределения $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$ состояния $x$ системы (3.12) и любого реализовавшегося в силу уравнения (3.12) процесса $P(t,\cdot)$, функционал (3.15) определен и принимает одно и то же постоянное значение $J(P^*(\cdot),\lambda) = \bar{\gamma}(\lambda)$. Величину $\bar{\gamma}(\lambda)$ в этом случае назовем стабильным значением критерия и будем говорить, что система (3.12) обладает свойством стабильности.

Для исследования стабильности вводится в рассмотрение линейно-квадратичная функция

$$\psi^0(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Mx + \xi^{\mathrm{T}}x,$$

играющая роль множителя Лагранжа, отвечающего за связь в виде дифференциального уравнения (3.12). Здесь $M$, $\xi$ – постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times 1$ соответственно.

**Теорема 3.2.** Если $\lambda \in \Lambda_a$, то векторный параметр $\lambda$ является стабилизирующим и стабильное значение критерия $\bar{\gamma}$ определяется выражением

$$\bar{\gamma}(\lambda) = B_0^{\mathrm{T}}\xi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}}MB_k + \frac{1}{2}D, \tag{3.16}$$

где вектор $\xi$ и матрица $M$ находятся из уравнений

$$\xi^{\mathrm{T}}A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}}MA_k + B_0^{\mathrm{T}}M + S = 0, \tag{3.17}$$

$$A_0^{\mathrm{T}}M + MA_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}}MA_k + Q = 0, \tag{3.18}$$

которые имеют решения, и эти решения единственны. Кроме того, матрица $M$ неотрицательна.

В связи с результатом теоремы 3.2 всюду далее будем считать, что векторный параметр $\lambda$ выбирается из множества $\Lambda_a$.

Из теоремы 3.2 следует, что в случае устойчивости по Параеву ($\lambda \in \Lambda_a$) системы (3.12) критерий (3.15) не зависит от начального распределения состояния $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$ и реализовавшегося процесса $P(t,\cdot)$ и является функцией конечного числа аргументов – компонент векторного параметра $\lambda \in \Lambda_a$

$$J(P^*(\cdot),\lambda) = F(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_a.$$

**Задача оптимизации облика системы.** Найти значение векторного параметра $\bar{\lambda} \in \Lambda_a$, удовлетворяющее условию

$$F(\bar{\lambda}) = \min_{\lambda \in \Lambda_a} F(\lambda).$$

Для этой задачи получены ***необходимые условия оптимальности***.

**Теорема 3.3.** Для того, чтобы векторный параметр $\bar{\lambda}$ был оптимальным, необходимо выполнение условия

$$\left.\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0, \tag{3.19}$$

где компоненты градиента $\partial F(\lambda)/\partial\lambda$ в точке $\lambda = \bar{\lambda}$ задаются равенством

$$\left.\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = \frac{1}{2} tr \left[\left(\frac{\partial A_0^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M + M \frac{\partial A_0}{\partial \lambda_i} + \sum_{k=0}^{n_w} \frac{\partial A_k^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M A_k + \sum_{k=0}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}} M \frac{\partial A_k}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i}\right)\Gamma^\infty\right] +$$
$$+ \left(\xi^T \frac{\partial A_0}{\partial \lambda_i} + \sum_{k=0}^{n_w} \frac{\partial B_k^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M A_k + \sum_{k=0}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M \frac{\partial A_k}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial B_0^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M + \frac{\partial S}{\partial \lambda_i}\right) m^\infty +$$
$$+ \frac{\partial B_0^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i}\xi + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n_w} \frac{\partial B_k^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M B_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M \frac{\partial B_k}{\partial \lambda_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \lambda_i}, \quad (i = \overline{0, n_\lambda}).$$

Здесь производная от матрицы по параметру $\lambda_i$, $i = \overline{1, n_\lambda}$ понимается как матрица производных от компонент исходной матрицы. Матрицы $m^\infty$, $\Gamma^\infty$, $\xi$, $M$ находятся из уравнений (3.13), (3.14), (3.17), (3.18), единственные решения которых существуют.

Оптимальное значение критерия вычисляется по формуле (3.16).

Полученные необходимые условия были конкретизированы для ***управляемой по выходу системы***, описываемой уравнением Ито вида

$$dx = (A_{0c}x + B_{0c}u + B_{0c}^1)dt + \sum_{k=1}^{n_w}(A_{kc}x + B_{kc}u + B_{kc}^1)dw_k, \tag{3.20}$$

при управлении $u$, задаваемом равенствами

$$u = -Ly + \nu, \qquad y = Cx. \tag{3.21}$$

Здесь $x \in R^n$ – состояние системы; $u \in R^{n_u}$ – вектор управления; $w \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $y \in R^{n_y}$ – выход системы; $A_{kc}$, $B_{kc}$, $B_{kc}^1$ $(k = \overline{0, n_w})$, $L$, $C$ – матрицы соответствующих размеров, не зависящие от вектора $\lambda$. Роль вектора параметров $\lambda$ играют элементы матрицы $L$ и компоненты вектора $\nu \in R^{n_\nu}$.

Критерий оптимальности задачи (3.20), (3.21) имеет вид аналогичный (3.15), при этом функция

$$f^c(x, \lambda) = x^{\mathrm{T}} Q_c x + 2x^{\mathrm{T}} S_c u + u^{\mathrm{T}} D_c u \geq 0,$$

где $Q_c$, $D_c$, $S_c$ – матрицы соответствующих размеров, причем $Q_c$, $D_c > 0$ симметрические.

Для управляемой по выходу системы (3.20), (3.21) также справедлива теорема 3.3, где матричные градиенты критерия по параметрам $L$ и $\nu$ имеют вид

$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)^T\right|_{L=\bar{L}, \nu=\bar{\nu}} = C[\Gamma^\infty \Pi_1 + m^\infty \Pi_2], \qquad \left.\left(\frac{\partial F}{\partial \nu}\right)^T\right|_{L=\bar{L}, \nu=\bar{\nu}} = -m^{\infty\mathrm{T}}\Pi_1 - \Pi_2,$$

где

$$\Pi_1 = -MB_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} A_{kc}^{\mathrm{T}} MB_{kc} - S_c + C^{\mathrm{T}} \bar{L}^{\mathrm{T}} (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} MB_{kc} + D_c),$$

$$\Pi_2 = -\xi^{\mathrm{T}} B_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{1\mathrm{T}} MB_{kc} - \bar{\nu}^{\mathrm{T}} (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} MB_{kc} + D_c),$$

$\partial F/\partial L = \{\partial F/\partial L_{ij}\}$ – матричный градиент критерия оптимальности $F$ задачи (3.20), (3.21) по компонентам матрицы $L = \{L_{ij}\}$, $i = \overline{1, n_u}$, $j = \overline{1, n_y}$, а $\partial F/\partial \nu = (\partial F/\partial \nu_1, \ldots, \partial F/\partial \nu_{n_u})^{\mathrm{T}}$.

Необходимое условие (3.19) будет состоять из двух равенств

$$C[\Gamma^{\infty}\Pi_1 + m^{\infty}\Pi_2] = 0, \qquad m^{\infty\mathrm{T}}\Pi_1 + \Pi_2 = 0, \tag{3.22}$$

а оптимальное значение критерия вычисляется по формуле (3.16), где матрицы $B_k$, $D$ определяются равенствами

$$B_k = B_{kc}\nu + B_{kc}^1, \quad k = \overline{0, n_w}, \qquad D = \nu^{\mathrm{T}} D_c \nu. \tag{3.23}$$

Представляет интерес частный случай системы (3.20) – ***симметрическая система***. Для симметрических управляемых по выходу систем доказано, что наряду с оптимальным регулятором вида (3.21) также оптимальным будет являться регулятор

$$u = -Ly, \qquad y = Cx, \tag{3.24}$$

который будет реализовывать то же значение критерия, что и (3.21).

Необходимые условия оптимальности регулятора (3.24) значительно упрощаются и состоят из одного матричного равенства, которое разрешимо относительно $L$, если матрица ковариаций не вырождена ($|\Gamma^{\infty}| \neq 0$) и матрица $L$ имеет полный ранг $n_y$.

Для ***систем с ПИД-регулятором*** указан метод сведения к системе общего вида (3.12), для которой могут быть записаны уравнения для первого (3.13) и второго центрального (3.14) моментов, исследована устойчивость системы и синтезирован оптимальный регулятор, что продемонстрировано на модельном примере.

В случае ***полной информации*** о состоянии системы (3.20), так что стратегия управления

$$x \to u(x) : R^n \to R^{n_u} \tag{3.25}$$

может зависеть от всех компонент вектора состояния $x$, получены не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности линейного регулятора

$$u = -Lx + \nu. \tag{3.26}$$

При этом регулятор оказывается оптимальным не только среди линейных, но и среди нелинейных из достаточно широкого класса. В связи с этим опишем класс допустимых стратегий вида (3.25) и несколько видоизменим постановку задачи оптимизации.

**Определение 3.4.** Через $D^{\infty}$ обозначим множество процессов $z_P(t) = (P(t,\cdot), u(\cdot))$, где функция $u(x)$ вида (3.25) измерима по Борелю на пространстве

$R^n$, а $P(t,\cdot)$ – борелевская вероятностная мера состояния $x$ системы (3.20) в момент $t \in [0,+\infty)$, удовлетворяющих условиям:

1) процесс $z_P(t)$ является обобщенным решением уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, при этом тождество (2.9) из работы Хрусталева М.М.[1] вдоль траектории $P(t,\cdot)$ должно выполняться не только для финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций $\eta(x)$, но и для любых линейно-квадратичных функций от $x$;

2) функция $P(t,\cdot)$ имеет математическое ожидание $m(t)$ и матрицу ковариаций $\Gamma(t)$, непрерывно дифференцируемые при всех $t \in [0,+\infty)$;

3) начальная мера $P_0^* = P(0,\cdot)$ выбирается любой, удовлетворяющей условию 2) при $t = 0$;

4) определен функционал

$$J(z_P(\cdot)) = \varliminf_{T\to+\infty} \zeta(T) = \lim_{T\to+\infty} \inf_{\tau\in[T,+\infty)} \zeta(\tau), \tag{3.27}$$

где

$$\zeta(T) = \frac{1}{2T}\int\limits_0^T \int\limits_{R^n} (x^{\mathrm T} Q_c x + 2u^{\mathrm T} S_c^{\mathrm T} x + u^{\mathrm T} D_c u) P_T(t,dx)dt,$$

а $P_T(t,\cdot)$ – сужение функции $P(t,\cdot)$ на интервал $[0,T]$, $T < +\infty$.

На множестве $D^\infty$ необходимо минимизировать функционал (3.27), принимающий значения из интервала $[0,+\infty]$ (допускаются бесконечные значения).

**Теорема 3.6.** Пусть процесс $z_P(t) = (P(t,\cdot), u(\cdot))$ из множества $D^\infty$, где $u(\cdot)$ стратегия вида (3.26), удовлетворяет условиям:

1. набор параметров $(L,\nu)$ стратегии $u(\cdot)$ принадлежит множеству $\Lambda_a$;
2. справедливы равенства

$$\Pi_1 = -MB_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} A_{kc}^{\mathrm T} M B_{kc} - S_c + C^{\mathrm T} L^{\mathrm T} (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm T} M B_{kc} + D_c) = 0, \tag{3.28}$$

$$\Pi_2 = -\xi^{\mathrm T} B_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{1\mathrm T} M B_{kc} - \nu^{\mathrm T} (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm T} M B_{kc} + D_c) = 0, \tag{3.29}$$

где матрицы $\xi$, $M$ удовлетворяют уравнениям (3.17), (3.18) соответственно.

Тогда:

а) процесс $z_P(t)$ минимизирует функционал (3.27) на множестве $D^\infty$;

б) любой другой процесс $\tilde z_P(t) = (\tilde P(t,\cdot), u(\cdot))$ из множества $D^\infty$, использующий ту же стратегию управления $u(x)$, что и процесс $z_P(t)$, также минимизирует функционал (3.27) на $D^\infty$, и значения критерия на процессах $\tilde z_P(t)$ и $z_P(t)$ совпадают;

в) оптимальное значение критерия вычисляется по формуле

$$J(z_P(\cdot)) = \lim_{T\to+\infty} \zeta(T) = B_0^{\mathrm T}\xi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm T} M B_k + \frac{1}{2} D, \tag{3.30}$$

[1] *Хрусталев М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информации о состоянии I. Достаточные условия равновесия // Изв. РАН. ТиСУ. — 1995. N 6. — С. 194–208.

где $B_k$, $D$ определяются равенствами (3.23).

г) уравнения (3.28), (3.29) разрешимы относительно параметров регулятора $L$ и $\nu$

$$L = (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c)^{-1} (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M A_{kc} + S_c^{\mathrm{T}} + B_{0c}^{\mathrm{T}} M)),$$

$$\nu = (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c)^{-1} (B_{0c}^{\mathrm{T}} \xi + \sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc}^{1});$$

д) условия (3.28), (3.29) гарантируют выполнение необходимых условий оптимальности (3.22).

Результат б) теоремы 3.6, в частности, означает, что оптимальное значение критерия (3.30) не зависит от начального условия $P_0(\cdot)$ и самого реализовавшегося процесса изменения меры $P(t,\cdot)$, и полностью определяется оптимальной стратегией $u(\cdot)$. В равенстве (3.30) фигурирует обычный предел в отличие от нижнего предела в (3.27). Это означает, что оптимальный процесс $z_P(t)$ обладает свойством эргодичности. Но этот процесс является наилучшим по критерию (3.27) не только среди процессов обладающих эргодичностью, но и среди неэргодичных.

В отличие от теоремы 3.3, в которой даются необходимые условия оптимальности регулятора вида (3.21) среди линейных, теорема 2.6 дает достаточные условия оптимальности такого регулятора полной обратной связи в классе нелинейных весьма общего вида.

На основе полученных необходимых условий разработан ***градиентный численный метод*** синтеза оптимальной системы, который был опробован на ряде модельных примеров, приведенных в диссертационной работе. А также рассмотрена прикладная задача стабилизации движения беспилотного летательного аппарата, относящаяся к авиационно-космическому комплексу.

**Пример 3.1.** Рассмотрим горизонтальное движение центра масс самолета в вертикальной плоскости при наличии ветровых возмущений. Введем следующие обозначения: $V$ – скорость самолета относительно земли; $\theta$ – угол наклона траектории; $h$ – высота полета; $V_x^w$, $V_y^w$ – соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ветра; $\alpha$ – угол атаки; $T_e$ – тяга. В результате линеаризации в окрестности номинальной траектории с учетом исходных данных для БПЛА Aerosonde получим систему линейных уравнений в приращениях:

$$d\Delta x = \left( \begin{pmatrix} -0.09 & -9.81 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 4.87 & 0.08 \\ 4.57 & 3\times 10^{-4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \right) dt + \\ + \begin{pmatrix} -0.09 & -0.15 \\ -0.02 & -0.14 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^w \\ V_y^w \end{pmatrix} dt.$$

Здесь $\Delta x = (\Delta V, \Delta\theta, \Delta h)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния летательного аппарата, $u = (\Delta\alpha, \Delta T_e)^{\mathrm{T}}$ – управление. Ветровые воздействия задаются модифицированными формирующими фильтрами типа Драйдена, в частности выражение для $V_x^w$ имеет вид

$$dV_x^w = \nu dt,$$
$$d\nu = -(a\nu + bV_x^w)dt - a^w\nu dw_1 - b^w V_x^w dw_2 + c^w dw_3,$$

где $w_i, i = \overline{1,3}$ – независимые стандартные винеровские процессы; $a, b$ – параметры модели ветра; $a^w, b^w, c^w$ – коэффициенты при винеровских процессах. В отличие от классического фильтра Драйдена, представляющего собой линейную стохастическую систему, модифицированный фильтр содержит слагаемые, отражающие неопределенность самой модели формирующего фильтра (квазилинейная система).

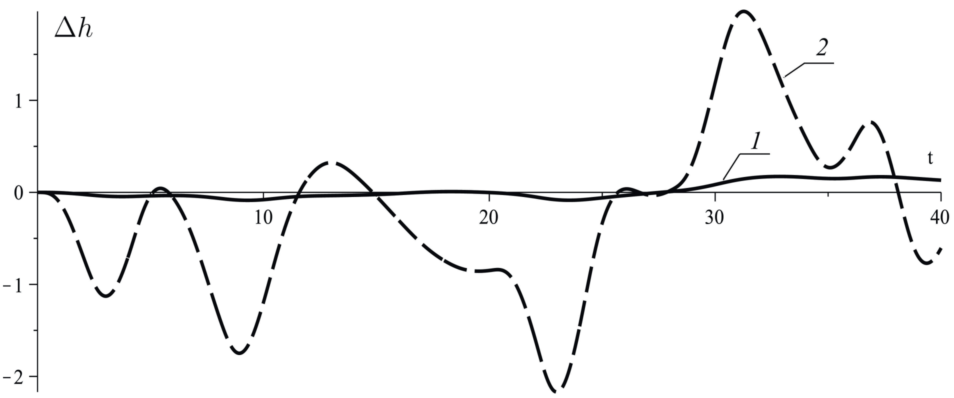


Рисунок 1. Приращение высоты $\Delta h$, м.

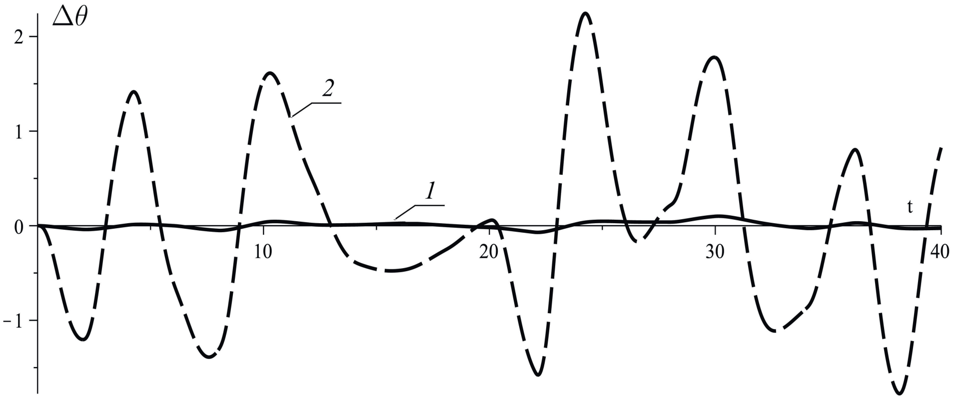


Рисунок 2. Приращение угла наклона траектории $\Delta\theta$, град.

Итак, движение БПЛА с учетом ветрового воздействия описывается системой уравнений, где $x = (\Delta V, \Delta\theta, \Delta h, V_x^w, \nu_1, V_y^w, \nu_2)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния. Полученная система является квазилинейной, так как коэффициенты диффузии линейно зависят от части компонент вектора состояния. Доступна измерению и может быть использована при управлении лишь часть компонент вектора состояния, а именно компоненты $\Delta V, \Delta\theta, \Delta h$.

Было найдено оптимальное управление согласно разработанной теории и оптимальное управление без учета ветрового воздействия в соответствии теорией АКОР. Было произведено их сравнение в стохастической задаче. На рисунках 1, 2 представлены отклонение высоты и отклонение угла наклона траектории от номинальных значений (1 – оптимальная стратегия стохастической системы, 2 – оптимальная стратегия детерминированной системы).

Значение критерия, подсчитанное по формуле (3.16), для летовского регулятора составило 5.04, а для оптимального регулятора стохастической системы – 2.23.

**В четвертой главе** приводятся полученные ***достаточные условия второго порядка*** в задаче оптимизации облика квазилинейной стохастической системы.

Рассматривалась квазилинейная стохастическая система вида (3.12) с квадратичным усредненным по времени критерием (3.15). В третьей главе работы была исследована устойчивость рассматриваемой системы, проведены уравнения для предельных значений первого (3.13) и второго центрального (3.14) моментов, подсчитано значение (3.16) критерия при фиксированном векторном параметре $\lambda = \bar{\lambda}$, где матрицы $\xi$ и $M$ находятся из уравнений (3.17), (3.18).

Было показано, что критерий есть дважды дифференцируемая функция конечного числа переменных, и выписан функционал Лагранжа

$$F(\lambda) = \bar{\gamma} + \frac{1}{2} tr[\Psi \Gamma^{\infty}] + \Theta m^{\infty},$$

совпадающий с исходным критерием (3.15) при любых $\xi$ и $M$ в силу выполнения ограничений

$$\Theta = A_0^{\mathrm{T}} M + M A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}} M A_k + Q = 0, \tag{4.31}$$

$$\Psi = \xi^{\mathrm{T}} A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M A_k + B_0^{\mathrm{T}} M + S = 0, \tag{4.32}$$

которые подменяют исходное ограничение (3.12), а $\bar{\gamma}$ определяется выражением (3.16).

При фиксированных значениях $M$, $\xi$ с учетом (3.16), (4.31), (4.32) выражение для компонент матрицы вторых производных в поставленной задаче имеет вид

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 F(\lambda)}{\partial \lambda_i \lambda_j}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = \frac{\partial^2 \bar{\gamma}}{\partial \lambda_i \lambda_j} + \frac{1}{2} tr \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda_i \lambda_j} \Gamma^{\infty} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \Gamma^{\infty}}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \Gamma^{\infty}}{\partial \lambda_i} \right] + \\ + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \lambda_i \lambda_j} m^{\infty} + \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_i} \frac{\partial m^{\infty}}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_j} \frac{\partial m^{\infty}}{\partial \lambda_i}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Частные производные $\partial m^{\infty}/\partial \lambda_k$, $\partial \Gamma^{\infty}/\partial \lambda_k$ находятся дифференцированием по $\lambda_k$ из уравнений (3.13), (3.14) соответственно. Первые и вторые производные для $\bar{\gamma}$, $\Psi$, $\Theta$ находятся из уравнений (3.16), (4.31), (4.32).

Зная выражение для компонент второй производной критерия и используя, например, критерий Сильвестра, легко установить наличие или отсутствие локального минимума.

Проверка достаточных условий продемонстрирована на модельных примерах в случае полной информации о состоянии системы и случае информационных ограничений.

**В заключении** подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые к защите.

Исследования, проведенные в диссертационной работе, могут быть продолжены в следующих направлениях: для квазилинейных систем предполагается исследовать подробно задачи оптимизации в случае неточных измерений доступных наблюдению компонент вектора состояния, использования фильтра заданной размерности с совместной оптимизацией регулятора и фильтра (теорема разделения для квазилинейных систем не справедлива), обобщить полученные результаты для случая информационных ограничений, когда каждая компонента вектора управления может зависеть от своего индивидуального состава компонент вектора состояния.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Получены и доказаны необходимые условия оптимальности линейного регулятора в задаче оптимизации линейной стохастической системы, функционирующей на неограниченном интервале времени, при неполной информации о состоянии. [2, 5, 9].

2. Введено новое понятие вполне возмущаемости стохастической системы, получен критерий вполне возмущаемости для линейных систем и установлена связь отсутствия этого свойства с неединственностью оптимального процесса [2, 11].

3. Получены и доказаны необходимые условия оптимальности квазилинейной стохастической системы, функционирующей на неограниченном интервале времени, матрицы которой зависят от подлежащего выбору векторного параметра, – задаче оптимизации облика системы [3, 6].

4. Выполнена конкретизация полученных необходимых условий для управляемой по выходу стохастической системы, системы обладающей свойством симметрии и системы с ПИД-регулятором [3, 7].

5. В задаче синтеза оптимальной стратегии управления квазилинейной стохастической системой в случае полной информации о состоянии предложен специальный критерий оптимальности, допускающий неэргодичность допустимых процессов управления, и получены необходимые условия оптимальности стратегии, обеспечивающей эргодичность оптимального процесса [3, 15].

6. Получены условия второго порядка в задаче оптимизации облика квазилинейных стохастических систем [12].

7. Разработаны вычислительные алгоритмы синтеза оптимальной стратегии управления в задачах оптимизации линейной стохастической системы, облика системы и квазилинейной управляемой по выходу стохастической системы [2, 3, 8, 10].

8. Решены прикладные задачи оптимальной стабилизации ориентации спутника с гибким стержнем, движения беспилотного летательного аппарата в неспокойной атмосфере [1, 3, 4, 13, 14].

### Публикации в журналах перечня ВАК


1. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Простой алгоритм стабилизации ориентации спутника с гибким стержнем // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2012. №55.
2. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Синтез оптимальных регуляторов линейных стохастических систем при неполной информации о состоянии. Необходимые условия и численные методы // Автоматика и телемеханика. — 2014. № 11. — С. 70–87.

3. *Халина А.С., Хрусталев М.М.* Оптимизация облика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Изв. РАН. ТиСУ. — 2017. № 1. (принята к публикации).

**Программа для ЭВМ**

4. *Халина А.С.* Оптимальное управление малым беспилотным летательным аппаратом в неспокойной атмосфере // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 20166114945 от 12 мая 2016 г.

**Публикации в других изданиях**

5. *Хрусталев М.М., Матросова Н.И., Халина А.С.* Матричный метод сопряженных направлений решения уравнения Ляпунова и Сильвестра. Проблемы устойчивости и управления. Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика Владимира Мефодьевича Матросова. — М.:Физматлит, 2013. — С. 380–394.
6. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Условия стабилизируемости и оптимальности квазилинейных стохастических систем при неполной обратной связи на неограниченном интервале времени // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). — М.:ИПУ РАН, 2014. — С. 1126–1134.
7. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор в задаче стабилизации квазилинейной стохастической системы // XII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). — М.:ИПУ РАН, 2016.. — С. 405–407.
   *Khrustalev M.M., Khalina A.S.* Proportional-integral-derivative (PID) controller in stabilization problem for quasi-linear stochastic system / Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). — M.: IEEE, 2016. http://ieeexplore.ieee.org/document/7541192/

**Доклады на научных конференциях**

8. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Численный метод определения экстремальной стабилизирующей стратегии для линейной стохастической системы с квадратичным критерием и его применение к задачам стабилизации ИСЗ // 11-я Международная конференция «Авиация и космонавтика-2012». — М.: МАИ, 2012. — С. 397–398.
9. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Необходимые условия оптимальности линейного регулятора стохастических систем при неполной информации о состоянии // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2013). — М.:Изд-во МАИ, 2013. — С. 785–787.
10. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Градиентный метод синтеза оптимальных регуляторов стохастических систем при неполной информации о состоянии //

Тезисы докладов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике-2013». — М.: МАИ, 2013. — С. 305.

11. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* О единственности оптимального линейного регулятора в задаче синтеза для линейных стохастических систем при неполной информации о состоянии // Тезисы 12-й Международной конференции «Авиация и космонавтика-2013». — М.:МАИ, 2013. — 1 стр.
12. *Халина А.С.* Условия второго порядка в задаче оптимизации параметров квазилинейных стохастических систем // Тезисы докладов международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015). — Суздаль: МИАН, 2015. — С. 136–138.
13. *Халина А.С.* Оптимальная стабилизация движения беспилотного летательного аппарата в неспокойной атмосфере // Тезисы докладов 14-й Международной конференции «Авиация и космонавтика-2015». — М.: МАИ, 2015. — С. 464–465.
14. *Халина А.С.* Управление движением беспилотного летательного аппарата с учетом атмосферных возмущений // Сборник тезисов докладов 42-ой Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения-2016». — М.: МАИ, 2016. Т.1. — С. 648–649.
15. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Оптимальное управление квазилинейной стохастической системой на неограниченном интервале времени // Сборник тезисов докладов XX молодежной научно-практическая конференций «Наукоемкие информационные технологии». — (принята к публикации).