

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УДК 519.62+539.376+539.434

На правах рукописи



Леонов Сергей Сергеевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

Специальность 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Кузнецов Евгений Борисович

Москва — 2016

# Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Традиционные методы решения начальных задач</b> . . . . .	14
1.1 Математическое моделирование процесса ползучести металлов . . . . .	14
1.1.1 Теория структурных параметров Ю. Н. Работнова . . . . .	15
1.1.2 Определяющие уравнения в энергетической форме . . . . .	16
1.2 Дифференциальные уравнения с одной предельной особой точкой . . . . .	18
1.2.1 Модель чистого растяжения трубок из стали X18H10T . . . . .	19
1.2.2 Моделирование процесса ползучести для образцов из сплава ОТ-4 . . . . .	26
1.2.3 Анализ полученных расчетных данных . . . . .	35
1.3 Дифференциальные уравнения с двумя предельными особыми точками . . . . .	36
1.3.1 Модель растяжения образцов из стали 45 . . . . .	37
1.3.2 Модель растяжение образцов из сплава ЗВ . . . . .	43
1.3.3 Анализ полученных расчетных данных . . . . .	48
<b>Глава 2. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация</b> . . . . .	50
2.1 Метод продолжения решения по параметру для систем ОДУ . . . . .	50
2.1.1 Традиционный подход . . . . .	51
2.1.2 Параметризация решения. Общий подход . . . . .	52
2.1.3 Наилучшая параметризация . . . . .	53
2.2 Наилучшая параметризация в задачах ползучести . . . . .	54
2.2.1 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из стали 45 . . . . .	55
2.2.2 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из сплава ЗВ . . . . .	58
2.2.3 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из сплава ОТ-4 . . . . .	62
2.2.4 Анализ результатов наилучшей параметризации . . . . .	68
<b>Глава 3. Продолжение решения по модифицированному наилучшему аргументу</b> . . . . .	70
3.1 Модификация наилучшего аргумента продолжения для систем ОДУ . . . . .	71
3.1.1 О направлениях отсчета аргументов $\lambda$ и $\kappa$ в окрестности точки интегральной кривой . . . . .	71
3.1.2 Суммирование локальных отклонений между направлениями отсчета аргументов $\lambda$ и $\kappa$ в рассматриваемой области . . . . .	85
3.1.3 Эквивалентность аргументов $\lambda$ и $\kappa$ . . . . .	88

3.2	$\kappa$ -преобразование задач ползучести . . . . .	91
3.2.1	$\kappa$ -преобразование задачи растяжения образцов из стали 45 . . . . .	91
3.2.2	$\kappa$ -преобразование задачи растяжения образцов из сплава ЗВ . . . . .	98
3.2.3	$\kappa$ -преобразование задачи растяжения образцов из сплава ОТ-4 . . . . .	102
3.2.4	Анализ применения модифицированного наилучшего аргумента . . . . .	109
<b>Глава 4.</b>	<b>Методы нейросетевого моделирования . . . . .</b>	<b>111</b>
4.1	Нейросетевое моделирование при решении начальных задач для систем ОДУ . . . . .	111
4.2	Идентификация параметров моделей ползучести . . . . .	113
4.2.1	Модель растяжение образцов из титанового сплава ЗВ . . . . .	113
4.2.2	Модель растяжения образцов из стали 45 . . . . .	120
4.2.3	Комбинация искусственных нейронных сетей и продолжения решения по параметру . . . . .	124
4.3	Определение установившегося напряженно-деформированного состояния во вращающемся диске . . . . .	126
4.3.1	Постановка задачи . . . . .	127
4.3.2	Традиционный алгоритм решения . . . . .	128
4.3.3	Нейросетевое решение . . . . .	129
4.3.4	Нейросетевое решение. Дискретизированная задача . . . . .	132
4.4	Анализ применения искусственных нейронных сетей . . . . .	134
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>136</b>
	<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>	<b>138</b>
	<b>Список использованной литературы . . . . .</b>	<b>139</b>
	<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>149</b>
	<b>Список таблиц . . . . .</b>	<b>150</b>
	<b>Приложение А. Неявные методы при решении задач ползучести . . . . .</b>	<b>152</b>
	А.1 Неявный метод Эйлера . . . . .	152
	А.2 Гауссов метод четвертого порядка точности . . . . .	154
	<b>Приложение Б. Результаты экспериментов . . . . .</b>	<b>156</b>
	<b>Приложение В. Грамоты, дипломы, патенты . . . . .</b>	<b>161</b>
	<b>Приложение Г. Комплекс программ «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации» . . . . .</b>	<b>167</b>

## Введение

**Актуальность темы.** Многие практические задачи физики и механики моделируются плохо обусловленными задачами Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с несколькими предельными особыми точками (ПОТ), в которых правые части уравнений системы теряет смысл. Явные методы для решения таких задач могут оказаться малоэффективными и появляется необходимость в использовании специальных методов решения жестких задач, к числу которых относятся и плохо обусловленные задачи.

Уже в конце 40-х – начале 50-х годов XX века в вычислительной практике появился ряд задач, решение которых при помощи традиционных явных методов численного интегрирования задачи Коши сталкивалось со значительными затруднениями. Это задачи моделирования процесса переноса квазилинейным уравнением теплопроводности, электрических цепей с затуханием, процессов горения и химического взаимодействия различных веществ. Начиная с 50-х годов вопросами моделирования и расчета подобных задач занимались многие ученые: Ракитский Е. В., Арушанян О. Б., Бобков В. В., Калиткин Н. Н., Скворцов Л. М., Демидов Г. В., Лебедев В. И., Новиков Е. А., Артемьев С. С., Gear C. W., Dahlquist G., Rosenbrock H. H., Lambert J. D., Lubich Ch., Wanner G., Hairer E., Griffiths D. F., Lindberg B., Verver J. G. и другие. Наиболее крупной работой по методам решения жестких задач является книга Хайрера Э. и Ваннера Г. [99], также стоит упомянуть книги Деккера К., Вервера Я. [27] и Холла Дж., Уатта Дж. [88]. Среди отечественных авторов выделим монографии Новикова Е. А. [75] и Ракитского Ю. В. с соавторами [80].

В последнее время появилось множество публикаций, посвященных различным подходам к решению жестких задач. В работе [30] Зубановым А. М., Коконковым Н. И. и Ширковым П. Д. предложено обобщение одностадийной схемы Розенброка с комплексными коэффициентами, также Ширковым П. Д. показана невозможность построения  $LN$ -устойчивых методов Розенброка-Ваннера для расчета жестких задач [103]. Большое количество статей в рассматриваемой области принадлежит Скворцову Л. М. Им построены явные стабилизированные (имеющие расширенные вдоль вещественной оси области устойчивости) методы Рунге-Кутты 2-го и 3-го порядков и исследована их точность при решении жестких задач [86], рассмотрены явные адаптивные методы Рунге-Кутты (коэффициенты которых настраиваются на решение конкретной задачи) и показана эффективность их применения при решении жестких и осцилирующих задач [84, 85], получены эффективные реализации неявных методов Рунге-Кутты 2-го порядка и диагонально-неявных методов Рунге-Кутты 3-го и 4-го порядков [82, 83, 87]. В работах Калиткина Н. Н. совместно с его коллегами и учениками исследована применимость обратных схем Рунге-Кутты и метода длины дуги для решение жестких задач для систем ОДУ и дифференциально-алгебраических уравнений, также рассмотрено решение сверхжестких задач [5, 32, 33]. Различным вопросам, связанным с решением жестких задач для систем ОДУ, посвящены работы Новикова Е. А. и Новикова А. Е. [73, 74], Сигунова Ю. А. и Диденко И. Р. [81], а также Булатова М. В. с соавторами [7].

В зависимости от спектра матрицы Якоби жесткие задачи разделяют на жесткие (интегральные кривые быстро сходятся), осциллирующие (присутствуют собственные числа с большими мнимыми частями) и плохо обусловленные (интегральные кривые быстро расходятся) [32]. Решение плохо обусловленных и сингулярно возмущенных задач рассматривали многие авторы, в числе которых Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Бояринцев Ю. Е., Шалапилин В. И., Кузнецов Е. Б., Бутузов В. Ф., Campbell S. L., Lubich Ch., Roche M., Lotstedt P., Nipp K., Stoffer D., O'Malley R. E. и другие.

Одним из наиболее эффективных подходов к решению плохо обусловленных задач является метод продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации [102], также известный как метод длины дуги. Идея данного метода восходит к работам Давиденко Д. Ф. [25, 26], в которых рассматривалось численное решение систем нелинейных уравнений с использованием введения параметра специального вида. Позднее, в работах Григлюка Э. И. и Шалапилина В. И. для решения систем трансцендентных и алгебраических уравнений, возникающих в задачах механики деформируемого твердого тела, вводится параметр  $\lambda$ , названный наилучшим, и отсчитываемый вдоль кривой множества решений рассматриваемой задачи [18]. В этой же работе показана применимость продолжения решения по параметру  $\lambda$  при прохождении предельных особых точек и построении замкнутых кривых множества решений [18]. В работе [102] как для систем алгебраических и трансцендентных уравнений, так и для систем ОДУ доказано, что параметр  $\lambda$  доставляет рассматриваемой задаче наилучшую обусловленность. Впоследствии Шалапилиным В. И., Кузнецовым Е. Б. и их учениками было рассмотрено множество задач, показывающих эффективность наилучшей параметризации при решении начальных и граничных задач для систем дифференциальных, дифференциально-алгебраических, интегродифференциально-алгебраических уравнений с предельными особыми точками, уравнений с запаздывающим аргументом и задач, множества решений которых содержат точки бифуркации [36–38]. В работах указанных авторов показано, что для плохо обусловленных задач переход к наилучшему параметру дает значительное преимущество при численном решении по сравнению с другими методами. Однако, в общем случае, для жестких задач параметризация может не давать каких-либо улучшений. Помимо Кузнецова Е. Б. и его учеников, метод продолжения решения по параметру в своих работах использовали Калиткин Н. Н., Лопаницын Е. А., Карпов В. В., Пошивайло И. П., Семенов А. А., Riks E., Crisfield A. E., Ramm E., Carrera E., Luo Y. F., Teng J. G. и другие ученые.

В последнее время метод продолжения решения по параметру (метод длины дуги) находит широкое применение в различных теоретических и прикладных вопросах как у российских, так и зарубежных исследователей. Кроме применения продолжения решения по параметру к решению жестких задач в статьях Калиткина Н. Н. [5, 33], этот подход успешно использовался для исследования устойчивости панелей конических оболочек из ортотропных материалов при деформировании [114], при решении гиперболических систем с предельными особыми точками и физически нелинейных задач [113, 115] и т. д. Специальные виды

параметров продолжения используют в своих работах Лопаницын Е. А. при расчете тонких пологих оболочек с учетом конечных прогибов [17] и Гаврюшин С. С. при расчете напряжений и деформаций сложных стержневых и оболочечных элементов конструкций [15].

В диссертационной работе разрабатываются новые методы численного решения плохо обусловленных задач Коши для систем ОДУ с несколькими ПОТ, использующие продолжение решения по параметру. В качестве приложения предложенных методов рассматриваются тестовые задачи расчета длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести.

Термином «ползучесть», согласно известной монографии Ю. Н. Работнова [79, с. 9], «будем называть всю совокупность явлений, которые можно объяснить, допустив, что зависимость между напряжениями и деформациями содержит время, явно или через посредство некоторых операторов». Более узкое определение в работе [71, с. 241] дает Н. Н. Малинин, оно заключается в следующем: «напряжения и деформации, возникшие при нагружении деталей, изменяются во времени, даже если нагрузки остаются постоянными. Это явление называют ползучестью материала. Одну сторону этого явления – изменение во времени деформаций – называют собственно ползучестью или последствием, а другую – изменение во времени напряжений – релаксацией».

Свойства ползучести обнаруживают материалы различной природы: металлы, пластмассы, горные породы, бетон, естественные и искусственные камни, лед и другие [79, с. 9]. Ползучесть у металлических материалов в холодном состоянии практически отсутствует. Но во многих практических задачах различные конструкции эксплуатируются в условиях высокотемпературной ползучести при сложном напряженном состоянии [24]. Примерами таких конструкций могут служить трубопроводы, диски и лопатки газовых турбин, элементы энергосиловых установок, детали авиационных конструкций и т. д.

На рис. 1 приведены кривые, изображающие зависимости деформации от времени при различных напряжениях. На кривой  $\varepsilon(t)$ , соответствующей напряжению  $\sigma_2$ , можно выделить три четко выраженных участка (стадии ползучести) [79, с. 168; 63, с. 20]:

- I – неустановившаяся ползучесть, т. е. участок, на котором скорость ползучести монотонно уменьшается до своего наименьшего значения;
- II – установившаяся ползучесть, т. е. участок, на котором скорость ползучести сохраняет постоянное наименьшее значение;
- III – участок ускоряющейся ползучести, предшествующий разрушению.

В предположении, что время нагружения до заданного значения напряжения мало по сравнению с длительностью испытания, кривые  $\varepsilon(t)$  начинаются со значения деформации  $\varepsilon_0$ , соответствующего мгновенному нагружению. Мгновенная деформация складывается из упругой  $\varepsilon^e$  и пластической  $\varepsilon^p$  составляющих. Разность между полной и мгновенной деформацией есть деформация ползучести  $\varepsilon^c$  (в дальнейшем верхний индекс  $c$  при обозначении деформации ползучести будет опускаться) [63, с. 19-20].

В зависимости от величины напряжения, на кривой  $\varepsilon(t)$  могут отсутствовать некоторые стадии ползучести как это показано на рис. 1.

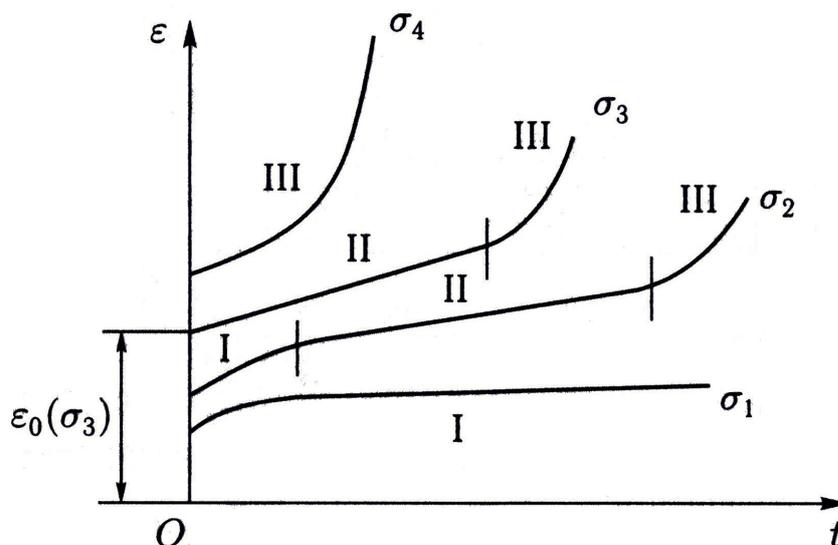


Рис. 1. Зависимости деформации  $\varepsilon$  от времени  $t$

Впервые ползучесть наблюдалась еще в начале XIX века в экспериментах Клода Луи Мари Анри Навье (Navier, 1826), Густава Гаспара Кориолиса (Coriolis, 1830) и Луи Жозефа Вика (Vicat, 1834) [3, с. 64-65; 4, с. 7-14]. Систематические же экспериментальные и теоретические исследования всех стадий ползучести начались только в середине XX века и вплоть до сегодняшнего дня проводились такими учеными, как Ильюшин А. А., Работнов Ю. Н., Качанов Л. М., Победря Б. Е., Малинин Н. Н., Шестериков С. А., Соснин О. В., Арутюнян Н. Х., Локощенко А. М., Милейко С. Т., Трунин И. И., Аршакуни А. Л., Никитенко А. Ф., Горев Б. В., Цвелодуб И. Ю., Симонян А. М., Поздеев А. А., Лебедев А. А., Писаренко Г. С., Хажинский Г. М., Павлов П. А., Радченко В. П., Prager W., Nadai A., Odqvist F. G., Bailey R. W., Johnson A. E., Marin J., Soderberg C. R., Hayhurst D. R., Altenbach H., Krajcinovic D., Leckie F. A., Trampczynski W., Betten J., Davies P. V., Garofalo F., Greenwood G. W., Dyson V. F., Henderson J. T. и другими.

В работах указанных ученых теория ползучести оформилась в эффективный инструмент исследования элементов конструкций на длительную прочность при деформировании под действием различных температурно-силовых нагрузок. Под длительной прочностью элемента конструкции понимается время, в течение которого рассматриваемый элемент конструкции под действием заданных внешних нагрузок не разрушится. Подробнее развитие теории ползучести вплоть до сегодняшнего дня рассмотрено в обзоре А. Е. Johnson'a [110] и цикле работ С. А. Шестерикова и А. М. Локощенко [62, 65–68, 70, 104].

В последние десятилетия в России и зарубежом появляется большое количество работ, посвященных экспериментальным исследованиям процесса ползучести, направленным на обоснование используемых в теориях ползучести гипотез, исследованию деформирования

при сложном напряженном состоянии [62, 66, 68], эффекта виброползучести [61], влиянию агрессивной среды на процесс деформирования [64, 65] и т. д.

Таким образом, актуальность исследования ползучести металлических конструкций, моделирования этого процесса и разработки эффективных методов расчета полученных моделей обуславливается требованиями надежности при эксплуатации элементов конструкций, работающих при высоких и умеренных температурах под действием различных силовых нагрузок. Помимо этого, в последние годы наиболее перспективными технологиями обработки материалов и формообразования деталей является деформирование как в условиях высоко-температурной ползучести [20], так и за счет медленного режима ползучести [6].

В то же время, все еще остро ощущается потребность в разработке эффективных методов расчета моделей, базирующихся на уравнениях известных теорий ползучести. Так, уже моделирование установившейся и ускоренной ползучести вплоть до разрушения приводит к плохо обусловленной задаче Коши для системы ОДУ с одной ПОТ. Это происходит за счет неограниченного возрастания скорости деформации ползучести в момент разрушения. Для численного расчета подобных задач возможно применение традиционных методов решения задачи Коши (например явных методов семейства Рунге-Кутты), но погрешность вблизи предельной особой точки может принимать большие значения, достигающие десятков процентов.

В работе [95] подчеркивается, что большинство конструкционных материалов при умеренных температурно-силовых режимах имеют явно выраженную начальную стадию (неустановившуюся ползучесть), неучет которой при моделировании ползучести и длительной прочности может привести к существенным погрешностям. Описание же всех трех стадий ползучести уравнениями кинетической теории [79] приводит к плохо обусловленным начальным задачам для систем ОДУ с двумя ПОТ в начальный момент времени и при разрушении. Расчет таких задач явными методами малоэффективен. Методы же решения жестких задач на основе неявных схем имеют ряд недостатков, связанных с решением систем нелинейных уравнений, возникающих при реализации неявных схем. Поэтому разработка новых численных методов решения плохо обусловленных задач является актуальной. А использование метода продолжения решения по параметру [36–38], уже показавший свою эффективность при решении широкого класса задач, к расчету металлических конструкций на длительную прочность в условиях ползучести показывает хорошие результаты.

Еще одной характерной чертой моделирования процесса ползучести и длительной прочности является то, что определяющие уравнения любого вида, как правило, содержат несколько материальных констант (характеристик ползучести), которые необходимо определять на основании информации о протекании процесса деформирования, основным источником которой является эксперимент. Учитывая то, что характеристики ползучести могут зависеть от вида используемого материала и его состояния, режима нагружения, температуры, коэффициента анизотропии и других факторов, задача их идентификации весьма трудоемка. По этой причине, определяющим уравнениям каждой теории ползучести сопутствует

методика определения характеристик ползучести для заданной конструкции, как правило, существенно зависящая от вида уравнений.

Значительным шагом в сторону упрощения процесса моделирования ползучести и длительной прочности металлических конструкций стало бы создание унифицированного подхода, позволяющего на основе экспериментальных данных как идентифицировать модель ползучести, так и проводить ее расчет. По мнению автора, роль такого обобщающего подхода может сыграть метод, основанный на применении искусственных нейронных сетей.

Начиная с 40-х годов прошлого века искусственные нейронные сети находят все большее применение в различных областях, например, при решении задач распознавания образов, обработки больших массивов информации, радиолокации, искусственного интеллекта, математической физики и т. д. В разное время теоретическими и прикладными вопросами нейросетевого моделирования занимались: Нечаев Ю. И., Горбань А. Н., Горбаченко В. И., Васильев А. Н., Тархов Д. А., Ивахненко А. Г., Ревизников Д. Л., Галушкин А. И., Дорогов А. Ю., Терехов С. А., Колбин И. С., Haykin S., Kohonen T., Galperin E. A., Kansa E. J., Anastasio T. J., Zurada J., Anderson J. A., Giles C. L. и другие.

Основные направления исследований и результаты в области нейронных сетей до 90-х годов XX века представлены в работе Саймона Хайкина [98]. Использованию нейросетевого моделирования к решению задач математической физики посвящен цикл работ Васильева А. Н. и Тархова Д. А. с соавторами [12–14].

Применение искусственных нейронных сетей к задачам исследования структуры и поведения различных материалов при деформировании, в том числе и в условиях ползучести, начиная с 90-х годов XX века рассмотрено в ряде работ, например [106]. В отечественной литературе по данной тематике публикаций нет, но за рубежом вплоть до сегодняшнего дня вышло ряд статей посвященных применению нейросетевого моделирования к решению задач ползучести. Здесь следует отметить работы Düğenci M., Aydemir A., Esen İsmail и Aydin M. E. [108], Bal L. и Buyle-Bodin F. [105], Kmet S., Sincak P. и Stehlik P. [111]. Полученные в данной области результаты свидетельствуют о том, что нейросетевое моделирование является мощным инструментом как моделирования процессов нелинейного деформирования конструкций, так и расчета построенных моделей. А большое количество опубликованных работ говорит об актуальности исследований по данной тематике.

**Целью** диссертационной работы является создание новых эффективных методов численного решения плохо обусловленных задач Коши для систем ОДУ с несколькими ПОТ, а также методов построения моделей, описываемых такими начальными задачами.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. В рамках метода продолжения решения по параметру [102] разработать подход к решению плохо обусловленных начальных задач.
2. Указать преимущества использования метода продолжения решения по параметру к решению плохо обусловленных начальных задач по сравнению с традиционными методами решения задачи Коши.

3. Разработать метод, использующий алгоритмы нейросетевого моделирования [12], для идентификации моделей, описываемых плохо обусловленными задачами Коши со скалярными параметрами, и расчета недоопределенных граничных задач.
4. Опробировать разработанные методы на тестовых задачах расчета длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести.

Для реализации поставленной цели используются следующие **методы исследования**:

**1)** при численном решении задачи Коши для систем ОДУ используются явные и неявные методы семейства Рунге-Кутты с постоянным и переменным шагом интегрирования [1, 99, 100], а также их комбинация с методом продолжения решения по параметру, в том числе и наилучшему, **2)** для идентификации материальных констант, входящих в определяющие соотношения ползучести, а также для решения нелинейных задач с неполностью заданными граничными условиями, используется подход на основе искусственных нейронных сетей и его комбинация с методом продолжения решения по параметру, **3)** при решении оптимизационных задач без ограничений и с ограничениями типа неравенств используются численные методы оптимизации [76], в частности метод сопряженных градиентов [77, с. 351-354].

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Для математического моделирования процесса ползучести металлических конструкций разработан подход, использующий алгоритмы нейросетевого моделирования и продолжения решения по параметру, позволяющий проводить идентификацию материальных констант, входящих в определяющие уравнения ползучести и длительной прочности. Также показана эффективность нейросетевого подхода при решении нелинейных задач ползучести с недоопределенными граничными условиями.
2. Предложен подход, основанный на использовании метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации, позволяющий обходить трудности, связанные с решением плохо обусловленных начальных задач для систем ОДУ, возникающих при расчете деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций в условиях ползучести при различных температурно-силовых воздействиях.
3. Разработан численный метод решения плохо обусловленных начальных задач, использующий модифицированный аргумент продолжения решения, получаемый путем преобразования наилучшего аргумента. Показаны преимущества данного метода при расчете задач ползучести по сравнению с другими подходами. Доказана единственность наилучшего аргумента и дан способ оценки обусловленности задач, преобразованных модифицированным наилучшим аргументом.
4. Разработан и зарегистрирован комплекс программ численного решения задачи Коши для систем ОДУ с использованием как традиционных явных и неявных методов, так и метода продолжения решения по наилучшему аргументу. Его эффективность протестирована на решении задач расчета длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести.

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Рассмотрено применение метода продолжения решения по параметру, в том числе и наилучшему, к расчету моделей, описывающих деформирование элементов конструкций в условиях ползучести при разных температурно-силовых воздействиях.
2. Для решения плохо обусловленных задач Коши предложен новый аргумент продолжения решения, названный модифицированным наилучшим, для которого определено отклонение направления отсчета по отношению к наилучшему, позволяющее оценивать обусловленность параметризованных им задач. Доказана единственность наилучшего аргумента в классе модифицированных аргументов продолжения специального вида, используемых для задач ползучести.
3. Для идентификации моделей ползучести по результатам эксперимента разработан метод, комбинирующий возможности нейросетевого моделирования и продолжение решения по параметру.

**Научная и практическая значимость** полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Применение наилучшей параметризации к решению плохо обусловленных задач Коши для систем ОДУ с двумя ПОТ позволяет упростить процесс вычисления, существенно уменьшить время счета и погрешность решения по сравнению с другими методами решения. При этом, для реализации метода продолжения по параметру не требуется существенных затрат, что способствует его быстрому внедрению.
2. Модифицированный аргумент продолжения решения позволяет при расчете более гибко учитывать особенности конкретной задачи, что дает возможность получать более удобный вид параметризованной задачи с необходимыми свойствами и еще больше сократить время счета.
3. Предложенный нейросетевой подход к идентификации моделей не зависит от вида используемых уравнений, что делает его применимым для широкого класса задач и при моделировании позволяет получить более точное согласование экспериментальных и расчетных данных.
4. По результатам проводимых в диссертационной работе исследований разработан комплекс программ «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016613378), который может быть использован для решения практических задач. Структура комплекса программ приведена в приложении Г.

**Степень достоверности** полученных результатов обеспечивается: 1) строгим использованием классических механических концепций и адекватного математического аппарата, 2) удовлетворительным согласованием полученных расчетных данных с точными аналитическими решениями рассматриваемых задач, а также опубликованными расчетными и экспериментальными результатами других авторов.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях, симпозиумах и конкурсах: 1) XVIII и

XIX международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2013 и 2015), **2)** IV международной научной конференции «Фундаментальные проблемы системной безопасности и устойчивости» (Москва, 2013), **3)** 12-ой и 13-ой международных конференциях «Авиация и космонавтика» (Москва, 2013 и 2014), **4)** конкурсе научно-технических работ и проектов «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики» (Москва, 2013);; **5)** XX и XXI международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова (Кременки, 2014 и 2015), **6)** X и XI международных конференциях по неравновесным процессам в соплах и струях (Алушта, 2014 и 2016), **7)** VIII всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 2014), **8)** международной конференции «Успехи механики сплошных сред» (Владивосток, 2014), **9)** московской молодёжной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике» (Москва, 2015), **10)** XI всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015), **11)** XXVI международной конференции «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций» (Санкт-Петербург, 2015), **12)** International Symposium «Mathematics of XXI Century & Natural Science» (St. Petersburg, 2015), **13)** X юбилейной международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2015), **14)** Thirteenth International Symposium on Neural Networks (St. Petersburg, 2016).

**Личный вклад.** Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором реализованы используемые численные методы решения задачи Коши в среде Matlab R2015a, проведены численные эксперименты и выполнен анализ полученных расчетных данных. Выбор численных методов расчета, круга рассматриваемых задач и разработка алгоритма применения метода продолжения решения по параметру для задач ползучести проводились под руководством Е. Б. Кузнецова. Адаптация нейросетевого подхода [12] к решению задач ползучести выполнена совместно с А. Н. Васильевым. Программная реализация алгоритмов нейросетевого моделирования в среде Mathcad выполнена автором диссертации.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 28 печатных и электронных изданиях, среди которых 2 статьи опубликованы в журналах, индексируемых в Scopus [47, 107], 4 – в журналах, рекомендованных ВАК РФ для представления результатов диссертационного исследования на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук [8, 43, 44, 60], 3 – в сборниках научных статей [11, 39, 52], 18 – в тезисах докладов [10, 40–42, 45, 46, 48–51, 53–59, 112]. Помимо этого, в соавторстве с Васильевым А. Н. и Кузнецовым Е. Б. написано приложение к монографии [9].

В соавторстве с Е. Б. Кузнецовым создан и зарегистрирован программный комплекс «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016613378).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и четырех приложений. Полный объем диссертации составляет 176 страниц с 28 рисунками и 56 таблицами. Список литературы содержит 115 наименований.

Работа поддержана грантами РФФИ № 13-08-00473-а: «Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования материалов со сложной реологией» (2013-2015) и № 16-08-00943-а: «Математическое моделирование длительной прочности и разрушения при нелинейном деформировании материалов» (2016-2018).

**Благодарности.** Прежде всего автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному руководителю Евгению Борисовичу Кузнецову за многолетнее внимание к работе и обсуждение кандидатской диссертации на всех этапах ее создания. Огромную признательность автор выражает Александру Николаевичу Васильеву, советы которого позволили значительно улучшить часть диссертационной работы, посвященную использованию искусственных нейронных сетей. Автор безгранично признателен родителям Галине Владимировне и Сергею Алексеевичу за неоценимую моральную поддержку, без которой диссертационная работа не была бы завершена.

## Глава 1. Традиционные методы решения начальных задач

Как отмечалось во введении, в течение последних пятидесяти лет большое внимание уделяется исследованию ползучести материала применительно к расчету деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций эксплуатируемых при различных температурно-силовых режимах. Во многих случаях процесс ползучести моделируется начальными задачами для систем нелинейных ОДУ, аналитическое решение которых возможно только в исключительных случаях. При этом, численное решение подобных задач осложнено тем, что используемые определяющие уравнения ползучести могут быть с ПОТ. Традиционно при расчете конструкций на ползучесть применяются численные, например явные методы семейства Рунге-Кутты, или численно-аналитические методы, дополняемые упрощающими гипотезами для преодоления ПОТ. В данной работе также начнем исследование с рассмотрения применения явных и неявных методов решения задачи Коши для вычисления длительной прочности элементов конструкций, работающих в условиях ползучести. Но вначале кратко остановимся на моделях, используемых в диссертации для описания процесса ползучести вплоть до разрушения.

### 1.1 Математическое моделирование процесса ползучести металлов

Основной проблемой, возникающей при расчетах элементов конструкций на прочность, является недопущение их разрушения, поэтому особое значение приобретает проблема длительной прочности металлов, из которых изготовлены эти конструкции.

Общепринятая схема расчета на длительную прочность конструкции разбивается на две самостоятельные задачи [24]: 1) определение напряженно-деформированного состояния конструкции с использованием одной из теорий ползучести, 2) определение долговечности конструкции с использованием одного из критериев длительной прочности.

В конце 50-х годов XX века Л. М. Качанов [34] и Ю. Н. Работнов [78] пришли к выводу, что использующихся в то время терминов механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций, вектор перемещений) недостаточно для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. Ими был предложен новый подход к исследованию длительной прочности, названный кинетическим. Этот подход основан на использовании введенного параметра поврежденности  $\omega$ . Исходному состоянию материала ( $t = 0$ ) соответствует значение  $\omega = 0$ , при разрушении поврежденность  $\omega$  становится равной единице [66].

При использовании уравнений кинетической теории к расчету ползучести и длительной прочности конструкции задачи определения напряженно-деформированного состояния и длительной прочности совмещаются. Рассмотрим далее два варианта кинетической теории ползучести.

### 1.1.1 Теория структурных параметров Ю. Н. Работнова

Одним из наиболее распространенных подходов к моделированию процессов ползучести и разрушения металлических конструкций является использование уравнений теории структурных параметров Ю. Н. Работнова [79, с. 363-364; 22], которые в одномерном случае с одним скалярным параметром поврежденности можно записать в виде системы ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma, T)}{\Omega(\omega, T)}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$  – деформация ползучести;  $\sigma$  – действующее напряжение, в общем случае переменное;  $t$  – время;  $T$  – температура; функциональные зависимости, входящие в правые части, определяются по результатам эксперимента.

В работе [109] с феноменологической позиции обоснована возможность конкретизации системы ОДУ (1.1) в виде соотношений

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

В случае постоянной температуры  $T = \text{const}$ , уравнения системы (1.2) упрощаются

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma)}{\Psi(\omega)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma)}{\Psi(\omega)}. \end{cases} \quad (1.3)$$

В качестве начальных условий для системы ОДУ (1.3) берутся однородные

$$\varepsilon(0) = 0, \omega(0) = 0. \quad (1.4)$$

Искомыми функциями в задаче (1.3)-(1.4) являются  $\varepsilon(t)$  и  $\omega(t)$ ,  $\sigma(t)$  – известная функция времени, в частности постоянная величина. Решение задачи ищется в области  $V = \{(\varepsilon, \omega, t) \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*, 0 \leq \omega \leq 1, 0 \leq t \leq t^*\}$ , где  $\varepsilon^*$  – значение деформации ползучести в момент разрушения;  $t^*$  – длительная прочность конструкции.

Отметим некоторые особенности системы (1.3). Рассматриваются процессы деформирования, для которых  $\dot{\varepsilon} \geq 0$  и  $\dot{\omega} \geq 0$ , т. е. процессы деформирования и накопления повреждений в материале предполагаются монотонными. Функции  $f_1(\sigma)$  и  $f_2(\sigma)$  будем считать монотонными положительными,  $\sigma(t)$  будем полагать непрерывной функцией аргумента  $t$ . В качестве  $\Psi(\omega)$  будем рассматривать неотрицательные функции, причем для неупрочняющихся материалов, т. е. таких материалов, для которых стадия неустановившейся ползучести отсутствует,

будем применять монотонно убывающие функции, такие что  $\Psi(1) = 0$ , а для упрочняющихся материалов немонотонные унимодальные функции, для которых  $\Psi(0) = 0$ ,  $\Psi(1) = 0$ .

Точное аналитическое решение задачи (1.3)-(1.4) может быть найдено, если удастся проинтегрировать второе уравнение системы (1.3)

$$\int_0^{\omega} \Psi(\omega) d\omega = \int_0^t f_2(\sigma(t)) dt. \quad (1.5)$$

После выполнения интегрирования решение может быть записано в неявном виде

$$F(\omega) = R(t).$$

Используем условие  $F'(\omega) = \Psi(\omega) \geq 0$ . По теореме о неявной функции [35, с. 312], в открытой области  $V_0 = \{(\varepsilon, \omega, t) \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon^*, 0 < \omega < 1, 0 < t < t^*\}$  существует обратная функция  $\omega = F^{-1}(\tau)$ . По начальным условиям (1.4) можно определить обратную функцию и при  $t = 0$ , а учитывая, что в момент разрушения  $\omega(t^*) = 1$ , можно также установить существование обратной функции  $\omega = F^{-1}(\tau)$  при  $t = t^*$ . Таким образом, решение для параметра поврежденности может быть записано в явном виде

$$\omega = F^{-1}[R(t)] = H(t). \quad (1.6)$$

Проведя аналогичные рассуждения для функции  $R(t)$ , найдем явное выражение для времени

$$t = R^{-1}[F(\omega)],$$

а полагая  $\omega = 1$  в момент разрушения, получим соотношение для длительной прочности

$$t^* = R^{-1}[F(1)]. \quad (1.7)$$

Деформацию ползучести  $\varepsilon$  можно выразить в виде

$$\varepsilon(t) = \int_0^{\omega} \frac{f_1(\sigma(t))}{f_2(\sigma(t))} d\omega = \int_0^t \frac{f_1(\sigma(t))}{f_2(\sigma(t))} \dot{H}(t) dt \quad \text{или} \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \frac{f_1(\sigma(t))}{\Psi[H(t)]} dt, \quad (1.8)$$

где  $\dot{H}(t)$  – первая производная функции  $H(t)$  из равенства (1.6) по времени  $t$ .

Таким образом, полное решение задачи (1.3)-(1.4) в интегральном виде дается соотношениями (1.6), (1.7) и (1.8).

### 1.1.2 Определяющие уравнения в энергетической форме

В начале 70-х годов XX века Олегом Васильевичем Сосниным была предложена и экспериментально обоснована конкретизация кинетических уравнений теории структурных параметров Ю. Н. Работнова [79, с. 223-224]. В качестве параметра поврежденности  $\omega$  О. В. Соснин предложил использовать величину удельной работы рассеяния  $A$ , а за меру интенсивно-

сти процесса ползучести – величину удельной мощности рассеяния  $W$ . Эта теория получила название энергетического варианта теории ползучести (ЭВТП). Дальнейшее развитие ЭВТП получил в работах О. В. Соснина и его учеников [23, 72, 92]. Основные гипотезы, на которых базируется данная теория, следующие [92, с. 18-19; 91]:

1. Процессы ползучести и разрушения – есть два сопутствующих и влияющих друг на друга процесса.
2. За меру интенсивности процесса ползучести принимается величина удельной мощности рассеяния  $W$ , которая в линейном случае определяется выражением  $W = \sigma_{kl}\eta_{kl}$ , где  $\eta_{kl} = d\varepsilon_{kl}/dt$  – компоненты тензора скоростей деформации ползучести  $\varepsilon_{kl}$ ,  $\sigma_{kl}$  – компоненты тензора напряжений. Здесь предполагается суммирование по повторяющимся индексам. За меру повреждаемости материала – величина удельной работы рассеяния  $A$ , которая в линейном случае определяется выражением  $\int_0^t W dt$ . Разрушение материала наступает при достижении удельной работой рассеяния критического значения  $A_*$ , являющегося функцией температуры.
3. Предполагается существование уравнения состояния, связывающего оба процесса ползучести и разрушения по выбранным выше мерам в виде [91]

$$W = F(\sigma_i, A, T, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k), \quad (1.9)$$

где  $\sigma_i = \sqrt{3s_{kl}s_{kl}/2}$  – интенсивность напряжений;  $s_{kl} = \sigma_{kl} - \sigma_0\delta_{kl}$  – компоненты деватора тензора напряжений;  $\sigma_0 = \sigma_{kl}\delta_{kl}/3$  – гидростатическая (шаровая) составляющая тензора напряжений;  $\delta_{kl}$  – символы Кронекера;  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  отождествляются с параметрами поврежденности.

4. Далее ограничимся одним параметром поврежденности  $\omega$ , кинетическое уравнение для которого запишем в виде [91]

$$\frac{d\omega}{dt} = \Psi(\sigma_i, A, T, \omega), \quad \omega(x_k, 0) = 0, \quad \omega(x_k^*, t^*) = 1. \quad (1.10)$$

Считается, что в случае неповрежденного материала параметр  $\omega$  во всех точках конструкции равен нулю; если в какой-либо точке с координатами  $x_k^*$  в момент времени  $t = t^*$  он достигает значения равного единице, то говорят, что в этой точке произошло разрушение, а время  $t^*$  называют временем начала разрушения конструкции.

5. Предполагается справедливым закон течения вплоть до разрушения в виде

$$\eta_{kl} = \lambda \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{kl}},$$

где  $\sigma_e$  – эквивалентное напряжение.

6. Материал считается пластически несжимаемым вплоть до разрушения

$$\eta_{kl}\delta_{kl} = 0.$$

Экспериментально показано [92, с. 11-17; 91], что кривые ползучести  $A = A(t)$  подобны при различных уровнях напряжений и температур. Учитывая этот факт, в одномерном случае можно конкретизировать зависимости (1.9)-(1.10) и представить их в виде

$$\frac{dA}{dt} = \frac{F_1(\sigma, T)}{U_1(A)U_2(\omega)}, \quad (1.11)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{F_2(\sigma, T)}{U_3(A)U_4(\omega)}, \quad (1.12)$$

где функциональные зависимости  $F_1, F_2, U_1, \dots, U_4$  определяются в экспериментах [91].

Вместе с уравнением для определения деформации ползучести

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dA}{dt} \quad (1.13)$$

и начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad A(0) = 0, \quad (1.14)$$

получим начальную задачу (1.11)-(1.14) для определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций вплоть до разрушения.

Отметим, что задача (1.11)-(1.14) интегрируется аналитически только в исключительных случаях. Однако, для определяющих соотношений энергетического варианта теории ползучести справедливо [91]

$$\omega = \frac{A}{A_*},$$

связывающее безразмерный параметр поврежденности  $\omega$  и величину удельной работы рассеяния  $A$ . Используя это соотношение, можно преобразовать задачу (1.11)-(1.14) к виду (1.3)-(1.4), решение которой описано в параграфе 1.1.1.

## 1.2 Дифференциальные уравнения с одной предельной особой точкой

В предыдущем разделе были рассмотрены определяющие соотношения теории структурных параметров Ю.Н. Работнова и их конкретизации в энергетической форме, для которых описана процедура аналитического решения. Но в большинстве случаев точное вычисление интегралов, входящих в соотношения (1.5), (1.8), невозможно или нецелесообразно. Поэтому основными инструментами расчета моделей ползучести и длительной прочности являются численные и численно-аналитические методы.

Вначале исследуем применение традиционных численных методов решения задачи Коши применительно к двум задачам расчета деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций из неупрочняющихся материалов, т. е. таких материалов, у кривых ползучести которых отсутствует начальная стадия неустановившейся ползучести.

## 1.2.1 Модель чистого растяжения трубок из стали X18H10T

В качестве первой задачи рассмотрим деформирование трубчатых образцов из нержавеющей стали X18H10T под действием постоянной одноосной растягивающей нагрузки при постоянной температуре в условиях ползучести вплоть до разрушения. Для описания данной задачи будем использовать уравнения теории структурных параметров Ю. Н. Работнова вида (1.3), которые, в случае отсутствия упрочнения, запишем в форме [69]

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A\sigma^n}{(1 - \omega^{r_1})^n}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma^k}{(1 - \omega^{r_2})^k}, \end{cases} \quad (1.15)$$

где  $A, B, n, k, r_1, r_2$  – характеристики ползучести и разрушения конструкции.

При деформировании конструкции в условиях ползучести под действием постоянных нагрузок, введем гипотезу о равномерном распределении деформации по длине образца. Тогда, в случае малых деформаций, выражение для напряжения примет вид

$$\sigma(t) = \sigma_0(1 + \varepsilon(t)). \quad (1.16)$$

Здесь  $\sigma_0$  – постоянное начальное напряжение.

Полагая  $r_1 = r_2 = r, n = k$  и учитывая соотношение (1.16), перейдем от системы (1.15) к

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A\sigma_0^n(1 + \varepsilon)^n}{(1 - \omega^r)^n}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_0^n(1 + \varepsilon)^n}{(1 - \omega^r)^n}. \end{cases} \quad (1.17)$$

В качестве начальных условий для системы (1.17) будем использовать условия (1.4).

Аналитическое решение задачи (1.17), (1.4) в общем случае невозможно. На это указывает тот факт, что даже при постоянных напряжениях  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  задача (1.15), (1.4) интегрируется аналитически только при определенных ограничениях на параметры задачи. Это следует из того, что при  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  решение задачи (1.15), (1.4) сводится к интегрированию дифференциального бинома вида  $\int_0^t (1 - \xi^r)^{-n} d\xi$ . Из результатов П. Л. Чебышева, посвященных интегрированию иррациональных дифференциалов [101], следует

**Утверждение 1.1.** *Задача (1.15), (1.4) при постоянных напряжениях  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  интегрируется аналитически тогда и только тогда, когда параметры модели  $n$  и  $r$  удовлетворяют одному из следующих условий: 1) параметр  $n$  – целое число, 2) число  $1/r$  является целым, 3) число  $n + 1/r$  является целым.*

Для задачи (1.17), (1.4) ситуация только усложнится, что указывает на необходимость применения численных методов решения задачи Коши.

Несмотря на то, что в общем случае точное аналитическое решение задач (1.17), (1.4) найти не удастся, можно видеть, что деформация ползучести  $\varepsilon$  и параметр поврежденности

$\omega$  пропорциональны

$$\varepsilon = A/B \cdot \omega, \quad \varepsilon^* = A/B. \quad (1.18)$$

Используя соотношения (1.18), можно получить явное интегральное выражение времени  $t$  для задачи (1.17), (1.4)

$$t = \frac{1}{A\sigma_0^n} \int_0^\varepsilon [1 - (B\xi/A)^r]^n (1 + \xi)^{-n} d\xi = \frac{1}{B\sigma_0^n} \int_0^\omega (1 - \zeta^r)^n [1 + (A\zeta/B)]^{-n} d\zeta. \quad (1.19)$$

А учитывая, что в момент разрушения  $\omega = 1$  и  $\varepsilon^* = A/B$ , из выражения (1.19) найдем соотношения для вычисления длительной прочности рассматриваемой конструкции

$$t^* = \frac{1}{B\sigma_0^n} \int_0^1 (1 - \zeta^r)^n [1 + (A\zeta/B)]^{-n} d\zeta = \frac{1}{A\sigma_0^n} \int_0^{A/B} [1 - (B\xi/A)^r]^n (1 + \xi)^{-n} d\xi. \quad (1.20)$$

Приведенные результаты получены в работе [69], в ней же приведены результаты испытаний на ползучесть при чистом растяжении 21 образца одной плавки нержавеющей стали X18H10T. Испытывались трубки с внешним диаметром 12 мм, толщиной стенки 0.5 мм и рабочей длиной 70-100 мм при постоянных растягивающей нагрузке (с начальными напряжениями  $\sigma_0 = 39.2, 49$  и  $58.8$  МПа) и температуре  $850^\circ\text{C}$ . Экспериментальные результаты обозначены на рис. 1.1 сплошными линиями. Здесь и далее все величины переводятся из системы единиц МКГСС в СИ.

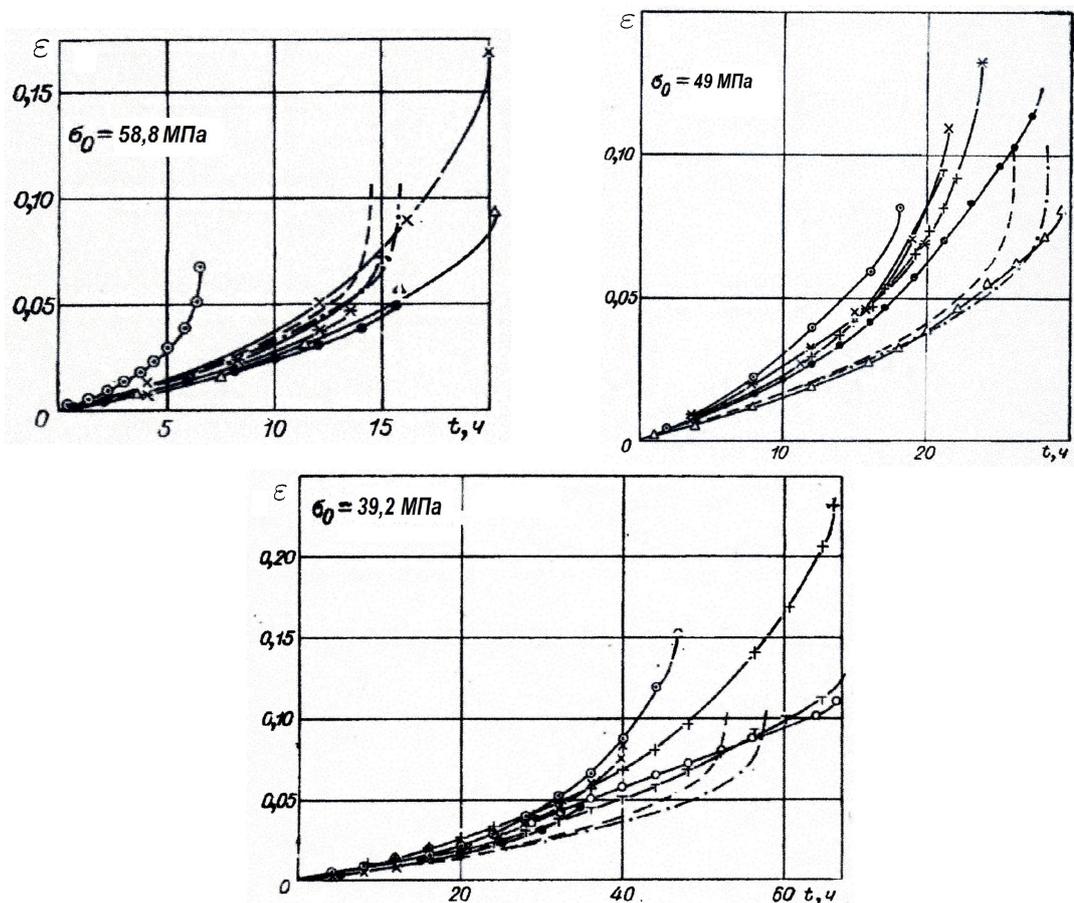


Рис. 1.1. Теоретико-экспериментальные кривые одноосной ползучести для стали X18H10T

По экспериментальным данным, приведенным на рис. 1.1, в работе [69] определены характеристики ползучести для задачи (1.17), (1.4)

$$A = 10^{-5} \text{ ч}^{-1} (\text{кГ/мм}^2)^{-3.2}, B = 9.5 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1} (\text{кГ/мм}^2)^{-3.2}, n = 3.2, r = 2.1. \quad (1.21)$$

Перевод параметров (1.21) в систему СИ осуществляется заменой  $1 \text{ кГ/мм}^2 \approx 9.8 \text{ МПа}$ .

При значениях материальных констант (1.21) для задачи (1.17), (1.4) в работе [69] получены кривые одноосной ползучести  $\varepsilon$  при начальных напряжениях  $\sigma_0 = 39.2, 49$  и  $58.8$  МПа, обозначенные на рис. 1.1 штриховыми линиями.

В таблице 1 приведены теоретико-экспериментальные данные о процессе деформирования трубок из стали X18H10T, где  $t_e^*$  и  $\varepsilon_e^*$  – средние для каждого напряжения  $\sigma_0$  экспериментальные значения длительной прочности и соответствующей ему деформации ползучести,  $t_n^*$  – значение длительной прочности, рассчитанное по первой формуле (1.20),  $\varepsilon_n^*$  – значение деформации ползучести в момент разрушения, рассчитанное по второй формуле (1.18).

Таблица 1. Основные теоретико-экспериментальные данные для стали X18H10T

$\sigma_0$ , МПа	$t_e^*$ , ч	$\varepsilon_e^*$	$t_n^*$ , ч	$\varepsilon_n^*$
39.2	54.0	0.126	53.0	0.105
49	23.5	0.100	26.0	
58.8	15.5	0.082	14.5	

Отметим, что задача (1.17), (1.4) имеет особенность. В момент разрушения, т. е. при значении  $\omega = 1$ , правые части системы (1.17) теряют смысл. Таким образом, момент разрушения является ПОТ, что делает рассматриваемую задачу плохо обусловленной. Это может привести к затруднениям в процессе численного решения.

Рассмотрим применение для решения задачи (1.17), (1.4) традиционных явных методов численного интегрирования задачи Коши [97, с. 154-162]: **1)** метода Эйлера (ЭЯ), **2)** метода Эйлера-Коши (ЭКЯ), **3)** метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности (РК4Я).

Вначале используем для численного решения постоянный шаг интегрирования. В таблице 2 приведены результаты численного решения задачи (1.17), (1.4) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 39.2, 49$  и  $58.8$  МПа с шагом интегрирования  $h^t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  ч, где  $\varepsilon_n^*$  и  $\omega_n^*$  – расчетные значения деформации ползучести и параметра поврежденности в момент разрушения соответственно;  $t_n^*$  – расчетное значение длительной прочности конструкции;  $N_s$  – количество шагов по независимой переменной;  $t_c$  – время счета. Здесь  $h^t$  – шаг по аргументу  $t$ .

Указанные методы реализованны в форме комплекса программ в среде Matlab R2015a (см. приложение Г). Вычисления, здесь и далее, проводились на персональном компьютере Intel Core i5 – 2410M CPU 2.30 ГГц, 4.00 ГБ ОЗУ, видеокарта NVIDIA GeForce GT540M 2 ГБ, 32 – разрядная операционная система Windows 7 Домашняя базовая Service Pack 1.

Таблица 2. Расчетные данные для стали X18H10T при постоянном шаге интегрирования

$\sigma_0$ , МПа	$h^t$ , ч	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ						
39.2	$10^{-1}$	0.0944	0.8972	52.8	528	1.874
	$10^{-2}$	0.1	0.95	52.61	5261	16.37
	$10^{-3}$	0.1013	0.962	52.581	52581	162.3
	$10^{-4}$	0.1049	0.9961	52.5778	525778	1627
49	$10^{-1}$	0.1004	0.9539	26	260	1.059
	$10^{-2}$	0.1042	0.9895	25.78	2578	8.345
	$10^{-3}$	0.1047	0.9948	25.749	25749	78.3
	$10^{-4}$	0.1045	0.9932	25.7451	257451	786.6
58.8	$10^{-1}$	0.0999	0.9494	14.6	146	0.581
	$10^{-2}$	0.0962	0.9141	14.39	1439	4.37
	$10^{-3}$	0.1029	0.9778	14.369	14369	43.32
	$10^{-4}$	0.1042	0.9901	14.3655	143655	441.3
Метод ЭКЯ						
39.2	$10^{-1}$	0.099	0.9408	52.6	526	2.902
	$10^{-2}$	0.1023	0.9722	52.58	5258	27.42
	$10^{-3}$	0.1009	0.959	52.577	52577	261.9
	$10^{-4}$	0.1025	0.9736	52.5772	525772	2666
49	$10^{-1}$	0.0877	0.8334	25.7	257	1.578
	$10^{-2}$	0.0953	0.905	25.74	2574	13.02
	$10^{-3}$	0.0993	0.943	25.744	25744	129.2
	$10^{-4}$	0.1037	0.9848	25.7446	267446	1296
58.8	$10^{-1}$	0.1032	0.9803	14.4	144	0.885
	$10^{-2}$	0.0935	0.8884	14.36	1436	7.69
	$10^{-3}$	0.1005	0.9545	14.365	14365	73
	$10^{-4}$	0.1023	0.9722	14.365	143650	723.5
Метод РК4Я						
39.2	$10^{-1}$	0.0889	0.8445	52.5	525	4.178
	$10^{-2}$	0.0961	0.9133	52.57	5257	39.46
	$10^{-3}$	0.1012	0.9617	52.577	52577	393
	$10^{-4}$	0.1026	0.9743	52.5772	525772	3945
49	$10^{-1}$	0.0882	0.838	25.7	257	2.305
	$10^{-2}$	0.0955	0.9077	25.74	2574	19.45
	$10^{-3}$	0.0994	0.9442	25.744	25744	192.3
Продолжение таблицы 2 на следующей странице						

Таблица 2 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$h^t$ , ч	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
49	$10^{-4}$	0.1016	0.9654	25.7445	257445	1924
58.8	$10^{-1}$	0.0835	0.7936	14.3	143	1.156
	$10^{-2}$	0.0938	0.8911	14.36	1436	10.56
	$10^{-3}$	0.1019	0.9681	14.365	14365	107.3
	$10^{-4}$	0.1029	0.9776	14.365	143650	1078

Можно видеть, что расчетные данные, представленные в таблице 2, удовлетворительно согласуются с результатами работы [69], отраженными в таблице 1 и на рис. 1.1. Но для достижения высокой точности численного решения необходимо значительно измельчать шаг интегрирования, что делает применение постоянного шага интегрирования малоэффективным. Для преодоления этого недостатка, будем использовать переменный шаг интегрирования [100, с. 175-178; 1, с. 71-76] с контролем точности вычислений при оценке локальной погрешности вычислений по методу Рунге-Ромберга-Ричардсона (РРР метод). Для реализации контроля точности по методу РРР задаются параметры  $\theta_1$ , отвечающий за уменьшения шага при чрезмерном увеличении локальной погрешности, и  $\theta_2$ , применяемый для увеличения шага интегрирования в случае чрезмерного уменьшения локальной погрешности.

В таблице 3 даны результаты численного решения задачи (1.17), (1.4) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 39.2, 49$  и  $58.8$  МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ , где  $h_{\min}^t$  и  $h_{\max}^t$  – минимальное и максимальное значения шага интегрирования соответственно, остальные обозначения аналогичны используемым в таблице 2. Отметим, что при значениях параметров точности решения  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$  методом РК4Я не удалось получить удовлетворительного решения рассматриваемой задачи. В этом случае приходилось уменьшать значения параметра  $\theta_2$  до величины  $\theta_1/100$  для  $\theta_1 = 10^{-1}$  и  $\theta_1/5$  для  $\theta_1 = 10^{-2}$ , т. е. фактически увеличивать точность вычислений. Величина начального шага  $h_s^t = 1$  ч.

Таблица 3. Расчетные данные для стали X18H10T при переменном шаге интегрирования

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^t$ , ч	$h_{\max}^t$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ								
39.2	$10^{-1}$	0.1	0.9502	56.875	0.125	8	16	0.18
	$10^{-2}$	0.1051	0.9987	53.0378	$10^{-6}$	1	138	1.123
	$10^{-3}$	0.1052	0.9996	52.6203	$5 \cdot 10^{-10}$	0.0625	1525	9.098
	$10^{-4}$	0.1053	0.9999	52.5818	$6 \cdot 10^{-14}$	0.0078	14420	80.94
49	$10^{-1}$	0.1022	0.9712	27.9063	0.0313	4	15	0.203
	$10^{-2}$	0.1045	0.9931	25.966	$2 \cdot 10^{-6}$	0.5	140	1.089
Продолжение таблицы 3 на следующей странице								

Таблица 3 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , Ч	$h_{\min}^t$ , Ч	$h_{\max}^t$	$N_s$	$t_c$ , мс
49	$10^{-3}$	0.1052	0.9997	25.7658	$2 \cdot 10^{-10}$	0.0313	1514	8.847
	$10^{-4}$	0.1053	1	25.7468	$7 \cdot 10^{-15}$	0.0039	14365	80.98
58.8	$10^{-1}$	0.1003	0.9528	15.4766	0.0078	2	16	0.191
	$10^{-2}$	0.1049	0.9969	14.4901	$10^{-6}$	0.25	140	1.088
	$10^{-3}$	0.1053	1	14.3771	$7 \cdot 10^{-12}$	0.0313	1448	8.646
	$10^{-4}$	0.1053	0.9999	14.3662	$10^{-14}$	0.002	14699	82.17

## Метод ЭКЯ

39.2	$10^{-1}$	0.0956	0.9083	52.6563	0.0313	16	13	0.275
	$10^{-2}$	0.1045	0.9929	52.5784	$10^{-6}$	2	66	0.995
	$10^{-3}$	0.1052	0.999	52.5773	$5 \cdot 10^{-10}$	0.25	501	5.616
	$10^{-4}$	0.1053	1	52.5772	$4 \cdot 10^{-16}$	0.0313	4775	47.09
49	$10^{-1}$	0.0959	0.9114	25.7813	0.0313	8	12	0.255
	$10^{-2}$	0.1051	0.9981	25.7452	$4 \cdot 10^{-9}$	1	69	1.123
	$10^{-3}$	0.1052	0.9991	25.7446	$10^{-10}$	0.125	497	5.694
	$10^{-4}$	0.1053	0.9999	25.7446	$4 \cdot 10^{-15}$	0.0156	4786	47.11
58.8	$10^{-1}$	0.0935	0.8884	14.3828	0.0078	4	12	0.268
	$10^{-2}$	0.1042	0.9902	14.3656	$10^{-6}$	0.5	64	0.981
	$10^{-3}$	0.1052	0.999	14.365	$10^{-10}$	0.0625	506	5.631
	$10^{-4}$	0.1053	0.9999	14.365	$7 \cdot 10^{-15}$	0.0078	4750	46.93

## Метод РК4Я

39.2	$10^{-1}$	0.0942	0.8953	52.5625	0.0625	2	30	0.581
	$10^{-2}$	0.1017	0.9657	52.5764	$2 \cdot 10^{-4}$	4	27	0.669
	$10^{-3}$	0.1038	0.9857	52.5772	$4 \cdot 10^{-6}$	1	119	2.622
	$10^{-4}$	0.1052	0.9994	52.5772	$7 \cdot 10^{-12}$	0.125	985	15.6
49	$10^{-1}$	0.0962	0.9136	25.75	0.25	1	28	0.512
	$10^{-2}$	0.0973	0.9243	25.7422	0.0078	2	22	0.519
	$10^{-3}$	0.1037	0.985	25.7446	$2 \cdot 10^{-6}$	0.5	117	2.296
	$10^{-4}$	0.1051	0.9983	25.7446	$2 \cdot 10^{-10}$	0.0625	978	15.6
58.8	$10^{-1}$	0.089	0.8453	14.3438	0.0313	1	18	0.405
	$10^{-2}$	0.1003	0.9532	14.3647	$5 \cdot 10^{-4}$	1	27	0.688
	$10^{-3}$	0.1046	0.9941	14.365	$10^{-7}$	0.5	122	2.479
	$10^{-4}$	0.1052	0.9994	14.365	$7 \cdot 10^{-12}$	0.0313	996	15.75

На рис. 1.2 изображены кривые ползучести для задачи чистого растяжения трубок из стали X18H10T, полученные методом РК4Я с переменным шагом интегрирования при контроле точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Кривые

ползучести, полученные с использованием постоянного шага интегрирования, имеют аналогичный вид.

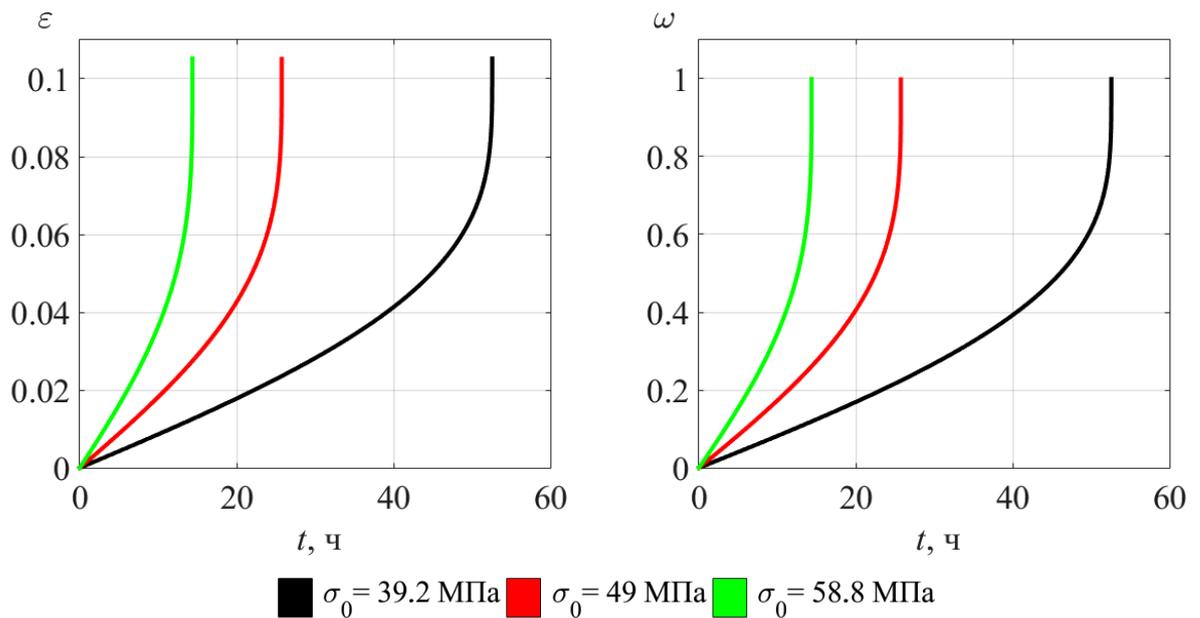


Рис. 1.2. Кривые ползучести для стали X18N10T, метод РК4Я, переменный шаг,  $\theta_1 = 10^{-4}$

На рис. 1.3 даны зависимости шага интегрирования от аргумента  $t$  при использовании контроля точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Введены следующие обозначения: а – метод ЭЯ, б – метод ЭКЯ, с – метод РК4Я.

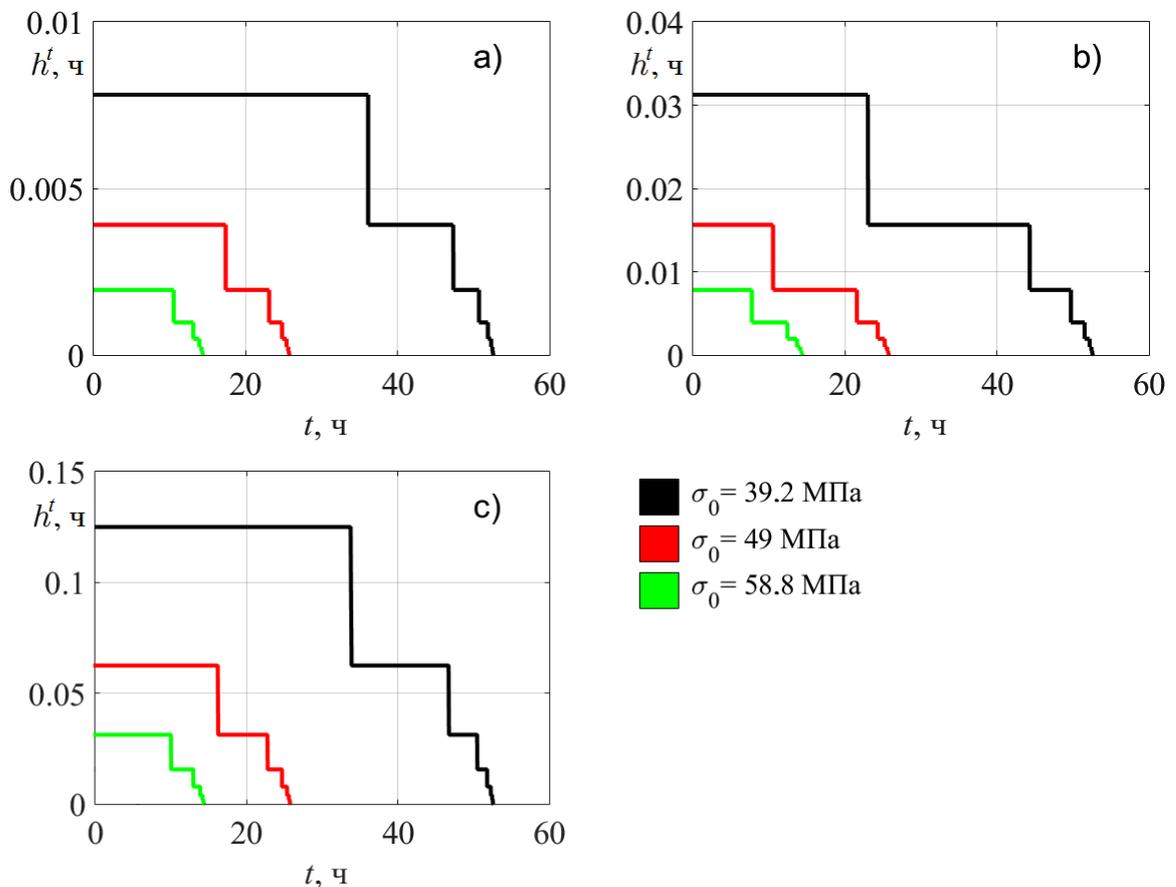


Рис. 1.3. Зависимость шага  $h^t$  от аргумента  $t$  при решении задачи (1.17), (1.4)

## 1.2.2 Моделирование процесса ползучести для образцов из сплава ОТ-4

Существенным недостатком при численном решении задачи (1.17), (1.4) является невозможность нахождения ее аналитического решения, т. е. нельзя оценить абсолютную или относительную погрешность полученного приближенного решения. Далее рассмотрим задачу, допускающую аналитическое решение. В качестве такой, выберем задачу одноосного растяжения плоских образцов (толщина 1.5 мм, общая длина 180 мм, длина рабочей части 60 мм) из титанового сплава ОТ-4 при постоянных напряжениях и температуре 500 °С [89]. Для ее описания будем использовать конкретизацию определяющих соотношений энергетического варианта теории ползучести (1.11)-(1.13) вида

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dA}{dt}, \\ \frac{dA}{dt} = \frac{f(\sigma)}{\Psi(A)}. \end{cases} \quad (1.22)$$

В качестве функции напряжения будем использовать экспоненциальную зависимость

$$f(\sigma) = Ke^{\beta\sigma}, \quad (1.23)$$

а функцию удельной энергии рассеяния  $A$ , учитывая отсутствие упрочнения материала, примем в форме

$$\Psi(A) = (A_* - A)^{-m}. \quad (1.24)$$

Здесь  $K$ ,  $\beta$ ,  $m$  – характеристики материала.

Подставляя функции (1.23)-(1.24) в систему (1.22), при  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ , получим

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sigma_0(A_* - A)^m}, \\ \frac{dA}{dt} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{(A_* - A)^m}. \end{cases} \quad (1.25)$$

В качестве начальных условий для системы (1.25) примем

$$\varepsilon(0) = 0, \quad A(0) = 0. \quad (1.26)$$

Найдем аналитическое решение задачи (1.25)-(1.26), используя результаты диссертации Горева Б. В. [20] и статьи [23]. Из второго уравнения системы (1.25) получим

$$\int_0^A (A_* - A)^m dA = \int_0^t Ke^{\beta\sigma_0} dt = Ke^{\beta\sigma_0} t.$$

Вычисляя интеграл, стоящий слева,

$$\int_0^A (A_* - A)^m dA = \int_{A_*-A}^{A_*} \xi^m d\xi = \frac{1}{m+1} [A_*^{m+1} - (A_* - A)^{m+1}],$$

найдем выражение для удельной энергии рассеяния, которое запишем в форме

$$A(t) = A_* - [A_*^{m+1} - K(m+1)e^{\beta\sigma_0 t}]^{1/(m+1)}. \quad (1.27)$$

Используя соотношение (1.27), получим деформацию ползучести

$$\varepsilon(t) = \frac{A(t)}{\sigma_0} = \varepsilon_* - \left[ \varepsilon_*^{m+1} - \frac{K(m+1)e^{\beta\sigma_0 t}}{\sigma_0^{m+1}} \right]^{1/(m+1)}, \quad \varepsilon_* = A_*/\sigma_0. \quad (1.28)$$

При подстановке в формулу (1.27) вместо удельной энергии рассеяния ее критического значения  $A_*$ , можно найти величину длительной прочности конструкции

$$t^* = A_*^{m+1} \cdot [K(m+1)e^{\beta\sigma_0}]^{-1}. \quad (1.29)$$

Отметим также, что в случае переменных напряжений аналитическое решение задачи (1.25)-(1.26) удастся получить в очень редких случаях.

В начале 70-х годов О.В. Сосниным с коллегами был проведен ряд экспериментов на ползучесть плоских образцов из титанового сплава ОТ-4 при постоянных и переменных напряжениях в диапазоне температур  $T = 400 - 550^\circ \text{C}$  [93, 94].

По результатам экспериментов, для определяющих уравнений (1.25) были определены характеристики ползучести, которые для температуры  $T = 500^\circ \text{C}$  имеют вид [89]

$$A_* = 9 \text{ кГ/мм}^2, m = 3, \beta = 0.35 \text{ (кГ/мм}^2\text{)}^{-1}, K = 0.111 \text{ (кГ/мм}^2\text{)}^4 \text{ ч}^{-1}. \quad (1.30)$$

Перевод параметров (1.30) в систему СИ осуществляется заменой  $1 \text{ кГ/мм}^2 \approx 9.8 \text{ МПа}$ .

В таблице 4 приведены теоретико-экспериментальные данные о процессе деформирования плоских образцов из титанового сплава ОТ-4 для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 98, 112.7$  и  $147 \text{ МПа}$ , где  $t_n^*, \varepsilon_n^*, A_n^*$  и  $t_a^*, \varepsilon_a^*, A_a^*$  – расчетные данные, полученные в статье [89], и аналитические значения, рассчитанные по формулам (1.27)-(1.29), для длительной прочности, деформации ползучести и удельной энергии рассеяния в момент разрушения соответственно, остальные обозначения аналогичны, используемым в таблице 1.

Таблица 4. Основные теоретико-экспериментальные данные для титанового сплава ОТ-4

$\sigma_0, \text{ МПа}$	$t_e^*, \text{ ч}$	$\varepsilon_e^*$	$t_n^*, \text{ ч}$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*, \text{ МДж/м}^3$	$t_a^*, \text{ ч}$	$\varepsilon_a^*$	$A_a^*, \text{ МДж/м}^3$
98	444	0.71	445	0.9	88.2	446.2276	0.9	88.2
112.7	211	0.51	265	0.78		263.9683	0.7826	
147	65	0.6	78	0.6		77.5427	0.6	

Как и при моделировании растяжения образцов из стали Х18Н10Т, задача (1.25)-(1.26) имеет одну предельную особую точку, приходящуюся на момент разрушения. Можно также ожидать, что приближение к особой точке вызовет затруднение при численном решении с использованием явных методов.

Рассмотрим приближенное решение задачи (1.25)-(1.26) с характеристиками ползучести (1.30). В качестве методов численного интегрирования задачи Коши, используем методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я.

В таблице 5 приведены результаты численного решения задачи (1.25)-(1.26) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 98, 112.7$  и  $147$  МПа с шагом интегрирования  $h^t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  ч. Обозначения аналогичны приведенным в таблице 2,  $A_n^*$  – расчетное значение удельной энергии рассеяния в момент разрушения.

Таблица 5. Расчетные данные для титанового сплава ОТ-4 при постоянном шаге

$\sigma_0$ , МПа	$h^t$ , ч	$\epsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ						
98	$10^{-1}$	0.8508	83.379	446.6	4466	12.49
	$10^{-2}$	0.8611	84.384	446.27	44627	122.48
	$10^{-3}$	0.8844	86.6702	446.233	446223	1243.1
	$10^{-4}$	0.8938	87.5903	446.2282	4462282	12575
112.7	$10^{-1}$	0.7207	81.2269	264.3	2643	7.18
	$10^{-2}$	0.7475	84.2422	264.01	26401	73.13
	$10^{-3}$	0.7817	88.0972	263.974	263974	736.4
	$10^{-4}$	0.7724	87.0491	263.9689	2639689	7173
147	$10^{-1}$	0.5214	76.6461	77.8	778	2.481
	$10^{-2}$	0.564	82.906	77.58	7758	21.5
	$10^{-3}$	0.5749	84.5047	77.547	77547	213.8
	$10^{-4}$	0.5928	87.1449	77.5433	775433	2157.3
Метод ЭКЯ						
98	$10^{-1}$	0.8151	79.8815	446.2	4462	18.86
	$10^{-2}$	0.8792	86.159	446.23	44623	185.75
	$10^{-3}$	0.8693	85.1932	446.227	446227	1868.7
	$10^{-4}$	0.883	86.5367	446.2275	4462275	18870
112.7	$10^{-1}$	0.7605	85.7052	264	2640	11.24
	$10^{-2}$	0.7555	85.1494	263.97	26397	109.86
	$10^{-3}$	0.7556	85.1534	263.968	263968	1110.6
	$10^{-4}$	0.7706	86.8503	263.9683	2639683	10945
147	$10^{-1}$	0.505	74.2277	77.5	775	3.474
	$10^{-2}$	0.5508	80.9699	77.54	7754	31.97
	$10^{-3}$	0.59	86.7275	77.543	77543	325.9
	$10^{-4}$	0.5851	86.0025	77.5427	775427	3260.7
Метод РК4Я						
98	$10^{-1}$	0.8202	80.3785	446.2	4462	28.37
	$10^{-2}$	0.8423	82.5437	446.22	44622	283.3
Продолжение таблицы 5 на следующей странице						

Таблица 5 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$h^t$ , ч	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
98	$10^{-3}$	0.87	85.2604	446.227	446227	2826.5
	$10^{-4}$	0.8835	86.5788	446.2275	4462275	28387
112.7	$10^{-1}$	0.6834	77.0151	263.9	2639	16.53
	$10^{-2}$	0.724	81.5956	263.96	26396	165.97
	$10^{-3}$	0.757	85.3161	263.968	263968	1673.8
	$10^{-4}$	0.7741	87.2374	263.9683	2639683	16786
147	$10^{-1}$	0.5081	74.6898	77.5	775	5.077
	$10^{-2}$	0.5538	81.4085	77.54	7754	49.25
	$10^{-3}$	0.5669	83.3298	77.542	77542	490.1
	$10^{-4}$	0.5863	86.1794	77.5427	775427	4926.2

В таблице 6 приведены результаты численного решения задачи (1.25)-(1.26) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 98, 112.7$  и  $147$  МПа с переменным шагом интегрирования при оценке точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Величина начального шага  $h_s^t = 1$  ч. Обозначения аналогичны используемым в таблицах 3 и 5.

Таблица 6. Расчетные данные для титанового сплава ОТ-4 при переменном шаге

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^t$ , ч	$h_{\max}^t$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ								
98	$10^{-1}$	0.9	88.1997	446.5513	$3 \cdot 10^{-11}$	0.5	2828	14.34
	$10^{-2}$	0.9	88.1982	446.261	$10^{-14}$	0.0625	28031	137.63
	$10^{-3}$	0.9	88.1999	446.2309	$9 \cdot 10^{-19}$	0.0078	282206	1394.4
	$10^{-4}$	0.9	88.2	446.2279	$10^{-22}$	$5 \cdot 10^{-4}$	2838416	13999
112.7	$10^{-1}$	0.7824	88.1734	264.1606	$2 \cdot 10^{-10}$	0.5	2838	14.368
	$10^{-2}$	0.7826	88.1994	263.9877	$9 \cdot 10^{-16}$	0.0313	28225	137.88
	$10^{-3}$	0.7826	88.1997	263.9703	$3 \cdot 10^{-18}$	0.0039	280699	1388.5
	$10^{-4}$	0.7826	88.2	263.9685	$10^{-22}$	$5 \cdot 10^{-4}$	2836479	13972
147	$10^{-1}$	0.5999	88.1799	77.6008	$3 \cdot 10^{-11}$	0.125	2815	14.23
	$10^{-2}$	0.6	88.1987	77.5482	$4 \cdot 10^{-15}$	0.0156	28631	140.02
	$10^{-3}$	0.6	88.1997	77.5433	$9 \cdot 10^{-19}$	$10^{-3}$	281817	1375.8
	$10^{-4}$	0.6	88.2	77.5428	$10^{-23}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	2815748	13886

Метод ЭКЯ

98	$10^{-1}$	0.8972	87.9238	446.2303	$6 \cdot 10^{-8}$	4	442	4.027
Продолжение таблицы 6 на следующей странице								

Таблица 6 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^t$ , ч	$h_{\max}^t$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
98	$10^{-2}$	0.9	88.1978	446.2276	$4 \cdot 10^{-15}$	0.5	4272	34.18
	$10^{-3}$	0.9	88.1992	446.2276	$10^{-17}$	0.0313	42881	332.1
	$10^{-4}$	0.9	88.1999	446.2276	$3 \cdot 10^{-21}$	0.0039	421889	3282.1
112.7	$10^{-1}$	0.7818	88.112	263.9699	$2 \cdot 10^{-9}$	2	448	4.163
	$10^{-2}$	0.7826	88.1934	263.9683	$3 \cdot 10^{-14}$	0.25	4250	34.34
	$10^{-3}$	0.7826	88.199	263.9683	$10^{-17}$	0.0313	42509	330.9
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9683	$2 \cdot 10^{-21}$	0.002	426036	3321.3
147	$10^{-1}$	0.5995	88.1314	77.5432	$10^{-10}$	1	454	4.235
	$10^{-2}$	0.6	88.1954	77.5427	$4 \cdot 10^{-15}$	0.0625	4271	33.92
	$10^{-3}$	0.6	88.1976	77.5427	$6 \cdot 10^{-17}$	0.0078	42200	329.1
	$10^{-4}$	0.6	88.1999	77.5427	$10^{-22}$	$10^{-3}$	426692	3324.2

## Метод РК4Я

98	$10^{-1}$	0.8912	87.334	446.2275	$4 \cdot 10^{-6}$	16	111	2.092
	$10^{-2}$	0.8992	88.124	446.2276	$2 \cdot 10^{-10}$	2	876	11.39
	$10^{-3}$	0.8999	88.1886	446.2276	$2 \cdot 10^{-13}$	0.25	8505	106.2
	$10^{-4}$	0.9	88.1998	446.2276	$3 \cdot 10^{-20}$	0.0156	85722	1040.3
112.7	$10^{-1}$	0.7724	87.0492	263.9683	$2 \cdot 10^{-5}$	8	109	2.017
	$10^{-2}$	0.7825	88.1876	263.9683	$5 \cdot 10^{-13}$	1	887	11.83
	$10^{-3}$	0.7826	88.1972	263.9683	$4 \cdot 10^{-15}$	0.125	8472	99.8
	$10^{-4}$	0.7826	88.1995	263.9683	$9 \cdot 10^{-19}$	0.0156	84981	1032.6
147	$10^{-1}$	0.5922	87.0587	77.5427	$4 \cdot 10^{-6}$	4	105	1.915
	$10^{-2}$	0.5993	88.1007	77.5427	$5 \cdot 10^{-10}$	0.5	888	12.36
	$10^{-3}$	0.5999	88.1899	77.5427	$6 \cdot 10^{-14}$	0.0313	8504	106
	$10^{-4}$	0.6	88.1987	77.5427	$10^{-17}$	0.0039	84371	1020.2

На рис. 1.4 изображены кривые ползучести для задачи деформирования образцов из сплава ОТ-4, полученные методом РК4Я с переменным шагом интегрирования при контроле точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-4}$  и  $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ . Точками отмечены экспериментальные данные [89]. Квадратными маркерами отмечены кривые, соответствующие точным аналитическим решениям (1.27)-(1.29). Треугольными маркерами отмечены приближенные решения задачи (1.25)-(1.26). Конец кривой отмечается последним маркером соответствующего типа. Фактически кривые, соответствующие расчетным и аналитическим решениям, сливаются в одну. Кривые ползучести, полученные с использованием постоянного шага интегрирования, имеют аналогичный вид. Результаты эксперимента для сплава ОТ-4 приведены в приложении Б.

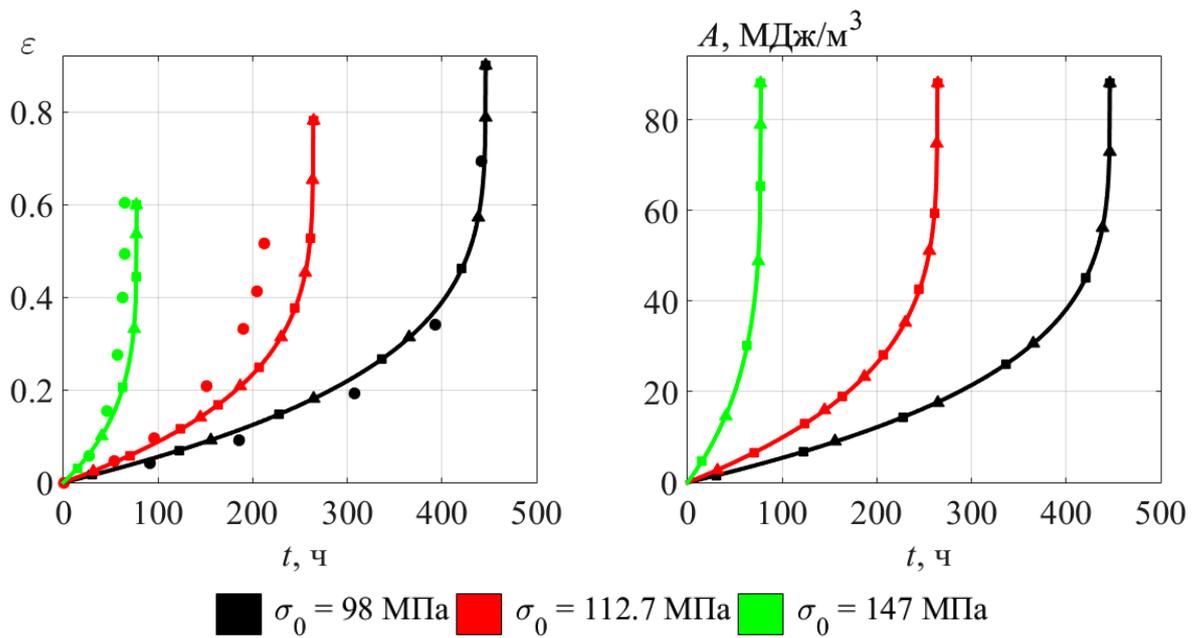


Рис. 1.4. Кривые ползучести для сплава ОТ-4, метод РК4Я, переменный шаг,  $\theta_1 = 10^{-4}$

На рис. 1.5 даны зависимости шага интегрирования от аргумента  $t$  для задачи (1.25)-(1.26) при использовании контроля точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-4}$  и  $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ . Введены следующие обозначения: а – метод ЭЯ, б – метод ЭКЯ, с – метод РК4Я.

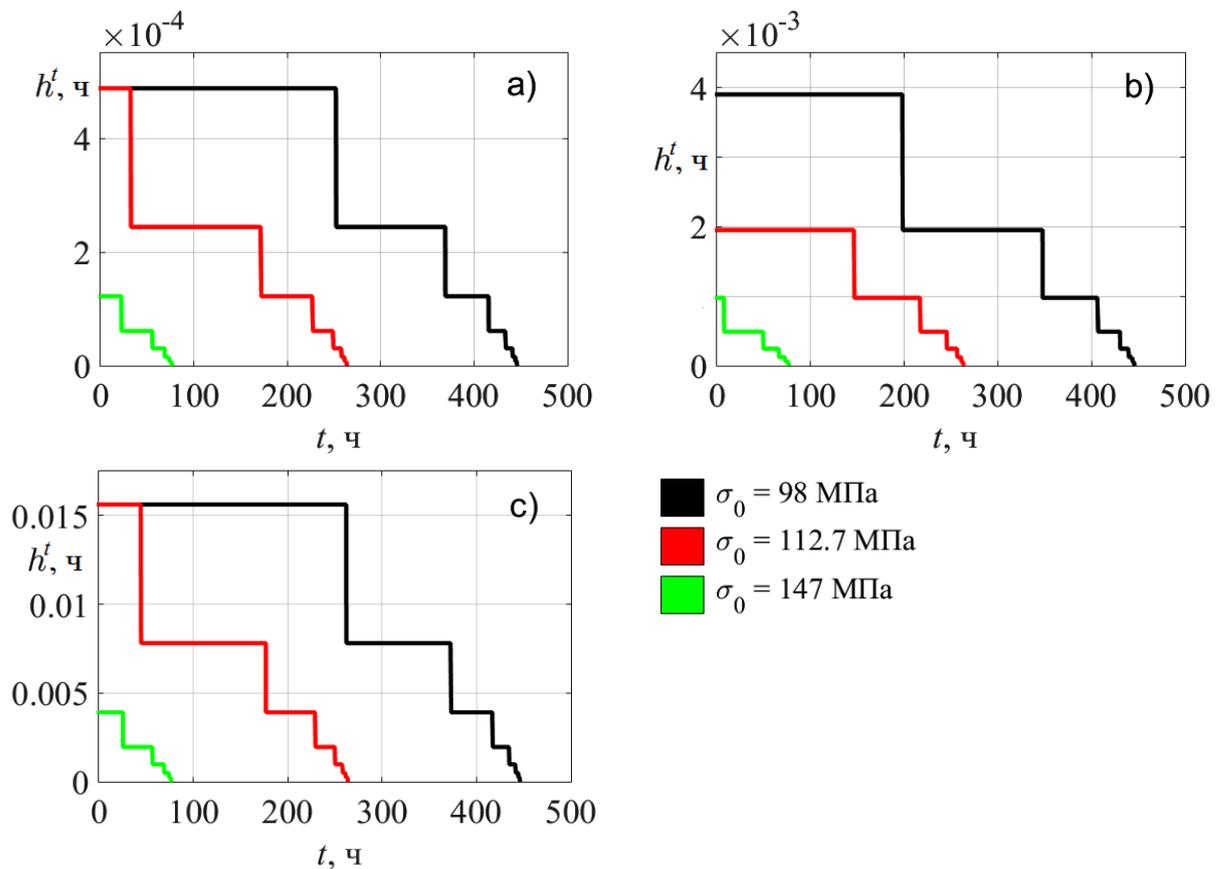


Рис. 1.5. Зависимость шага  $h^t$  от аргумента  $t$  для задачи (1.25)-(1.26)

Используя аналитическое решение (1.27)-(1.30) задачи (1.25)-(1.26), рассчитаем относительную погрешность деформации ползучести  $\delta\varepsilon_i$  и удельной работы рассеяния  $\delta A_i$  в  $i$ -ой точке по формулам [2, с. 22-25]

$$\delta\varepsilon_i = \frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon(t_n^{(i)})} \cdot 100\%, \quad \delta A_i = \frac{\Delta A_i}{A(t_n^{(i)})} \cdot 100\%, \quad (1.31)$$

где  $\Delta\varepsilon_i = \left| \varepsilon(t_n^{(i)}) - \varepsilon_n^{(i)} \right|$  и  $\Delta A_i = \left| A(t_n^{(i)}) - A_n^{(i)} \right|$  – абсолютные погрешности деформации ползучести и удельной работы рассеяния соответственно,  $\varepsilon_n^{(i)}$  и  $A_n^{(i)}$  – расчетные значения деформации ползучести и удельной энергии рассеяния в момент времени  $t_n^{(i)}$  соответственно,  $\varepsilon(t_n^{(i)})$  и  $A(t_n^{(i)})$  – точные значения деформации ползучести и удельной энергии рассеяния в момент времени  $t_n^{(i)}$ , рассчитанные по формулам (1.27)-(1.30).

На рис. 1.6 даны зависимости относительной погрешности  $\delta A$  от аргумента  $t$  для задачи (1.25)-(1.26) при использовании метода РК4Я: сплошные линии – переменный шаг ( $\theta_1 = 10^{-3}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ ), штрих пунктирная линия – постоянный шаг ( $h^t = 10^{-3}$  ч).

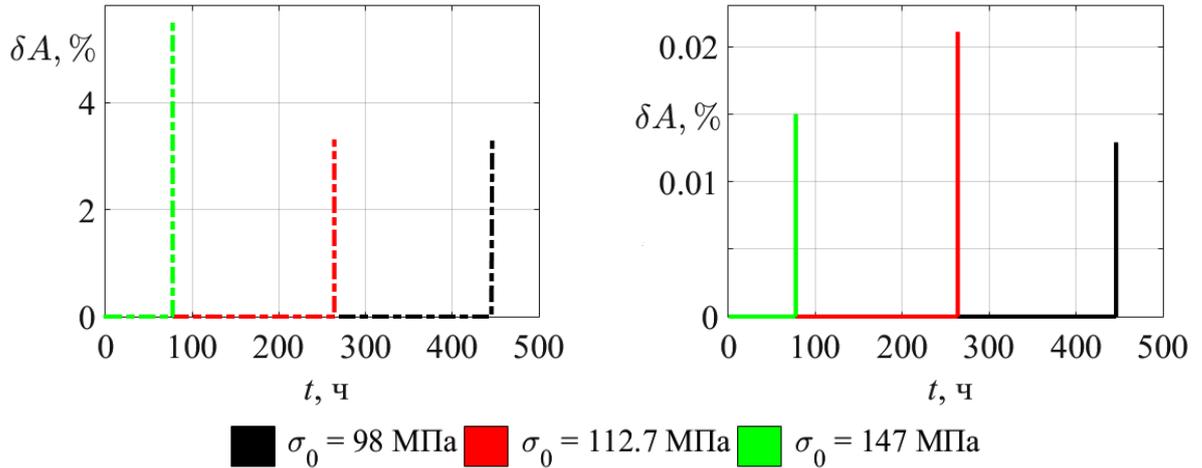


Рис. 1.6. Зависимость погрешности  $\delta A$  от аргумента  $t$  для задачи (1.25)-(1.26)

В таблице 7 приведена относительная погрешность удельной работы рассеяния при расчете задачи (1.25)-(1.26) методами ЭЯ, ЭКЯ, РК4Я с постоянным и переменным шагом, где для относительной погрешности удельной работы рассеяния вычислены следующие величины [28, с. 32-33, 36]:  $\delta A_{\max}$  – максимальное значение,  $\delta A_{\text{med}}$  – медиана,  $\delta A_{\text{av}}$  – среднее значение и  $\delta A_{\text{dev}}$  – среднее квадратическое отклонение от среднего значения. Указанные величины используются для оценки точности полученных численных решений и будут проанализированы в параграфе 1.2.3.

Относительная погрешность деформации ползучести не выписывается, так как она с точностью до округления равна относительной погрешности удельной энергии рассеяния.

**Замечание 1.1.** По аналогии с относительной погрешностью можно также рассчитать абсолютную погрешность деформации ползучести и удельной работы рассеяния и использовать ее для оценки точности решения. Однако, для задачи (1.25)-(1.26) и в дальнейших исследованиях абсолютная погрешность не дает новой информации о погрешности приближенного решения.

Таблица 7. Относительная погрешность  $\delta A$  при численном решении задачи (1.25)-(1.26)

$\sigma_0, \text{МПа}$	Постоянный шаг					Переменный шаг				
	$h^t, \text{ч}$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$	$\theta_1$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭЯ										
98	$10^{-1}$	15.416	0.054	0.015	0.432	$10^{-1}$	18.409	2.79	0.253	5.094
	$10^{-2}$	8.01	0.005	0.002	0.084	$10^{-2}$	9.937	0.86	0.026	2.217
	$10^{-3}$	5.049	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0.017	$10^{-3}$	5.416	0.26	0.003	0.934
	$10^{-4}$	3.099	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	0.003	$10^{-4}$	2.975	0.079	$3 \cdot 10^{-4}$	0.389
112.7	$10^{-1}$	16.384	0.091	0.026	0.612	$10^{-1}$	18.406	2.789	0.254	5.089
	$10^{-2}$	9.351	0.009	0.003	0.124	$10^{-2}$	9.877	0.844	0.026	2.192
	$10^{-3}$	7.066	$9 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	0.027	$10^{-3}$	5.433	0.264	0.003	0.943
	$10^{-4}$	3.184	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	0.005	$10^{-4}$	2.987	0.08	$3 \cdot 10^{-4}$	0.393
147	$10^{-1}$	20.54	0.297	0.089	1.346	$10^{-1}$	18.554	2.863	0.262	5.159
	$10^{-2}$	12.629	0.031	0.009	0.286	$10^{-2}$	9.794	0.822	0.025	2.159
	$10^{-3}$	6.785	0.003	$9 \cdot 10^{-4}$	0.056	$10^{-3}$	5.411	0.262	0.003	0.939
	$10^{-4}$	4.63	$3 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-5}$	0.012	$10^{-4}$	3.004	0.082	$3 \cdot 10^{-4}$	0.397
Метод ЭКЯ										
98	$10^{-1}$	9.432	0.002	$4 \cdot 10^{-7}$	0.142	$10^{-1}$	4.948	0.321	0.002	1.032
	$10^{-2}$	3.723	$10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-9}$	0.021	$10^{-2}$	1.604	0.031	$2 \cdot 10^{-5}$	0.187
	$10^{-3}$	3.409	$8 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-10}$	0.005	$10^{-3}$	0.496	0.003	$2 \cdot 10^{-7}$	0.029
	$10^{-4}$	1.886	$4 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.159	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005
112.7	$10^{-1}$	9.367	0.005	$10^{-6}$	0.19	$10^{-1}$	5.052	0.334	0.002	1.062
	$10^{-2}$	3.692	$3 \cdot 10^{-4}$	$10^{-8}$	0.031	$10^{-2}$	1.602	0.03	$2 \cdot 10^{-5}$	0.184
	$10^{-3}$	3.454	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-10}$	0.007	$10^{-3}$	0.502	0.003	$2 \cdot 10^{-7}$	0.03
Продолжение таблицы 7 на следующей странице										

Таблица 7 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	Постоянный шаг					Переменный шаг				
	$h^t, \text{ч}$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$	$\theta_1$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$
112.7	$10^{-4}$	1.53	$9 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	0.157	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005
147	$10^{-1}$	15.842	0.022	$10^{-5}$	0.568	$10^{-1}$	5.05	0.355	0.002	1.101
	$10^{-2}$	8.197	0.001	$10^{-7}$	0.093	$10^{-2}$	1.593	0.03	$2 \cdot 10^{-5}$	0.183
	$10^{-3}$	3.492	$7 \cdot 10^{-5}$	$10^{-9}$	0.014	$10^{-3}$	0.503	0.003	$2 \cdot 10^{-7}$	0.03
	$10^{-4}$	2.492	$4 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-10}$	0.003	$10^{-4}$	0.158	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005
Метод РК4Я										
98	$10^{-1}$	8.868	0.002	$4 \cdot 10^{-12}$	0.133	$10^{-1}$	0.982	0.031	$2 \cdot 10^{-5}$	0.133
	$10^{-2}$	6.413	$10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-11}$	0.03	$10^{-2}$	0.132	$8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.008
	$10^{-3}$	3.333	$7 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-10}$	0.005	$10^{-3}$	0.013	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	1.838	$4 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.016	$6 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-4}$
112.7	$10^{-1}$	12.681	0.005	$3 \cdot 10^{-12}$	0.247	$10^{-1}$	1.305	0.022	$2 \cdot 10^{-5}$	0.132
	$10^{-2}$	7.488	$3 \cdot 10^{-4}$	$10^{-11}$	0.046	$10^{-2}$	0.204	0.002	$2 \cdot 10^{-9}$	0.016
	$10^{-3}$	3.27	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-10}$	0.006	$10^{-3}$	0.021	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$4 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	1.091	$5 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.023	$7 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-4}$
147	$10^{-1}$	15.318	0.02	$3 \cdot 10^{-12}$	0.549	$10^{-1}$	1.294	0.026	$2 \cdot 10^{-5}$	0.137
	$10^{-2}$	7.7	$10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-12}$	0.087	$10^{-2}$	0.113	$6 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.006
	$10^{-3}$	5.522	$7 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-11}$	0.02	$10^{-3}$	0.015	$9 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	2.291	$3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-10}$	0.003	$10^{-4}$	0.017	$6 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-4}$

### 1.2.3 Анализ полученных расчетных данных

При анализе результатов приближенного решения задачи чистого растяжения образцов из нержавеющей стали X18H10T, описываемой уравнениями (1.17) с начальными условиями (1.4), и задачи деформирования плоских образцов из титанового сплава ОТ-4, описываемой уравнениями (1.25) с начальными условиями (1.26), можно отметить следующее:

1. Результаты решения обеих указанных задач методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я, представленные в таблицах 2, 3, 5, 6 и на рис. 1.2, 1.4, удовлетворительно согласуются как с экспериментальными [69, 93, 94], так и с расчетными данными [69, 89].
2. При решении рассматриваемых задач с постоянным шагом интегрирования не удается близко подойти к ПОТ, приходящейся на момент разрушения. Фактически, при большом шаге происходит перескок ПОТ. В случае же уменьшения шага происходит многократное возрастание вычислительных затрат и времени счета. Это можно видеть из таблиц 2, 5.
3. Использование переменного шага позволяет ближе подойти к моменту разрушения. Для стали X18H10T уменьшается количество шагов по независимой переменной и время счета в пяти и более раз. Для сплава ОТ-4 применение методов ЭКЯ и РК4Я также показывает уменьшение вычислительных затрат до десятков раз. Однако, метод ЭЯ наоборот дает увеличение количества шагов и времени счета до шести раз, что можно связать с жесткостью задачи. Это можно видеть из таблиц 3 и 6.
4. На рис. 1.3, 1.5 видно, что шаг интегрирования монотонно убывает при приближении к особой точке (вплоть до величин порядка  $10^{-23}$ ). Это показывает малоэффективность и ресурсоемкость применения постоянного шага интегрирования для данного класса задач при необходимости высокой точности решения.

Сравним времена счета (таблицы 2, 3, 5, 6) для различных методов:

1. При постоянном шаге наименьшее время счета показывает метод ЭЯ, наибольшее – метод РК4Я. При переменном шаге наоборот. Это объясняется тем, что метод РК4Я является самым трудоемким из используемых, однако он имеет четвертый порядок точности, что при переменном шаге интегрирования дает возможность использования более большого шага.
2. Для рассматриваемых задач при постоянном шаге интегрирования наблюдается уменьшение времени счета при увеличении значения начального напряжения, что связано с уменьшением длительной прочности конструкции. При переменном шаге время счета практически не зависит от величины начального напряжения.

Проанализируем относительную погрешность, рассчитанную для удельной работы рассеяния (таблица 7, рис. 1.6):

1. В целом, средние значения относительной погрешности адекватно соответствуют задаваемому значению точности (шагу интегрирования) для каждого метода.

2. При увеличении точности (уменьшении шага) относительная погрешность уменьшается. Отметим, что для метода РК4Я погрешность при  $\theta_1 = 10^{-4}$  остается на уровне, соответствующем  $\theta_1 = 10^{-3}$ , а для некоторых значений  $\sigma_0$  превышает его.
3. С увеличением порядка точности применяемого численного метода уменьшается относительная погрешность результата. Это подтверждают данные таблицы 7: наименьшую относительную погрешность дает метод РК4Я, наибольшую – метод ЭЯ.
4. Для обеих задач основная погрешность скапливается в малой окрестности ПОТ (см. рис. 1.6). Размер окрестности зависит от определяющих соотношений, а именно скорости роста интегральной кривой в окрестности ПОТ. Это справедливо как для постоянного, так и переменного шага интегрирования.
5. Вне окрестности ПОТ относительная погрешность может быть на порядки меньше своего среднего значения, приближаясь по величине к медиане.
6. При постоянном шаге интегрирования в окрестность ПОТ попадает лишь малое число расчетных значений, в случае использования переменного шага количество расчетных значений в окрестности ПОТ значительно увеличивается. По этой причине, при переменном шаге погрешность, скапливающаяся в окрестности ПОТ, приводит к значительному увеличению среднего значения, среднего квадратического отклонения и медианы относительной погрешности. Для постоянного шага это влияние не столь существенно.

Обобщим сказанное. Применение явных методов численного решения задачи Коши с постоянным шагом интегрирования для расчета длительной прочности конструкций из неупрочняющихся материалов может требовать значительных вычислительных ресурсов. При этом, постоянный шаг позволяет получить решение высокой точности вне некоторой окрестности ПОТ, но не дает возможности близко подойти к ней. Более рациональным является применение переменного шага интегрирования с оценкой локальной погрешности в каждой точке по методу РРР, который в большинстве случаев позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты (в том числе и время счета), а также дает возможность получить решения с заданной точностью. Применения специальных методов решения плохо обусловленных задач Коши не требуется.

### 1.3 Дифференциальные уравнения с двумя предельными особыми точками

В разделе 1.2 показано, что явные методы численного решения задачи Коши являются эффективным инструментом расчета длительной прочности элементов конструкций из неупрочняющихся материалов в условиях ползучести. Однако, как уже упоминалось во введении, у многих используемых на практике конструкционных материалов имеется ярко выраженная начальная стадия неустановившейся ползучести, иными словами, упрочнение

материала [95]. Неучет начальной стадии ползучести может привести к значительному расхождению экспериментальных и расчетных данных. Для конструкций из упрочняющихся материалов проведем расчет длительной прочности в условиях ползучести с использованием традиционных методов численного интегрирования начальной задачи.

### 1.3.1 Модель растяжения образцов из стали 45

Рассмотрим задачу одноосного растяжения цилиндрических образцов из стали 45, широко используемой в авиации (например, для создания деталей трубопроводной арматуры после закалки и отпуска), при постоянных напряжениях и температуре [22]. Для описания данной задачи будем использовать уравнения теории структурных параметров Ю. Н. Работнова вида (1.3), в которых функции напряжения примем в виде степенных зависимостей

$$f_1(\sigma) = B_\varepsilon \sigma^n, \quad f_2(\sigma) = B_\omega \sigma^k, \quad (1.32)$$

а функцию параметра поврежденности запишем в форме

$$\Psi(\omega) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m. \quad (1.33)$$

Здесь  $B_\varepsilon$ ,  $B_\omega$ ,  $n$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $m$  – характеристики ползучести материала.

Подставляя соотношения (1.32), (1.33) в систему уравнений (1.3), для случая постоянных напряжений, получим [22]

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}. \end{cases} \quad (1.34)$$

В качестве начальных условий для системы (1.34) выберем (1.4).

Характеристики ползучести для системы уравнений (1.34) определены по результатам эксперимента в статье [22] для образцов диаметра  $d = 42$  мм из стали 45 при температуре  $T = 850^\circ \text{C}$  и имеют вид

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &= 9.967 \cdot 10^{-19} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}, \quad B_\omega = 9.689 \cdot 10^{-17} \text{ МПа}^{-k} \text{ с}^{-1}, \\ \alpha &= 0.849, \quad n = 8.1, \quad k = 6.97, \quad m = 2.83. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Задача (1.34), (1.4) допускает аналитическое решение, которое можно получить тем же способом, что и в параграфе 1.2.2. Так, проинтегрировав второе уравнение системы (1.34), получим выражение для параметра поврежденности

$$\omega(t) = \left\{ 1 - [1 - (m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k t]^{\frac{1}{m+1}} \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.36)$$

Можно видеть, что деформация ползучести и параметр поврежденности пропорциональны. Учитывая это, выпишем выражение для деформации ползучести в форме

$$\varepsilon(t) = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \left\{ 1 - [1 - (m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k t]^{\frac{1}{m+1}} \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.37)$$

Выразим из соотношения (1.36) время

$$t = [(m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1} \cdot [1 - (1 - \omega^{\alpha+1})^{m+1}]. \quad (1.38)$$

При подстановке в выражение (1.38) значения  $\omega = 1$ , найдем величину длительной прочности

$$t^* = [(m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1}. \quad (1.39)$$

Основные теоретико-экспериментальные данные о процессе деформирования образцов из стали 45 приведены в таблице 8, где  $\varepsilon_a^*$  и  $t_a^*$  – аналитические значения деформации ползучести в момент разрушения и длительной прочности, рассчитанные по формулам (1.37) и (1.39). Остальные обозначения аналогичны, используемым в таблице 1.

Таблица 8. Основные теоретико-экспериментальные данные для стали 45

$\sigma_0$ , МПа	$t_e^*$ , ч	$\varepsilon_e^*$	$t_a^*$ , ч	$\varepsilon_a^*$
35	6.706	0.516	7.00049	0.57159
40	2.98	0.616	2.7601	0.66468
45	1.224	0.633	1.21448	0.7593

Таким образом, получено решение начальной задачи (1.34), (1.4), которое выражается соотношениями (1.36), (1.37) и (1.39) [20]. Но отметим, что это исключительный случай. Большинство задач ползучести не могут быть проинтегрированы в явном виде, что приводит к необходимости применения численных методов. Но при численном решении задач, подобных (1.34), (1.4), стоит учитывать то, что они имеют две предельные особые точки – в начальный момент времени и при разрушении. Наличие особой точки в начальный момент времени делает явные методы решения задачи Коши малоэффективными.

Для численного решения задачи (1.34), (1.4) будем использовать два неявных метода решения задачи Коши [99, с. 11, 88]: **1)** метод Эйлера (ЭНЯ), **2)** гауссов метод четвертого порядка точности (Г4НЯ). Применение постоянного шага интегрирования в данном случае нецелесообразно, так как необходимо изначально выбирать малую величину шага. Поэтому будем использовать только переменный шаг с контролем точности вычислений при оценке локальной погрешности по методу РРР. Схемы данных методов применительно к задачам ползучести приведены в приложении А.

Два указанных метода были реализованы в среде Matlab R2015a. Для решения систем нелинейных уравнений, полученных при использовании неявных схем, был выбран метод простых итераций [31, с. 170-172] с точностью  $\theta_1$ , используемой в методе РРР. Условия сходимости итерационного процесса метода простых итераций дает следующая

**Теорема 1.1.** *Итерационные процессы по методу простых итераций решения систем нелинейных уравнений, полученных на  $i$ -ом шаге неявными методами ЭНЯ и Г4НЯ числен-*

ного интегрирования задачи (1.34), (1.4) сходятся, если шаг интегрирования  $h^t$  по аргументу  $t$  удовлетворяет неравенству

$$h^t < \frac{C_{1,i}^{(0)}}{[B_\varepsilon \sigma_0^n + B_\omega \sigma_0^k] |C_{2,i}^{(0)}|} \quad (1.40)$$

для метода ЭНЯ и неравенству

$$h^t < \frac{D_{1,i}^{(0)} D_{2,i}^{(0)}}{(B_\varepsilon \sigma_0^n + B_\omega \sigma_0^k) \left[ \frac{1}{2} |H_{1,i}^{(0)}| D_{2,i}^{(0)} + \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) |H_{2,i}^{(0)}| D_{1,i}^{(0)} \right]} \quad (1.41)$$

для метода Г4НЯ. Здесь  $C_{1,i}^{(0)} = (\omega_i^{(0)})^{\alpha+1} \left[ 1 - (\omega_i^{(0)})^{\alpha+1} \right]^{m+1}$ ,  $C_{2,i}^{(0)} = \alpha \left[ 1 - (\omega_i^{(0)})^{\alpha+1} \right] - m(\alpha + 1) (\omega_i^{(0)})^{\alpha+1}$ ,  $D_{1,i}^{(0)} = C_{1,i}^{(0)} \big|_{\omega_i^{(0)} = \omega_{1,i}^{(0)}}$ ,  $D_{2,i}^{(0)} = C_{1,i}^{(0)} \big|_{\omega_i^{(0)} = \omega_{2,i}^{(0)}}$ ,  $H_{1,i}^{(0)} = C_{2,i}^{(0)} \big|_{\omega_i^{(0)} = \omega_{1,i}^{(0)}}$ ,  $H_{2,i}^{(0)} = C_{2,i}^{(0)} \big|_{\omega_i^{(0)} = \omega_{2,i}^{(0)}}$ ,  $\omega_{1,i}^{(0)} = \omega_{i-1} + \frac{1}{4} L_{1,i}^{(0)} + \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) L_{2,i}^{(0)}$ ,  $\omega_{2,i}^{(0)} = \omega_{i-1} + \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) L_{1,i}^{(0)} + \frac{1}{4} L_{2,i}^{(0)}$ ,  $\omega_{i-1}$  – значение параметра поврежденности на предыдущем шаге,  $\omega_i^{(0)}$  – начальное приближение параметра поврежденности для итерационного процесса на  $i$ -ом шаге.

Вывод неравенств (1.40) и (1.41) заключается в проверке достаточного условия сходимости метода простой итерации [31, с. 171-172] при использовании методов ЭНЯ и Г4НЯ. Для задач вида (1.3), (1.4) вывод неравенств (1.40) и (1.41) приводится в приложении А.

При решении систем нелинейных уравнений в рассматриваемой задаче можно также применять метод Ньютона, но его реализация и проверка условий сходимости гораздо сложнее, чем для метода простых итераций. Помимо традиционных для метода Ньютона недостатков, таких как необходимость обращения матрицы Якоби и преобразования решаемой системы уравнений (чего не требует метод простых итераций при использовании неявных схем), возникает еще одно затруднение. Применительно к нежестким задачам Коши критерием сходимости метода Ньютона является отличие якобиана рассматриваемой задачи от нуля [31, с. 173]. Но в окрестности ПОТ отличие якобиана от нуля будет лишь необходимым условием. Для доказательства сходимости требуется проверка и достаточных условий, что значительно усложняет использование метода Ньютона. При этом, в вычислительном плане методы Ньютона и простых итераций мало отличаются для данного класса задач.

В таблице 9 даны результаты численного решения задачи (1.34), (1.4) с характеристиками ползучести (1.35) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 35, 40$  и  $45$  МПа с переменным шагом при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Обозначения аналогичны используемым в таблице 3. Отметим, что при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$  методом Г4НЯ не удалось получить удовлетворительного решения рассматриваемой задачи. В этом случае приходилось уменьшать значения параметра  $\theta_2$  до величины  $\theta_1/15$  для  $\theta_1 = 10^{-1}$  и  $\theta_1/8$  для  $\theta_1 = 10^{-2}$ , т. е. фактически увеличивать точность вычислений. Начальное приближение на первом шаге:  $h_0^t = 3 \cdot 10^{-7}$  ч,  $\varepsilon_0^{(0)} = 2 \cdot 10^{-5}$  и  $\omega_0^{(0)} = 4 \cdot 10^{-5}$  для метода ЭНЯ;  $h_0^t = 3 \cdot 10^{-7}$  ч,  $\varepsilon_0^{(0)} = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $\omega_0^{(0)} = 4 \cdot 10^{-5}$ ,  $K_1^{(0)} = K_2^{(0)} = L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = 10^{-5}$

для метода Г4НЯ. После прохождения начальной точки выставлялся шаг  $h_s^t = 3 \cdot 10^{-7}$  ч для метода ЭНЯ и  $h_s^t = 3 \cdot 10^{-5}$  ч для метода Г4НЯ. Затем шаг изменялся автоматически.

Таблица 9. Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге интегрирования

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^t$ , ч	$h_{\max}^t$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭНЯ								
35	$10^{-1}$	0.537	0.9394	6.9177	$3 \cdot 10^{-7}$	0.5825	36	2.817
	$10^{-2}$	0.5694	0.9962	7.0215	$3 \cdot 10^{-7}$	0.0728	189	8.997
	$10^{-3}$	0.5712	0.9993	7.0009	$5 \cdot 10^{-10}$	0.0091	1643	35.299
	$10^{-4}$	0.5715	0.9999	7.0005	$10^{-13}$	0.0011	17938	322.5
40	$10^{-1}$	0.6486	0.9758	2.7238	$3 \cdot 10^{-7}$	0.2913	35	4.159
	$10^{-2}$	0.6569	0.9883	2.7703	$3 \cdot 10^{-7}$	0.0364	183	7.017
	$10^{-3}$	0.663	0.9975	2.7603	$9 \cdot 10^{-9}$	0.0023	1874	38.128
	$10^{-4}$	0.6646	0.9999	2.7601	$3 \cdot 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{-4}$	17143	311.49
45	$10^{-1}$	0.7172	0.9446	1.2288	$3 \cdot 10^{-7}$	0.1456	32	3.216
	$10^{-2}$	0.7562	0.9959	1.2173	$3 \cdot 10^{-7}$	0.0091	214	9.585
	$10^{-3}$	0.757	0.997	1.2146	$2 \cdot 10^{-9}$	0.0011	1846	36.937
	$10^{-4}$	0.7593	1	1.2145	$2 \cdot 10^{-15}$	$10^{-4}$	17499	320.79
Метод Г4НЯ								
35	$10^{-1}$	0.5351	0.9362	7.7938	$3 \cdot 10^{-7}$	1.8204	22	4.585
	$10^{-2}$	0.5544	0.9699	7.0133	$3 \cdot 10^{-7}$	0.2276	48	7.339
	$10^{-3}$	0.5698	0.9968	7.0044	$10^{-7}$	0.1138	128	16.592
	$10^{-4}$	0.5714	0.9997	7.0006	$4 \cdot 10^{-10}$	0.0142	1083	62.681
40	$10^{-1}$	0.6634	0.998	3.0222	$3 \cdot 10^{-7}$	0.9102	21	10.021
	$10^{-2}$	0.6602	0.9932	2.77	$3 \cdot 10^{-7}$	0.1138	43	10.252
	$10^{-3}$	0.6392	0.9617	2.7613	$3 \cdot 10^{-7}$	0.0569	121	9.877
	$10^{-4}$	0.6647	1	2.7601	$2 \cdot 10^{-13}$	0.0036	1228	74.867
45	$10^{-1}$	0.7576	0.9978	1.4009	$3 \cdot 10^{-7}$	0.4551	19	6.646
	$10^{-2}$	0.758	0.9983	1.2188	$3 \cdot 10^{-7}$	0.0569	43	12.057
	$10^{-3}$	0.7547	0.9939	1.215	$2 \cdot 10^{-7}$	0.0142	142	15.89
	$10^{-4}$	0.7592	0.9998	1.2145	$10^{-13}$	0.0018	1213	72.269

На рис. 1.7 изображены кривые ползучести для задачи одноосного растяжения образцов из стали 45, полученные методом ЭНЯ с переменным шагом интегрирования при контроле точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-4}$  и  $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ . Обозначения аналогичны применяемым на рис. 1.4. Можно видеть, что кривые, полученные методом ЭНЯ, практически совпадают с точным решением. Для метода Г4НЯ кривые ползучести имеют аналогичный вид. Результаты эксперимента для стали 45 приведены в приложении Б.

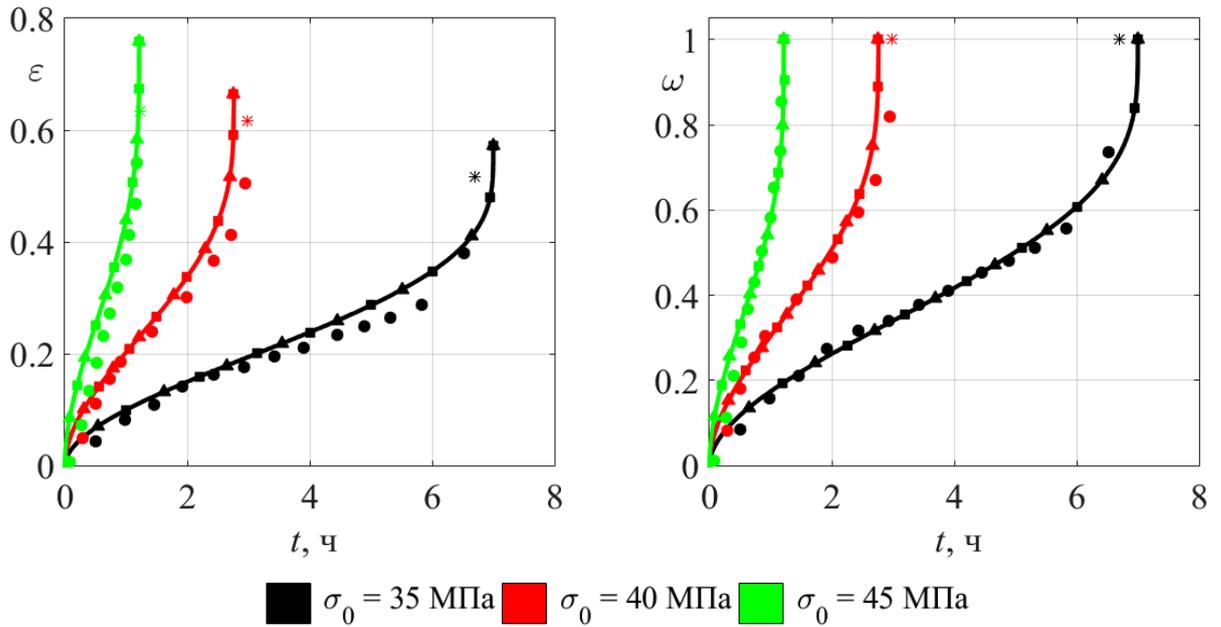


Рис. 1.7. Кривые ползучести для стали 45, метод ЭНЯ, переменный шаг,  $\theta_1 = 10^{-4}$

На рис. 1.8 даны зависимости шага интегрирования от аргумента  $t$  для задачи (1.34), (1.4) при использовании контроля точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-4}$  и  $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ . Введены следующие обозначения: а – метод ЭНЯ, б – метод Г4НЯ.

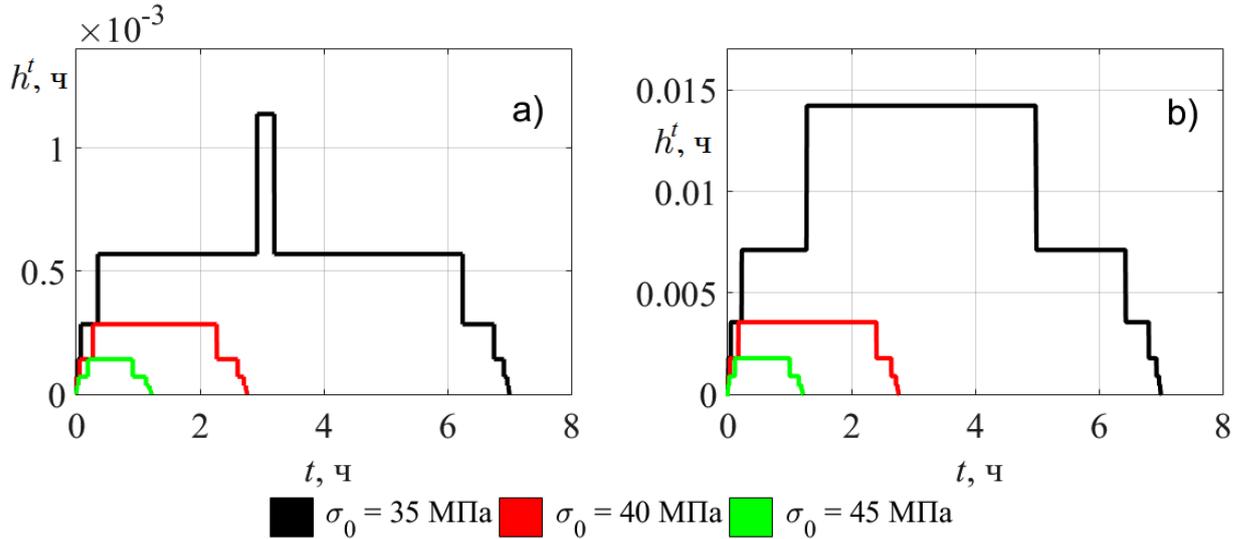


Рис. 1.8. Зависимость шага  $h^t$  от аргумента  $t$  для задачи (1.34), (1.4)

В таблице 10 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (1.34), (1.4) методами ЭНЯ и Г4НЯ с переменным шагом, где для относительной погрешности параметра поврежденности вычислены следующие величины [28, с. 32-33, 36]:  $\delta\omega_{\max}$  – максимальное значение,  $\delta\omega_{\text{med}}$  – медиана,  $\delta\omega_{\text{av}}$  – среднее значение и  $\delta\omega_{\text{dev}}$  – среднее квадратическое отклонение от среднего значения. Относительная погрешность параметра поврежденности вычисляется по формуле аналогичной (1.31).

Характерный вид зависимости относительной погрешности  $\delta\omega$  от аргумента  $t$  для задачи (1.34), (1.4) приведен на рис. 1.9, где а – метод ЭНЯ ( $\theta_1 = 10^{-2}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ ), б – метод Г4НЯ ( $\theta_1 = 10^{-2}$  и  $\theta_2 = \theta_1/8$ ).

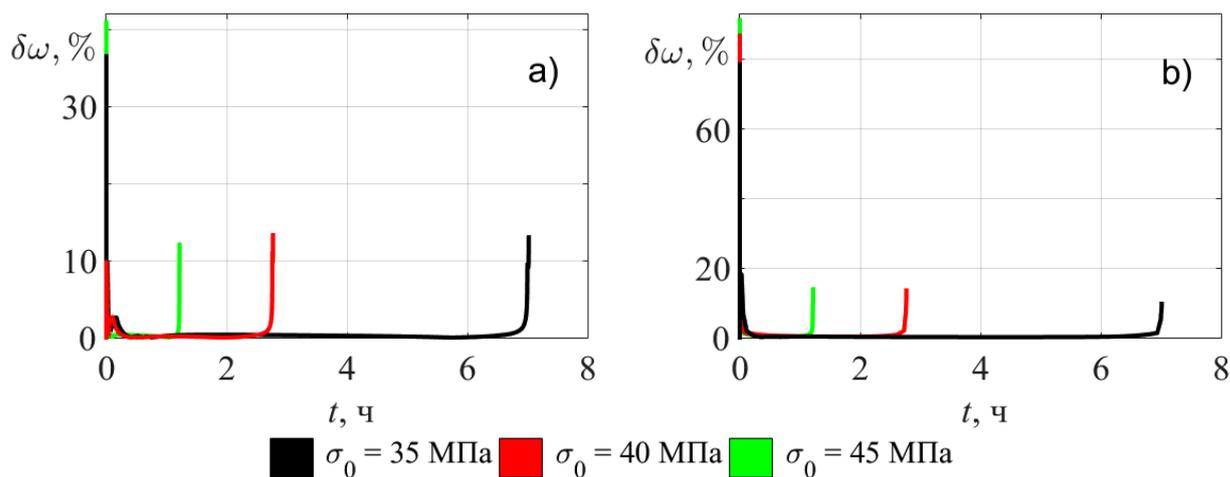


Рис. 1.9. Зависимость погрешности  $\delta\omega$  от аргумента  $t$  для задачи (1.34), (1.4)

Таблица 10. Относительная погрешность  $\delta\omega$  при численном решении задачи (1.34), (1.4)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭНЯ					
35	$10^{-1}$	36.812	8.445	9.527	5.587
	$10^{-2}$	36.812	2.603	0.353	4.531
	$10^{-3}$	36.812	0.383	0.071	1.351
	$10^{-4}$	36.812	0.044	0.007	0.336
40	$10^{-1}$	20.472	8.338	9.479	3.553
	$10^{-2}$	13.292	2.4	0.372	3.78
	$10^{-3}$	9.817	0.338	0.066	1.006
	$10^{-4}$	7.754	0.044	0.007	0.191
45	$10^{-1}$	41.234	9.02	9.806	7.775
	$10^{-2}$	41.234	2.145	0.34	4.625
	$10^{-3}$	41.234	0.351	0.066	1.48
	$10^{-4}$	6.663	0.041	0.006	0.173
Метод ГНЯ					
35	$10^{-1}$	79.186	21.465	18.384	16.294
	$10^{-2}$	79.186	6.431	0.251	14.227
	$10^{-3}$	79.186	2.347	0.096	9.027
	$10^{-4}$	79.186	0.185	0.003	2.446
40	$10^{-1}$	87.418	20.999	18.415	16.966
	$10^{-2}$	87.418	6.892	0.815	14.24
	$10^{-3}$	87.418	1.612	0.077	8.582
	$10^{-4}$	87.418	0.181	0.002	2.53
45	$10^{-1}$	91.929	20.811	18.252	18.95
	$10^{-2}$	91.929	6.648	1.053	14.128
Продолжение таблицы 10 на следующей странице					

Таблица 10 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
45	$10^{-3}$	91.929	1.3	0.06	7.754
	$10^{-4}$	91.929	0.2	0.003	2.678

### 1.3.2 Модель растяжение образцов из сплава ЗВ

Можно видеть, что расчетные данные, полученные методами ЭНЯ и Г4НЯ имеют значительную погрешность, достигающую десятков процентов в окрестностях особых точек. Одной из возможных причин высокой погрешности может быть высокая интенсивность процесса ползучести. Целесообразно исследовать также задачи, для которых величина длительной прочности составляет тысячи часов.

Рассмотрим задачу расчета ползучести и длительной прочности круглых стержней из анизотропного титанового сплава ЗВ, нашедшего свое применение в авиации, ракетостроении и космической технике (изготовление обшивки, деталей крепления, силового набора, деталей шасси, различных агрегатов и т. д.), при одноосном растяжении [21]. Для описания данной задачи воспользуемся уравнениями ЭВТП (1.11)-(1.13), которые, в случае постоянных напряжений и температуры, запишем в виде системы ОДУ второго порядка [21]

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{B_A \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \end{cases} \quad (1.42)$$

с начальными условиями

$$t = 0 : A(0) = 0, \omega(0) = 0 \quad (1.43)$$

и уравнения для определения деформации ползучести

$$\varepsilon(t) = \sigma_0^{-1} \cdot A(t). \quad (1.44)$$

Характеристики ползучести для системы уравнений (1.42) определены в статье [21] для круглых стержней из титанового сплава ЗВ при комнатной температуре ( $T = 20^\circ \text{C}$ ) по обработанным экспериментальным данным работы [95] и имеют вид

$$\begin{aligned} B_A &= 1.46 \cdot 10^{-151} \text{ МПа}^{-n+1} \text{ с}^{-1}, \quad B_\omega = 2.205 \cdot 10^{-153} \text{ МПа}^{-k} \text{ с}^{-1}, \\ \alpha &= 2.5, \quad n = 51.8, \quad k = 51.8, \quad m = 7. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Как и для задачи одноосного растяжения образцов из стали 45, найдем аналитическое решение задачи (1.42)-(1.44). Для этого достаточно проинтегрировать начальную задачу (1.42)-(1.43) и использовать соотношение (1.44) [23]:

$$\omega(t) = \left( 1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.46)$$

$$A(t) = \frac{B_A \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \left( 1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1) B_\omega \sigma_0^k t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.47)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{B_A \sigma_0^{n-1}}{B_\omega \sigma_0^k} \left( 1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1) B_\omega \sigma_0^k t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.48)$$

$$t^* = [(m + 1)(\alpha + 1) B_\omega \sigma_0^k]^{-1}. \quad (1.49)$$

При этом задача (1.42)-(1.43) имеет те же особенности, что и (1.34), (1.4).

Основные теоретико-экспериментальные данные о процессе деформирования образцов из сплава ЗВ приведены в таблице 11, где  $\varepsilon_a^*$ ,  $A_a^*$  и  $t_a^*$  – аналитические значения деформации ползучести, удельной работы рассеяния в момент разрушения и длительной прочности, рассчитанные по формулам (1.47)-(1.49),  $A_e^*$  – экспериментальное значение критической удельной работы рассеяния. Остальные обозначения аналогичны, используемым в таблице 1.

Таблица 11. Основные теоретико-экспериментальные данные для титанового сплава ЗВ

$\sigma_0$ , МПа	$t_e^*$ , ч	$\varepsilon_e^*$	$A_e^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_a^*$ , ч	$\varepsilon_a^*$	$A_a^*$ , МДж/м <sup>3</sup>
603	3452.068	0.091	54.584	4292.3399	0.1098	66.2132
618	1247.814	0.095	58.545	1202.0648	0.1071	66.2132
638	249.88	0.102	65.368	230.8978	0.1038	66.2132

Рассмотрим численное решение задачи (1.42)-(1.43) методами ЭНЯ и Г4НЯ. Условия сходимости итерационного процесса метода простых итераций решения нелинейных систем уравнений, полученных при использовании неявных методов, для задачи (1.42)-(1.43) те же, что даются теоремой 1.1, но с заменой  $B_\varepsilon$  на  $B_A$ .

В таблице 12 даны результаты численного решения задачи (1.42)-(1.43) с параметрами (1.45) для трех значений  $\sigma_0 = 603, 618$  и  $638$  МПа с переменным шагом при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Обозначения аналогичны используемым в таблицах 3 и 5. Начальное приближение для первого шага:  $h_0^t = 3 \cdot 10^{-15}$  ч,  $\varepsilon_0^{(0)} = 10^{-5}$  и  $\omega_0^{(0)} = 10^{-5}$  для метода ЭНЯ;  $h_0^t = 3 \cdot 10^{-22}$  ч,  $\varepsilon_0^{(0)} = \omega_0^{(0)} = K_1^{(0)} = K_2^{(0)} = L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = 10^{-5}$  для метода Г4НЯ. После прохождения начальной точки выставлялся шаг  $h_s^t = 3 \cdot 10^{-23}$  ч для метода ЭНЯ и  $h_s^t = 3 \cdot 10^{-19}$  ч для метода Г4НЯ. Затем шаг изменялся автоматически.

Таблица 12. Расчетные данные для титанового сплава ЗВ при переменном шаге

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^t$ , ч	$h_{\max}^t$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭНЯ									
603	$10^{-1}$	0.1098	0.9998	66.2013	4292.522	$3 \cdot 10^{-23}$	16.791	1079	37.141
	$10^{-2}$	0.1098	0.9999	66.2055	4292.341	$3 \cdot 10^{-23}$	1.0494	9680	190.36
	$10^{-3}$	0.1098	1	66.2128	4292.34	$8 \cdot 10^{-31}$	0.1312	93453	1704.1
Продолжение таблицы 12 на следующей странице									

Таблица 12 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^t$ , ч	$h_{\max}^t$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
603	$10^{-4}$	0.1098	1	66.2131	4292.34	$5 \cdot 10^{-38}$	0.0164	970700	17494
618	$10^{-1}$	0.107	0.999	66.1457	1202.12	$3 \cdot 10^{-23}$	4.1977	1018	32.444
	$10^{-2}$	0.1071	1	66.21	1202.065	$10^{-23}$	0.2624	9920	196.71
	$10^{-3}$	0.1071	1	66.2129	1202.065	$4 \cdot 10^{-31}$	0.0328	94159	1721
	$10^{-4}$	0.1071	1	66.2131	1202.065	$10^{-38}$	0.0041	937694	16923
638	$10^{-1}$	0.1038	0.9998	66.2025	230.908	$3 \cdot 10^{-23}$	0.5247	1038	36.458
	$10^{-2}$	0.1038	1	66.2107	230.898	$9 \cdot 10^{-25}$	0.0656	9489	189.69
	$10^{-3}$	0.1038	1	66.2123	230.898	$4 \cdot 10^{-31}$	0.0082	94561	1721.8
	$10^{-4}$	0.1038	1	66.2129	230.898	$8 \cdot 10^{-37}$	0.0005	975823	17581

## Метод Г4НЯ

603	$10^{-1}$	0.1096	0.9983	66.1006	4296.391	$3 \cdot 10^{-22}$	163.97	136	30.271
	$10^{-2}$	0.1098	1	66.2092	4292.611	$3 \cdot 10^{-22}$	20.496	701	69.9
	$10^{-3}$	0.1098	1	66.211	4292.343	$5 \cdot 10^{-28}$	1.281	6787	373.2
	$10^{-4}$	0.1098	1	66.2124	4292.34	$10^{-37}$	0.1601	63584	3107.5
618	$10^{-1}$	0.1071	0.9998	66.2024	1203.207	$3 \cdot 10^{-22}$	40.993	129	36.492
	$10^{-2}$	0.1071	0.9998	66.1969	1202.142	$3 \cdot 10^{-22}$	5.1241	695	63.35
	$10^{-3}$	0.1071	1	66.2111	1202.066	$6 \cdot 10^{-29}$	0.6405	6374	349.3
	$10^{-4}$	0.1071	1	66.2124	1202.065	$10^{-36}$	0.04	65123	3190.4
638	$10^{-1}$	0.1038	0.9998	66.2003	231.171	$3 \cdot 10^{-22}$	10.248	132	37.03
	$10^{-2}$	0.1031	0.9936	65.7889	230.912	$3 \cdot 10^{-22}$	1.281	683	48.06
	$10^{-3}$	0.1038	1	66.2116	230.898	$4 \cdot 10^{-30}$	0.0801	6520	360.1
	$10^{-4}$	0.1038	1	66.2125	230.898	$3 \cdot 10^{-41}$	0.01	62421	3037.3

На рис. 1.10 изображены кривые ползучести для задачи одноосного растяжения образцов из титанового сплава ЗВ, полученные методом ЭНЯ с переменным шагом интегрирования при контроле точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-4}$  и  $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ . Обозначения аналогичны используемым на рис. 1.4. Можно видеть, что кривые, полученные методом ЭНЯ, практически совпадают с точным решением. Для метода Г4НЯ кривые ползучести имеют аналогичный вид.

На рис. 1.11 даны зависимости шага интегрирования от аргумента  $t$  для задачи (1.42)-(1.43) при использовании контроля точности вычислений по методу РРР с параметрами  $\theta_1 = 10^{-4}$  и  $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ . Введены следующие обозначения: а – метод ЭНЯ, б – метод Г4НЯ.

Характерный вид зависимости относительной погрешности  $\delta\omega$  от аргумента  $t$  для задачи (1.42)-(1.43) при  $\theta_1 = 10^{-1}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$  приведен на рис. 1.12, где а – метод ЭНЯ, б – метод Г4НЯ.

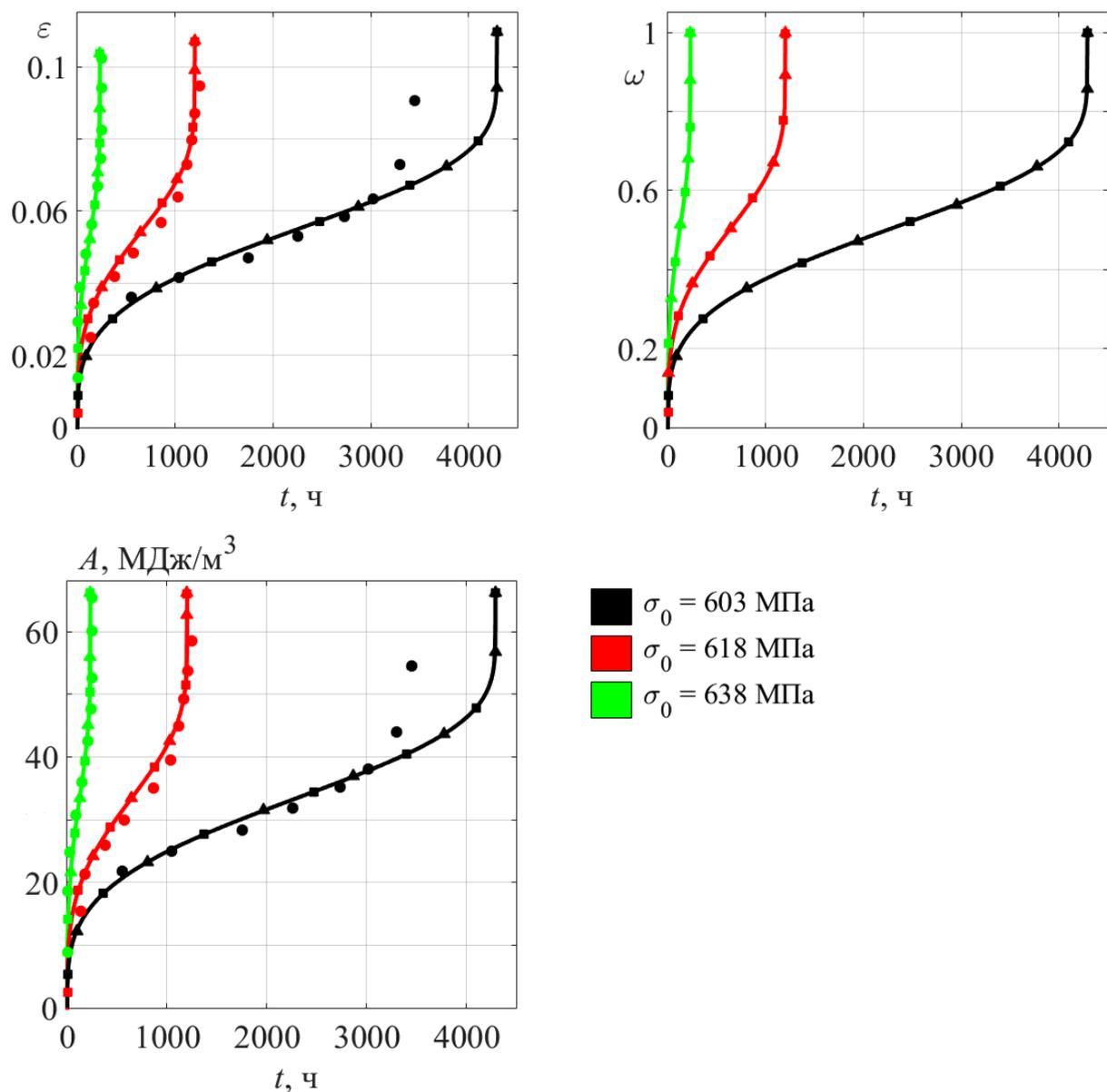


Рис. 1.10. Кривые ползучести для сплава ЗВ, метод ЭНЯ, переменный шаг,  $\theta_1 = 10^{-4}$

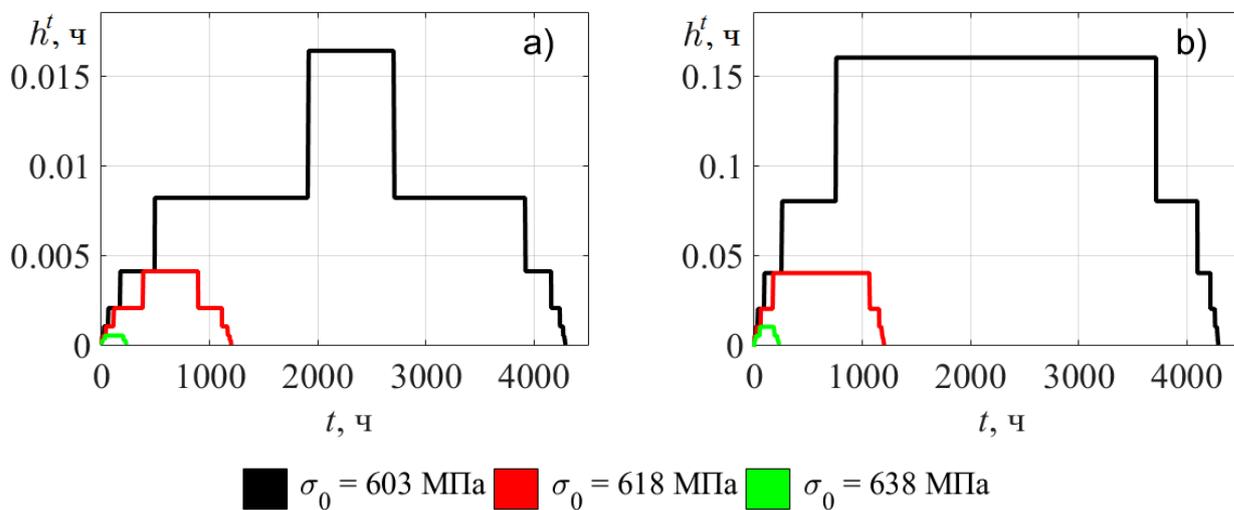


Рис. 1.11. Зависимость шага  $h^t$  от аргумента  $t$  для задачи (1.42)-(1.43)

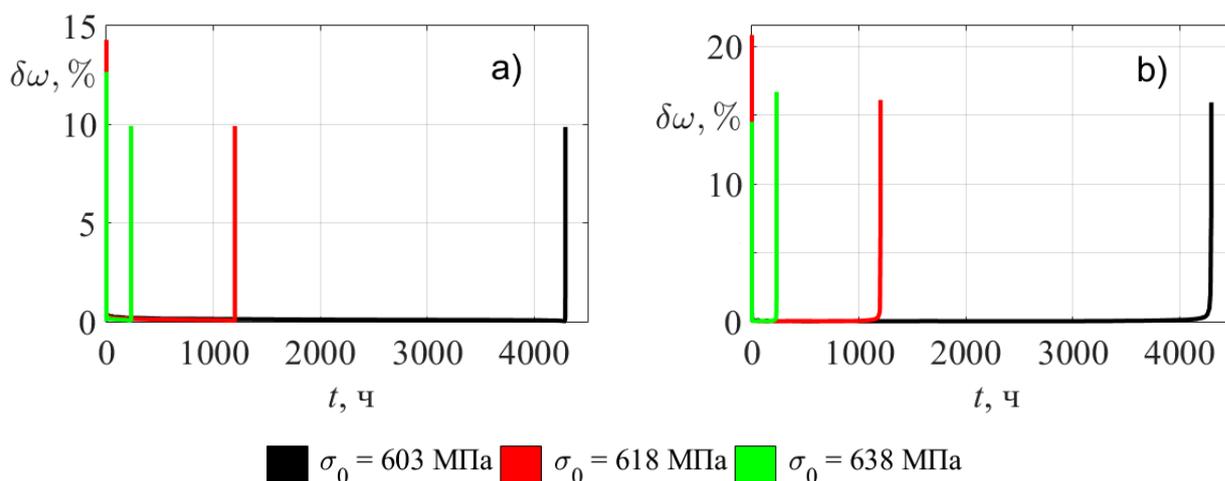


Рис. 1.12. Зависимость погрешности  $\delta\omega$  от аргумента  $t$  для задачи (1.42)-(1.43)

В таблице 13 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (1.42)-(1.43) методами ЭНЯ и Г4НЯ с переменным шагом, обозначения аналогичны используемым в таблице 10.

Таблица 13. Относительная погрешность  $\delta\omega$  при численном решении задачи (1.42)-(1.43)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭНЯ					
603	$10^{-1}$	11.457	0.874	0.118	2.059
	$10^{-2}$	11.457	0.197	0.013	0.753
	$10^{-3}$	11.457	0.051	0.001	0.288
	$10^{-4}$	17.784	0.013	$10^{-4}$	0.111
618	$10^{-1}$	14.282	0.915	0.126	2.098
	$10^{-2}$	14.282	0.19	0.013	0.741
	$10^{-3}$	14.282	0.049	0.001	0.281
	$10^{-4}$	17.937	0.014	$10^{-4}$	0.112
638	$10^{-1}$	12.663	0.888	0.122	2.088
	$10^{-2}$	12.663	0.216	0.013	0.807
	$10^{-3}$	12.663	0.049	0.001	0.283
	$10^{-4}$	20.588	0.013	$10^{-4}$	0.113
Метод Г4НЯ					
603	$10^{-1}$	18.179	3.26	0.188	4.687
	$10^{-2}$	18.179	1.046	0.011	2.552
	$10^{-3}$	18.179	0.202	$9 \cdot 10^{-5}$	0.857
	$10^{-4}$	11.988	0.056	$10^{-6}$	0.325
618	$10^{-1}$	20.831	3.045	0.144	4.736
	$10^{-2}$	20.831	0.97	0.01	2.441
Продолжение таблицы 13 на следующей странице					

Таблица 13 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
618	$10^{-3}$	20.831	0.213	$10^{-4}$	0.879
	$10^{-4}$	14.665	0.054	$10^{-6}$	0.321
638	$10^{-1}$	16.542	3.547	0.267	5.012
	$10^{-2}$	14.536	0.691	0.009	1.874
	$10^{-3}$	14.536	0.209	$10^{-4}$	0.857
	$10^{-4}$	12.477	0.057	$10^{-6}$	0.329

### 1.3.3 Анализ полученных расчетных данных

При рассмотрении задач одноосного растяжения образцов из стали 45 и титанового сплава ЗВ становится видна основная особенность исследования деформирования конструкций из упрочняющихся материалов в условиях ползучести – малоэффективность явных методов интегрирования задачи Коши при расчете длительной прочности подобных конструкций. Это приводит к необходимости использования специальных методов решения жестких и плохо обусловленных задач, в качестве которых выбраны неявные методы.

Неявные методы позволяют проводить расчет упрочняющихся конструкций на ползучесть и длительную прочность, что является главным достоинством этих методов применительно к рассматриваемым задачам. Но существует и ряд недостатков свойственных неявным схемам:

1. На каждом шаге неявные схемы сводятся к решению системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений.
2. Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений требуют задания начального приближения и доказательства сходимости итерационного процесса к решению рассматриваемой задачи.
3. Существуют методы решения систем нелинейных уравнений, которые помимо нахождения значений функций системы требуют вычисления матрицы Якоби и ее обращения (например метод Ньютона).

Применительно к задачам ползучести указанные недостатки выливаются в:

1. Ограничение на величину шага интегрирования.
2. Необходимость выбора приближения для начального момента времени (так как нулевые начальные условия обращают определяющие уравнения ползучести в бесконечность). При этом, неудачный выбор начального приближения может привести к росту погрешности в начальной точке до сотен и тысяч процентов.

Многие выводы и замечания, сделанные в параграфе 1.2.3, можно без изменений перенести и на результаты решения задач с начальным упрочнением. Но наличие второй ПОТ вносит значимые изменения в процесс решения и полученные результаты. При анализе рас-

четных данных для задач (1.34), (1.4) одноосного растяжения образцов из стали 45 и (1.42), (1.43) одноосного растяжения образцов из титанового сплава ЗВ, можно отметить следующее:

1. Результаты решения обеих задач методами ЭНЯ и Г4НЯ, представленные в таблицах 9, 12 и на рис. 1.7, 1.10, удовлетворительно согласуются как с экспериментальными, так и с расчетными данными работ [21, 22].
2. Используемые неявные методы позволили успешно преодолеть ПОТ в начальный момент времени и близко подойти ко второй ПОТ, проходящейся на момент разрушения. Это можно видеть из таблиц 9, 12 и на рис. 1.7, 1.10.
3. На рис. 1.8, 1.11 видно, что шаг  $h^t$  принимает малые значения (вплоть до величин порядка  $10^{-41}$ ) в окрестностях обеих ПОТ, изменяясь немонотонно. Постоянный шаг интегрирования практически не применим для данного класса задач.
4. Вне окрестностей ПОТ ограничения на шаг (1.40) и (1.41) выполняются за счет требований точности по методу РРР. Однако в окрестностях ПОТ приходится дополнительно уменьшать шаг для удовлетворения условий сходимости.
5. Как и в случае неупрочняющихся материалов, время счета для рассматриваемых задач мало зависит от величины начального напряжения. По результатам дальнейших исследований будет проведен дополнительный анализ времени счета данных задач.

Проанализируем относительную погрешность параметра поврежденности, рассчитанную для задач (1.34), (1.4) и (1.42), (1.44):

1. Как и для рассматриваемых в разделе 1.2 задач, при расчете упрочняющихся конструкций средние значения относительной погрешности адекватно соответствуют задаваемому значению точности для каждого метода.
2. Помимо окрестности момента разрушения, погрешность скапливается и в окрестности начальной точки, что можно видеть на рис. 1.9 и 1.12. Величина погрешности может достигать десятков процентов. Максимум погрешности приходится на начальную точку, но абсолютная погрешность в ней не превышает значения точности  $\theta_1$ .
3. Вне окрестностей ПОТ относительная погрешность может быть на порядки меньше своего среднего значения, приближаясь по величине к медиане. При этом для рассматриваемых задач средняя относительная погрешность и медиана на порядки превосходит аналогичные показатели для задач без начального упрочнения.
4. Из таблиц 10, 13 видно, что метод ЭНЯ для обеих задач дает относительную погрешность в разы меньшую, чем метод Г4НЯ. При этом значение медианы для метода Г4НЯ в разы ниже, чем для метода ЭНЯ. Исходя из полученных данных можно заключить: вне окрестностей ПОТ при малой точности погрешность решения для обоих методов мало отличается, а при повышении точности погрешность для метода Г4НЯ убывает быстрее. Но в окрестностях ПОТ метод Г4НЯ дает большую погрешность, чем метод ЭНЯ. Это и влияет на увеличение средней погрешности решения для метода Г4НЯ по сравнению с методом ЭНЯ.

## Глава 2. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация

Рассмотренные в разделе 1.3 главы 1 задачи Коши (1.34), (1.4) и (1.42), (1.44), описывающие процессы деформирования в условиях ползучести вплоть до разрушения конструкций из упрочняющихся стали 45 и титанового сплава ЗВ показывают, что явные методы малоэффективны при их расчете. Неявные методы также нельзя назвать эффективными применительно к рассматриваемым задачам, несмотря на то, что они позволяют получать приближенные решения с высокой точностью. Это связано с тем, что реализация неявных схем сводится к решению систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, сопряженному с известными трудностями, описанными в параграфе 1.3.3. Для более эффективных методов расчета упрочняющихся конструкций на длительную прочность в условиях ползучести, потребуем выполнения следующих условий:

1. Отсутствие ограничений на шаг интегрирования.
2. Возможность применения явных методов решения задачи Коши.
3. Уменьшение времени счета.
4. Точности приближенного решения не должна быть ниже, полученной при использовании неявных методов.

Всеим этим условиям удовлетворяет метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация [102], применению которого посвящена данная глава.

### 2.1 Метод продолжения решения по параметру для систем ОДУ

Во введении было указано, что начиная с 50-х годов прошлого века ведется исследование жестких начальных задач и разработка методов их решения. Несмотря на большой арсенал имеющихся методов решения жестких задач [99], в последние годы появились десятки работ в данной области. Одним из направлений исследования является применение явных схем (например  $(m, k)$ -метод, многостадийные схемы семейства Розенброка, метод конечных суперэлементов и др.) для решения жестких задач [16, 30, 75, 84–86]. Но явные методы, как правило, применимы только для узкого класса жестких задач и не могут быть использованы для жестких и плохо обусловленных задач в общем случае. Более эффективными являются методы на основе неявных или полужявных (диагонально неявных) схем [32, 82, 83, 87, 99], но их реализация по трудоемкости намного превосходит явные схемы. Также стоит упомянуть, что неявные методы малоэффективны для плохо обусловленных задач в случае, когда предельная особая точка лежит внутри интервала изменения аргумента. Для рассматриваемых в диссертации задач целесообразно использовать метод на основе замены исходного аргумента задачи на новый, при котором исходная задача не имела бы особенностей и могла быть про-

интегрирована при помощи явных методов. Укажем некоторые подходы для осуществления данной идеи.

### 2.1.1 Традиционный подход

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы ОДУ, задаваемой в общем виде

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_m), \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, m, \quad t_0 < T < \infty \quad (2.1)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} y_1(t_0) = y_{10}, \\ \vdots \\ y_m(t_0) = y_{m0}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Отметим, что все переменные в задаче (2.1)-(2.2) являются равноправными, т. е. вместо аргумента  $t$  можно выбрать в качестве независимой любую из переменных  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Это наблюдение (по аналогии с системами алгебраических и трансцендентных уравнений [25, 26]) позволяет обходить ПОТ, лежащие внутри отрезка изменения переменной  $t$ .

Если в процессе решения при  $t = \tilde{t}$  хотя бы одна функция  $f_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , неограниченно возрастает, то дальнейшее решение затруднено. В этом случае выберем в качестве нового аргумента одну из переменных  $y_p$ ,  $1 \leq p \leq m$ , для которой в окрестности точки  $M(\tilde{t}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$  все функции  $f_i$  ограничены, а  $f_p \neq 0$ , где  $y_i(\tilde{t}) = \tilde{y}_i$ , и перейдем к ней в системе (2.1)

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dy_p} = \frac{f_i(t, y_1, \dots, y_m)}{f_p(t, y_1, \dots, y_m)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq p, \\ \frac{dt}{dy_p} = \frac{1}{f_p(t, y_1, \dots, y_m)}, \quad y_p \in [\tilde{y}_p, y_{p*}], \quad \tilde{y}_p < y_{p*} < \infty, \end{cases} \quad (2.3)$$

приняв за начальные условия для нее

$$\begin{cases} y_1(\tilde{y}_p) = \tilde{y}_1, \\ \vdots \\ y_{p-1}(\tilde{y}_p) = \tilde{y}_{(p-1)}, \\ y_{p+1}(\tilde{y}_p) = \tilde{y}_{(p+1)}, \\ \vdots \\ y_m(\tilde{y}_p) = \tilde{y}_m, \\ t(\tilde{y}_p) = \tilde{t}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Если можно найти такую переменную  $y_p$ , то удастся пройти через ПОТ при  $t = \tilde{t}$ . Далее, приближаясь к другим ПОТ, мы можем снова заменить аргумент, проделывая вышеописанную процедуру нужное число раз.

Таким образом, исходная задача (2.1)-(2.2) может быть сведена к последовательности задач Коши вида (2.3)-(2.4) с ограниченными правыми частями. Но процесс смены аргумента плохо формализуем и делается фактически вручную, поэтому хотелось бы выработать другой путь для реализации описанной идеи.

Отметим также, что указанный метод замены аргумента не работает, если интегральная кривая задачи (2.1)-(2.2) содержит точки бифуркации [102, с. 196-216], в этом случае требуются другие подходы [38], не рассматриваемые в диссертационной работе.

### 2.1.2 Параметризация решения. Общий подход

Модифицируем подход, рассмотренный в параграфе 2.1.1, учитывая то, что при смене аргумента продолжения решения не обязательно двигаться исключительно по одной из переменных  $y_1, \dots, y_m$  или  $t$ . Обозначив переменную  $t$  за  $y_{m+1}$ , будем определять новый аргумент продолжения решения в окрестности каждой точки интегральной кривой в виде [102, с. 51]

$$d\mu = \alpha_1 dy_1 + \alpha_2 dy_2 + \dots + \alpha_m dy_m + \alpha_{m+1} dy_{m+1} = (\bar{\alpha}, d\bar{\lambda}), \quad (2.5)$$

где  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})^T$ ,  $d\bar{\lambda} = (dy_1, \dots, dy_{m+1})^T$ .

Полагая, что все переменные задачи (2.1)-(2.2) зависят от аргумента  $\mu$

$$y_1 = y_1(\mu), y_2 = y_2(\mu), \dots, y_{m+1} = y_{m+1}(\mu),$$

перепишем систему (2.1) в виде

$$\frac{dy_i}{d\mu} = f_i(y_1, \dots, y_{m+1}) \frac{dy_{m+1}}{d\mu}, \quad \mu \in [\mu_0, \mu_*], \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

Дополняя систему (2.6) уравнением

$$\alpha_1 \frac{dy_1}{d\mu} + \alpha_2 \frac{dy_2}{d\mu} + \dots + \alpha_m \frac{dy_m}{d\mu} + \alpha_{m+1} \frac{dy_{m+1}}{d\mu} = 1, \quad (2.7)$$

получим замкнутую систему ОДУ.

В качестве начальных условий для системы (2.6)-(2.7) примем

$$\begin{cases} y_1(\mu_0) = y_{10}, \\ \vdots \\ y_{m+1}(\mu_0) = t_0. \end{cases}$$

Так как аргумент  $\mu$  не входит явно в систему (2.6)-(2.7), то положим  $\mu_0$  равным нулю.

Выбирая вектор  $\bar{\alpha}$  тем или иным образом, можно получить различные аргументы продолжения. В частности, если положить  $\bar{\alpha} = \bar{e}_p$ , где компоненты вектора  $\bar{e}_p$  равны  $e_{pi} = \delta_{pi}$ ,  $i = \overline{1, m+1}$ , то в качестве нового аргумента продолжения получим переменную  $y_p$ . Здесь  $\delta_{pi}$  – символы Кронекера.

При решении удобно использовать такие аргументы продолжения, которые не требуют смены во всей рассматриваемой области. На существование таких аргументов указывает тот факт, что в окрестности каждой рассматриваемой точки можно выбрать значение вектора  $\bar{\alpha}$  так, чтобы все правые части были ограничены. В результате будет получен вектор  $\bar{\alpha}$  как функция точек рассматриваемой области, которому соответствует аргумент продолжения, обладающий требуемыми свойствами.

### 2.1.3 Наилучшая параметризация

Можно видеть, что в каждой точке интегральной кривой аргумент продолжения определяется неоднозначно. Вместе с тем, для некоторых аргументов продолжения новая система обусловлена лучше по сравнению с другими. Исходя из этого соображения, можно ставить задачу о поиске наилучшего аргумента продолжения.

В монографии [102, с. 17-30, 52] доказано, что задача Коши для нормальной системы ОДУ преобразуется к наилучшему аргументу, тогда и только тогда, когда в качестве такового выбрана длина дуги, отсчитываемая вдоль интегральной кривой этой задачи.

Иными словами, вектор  $\bar{\alpha}$  в (2.5) для наилучшего аргумента следует принять в виде

$$\bar{\alpha} = \left( \frac{dy_1}{d\mu}, \frac{dy_2}{d\mu}, \dots, \frac{dy_{m+1}}{d\mu} \right)^T. \quad (2.8)$$

**Определение 2.1.** Аргумент продолжения, для которого вектор  $\bar{\alpha}$  имеет вид (2.8), будем называть наилучшим и обозначать буквой  $\lambda$ .

В скалярной форме наилучший аргумент можно записать в виде

$$(d\lambda)^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + \dots + (dy_{m+1})^2. \quad (2.9)$$

Исходя из соотношений (2.8) и (2.9), для вектора  $\bar{\alpha}$  справедливо равенство

$$\|\bar{\alpha}\|_2 = 1,$$

где  $\|\cdot\|_2$  – евклидова (квадратичная) норма вектора [31, с. 24].

Система уравнений (2.1)-(2.2), преобразованная к аргументу  $\lambda$ , запишется в виде

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = \pm \frac{f_i(y_1, \dots, y_{m+1})}{\sqrt{Q(y_1, \dots, y_{m+1})}}, \quad \lambda \in [0, \lambda_*], \quad i = 1, \dots, m+1, \quad (2.10)$$

где  $Q(y_1, \dots, y_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} f_i^2(y_1, \dots, y_{m+1})$ ,  $f_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1}) \equiv 1$ .

Знак правой части отражает направление движения вдоль нового аргумента. В дальнейшем будем считать, что знак правой части (2.10) положительный.

Начальные условия для системы (2.10) запишем следующим образом

$$\begin{cases} y_1(0) = y_{10}, \\ \vdots \\ y_{m+1}(0) = t_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

**Определение 2.2.** *Переход от задачи (2.1)-(2.2) к задаче (2.10)-(2.11) будем называть  $\lambda$ -преобразованием.*

Анализируя задачу (2.10)-(2.11), можно отметить следующие преимущества:

1. Квадратичная норма правой части системы (2.10) равна единице. Это говорит о том, что для задачи не существует точек, в которых правые части системы (2.10) теряют смысл, и это дает возможность использовать при ее численном решении любые методы интегрирования задачи Коши, в том числе и явные.
2. Нет необходимости производить смену аргумента, что облегчает процесс решения. Вместе с этим, существует и ряд недостатков данного подхода:
  1. Увеличение размерности задачи на единицу.
  2. Усложнение вида уравнений преобразованной системы. В случае задачи большой размерности ( $m \gg 1$ ) параметризованная система становится значительно сложнее исходной [33, 60]. По этой причине, выгода от применения наилучшей параметризации может исчезнуть.
  3. Для некоторых задач значения знаменателей преобразованной наилучшим образом системы в некоторый момент времени могут оказаться близкими к нулю. Формально знаменатели отличны от нуля, но фактически они могут принимать сколь угодно малые значения. Это может привести к возрастанию вычислительной ошибки.
  4. Аналитическое решение параметризованной задачи можно найти только в исключительных случаях, в общем случае это сделать не удается.

**Замечание 2.1.** В монографии [102] аргумент  $\lambda$  носит название наилучшего параметра, что объясняется его применением к решению нелинейных алгебраических уравнений, для которых неприменимо понятие аргумента. Поэтому наилучший аргумент  $\lambda$  будем называть также наилучшим параметром, а процедуру перехода к нему – наилучшей параметризацией.

## 2.2 Наилучшая параметризация в задачах ползучести

Для задачи (1.3)-(1.4) вектор  $\bar{\alpha}$  (2.8) запишем в виде

$$\bar{\alpha} = \left( \frac{d\varepsilon}{d\lambda}, \frac{d\omega}{d\lambda}, \frac{dt}{d\lambda} \right)^T.$$

Тогда наилучший аргумент запишется в скалярной форме

$$(d\lambda)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + (dt)^2. \quad (2.12)$$

С использованием параметра  $\lambda$  (2.12) система (1.3) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{f_1(\sigma)}{\sqrt{\Psi^2(\omega) + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{f_2(\sigma)}{\sqrt{\Psi^2(\omega) + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\Psi(\omega)}{\sqrt{\Psi^2(\omega) + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}} \end{cases} \quad (2.13)$$

с начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, \omega(0) = 0, t(0) = 0. \quad (2.14)$$

Применим полученные результаты к расчету ползучести и длительной прочности образцов из стали 45 и титанового сплава ЗВ.

## 2.2.1 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из стали 45

Преобразованная к аргументу  $\lambda$  (2.12) задача (1.34), (1.4), описывающая процесс деформирования цилиндрических образцов из стали 45 при одноосном растяжении в условиях ползучести, запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \end{cases} \quad (2.15)$$

с начальными условиями (2.14).

Можно видеть, что правые части уравнений системы (2.15) не обращаются в бесконечность, более того, они по модулю не превосходят единицы. И для численного решения задачи (2.15), (2.14) может быть использован любой известный метод.

Для численного решения задачи (2.15), (2.14) будем использовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я. В качестве материальных констант для задачи (2.15), (2.14) используются (1.35).

В таблице 14 даны результаты численного решения задачи (2.15), (2.14) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 35, 40, 45$  МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Обозначения аналогичны используемым в таблице 3. Шаг интегрирования в параметризованных задачах, отсчитываемый вдоль направления отсчета аргумента  $\lambda$ , будем обозначать  $h^\lambda$ ,  $h_{\min}^\lambda$  и  $h_{\max}^\lambda$  – минимальное и максимальное значение шага по аргументу  $\lambda$ . Отметим, что при значениях параметров точности решения  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$  методом РК4Я не удалось получить удовлетвори-

тельного решения рассматриваемой задачи. В этом случае приходилось уменьшать значения параметра  $\theta_2$  до величины  $\theta_1/15$  для  $\theta_1 = 10^{-1}$  и  $\theta_1/8$  для  $\theta_1 = 10^{-2}$ , т. е. фактически увеличивать точность вычислений. Начальное значение шага  $h_s^\lambda$  по аргументу  $\lambda$  принималось равным  $10^{-6}$ .

Таблица 14. Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге,  $\lambda$ -преобразование

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}$	$h_{\max}$	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ								
35	$10^{-1}$	0.5685	0.9946	7.1629	$10^{-6}$	$2 \cdot 10^3$	47	0.721
	$10^{-2}$	0.5689	0.9953	7.0053	$10^{-6}$	268.44	186	2.31
	$10^{-3}$	0.5715	0.9999	7.0006	$10^{-6}$	33.554	1620	17.31
	$10^{-4}$	0.5716	1	7.0005	$10^{-6}$	2.0972	17947	185.2
40	$10^{-1}$	0.6482	0.9751	2.8195	$10^{-6}$	$10^3$	44	0.623
	$10^{-2}$	0.6605	0.9937	2.7616	$10^{-6}$	134.22	189	2.434
	$10^{-3}$	0.6646	0.9998	2.7601	$10^{-6}$	8.3886	1841	19.76
	$10^{-4}$	0.6647	1	2.7601	$10^{-6}$	1.0486	17018	176.6
45	$10^{-1}$	0.745	0.9811	1.2362	$10^{-6}$	536.87	44	0.592
	$10^{-2}$	0.7555	0.995	1.2151	$10^{-6}$	33.554	213	2.702
	$10^{-3}$	0.7593	1	1.2145	$10^{-6}$	4.1943	1817	19.37
	$10^{-4}$	0.7593	1	1.2145	$10^{-6}$	0.5243	17468	181.7
Метод ЭКЯ								
35	$10^{-1}$	0.5473	0.9575	6.9521	$10^{-6}$	$4 \cdot 10^3$	44	1.231
	$10^{-2}$	0.5639	0.9865	6.9964	$10^{-6}$	$10^3$	89	2.281
	$10^{-3}$	0.5709	0.9987	7.0004	$10^{-6}$	67.109	613	12.95
	$10^{-4}$	0.5715	0.9998	7.0005	$10^{-6}$	8.3886	5444	108.1
40	$10^{-1}$	0.6111	0.9193	2.731	$10^{-6}$	$2 \cdot 10^3$	40	1.042
	$10^{-2}$	0.6601	0.9931	2.7588	$10^{-6}$	268.44	94	2.464
	$10^{-3}$	0.6646	0.9999	2.7601	$10^{-6}$	33.554	590	12.25
	$10^{-4}$	0.6646	0.9999	2.7601	$10^{-6}$	4.1943	5666	112
45	$10^{-1}$	0.7241	0.9536	1.2018	$10^{-6}$	$10^3$	42	1.323
	$10^{-2}$	0.7472	0.984	1.2139	$10^{-6}$	134.22	90	2.327
	$10^{-3}$	0.7592	0.9999	1.2145	$10^{-6}$	16.777	612	12.88
	$10^{-4}$	0.7592	0.9998	1.2145	$10^{-6}$	1.0486	6393	126.1
Метод РК4Я								
35	$10^{-1}$	0.551	0.9639	6.9998	$10^{-6}$	$4 \cdot 10^3$	43	1.871
	$10^{-2}$	0.5548	0.9706	7.003	$10^{-6}$	$10^3$	66	2.907
	$10^{-3}$	0.5712	0.9994	7.0005	$10^{-6}$	536.87	146	6.32
Продолжение таблицы 14 на следующей странице								

Таблица 14 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}$	$h_{\max}$	$N_s$	$t_c$ , мс
35	$10^{-4}$	0.5713	0.9995	7.0005	$10^{-6}$	33.554	1197	42.61
40	$10^{-1}$	0.5085	0.765	2.6844	$10^{-6}$	$2 \cdot 10^3$	36	1.483
	$10^{-2}$	0.6165	0.9275	2.7589	$10^{-6}$	536.87	57	2.414
	$10^{-3}$	0.6641	0.9991	2.7601	$10^{-6}$	134.22	153	6.446
	$10^{-4}$	0.6646	0.9999	2.7601	$10^{-6}$	16.777	1152	40.88
45	$10^{-1}$	0.5982	0.7879	1.193	$10^{-6}$	$10^3$	33	1.37
	$10^{-2}$	0.7399	0.9745	1.2145	$10^{-6}$	134.22	68	2.778
	$10^{-3}$	0.7576	0.9977	1.2145	$10^{-6}$	67.109	152	6.403
	$10^{-4}$	0.7587	0.9992	1.2145	$10^{-6}$	8.3886	1195	42.44

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (2.15), (2.14), имеют вид, аналогичный приведенному на рис. 1.7. Характер изменения шага интегрирования по аргументу  $\lambda$  и относительной погрешности параметра поврежденности по аргументу  $t$  совпадает с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.8 и 1.9.

В таблице 15 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (2.15), (2.14) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом. Обозначения в таблице 15 аналогичны используемым в таблице 10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для параметра поврежденности (1.36).

Таблица 15. Относительная погрешность  $\delta\omega$  для численного решения задачи (2.15), (2.14)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}$ , %	$\delta\omega_{\text{av}}$ , %	$\delta\omega_{\text{med}}$ , %	$\delta\omega_{\text{dev}}$ , %
Метод ЭЯ					
35	$10^{-1}$	43.256	9.792	9.821	7.125
	$10^{-2}$	43.256	2.951	0.867	4.794
	$10^{-3}$	43.256	0.399	0.068	1.721
	$10^{-4}$	43.256	0.041	0.007	0.489
40	$10^{-1}$	46.586	10.213	9.822	7.583
	$10^{-2}$	46.586	2.885	0.802	5.014
	$10^{-3}$	46.586	0.358	0.07	1.697
	$10^{-4}$	46.586	0.043	0.007	0.53
45	$10^{-1}$	47.65	10.126	9.82	8.095
	$10^{-2}$	47.65	2.652	0.743	4.989
	$10^{-3}$	47.65	0.362	0.066	1.775
	$10^{-4}$	47.65	0.042	0.006	0.545
Продолжение таблицы 15 на следующей странице					

Таблица 15 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭКЯ					
35	$10^{-1}$	13.759	2.03	0.461	3.216
	$10^{-2}$	8.182	0.858	0.398	1.591
	$10^{-3}$	8.182	0.087	0.002	0.437
	$10^{-4}$	8.182	0.009	$3 \cdot 10^{-5}$	0.132
40	$10^{-1}$	11.907	1.513	0.458	2.39
	$10^{-2}$	7.496	0.743	0.318	1.372
	$10^{-3}$	4.735	0.081	0.002	0.336
	$10^{-4}$	4.735	0.007	$3 \cdot 10^{-5}$	0.084
45	$10^{-1}$	16.014	2.073	0.528	3.406
	$10^{-2}$	6.358	0.649	0.26	1.167
	$10^{-3}$	4.395	0.077	0.002	0.321
	$10^{-4}$	4.395	0.006	$2 \cdot 10^{-5}$	0.071
Метод РК4Я					
35	$10^{-1}$	3.608	0.169	0.021	0.565
	$10^{-2}$	2.94	0.099	0.021	0.375
	$10^{-3}$	1.949	0.052	0.002	0.201
	$10^{-4}$	0.709	0.004	$10^{-5}$	0.038
40	$10^{-1}$	23.498	0.654	0.021	3.756
	$10^{-2}$	7.254	0.149	0.021	0.935
	$10^{-3}$	1.956	0.041	0.001	0.182
	$10^{-4}$	0.656	0.004	$10^{-5}$	0.038
45	$10^{-1}$	21.212	0.657	0.021	3.527
	$10^{-2}$	2.553	0.073	0.016	0.321
	$10^{-3}$	1.841	0.045	0.002	0.193
	$10^{-4}$	0.534	0.003	$10^{-5}$	0.03

## 2.2.2 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из сплава ЗВ

Для задачи (1.42)-(1.44), описывающей процесс деформирования круглых стержней из титанового сплава ЗВ при одноосном растяжении в условиях ползучести, будем использовать наилучший параметр, записываемый в скалярной форме

$$(d\lambda)^2 = (dA)^2 + (d\omega)^2 + (dt)^2. \quad (2.16)$$

По аналогии с задачей о растяжении образцов из стали 45, используя параметр (2.16), запишем преобразованную задачу (1.42)-(1.44) в виде системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{d\lambda} = \frac{B_A \sigma_0^n}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

с начальными условиями

$$A(0) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad t(0) = 0. \quad (2.18)$$

Выражение для определения деформации ползучести (1.44) останется в прежнем виде.

Правые части уравнений системы (2.17) также не обращаются в бесконечность. Для численного решения задачи (2.17), (2.18) будем использовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я. В качестве материальных констант для системы (2.17) используются (1.45).

В таблице 16 даны результаты численного решения задачи (2.17), (2.18) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 603, 618, 638$  МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Обозначения аналогичны используемым в таблицах 12 и 14. Начальное значение шага  $h_s^\lambda$  по аргументу  $\lambda$  принималось равным  $10^{-5}$ .

Таблица 16. Расчетные данные для сплава 3В при переменном шаге,  $\lambda$ -преобразование

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^\lambda$	$h_{\max}^\lambda$	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ									
603	$10^{-1}$	0.1097	0.9993	66.165	4292.351	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^4$	952	10.491
	$10^{-2}$	0.1098	0.9999	66.2094	4292.34	$10^{-5}$	$5 \cdot 10^3$	9489	99.23
	$10^{-3}$	0.1098	1	66.2127	4292.34	$10^{-5}$	335.54	98391	1024.6
	$10^{-4}$	0.1098	1	66.2131	4292.34	$10^{-5}$	41.943	936890	9770.3
618	$10^{-1}$	0.107	0.999	66.1457	1202.078	$10^{-5}$	$10^4$	965	10.539
	$10^{-2}$	0.1071	0.9999	66.208	1202.065	$10^{-5}$	$10^3$	9431	98.14
	$10^{-3}$	0.1071	1	66.2129	1202.065	$10^{-5}$	167.77	98757	1027.6
	$10^{-4}$	0.1071	1	66.2131	1202.065	$10^{-5}$	10.486	952806	9943.3
638	$10^{-1}$	0.1037	0.9994	66.172	230.9	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^3$	941	10.248
	$10^{-2}$	0.1038	1	66.2116	230.898	$10^{-5}$	167.77	10146	105.55
	$10^{-3}$	0.1038	1	66.2126	230.898	$10^{-5}$	20.972	95485	995.7
Продолжение таблицы 16 на следующей странице									

Таблица 16 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^\lambda$	$h_{\max}^\lambda$	$N_s$	$t_c$ , мс
638	$10^{-4}$	0.1038	1	66.2131	230.898	$10^{-5}$	2.6214	927232	9678.4

## Метод ЭКЯ

603	$10^{-1}$	0.1096	0.998	66.0789	4292.321	$10^{-5}$	$2 \cdot 10^5$	352	9.41
	$10^{-2}$	0.1098	0.9999	66.2053	4292.34	$10^{-5}$	$10^4$	3250	77.1
	$10^{-3}$	0.1098	1	66.2108	4292.34	$10^{-5}$	$10^3$	31015	726.6
	$10^{-4}$	0.1098	1	66.2131	4292.34	$10^{-5}$	167.77	318546	7458.4
618	$10^{-1}$	0.1069	0.998	66.0832	1202.057	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^4$	345	9.211
	$10^{-2}$	0.1071	0.9998	66.1969	1202.065	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^3$	3343	78.63
	$10^{-3}$	0.1071	1	66.2122	1202.065	$10^{-5}$	335.54	31361	733.6
	$10^{-4}$	0.1071	1	66.2131	1202.065	$10^{-5}$	41.943	314197	7366.3
638	$10^{-1}$	0.1038	0.9997	66.1945	230.898	$10^{-5}$	$5 \cdot 10^3$	359	9.505
	$10^{-2}$	0.1038	0.9998	66.2011	230.898	$10^{-5}$	671.09	3166	75.48
	$10^{-3}$	0.1038	1	66.2121	230.898	$10^{-5}$	83.886	30948	721.1
	$10^{-4}$	0.1038	1	66.2131	230.898	$10^{-5}$	5.2429	333880	7839.1

## Метод РК4Я

603	$10^{-1}$	0.1087	0.9902	65.5618	4292.306	$10^{-5}$	$7 \cdot 10^5$	107	5.089
	$10^{-2}$	0.1097	0.9991	66.1518	4292.34	$10^{-5}$	$9 \cdot 10^4$	676	24.51
	$10^{-3}$	0.1098	0.9999	66.2041	4292.34	$10^{-5}$	$5 \cdot 10^3$	6474	222.9
	$10^{-4}$	0.1098	1	66.213	4292.34	$10^{-5}$	671.09	62004	2119.9
618	$10^{-1}$	0.1064	0.9929	65.741	1202.056	$10^{-5}$	$2 \cdot 10^5$	105	4.985
	$10^{-2}$	0.107	0.9988	66.1363	1202.065	$10^{-5}$	$2 \cdot 10^4$	658	24.5
	$10^{-3}$	0.1071	1	66.2124	1202.065	$10^{-5}$	$10^3$	6660	229.5
	$10^{-4}$	0.1071	1	66.2124	1202.065	$10^{-5}$	167.77	62701	2146.6
638	$10^{-1}$	0.1024	0.9869	65.3454	230.896	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^4$	99	4.709
	$10^{-2}$	0.1037	0.9994	66.1753	230.898	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^3$	691	25.56
	$10^{-3}$	0.1038	0.9999	66.204	230.898	$10^{-5}$	335.54	6310	220
	$10^{-4}$	0.1038	1	66.2129	230.898	$10^{-5}$	41.943	61876	2119.7

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (2.17), (2.18), имеют вид, аналогичный приведенному на рис. 1.10. Характер изменения шага интегрирования по аргументу  $\lambda$  и относительной погрешности  $\delta\omega$  по аргументу  $t$  совпадает с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.11 и 1.12.

В таблице 17 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (2.17), (2.18) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом. Обозначения в таблице 17 аналогичны используемым в таблице 10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для параметра поврежденности (1.46).

Таблица 17. Относительная погрешность  $\delta\omega$  для численного решения задачи (2.17), (2.18)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭЯ					
603	$10^{-1}$	39.316	0.828	0.133	3.351
	$10^{-2}$	39.316	0.192	0.013	0.964
	$10^{-3}$	14.286	0.039	0.001	0.237
	$10^{-4}$	17.503	0.01	$10^{-4}$	0.093
618	$10^{-1}$	39.316	0.939	0.138	3.456
	$10^{-2}$	39.316	0.192	0.013	0.962
	$10^{-3}$	14.286	0.037	0.001	0.225
	$10^{-4}$	17.503	0.006	$10^{-4}$	0.063
638	$10^{-1}$	39.316	0.953	0.138	3.512
	$10^{-2}$	39.316	0.152	0.012	0.865
	$10^{-3}$	14.286	0.033	0.001	0.206
	$10^{-4}$	17.503	0.009	$10^{-4}$	0.089
Метод ЭКЯ					
603	$10^{-1}$	6.93	0.374	0.003	1.198
	$10^{-2}$	6.247	0.089	$2 \cdot 10^{-5}$	0.452
	$10^{-3}$	6.247	0.016	$3 \cdot 10^{-7}$	0.143
	$10^{-4}$	13.133	0.008	$3 \cdot 10^{-9}$	0.076
618	$10^{-1}$	7.371	0.425	0.004	1.308
	$10^{-2}$	6.247	0.101	$2 \cdot 10^{-5}$	0.497
	$10^{-3}$	6.247	0.012	$2 \cdot 10^{-7}$	0.113
	$10^{-4}$	13.133	0.009	$3 \cdot 10^{-9}$	0.084
638	$10^{-1}$	6.672	0.407	0.002	1.249
	$10^{-2}$	6.247	0.056	$3 \cdot 10^{-5}$	0.342
	$10^{-3}$	6.247	0.019	$3 \cdot 10^{-7}$	0.16
	$10^{-4}$	13.133	0.011	$2 \cdot 10^{-9}$	0.093
Метод РК4Я					
603	$10^{-1}$	6.688	0.338	0.007	0.98
	$10^{-2}$	2.54	0.046	$10^{-6}$	0.268
	$10^{-3}$	1.784	0.004	$10^{-10}$	0.048
	$10^{-4}$	1.784	0.003	$8 \cdot 10^{-12}$	0.035
618	$10^{-1}$	6.863	0.288	0.004	0.931
	$10^{-2}$	2.585	0.049	$10^{-6}$	0.278
	$10^{-3}$	1.784	0.004	$8 \cdot 10^{-11}$	0.047
Продолжение таблицы 17 на следующей странице					

Таблица 17 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
618	$10^{-4}$	1.784	0.002	$8 \cdot 10^{-12}$	0.032
638	$10^{-1}$	6.304	0.227	0.004	0.816
	$10^{-2}$	2.501	0.043	$7 \cdot 10^{-7}$	0.26
	$10^{-3}$	1.784	0.004	$6 \cdot 10^{-11}$	0.045
	$10^{-4}$	1.784	0.001	$7 \cdot 10^{-13}$	0.021

### 2.2.3 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из сплава ОТ-4

Определенный интерес представляет исследование применения наилучшей параметризации к расчету неупрочняющихся конструкций, даже с учетом того, что подобный расчет уже возможен с использованием явных методов и не представляет существенных затруднений. Маловероятно, что наилучшая параметризация позволит уменьшить время счета для неупрочняющихся конструкций, поскольку переход к наилучшему аргументу усложняет уравнения исходной задачи. Но стоит рассмотреть возможность уменьшения максимальной и средней погрешности при использовании аргумента  $\lambda$ .

Для задачи расчета длительной прочности в условиях ползучести для плоских образцов из титанового сплава ОТ-4, рассмотренной в параграфе 1.2.2 и описывающейся начальной задачей (1.25)-(1.26), выберем наилучший аргумент в виде

$$(d\lambda)^2 = (d\varepsilon)^2 + (dA)^2 + (dt)^2. \quad (2.19)$$

Тогда, используя процедуру  $\lambda$ -преобразования по аргументу (2.19), запишем параметризованную задачу в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{\sigma_0^2 \cdot (A_* - A)^{2m} + (1 + \sigma_0^2) \cdot K^2 e^{2\beta\sigma_0}}}, \\ \frac{dA}{d\lambda} = \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{\sigma_0^2 \cdot (A_* - A)^{2m} + (1 + \sigma_0^2) \cdot K^2 e^{2\beta\sigma_0}}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\sigma_0 \cdot (A_* - A)^m}{\sqrt{\sigma_0^2 \cdot (A_* - A)^{2m} + (1 + \sigma_0^2) \cdot K^2 e^{2\beta\sigma_0}}} \end{cases} \quad (2.20)$$

с однородными начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, A(0) = 0, t(0) = 0. \quad (2.21)$$

Задача (2.20), (2.21) уже не имеет особенности в момент разрушения. Для ее численного решения будем использовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я. В качестве материальных констант для системы (2.20) используются (1.30).

В таблице 18 даны результаты численного решения задачи (2.20), (2.21) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 98, 112.7$  и  $147$  МПа с постоянным шагом интегрирования  $h^\lambda = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ . Обозначения аналогичны используемым в таблице 5.

Таблица 18. Расчетные данные для сплава ОТ-4 при постоянном шаге,  $\lambda$ -преобразование

$\sigma_0$ , МПа	$h^\lambda$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
---------------------	-------------	-------------------	---------------------------------	-------------	-------	------------

Метод ЭЯ

98	$10^{-1}$	0.8997	88.1722	446.4126	4793	16.489
	$10^{-2}$	0.9	88.1975	446.2461	47919	169.39
	$10^{-3}$	0.9	88.1991	446.2294	479178	1708.2
	$10^{-4}$	0.9	88.1999	446.2277	4791775	17210
112.7	$10^{-1}$	0.7817	88.1001	264.1271	3027	10.975
	$10^{-2}$	0.7825	88.1919	263.9842	30268	106.06
	$10^{-3}$	0.7826	88.1991	263.9699	302676	1081.1
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9685	3026757	10930
147	$10^{-1}$	0.5996	88.1356	77.6412	1323	4.962
	$10^{-2}$	0.6	88.1939	77.5526	13230	46.8
	$10^{-3}$	0.6	88.1998	77.5437	132300	470.9
	$10^{-4}$	0.6	88.1999	77.5428	1322996	4721.9

Метод ЭКЯ

98	$10^{-1}$	0.8992	88.1225	446.2276	4791	27.487
	$10^{-2}$	0.8999	88.1926	446.2276	47917	260.75
	$10^{-3}$	0.9	88.1996	446.2276	479177	2630.2
	$10^{-4}$	0.9	88.2	446.2276	4791774	26431
112.7	$10^{-1}$	0.7819	88.1243	263.9684	3026	16.665
	$10^{-2}$	0.7826	88.1943	263.9683	30267	164.72
	$10^{-3}$	0.7826	88.1993	263.9683	302675	1658.3
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9683	3026756	16793
147	$10^{-1}$	0.5993	88.1004	77.5428	1322	7.568
	$10^{-2}$	0.5999	88.1904	77.5427	13229	71.16
	$10^{-3}$	0.6	88.1994	77.5427	132299	728.4
	$10^{-4}$	0.6	88.1999	77.5427	1322995	7252.3

Метод РК4Я

98	$10^{-1}$	0.8992	88.1226	446.2276	4791	49.642
	$10^{-2}$	0.8999	88.1926	446.2276	47917	501.03
	$10^{-3}$	0.9	88.1996	446.2276	479177	5018.3

Продолжение таблицы 18 на следующей странице

Таблица 18 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$h^\lambda$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
98	$10^{-4}$	0.9	88.2	446.2276	4791774	50302
112.7	$10^{-1}$	0.7819	88.1243	263.9683	3026	31.934
	$10^{-2}$	0.7826	88.1943	263.9683	30267	316.54
	$10^{-3}$	0.7826	88.1993	263.9683	302675	3170.2
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9683	3026756	31985
147	$10^{-1}$	0.5993	88.1004	77.5427	1322	14.031
	$10^{-2}$	0.5999	88.1904	77.5427	13229	139.81
	$10^{-3}$	0.6	88.1994	77.5427	132299	1390.9
	$10^{-4}$	0.6	88.1999	77.5427	1322995	13877

В таблице 19 даны результаты численного решения задачи (2.20), (2.21) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 98, 112.7$  и  $147$  МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Обозначения аналогичны используемым в таблицах 6 и 16. Начальное значение шага  $h_s^\lambda$  по аргументу  $\lambda$  принималось равным единице.

Таблица 19. Расчетные данные для сплава ОТ-4 при переменном шаге,  $\lambda$ -преобразование

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^\lambda$	$h_{\max}^\lambda$	$N_s$	$t_c$ , мс
---------------------	------------	-------------------	---------------------------------	-------------	--------------------	--------------------	-------	---------------

## Метод ЭЯ

98	$10^{-1}$	0.8996	88.1642	446.9313	0.0625	2	1336	8.435
	$10^{-2}$	0.8999	88.1949	446.3009	0.0078	0.125	12396	75.661
	$10^{-3}$	0.9	88.1991	446.235	$10^{-3}$	0.0156	115767	710.1
	$10^{-4}$	0.9	88.1999	446.2283	$6 \cdot 10^{-5}$	0.002	1341672	8277.4
112.7	$10^{-1}$	0.7825	88.1837	264.4037	0.0625	1	1328	8.537
	$10^{-2}$	0.7826	88.1969	264.0102	0.0078	0.0625	12507	76.549
	$10^{-3}$	0.7826	88.2	263.9727	$10^{-3}$	0.0078	113588	699.76
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9687	$6 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$	1336702	8254.5
147	$10^{-1}$	0.5998	88.1775	77.6696	0.0625	0.25	1352	8.705
	$10^{-2}$	0.6	88.1955	77.5554	0.0078	0.0313	12230	74.572
	$10^{-3}$	0.6	88.1993	77.544	$10^{-3}$	0.002	108615	666.37
	$10^{-4}$	0.6	88.2	77.5428	$6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	1365911	8426.6

## Метод ЭКЯ

98	$10^{-1}$	0.8982	88.0198	446.2303	0.25	4	410	4.413
	$10^{-2}$	0.8999	88.1944	446.2276	0.0156	0.5	4490	42.728

Продолжение таблицы 19 на следующей странице

Таблица 19 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , Ч	$h_{\min}^\lambda$	$h_{\max}^\lambda$	$N_s$	$t_c$ , мс
98	$10^{-3}$	0.9	88.1984	446.2276	0.002	0.0313	44071	414.83
	$10^{-4}$	0.9	88.1998	446.2276	$2 \cdot 10^{-4}$	0.0039	407698	3851.6
112.7	$10^{-1}$	0.781	88.0228	263.9699	0.25	2	409	4.199
	$10^{-2}$	0.7826	88.1962	263.9683	0.0156	0.25	4519	43.132
	$10^{-3}$	0.7826	88.1982	263.9683	0.002	0.0313	43916	413.82
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9683	$2 \cdot 10^{-4}$	0.002	409275	3864.4
147	$10^{-1}$	0.5997	88.15	77.5432	0.25	1	398	4.11
	$10^{-2}$	0.6	88.1973	77.5427	0.0156	0.0625	4699	44.599
	$10^{-3}$	0.6	88.1992	77.5427	0.002	0.0078	44316	416.75
	$10^{-4}$	0.6	88.2	77.5427	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$	400103	3776.7

## Метод РК4Я

98	$10^{-1}$	0.8982	88.0226	446.2275	1	16	94	1.959
	$10^{-2}$	0.8995	88.1476	446.2276	0.125	2	814	14.885
	$10^{-3}$	0.8999	88.1945	446.2276	0.0078	0.25	8974	157.87
	$10^{-4}$	0.9	88.1993	446.2276	$10^{-3}$	0.0156	88138	1542.7
112.7	$10^{-1}$	0.7766	87.5244	263.9683	1	16	94	2.045
	$10^{-2}$	0.7822	88.1493	263.9683	0.125	1	812	14.463
	$10^{-3}$	0.7826	88.1962	263.9683	0.0078	0.125	9032	158.03
	$10^{-4}$	0.7826	88.1991	263.9683	$10^{-3}$	0.0156	87831	1535.2
147	$10^{-1}$	0.598	87.9004	77.5427	1	4	91	1.854
	$10^{-2}$	0.5997	88.1504	77.5427	0.125	0.5	793	14.43
	$10^{-3}$	0.6	88.1973	77.5427	0.0078	0.0313	9395	163.77
	$10^{-4}$	0.6	88.1992	77.5427	$10^{-3}$	0.0039	88630	1553.6

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (2.20), (2.21) с постоянным и переменным шагом, имеют вид, аналогичный приведенным на рис. 1.4. Характер изменения шага интегрирования по аргументу  $\lambda$  совпадает с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.5.

В таблице 20 представлена относительная погрешность удельной работы рассеяния при расчете задачи (2.20), (2.21) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом. Обозначения в таблице 20 аналогичны используемым в таблице 7. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для удельной работы рассеяния (1.27). Характер изменения погрешности  $\delta A$  в зависимости от аргумента  $t$  аналогичен характеру изменения кривых, приведенных на рис. 1.6.

Таблица 20. Относительная погрешность  $\delta A$  для численного решения задачи (2.20), (2.21)

$\sigma_0, \text{МПа}$	Постоянный шаг					Переменный шаг				
	$h^\lambda$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$	$\theta_1$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭЯ										
98	$10^{-1}$	15.747	0.399	0.016	1.959	$10^{-1}$	22.858	4.477	0.614	6.878
	$10^{-2}$	8.49	0.117	0.002	0.801	$10^{-2}$	12.258	1.181	0.056	2.849
	$10^{-3}$	4.658	0.036	$2 \cdot 10^{-4}$	0.331	$10^{-3}$	6.697	0.31	0.005	1.132
	$10^{-4}$	2.584	0.011	$2 \cdot 10^{-5}$	0.138	$10^{-4}$	3.641	0.128	$6 \cdot 10^{-4}$	0.544
112.7	$10^{-1}$	17.388	0.753	0.029	2.805	$10^{-1}$	23.169	4.626	0.645	6.994
	$10^{-2}$	9.365	0.224	0.003	1.155	$10^{-2}$	12.141	1.146	0.05	2.802
	$10^{-3}$	5.129	0.068	$3 \cdot 10^{-4}$	0.479	$10^{-3}$	6.696	0.316	0.005	1.142
	$10^{-4}$	2.841	0.021	$3 \cdot 10^{-5}$	0.2	$10^{-4}$	3.676	0.131	$7 \cdot 10^{-4}$	0.553
147	$10^{-1}$	21.474	2.524	0.154	5.392	$10^{-1}$	23.108	4.527	0.664	6.93
	$10^{-2}$	11.436	0.751	0.015	2.262	$10^{-2}$	12.248	1.19	0.049	2.864
	$10^{-3}$	6.227	0.229	0.002	0.948	$10^{-3}$	6.687	0.328	0.004	1.164
	$10^{-4}$	3.438	0.071	$2 \cdot 10^{-4}$	0.398	$10^{-4}$	3.666	0.128	$7 \cdot 10^{-4}$	0.545
Метод ЭКЯ										
98	$10^{-1}$	2.105	0.008	$5 \cdot 10^{-7}$	0.106	$10^{-1}$	5.037	0.202	0.002	0.808
	$10^{-2}$	0.672	$8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-9}$	0.019	$10^{-2}$	1.6	0.029	$2 \cdot 10^{-5}$	0.176
	$10^{-3}$	0.214	$8 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-11}$	0.003	$10^{-3}$	0.492	0.002	$2 \cdot 10^{-7}$	0.027
	$10^{-4}$	0.071	$9 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.159	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005
112.7	$10^{-1}$	2.303	0.014	$10^{-6}$	0.15	$10^{-1}$	4.998	0.199	0.002	0.798
	$10^{-2}$	0.735	0.002	$10^{-8}$	0.027	$10^{-2}$	1.603	0.029	$2 \cdot 10^{-5}$	0.176
	$10^{-3}$	0.232	$10^{-4}$	$10^{-10}$	0.005	$10^{-3}$	0.497	0.002	$2 \cdot 10^{-7}$	0.028
Продолжение таблицы 20 на следующей странице										

Таблица 20 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	Постоянный шаг					Переменный шаг				
	$h^\lambda$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$	$\theta_1$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$
112.78	$10^{-4}$	0.071	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.158	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005
147	$10^{-1}$	2.784	0.048	$3 \cdot 10^{-5}$	0.298	$10^{-1}$	5.147	0.214	0.001	0.838
	$10^{-2}$	0.886	0.005	$3 \cdot 10^{-7}$	0.054	$10^{-2}$	1.588	0.028	$3 \cdot 10^{-5}$	0.17
	$10^{-3}$	0.281	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-9}$	0.01	$10^{-3}$	0.495	0.002	$2 \cdot 10^{-7}$	0.028
	$10^{-4}$	0.086	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-11}$	0.002	$10^{-4}$	0.159	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-9}$	0.005
Метод РК4Я										
98	$10^{-1}$	0.088	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^{-13}$	0.001	$10^{-1}$	1.12	0.017	$10^{-5}$	0.118
	$10^{-2}$	0.027	$2 \cdot 10^{-6}$	$10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-2}$	0.087	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.004
	$10^{-3}$	0.021	$8 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	0.014	$4 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	0.045	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.022	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$
112.7	$10^{-1}$	0.086	$3 \cdot 10^{-5}$	$10^{-13}$	0.002	$10^{-1}$	0.766	0.014	$8 \cdot 10^{-6}$	0.092
	$10^{-2}$	0.024	$2 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-2}$	0.076	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-9}$	0.003
	$10^{-3}$	0.04	$4 \cdot 10^{-6}$	$10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$	0.021	$6 \cdot 10^{-6}$	$10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	0.044	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.03	$9 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-4}$
147	$10^{-1}$	0.113	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-12}$	0.003	$10^{-1}$	0.556	0.01	$2 \cdot 10^{-6}$	0.067
	$10^{-2}$	0.019	$4 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-2}$	0.056	$10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-10}$	0.002
	$10^{-3}$	0.028	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$	0.029	$10^{-5}$	$10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	0.053	$10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.026	$4 \cdot 10^{-6}$	$10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$

## 2.2.4 Анализ результатов наилучшей параметризации

Применение метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации к расчету длительной прочности упрочняющихся конструкций в условиях ползучести позволяет перейти от исходных задач (1.34), (1.4) для стали 45 и (1.42)-(1.43) для титанового сплава ЗВ, которые имеют две ПОТ, к преобразованным задачам без особенностей (2.15), (2.14) и (2.17), (2.18) соответственно. Таким образом, наилучшая параметризация позволила применять для расчета длительной прочности упрочняющихся конструкций явные методы решения задачи Коши, что привело к устранению всех трудностей, возникающих при использовании неявных методов решения начальных задач (см. раздел 1.3). Для точности  $\theta_1 = 10^{-4}$  это позволило снизить время счета в среднем на 35-40 процентов для стали 45 и титанового сплава ЗВ. Для более низкой точности время счета для параметризованных задач может быть меньше в разы. Выделим следующие особенности применения наилучшей параметризации к расчету упрочняющихся конструкций:

1. Полученные приближенные решения параметризованных задач также хорошо согласуются с аналитическими и экспериментальными данными, как и результаты, полученные в разделе 1.3.
2. Из таблиц 14 и 16 видно, что для стали 45 и титанового сплава ЗВ шаг интегрирования не опускается ниже значения начального шага  $h_s^\lambda$ . При этом длина рассматриваемого интервала по  $\lambda$  мало отличается от длины интервала по аргументу  $t$ , измеряемого в секундах. Количество шагов по аргументу  $t$  и  $\lambda$  также отличается всего на несколько процентов. Это говорит о том, что характер изменения шагов по  $t$  и  $\lambda$  мало отличается как количественно, так и качественно, но для сплава ЗВ удается избежать уменьшения шага до порядка  $10^{-41}$  в окрестностях ПОТ.
3. При сравнении погрешностей расчетных данных, приведенных в таблицах 15 и 17, можно отметить, что для параметризованных задач метод ЭЯ дает большую максимальную погрешность, чем метод ЭНЯ для исходных задач, что влияет на увеличение среднего значения и среднего квадратичного отклонения погрешности решений параметризованных задач. Однако медиана, среднее значение и среднее квадратическое отклонение погрешности для методов ЭЯ и ЭНЯ отличаются незначительно. Значит решения, полученные методами ЭЯ и ЭНЯ, сопоставимы по точности.
4. Для параметризованных задач повышение порядка точности используемых численных методов позволяет существенно уменьшить погрешность решения. Уже метод ЭКЯ дает погрешность меньшую, чем методы ГНЯ и ЭНЯ. Наименьшая же средняя погрешность получена методом РК4Я, она более чем на порядок меньше средней погрешности, полученной неявными методами для обеих задач.

В остальном, для параметризованных упрочняющихся задач справедливы выводы, сделанные в параграфе 1.3.3.

**Замечание 2.1.** При  $\theta_1 = 10^{-4}$  для титанового сплава ЗВ как в параметризованном, так и в непараметризованном случаях наблюдается возрастание максимальной погрешности численного решения. Это можно связать как со специфическими свойствами рассматриваемой задачи, так и с особенностями применяемых методов (для методов ГЧНЯ и РК4Я возрастания не наблюдается). Для параметризованной задачи максимальную погрешность можно контролировать выбором начального шага.

**Замечание 2.2.** В окрестности начальной точки деформация ползучести и параметр поврежденности принимают близкие к нулю значения. Абсолютная погрешность численного решения в окрестности начальной точки не превосходит заданного значения точности, но относительная погрешность может принимать значения в сотни и тысячи процентов, что сильно искажает средние значения погрешности. Выбор малых значений начального шага  $h_s^\lambda = 10^{-6}$  для стали 45 и  $h_s^\lambda = 10^{-5}$  для сплава ЗВ предотвращает рост относительной погрешности в окрестности начальной точки.

Для задачи расчета длительной прочности образцов из сплава ОТ-4 (таблицы 18 и 19) при постоянном шаге интегрирования время счета возросло в среднем от 1.5 до 2.5 раз, что объясняется усложнением вида преобразованной задачи по сравнению с исходной. При этом, количество шагов по независимой переменной возрастает незначительно. Для параметризованной задачи, даже при использовании постоянного шага, удается близко подойти к моменту разрушения, что объясняется улучшением обусловленности данной задачи.

При переменном шаге интегрирования для метода ЭЯ величина шага увеличивается, что позволяет уменьшить количество шагов по параметру  $\lambda$  вдвое и сократить время счета в среднем на 40 процентов. Для методов ЭКЯ и РК4Я вычислительное преимущество исчезает. Для этих двух методов количество шагов по независимой переменной может отличаться на 10-15 процентов в обе стороны по сравнению с непараметризованной задачей. Время счета увеличивается на 15 процентов для метода ЭКЯ и на 45-50 процентов для метода РК4Я.

При анализе результатов таблицы 20 можно отметить, что с ростом порядка точности численного метода погрешность уменьшается. Метод ЭЯ для параметризованной задачи дает увеличенную погрешности по сравнению с исходной задачей как при постоянном, так и при переменном шаге. Это объясняется возрастанием количества точек, попадающих в окрестность момента разрушения, для которых погрешность имеет большие значения. Для метода ЭКЯ средние значения погрешности решений параметризованной и непараметризованной задач мало отличаются. Метод РК4Я при постоянном шаге позволяет значительно снизить как максимальную, так и среднюю погрешность решения параметризованной задачи по сравнению с исходной. Но при переменном шаге погрешность для метода РК4Я мало отличается от значений, полученных для непараметризованной задачи. В среднем же, для рассматриваемых методов значения погрешностей решений параметризованной и непараметризованной задач сопоставимы.

В остальном, для параметризованной задачи одноосного растяжения образцов из сплава ОТ-4 справедливы выводы параграфа 1.2.3.

### Глава 3. Продолжение решения по модифицированному наилучшему аргументу

На практике при решении конкретной задачи наилучший аргумент может оказаться неудобным в использовании. Вместо наилучшего параметра часто применяют его усеченные варианты или аргументы продолжения других видов. Например, в монографии Э. И. Григолюка и Е. А. Лопаницына [17] используется параметр продолжения специального вида, позволяющий при расчете пологих оболочек методом конечных элементов получать симметричные матрицы жесткости. В данной работе для ослабления недостатков, возникающих при  $\lambda$ -преобразовании, введем новый аргумент  $\kappa$ , вектор  $\bar{\alpha}$  (2.8) для которого представим в виде

$$\bar{\alpha}' = \left( \tilde{K}_1(y_1, \dots, y_{m+1}) \cdot \frac{dy_1}{d\lambda}, \dots, \tilde{K}_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1}) \cdot \frac{dy_{m+1}}{d\lambda} \right)^T. \quad (3.1)$$

Для сохранения одного направления отсчета нового аргумента  $\kappa$  и наилучшего аргумента  $\lambda$  будем полагать функции  $\tilde{K}_i$  неотрицательными, т. е.  $\tilde{K}_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m + 1$ . Других ограничений на выбор функций  $\tilde{K}_i$  накладывать не будем.

Домножая и деля каждую компоненту вектора (3.1) на  $d\kappa$ , получим

$$\bar{\alpha}' = \left( \tilde{K}_1(y_1, \dots, y_{m+1}) \cdot \frac{d\kappa}{d\lambda} \cdot \frac{dy_1}{d\kappa}, \dots, \tilde{K}_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1}) \cdot \frac{d\kappa}{d\lambda} \cdot \frac{dy_{m+1}}{d\kappa} \right)^T.$$

Здесь  $0 \leq \frac{d\kappa}{d\lambda} < \infty$  – функция, зависящая от  $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$ . Обозначая далее

$$K_i(y_1, \dots, y_{m+1}) = \tilde{K}_i(y_1, \dots, y_{m+1}) \cdot \frac{d\kappa}{d\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1,$$

запишем  $\bar{\alpha}'$  в форме

$$\bar{\alpha}' = \left( K_1(y_1, \dots, y_{m+1}) \cdot \frac{dy_1}{d\kappa}, \dots, K_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1}) \cdot \frac{dy_{m+1}}{d\kappa} \right)^T.$$

Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, примем

$$K_i(y_1, \dots, y_{m+1}) = g_i^{-2}(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}), \quad i = 1, \dots, m + 1 \quad (3.2)$$

и окончательно получим

$$\bar{\alpha}' = \left( \frac{1}{g_1^2(y_1, \dots, y_{m+1})} \cdot \frac{dy_1}{d\kappa}, \dots, \frac{1}{g_{m+1}^2(y_1, \dots, y_{m+1})} \cdot \frac{dy_{m+1}}{d\kappa} \right)^T, \quad (3.3)$$

где  $g_1(y_1, \dots, y_{m+1}), \dots, g_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1})$  – произвольные неотрицательные функции.

Запись функций  $K_i(y_1, y_2, \dots, y_{m+1})$  в виде (3.2) не влияет на свойства параметра  $\kappa$ . Данный выбор сделан исключительно для удобства проведения дальнейших выкладок.

В отличие от вектора  $\bar{\alpha}$  (2.8) для наилучшего аргумента  $\lambda$ , квадратичная норма вектора  $\bar{\alpha}'$  (3.3) для аргумента  $\kappa$  уже не равна единице, а является переменной величиной, зависящей от выбора функций  $g_i(y_1, \dots, y_{m+1})$ ,  $i = 1, \dots, m + 1$ .

**Определение 3.1.** Аргумент, определяемый вектором  $\bar{\alpha}'$  (3.3), будем называть модифицированным наилучшим и обозначать  $\kappa$ .

Подставляя вектор  $\bar{\alpha}'$  (3.3) в соотношение (2.5), получим скалярный вид аргумента  $\kappa$

$$(d\kappa)^2 = \left( \frac{dy_1}{g_1(y_1, \dots, y_{m+1})} \right)^2 + \dots + \left( \frac{dy_{m+1}}{g_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1})} \right)^2. \quad (3.4)$$

Система уравнений (2.1)-(2.2), преобразованная к аргументу  $\kappa$ , запишется в виде

$$\frac{dy_i}{d\kappa} = \pm \frac{f_i(y_1, \dots, y_{m+1})}{\sqrt{Q'(y_1, \dots, y_{m+1})}}, \quad \kappa \in [0, \kappa_*], \quad i = 1, \dots, m+1, \quad (3.5)$$

где  $Q'(y_1, \dots, y_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} \left( \frac{f_i(y_1, \dots, y_{m+1})}{g_i(y_1, \dots, y_{m+1})} \right)^2$ ,  $f_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1}) \equiv 1$ .

В дальнейшем будем считать, что знак правой части системы (3.5) положительный.

В качестве начальных условий для системы (3.5) выберем (2.11).

**Определение 3.2.** *Переход от задачи (2.1)-(2.2) к задаче (3.5), (2.11) будем называть  $\kappa$ -преобразованием.*

Выбирая функции  $g_i(y_1, \dots, y_{m+1})$  тем или иным образом, можно получать различные параметры продолжения  $\kappa$  вида (3.4), для которых задача (3.5), (2.11) может быть как хорошо, так и плохо обусловленной. Важной проблемой является определение обусловленности задач вида (3.5), (2.11) при различных параметрах  $\kappa$ . Для решения данной задачи целесообразно использовать тот факт, что параметр  $\lambda$  дает задаче (2.10)-(2.11) наилучшую обусловленность. Исследуем условия, налагаемые на функции  $g_i(y_1, \dots, y_{m+1})$ , для близости параметров  $\lambda$  и  $\kappa$  при их сопоставлении.

## 3.1 Модификация наилучшего аргумента продолжения для систем ОДУ

Существенным недостатком при использовании аргумента  $\kappa$  является то, что на сегодняшний день нет доказанных утверждений, касающихся обусловленности  $\kappa$ -преобразованных задач. Исследуем этот вопрос, начав с рассмотрения способа отсчета аргумента  $\kappa$ .

### 3.1.1 О направлениях отсчета аргументов $\lambda$ и $\kappa$ в окрестности точки интегральной кривой

Ограничиваясь случаем системы из двух ОДУ, рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = F_1(u, v, x), \\ \frac{dv}{dx} = F_2(u, v, x), \\ u(x_0) = u_0, \quad v(x_0) = v_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Будем в дальнейшем полагать, что для задачи (3.6) выполнены условия существования решения в некоторой рассматриваемой области  $W = \{(u, v, x) | u_0 \leq u \leq u_*, v_0 \leq v \leq v_*, x_0 \leq x \leq x_*\}$ . Также допускается возможность неограниченного возрастания функций  $F_1(u, v, x)$  и  $F_2(u, v, x)$  в конечном числе точек из  $W$ .

Для параметризации задачи (3.6) будем использовать аргумент  $\lambda$

$$(d\lambda)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + (dx)^2 \quad (3.7)$$

и аргумент  $\kappa$  специального вида

$$(d\kappa)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + \left( \frac{dx}{f(u, v, x)} \right)^2, \quad (3.8)$$

где функция  $f(u, v, x)$  полагается произвольной неотрицательной. При этом, процесс параметризации и вид параметризованных этими аргументами задач аналогичны приведенным выше. Выбор параметра  $\kappa$  в специальном виде (3.8) диктуется как соображениями простоты, так и удобством применения данной формы параметра  $\kappa$  в приложениях.

Заметим, что задание аргументов продолжения в виде (3.7) и (3.8) дает нам право отождествить их с переменными, отсчитываемыми в окрестности каждой точки интегральной кривой в направлениях задаваемыми векторами

$$d\bar{\lambda} = (du, dv, dx)^T \quad (3.9)$$

и

$$d\bar{\kappa} = \left( du, dv, \frac{dx}{f(u, v, x)} \right)^T. \quad (3.10)$$

Свяжем обусловленность  $\kappa$ -преобразованной задачи с отклонением, возникающим между векторами (3.9) и (3.10) при движении вдоль интегральной кривой  $l$  задачи (3.6). Исследуем вначале механизм возникновения отклонений между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$ . Для этого рассмотрим участок интегральной кривой  $l$  задачи (3.6), заключенный между начальной  $M_0(x_0, u_0, v_0)$  и конечной  $M_*(x_*, u_*, v_*)$  точками. Разобьем рассматриваемый участок интегральной кривой на  $n$  интервалов точками  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = M_*$ . При движении вдоль интегральной кривой по аргументам  $\lambda$  и  $\kappa$ , поставим в соответствие каждой точке  $M_i(x_i, u_i, v_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , следующие векторы:  $\bar{E}_i$  – длина которого  $E_i = \|\bar{E}_i\|_2$  является суммарным отклонением направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего (направления отсчета наилучшего аргумента  $\lambda$ ) при движении от точки  $M_0$  до  $M_i$ ,  $d\bar{E}_{i+}$  и  $d\bar{E}_{i-}$  – длины которых  $dE_{i+} = \|d\bar{E}_{i+}\|_2$  и  $dE_{i-} = \|d\bar{E}_{i-}\|_2$  являются отклонениями направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в правой и левой полуокрестностях точки  $M_i$  соответственно. Связь между указанными векторами определим соотношениями

$$\begin{aligned} d\bar{E}_{i-} &= \lim_{\|M_i M_{i-1}\|_2 \rightarrow 0} (\bar{E}_i - \bar{E}_{i-1}), \\ d\bar{E}_{i+} &= \lim_{\|M_i M_{i+1}\|_2 \rightarrow 0} (\bar{E}_{i+1} - \bar{E}_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\overline{M_i M_{i-1}}$  и  $\overline{M_i M_{i+1}}$  – векторы с началом в точке  $M_i$  и концами в точках  $M_{i-1}$  и  $M_{i+1}$  соответственно. В точках  $M_0$  и  $M_*$  определены только векторы  $d\bar{E}_{0+}$  и  $d\bar{E}_{*-}$ . При совпадении отклонений в правой и левой полукрестностях точки  $M_i$ , будем обозначать их  $d\bar{E}_{i+} = d\bar{E}_{i-} = d\bar{E}_i$ .

Таким образом, отклонение между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  в точке  $M_i$  интегральной кривой однозначно определяется суммарным отклонением  $E_i$ , складывающимся из локальных отклонений  $dE_i$  в каждой точке интегральной кривой вплоть до точки  $M_i$ . Поэтому, прежде чем переходить к определению суммарных отклонений  $E_i$ , остановимся подробнее на вычислении локальных отклонений  $dE_i$ . Докажем следующую лемму.

**Лемма 3.1.** *Пусть в некоторой окрестности точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  существуют конечные или бесконечные односторонние пределы*

$$\begin{aligned} K_+ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{|f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)|}, \\ K_- &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{|f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x)|}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta x^2}$ . Тогда отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в правой и левой полукрестностях точки  $M_i$  при  $\rho \rightarrow 0$  равны соответствующим значениям  $K_+$  и  $K_-$ , т. е.

$$dE_{i+} = K_+, \quad dE_{i-} = K_-, \quad (3.13)$$

в частности, если  $K_+ = K_- = K$ , то

$$dE_i = K. \quad (3.14)$$

**Доказательство.** Для задачи (3.6) рассмотрим трехмерную область  $W$ , в которой задана ее интегральная кривая  $l$  (рис. 3.1). Отметим на ней точку  $M_i(u_i, v_i, x_i)$ . Выберем положительное направление движения по интегральной кривой, приняв в качестве такового положительное направление координатных осей. Совершим некоторое движение по интегральной кривой от точки  $M_i$  в положительном направлении, т. е., полагая, что приращения аргументов неотрицательные, и введем два вектора приращений. Во-первых, вектор  $\Delta\bar{\lambda}$ , который определим в виде

$$\Delta\bar{\lambda} = \left( \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta x \right)^T,$$

квадрат длины которого

$$(\Delta\lambda)^2 = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta x)^2.$$

Во-вторых, вектор  $\Delta\bar{\kappa}$

$$\Delta\bar{\kappa} = \left( \Delta u, \quad \Delta v, \quad \frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} \right)^T,$$

квадрат длины которого

$$(\Delta\kappa)^2 = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + \left( \frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} \right)^2.$$

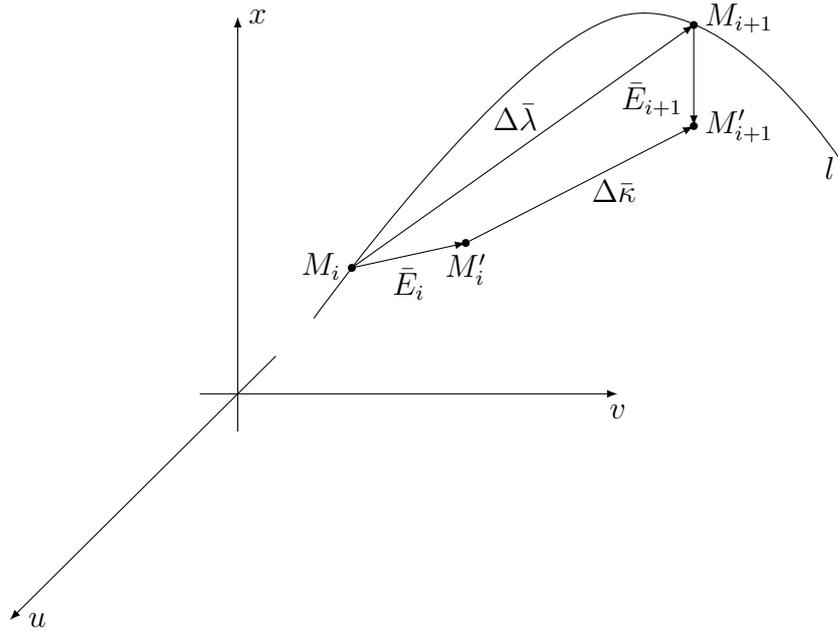


Рис. 3.1. Иллюстрация к лемме 3.1

Здесь и далее под  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta x$  будем понимать быть может малые, но конечные приращения переменных  $u$ ,  $v$ ,  $x$ . В свою очередь, под  $du$ ,  $dv$ ,  $dx$  будем понимать дифференциалы соответствующих переменных.

Таким образом, нами введены два аргумента  $\lambda$  и  $\kappa$ . Отметим следующее: аргументы  $\lambda$  и  $\kappa$  не являются полностью независимыми друг от друга. Это выражается в том, что приращения  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  и  $\Delta x$ , входящие в выражения для  $\lambda$  и  $\kappa$  равны, т. е. аргумент  $\kappa$  является модификацией наилучшего аргумента  $\lambda$ .

Двигаясь в направлении, задаваемом вектором  $\Delta \bar{\lambda}$ , мы перейдем из точки  $M_i$  в  $M_{i+1} (u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)$ , в направлении вектора  $\Delta \bar{\kappa}$  мы перейдем из точки  $M'_i (u_i + e_{ui}, v_i + e_{vi}, x_i + e_{xi})$ , отклонение которой от точки  $M_i$  определяется вектором  $\bar{E}_i = (e_{ui}, e_{vi}, e_{xi})^T$ , в точку  $M'_{i+1} \left( u_i + e_{ui} + \Delta u, v_i + e_{vi} + \Delta v, x_i + e_{xi} + \frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} \right)$ , отклонение которой от точки  $M_{i+1}$  определяется вектором  $\bar{E}_{i+1} = (e_{u(i+1)}, e_{v(i+1)}, e_{x(i+1)})^T$ . В общем случае точка  $M'_{i+1}$  не лежит на кривой  $l$ . В зависимости от поведения функции  $f(u, v, x)$  в окрестности точки  $M_i$  и суммарного вектора отклонения  $\bar{E}_i$ , точка  $M'_{i+1}$  может как находиться вблизи кривой  $l$ , так и бесконечно далеко удаляться от нее.

Нетрудно заметить, что при стремлении точки  $M_{i+1}$  к  $M_i$ , т. е. при стремлении  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  и  $\Delta x$  к нулю, вектор  $\Delta \bar{\lambda}$  стремится к дифференциалу  $d\bar{\lambda}$  вида (3.9), направленному по касательной к интегральной кривой, длина которого определяется формулой (3.7). В свою очередь, при стремлении точки  $M'_{i+1}$  к  $M'_i$  приращение  $\Delta \bar{\kappa}$  стремится к дифференциалу  $d\bar{\kappa}$  вида (3.10), направление которого зависит от значений функции  $f(u, v, x)$  и вектора  $\bar{E}_i$  в окрестности точки  $M_i$ , а длина задается формулой (3.8).

Для нахождения вектора  $d\bar{E}_{i+1}$  воспользуемся соотношением

$$\Delta \bar{\lambda} + \bar{E}_{i+1} = \Delta \bar{\kappa} + \bar{E}_i,$$

из которого найдем

$$\bar{E}_{i+1} - \bar{E}_i = \Delta\bar{\kappa} - \Delta\bar{\lambda}.$$

Последнее равенство можно также переписать в форме

$$\bar{E}_{i+1} - \bar{E}_i = \left( 0, \quad 0, \quad \Delta x - \frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} \right)^T. \quad (3.15)$$

По условию леммы, так как существует первый предел (3.12), предел выражения (3.15) при  $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta x^2}$  стремящемся к нулю существует. И по второй формуле (3.11), локальное отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  в правой полуокрестности точки  $M_i$  имеет вид

$$d\bar{E}_{i+} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( 0, \quad 0, \quad -\frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} \right)^T.$$

Вычисляя квадратичную норму вектора  $d\bar{E}_{i+}$ , приходим к первому соотношению (3.13).

Применяя аналогичные рассуждения для левой полуокрестности точки  $M_i$ , получим второе соотношение (3.13). В частности, при  $K_+ = K_- = K$  получим (3.14).  $\square$

**Замечание 3.1.** В граничных точках области  $W$  в условиях леммы 3.1 существуют только  $K_+$  для левой границы и  $K_-$  для правой границы. Тогда за отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в точке  $M_0$  принимается первое соотношение (3.13), а в точке  $M_*$  – второе.

Используя лемму 3.1, можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** *Если в некоторой окрестности точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  односторонние пределы функции  $f(u, v, x)$  существуют и отличны от нуля, т. е.*

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) &\neq 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x) &\neq 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

то отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в окрестности точки  $M_i$  при  $\rho \rightarrow 0$  равно нулю, т. е.

$$dE_i = 0. \quad (3.17)$$

**Доказательство.** Рассмотрим три случая.

1. Точка  $M_i$  является точкой непрерывности или устранимой точкой разрыва для функции  $f(u, v, x)$ . Согласно лемме 3.1 отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в левой и правой полуокрестностях точки  $M_i$  соответственно равны значениям  $K_-$  и  $K_+$ , определяемым соотношениями (3.12).

По условию теоремы справедливы неравенства (3.16), из которых при  $\rho \rightarrow 0$  следует справедливость равенства (3.17).

2. Точка  $M_i$  является точкой разрыва первого рода для функции  $f(u, v, x)$ . По определению точек разрыва первого рода и условию теоремы получим пределы  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) = C_1 < \infty$  и  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x) = C_2 < \infty$  при  $C_1 \neq C_2 \neq 0$ . Учитывая это, оба односторонних предела (3.12) равны нулю и справедливо соотношение (3.17).

3. Точка  $M_i$  является точкой разрыва второго рода для функции  $f(u,v,x)$ . Выше показано, что при конечных значениях односторонних пределов функции  $f(u,v,x)$  отличных от нуля оба предела (3.12) равны нулю. Осталось показать, что и при стремлении  $f(u,v,x)$  к бесконечности пределы (3.12) также обращаются в ноль. Рассмотрим правую полуокрестность точки  $M_i$ . Пусть в ней функция  $f(u,v,x)$  неограниченно возрастает, т. е.  $f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 0$ . Так как знаменатель выражения для  $K_+$  в (3.12) неограниченно возрастает, то  $K_+$  стремится к нулю. Аналогично проводится доказательство и для левой полуокрестности. Таким образом, в случае разрыва второго рода также имеет место предельное соотношение (3.17).  $\square$

**Определение 3.3.** Точку  $M_i$ , в окрестности которой отклонение  $dE_i$  направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего равно нулю, будем называть точкой локальной эквивалентности.

Согласно данному определению, если суммарное отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего при движении вдоль интегральной кривой от начальной точки до  $M_i$  имеет значение  $E_i$ , то после прохождения точки локальной эквивалентности  $M_i$  оно изменится на бесконечно малую величину.

Отметим, что условия теоремы 3.1 являются достаточными, т. е. множество точек локальной эквивалентности не исчерпывается теми, для которых выполнены условия теоремы 3.1.

При дальнейшем исследовании будем применять разложения функции  $f(u,v,x)$  в ряд Тейлора [35, с. 298-299] в правой и левой полуокрестностях точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  вида

$$\begin{aligned} f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) &= f^+(u_i, v_i, x_i) + \\ &+ \sum_{|\alpha|=1}^N \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_1^{(N+1)}(\rho), \\ f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x) &= f^-(u_i, v_i, x_i) + \\ &+ \sum_{|\alpha|=1}^N (-1)^{|\alpha|} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_2^{(N+1)}(\rho), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $f^+(u,v,x)$  и  $f^-(u,v,x)$  – значения односторонних пределов для функции  $f(u,v,x)$  в правой и левой полуокрестностях точки  $M_i$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $\frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}}$  и  $\frac{\partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}}$  – значения односторонних пределов для частных производных функции  $f(u,v,x)$  порядка  $|\alpha|$  в правой и левой полуокрестностях точки  $M_i$ ,  $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta x^2}$ . Выражения для  $\gamma_1^{(N+1)}(\rho)$  и  $\gamma_2^{(N+1)}(\rho)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(N+1)}(\rho) &= \sum_{|\alpha|=N+1}^{\infty} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3}, \\ \gamma_2^{(N+1)}(\rho) &= \sum_{|\alpha|=N+1}^{\infty} \frac{\partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Если все частные производные функции  $f(u, v, x)$  существуют и ограничены, то она разложима в ряд Тейлора [35, с. 298-299]. Если же какая-либо из частных производных неограниченно возрастает, будем использовать следующие предельные соотношения

$$\begin{aligned}
f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ f^+(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|\alpha|=1}^N \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_1^{(N+1)}(\rho, \xi) \right], \\
f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ f^-(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|\alpha|=1}^N (-1)^{|\alpha|} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_2^{(N+1)}(\rho, \xi) \right],
\end{aligned} \tag{3.20}$$

где  $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$  – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от  $M_i$  на вектор  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$  с длиной  $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ , функции  $\gamma_1^{(N+1)}(\rho, \xi)$  и  $\gamma_2^{(N+1)}(\rho, \xi)$  имеют ту же структуру, что и (3.19), но с заменой точки  $M_i$  на  $M'_i$ .

Легко заметить, что в случае ограниченных частных производных выражения (3.20) переходят в (3.18). В свою очередь, если пределы в (3.20) существуют, то полученные формулы будем использовать как обобщение (3.18) на случай разрывных частных производных. Используя соотношения (3.20), обобщим лемму 3.1. Здесь и далее будем полагать, что существуют как используемые частные производные нужного порядка, так и пределы от них в окрестности рассматриваемой точки.

**Лемма 3.2.** *Если в некоторой окрестности точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  существуют конечные или бесконечные односторонние пределы*

$$\begin{aligned}
K_+ &= \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| f^+ \Big|_{M'_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|}, \\
K_- &= \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| f^- \Big|_{M'_i} - \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u - \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v - \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_2^{(2)}(\rho, \xi) \right|},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

то отклонения направления отсчета аргумента  $k$  от наилучшего в правой и левой полукрестностях точки  $M_i$  при  $\rho \rightarrow 0$  равны соответствующим значениям  $K_+$  и  $K_-$ , т. е.

$$dE_{i+} = K_+, \quad dE_{i-} = K_-, \tag{3.22}$$

в частности, если  $K_+ = K_- = K$ , то

$$dE_i = K. \tag{3.23}$$

В соотношениях (3.21)  $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$ ,  $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$  – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смеще-

нием от  $M_i$  на вектор  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$  с длиной  $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ ,  $\gamma_1^{(2)}(\rho, \xi)$  и  $\gamma_2^{(2)}(\rho, \xi)$  – слагаемые, характеризующие поведение частных производных порядка выше первого в правой и левой полукрестностях точки  $M'_i$  соответственно.

**Доказательство.** Рассмотрим правую полукрестность точки  $M_i$ . Для нее, используя результат леммы 1, запишем отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в виде

$$dE_{i+} = K_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{|f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)|}.$$

Не налагая ограничений на частные производные функции  $f(u, v, x)$ , используя разложение функции  $f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)$  по первой формуле (3.20), в окрестности точки  $M'_i$  получим

$$K'_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| f^+|_{M'_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|}.$$

Для нахождения отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в правой полукрестности точки  $M_i$  следует устремить к нулю длину вектора  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ , т. е.

$$K_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| f^+|_{M'_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|}. \quad (3.24)$$

Если в точке  $M_i$  функция  $f(u, v, x)$  и ее односторонние частные производные ограничены, то можно непосредственно записать

$$K_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| f^+|_{M_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho) \right|}. \quad (3.25)$$

По условию доказываемой леммы существует первый предел (3.21), а значит будет существовать и предел (3.25), т. е. справедливо первое предельное равенство (3.22).

В случае, когда либо функция  $f(u, v, x)$ , либо некоторые ее частные производные неограниченно возрастают в окрестности точки  $M_i$ , вычисление предела в (3.24) приобретает известные трудности. Так, в зависимости от порядка взятия пределов результат может не существовать или принимать различные значения.

Эту неоднозначность при вычислении предела  $K_+$  преодолеем, введя новый вектор  $\vec{\rho}' = (\Delta x + \xi_1, \Delta y + \xi_2, \Delta z + \xi_3)^T$ , длина которого  $\|\vec{\rho}'\|_2 = \rho' = \sqrt{(\Delta x + \xi_1)^2 + (\Delta y + \xi_2)^2 + (\Delta z + \xi_3)^2}$ . Легко заметить, что при стремлении  $\rho'$  к нулю одновременно стремятся к нулю  $\rho$  и  $\xi$ . Таким образом, устремляя  $\rho' \rightarrow 0$ , из (3.24) мы получим

$$K_+ = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| f^+|_{M'_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|}. \quad (3.26)$$

По условию леммы, предел в (3.26) существует и равен отклонению направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в правой полуокрестности точки  $M_i$ . Таким образом, справедливо первое соотношение (3.22). Аналогичные рассуждения для левой полуокрестности точки  $M_i$  приводят к справедливости второго соотношения (3.22). При совпадении  $K_+$  и  $K_-$  справедливо (3.23).  $\square$

Используя лемму 3.2, докажем следующее утверждение.

**Теорема 3.2.** Пусть в некоторой окрестности точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  функция  $f(u, v, x)$  обращается в ноль, ее односторонние частные производные существуют и ограничены, а первые односторонние частные производные удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right)^2 &\neq 0, \\ \left( \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right)^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

и существуют конечные или бесконечные пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| -\frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Тогда отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в правой и левой полуокрестностях точки  $M_i$  при  $\rho \rightarrow 0$  соответственно равны

$$\begin{aligned} dE_{i+} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|^{-1}, \\ dE_{i-} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| -\frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|^{-1}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

в частности, если пределы справа и слева совпадают, то

$$dE_i = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|^{-1}. \quad (3.30)$$

**Доказательство.** Рассмотрим правую полуокрестность точки  $M_i$ . Для нее, согласно лемме 3.2, отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего, учитывая равенство нулю самой функции  $f(u, v, x)$ , справедливость первого неравенства (3.27) и ограниченность ее частных производных, может быть записано в форме

$$dE_{i+} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \Delta x \right|}. \quad (3.31)$$

Преобразуем выражение (3.31) к виду

$$dE_{i+} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|^{-1}. \quad (3.32)$$

Можно видеть, что предел в (3.32) совпадает с обратным первым пределом (3.28), который существует по условию теоремы. Следовательно, справедливо первое равенство (3.29).

Аналогичные рассуждения для левой полукрестности точки  $M_i$  приводят ко второму соотношению (3.29), а при равенстве односторонних пределов и к выражению (3.30).  $\square$

**Замечание 3.2.** Выше внимание уделялось исключительно свойствам рассматриваемой функции  $f(u, v, x)$ , которые однозначно определяются разложениями (3.18) или (3.20) в окрестности каждой точки интегральной кривой. Тем не менее, также значительную роль играют свойства рассматриваемой задачи (3.6). Так, в контексте решения задачи Коши необходимо учитывать то, что рассматриваемые переменные  $u, v, x$  зависимы друг от друга и удовлетворяют уравнениям задачи (3.6). Поэтому в окрестности точки  $M_i$  отношения приращений  $\frac{\Delta u}{\Delta x}$  и  $\frac{\Delta v}{\Delta x}$  стремятся к значениям производных  $\frac{du}{dx}$  и  $\frac{dv}{dx}$  при  $\rho \rightarrow 0$ .

Докажем два следствия из теоремы 3.2.

**Следствие 3.1.** *Если в условиях теоремы 3.2 правые части задачи (3.6) ограничены в окрестности точки  $M_i$ , т. е.*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= F_1(u_i, v_i, x_i) \rightarrow c_{1i}, \\ \frac{dv}{dx} &= F_2(u_i, v_i, x_i) \rightarrow c_{2i}, \end{aligned} \quad \text{при } M(u, v, x) \rightarrow M_i(u_i, v_i, x_i), \quad (3.33)$$

где  $|c_{1i}| < \infty, |c_{2i}| < \infty$  – некоторые постоянные, то отклонения направления отсчета аргумента к от наилучшего в правой и левой полукрестностях точки  $M_i$  при  $\rho \rightarrow 0$  отличны от нуля

$$\begin{aligned} dE_{i+} &= A_1 \neq 0, \\ dE_{i-} &= A_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

В частности, если  $A_1 = A_2 = A$ , то

$$dE_i = A \neq 0. \quad (3.35)$$

**Доказательство.** Равенства (3.34) и (3.35) данного следствия непосредственно вытекают из предельных соотношений (3.29) и (3.30) после взятия предела и применения равенств (3.33).

Но целесообразно уточнить, что в случае, когда

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right| &\neq 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right| &\neq 0 \end{aligned}$$

значения  $A_1$  и  $A_2$  являются быть может малыми, но конечными величинами. В свою очередь, при выполнении одного из предельных равенств

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right| = 0,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right| = 0$$

величина  $A_1$  или  $A_2$  неограниченно возрастают, т. е.  $A_1 \rightarrow \infty$  или  $A_2 \rightarrow \infty$ .  $\square$

Дадим два определения.

**Определение 3.4.** Точку  $M_i$ , в окрестности которой выполнены предельные соотношения (3.34) при  $0 < A_1 < \infty$ ,  $0 < A_2 < \infty$  и  $A_1 \neq \infty$ ,  $A_2 \neq \infty$ , будем называть точкой локальной неэквивалентности рода 1.

**Определение 3.5.** Точку  $M_i$ , в окрестности которой выполнено хотя бы одно из предельных соотношений (3.34) при  $A_1 \rightarrow \infty$  или  $A_2 \rightarrow \infty$ , будем называть точкой локальной неэквивалентности рода 2.

**Следствие 3.2.** Если в условиях теоремы 2 правые части задачи (3.6) неограниченно возрастают в окрестности точки  $M_i$ , т. е.

$$\frac{du}{dx} \rightarrow \infty \text{ и } \frac{dv}{dx} \rightarrow \infty \text{ при } M(u,v,x) \rightarrow M_i(u_i,v_i,x_i) \quad (3.36)$$

и выполнены предельные соотношения

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_M \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_M \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_M \right| = \infty,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_M \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_M \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_M \right| = \infty, \quad (3.37)$$

то отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в окрестности точки  $M_i$  равно нулю, т. е.

$$dE_i = 0. \quad (3.38)$$

**Доказательство.** Утверждение данного следствия непосредственно вытекает из предельных соотношений (3.29) и (3.30), которые, с учетом пределов (3.37), оба равны нулю, а значит справедливо (3.38).  $\square$

**Замечание 3.3.** Выполнение условий (3.37) существенно для утверждения следствия 2. Ведь даже при выполнении условий (3.36) пределы (3.37) могут быть конечными, неограниченно возрастающими или не существовать вовсе.

Резюмируя сказанное, уточним, что на интегральной кривой выделяются три класса точек: точки локальной эквивалентности, точки локальной неэквивалентности первого и второго рода. При прохождении через точку локальной эквивалентности  $M_i$  суммарное отклонение  $E_i$  направления отсчета аргумента  $\kappa$  изменяется на бесконечно малую величину, в то время как при прохождении точек локальной неэквивалентности первого и второго рода значение  $E_i$  изменяется на конечную или бесконечно большую величину соответственно.

В случае разрывных частных производных рассматриваемой функции  $f(u, v, x)$  ситуация усложняется многократно. Дадим обобщение теоремы 3.2. Доказательство опустим, так как оно фактически повторяет приведенное выше.

**Теорема 3.3.** Пусть в некоторой окрестности точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  функция  $f(u, v, x)$  обращается в ноль, а односторонние пределы ее первых частных производных существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \right)^2 \right] \neq 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M'_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M'_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M'_i} \right)^2 \right] \neq 0,$$

где  $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$  – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от  $M_i$  на вектор  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$  с длиной  $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ . Пусть также существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|,$$

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| - \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_2^{(2)}(\rho, \xi) \right|,$$
(3.39)

где  $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$ ,  $\gamma_1^{(2)}(\rho, \xi)$  и  $\gamma_2^{(2)}(\rho, \xi)$  – слагаемые, характеризующие поведение частных производных порядка выше первого в правой и левой полуокрестностях точки  $M'_i$  соответственно. Тогда отклонения направления отсчета аргумента к от наилучшего в правой и левой полуокрестностях точки  $M_i$  при  $\rho \rightarrow 0$  равны соответственно

$$dE_{i+} = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|^{-1},$$

$$dE_{i-} = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| - \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_2^{(2)}(\rho, \xi) \right|^{-1},$$

в частности, если пределы справа и слева равны, то

$$dE_i = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|^{-1}.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующее следствие.

**Следствие 3.3.** Если в условиях теоремы 3 оба предела (3.39) стремятся к бесконечности, то отклонение направления отсчета аргумента к от наилучшего в окрестности точки  $M_i$  равно нулю, т. е.

$$dE_i = 0.$$

Все доказанные ранее утверждения носят достаточный характер.

Докажем необходимое и достаточное условие локальной эквивалентности точек интегральной кривой для рассматриваемого аргумента  $\kappa$ .

**Теорема 3.4.** *Для того, чтобы  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  была точкой локальной эквивалентности, т. е.*

$$dE_i = 0, \quad (3.40)$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

1. *Существовало целое неотрицательное число  $k \geq 0$ , такое, что все частные производные функции  $f(u, v, x)$  меньше  $k$ -го порядка были равны нулю, односторонние частные производные порядка выше  $k$ -го существовали, а односторонние частные производные  $k$ -го порядка удовлетворяли условиям*

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \left[ \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \right]^2 &\neq 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \left[ \frac{\partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \right]^2 &\neq 0; \end{aligned} \quad (3.41)$$

2. *Имели место предельные соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta x^{\alpha_1} \Delta y^{\alpha_2} \Delta z^{\alpha_3} + \gamma_1^{(k+1)}(\rho, \xi) \right|} &= 0, \\ \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \frac{(-1)^k \partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta x^{\alpha_1} \Delta y^{\alpha_2} \Delta z^{\alpha_3} + \gamma_2^{(k+1)}(\rho, \xi) \right|} &= 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где  $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$ ,  $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$  – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от  $M_i$  на вектор  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$  с длиной  $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ ,  $\gamma_1^{(k+1)}(\rho, \xi)$  и  $\gamma_2^{(k+1)}(\rho, \xi)$  – слагаемые, характеризующие поведение частных производных порядка выше  $k$ -го в правой и левой полуокрестностях точки  $M'_i$  соответственно.

**Доказательство. Достаточность.** Рассмотрим правую полуокрестность точки  $M_i$ . Воспользуемся утверждением леммы 3.2. Так как все производные порядка меньше  $k$ -го обращаются в нуль, то перепишем первое предельное соотношение (3.21) в виде

$$K_+ = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta x^{\alpha_1} \Delta y^{\alpha_2} \Delta z^{\alpha_3} + \gamma_1^{(k+1)}(\rho, \xi) \right|}. \quad (3.43)$$

По условию предел стоящий справа в выражении (3.43) равен нулю, поэтому согласно первому соотношению (3.22) леммы 3.2

$$dE_{i+} = 0. \quad (3.44)$$

Аналогичный анализ для левой полуокрестности точки  $M_i$  дает нам

$$dE_{i-} = 0. \quad (3.45)$$

Вместе (3.44) и (3.45) приводят к (3.40).

*Необходимость.* Рассмотрим правую полуокрестность точки  $M_i$ . Пусть выполнено равенство (3.40), но целое неотрицательное число  $k \geq 0$ , обладающее указанными свойствами, не существует. Это означает, что какой бы порядок производных мы не взяли, первое предельное соотношение (3.41) не будет выполнено. Таким образом, в правой полуокрестности точки  $M_i$  отклонение направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего будет неограничено возрастать или не будет существовать, что противоречит условию (3.40). Поэтому существует  $k \geq 0$  с указанными свойствами и справедливо (3.41).

Учитывая доказанное запишем отклонение (3.43) направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего для правой полуокрестности точки  $M_i$ .

Так как справедливо (3.40), то должно быть выполнено (3.44) и справедливо первое соотношение (3.42).

Второе соотношение (3.42) получим при рассмотрении левой полуокрестности точки  $M_i$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 3.4.** При  $k = 0$ , полагая нулевую производную равной самой функции  $f(u, v, x)$ , из теоремы 4 можно получить утверждение теоремы 3.1.

В заключении этого параграфа приведем формулировку еще одной обобщающей теоремы.

**Теорема 3.5.** *Для определения отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в окрестности точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$ , необходимо и достаточно, чтобы для функции  $f(u, v, x)$  в этой окрестности выполнялись следующие условия:*

1. *Существовало целое неотрицательное число  $k \geq 0$ , такое, что все частные производные меньше  $k$ -го порядка равны нулю, частные односторонние производные  $k$ -го порядка существовали и для них выполнялись условия (3.41);*
2. *Существовали конечные или бесконечные пределы*

$$A_1 = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta x^{\alpha_1} \Delta y^{\alpha_2} \Delta z^{\alpha_3} + \gamma_1^{(k+1)}(\rho, \xi) \right|},$$

$$A_2 = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \frac{(-1)^k \partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta x^{\alpha_1} \Delta y^{\alpha_2} \Delta z^{\alpha_3} + \gamma_2^{(k+1)}(\rho, \xi) \right|},$$

где  $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$ ,  $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$  – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от  $M_i$  на вектор  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$  с длиной  $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ ,  $\gamma_1^{(k+1)}(\rho, \xi)$  и  $\gamma_2^{(k+1)}(\rho, \xi)$  – слагаемые, характеризующие поведение частных производных порядка выше  $k$ -го в правой и левой полуокрестностях точки  $M'_i$  соответственно.

В этом случае отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего в левой и правой полукрестностях точки  $M_i$  равны соответственно

$$dE_{i+} = A_1,$$

$$dE_{i-} = A_2,$$

в частности, если  $A_1 = A_2 = A$ , то

$$dE_i = A.$$

Теоремы 3.4 и 3.5 обобщают все доказанные выше утверждения и служат основным инструментом исследования процесса возникновения отклонений между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$ , а также свойств параметризованных ими задач в окрестностях точек интегральной кривой задачи (3.6). Перейдем к рассмотрению всей области  $W$ .

### 3.1.2 Суммирование локальных отклонений между направлениями отсчета аргументов $\lambda$ и $\kappa$ в рассматриваемой области

Исследуем механизм определения суммарного отклонения между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  в рассматриваемой области и произвольной ее подобласти. Для этого проведем разбиение интегральной кривой  $l$  в области  $W$  (рис. 3.2) по переменной  $x$  вида

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_*. \quad (3.46)$$

Точки разбиения обозначим через  $M_i(u_i, v_i, x_i)$ . Отметим, что  $u_i = u(x_i)$  и  $v_i = v(x_i)$ .

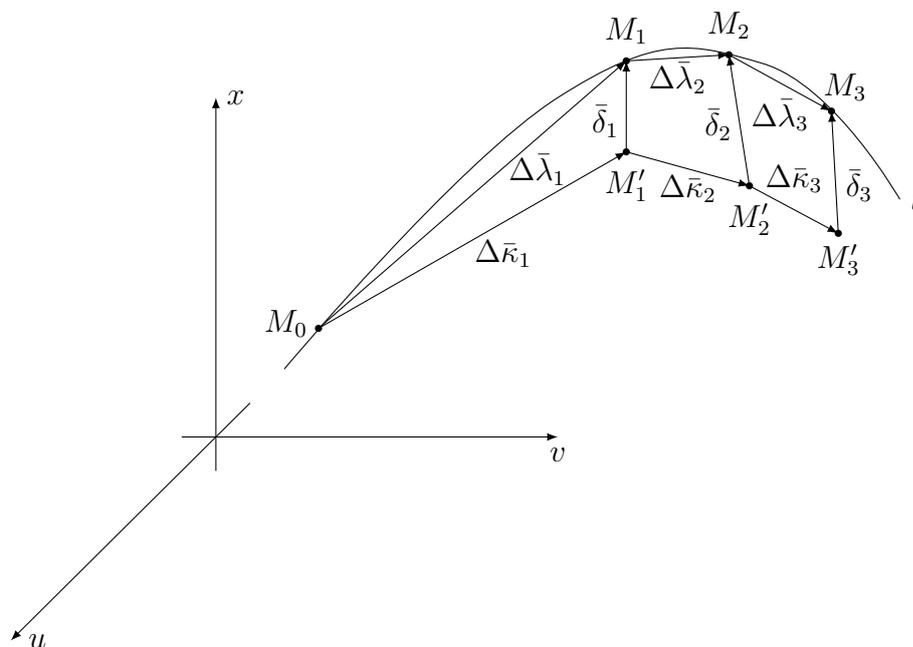


Рис. 3.2. Движение вдоль интегральной кривой по аргументам  $\lambda$  и  $\kappa$

Направляющие векторы для отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  при переходе из точки  $M_{i-1}$  в  $M_i$  обозначим соответственно

$$\Delta\bar{\lambda}_i = \left( \Delta u_i, \quad \Delta v_i, \quad \Delta x_i \right)^T \quad (3.47)$$

и

$$\Delta\bar{\kappa}_i = \left( \Delta u_i, \quad \Delta v_i, \quad \frac{\Delta x_i}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right)^T, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.48)$$

где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$  и  $\Delta v_i = v_i - v_{i-1}$ . Для каждой точки разбиения  $M_i$  введем вектор  $\bar{\delta}_i$  – суммарное отклонение между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  при движении от начальной точки до  $M_i$  при разбиении (3.46). Длины векторов  $\bar{\delta}_i$  обозначим  $\delta_i = \|\bar{\delta}_i\|_2$ .

Начнем движение по интегральной кривой  $l$  из начальной точки  $M_0(u_0, v_0, x_0)$  (рис. 3.2), предполагая, что векторы  $\Delta\bar{\lambda}_1$  и  $\Delta\bar{\kappa}_1$  исходят из этой точки, т. е.  $\delta_0 = 0$ . Тогда вектор суммарного отклонения  $\bar{\delta}_1$  между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  в точке  $M_1$  запишется в виде

$$\bar{\delta}_1 = \left( 0, \quad 0, \quad \Delta x_1 \left( 1 - \frac{1}{f(u_0 + \Delta u_1, v_0 + \Delta v_1, x_0 + \Delta x_1)} \right) \right)^T,$$

длина которого равна

$$\delta_1 = \left| 1 - \frac{1}{f(u_0 + \Delta u_1, v_0 + \Delta v_1, x_0 + \Delta x_1)} \right| \Delta x_1.$$

Заметим, что условие совпадения векторов  $\Delta\bar{\lambda}_1$  и  $\Delta\bar{\kappa}_1$  в начальной точке обусловлено совпадением этой точки с начальными условиями для обеих параметризованных задач. В дальнейшем, движение по интегральной кривой  $l$  определяется лишь свойствами векторов (3.47) и (3.48), а также видом самой кривой  $l$ .

Вычислим теперь отклонение  $\bar{\delta}_2$  между векторами (3.47) и (3.48) в точке  $M_2$ . Из рис. 3.2 видно, что

$$\bar{\delta}_1 + \Delta\bar{\lambda}_2 = \bar{\delta}_2 + \Delta\bar{\kappa}_2,$$

поэтому справедливы выражения

$$\bar{\delta}_2 = \left( 0, \quad 0, \quad \sum_{i=1}^2 \Delta x_i \left( 1 - \frac{1}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right) \right)^T,$$

и

$$\delta_2 = \left| \sum_{i=1}^2 \Delta x_i \left( 1 - \frac{1}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right) \right|.$$

Продолжая движение по интегральной кривой, для конечной точки  $M_N$  найдем

$$\bar{\delta}_N = \left( 0, \quad 0, \quad \sum_{i=1}^N \Delta x_i \left( 1 - \frac{1}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right) \right)^T,$$

и

$$\delta_N = \left| \sum_{i=1}^N \Delta x_i \left( 1 - \frac{1}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right) \right|.$$

Введем диаметр разбиения  $d$  в форме

$$d = \max\{\Delta x_i\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Используя диаметр разбиения, запишем следующий предел

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^N \left( 1 - \frac{1}{f(u(x_i), v(x_i), x_i)} \right) \Delta x_i \right|. \quad (3.49)$$

Не останавливаясь на доказательстве существования значения предела (3.49), скажем, что значение этого предела, если существует, является суммарным отклонением  $E_*$  между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  при движении вдоль интегральной кривой от начальной до конечной точки  $M_N$ , т. е.

$$E_* = \lim_{d \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^N \left( 1 - \frac{1}{f(u(x_i), v(x_i), x_i)} \right) \Delta x_i \right|. \quad (3.50)$$

Предел же стоящий в правой части (3.50), если он существует, является криволинейным интегралом первого рода [35, с. 494-498], который вычисляется при помощи определенного интеграла вида

$$E_* = \left| \int_{x_0}^{x_*} \left( 1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|. \quad (3.51)$$

**Замечание 3.5.** Если рассматриваемая область  $W$  состоит только из точек локальной эквивалентности, то суммарное отклонение между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  изменяется непрерывно при движении вдоль интегральной кривой задачи (3.6). В этом случае существуют как предел (3.49), так и интеграл (3.51), геометрически равный расстоянию между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  в конечной точке  $M_*$ . Это же справедливо и при наличии в области  $W$  помимо точек локальной эквивалентности конечного и счетного числа точек локальной неэквивалентности первого рода, только изменение суммарного отклонения приобретает скачкообразный характер. В отличие от двух приведенных случаев, при наличии в области  $W$  точек локальной неэквивалентности второго рода, в окрестностях которых суммарное отклонение принимает неограниченные значения, предел (3.49) может быть равным бесконечности или не существовать вообще, что свидетельствует о потере смысла в использовании интеграла (3.51).

По аналогии можно найти суммарное отклонение не только для всего рассматриваемого отрезка интегральной кривой, но и для его интервалов. Так, суммарное отклонение  $E_i$  при движении вдоль интегральной кривой от начальной точки до  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  равно

$$E_i = \left| \int_{x_0}^{x_i} \left( 1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|, \quad x_0 \leq x_i \leq x_*. \quad (3.52)$$

Также можно ввести и суммарное отклонение  $E_{ij}$  при движении вдоль интегральной кривой от точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$  до  $M_j(u_j, v_j, x_j)$ , которое запишется в виде

$$E_{ij} = \left| \int_{x_i}^{x_j} \left( 1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|, \quad x_0 \leq x_i, x_j \leq x_*. \quad (3.53)$$

### 3.1.3 Эквивалентность аргументов $\lambda$ и $\kappa$

Установив механизмы возникновения и накопления отклонений между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  в рассматриваемой области, перейдем к оценке обусловленности  $\kappa$ -преобразованных задач.

#### Локальная эквивалентность аргументов $\lambda$ и $\kappa$

Как уже было сказано, аргумент  $\lambda$  (3.7) доставляет задаче (3.6) наилучшую обусловленность. Однако аналогичных утверждений для аргумента  $\kappa$  (3.8) нет, что является существенным недостатком при его использовании. Неизвестно насколько хуже будет обусловлена  $\kappa$ -преобразованная задача по сравнению с наилучшей. Используя понятия локального и суммарного отклонения между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$ , введем понятия эквивалентности для аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$ .

**Определение 3.6.** Аргументы  $\lambda$  и  $\kappa$  будем называть локально эквивалентными в окрестности точки  $M_i(u_i, v_i, x_i)$ , если выполнены следующие условия

1. Отклонение между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  в окрестности точки  $M_i$  является бесконечно малой величиной, т. е.  $dE_i = 0$ .
2. Существует точка интегральной кривой  $M_j(u_j, v_j, x_j)$ , лежащая левее  $M_i$ , такая что суммарное отклонение между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  при движении вдоль интегральной кривой от точки  $M_j$  до  $M_i$  является бесконечно малой величиной, т. е.  $E_{ji} = 0$ .

Отметим, что локальная эквивалентность аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  в окрестности точки  $M_i$  говорит о том, что длины и тангенсы углов наклона векторов  $d\bar{\lambda}$  и  $d\bar{\kappa}$ , задающих направления отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  соответственно, в пределе совпадают, т. е. неограниченно близки. А учитывая, что аргумент  $\lambda$  отсчитывается по касательной к интегральной кривой, можно сделать вывод, что и аргумент  $\kappa$  отсчитывается в направлении неограниченно близком к касательному. При использовании аргумента  $\lambda$  полученная система будет обусловлена наилучшим образом, а учитывая то, что аргумент продолжения определяется локально в окрестности каждой точки интегральной кривой, можно утверждать, что обусловленность  $\kappa$ -преобразованной системы будет неограниченно близка к наилучшей в окрестности рассматриваемой точки, при условии того, что эта окрестность будет неограниченно уменьшаться.

#### Эквивалентность аргументов $\lambda$ и $\kappa$ в рассматриваемой области

Дадим следующее определение.

**Определение 3.7.** Аргументы  $\lambda$  и  $\kappa$  будем называть эквивалентными в рассматриваемой области  $W$ , если они локально эквивалентны в каждой точке этой области, т. е.

для каждого значения  $x \in [x_0, x_*]$  выполнено

$$\int_{x_0}^x \left( 1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi = 0.$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 3.6.** *Для того чтобы аргументы  $\lambda$  и  $\kappa$  были эквивалентны в области  $W$ , необходимо и достаточно, чтобы  $f(u, v, x) = 1$  во всех точках этой области.*

**Доказательство.** Рассмотрим неотрицательную функцию отклонения

$$E(x) = \left| \int_{x_0}^x \left( 1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|,$$

для которой при  $x \in [x_0, x_*]$  запишем следующее двойное неравенство

$$\left| \int_{x_0}^x d\xi - \int_{x_0}^x \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} d\xi \right| \leq E(x) \leq \int_{x_0}^x \left| 1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right| d\xi. \quad (3.54)$$

*Достаточность.* Из правого неравенства (3.54) при  $f(u, v, x) = 1$  получим, что при любом значении  $x \in [x_0, x_*]$  справедливо неравенство  $E(x) \leq 0$ . Так как функция  $E(x)$  неотрицательна, для любого значения  $x$  имеет место равенство  $E(x) = 0$ , т. е. аргументы  $\lambda$  и  $\kappa$  эквивалентны в области  $W$  по определению 3.7.

*Необходимость.* Если  $E(x) = 0$  для любого  $x \in [x_0, x_*]$ , то из левого неравенства (3.54) получим

$$\left| \int_{x_0}^x d\xi - \int_{x_0}^x \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} d\xi \right| = 0$$

или

$$\int_{x_0}^x d\xi = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} d\xi.$$

Последнее равенство справедливо, если  $f(u, v, x) = \pm 1$ . Однако при  $f(u, v, x) = -1$  функция  $E(x)$  не обращается в ноль. Таким образом, остается только  $f(u, v, x) = 1$ . Необходимость, а значит и теорема, доказана.  $\square$

Таким образом, из всех аргументов, задаваемых выражением вида (3.8), наилучшую обусловленность задачи (3.6) дает только наилучший аргумент (3.7). Это означает, что задачи параметризованные аргументом (3.8) при отличной от единицы функции  $f(u, v, x)$  будут иметь обусловленность меньше наилучшей. Это не является критичным, так как редкая задача требует именно наилучшей обусловленности. Также можно предположить, что чем больше направление отсчета параметра  $\kappa$  отклоняется от наилучшего, тем хуже будет обусловлена  $\kappa$ -преобразованная задача. Используя эту идею, можно сравнивать обусловленности задач, параметризованных аргументами вида (3.8).

## Мера сопоставления обусловленности параметризованных задач

Определим меру отклонения между направлениями отсчета параметров  $\lambda$  и  $\kappa$ . В качестве одного из возможных подходов к этому можно принять следующий.

Введем меру отклонения  $\Xi$  как суммарное в рассматриваемой области  $W$  отклонение по модулю между векторами, вдоль которых отсчитываются аргументы (3.7) и (3.8), т. е.

$$\Xi = \int_{x_0}^{x_*} \left| 1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right| d\xi. \quad (3.55)$$

Запишем  $\kappa$ -преобразованный вид задачи (3.6)

$$\begin{cases} \frac{du}{d\kappa} = \frac{F_1(x, u, v) \cdot f(u, v, x)}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x)F_1^2(u, v, x) + f^2(u, v, x)F_2^2(u, v, x)}}, \\ \frac{dv}{d\kappa} = \frac{F_2(x, u, v) \cdot f(u, v, x)}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x)F_1^2(u, v, x) + f^2(u, v, x)F_2^2(u, v, x)}}, \\ \frac{dx}{d\kappa} = \frac{f(u, v, x)}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x)F_1^2(u, v, x) + f^2(u, v, x)F_2^2(u, v, x)}}, \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.56)$$

Используя последнее уравнение системы (3.56), можно определить связь дифференциалов переменной  $x$  и аргумента  $\kappa$  в форме

$$dx = \frac{f(u, v, x)}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x)F_1^2(u, v, x) + f^2(u, v, x)F_2^2(u, v, x)}} d\kappa,$$

а переходя от независимого переменного  $x$  к аргументу  $\kappa$ , можно переписать выражение (3.55) в виде

$$\Xi = \int_0^{\kappa_*} \frac{|f(u, v, x) - 1|}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x)F_1^2(u, v, x) + f^2(u, v, x)F_2^2(u, v, x)}} d\zeta, \quad (3.57)$$

где  $u, v, x$  являются функциями аргумента  $\kappa$ .

Также целесообразно использовать среднее значение меры (3.57)

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{\kappa_*} \int_0^{\kappa_*} \frac{|f(u, v, x) - 1|}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x)F_1^2(u, v, x) + f^2(u, v, x)F_2^2(u, v, x)}} d\zeta. \quad (3.58)$$

Используя меру отклонения (3.58) (или (3.57)) можно сравнивать обусловленности  $\kappa$ -преобразованных задач. При  $\bar{\Xi} = 0$  параметризованная задача (3.56) обусловлена наилучшим образом. При увеличении значения  $\bar{\Xi}$  обусловленность становится хуже. Если имеются две задачи, параметризованные аргументами  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  вида (3.8), для которых имеются средние значения меры обусловленности  $\bar{\Xi}_1$  и  $\bar{\Xi}_2$ , то при  $\bar{\Xi}_1 > \bar{\Xi}_2$  задача, соответствующая аргументу  $\kappa_2$  обусловлена лучше, при  $\bar{\Xi}_1 < \bar{\Xi}_2$  – хуже, а при  $\bar{\Xi}_1 = \bar{\Xi}_2$  – обусловленность обеих задач одинаковая.

## 3.2 $\kappa$ -преобразование задач ползучести

Для задачи (1.3)-(1.4) выберем вектор  $\bar{\alpha}'$  (3.3) в форме

$$\bar{\alpha}' = \left( \frac{1}{g_1^2(\varepsilon, \omega, t)} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\kappa}, \frac{1}{g_2^2(\varepsilon, \omega, t)} \cdot \frac{d\omega}{d\kappa}, \frac{1}{g_3^2(\varepsilon, \omega, t)} \cdot \frac{dt}{d\kappa} \right)^T,$$

тогда параметр  $\kappa$  запишется в скалярном виде

$$(d\kappa)^2 = \left( \frac{d\varepsilon}{g_1(\varepsilon, \omega, t)} \right)^2 + \left( \frac{d\omega}{g_2(\varepsilon, \omega, t)} \right)^2 + \left( \frac{dt}{g_3(\varepsilon, \omega, t)} \right)^2. \quad (3.59)$$

Положим  $g_1(\varepsilon, \omega, t) = g_2(\varepsilon, \omega, t) \equiv 1$  и  $g_3(\varepsilon, \omega, t) = \Psi(\omega)$ , тогда выражение (3.59) переписывается в виде

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left( \frac{dt}{\Psi(\omega)} \right)^2. \quad (3.60)$$

Используя соотношение (3.60) для аргумента продолжения решения, можно записать  $\kappa$ -преобразованную задачу (1.3)-(1.4) как систему

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{f_1(\sigma)}{\sqrt{1 + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \\ \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{f_2(\sigma)}{\sqrt{1 + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\Psi(\omega)}{\sqrt{1 + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \end{cases} \quad (3.61)$$

с начальными условиями (2.14).

Таким образом, знаменатель уравнений системы (3.61) не зависит от переменной  $\omega$  и не меньше единицы. Легко заметить, что при условиях, накладываемых на функцию  $\Psi(\omega)$ , норма правой части системы (3.61) будет ограничена, а при  $\Psi(\omega) \leq 1$  не будет превосходить единицы.

В данной главе диссертационной работы исследуем применение модифицированного наилучшего аргумента  $\kappa$ , задаваемого выражением (3.60), к решению задач, рассмотренных в главе 2.

### 3.2.1 $\kappa$ -преобразование задачи растяжения образцов из стали 45

Для задачи растяжения образцов из стали 45, описываемой системой ОДУ (1.34) с начальными условиями (1.4), аргумент  $\kappa$  (3.60) выберем в форме

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left( \frac{dt}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \right)^2. \quad (3.62)$$

Используя выражение (3.62), запишем  $\kappa$ -преобразованную задачу (1.34), (1.4) в виде

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q_1}} = \text{const}, \\ \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_1}} = \text{const}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q_1}} \end{cases} \quad (3.63)$$

с начальными условиями (2.14).

Функция  $Q_1$ , входящая в знаменатели правых частей системы (3.63), запишется в виде

$$Q_1 = 1 + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k} = \text{const}. \quad (3.64)$$

В отличие от  $\lambda$ -преобразованной задачи (2.15), (2.14), для задачи (3.63), (2.14) можно получить аналитические решения для деформации ползучести и параметра поврежденности в зависимости от  $\kappa$

$$\varepsilon = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q_1}} \kappa, \quad \omega = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_1}} \kappa.$$

Время  $t$  найдем в следующем виде

$$\begin{aligned} t &= \int_0^\kappa \frac{\omega^\alpha(\xi) (1 - \omega^{\alpha+1}(\xi))^m}{\sqrt{Q_1}} d\xi = -\frac{1}{(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k} \int_1^{1 - \frac{B_\omega \sigma_0^k \kappa}{\sqrt{Q_1}}} \theta^m d\theta = \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)(m+1)B_\omega \sigma_0^k} \left( 1 - \left( 1 - \frac{B_\omega \sigma_0^k \kappa}{\sqrt{Q_1}} \right)^{m+1} \right). \end{aligned}$$

Здесь аргумент  $\kappa \in [0, \kappa_*]$ , а выражение для  $\kappa_*$  имеет вид

$$\kappa_* = \frac{\sqrt{Q_1}}{B_\omega \sigma_0^k}. \quad (3.65)$$

Для задачи (3.63), (2.14) докажем следующее

**Утверждение 3.1.** *Все точки области  $V = \{(\varepsilon, \omega, t) \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*, 0 \leq \omega \leq 1, 0 \leq t \leq t^*\}$  для рассматриваемой задачи (3.63), (2.14) являются точками локальной эквивалентности.*

**Доказательство.** Используем результаты доказанных утверждений о локальной эквивалентности точек рассматриваемой области  $W$ . Для аргумента (3.62) функция  $f(\varepsilon, \omega, t) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m$ . Можно заметить, что она не зависит от  $\varepsilon$  и неявно зависит от времени  $t$ , т. е.  $f(\varepsilon, \omega, t) = f(\omega)$ . Функция  $f(\omega)$  не обращается в ноль ни в одной точке рассматриваемого временного интервала, кроме начального момента времени  $\omega = 0$  при  $t = 0$  и момента разрушения  $\omega = 1$  при  $t = t^*$ . Таким образом, согласно теореме 3.1, все точки области  $W$ , для которых  $t \in (0, t^*)$ , являются точками локальной эквивалентности. Покажем, что и в граничных точках имеет место локальная эквивалентность.

Введем ограничения на области изменения параметров задачи

$$0 < B_\varepsilon, B_\omega < \infty; 0 \leq n, k, \alpha, m < \infty.$$

При  $\alpha = 0$  все точки области  $W$  при  $t = 0$  будут точками локальной эквивалентности, а при  $\alpha > 0$  могут возникать неограниченные частные производные функции  $f(\omega)$  и для доказательства локальной эквивалентности будем применять теорему 3.3 и ее следствие.

При  $t = 0$  достаточно доказать локальную эквивалентность только в ее правой полуокрестности, т. е. равенство нулю предела

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\xi} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\partial f^+}{\partial t} \Big|_{\omega=\xi} + \gamma_2^{(2)}(\Delta\omega, \Delta t) \right|^{-1}.$$

Применяя формулу Тейлора, распишем данный предел в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\xi} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\partial f^+}{\partial t} \Big|_{\omega=\xi} + \left[ \frac{\partial^2 f^+}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=\xi} \frac{\Delta\omega^2}{\Delta t^2} + \right. \\ & \left. + 2 \cdot \frac{\partial^2 f^+}{\partial \omega \partial t} \Big|_{\omega=\xi} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\partial^2 f^+}{\partial t^2} \Big|_{\omega=\xi} \right] \Delta t + \gamma_2^{(3)}(\Delta\omega^2, \Delta t^2) \right|^{-1}. \end{aligned}$$

В правой полуокрестности точки  $t = 0$  для последнего предела справедливы следующие предельные соотношения, которые следуют из вида функции  $f(\omega)$  и уравнений исходной системы (1.34)

$$\begin{aligned} f(\omega) & \rightarrow \omega^\alpha, \quad \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha}, \quad \frac{\partial f^+}{\partial \omega} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\partial f^+}{\partial t} \rightarrow 2 \cdot \frac{\partial f^+}{\partial \omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{2\alpha B_\omega \sigma_0^k}{\omega}, \\ \frac{\partial^2 f^+}{\partial \omega^2} \frac{\Delta\omega^2}{\Delta t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f^+}{\partial \omega \partial t} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\partial^2 f^+}{\partial t^2} & \rightarrow \\ & \rightarrow 3 \cdot \frac{\partial^2 f^+}{\partial \omega^2} \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{\partial f^+}{\partial \omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right] \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{(3\alpha^2 - 4\alpha) B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}{\omega^{2+\alpha}}. \end{aligned}$$

Продолжая разложение в ряд Тейлора, придем к следующему равенству

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{c_1}{\omega} + \frac{c_2}{\omega^{2+\alpha}} \Delta t + \frac{c_3}{\omega^{3+2\alpha}} \Delta t^2 + \dots + \frac{c_N}{\omega^{N+(N-1)\alpha}} \Delta t^{N-1} + \dots \right|^{-1} = \\ & = \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left| \frac{c'_1}{\omega} + \frac{c'_2}{\omega^2} \Delta\omega + \frac{c'_3}{\omega^3} \Delta\omega^2 + \dots + \frac{c'_N}{\omega^N} \Delta\omega^{N-1} + \dots \right|^{-1}, \end{aligned}$$

где  $\{c_i\}_{i=1}^\infty$  и  $\{c'_i\}_{i=1}^\infty$  - последовательности чисел, зависящие от параметров задачи  $B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m$ .

В результате, в независимости от порядка взятия пределов, будем иметь

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left| \frac{c'_1}{\omega} + \frac{c'_2}{\omega^2} \Delta\omega + \frac{c'_3}{\omega^3} \Delta\omega^2 + \dots + \frac{c'_n}{\omega^n} \Delta\omega^{n-1} + \dots \right|^{-1} = 0.$$

Таким образом, все точки области  $W$ , для которых  $t = 0$ , являются точками локальной эквивалентности.

Проделаем ту же процедуру для левой полуокрестности точки  $t = t^*$ . Для этого рассмотрим предел вида

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow 0} \left| - \frac{\partial f^-}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\xi} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} - \frac{\partial f^-}{\partial t} \Big|_{\omega=\xi} + \gamma_1^{(2)}(\Delta\omega, \Delta t) \right|^{-1}.$$

Применяя формулу Тейлора, распишем данный предел в виде

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow 0} \left| -\frac{\partial f^-}{\partial\omega} \Big|_{\omega=\xi} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} - \frac{\partial f^-}{\partial t} \Big|_{\omega=\xi} + \left[ \frac{\partial^2 f^-}{\partial\omega^2} \Big|_{\omega=\xi} \frac{\Delta\omega^2}{\Delta t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f^-}{\partial\omega\partial t} \Big|_{\omega=\xi} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\partial^2 f^-}{\partial t^2} \Big|_{\omega=\xi} \right] \Delta t + \gamma_1^{(3)}(\Delta\omega^2, \Delta t^2) \right|^{-1}.$$

В левой полуокрестности точки  $t = t^*$  для предыдущего предела справедливы следующие предельные соотношения, которые следуют из вида функции  $f(\omega)$  и уравнений исходной системы (1.34)

$$\begin{aligned} f(\omega) &\rightarrow (1 - \omega^{\alpha+1})^m, & \frac{d\omega}{dt} &\rightarrow \frac{B_\omega \sigma_0^k}{(1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ -\frac{\partial f^-}{\partial\omega} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} - \frac{\partial f^-}{\partial t} &\rightarrow -2 \cdot \frac{\partial f^-}{\partial\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{2m(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k}{1 - \omega^{\alpha+1}}, \\ \frac{\partial^2 f^+}{\partial\omega^2} \frac{\Delta\omega^2}{\Delta t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f^+}{\partial\omega\partial t} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\partial^2 f^+}{\partial t^2} &\rightarrow \\ \rightarrow 3 \cdot \frac{\partial^2 f^+}{\partial\omega^2} \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial\omega} \left[ \frac{\partial f^+}{\partial\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right] \frac{d\omega}{dt} &\rightarrow \frac{(3m^2 - 4m)(\alpha+1)^2 B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}{(1 - \omega^{\alpha+1})^{2+m}}. \end{aligned}$$

Продолжая разложение в ряд Тейлора, придем к следующему равенству

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{d_1}{1 - \omega^{\alpha+1}} + \frac{d_2}{(1 - \omega^{\alpha+1})^{2+m}} \Delta t + \dots + \frac{d_N}{(1 - \omega^{\alpha+1})^{N+(N-1)m}} \Delta t^{N-1} + \dots \right|^{-1} = \\ = \lim_{\omega \rightarrow 1} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left| \frac{d'_1}{1 - \omega^{\alpha+1}} + \frac{d'_2}{(1 - \omega^{\alpha+1})^2} \Delta\omega + \dots + \frac{d'_N}{(1 - \omega^{\alpha+1})^N} \Delta\omega^{N-1} + \dots \right|^{-1}, \end{aligned}$$

где  $\{d_i\}_{i=1}^\infty$  и  $\{d'_i\}_{i=1}^\infty$  - последовательности чисел, зависящие от параметров задачи  $B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m$ .

В результате, как и в предыдущем случае, в независимости от порядка взятия пределов, будем иметь

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left| \frac{d'_1}{1 - \omega^{\alpha+1}} + \frac{d'_2}{(1 - \omega^{\alpha+1})^2} \Delta\omega + \dots + \frac{d'_N}{(1 - \omega^{\alpha+1})^N} \Delta\omega^{N-1} + \dots \right|^{-1} = 0. \quad \square$$

Нами доказано, что для задачи (1.34), (1.4) все точки области  $W$  являются точками локальной эквивалентности. Это показывает, что интегральное соотношение для оценки меры отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего для задачи (3.63), (2.14) существует и может быть записано в виде

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{Q_1}} \int_0^{\kappa_*} [1 - \omega^\alpha(\xi) (1 - \omega^{\alpha+1}(\xi))^m] d\xi = \frac{1}{B_\omega \sigma_0^k} - \frac{1}{(m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k} \quad (3.66)$$

или в осредненной форме

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{\kappa_* \sqrt{Q_1}} \int_0^{\kappa_*} [1 - \omega^\alpha(\xi) (1 - \omega^{\alpha+1}(\xi))^m] d\xi = \frac{1}{\sqrt{Q_1}} - \frac{1}{(m+1)(\alpha+1)\sqrt{Q_1}}. \quad (3.67)$$

В таблице 21 даны значения мер отклонения (3.66) и (3.67) для задачи (3.63), (2.14). Видно, что  $\bar{\Xi} \neq 0$  и обусловленности  $\kappa$ -преобразованной задачи меньше наилучшей, но правая часть системы (3.63) ограничена и не превосходит по норме единицы, что дает возможность применять для решения данной задачи явные методы. Кроме того, знаменатель правых частей (3.64) и правые части двух первых уравнений системы (3.63) постоянны, что дает возможность более эффективно реализовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я.

Таблица 21. Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  для задачи (3.63), (2.14)

$\sigma_0$ , МПа	$\Xi \cdot 10^{-5}$	$\kappa_* \cdot 10^{-5}$	$\bar{\Xi}$
35	1.5327	1.7847	0.8588
40	0.6043	0.70366	
45	0.2659	0.30962	

В таблице 22 даны результаты численного решения задачи (3.63), (2.14) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 35, 40, 45$  МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Обозначения аналогичны используемым в таблице 3. Шаг интегрирования в  $\kappa$ -преобразованных задачах, отсчитываемый вдоль направления отсчета аргумента  $\kappa$ , будем обозначать  $h^\kappa$ ,  $h_{\min}^\kappa$  и  $h_{\max}^\kappa$  – минимальное и максимальное значение шага по аргументу  $\kappa$  соответственно. Отметим, что при значениях параметров точности решения  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$  методом РК4Я не удалось получить удовлетворительного решения рассматриваемой задачи. В этом случае приходилось уменьшать значения параметра  $\theta_2$  до величины  $\theta_1/15$  для  $\theta_1 = 10^{-1}$  и  $\theta_1/8$  для  $\theta_1 = 10^{-2}$ , т. е. фактически увеличивать точность вычислений. Начальное значение шага  $h_s^\kappa$  по аргументу  $\kappa$  принималось равным единице.

Таблица 22. Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге,  $\kappa$ -преобразование

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^\kappa$	$h_{\max}^\kappa$	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ								
35	$10^{-1}$	0.551	0.9639	7.0447	1	8192	33	0.341
	$10^{-2}$	0.5706	0.9983	7.0015	1	1024	183	1.669
	$10^{-3}$	0.5715	0.9998	7.0005	1	128	1400	10.895
	$10^{-4}$	0.5716	1	7.0005	1	8	22310	167.05
40	$10^{-1}$	0.6577	0.9896	2.7877	1	4096	28	0.294
	$10^{-2}$	0.6626	0.9968	2.7607	1	512	145	1.296
	$10^{-3}$	0.6644	0.9996	2.7601	1	32	2202	16.985
	$10^{-4}$	0.6647	1	2.7601	1	4	17592	131.81
Продолжение таблицы 22 на следующей странице								

Таблица 22 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$t_n^*$ , Ч	$h_{\min}^\kappa$	$h_{\max}^\kappa$	$N_s$	$t_c$ , мс
45	$10^{-1}$	0.7533	0.9921	1.2298	1	2048	25	0.251
	$10^{-2}$	0.7565	0.9963	1.2146	1	128	247	2.243
	$10^{-3}$	0.7592	0.9999	1.2145	1	16	1938	14.88
	$10^{-4}$	0.7593	1	1.2145	1	2	15481	115.79

## Метод ЭКЯ

35	$10^{-1}$	0.5247	0.918	6.8656	1	32768	19	0.264
	$10^{-2}$	0.5641	0.9869	6.9971	1	4096	54	0.696
	$10^{-3}$	0.5715	0.9998	7.0005	1	256	704	7.721
	$10^{-4}$	0.5716	1	7.0005	1	32	5581	58.18
40	$10^{-1}$	0.619	0.9313	2.6963	1	16384	17	0.248
	$10^{-2}$	0.6577	0.9896	2.7595	1	1024	77	0.962
	$10^{-3}$	0.6638	0.9986	2.7601	1	128	555	6.217
	$10^{-4}$	0.6645	0.9998	2.7601	1	16	4400	46.68
45	$10^{-1}$	0.7031	0.926	1.2	1	4096	18	0.25
	$10^{-2}$	0.7533	0.9921	1.2142	1	512	68	0.879
	$10^{-3}$	0.7581	0.9984	1.2145	1	64	488	5.522
	$10^{-4}$	0.7592	0.9999	1.2145	1	4	7741	81.45

## Метод РК4Я

35	$10^{-1}$	0.5247	0.918	6.996	1	16384	23	0.44
	$10^{-2}$	0.5641	0.9869	7.0005	1	4096	54	0.968
	$10^{-3}$	0.5706	0.9983	7.0005	1	2048	97	1.753
	$10^{-4}$	0.5715	0.9998	7.0005	1	128	1400	22.92
40	$10^{-1}$	0.619	0.9313	2.7592	1	8192	20	0.397
	$10^{-2}$	0.6577	0.9896	2.7601	1	2046	44	0.79
	$10^{-3}$	0.6626	0.9968	2.7601	1	512	145	2.453
	$10^{-4}$	0.6644	0.9996	2.7601	1	64	1104	17.54
45	$10^{-1}$	0.7031	0.926	1.2139	1	4096	18	0.358
	$10^{-2}$	0.7533	0.9921	1.2145	1	512	68	1.197
	$10^{-3}$	0.7533	0.9921	1.2145	1	256	127	2.231
	$10^{-4}$	0.7588	0.9994	1.2145	1	32	971	15.6

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (3.63), (2.14), имеют вид, аналогичный приведенному на рис. 1.7. Шаг интегрирования для данной задачи монотонно увеличивается от начального шага  $h_s^\kappa$  до определенного значения и далее остается постоянным. Характер изменения относительной погрешности параметра поврежденности по аргументу  $t$  совпадают с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.9.

В таблице 23 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (3.63), (2.14) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом, обозначения аналогичны используемым в таблице 10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для параметра поврежденности (1.36).

Таблица 23. Относительная погрешность  $\delta\omega$  для численного решения задачи (3.63), (2.14)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭЯ					
35	$10^{-1}$	47.893	12.312	10.164	10.505
	$10^{-2}$	47.893	2.646	0.671	5.966
	$10^{-3}$	47.893	0.386	0.077	2.126
	$10^{-4}$	47.893	0.027	0.005	0.464
40	$10^{-1}$	47.893	13.434	13.079	10.779
	$10^{-2}$	47.893	3.099	0.855	6.425
	$10^{-3}$	47.893	0.237	0.048	1.59
	$10^{-4}$	47.893	0.032	0.006	0.497
45	$10^{-1}$	47.893	13.973	14.285	10.995
	$10^{-2}$	47.893	1.783	0.464	4.833
	$10^{-3}$	47.893	0.256	0.055	1.63
	$10^{-4}$	47.893	0.034	0.007	0.498
Метод ЭКЯ					
35	$10^{-1}$	16.529	2.287	0.371	3.894
	$10^{-2}$	6.815	0.575	0.163	1.22
	$10^{-3}$	4.337	0.04	$7 \cdot 10^{-4}$	0.241
	$10^{-4}$	4.337	0.005	$2 \cdot 10^{-5}$	0.071
40	$10^{-1}$	19.984	2.614	0.371	4.721
	$10^{-2}$	5.35	0.375	0.06	0.921
	$10^{-3}$	4.337	0.049	0.001	0.27
	$10^{-4}$	4.337	0.006	$2 \cdot 10^{-5}$	0.081
45	$10^{-1}$	13.574	2.193	0.557	3.269
	$10^{-2}$	6.071	0.441	0.075	1.059
	$10^{-3}$	4.337	0.054	0.002	0.29
	$10^{-4}$	4.337	0.004	$9 \cdot 10^{-6}$	0.059
Метод РК4Я					
35	$10^{-1}$	8.198	0.349	0.001	1.604
	$10^{-2}$	1.313	0.036	$10^{-4}$	0.182
	$10^{-3}$	0.658	0.014	$3 \cdot 10^{-5}$	0.079
Продолжение таблицы 23 на следующей странице					

Таблица 23 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
35	$10^{-4}$	0.408	$7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	0.013
40	$10^{-1}$	6.866	0.337	0.001	1.427
	$10^{-2}$	1.045	0.043	$2 \cdot 10^{-4}$	0.17
	$10^{-3}$	0.408	0.008	$10^{-5}$	0.051
	$10^{-4}$	0.408	$9 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-7}$	0.014
45	$10^{-1}$	7.4	0.398	0.002	1.609
	$10^{-2}$	0.785	0.023	$6 \cdot 10^{-5}$	0.109
	$10^{-3}$	0.785	0.011	$2 \cdot 10^{-5}$	0.078
	$10^{-4}$	0.408	0.001	$4 \cdot 10^{-7}$	0.016

### 3.2.2 $\kappa$ -преобразование задачи растяжения образцов из сплава ЗВ

Для задачи растяжения образцов из титанового сплава ЗВ, описываемой системой ОДУ (1.42) с начальными условиями (1.43), параметр  $\kappa$  имеет вид

$$(d\kappa)^2 = (dA)^2 + (d\omega)^2 + \left( \frac{dt}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \right)^2. \quad (3.68)$$

Тогда преобразованная им задача запишется в форме системы

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\kappa} = \frac{B_A \sigma_0^n}{\sqrt{Q_2}} = \text{const}, \\ \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_2}} = \text{const}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q_2}} \end{cases} \quad (3.69)$$

с начальными условиями (2.18). Выражение для определения деформации ползучести (1.44) останется в прежнем виде.

Функция  $Q_2$ , входящая в знаменатели правых частей системы (3.69), запишется в виде

$$Q_2 = 1 + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k} = \text{const}. \quad (3.70)$$

Аналитические решения для удельной энергии рассеяния, деформации ползучести и параметра поврежденности могут быть выписаны в параметризованном виде

$$A = \frac{B_A \sigma_0^n}{\sqrt{Q_2}} \kappa, \quad \varepsilon = \frac{B_A \sigma_0^{n-1}}{\sqrt{Q_2}} \kappa, \quad \omega = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_2}} \kappa,$$

Выражение для времени  $t$  запишем в следующем виде

$$t = \frac{1}{(\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k} \cdot \left( 1 - \left( 1 - \frac{B_\omega \sigma_0^k \kappa}{\sqrt{Q_2}} \right)^{m+1} \right).$$

Здесь аргумент  $\kappa \in [0, \kappa_*]$ , а выражение для  $\kappa_*$  имеет вид (3.65), но с заменой  $Q_1$  на  $Q_2$ .

Задача (3.69), (2.18) по структуре аналогична задаче (3.63), (2.14), поэтому для нее справедливо утверждение, аналогичное доказанному в параграфе 3.2.1. При этом, интегральное соотношение для оценки меры отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего также существует и может быть записано в форме (3.66) или (3.67) с заменой  $Q_1$  на  $Q_2$ .

В таблице 24 даны значения мер отклонения вида (3.66) и (3.67) применительно к задаче (3.69), (2.18). Видно, что обусловленности  $\kappa$ -преобразованной задачи также меньше наилучшей, но правая часть системы (3.69) ограничена и не превосходит по норме единицы, что дает возможность применять для решения данной задачи явные методы. Кроме того, знаменатель (3.70) и правые части двух первых уравнений системы (3.69) постоянны, что позволяет более эффективно реализовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я.

Таблица 24. Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  для задачи (3.69), (2.18)

$\sigma_0$ , МПа	$\Xi \cdot 10^{-8}$	$\kappa_* \cdot 10^{-8}$	$\Xi$
603	4.1722	4.3267	0.9643
618	1.1684	1.2117	
638	0.2244	0.2327	

В таблице 25 даны результаты численного решения задачи (3.69), (2.18) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 603, 618, 638$  МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Обозначения аналогичны используемым в таблицах 3 и 22. Начальное значение шага  $h_s^\kappa$  по аргументу  $\kappa$  принималось равным единице.

Таблица 25. Расчетные данные для сплава 3В при переменном шаге,  $\kappa$ -преобразование

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^\kappa$	$h_{\max}^\kappa$	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ									
603	$10^{-1}$	0.1098	0.9997	66.1932	4292.34	1	$5.24 \cdot 10^5$	843	6.66
	$10^{-2}$	0.1098	0.9999	66.2083	4292.34	1	32768	13217	98.508
	$10^{-3}$	0.1098	1	66.2126	4292.34	1	4096	105642	793.34
	$10^{-4}$	0.1098	1	66.2131	4292.34	1	512	845062	6343.3
618	$10^{-1}$	0.1071	0.9995	66.1817	1202.065	1	$1.31 \cdot 10^5$	940	7.436
	$10^{-2}$	0.1071	0.9999	66.2085	1202.065	1	16384	7408	55.398
	$10^{-3}$	0.1071	1	66.213	1202.065	1	1024	118337	884.64
	$10^{-4}$	0.1071	1	66.2132	1202.065	1	128	946632	7145.2
638	$10^{-1}$	0.1037	0.9996	66.1869	230.898	1	32768	724	5.778
Продолжение таблицы 25 на следующей странице									

Таблица 25 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$\omega_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , Ч	$h_{\min}^\kappa$	$h_{\max}^\kappa$	$N_s$	$t_c$ , мс
638	$10^{-2}$	0.1038	1	66.2102	230.898	1	2048	11374	85.113
	$10^{-3}$	0.1038	1	66.2124	230.898	1	256	90922	684.65
	$10^{-4}$	0.1038	1	66.2131	230.898	1	32	727331	5501

## Метод ЭКЯ

603	$10^{-1}$	0.1096	0.9985	66.113	4292.34	1	$1.05 \cdot 10^6$	431	4.414
	$10^{-2}$	0.1098	0.9997	66.1932	4292.34	1	$1.31 \cdot 10^5$	3316	31.295
	$10^{-3}$	0.1098	1	66.2108	4292.34	1	16384	26420	245.01
	$10^{-4}$	0.1098	1	66.2131	4292.34	1	1024	422536	3940.7
618	$10^{-1}$	0.1071	0.9995	66.1817	1202.065	1	$5.24 \cdot 10^5$	249	2.541
	$10^{-2}$	0.1071	0.9998	66.1996	1202.065	1	32768	3711	34.93
	$10^{-3}$	0.1071	1	66.213	1202.065	1	4096	29593	274.51
	$10^{-4}$	0.1071	1	66.213	1202.065	1	512	236664	2207.2
638	$10^{-1}$	0.1037	0.9996	66.1869	230.898	1	65536	370	3.742
	$10^{-2}$	0.1038	1	66.2102	230.898	1	8192	2853	26.924
	$10^{-3}$	0.1038	1	66.2102	230.898	1	1024	22737	210.9
	$10^{-4}$	0.1038	1	66.213	230.898	1	64	363668	3407

## Метод РК4Я

603	$10^{-1}$	0.1086	0.9888	65.4711	4292.34	1	$8.39 \cdot 10^6$	73	1.249
	$10^{-2}$	0.1098	0.9997	66.1932	4292.34	1	$5.24 \cdot 10^5$	843	13.574
	$10^{-3}$	0.1098	0.9999	66.2032	4292.34	1	65536	6616	103.28
	$10^{-4}$	0.1098	1	66.212	4292.34	1	8192	52827	827
618	$10^{-1}$	0.1057	0.9865	65.3222	1202.065	1	$2.1 \cdot 10^6$	77	1.389
	$10^{-2}$	0.1071	0.9995	66.1817	1202.065	1	$2.62 \cdot 10^5$	479	7.966
	$10^{-3}$	0.1071	0.9999	66.2085	1202.065	1	16384	7408	115.3
	$10^{-4}$	0.1071	1	66.213	1202.065	1	2048	59174	923.6
638	$10^{-1}$	0.1029	0.9912	65.6276	230.898	1	$5.24 \cdot 10^5$	62	1.125
	$10^{-2}$	0.1037	0.9996	66.1869	230.898	1	32768	724	11.717
	$10^{-3}$	0.1038	1	66.2102	230.898	1	4096	5693	90.17
	$10^{-4}$	0.1038	1	66.2117	230.898	1	512	45465	709.8

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (3.69), (2.18), имеют вид, аналогичный приведенному на рис. 1.10. Шаг интегрирования для данной задачи также монотонно увеличивается от начального шага  $h_s^\kappa$  до определенного значения и далее остается постоянным. Характер изменения относительной погрешности параметра поврежденности по аргументу  $t$  совпадают с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.12.

В таблице 26 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (3.69), (2.18) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом, обозначения аналогичны используемым в таблице 10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для параметра поврежденности (1.46).

Таблица 26. Относительная погрешность  $\delta\omega$  для численного решения задачи (3.69), (2.18)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭЯ					
603	$10^{-1}$	36.991	0.678	0.125	3.455
	$10^{-2}$	36.991	0.045	0.008	0.628
	$10^{-3}$	12.379	0.011	0.001	0.105
	$10^{-4}$	18.665	0.009	$10^{-4}$	0.087
618	$10^{-1}$	36.178	0.599	0.111	3.14
	$10^{-2}$	36.178	0.076	0.014	0.873
	$10^{-3}$	22.27	0.01	$9 \cdot 10^{-4}$	0.114
	$10^{-4}$	15.949	0.008	$10^{-4}$	0.076
638	$10^{-1}$	36.182	0.77	0.145	3.644
	$10^{-2}$	36.145	0.05	0.009	0.65
	$10^{-3}$	19.226	0.012	0.001	0.132
	$10^{-4}$	15.594	0.008	$10^{-4}$	0.078
Метод ЭКЯ					
603	$10^{-1}$	3.806	0.108	0.001	0.504
	$10^{-2}$	3.806	0.012	$2 \cdot 10^{-5}$	0.142
	$10^{-3}$	3.806	0.004	$3 \cdot 10^{-7}$	0.049
	$10^{-4}$	14.384	0.007	$7 \cdot 10^{-10}$	0.072
618	$10^{-1}$	3.589	0.204	0.004	0.71
	$10^{-2}$	3.589	0.011	$2 \cdot 10^{-5}$	0.132
	$10^{-3}$	3.589	0.005	$2 \cdot 10^{-7}$	0.057
	$10^{-4}$	8.305	0.007	$5 \cdot 10^{-9}$	0.073
638	$10^{-1}$	20.568	0.195	0.002	1.214
	$10^{-2}$	20.568	0.023	$3 \cdot 10^{-5}$	0.423
	$10^{-3}$	20.568	0.005	$4 \cdot 10^{-7}$	0.148
	$10^{-4}$	20.568	0.007	$2 \cdot 10^{-9}$	0.082
Метод РК4Я					
603	$10^{-1}$	2.165	0.052	$9 \cdot 10^{-6}$	0.281
	$10^{-2}$	0.906	0.005	$4 \cdot 10^{-10}$	0.054
	$10^{-3}$	0.656	0.002	$3 \cdot 10^{-12}$	0.031
Продолжение таблицы 26 на следующей странице					

Таблица 26 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\theta_1$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
603	$10^{-4}$	1.253	0.005	$2 \cdot 10^{-11}$	0.049
618	$10^{-1}$	1.763	0.05	$6 \cdot 10^{-6}$	0.25
	$10^{-2}$	1.168	0.009	$3 \cdot 10^{-9}$	0.082
	$10^{-3}$	0.719	0.003	$8 \cdot 10^{-12}$	0.036
	$10^{-4}$	1.256	0.006	$6 \cdot 10^{-11}$	0.06
638	$10^{-1}$	20.568	0.396	$2 \cdot 10^{-5}$	2.566
	$10^{-2}$	20.568	0.035	$8 \cdot 10^{-10}$	0.765
	$10^{-3}$	20.568	0.006	$4 \cdot 10^{-12}$	0.274
	$10^{-4}$	20.568	0.005	$3 \cdot 10^{-11}$	0.108

### 3.2.3 $\kappa$ -преобразование задачи растяжения образцов из сплава ОТ-4

Для задачи деформирования образцов из титанового сплава ОТ-4 в условиях ползучести, описываемой начальной задачей (1.25)-(1.26), аргумент  $\kappa$  (3.60) выберем в форме

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (dA)^2 + \left( \frac{dt}{(A_* - A)^m} \right)^2. \quad (3.71)$$

Используя выражение (3.71), запишем  $\kappa$ -преобразованную задачу (1.25)-(1.26) в виде

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_3}}, \\ \frac{dA}{d\kappa} = \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_3}}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\sigma_0 \cdot (A_* - A)^m}{\sqrt{Q_3}} \end{cases} \quad (3.72)$$

с начальными условиями типа (2.21).

Выражение  $Q_3$ , входящее в знаменатели правых частей системы (3.72), запишем в виде

$$Q_3 = \sigma_0^2 + (\sigma_0^2 + 1) \cdot K^2 \cdot e^{2\beta\sigma_0} = \text{const}. \quad (3.73)$$

Как и в параграфах 3.2.1 и 3.2.2, получим аналитические решения для деформации ползучести и удельной работы рассеяния в параметрическом виде

$$\varepsilon = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_3}} \kappa, \quad A = \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_3}} \kappa,$$

Время  $t$  получим в следующем виде

$$t = \frac{1}{(m+1)Ke^{\beta\sigma_0}} \left[ A_*^{m+1} - \left( A_* - \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0} \kappa}{\sqrt{Q_3}} \right)^{m+1} \right].$$

Здесь аргумент  $\kappa \in [0, \kappa_*]$ , а выражение для  $\kappa_*$  имеет вид

$$\kappa_* = \frac{A_* \cdot \sqrt{Q_3}}{\sigma_0 \cdot K e^{\beta \sigma_0}}. \quad (3.74)$$

В параграфе 3.2.1 нами доказано, что для задачи (1.34), (1.4) справедливо утверждение 3.1. Можно видеть, что задача (3.63), (2.14) по структуре схожа с задачей (1.34), (1.4), в случае принятия в качестве параметра поврежденности величины удельной работы рассеяния. Задаче (3.63), (2.14) соответствует значение  $\alpha = 0$ , т. е. для нее все точки рассматриваемой области  $V$  являются точками локальной эквивалентности. Поэтому интегральное соотношение для оценки меры отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего для задачи (3.63), (2.14) существует и может быть записано в виде

$$\Xi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{Q_3}} \int_0^{\kappa_*} |(A_* - A(\xi))^m - 1| d\xi. \quad (3.75)$$

Так как стоящая под знаком модуля в (3.75) функция может принимать разные знаки, то  $\Xi$  равна сумме двух интегралов при  $\kappa_1 = [(A_* - 1) \cdot \sqrt{Q_3}] / [\sigma_0 \cdot K \cdot \exp(\beta \sigma_0)]$

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{Q_3}} \cdot \left\{ \int_0^{\kappa_1} [(A_* - A(\xi))^m - 1] d\xi + \int_{\kappa_1}^{\kappa_*} [1 - (A_* - A(\xi))^m] d\xi \right\} = \\ &= \frac{A_*^{m+1} - 2}{K e^{\beta \sigma_0} (m+1)} - \frac{A_* - 2}{K e^{\beta \sigma_0}} \end{aligned} \quad (3.76)$$

или в осредненной форме

$$\bar{\Xi} = \frac{(A_*^{m+1} - 2) \sigma_0}{\sqrt{Q_3} A_* (m+1)} - \frac{(A_* - 2) \sigma_0}{\sqrt{Q_3} A_*}. \quad (3.77)$$

В таблице 27 даны значения мер отклонения (3.76) и (3.77) для задачи (3.72), (2.21). Видно, что обусловленности  $\kappa$ -преобразованной задачи меньше наилучшей, но норма правой части системы (3.72) ограничена, что дает возможность применять для решения данной задачи явные методы. Кроме того, знаменатель правых частей (3.73) и правые части двух первых уравнений системы (3.72) постоянны, что позволяет более эффективно реализовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я.

Таблица 27. Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$  для задачи (3.72), (2.21)

$\sigma_0$ , МПа	$\Xi$	$\kappa_*$	$\bar{\Xi}$
98.07	446.225	88.2046	5.059
112.78	263.9668	88.2035	2.9927
147.1	77.5423	88.202	0.8791

В таблице 28 даны результаты численного решения задачи (3.72), (2.21) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 98, 112.7$  и  $147$  МПа с постоянным шагом интегрирования

по аргументу  $\kappa$   $h^\kappa = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ . Обозначения аналогичны используемым в таблице 5.

Таблица 28. Расчетные данные для сплава ОТ-4 при постоянном шаге,  $\kappa$ -преобразование

$\sigma_0$ , МПа	$h^\kappa$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ						
98	$10^{-1}$	0.9	88.1954	447.2399	882	2.794
	$10^{-2}$	0.9	88.1954	446.3287	8820	25.721
	$10^{-3}$	0.9	88.1994	446.2377	88204	255.84
	$10^{-4}$	0.9	88.1999	446.2286	882045	2578.7
112.7	$10^{-1}$	0.7826	88.1965	264.5672	882	2.933
	$10^{-2}$	0.7826	88.1965	264.0282	8820	26.097
	$10^{-3}$	0.7826	88.1995	263.9743	88203	258.64
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9689	882034	2585.3
147	$10^{-1}$	0.6	88.198	77.7187	882	2.79
	$10^{-2}$	0.6	88.198	77.5603	8820	25.676
	$10^{-3}$	0.6	88.2	77.5445	88202	256.64
	$10^{-4}$	0.6	88.2	77.5429	882020	2580.3
Метод ЭКЯ						
98	$10^{-1}$	0.9	88.1954	446.2281	882	3.707
	$10^{-2}$	0.9	88.1954	446.2276	8820	32.285
	$10^{-3}$	0.9	88.1994	446.2276	88204	323.54
	$10^{-4}$	0.9	88.1999	446.2276	882045	3259
112.7	$10^{-1}$	0.7826	88.1965	263.9686	882	3.506
	$10^{-2}$	0.7826	88.1965	263.9683	8820	33.029
	$10^{-3}$	0.7826	88.1995	263.9683	88203	324.76
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9683	882034	3255.9
147	$10^{-1}$	0.6	88.198	77.5428	882	3.368
	$10^{-2}$	0.6	88.198	77.5427	8820	32.577
	$10^{-3}$	0.6	88.2	77.5427	88202	324.49
	$10^{-4}$	0.6	88.2	77.5427	882020	3269.7
Метод РК4Я						
98	$10^{-1}$	0.9	88.1954	446.2276	882	6.571
	$10^{-2}$	0.9	88.1954	446.2276	8820	62.553
	$10^{-3}$	0.9	88.1994	446.2276	88204	621.53
	$10^{-4}$	0.9	88.1999	446.2276	882045	6252.4
Продолжение таблицы 28 на следующей странице						

Таблица 28 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$h^\kappa$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$N_s$	$t_c$ , мс
112.7	$10^{-1}$	0.7826	88.1965	263.9683	882	6.498
	$10^{-2}$	0.7826	88.1965	263.9683	8820	62.865
	$10^{-3}$	0.7826	88.1995	263.9683	88203	622.59
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9683	882034	6238.9
147	$10^{-1}$	0.6	88.198	77.5427	882	6.486
	$10^{-2}$	0.6	88.198	77.5427	8820	62.506
	$10^{-3}$	0.6	88.2	77.5427	88202	621.65
	$10^{-4}$	0.6	88.2	77.5427	882020	6247.7

В таблице 29 даны результаты численного решения задачи (3.72), (2.21) для трех значений начального напряжения  $\sigma_0 = 98, 112.7$  и  $147$  МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров  $\theta_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  и  $\theta_2 = \theta_1/2$ . Обозначения аналогичны используемым в таблице 6. Начальное значение шага  $h_s^\kappa$  по аргументу  $\kappa$  принималось равным единице.

Таблица 29. Расчетные данные для сплава ОТ-4 при переменном шаге,  $\kappa$ -преобразование

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^\kappa$	$h_{\max}^\kappa$	$N_s$	$t_c$ , мс
Метод ЭЯ								
98	$10^{-1}$	0.8998	88.1829	446.8602	0.0625	0.0625	1411	7.592
	$10^{-2}$	0.9	88.1985	446.3066	0.0078	0.0078	11290	57.606
	$10^{-3}$	0.9	88.1995	446.2374	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	90321	461.56
	$10^{-4}$	0.9	88.2	446.2282	$6 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	1445144	7424.5
112.7	$10^{-1}$	0.7825	88.184	264.3425	0.0625	0.0625	1411	7.431
	$10^{-2}$	0.7826	88.1997	264.0151	0.0078	0.0078	11290	57.561
	$10^{-3}$	0.7826	88.1997	263.9741	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	90320	463.13
	$10^{-4}$	0.7826	88.2	263.9687	$6 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	1445125	7427.1
147	$10^{-1}$	0.5999	88.1855	77.6527	0.0625	0.0625	1411	7.155
	$10^{-2}$	0.6	88.1933	77.5565	0.0078	0.0078	11289	57.736
	$10^{-3}$	0.6	88.1991	77.5444	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	90318	460.48
	$10^{-4}$	0.6	88.2	77.5428	$6 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	1445102	7438.4
Метод ЭКЯ								
98	$10^{-1}$	0.8979	87.9954	446.2311	0.25	0.25	352	2.356
	$10^{-2}$	0.9	88.1985	446.2276	0.0156	0.0156	5645	33.297
	$10^{-3}$	0.9	88.1985	446.2276	0.002	0.002	45160	265.48
Продолжение таблицы 29 на следующей странице								

Таблица 29 (продолжение)

$\sigma_0$ , МПа	$\theta_1$	$\varepsilon_n^*$	$A_n^*$ , МДж/м <sup>3</sup>	$t_n^*$ , ч	$h_{\min}^\kappa$	$h_{\max}^\kappa$	$N_s$	$t_c$ , мс
98	$10^{-4}$	0.9	88.2	446.2276	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	361286	2137.3
112.7	$10^{-1}$	0.7808	87.9965	263.9704	0.25	0.25	352	2.443
	$10^{-2}$	0.7826	88.1997	263.9683	0.0156	0.0156	5645	33.296
	$10^{-3}$	0.7826	88.1997	263.9683	0.002	0.002	45160	263.97
	$10^{-4}$	0.7826	88.1999	263.9683	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	361281	2135.8
147	$10^{-1}$	0.5986	87.998	77.5433	0.25	0.25	352	2.589
	$10^{-2}$	0.5999	88.1855	77.5427	0.0156	0.0156	5644	33.261
	$10^{-3}$	0.6	88.1991	77.5427	0.002	0.002	45159	264.72
	$10^{-4}$	0.6	88.1999	77.5427	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	361275	2124.7

## Метод РК4Я

98	$10^{-1}$	0.8979	87.9954	446.2276	1	1	88	1.212
	$10^{-2}$	0.8992	88.1204	446.2276	0.125	0.125	705	8.363
	$10^{-3}$	0.9	88.1985	446.2276	0.0078	0.0078	11290	127.77
	$10^{-4}$	0.9	88.1995	446.2276	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	90321	1021.9
112.7	$10^{-1}$	0.7808	87.9965	263.9683	1	1	88	1.231
	$10^{-2}$	0.7819	88.1215	263.9683	0.125	0.125	705	8.387
	$10^{-3}$	0.7826	88.1997	263.9683	0.0078	0.0078	11290	127.57
	$10^{-4}$	0.7826	88.1997	263.9683	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	90320	1020.1
147	$10^{-1}$	0.5986	87.998	77.5427	1	1	88	1.393
	$10^{-2}$	0.5995	88.123	77.5427	0.125	0.125	705	8.367
	$10^{-3}$	0.6	88.1933	77.5427	0.0078	0.0078	11289	128.84
	$10^{-4}$	0.6	88.1991	77.5427	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	90318	1026.4

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (3.72), (2.21) с постоянным и переменным шагом, имеют вид, аналогичный приведенным на рис. 1.4. Шаг интегрирования для данной задачи монотонно уменьшается от начального шага  $h_s^\kappa$  до определенного значения и далее остается постоянным.

В таблице 30 представлена относительная погрешность удельной работы рассеяния при расчете задачи (3.72), (2.21) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным и постоянным шагом, обозначения аналогичны используемым в таблице 10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для удельной работы рассеяния (1.27). Характер изменения погрешности удельной энергии рассеяния в зависимости от аргумента  $t$  аналогичен характеру изменения кривых, приведенным на рис. 1.6.

Таблица 30. Относительная погрешность удельной энергии рассеяния для задачи (3.72), (2.21)

$\sigma_0, \text{МПа}$	Постоянный шаг					Переменный шаг				
	$h$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$	$\theta_1$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭЯ										
98	$10^{-1}$	25.384	5.165	0.795	7.694	$10^{-1}$	22.195	4.015	0.496	6.506
	$10^{-2}$	13.373	1.525	0.079	3.337	$10^{-2}$	12.511	1.34	0.062	3.047
	$10^{-3}$	7.245	0.462	0.008	1.42	$10^{-3}$	7.2	0.456	0.008	1.407
	$10^{-4}$	3.988	0.143	$8 \cdot 10^{-4}$	0.6	$10^{-4}$	3.514	0.111	$5 \cdot 10^{-4}$	0.499
112.7	$10^{-1}$	25.385	5.165	0.795	7.695	$10^{-1}$	22.196	4.016	0.496	6.507
	$10^{-2}$	13.374	1.525	0.079	3.338	$10^{-2}$	12.512	1.34	0.062	3.048
	$10^{-3}$	7.245	0.462	0.008	1.42	$10^{-3}$	7.2	0.456	0.008	1.407
	$10^{-4}$	3.988	0.143	$8 \cdot 10^{-4}$	0.6	$10^{-4}$	3.514	0.111	$5 \cdot 10^{-4}$	0.499
147	$10^{-1}$	25.386	5.166	0.795	7.696	$10^{-1}$	22.198	4.016	0.496	6.507
	$10^{-2}$	13.375	1.525	0.079	3.338	$10^{-2}$	12.507	1.34	0.062	3.046
	$10^{-3}$	7.245	0.462	0.008	1.42	$10^{-3}$	7.2	0.456	0.008	1.407
	$10^{-4}$	3.988	0.143	$8 \cdot 10^{-4}$	0.6	$10^{-4}$	3.514	0.111	$5 \cdot 10^{-4}$	0.499
Метод ЭКЯ										
98	$10^{-1}$	3.444	0.108	$4 \cdot 10^{-4}$	0.49	$10^{-1}$	5.36	0.266	0.002	0.95
	$10^{-2}$	1.069	0.011	$4 \cdot 10^{-6}$	0.086	$10^{-2}$	1.342	0.017	$10^{-5}$	0.121
	$10^{-3}$	0.337	0.001	$4 \cdot 10^{-8}$	0.015	$10^{-3}$	0.471	0.002	$10^{-7}$	0.025
	$10^{-4}$	0.153	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005	$10^{-4}$	0.166	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005
112.7	$10^{-1}$	3.445	0.108	$4 \cdot 10^{-4}$	0.49	$10^{-1}$	5.361	0.266	0.002	0.95
	$10^{-2}$	1.07	0.011	$4 \cdot 10^{-6}$	0.086	$10^{-2}$	1.343	0.017	$10^{-5}$	0.121
	$10^{-3}$	0.337	0.001	$4 \cdot 10^{-8}$	0.015	$10^{-3}$	0.472	0.002	$10^{-7}$	0.025
Продолжение таблицы 30 на следующей странице										

Таблица 30 (продолжение)

$\sigma_0, \text{МПа}$	Постоянный шаг					Переменный шаг				
	$h$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$	$\theta_1$	$\delta A_{\max}, \%$	$\delta A_{\text{av}}, \%$	$\delta A_{\text{med}}, \%$	$\delta A_{\text{dev}}, \%$
112.7	$10^{-4}$	0.148	$10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.003	$10^{-4}$	0.172	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.006
147	$10^{-1}$	3.447	0.108	$4 \cdot 10^{-4}$	0.49	$10^{-1}$	5.362	0.266	0.002	0.951
	$10^{-2}$	1.071	0.011	$4 \cdot 10^{-6}$	0.087	$10^{-2}$	1.332	0.017	$10^{-5}$	0.12
	$10^{-3}$	0.338	0.001	$4 \cdot 10^{-8}$	0.015	$10^{-3}$	0.472	0.002	$10^{-7}$	0.025
	$10^{-4}$	0.157	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005	$10^{-4}$	0.175	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-9}$	0.006
Метод РК4Я										
98	$10^{-1}$	0.016	$2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-1}$	0.232	0.003	$10^{-13}$	0.024
	$10^{-2}$	0.031	$9 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$10^{-2}$	0.09	$10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-12}$	0.003
	$10^{-3}$	0.064	$3 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	0.028	$9 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	0.143	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-9}$	0.004	$10^{-4}$	0.088	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-10}$	0.002
112.7	$10^{-1}$	0.021	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$10^{-1}$	0.231	0.003	$2 \cdot 10^{-13}$	0.024
	$10^{-2}$	0.042	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$10^{-2}$	0.089	$10^{-4}$	$10^{-12}$	0.003
	$10^{-3}$	0.086	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-10}$	0.002	$10^{-3}$	0.049	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$9 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	0.157	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.004	$10^{-4}$	0.038	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-4}$
147	$10^{-1}$	0.023	$3 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$10^{-1}$	0.229	0.003	$3 \cdot 10^{-13}$	0.024
	$10^{-2}$	0.036	$10^{-5}$	$10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-2}$	0.087	$10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-13}$	0.003
	$10^{-3}$	0.062	$4 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	0.039	$10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-4}$	0.148	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005	$10^{-4}$	0.074	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-11}$	0.002

### 3.2.4 Анализ применения модифицированного наилучшего аргумента

В данной главе рассмотрено применение модифицированного наилучшего аргумента  $\kappa$  вида (3.60), приводящего к решению задач (3.63), (2.14) для образцов из стали 45, (3.69), (2.18) для образцов из титанового сплава ЗВ и (3.72), (2.21) для образцов из титанового сплава ОТ-4. Доказано, что обусловленность  $\kappa$ -преобразованных задач будет хуже наилучшей. Для оценки обусловленности  $\kappa$ -преобразованных задач предложено использовать величину  $\Xi$  отклонения между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$ , которая для системы двух ОДУ выражается формулой (3.57), или ее усредненное значение  $\bar{\Xi}$  (3.58). Для рассматриваемых задач величины  $\Xi$  и  $\bar{\Xi}$  даны в таблицах 21, 24 и 27. Отметим, что для оценки обусловленности  $\kappa$ -преобразованных задач более приемлема величина  $\bar{\Xi}$ , так как она менее зависима от значений начального напряжения и используемой размерности.

Для образцов из стали 45 и титанового сплава ЗВ значения  $\bar{\Xi}$  не превосходят единицы и мало зависят от величины начального напряжения. Можно ожидать, что и обусловленности  $\kappa$ -преобразованных задач для данных конструкций будут мало отличаться от наилучшей. Для образцов из титанового сплава ОТ-4 величина  $\bar{\Xi}$  зависит от начального напряжения и принимает значения превышающие 5 единиц, из чего можно сделать вывод о том, что  $\kappa$ -преобразованная задача для сплава ОТ-4 будет обусловлена хуже по сравнению с двумя другими.

Ухудшение обусловленности  $\kappa$ -преобразованных задач компенсируется значительным упрощением вида используемых определяющих уравнений. Для упрочняющихся конструкций в сравнении с наилучшей параметризацией можно отметить следующее:

1. Переход к аргументу  $\kappa$  для стали 45 при использовании метода ЭЯ позволяет сократить время счета от 10 до 50 процентов, при использовании метода ЭКЯ - от 30 процентов до 3 раз, при использовании метода РК4Я - от 2 до 4 раз. Для титанового сплава ЗВ при использовании метода ЭЯ время счета сокращается от нескольких до 40 процентов, при использовании метода ЭКЯ - от 45 процентов до 3.5 раз, при использовании метода РК4Я - от 2 до 4 раз.
2. Максимальная погрешность решений обеих задач может возрасти в разы, однако средние показатели и медиана погрешности уменьшаются по сравнению с полученными при наилучшей параметризации, т. е. погрешности в обоих случаях сопоставимы. Отметим возрастание среднего значения и медианы погрешности решения, полученного методом РК4Я для сплава ЗВ, но уменьшение среднего квадратического отклонения сглаживает разницу с погрешностью для  $\lambda$ -преобразованной задачи.
3. Интервал изменения аргумента  $\kappa$  растягивается по сравнению с интервалами изменения аргументов  $\lambda$  и  $t$  в 7 раз для стали 45 и в 28 раз для титанового сплава ЗВ. За счет такого растяжения шаг по аргументу  $\kappa$  становится больше. Однако количе-

ство шагов по аргументу  $\kappa$  может от 30 до 50 процентов в обе стороны отличаться от аналогичных показателей для аргументов  $\lambda$  и  $t$ . Основной же особенностью  $\kappa$ -преобразования является то, что значения  $h^\kappa$  остается фактически постоянным, даже при использовании переменного шага.

Помимо уже сказанного, для образцов из титанового сплава ОТ-4 стоит добавить, что

1. Для всех трех методов решения при постоянном шаге интегрирования, за счет нормировки длины интервала изменения аргумента  $\kappa$  до 88.2 единиц, в ряде случаев удается сократить время счета по сравнению с решением непараметризованной задачи: для  $\sigma_0 = 98$  МПа от 4 до 5.5 раз, для  $\sigma_0 = 112.7$  МПа – от 2.5 до 3.5 раз. При  $\sigma_0 = 147$  МПа происходит увеличение времени счета для метода РК4Я на 25 процентов, для методов ЭЯ и ЭКЯ время счета находится на уровне, полученном при решении исходной задачи. Последнее объясняется тем, что длина интервала изменения аргумента  $\kappa$  при  $\sigma_0 = 147$  МПа превышает длину интервала изменения аргумента  $t$ .
2. При переменном шаге интегрирования, в сравнении с результатами решения непараметризованной задачи, можно отметить для метода ЭЯ уменьшение времени счета до 2-2.5 раз, для метода ЭКЯ – до 1.5 раз. Для метода РК4Я время счета может изменяться в пределах 20-30 процентов в обе стороны. Это объясняется как упрощением вида  $\kappa$ -преобразованной задачи, так и зависимостью времени счета от количества шагов по аргументу  $\kappa$ .
3. Относительная погрешность решений, полученных при использовании всех рассматриваемых методов с постоянным шагом интегрирования, существенно больше по сравнению с аналогичными значениями для  $\lambda$ -преобразованной задачи. Это можно связать с реальным увеличением шага интегрирования и ухудшением обусловленности  $\kappa$ -преобразованной задачи. Для переменного шага погрешности для  $\kappa$ - и  $\lambda$ -преобразованной задач сопоставимы. Отметим также, что для метода РК4Я наблюдается увеличение погрешности при увеличении точности.

В остальном, для  $\kappa$ -преобразованных задач справедливы выводы параграфа 2.2.4.

**Замечание 3.6.** Используя особенность изменения шага интегрирования при  $\kappa$ -преобразовании, можно модифицировать процедуру контроля точности по методу РРР и сократить время счета еще до двух раз.

Все вышесказанное показывает, что введенный модифицированный наилучший аргумент позволяет упростить процесс решения задач как для неупрочняющихся, так и для упрочняющихся конструкций, и может стать основой для разработки эффективных методов расчета как плохо обусловленных, так и жестких задач в целом. Но приведенные в данной главе результаты являются лишь началом исследований предложенного аргумента. В дальнейшем необходимо детально исследовать общие свойства данного аргумента и более конкретно рассмотреть вопрос обусловленности  $\kappa$ -преобразованных задач.

## Глава 4. Методы нейросетевого моделирования

В главах 1, 2 и 3 предложен ряд методов для расчета моделей, описывающих процессы деформирования и разрушения металлических конструкций в условиях ползучести. Все рассмотренные подходы, как традиционные, так и на основе продолжения решения по параметру, позволяют получить расчетные данные, которые с высокой точностью согласуются с имеющимися аналитическими решениями и результатами других авторов. Однако, если используется модель, плохо согласующаяся с результатами эксперимента, то ее расчет с высокой точностью теряет смысл.

Одной из основных задач при построении моделей, описывающих процесс ползучести, является определение материальных констант, входящих в выбранные определяющие соотношения. В большинстве случаев идентификация модели зависит как от вида используемых уравнений, так и от характера процесса деформирования. При этом, вплоть до настоящего времени, погрешность при моделировании ряда задач по отношению к результатам эксперимента может достигать десятков процентов [29].

В последней главе диссертационной работы рассматривается задача идентификации моделей ползучести по результатам эксперимента. В качестве основного инструмента решения выбраны методы нейросетевого моделирования, разрабатываемые в работах [12–14]. Применение искусственных нейронных сетей позволило разработать унифицированный подход, позволяющий как определять параметры моделей ползучести, так и одновременно проводить их расчет.

### 4.1 Нейросетевое моделирование при решении начальных задач для систем ОДУ

Следуя монографии [12], рассмотрим построение нейронной сети для системы  $m$  ОДУ  $r$ -ого порядка с  $p$  неизвестными скалярными параметрами, задаваемыми вектором  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \bar{\alpha}) = 0, \quad t \in [t_0, t_*] \quad (4.1)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(r-1)}(t_0) = \mathbf{y}_{r-1}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Здесь  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{(r+1)m+p+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  – вектор-функция векторного аргумента с компонентами  $f_i : \mathbb{R}^{(r+1)m+p+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{y} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$  – искомое решение,  $t_0$  – начальная точка,  $t_*$  – конечная точка,  $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{jm})^T$ ,  $j = 0, \dots, r-1$  – векторы значений функции  $\mathbf{y}(t)$  и ее  $r-1$  первых производных в точке  $t_0$ ,  $\mathbf{y}^{(j)}(t) = d^j \mathbf{y}(t)/dt^j$ ,  $\mathbf{y}^{(0)}(t) = \mathbf{y}(t)$ .

При описании физических процессов на области изменения параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  могут накладываться ограничения вида

$$\alpha_s \in A_s \subseteq \mathbb{R}, \quad s = 1, \dots, p. \quad (4.3)$$

Пусть для задачи (4.1)-(4.2) также выполнены условия теоремы Коши о существовании решения начальной задачи. Кроме того, имеются  $l$  экспериментальных наблюдений

$$\mathbf{y}(t_q^e) = \mathbf{y}_q^e, \quad t_q^e \in (t_0, t_*], \quad q = 1, \dots, l, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{y}_q^e = (y_{q1}^e, \dots, y_{qm}^e)^T$  – векторы значений  $\mathbf{y}(t)$  в точках  $t_1^e, \dots, t_l^e$  соответственно.

Решение начальной задачи (4.1)-(4.2), удовлетворяющее ограничениям (4.3) и соотношениям (4.4), будем искать, используя методы нейросетевого моделирования [12–14]. Для этого каждую компоненту вектор-функции  $\mathbf{y}(t)$  разложим по нейросетевому базису

$$\hat{y}_i(t, \mathbf{w}_i) = \sum_{j_i=1}^{N_i} c_{ij_i} \nu_{j_i}(t, \mathbf{a}_{ij_i}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{w}_i = (\mathbf{w}_{i1}, \dots, \mathbf{w}_{iN_i})^T$  – матрицы настраиваемых параметров (нейросетевых коэффициентов),  $\mathbf{w}_{ij_i} = (c_{ij_i}, \mathbf{a}_{ij_i})$ ,  $c_{ij_i}$  – линейно входящие параметры;  $\mathbf{a}_{ij_i} = (a_{ij_i}^1, a_{ij_i}^2)$  – нелинейно входящие параметры,  $N_i$  – количество нейронов в разложении (4.5).

Тип нейросетевого базиса  $c_{ij_i} \nu_{j_i}(t, \mathbf{a}_{ij_i})$  задается скалярной функцией скалярного аргумента  $\varphi_{j_i}(x)$ , так называемой функцией активации

$$\nu_{j_i}(t, \mathbf{a}_{ij_i}) = \varphi_{j_i}(x), \quad x = \psi(t, \mathbf{a}_{ij_i}),$$

где  $\psi(\cdot)$  – заданная функция (например,  $\psi(t, \mathbf{a}_{ij_i}) = a_{ij_i}^1 \cdot t + a_{ij_i}^2$ ). Активационная функция может быть задана в форме гиперболического тангенса, радиальной базисной функции (например, в виде гауссианы  $\varphi(x) = \exp\{-x^2\}$ ) или иной форме, описанной в монографии [12, с. 76-95].

Заменяя в задаче (4.1)-(4.2) и экспериментальных данных (4.4) компоненты вектор-функции  $\mathbf{y}(t)$  на нейросетевые разложения (4.5), составим нормированный функционал ошибки в интегральной форме, как сумму взвешенных невязок

$$J(\bar{\alpha}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m) = \frac{1}{R_0} \cdot \sum_{i=1}^m \left( \beta_i \int_{t_0}^{t_*} |f_i(\xi, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}', \dots, \hat{\mathbf{y}}^{(n)}, \bar{\alpha})|^2 d\xi + \right. \\ \left. + \gamma_i \sum_{j=0}^{r-1} \left| \hat{y}_i^{(j)}(t_0, \mathbf{w}_i) - y_{ji} \right|^2 + \delta_i \sum_{q=1}^l \left| \hat{y}_i(t_q, \mathbf{w}_i) - y_{qi}^e \right|^2 \right). \quad (4.6)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{y}}(t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m) = (\hat{y}_1(t, \mathbf{w}_1), \dots, \hat{y}_m(t, \mathbf{w}_m))^T$  – вектор нейросетевых разложений,  $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$  – положительные штрафные множители,  $R_0 = \sum_{i=1}^m (\beta_i \cdot (t_* - t_0) + \gamma_i \cdot r + \delta_i \cdot l)$ .

Также используется дискретное представление [12, с. 64-69] функционала ошибки (4.6)

$$J(\bar{\alpha}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m) = \frac{1}{R_1} \cdot \sum_{i=1}^m \left( \beta_i \sum_{h=1}^M |f_i(\xi_h, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}', \dots, \hat{\mathbf{y}}^{(n)}, \bar{\alpha})|^2 + \right. \\ \left. + \gamma_i \sum_{j=0}^{r-1} \left| \hat{y}_i^{(j)}(t_0, \mathbf{w}_i) - y_{ji} \right|^2 + \delta_i \sum_{q=1}^l \left| \hat{y}_i(t_q, \mathbf{w}_i) - y_{qi}^e \right|^2 \right). \quad (4.7)$$

В данной формуле вектор-функция  $\mathbf{F}(t, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}', \dots, \hat{\mathbf{y}}^{(n)}, \alpha)$  вычисляется на множестве пробных (тестовых) точек  $\{\xi_h\}_{h=1}^M$ , генерируемых случайным образом по равномерному закону распределения на отрезке  $[t_0, t_*]$ ,  $M$  – количество пробных точек,  $R_1 = \sum_{i=1}^m (\beta_i \cdot M + \gamma_i \cdot r + \delta_i \cdot l)$ .

Для нахождения неизвестных параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  и нейросетевых коэффициентов  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  решается задача минимизации функционала ошибки (4.6) (или (4.7)) с учетом ограничений (4.3).

$$J(\alpha, \mathbf{w}) \xrightarrow{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m} \min. \quad (4.8)$$

В результате решения задачи (4.8) получим значения параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  и вектор настраиваемых параметров  $\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_m^*$ , которые доставляют минимум функционалу (4.6) (или (4.7)). Нейросетевое решение задачи запишется в виде

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t, \mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_m^*), \quad t \in [t_0, t_*].$$

Отметим, что минимизация функционала ошибки ведется не до глобального минимума, а до момента, когда его значение становится меньше наперед заданного значения точности  $\eta$ , т. е.  $J < \eta$ . Это значение функционала принимается за приближенное минимальное  $J_*$ . Для того, чтобы избежать остановки процесса минимизации в точке локального минимума, производится периодическая (после нескольких итераций алгоритма минимизации) регенерация пробных точек  $\{\xi_h\}_{h=1}^M$  [12, с. 65].

## 4.2 Идентификация параметров моделей ползучести

Используем описанный в разделе 4.1 подход для решения задачи идентификации параметров моделей, описывающих процессы деформирования и разрушения металлических конструкций в условиях ползучести.

### 4.2.1 Модель растяжение образцов из титанового сплава ЗВ

В качестве первой задачи рассмотрим построение модели для задачи одноосное растяжение прямоугольных плит толщиной 20 мм из анизотропного титанового сплава ЗВ при температуре  $T = 20^\circ \text{C}$  и постоянных напряжениях.

## Определяющие уравнения.

Для описания указанной выше задачи будем использовать конкретизацию определяющих соотношений энергетического варианта теории ползучести (1.11)-(1.13) вида (1.22). Функции  $\Psi(A, T)$  и  $f(\sigma, T)$  выберем в форме [95]:

$$\Psi(A, T) = A^{-\alpha} (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^{-m}, \quad f(\sigma, T) = B (\sigma - \sigma_c)^n, \quad (4.9)$$

где  $B$ ,  $n$ ,  $\alpha$ ,  $m$  – характеристики ползучести материала, зависящие в общем случае от температуры  $T$ ,  $\sigma_c$  – предел ползучести, т. е. такое значение напряжения ниже которого ползучести не наблюдается. Для данной задачи  $\sigma_c = 470.72$  МПа,  $A_* = 65.7$  МПа.

Подставляя функции (4.9) в систему (1.22), получим

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{B (\sigma - \sigma_c)^n}{A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dA}{dt}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Проведем обезразмеривание системы (4.10), полагая

$$\omega = \frac{A}{A_*}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_c}, \quad (4.11)$$

где  $\bar{\sigma}$  – безразмерное напряжение.

Применяя соотношения (4.11), придем к безразмерной системе вида

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega (\bar{\sigma} - 1)^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A_*}{\bar{\sigma} \cdot \sigma_c} \cdot \frac{d\omega}{dt}, \end{cases} \quad (4.12)$$

где  $B_\omega = B \cdot \sigma_c^n \cdot A_*^{-(\alpha+1)(m+1)}$ .

В качестве начальных условий для системы ОДУ (4.12) выберем (1.4).

При постоянном безразмерном напряжении  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 = \text{const}$  задача (4.12), (1.4) распадается на дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}. \quad (4.13)$$

с начальным условием

$$t = 0 : \omega(0) = 0. \quad (4.14)$$

и соотношение для определения деформации ползучести

$$\varepsilon(t) = \frac{A_*}{\bar{\sigma}_0 \cdot \sigma_c} \cdot \omega(t). \quad (4.15)$$

Используя результаты параграфа 1.3.1, запишем аналитическое решение задачи (4.13), (4.14) в виде

$$\omega(t) = \left( 1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (4.16)$$

Используя соотношения (4.11), (4.15), найдем также  $\varepsilon(t)$  и  $A(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{A_*}{\bar{\sigma}_0 \cdot \sigma_c} \left( 1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega(\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (4.17)$$

$$A(t) = A_* \left( 1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega(\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (4.18)$$

Значение длительной прочности  $t^*$  данной конструкции запишем в виде

$$t^* = [(m + 1)(\alpha + 1)B_\omega(\bar{\sigma}_0 - 1)^n]^{-1}. \quad (4.19)$$

### Идентификация параметров модели растяжения образцов из стали 3В

Для определения напряженно-деформированного состояния конструкции и ее прочностных характеристик в рассматриваемом случае достаточно определить параметры начальной задачи (4.13)–(4.14), т. е. найти выражение для  $\omega(t)$ . В качестве одного из возможных подходов, используем аналитическое решение (4.16) для решения задачи идентификации.

Обозначим

$$f(t, \omega, B_\omega, \alpha, m, n) = \omega(t) - \left( 1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega(\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = 0.$$

Можно увидеть, что описанная задача по структуре схожа с задачей (4.1)–(4.2) в случае вырождения системы ОДУ в одно нелинейное уравнение ( $m = 1, r = 0, p = 4, y(t) = \omega(t)$ ). Поэтому будем проводить идентификацию параметров модели, используя подход, описанный в разделе 4.1. В качестве дополнительных данных будем использовать результаты эксперимента по одноосному растяжению прямоугольных образцов из анизотропного сплава 3В при  $T = 20^\circ \text{C}$  для некоторого уровня безразмерного напряжения  $\bar{\sigma}_0$  [95]

$$\omega(t_q) = \omega_q, \quad t_q \in (0, t^*], \quad q = 1, \dots, l, \quad (4.20)$$

где  $t_q$  – момент времени снятия  $q$ -го экспериментального значения,  $\omega_q$  – экспериментальное значение параметра поврежденности в момент времени  $t_q$ ,  $l$  – количество экспериментальных точек.

Разложение по нейросетевому базису для данной задачи запишем в виде

$$\hat{\omega}(t, \mathbf{c}, \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^N c_j (a_{j1}t + a_{j2} + 1)^{-1} \text{th}(a_{j3}t + a_{j4}) \sqrt{a_{j5}t + a_{j6} + 1}, \quad (4.21)$$

где  $\mathbf{c} = \{c_j\}$ ;  $\mathbf{A} = \{a_{ji}\}$ ;  $i = 1, \dots, 6$ ;  $j = 1, \dots, N$  – вектор и прямоугольная матрица нейросетевых коэффициентов.

Используя нейросетевое разложение (4.21), выражение для параметра поврежденности (4.16) и экспериментальные данные для некоторого значения безразмерного напряжения  $\bar{\sigma}_0$  (4.20), запишем нормированный функционал ошибки (4.7) в виде

$$\begin{aligned}
J(B_\omega, n, \alpha, m, \mathbf{c}, \mathbf{A}) &= \frac{1}{\delta \cdot M + \delta_1 \cdot N} \times \\
&\times \left\{ \delta \sum_{h=1}^M \left[ \hat{\omega}(t, \mathbf{c}, \mathbf{A}) - \left( 1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega(\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\alpha+1} \right]^2 \right\}_{t=\xi_h} + \\
&+ \delta_1 \sum_{q=0}^l |\hat{\omega}(t_q, \mathbf{c}, \mathbf{A}) - \omega_q|^2 \}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Здесь  $\{\xi_h\}_{h=1}^M$  – набор пробных точек, равномерно распределенных на отрезке  $[0, t^*]$ , выражение под знаком первой суммы берется в точке  $t = \xi_h$ ,  $M$  – количество пробных точек,  $\delta, \delta_0$  – положительные штрафные множители.

Для идентификации параметров  $B_\omega, n, \alpha, m$  решается задача минимизации

$$J(B_\omega, n, \alpha, m, \mathbf{c}, \mathbf{A}) \xrightarrow[\mathbf{c}, \mathbf{A}]{B_\omega, n, \alpha, m} \min. \tag{4.23}$$

Учитывая особенности протекания процесса деформирования, на параметры модели необходимо наложить следующие ограничения

$$B_\omega > 0, n > 1, \alpha > 1, m > 1. \tag{4.24}$$

Получим задачу минимизации с ограничениями типа неравенств (4.23)-(4.24), в результате решения которой найдем значения параметров  $B_\omega, n, \alpha, m$  и коэффициенты нейросетевого разложения  $\mathbf{c}^*, \mathbf{A}^*$ , доставляющие минимум функционалу (4.22). Подставляя полученные нейросетевые коэффициенты в (4.21), найдем нейросетевое решение задачи.

Далее рассмотрено одноосное растяжение прямоугольных образцов из анизотропного титанового сплава ЗВ. При расчете используются образцы двух типов [95]: **1)** вырезанные в направлении прокатки листа (продольные образцы), **2)** вырезанные в направлении перпендикулярном к направлению прокатки (поперечные образцы). Идентификация параметров ОДУ (4.13) проводится для трех начальных значений безразмерных напряжений  $\bar{\sigma}_0 = 1.25; 1.28; 1.31$  в случае продольных образцов и для  $\bar{\sigma}_0 = 1.35$  в случае поперечных образцов. Число базисных функций в нейросетевых разложениях, количество пробных и экспериментальных точек, значения штрафных множителей, а также другие параметры нейросети приведены в таблице 31.

Таблица 31. Параметры нейросети для задачи (4.23)-(4.24)

$\bar{\sigma}_0$ , МПа	$\delta$	$\delta_1$	$N$	$M$	$l$	$\eta$
Продольные образцы						
1.25	$10^5$	$10^6$	4	1000	20	$5 \cdot 10^{-4}$
1.27	$10^5$	$10^6$	4	1000	10	$5 \cdot 10^{-4}$
1.31	$10^5$	$10^6$	4	1000	17	$5 \cdot 10^{-4}$
Поперечные образцы						
1.35	$10^5$	$10^6$	4	1000	26	$5 \cdot 10^{-4}$

Все данные экспериментов [95] приводятся в таблицах 50-53 приложения Б.

Задача минимизации (4.23)-(4.24) решалась в среде Mathcad 14 встроенным методом сопряженных градиентов [77, с. 351-354]. Параметры, входящие в уравнение (4.13), полученные в результате решения задачи (4.23)-(4.24) и приведенные в работе [95], представлены в таблице 32.

Таблица 32. Характеристики ползучести для задачи (4.13)–(4.14)

Результаты	$\bar{\sigma}_0$	$B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n, \text{ч}^{-1}$	$\alpha$	$m$
Продольные образцы				
Статья [95]	1.25	$2.20537 \cdot 10^{-6}$	2.5	7
	1.28	$8.59208 \cdot 10^{-6}$		
	1.31	$2.91435 \cdot 10^{-5}$		
Задача (4.23)-(4.24)	1.25	$2.3295 \cdot 10^{-6}$	2.499	6.592
	1.28	$3.00622 \cdot 10^{-6}$	3.505	20.402
	1.31	$2.1046 \cdot 10^{-5}$	2.83	8.549
Поперечные образцы				
Статья [95]	1.35	$4.56195 \cdot 10^{-6}$	2.5	7
Задача (4.23)-(4.24)	1.35	$1.81374 \cdot 10^{-6}$	3.437	19.934

В таблице 33 приведены основные данные о процессе деформирования, где  $\varepsilon_a^*$ ,  $A_a^*$  и  $t_a^*$  – точные значения деформации ползучести, удельной работы рассеяния в момент разрушения и длительной прочности соответственно,  $\delta t_a^*$  – относительная погрешность точного аналитического значения длительной прочности по отношению к экспериментальному,  $J_*$  – результирующее значение функционала ошибки. Точные решения рассчитывались по формулам (4.16)–(4.19).

Таблица 33. Основные сведения о процессе деформирования для задачи (4.13)–(4.15)

$\bar{\sigma}_0$	Результаты	$t_a^*, \text{ч}$	$\varepsilon_a^*$	$A_a^*, \text{МДж/м}^3$	$\delta t_a^*, \%$	$J_* \cdot 10^5$
Продольные образцы						
1.25	Параметры [95]	16194.2	0.1117	65.7	0.167	–
	Задача (4.23)-(4.24)	16159.8	0.1117	65.7	0.046	12.83
	Эксперимент [95]	16167.2	–	–	–	–
1.28	Параметры [95]	4156.7	0.109	65.7	20.463	–
	Задача (4.23)-(4.24)	3450.1	0.109	65.7	0.014	4.329
	Эксперимент [95]	3450.6	–	–	–	–
1.31	Параметры [95]	1225.5	0.1065	65.7	5.984	–
	Задача (4.23)-(4.24)	1299.2	0.1065	65.7	0.33	6.663
	Эксперимент [95]	1303.5	–	–	–	–
Поперечные образцы						
1.35	Параметры [95]	7828.7	0.1034	65.7	31.531	–
	Задача (4.23)-(4.24)	5935.9	0.1034	65.7	0.27	3.781
	Эксперимент [95]	5952	–	–	–	–

Ниже приводятся нейросетевые решения вида (4.21) для задачи (4.13)–(4.14):

$$\begin{aligned}
\omega_{1.25}(t) = & -0.021 \cdot \frac{\text{th}(1.135 \cdot 10^{-3} \cdot t + 0.029) \cdot \sqrt{0.069 \cdot t + 1.019}}{6.226 \cdot 10^{-4} \cdot t + 1.038} - \\
& - 0.028 \cdot \frac{\text{th}(0.202 \cdot t + 0.044) \cdot \sqrt{0.037 \cdot t + 1.063}}{5.632 \cdot 10^{-5} \cdot t - 2.121} + \\
& + 0.082 \cdot \frac{\text{th}(0.176 \cdot t + 0.059) \cdot \sqrt{0.02 \cdot t + 1.123}}{3.068 \cdot 10^{-4} \cdot t + 1.09} - \\
& - 2.659 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{th}(0.03 \cdot t + 0.201) \cdot \sqrt{-1.039 \cdot 10^{-5} \cdot t + 1.072}}{1.987 \cdot 10^{-4} \cdot t - 3.222};
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{1.28}(t) = & -0.121 \cdot \frac{\text{th}(0.02 \cdot t + 0.576) \cdot \sqrt{-4.727 \cdot 10^{-4} \cdot t + 2.05}}{2.45 \cdot 10^{-4} \cdot t - 1.064} + \\
& + 0.055 \cdot \frac{\text{th}(0.344 \cdot t + 0.096) \cdot \sqrt{0.243 \cdot t + 1.371}}{5.544 \cdot 10^{-4} \cdot t + 3.489} - \\
& - 0.066 \cdot \frac{\text{th}(0.852 \cdot t + 2.268) \cdot \sqrt{0.241 \cdot t + 2.256}}{8.185 \cdot t + 1.146} - \\
& - 3.827 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{th}(0.161 \cdot t + 0.814) \cdot \sqrt{1.182 \cdot 10^{-3} \cdot t + 1.254}}{2.539 \cdot 10^{-3} \cdot t - 8.82};
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{1.31}(t) = & 0.314 \cdot \frac{\text{th}(0.152 \cdot t + 0.21) \cdot \sqrt{0.059 \cdot t + 4.032}}{8.913 \cdot 10^{-4} \cdot t + 5.194} - \\
& - 0.033 \cdot \frac{\text{th}(0.013 \cdot t + 0.287) \cdot \sqrt{-3.522 \cdot 10^{-3} \cdot t + 5.137}}{4.781 \cdot 10^{-4} \cdot t - 0.7} + \\
& + 0.015 \cdot \frac{\text{th}(1.294 \cdot t - 0.067) \cdot \sqrt{0.199 \cdot t + 1.534}}{0.449 \cdot t + 2.811} - \\
& - 2.325 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{th}(0.173 \cdot t + 0.81) \cdot \sqrt{-9.638 \cdot 10^{-5} \cdot t + 1.133}}{3.074 \cdot 10^{-3} \cdot t - 4.018};
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{1.35}(t) = & -0.012 \cdot \frac{\text{th}(2.784 \cdot 10^{-5} \cdot t - 0.128) \cdot \sqrt{5.411 \cdot 10^{-4} \cdot t + 1.019}}{1.918 \cdot 10^{-4} \cdot t - 1.147} - \\
& - 0.012 \cdot \frac{\text{th}(1.235 \cdot t - 0.029) \cdot \sqrt{0.466 \cdot t + 0.9994}}{1.526 \cdot 10^{-4} \cdot t - 1.262} + \\
& + 0.135 \cdot \frac{\text{th}(1.717 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0.137) \cdot \sqrt{2.034 \cdot t + 0.696}}{4.915 \cdot 10^{-3} \cdot t + 1.0069} + \\
& + 6.481 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{th}(0.797 \cdot t - 13.253) \cdot \sqrt{0.353 \cdot t + 1.17}}{8.068 \cdot 10^{-5} \cdot t - 0.666}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

**Замечание 4.1.** Рассмотренная выше задача (4.23)–(4.24) является по сути задачей вариационного исчисления. Но и этот класс задач входит как частный случай в описанную общую нейросетевую методологию.

Графики аналитических решений для параметра поврежденности показаны на рис. 4.1, где результаты эксперимента обозначены точками (продольные образцы) и квадратами (поперечные образцы), непрерывная линия – зависимость, построенная по результатам работы [95], пунктирная линия – результаты полученные при решении задачи (4.23)–(4.24).

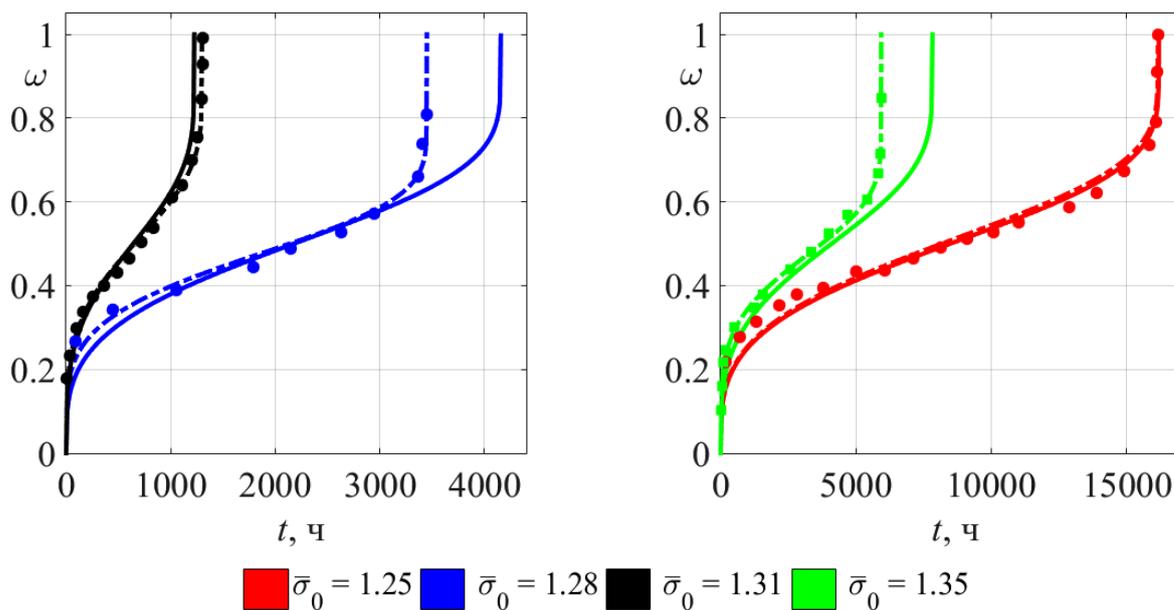


Рис. 4.1. Зависимость параметра поврежденности от времени, аналитические решения

На рис. 4.2 штрих-пунктирной линией изображены нейросетевые решения (4.25)-(4.28) для параметра поврежденности, остальные обозначения аналогичны используемым на рис. 4.1.

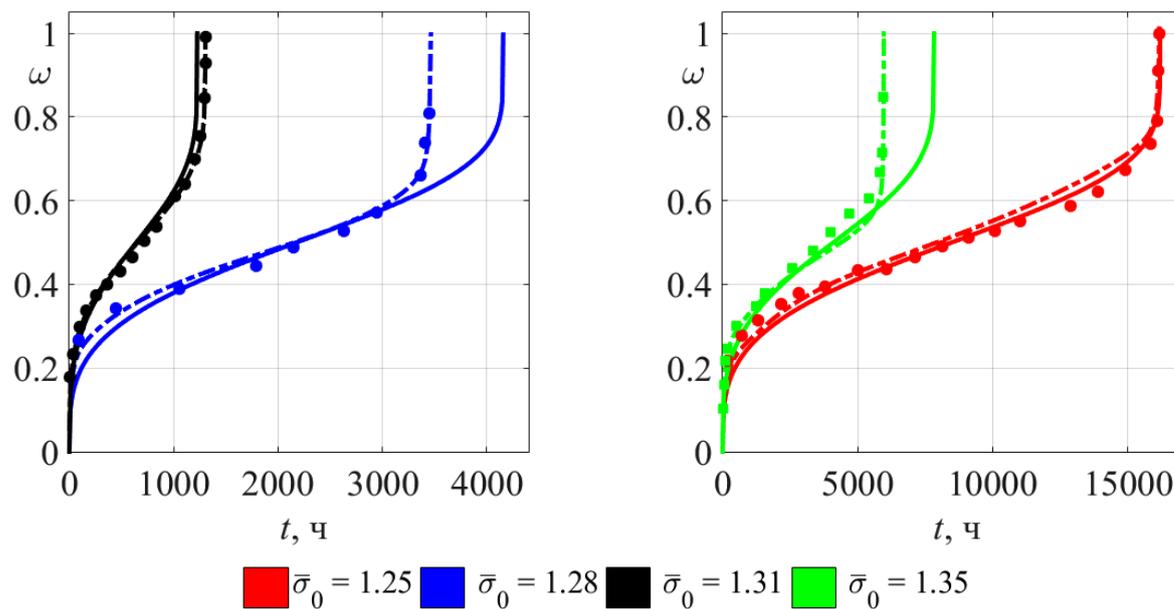


Рис. 4.2. Зависимость параметра поврежденности от времени, нейросетевые решения

Таким образом, нейросетевой подход, описанный в разделе 4.1, дает возможность определить значения параметров, входящих в уравнение (4.23). Кроме того, в результате решения оптимизационной задачи (4.23)-(4.24) получены коэффициенты нейросетевого разложения (4.21) и нейросетевые решения рассматриваемой задачи (4.25)-(4.28), являющиеся непрерывными функциями аргумента  $t$ .

## 4.2.2 Модель растяжения образцов из стали 45

В параграфе 1.3.1 рассматривалась задача растяжения цилиндрических образцов из стали 45 при постоянных температуре и напряжениях, описываемая определяющими соотношениями (1.34) с начальными условиями (1.4). Определим параметры системы (1.34). Для этого можно как и в параграфе 4.2.1 использовать аналитическое решение начальной задачи (1.34), (1.4), определяемое соотношениями (1.36), (1.37) и (1.39). Однако для большинства практических задач аналитическое решение найти трудно или невозможно. Поэтому для идентификации модели будем использовать непосредственно уравнения системы (1.34), аналитическое решение же будем использовать как эталон для сравнения.

Введем обозначения:

$$\mathbf{y}(t) = (\varepsilon(t), \omega(t))^T, \\ f_1(\mathbf{y}, \mathbf{y}', B_\varepsilon, \alpha, m, n) = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad f_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}', B_\omega, \alpha, m, k) = \frac{d\omega}{dt} - \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}.$$

Система ОДУ (1.34) с начальными условиями (1.4) по структуре схожа с задачей (4.1)-(4.2) ( $m = 2, r = 1, p = 6$ ), поэтому будем проводить идентификацию параметров системы (1.34), используя подход, описанный в разделе 4.1. В качестве дополнительных данных будем использовать результаты эксперимента на одноосное растяжение цилиндрических образцов из стали 45 при некотором уровне напряжения  $\sigma_0$  и температуре  $T = 850^\circ\text{C}$  [22]

$$\varepsilon(t_q) = \varepsilon_q, \quad \omega(t_q) = \omega_q, \quad t_q \in (0, t^*], \quad q = 1, \dots, l,$$

где  $t_q$  – момент времени снятия  $q$ -го экспериментального значения,  $\varepsilon_q$  и  $\omega_q$  – экспериментальное значение деформации ползучести и параметра поврежденности в момент времени  $t_q$  соответственно.

Используя в нейросетевом разложении (4.5) базисные функции специального вида, мы получим

$$\hat{\varepsilon}(t, \mathbf{c}, \mathbf{A}) = \sum_{j_1=1}^{N_1} c_{j_1} \frac{\text{th}(a_{1j_1}t + a_{2j_1})}{(1 + a_{3j_1}t + a_{4j_1})}, \quad \hat{\omega}(t, \mathbf{b}, \mathbf{D}) = \sum_{j_2=1}^{N_2} b_{j_2} \frac{\text{th}(d_{1j_2}t + d_{2j_2})}{(1 + d_{3j_2}t + d_{4j_2})}, \quad (4.29)$$

Здесь  $\mathbf{c} = \{c_{j_1}\}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_{j_2}\}$  – векторы линейно входящих параметров,  $\mathbf{A} = \{a_{ij_1}\}$ ,  $\mathbf{D} = \{d_{ij_2}\}$  – матрицы нелинейно входящих параметров,  $i = 1, \dots, 4$ .

Для задачи (1.34), (1.4) функционал ошибки (4.7) запишется в виде

$$J(B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m, \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}) = \frac{1}{R'} \cdot \left\{ \delta \sum_{h=1}^M \left[ \left| \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} - \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\hat{\omega}^\alpha (1 - \hat{\omega}^{\alpha+1})^m} \right|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left| \frac{d\hat{\omega}}{dt} - \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\hat{\omega}^\alpha (1 - \hat{\omega}^{\alpha+1})^m} \right|^2 \right] \right|_{t=\xi_h} + \delta_1 |\hat{\varepsilon}(0, \mathbf{c}, \mathbf{A})|^2 + \delta_2 |\hat{\omega}(0, \mathbf{b}, \mathbf{D})|^2 + \\ \left. + \delta_3 \sum_{q=1}^l |\hat{\varepsilon}(t_q, \mathbf{c}, \mathbf{A}) - \varepsilon_q|^2 + \delta_4 \sum_{q=1}^l |\hat{\omega}(t_q, \mathbf{b}, \mathbf{D}) - \omega_q|^2 \right\}. \quad (4.30)$$

Здесь  $\{\xi_h\}_{h=1}^M$  – набор пробных точек, равномерно распределенных на отрезке  $[0, t^*]$ , выражение под знаком первой суммы берется в точке  $t = \xi_h$ ,  $R' = 2 \cdot \delta \cdot M + \delta_1 + \delta_2 + (\delta_3 + \delta_4) \cdot l$ ,  $\delta, \delta_1, \dots, \delta_4$  – положительные штрафные множители.

Для идентификации параметров  $B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m$  решается задача

$$J(B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m, \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}) \xrightarrow{\substack{B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m \\ \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}}} \min. \quad (4.31)$$

Учитывая особенности протекания процесса деформирования, на параметры модели необходимо наложить следующие ограничения

$$B_\varepsilon > 0, B_\omega > 0, n > 0, k > 0, \alpha > 0, m > 0. \quad (4.32)$$

Имеем задачу минимизации с ограничениями типа неравенств (4.31)-(4.32), в результате решения которой найдем значения параметров  $B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m$  и коэффициенты нейросетевого разложения  $\mathbf{c}^*, \mathbf{A}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{D}^*$ , доставляющие минимум функционалу (4.30). Подставляя нейросетевые коэффициенты в (4.29), получим нейросетевое решение задачи.

Идентификация параметров системы ОДУ (1.34) проводится для трех значений напряжений  $\sigma_0 = 35, 40, 45$  МПа. Число базисных функций в нейросетевых разложениях, количество пробных и экспериментальных точек, значения штрафных множителей, а также другие параметры нейросети приведены в таблице 34.

Таблица 34. Параметры нейросети для задачи (4.31)-(4.32)

$\sigma_0$ , МПа	$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$N_1$	$N_2$	$M$	$l$	$\eta \cdot 10^4$
35	10	10	10	10	10	3	3	30	14	5
40	1	1	1	1	1	4	3	20	10	5
45	$10^4$	$10^5$	$10^5$	$10^5$	$10^5$	4	3	20	12	5

Экспериментальные данные для деформации ползучести взяты из работы [22], для параметра поврежденности результаты эксперимента пересчитаны по формуле  $\omega = \varepsilon/\varepsilon_a^*$ . Экспериментальные данные для стали 45 приведены в таблицах 47-49 приложения Б.

Задача минимизации (4.31)-(4.32) решалась в среде Mathcad 14 встроенным методом сопряженных градиентов [77, с. 351-354]. Параметры, входящие в систему (1.34), полученные при решении задачи (4.31)-(4.32) и приведенные в работе [22], представлены в таблице 35.

Таблица 35. Характеристики ползучести для задачи (1.34), (1.4)

Результаты	$\sigma_0$ , МПа	$B_\varepsilon \sigma_0^n, \text{ч}^{-1}$	$B_\omega \sigma_0^k, \text{ч}^{-1}$	$\alpha$	$m$
Статья [22]	35	0.0115297	0.0201714	0.849	2.83
	40	0.0340058	0.0511611		
	45	0.0882853	0.1162713		
Задача (4.31)-(4.32)	35	0.0079387	0.0156534	0.9468	3.8725
	40	0.0382844	0.061904	0.806	1.966
	45	0.1602613	0.2551528	0.2971	1.4793

В таблице 36 приведены данные о процессе деформирования, обозначения аналогичны используемым в таблице 33,  $\delta\varepsilon_*$  – относительная погрешность деформации ползучести в момент разрушения по отношению к экспериментальному значению и  $t_c$  – время счета.

Таблица 36. Основные сведения о процессе деформирования для задачи (1.34), (1.4)

Результаты	$t_a^*$ , ч	$\varepsilon_a^*$	$\delta t_a^*$ , %	$\delta\varepsilon_a^*$ , %	$J_* \cdot 10^5$	$t_c$ , с
$\sigma_0 = 35$ МПа						
Параметры [22]	7.0005	0.5716	4.392	10.775	–	–
Задача (4.31)-(4.32)	6.7347	0.5072	0.428	1.705	4.691	934
Эксперимент [22]	6.706	0.516	–	–	–	–
$\sigma_0 = 40$ МПа						
Параметры [22]	2.7601	0.6647	7.379	7.906	–	–
Задача (4.31)-(4.32)	3.0157	0.6184	1.198	0.39	12.517	762
Эксперимент [22]	2.98	0.616	–	–	–	–
$\sigma_0 = 45$ МПа						
Параметры [22]	1.2145	0.7593	0.782	19.953	–	–
Задача (4.31)-(4.32)	1.2187	0.6281	0.433	0.774	17.16	973
Эксперимент [22]	1.224	0.633	–	–	–	–

Ниже приводятся нейросетевые решения вида (4.29) для деформации ползучести

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{35}(t) &= \frac{0.112 \cdot \text{th}(0.496 \cdot t + 0.047)}{0.93 - 0.088 \cdot t} + \frac{7.022 \cdot 10^{-3} \cdot \text{th}(0.019 \cdot t + 0.167)}{1.629 - 0.241 \cdot t} + \\
&+ \frac{0.022 \cdot \text{th}(9.197 \cdot t + 1.65 \cdot 10^{-3})}{1.091 - 0.017 \cdot t}, \\
\hat{\varepsilon}_{40}(t) &= \frac{0.172 \cdot \text{th}(1.034 \cdot t + 6.096 \cdot 10^{-3})}{0.951 + 0.754 \cdot t} - \frac{346.182 \cdot \text{th}(-0.103 \cdot t + 2.26 \cdot 10^{-4})}{351.428 - 33.064 \cdot t} - \\
&- \frac{2.297 \cdot \text{th}[(4.289 \cdot t + 2.292) \cdot 10^{-3}]}{1.922 + 5.239 \cdot 10^{-3} \cdot t} + \frac{2.356 \cdot 10^{-3} \cdot \text{th}(2.804 \cdot t + 0.289)}{1.957 - 0.652 \cdot t}, \\
\hat{\varepsilon}_{45}(t) &= \frac{0.065 \cdot \text{th}(1.826 \cdot 10^{-3} \cdot t + 0.026)}{1.221 + 0.127 \cdot t} + \frac{0.669 \cdot \text{th}(0.012 \cdot t - 2.744 \cdot 10^{-3})}{0.937 - 0.734 \cdot t} + \\
&+ \frac{24.711 \cdot \text{th}(0.183 \cdot t + 0.027)}{0.868 - 8.041 \cdot 10^{-4} \cdot t} + \frac{5.789 \cdot \text{th}(-0.814 \cdot t - 0.137)}{1.034 - 0.26 \cdot t}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

и параметра поврежденности

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_{35}(t) &= -\frac{0.241 \cdot \text{th}(-0.426 \cdot t - 0.034)}{1.1 - 0.106 \cdot t} + \frac{6.1 \cdot \text{th}(0.013 \cdot t - 1.256 \cdot 10^{-5})}{0.131 + 1.109 \cdot t} + \\
&+ \frac{0.023 \cdot \text{th}(0.032 \cdot t + 4.209 \cdot 10^{-3})}{1.959 - 0.29 \cdot t}, \\
\hat{\omega}_{40}(t) &= \frac{1.24 \cdot 10^{-3} \cdot \text{th}(0.224 \cdot t - 0.059)}{0.417 - 0.139 \cdot t} + \frac{0.338 \cdot \text{th}(0.14 \cdot t + 2.207 \cdot 10^{-3})}{0.626 - 0.107 \cdot t} - \\
&- \frac{0.078 \cdot \text{th}[-443.594 \cdot t + 9.983] \cdot 10^{-5}}{(7.328 + 8.929t) \cdot 10^{-4}}, \\
\hat{\omega}_{45}(t) &= \frac{6.316 \cdot \text{th}(0.108 \cdot t + 5.949 \cdot 10^{-4})}{0.998 + 7.411 \cdot t} + \frac{0.032 \cdot \text{th}(0.246 \cdot t + 9.74 \cdot 10^{-4})}{0.992 - 0.783 \cdot t} + \\
&+ \frac{1.384 \cdot \text{th}(0.253 \cdot t - 2.433 \cdot 10^{-5})}{1.001 - 0.28 \cdot t}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Графики зависимостей деформации ползучести и параметра поврежденности от времени, построенные по формулам (1.36), (1.37), показаны на рис. 4.3, где точками обозначены результаты эксперимента, непрерывные и штрих-пунктирные линии – аналитические зависимости, соответствующие параметрам модели, полученным в работе [22] и при решении задачи (4.31)-(4.32) соответственно.

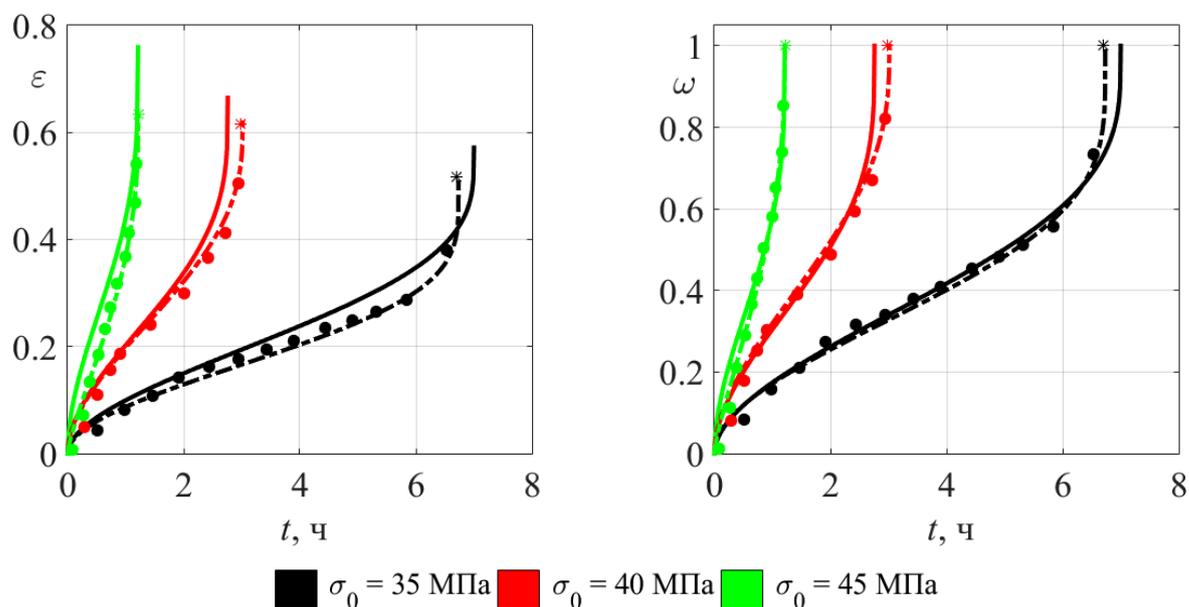


Рис. 4.3. Зависимость деформации ползучести и параметра поврежденности от времени

На рис. 4.4 представлены нейросетевые решения (4.33)-(4.34), изображаемые штрих-пунктирными линиями, остальные обозначения сохраняются.

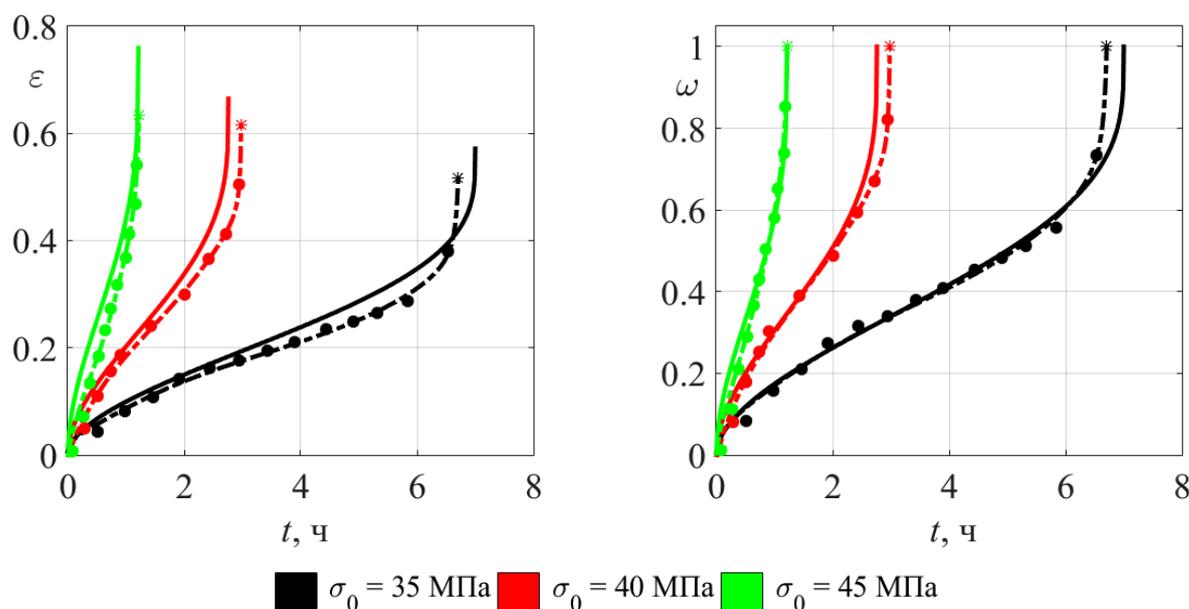


Рис. 4.4. Нейросетевые решения для деформации ползучести и параметра поврежденности

### 4.2.3 Комбинация искусственных нейронных сетей и продолжения решения по параметру

В параграфе 1.3.1 отмечалось, что задача (1.34), (1.4) имеет две предельные особые точки в начальный момент времени и при разрушении. Метод нейронных сетей позволяет обойти данную особенность и получить параметры модели, а также приближенное решение данной задачи. Однако особенность остается, и можно ожидать, что если нам удастся устранить ее, то это позволит сократить временные затраты на минимизацию функционала ошибки и использовать более простые формы активационной функции в (4.29). Для этой цели будем использовать метод продолжения решения по аргументу  $\kappa$ , предложенному в главе 3, так как он позволяет получить ряд преимуществ, указанных в параграфе 3.2.4.

Для задачи (1.34), (1.4) будем использовать аргумент  $\kappa$  вида (3.62), параметризованная задача для которого запишется в форме (3.63), (2.14).

Определим параметры системы (3.63), используя метод нейронных сетей. Выбирая активационную функцию в форме гиперболического тангенса и обозначая линейные и нелинейные параметры разложения для времени за  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{S}$ , запишем разложения (4.5) в виде

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(\kappa, \mathbf{c}, \mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^{N_1} c_j \cdot \text{th}(a_{0j}\kappa + a_{1j}), & \hat{\omega}(\kappa, \mathbf{b}, \mathbf{D}) &= \sum_{j=1}^{N_2} b_j \cdot \text{th}(d_{0j}\kappa + d_{1j}), \\ \hat{t}(\kappa, \mathbf{r}, \mathbf{S}) &= \sum_{j=1}^{N_3} r_j \cdot \text{th}(s_{0j}\kappa + s_{1j}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Для задачи (3.63), (2.14) функционал ошибки (4.7) запишется в виде

$$\begin{aligned} J_p(B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m, \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}, \mathbf{r}, \mathbf{S}) &= \frac{1}{R''} \cdot \left\{ \delta_0 \sum_{h=1}^M \left[ \left| \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\kappa} - \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{1 + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}} \right|^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left| \frac{d\hat{\omega}}{d\kappa} - \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{1 + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}} \right|^2 + \left| \frac{d\hat{t}}{d\kappa} - \frac{\hat{\omega}^\alpha (1 - \hat{\omega}^{\alpha+1})^m}{\sqrt{1 + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}} \right|^2 \right] \Big|_{t=\xi_h} + \\ &+ \delta_1 |\hat{\varepsilon}(0, \mathbf{c}, \mathbf{A})|^2 + \delta_2 |\hat{\omega}(0, \mathbf{b}, \mathbf{D})|^2 + \delta_3 |\hat{t}(0, \mathbf{r}, \mathbf{S})|^2 + \\ &+ \delta_4 \sum_{q=1}^l |\hat{\varepsilon}(\kappa_q, \mathbf{c}, \mathbf{A}) - \varepsilon_q|^2 + \delta_5 \sum_{q=1}^l |\hat{\omega}(\kappa_q, \mathbf{b}, \mathbf{D}) - \omega_q|^2 + \delta_6 \sum_{q=1}^l |\hat{t}(\kappa_q, \mathbf{r}, \mathbf{S}) - t_q|^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Здесь  $R'' = 3 \cdot \delta \cdot M + \sum_{i=1}^3 \delta_i + l \cdot \sum_{i=4}^6 \delta_i$ ,  $\{\xi_h\}_{h=1}^M$  – набор пробных точек, равномерно распределенных на отрезке  $[0, \kappa_*]$ ,  $\delta_0, \dots, \delta_6$  – положительные штрафные множители,  $\kappa_*$  вычисляется по формуле (3.65), выражение для значения параметра  $\kappa_q$  в экспериментальных точках имеет вид

$$\kappa_q = \frac{\omega_q \cdot \sqrt{1 + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}{B_\omega \sigma_0^k} = \frac{\varepsilon_q \cdot \sqrt{1 + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}{B_\varepsilon \sigma_0^n}.$$

Для идентификации параметров  $B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m$  решается задача

$$J_p(B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m, \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}, \mathbf{r}, \mathbf{S}) \xrightarrow{\substack{B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m \\ \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}, \mathbf{r}, \mathbf{S}}} \min. \quad (4.36)$$

с ограничениями типа неравенств (4.32).

В качестве демонстрации данного подхода решим задачу минимизации (4.36), (4.32) только для начального значения напряжения  $\sigma_0 = 35$  МПа в среде Mathcad 14 встроенным методом сопряженных градиентов [77, с. 351-354]. Число базисных функций в нейросетевых разложениях, количество пробных и экспериментальных точек, значения штрафных множителей, а также другие параметры нейросети для параметризованной задачи приведены в таблице 37.

Таблица 37. Параметры нейросети для параметризованной задачи

$\delta_0$	$\delta_i, i = 1, \dots, 6$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$M$	$l$	$\eta$
10	100	1	1	2	20	14	$5 \cdot 10^{-4}$

Материальные константы, входящие в систему (3.63) при  $\sigma_0 = 35$  МПа, полученные в результате решения задачи (4.36), (4.32) и приведенные в работе [22], даны в таблице 38.

Таблица 38. Характеристики ползучести для параметризованной задачи

Результаты	$B_\varepsilon \sigma_0^n, \text{ч}^{-1}$	$B_\omega \sigma_0^k, \text{ч}^{-1}$	$\alpha$	$m$
Статья [22]	0.0115297	0.0201714	0.849	2.83
Задача (4.36), (4.32)	0.0108111	0.02085	0.8107	2.9025

В таблице 39 даны основные сведения о процессе деформирования для задачи (3.63), (2.14) при  $\sigma_0 = 35$  МПа. Обозначения аналогичны используемым в таблице 36.

Таблица 39. Основные сведения о процессе деформирования для задачи (3.63), (2.14)

Результаты	$t_a^*, \text{ч}$	$\varepsilon_a^*$	$\delta t_a^*, \%$	$\delta \varepsilon_a^*, \%$	$J_* \cdot 10^5$	$t_c, \text{с}$
Статья [22]	7.0005	0.5716	4.392	10.775	—	—
Задача (4.36), (4.32)	6.7874	0.5185	1.214	0.484	7.061	385
Эксперимент [22]	6.706	0.516	—	—	—	—

Нейросетевое решение задачи (3.63), (2.14) вида (4.35) для  $\sigma_0 = 35$  МПа запишем в форме

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(\kappa) &= 1.227 \cdot \text{th}(9.157 \cdot 10^{-3} \kappa + 4.833 \cdot 10^{-3}); \\ \hat{\omega}(\kappa) &= 2.327 \cdot \text{th}(9.494 \cdot 10^{-3} \kappa + 2.259 \cdot 10^{-3}); \\ \hat{t}(\kappa) &= 3.656 \cdot \text{th}(0.072 \kappa + 1.065) + 3.069 \cdot \text{th}(0.099 \kappa - 1.722). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Графики зависимостей деформации ползучести и параметра поврежденности от времени для задачи (3.63), (2.14) для  $\sigma_0 = 35$  МПа представлены на рис. 4.5, обозначения аналогичны используемым на рис. 4.3.

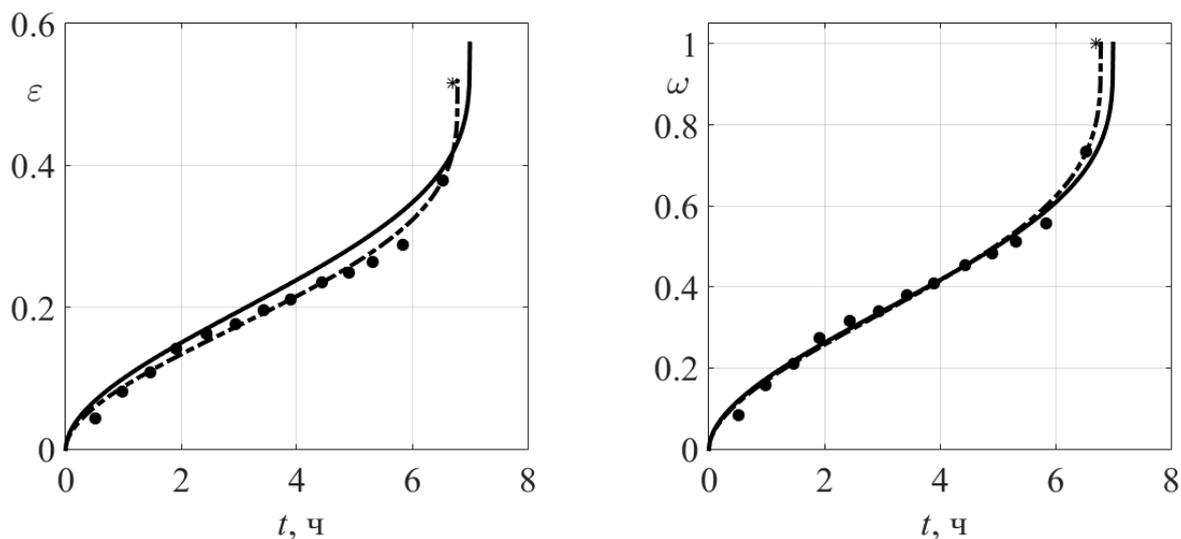


Рис. 4.5. Зависимость деформации ползучести и параметра поврежденности от времени

На рис. 4.6 представлены нейросетевые решения (4.37) для  $\sigma_0 = 35$  МПа, изображаемые штрих-пунктирными линиями, остальные обозначения сохраняются.

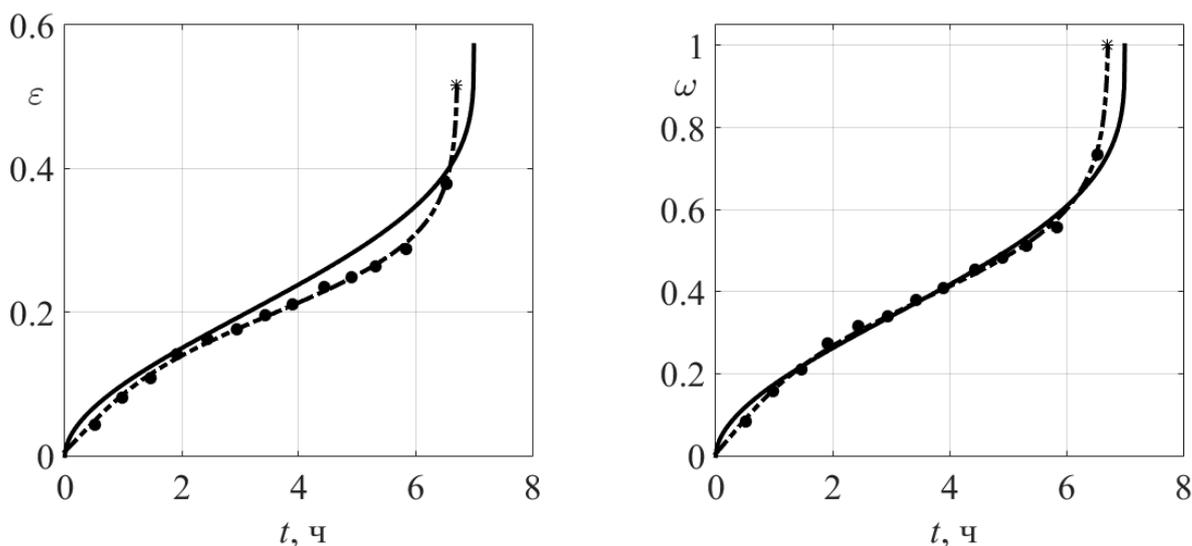


Рис. 4.6. Нейросетевые решения для деформации ползучести и параметра поврежденности

### 4.3 Определение установившегося напряженно-деформированного состояния во вращающемся диске

Помимо применения нейросетевого моделирования к определению параметров моделей, описывающих процессы ползучести и разрушения металлических конструкций, рассмотрим также решение задачи определения установившегося напряженно-деформированного состояния в равномерно прогретом вращающемся диске постоянной толщины при учете ползучести материала. Для данной задачи нейросетевой подход позволяет преодолеть трудности, возникающие при использовании традиционных методов решения, которые связаны с неполностью заданными граничными условиями.

### 4.3.1 Постановка задачи

Для определения установившегося напряженно-деформированного состояния при ползучести в сплошном равномерно прогретом диске постоянной толщины из титанового сплава ОТ-4, широко применяемого в авиации, будем использовать уравнения энергетического варианта теории ползучести в форме [90]

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{K e^{\beta\sigma_i}}{(A_* - A)^m}, \\ \eta_r = \varkappa \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi}{2\sigma_i}, \\ \eta_\varphi = \varkappa \frac{2\sigma_\varphi - \sigma_r}{2\sigma_i}, \end{cases} \quad (4.38)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\varphi$  – радиальная и тангенциальная компоненты напряжений,  $\eta_r, \eta_\varphi$  – радиальная и тангенциальная компоненты скоростей деформации,  $K, \beta, m$  – материальные константы,  $\varkappa$  – коэффициент пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформации,  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_\varphi\sigma_r + \sigma_\varphi^2}$  – интенсивность напряжения.

При определении установившегося напряженно-деформированного состояния обычно не предполагается переход ползучести в третью стадию, т. е. разрушение диска не происходит. Поэтому можно переписать систему (4.38) в виде

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{K e^{\beta\sigma_i}}{A_*^m}, \\ \eta_r = \varkappa \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi}{2\sigma_i}, \\ \eta_\varphi = \varkappa \frac{2\sigma_\varphi - \sigma_r}{2\sigma_i}. \end{cases} \quad (4.39)$$

Используя соотношение

$$\frac{dA}{dt} = \sigma_r \eta_r + \sigma_\varphi \eta_\varphi,$$

можно исключить  $\varkappa$  из последних двух уравнений системы (4.39)

$$\eta_r = \frac{K e^{\beta\sigma_i} (2\sigma_r - \sigma_\varphi)}{2A_*^m \sigma_i}, \quad \eta_\varphi = \frac{K e^{\beta\sigma_i} (2\sigma_\varphi - \sigma_r)}{2A_*^m \sigma_i}. \quad (4.40)$$

Подставляя выражения (4.40) в уравнение совместности скоростей деформации

$$\frac{d\eta_\varphi}{dx} - \frac{\eta_\varphi - \eta_r}{x} = 0, \quad (4.41)$$

получим ОДУ [90]

$$\frac{d\sigma_\varphi}{dx} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{d\sigma_r}{dx} \left[ 1 + \frac{(\beta\sigma_i - 2)(2\sigma_i^2 - 3\sigma_\varphi\sigma_r)}{2\sigma_i^2} \right] - \frac{3(\sigma_\varphi - \sigma_r)}{x} \right\}. \quad (4.42)$$

Здесь  $x = r/R$  – безразмерный радиус,  $R$  радиус диска,  $H = 2 + (2\sigma_i^2)^{-1} (\beta\sigma_i - 2)(2\sigma_\varphi - \sigma_r)^2$ .

Совместно с уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dx} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{x} + Gx = 0, \quad (4.43)$$

получим систему двух ОДУ (4.42)-(4.43) с граничными условиями

$$\sigma_r(0) = \sigma_\varphi(0), \quad \sigma_r(1) = 0. \quad (4.44)$$

В уравнении (4.43)  $G = \rho\omega^2 R^2$  – действующее напряжение,  $\rho$  – плотность материала диска,  $\omega$  – величина угловой скорости.

Таким образом, имеем граничную задачу (4.42)-(4.44).

Можно видеть, что граничное условие на ободе диска задано только для радиальной компоненты напряжений. Граничное же условие в центре диска задано равенством двух компонент напряжений, но их значения неизвестны. В этом случае традиционные методы решения граничных задач неэффективны, так как граничные условия недоопределены.

### 4.3.2 Традиционный алгоритм решения

В статье [90] для решения задачи (4.42)-(4.44) предложен подход, использующий метод стрельбы решения граничных задач, заключающийся в следующем:

1. Находится решение упругой задачи для вращающегося диска [96]

$$\sigma_r(x) = G \cdot \frac{3 + \nu}{8} \cdot (1 - x^2), \quad \sigma_\varphi(x) = G \cdot \left( \frac{3 + \nu}{8} - \frac{1 + 3\nu}{8} \cdot x^2 \right), \quad (4.45)$$

где  $\nu = 0,4$  – постоянная Пуассона.

2. Используя упругое решение, определяются начальные отрезки для значений компонент напряжений в центре диска

$$\sigma_r(0) \in [\sigma_{r1,0}; \sigma_{r2,0}], \quad \sigma_\varphi(0) \in [\sigma_{\varphi1,0}; \sigma_{\varphi2,0}]. \quad (4.46)$$

3. Вводится счетчик шагов  $k = 0$ .
4. Система ОДУ (4.42)-(4.43) решается явным методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности, в качестве начальных условия берутся левые и правые границы отрезков для значений компонент напряжений в центре диска [19]

$$\sigma_r(0) \in [\sigma_{r1,k}; \sigma_{r2,k}], \quad \sigma_\varphi(0) \in [\sigma_{\varphi1,k}; \sigma_{\varphi2,k}]. \quad (4.47)$$

Вычисляются значения  $\sigma_{r1}^{(k)}$  и  $\sigma_{r2}^{(k)}$  на ободе диска. В данном параграфе верхними индексами, например  $\sigma_r^{(k)}$ , обозначаются значения компонент напряжения на ободе диска, а нижними индексами, например  $\sigma_{r,k}$  – в центре диска.

5. Вычисляются центры рассматриваемых отрезков (4.47)

$$\sigma_{r*,k} = \frac{\sigma_{r1,k} + \sigma_{r2,k}}{2}, \quad \sigma_{\varphi*,k} = \frac{\sigma_{\varphi1,k} + \sigma_{\varphi2,k}}{2}.$$

6. Система ОДУ (4.42)-(4.43) решается явным методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности, в качестве начальных условия берутся  $\sigma_{r^*,k}, \sigma_{\varphi^*,k}$ . Вычисляется значение  $\sigma_{r^*}^{(k)}$  на ободке диска.

7. В случае, когда  $\sigma_{r_1}^{(k)} > \sigma_{r_2}^{(k)} > \sigma_{r^*}^{(k)}$ , отрезки (4.47) сужаются следующим образом

$$[\sigma_{r_1,k}; \sigma_{r_2,k}] \rightarrow [\sigma_{r_1,k+1}; \sigma_{r_2,k+1}], \quad [\sigma_{\varphi_1,k}; \sigma_{\varphi_2,k}] \rightarrow [\sigma_{\varphi_1,k+1}; \sigma_{\varphi_2,k+1}],$$

где  $\sigma_{r_1,k+1} = \sigma_{r^*,k}, \sigma_{r_2,k+1} = \sigma_{r_2,k}, \sigma_{\varphi_1,k+1} = \sigma_{\varphi^*,k}, \sigma_{\varphi_2,k+1} = \sigma_{\varphi_2,k}$ .

Принимается  $\sigma_{r_1}^{(k+1)} = \sigma_{r^*}^{(k)}, \sigma_{r_2}^{(k+1)} = \sigma_{r_2}^{(k)}$ .

8. В случае, когда  $\sigma_{r_2}^{(k)} > \sigma_{r_1}^{(k)} > \sigma_{r^*}^{(k)}$ , отрезки (4.47) сужаются следующим образом

$$[\sigma_{r_1,k}; \sigma_{r_2,k}] \rightarrow [\sigma_{r_1,k+1}; \sigma_{r_2,k+1}], \quad [\sigma_{\varphi_1,k}; \sigma_{\varphi_2,k}] \rightarrow [\sigma_{\varphi_1,k+1}; \sigma_{\varphi_2,k+1}],$$

где  $\sigma_{r_1,k+1} = \sigma_{r_1,k}, \sigma_{r_2,k+1} = \sigma_{r^*,k}, \sigma_{\varphi_1,k+1} = \sigma_{\varphi_1,k}, \sigma_{\varphi_2,k+1} = \sigma_{\varphi^*,k}$ .

Принимается  $\sigma_{r_1}^{(k+1)} = \sigma_{r_1}^{(k)}, \sigma_{r_2}^{(k+1)} = \sigma_{r^*}^{(k)}$ .

9. В случае, когда выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\left| \sigma_{r_1}^{(k)} \right| < \vartheta, \quad \left| \sigma_{r_2}^{(k)} \right| < \vartheta, \quad \left| \sigma_{r^*}^{(k)} \right| < \vartheta,$$

решение, соответствующее наименьшему из них, является решением граничной задачи (4.42)-(4.44). В противном случае значение  $k$  увеличивается на единицу и процесс решения возвращается к шагу 5. Здесь  $\vartheta$  – величина допустимой погрешности.

**Замечание 3.2.** Если получено неравенство  $\sigma_{r_1}^{(k)} < \sigma_{r^*}^{(k)}$  или  $\sigma_{r_2}^{(k)} < \sigma_{r^*}^{(k)}$ , это означает, что выбраны слишком узкие начальные отрезки (4.46) и они не содержат действительных значений компонент напряжений в центре диска.

### 4.3.3 Нейросетевое решение

Как можно видеть, предложенный алгоритм требует наличия упругого решения для рассматриваемой задачи. Однако в некоторых случаях решение упругой задачи может быть весьма трудоемким. При этом, если выбирать начальные интервалы (4.46) интуитивно, то полученное решение может оказаться неверным, так как в общей постановке решение подобных задач неединственно. Рассмотрим подход свободный от этого затруднения.

Как и выше, для решения граничной задачи (4.42)-(4.44) используем технику нейросетевого моделирования. Для этого разложим компоненты напряжений  $\sigma_r(x), \sigma_\varphi(x)$  по нейросетевому базису, т. е. представим их в виде [12]

$$\hat{\sigma}_r(x, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \sum_{j_1=1}^{N_1} c_{j_1} \nu_1(x, \mathbf{a}_{j_1}), \quad \hat{\sigma}_\varphi(x, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = \sum_{j_2=1}^{N_2} b_{j_2} \nu_2(x, \mathbf{d}_{j_2}). \quad (4.48)$$

Здесь  $\mathbf{c} = \{c_{j_1}\}, \mathbf{b} = \{b_{j_2}\}$  – векторы линейно входящих параметров и  $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_{j_1}\}, \mathbf{D} = \{\mathbf{d}_{j_2}\}$  – матрицы нелинейно входящих параметров (нейросетевые коэффициенты), необходимые к

определению,  $\mathbf{a}_{j_1}$ ,  $\mathbf{d}_{j_2}$  – столбцы матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}$  соответственно,  $i = 1, 2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  – количество нейронов в разложениях (4.48).

Зададим нейросетевой базис для задачи (4.42)-(4.44) в виде

$$\begin{aligned} \nu_1(x, \mathbf{a}_{j_1}) &= \mu_1(\tau_1), \quad \nu_2(x, \mathbf{d}_{j_2}) = \mu_2(\tau_2), \\ \tau_1 &= \psi_1(x, \mathbf{a}_{j_1}) = a_{1j_1} \cdot x + a_{2j_1}; \quad \tau_2 = \psi_2(x, \mathbf{d}_{j_2}) = d_{1j_2} \cdot x + d_{2j_2}. \end{aligned}$$

Для решения данной задачи были использованы различные типы активационной функции, например радиальные базисные функции в форме гауссиан, функции сигмоидного вида в форме гиперболического тангенса и т. д. Но наилучшие результаты были получены для функции Коши  $\mu_1(\tau) = \mu_2(\tau) = (1 + \tau^2)^{-1}$  [12, с. 86], которая и используется далее.

Подставляя нейросетевые разложения (4.48) в уравнения задачи (4.42)-(4.44), запишем нормированный функционал ошибки

$$\begin{aligned} J(\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}) &= P \cdot \left( \delta_0 \sum_{h=1}^M \left| \frac{d\hat{\sigma}_\varphi}{dx} - \frac{1}{H} \left[ \frac{d\hat{\sigma}_r}{dx} \left( 1 + \frac{(\beta\hat{\sigma}_i - 2)(2\hat{\sigma}_i^2 - 3\hat{\sigma}_\varphi\hat{\sigma}_r)}{2\hat{\sigma}_i^2} \right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3(\hat{\sigma}_\varphi - \hat{\sigma}_r)}{x} \right] \right|_{x=\xi_h}^2 + \delta_0 \sum_{h=1}^M \left| \frac{d\hat{\sigma}_r}{dx} + \frac{\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_\varphi}{x} + Gx \right|_{x=\xi_h}^2 + \\ &\quad \left. + \delta_1 |\hat{\sigma}_r(0, \mathbf{c}, \mathbf{A}) - \hat{\sigma}_\varphi(0, \mathbf{b}, \mathbf{D})|^2 + \delta_2 |\hat{\sigma}_r(1, \mathbf{c}, \mathbf{A})|^2 \right), \end{aligned} \quad (4.49)$$

где  $\hat{\sigma}_r = \hat{\sigma}_r(x, \mathbf{c}, \mathbf{A})$ ,  $\hat{\sigma}_\varphi = \hat{\sigma}_\varphi(x, \mathbf{b}, \mathbf{D})$  – нейросетевые аппроксимации для компонент напряжений,  $P = (2 \cdot \delta_0 \cdot M + \delta_1 + \delta_2)^{-1}$ ,  $\delta_i \geq 0$  – штрафные множители,  $i = 0, 1, 2$ ,  $M$  – количество пробных точек. Первые две суммы в функционале ошибки (4.49) вычисляются на множестве пробных точек  $\{\xi_h\}_{h=1}^M$  [12, с. 65], которые равномерно распределены на отрезке  $[0,1]$ .

Найдем нейросетевые коэффициенты, решая задачу минимизации функционала ошибки (4.49)

$$J(\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}) \xrightarrow{\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}} \min. \quad (4.50)$$

Граничная задача (4.42)-(4.44) решалась для сплошного диска из титанового сплава ОТ-4 при постоянных температуре  $T = 450^\circ\text{C}$  и напряжении  $G = \rho\omega^2 R^2 = 490.33$  МПа. Параметры модели взяты из работы [90] и имеют вид

$$K = 167.4 \text{ МПа}^4 \cdot \text{ч}^{-1}, \quad \beta = 0.023 \text{ МПа}^{-1}, \quad A = 88.26 \text{ МДж/м}^3, \quad m = 3.$$

Число базисных функций в нейросетевых разложениях, количество пробных и экспериментальных точек, значения штрафных множителей, а также другие параметры нейросети приведены в таблице 40.

Таблица 40. Параметры нейросети для задачи (4.42)-(4.44)

$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_2$	$N_1$	$N_2$	$M$	$\eta$
1	100	100	6	6	30	$10^{-1}$

Задача минимизации (4.50) решалась в среде Mathcad 14 встроенным методом сопряженных градиентов [77, с. 351-354]. Основные данные об установившемся напряженном состоянии приведены в таблице 41.

Таблица 41. Основные данные об установившемся напряженном состоянии во вращающемся диске

$\hat{\sigma}_r(0)$ , МПа	$\hat{\sigma}_\varphi(0)$ , МПа	$\hat{\sigma}_r(1)$ , МПа	$\hat{\sigma}_\varphi(1)$ , МПа	$J_*$	$t_n$ , с
189.174	189.208	0.151	90.496	0.029	741

Нейросетевые решения для компонент напряжений имеют вид

$$\hat{\sigma}_r(x) = \frac{185.174}{1 + (0.924 \cdot x - 0.082)^2} - \frac{196.34}{1 + (2.13 \cdot x - 2.799)^2} + \frac{0.049}{1 + (0.558 \cdot x + 0.158)^2} + \frac{2.701}{1 + (8.778 \cdot x - 0.026)^2} + \frac{80.39}{1 + (0.683 \cdot x - 0.771)^2} - \frac{63.016}{1 + (-0.749 \cdot x + 1.2)^2}. \quad (4.51)$$

$$\hat{\sigma}_\varphi(x) = \frac{145.454}{1 + (1.469 \cdot x - 1.291)^2} - \frac{83.912}{1 + (0.119 \cdot x + 0.07)^2} + \frac{664.856}{1 + (0.48 \cdot x + 0.14)^2} + \frac{30.744}{1 + (0.786 \cdot x - 0.264)^2} + \frac{60.94}{1 + (0.584 \cdot x - 1.671 \cdot 10^{-3})^2} - \frac{523.786}{1 + (0.077 \cdot x + 0.015)^2}. \quad (4.52)$$

На рис. 4.7 изображены зависимости компоненты напряжений от безразмерного радиуса, где точками и квадратами обозначены решения полученные в работе [90] для радиальной и тангенциальной компонент напряжений соответственно, полученные с использованием описанного выше алгоритма, сплошная линия – упругое решение (4.45), штриховая линия – нейросетевое решение (4.51)-(4.52).

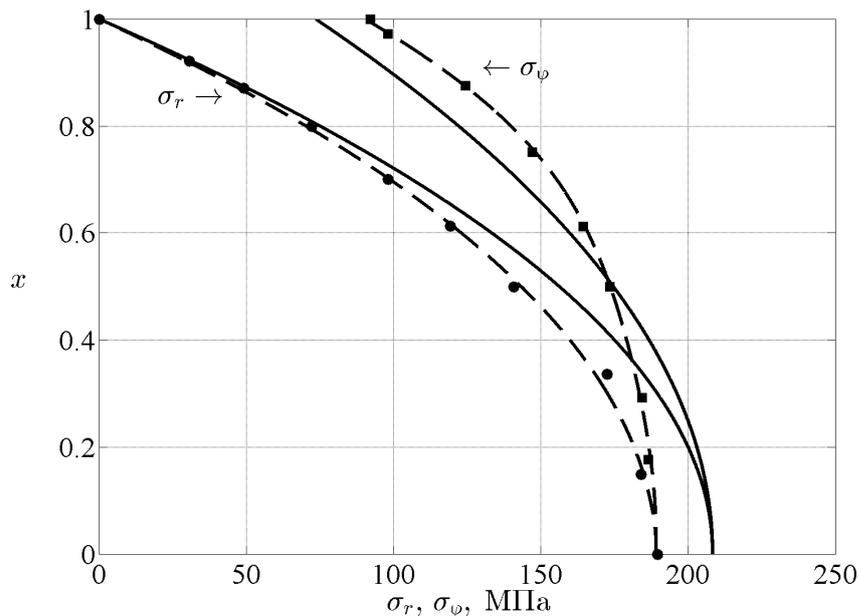


Рис. 4.7. Компоненты напряжений, нейросетевое решение

Стоит отметить, что у нейросетевого решения наблюдается малое возрастание уровня напряжения вблизи центра диска, однако в упругом и неупругом случаях уровень напряже-

ния монотонно убывает. Это явление можно отнести к используемой точности вычисления или используемому нейросетевому базису. Тем не менее, это не противоречит данным, наблюдаемым в эксперименте. Поэтому полученные нейросетевые решения могут быть использованы в качестве приближения к точному решению.

#### 4.3.4 Нейросетевое решение. Дискретизированная задача

Можно заметить, что результаты приведенные в таблице 41 имеют малую точность и время счета при минимизации функционала (4.50) весьма большое. Для преодоления данных недостатков, используем другой подход для решения задачи (4.42)-(4.44). Дискретизируем уравнения системы (4.42)-(4.44), заменяя производные по формулам центральных разностей

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{\varphi,j+1} - \sigma_{\varphi,j-1}}{2h} = \frac{1}{H_j} \left\{ \frac{\sigma_{r,j+1} - \sigma_{r,j-1}}{2h} \left[ 1 + \frac{(\beta\sigma_{i,j} - 2)(2\sigma_{i,j}^2 - 3\sigma_{\varphi,j}\sigma_{r,j})}{2\sigma_{i,j}^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{3(\sigma_{\varphi,j} - \sigma_{r,j})}{x_j} \right\} + O(h^2), \text{ при } h \rightarrow 0, \\ \frac{\sigma_{r,j+1} - \sigma_{r,j-1}}{2h} + \frac{\sigma_{r,j} - \sigma_{\varphi,j}}{x_j} + Gx_j + O(h^2) = 0, \text{ при } h \rightarrow 0, j = \overline{2, N-1}, \\ \sigma_{r,1} = \sigma_{\varphi,1}, \sigma_{r,N} = 0, x_1 = 0, x_N = 1, \end{array} \right. \quad (4.53)$$

где  $\sigma_{r,j} = \sigma_r(x_j)$ ,  $\sigma_{\varphi,j} = \sigma_{\varphi}(x_j)$ ,  $H_j = 2 + (2\sigma_{i,j}^2)^{-1} (\beta\sigma_{i,j} - 2) (2\sigma_{\varphi,j} - \sigma_{r,j})^2$ ,  $\sigma_{i,j}^2 = \sigma_{r,j}^2 - \sigma_{\varphi,j}\sigma_{r,j} + \sigma_{\varphi,j}^2$ ,  $x_k = k \cdot h$ ,  $k = \overline{1, N}$  – точки разбиения,  $h$  – шаг интегрирования,  $N$  – число точек разбиения.

Используя систему нелинейных алгебраических уравнений (4.53) и нейросетевые разложения (4.48), запишем новый нормированный функционал ошибки для дискретизированной задачи

$$\begin{aligned} J_d(\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}) = P' \cdot \left( \delta_0 \sum_{j=2}^{N-1} \left| \frac{\hat{\sigma}_{\varphi,j+1} - \hat{\sigma}_{\varphi,j-1}}{2h} - \frac{1}{H_j} \left[ \frac{\hat{\sigma}_{r,j+1} - \hat{\sigma}_{r,j-1}}{2h} \times \right. \right. \right. \\ \times \left. \left. \left( 1 + \frac{(\beta\hat{\sigma}_{i,j} - 2)(2\hat{\sigma}_{i,j}^2 - 3\hat{\sigma}_{\varphi,j}\hat{\sigma}_{r,j})}{2\hat{\sigma}_{i,j}^2} \right) - \frac{3(\hat{\sigma}_{\varphi,j} - \hat{\sigma}_{r,j})}{x_j} \right] \right|^2 + \\ + \delta_0 \sum_{j=2}^{N-1} \left| \frac{\hat{\sigma}_{r,j+1} - \hat{\sigma}_{r,j-1}}{2h} - \frac{\hat{\sigma}_{r,j} - \hat{\sigma}_{\varphi,j}}{x_j} + Gx_j \right|^2 + \\ \left. + \delta_1 |\hat{\sigma}_r(0, \mathbf{c}, \mathbf{A}) - \hat{\sigma}_{\varphi}(0, \mathbf{b}, \mathbf{D})|^2 + \delta_2 |\hat{\sigma}_r(1, \mathbf{c}, \mathbf{A})|^2 \right), \end{aligned} \quad (4.54)$$

где  $\hat{\sigma}_{r,j} = \hat{\sigma}_r(x_j, \mathbf{c}, \mathbf{A})$ ,  $\hat{\sigma}_{\varphi,j} = \hat{\sigma}_{\varphi}(x_j, \mathbf{b}, \mathbf{D})$ ,  $P' = (2 \cdot \delta_0 \cdot (N-2) + \delta_1 + \delta_2)^{-1}$ .

Вместо множества пробных точек в формуле (4.54) берется множество точек разбиения  $\{x_j\}_{j=1}^N$ . С целью предотвращения остановки процесса минимизации в точках локального ми-

нимума, производится уменьшение шага интегрирования. Это приводит к перераспределению точек разбиения.

Для определения нейросетевых коэффициентов решается задача минимизации функционала ошибки (4.54)

$$J_d(\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}) \xrightarrow{\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}} \min. \quad (4.55)$$

Число нейронов в нейросетевых разложениях, шаг интегрирования, значения штрафных множителей для дискретизированной задачи приведены в таблице 42, где  $h_s$  – начальный шаг интегрирования,  $h_f$  – шаг интегрирования в конце процесса минимизации.

Таблица 42. Параметры нейросети для дискретизированной задачи

$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_2$	$N_1$	$N_2$	$h_s$	$h_f$	$\eta$
1	10	10	6	6	0.083	0.077	$10^{-4}$

Задача минимизации (4.55) решалась в среде Mathcad 14 встроенным методом сопряженных градиентов [77, с. 351-354]. Основные данные об установившемся напряженном состоянии для дискретизированной задачи приведена в таблице 43.

Таблица 43. Основные данные об установившемся напряженном состоянии во вращающемся диске для дискретизированной задачи

$\hat{\sigma}_r(0)$ , МПа	$\hat{\sigma}_\varphi(0)$ , МПа	$\hat{\sigma}_r(1)$ , МПа	$\hat{\sigma}_\varphi(1)$ , МПа	$J_*$	$t_n$ , с
188.571	188.573	$10^{-4}$	90.05	$3 \cdot 10^{-6}$	193

Нейросетевые коэффициенты для дискретизированной задачи запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (7.6281, -107.6816, 7.5404, 0.0322, 14.0869, 184.0765)^T, \\ \mathbf{b} &= (133.6394, -531.8515, 229.2804, -353.0581, -57.3457, 76.8383)^T, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 8.23283 & -7.82602 \\ -3.92451 & 4.23754 \\ 2.93994 & -1.6677 \\ 0.5528 & 0.88646 \\ 2.32552 & -0.84134 \\ 1.05501 & 0.03365 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1.44459 & -1.79754 \\ 0.00779 & -2.41911 \\ 0.55057 & -0.28475 \\ 1.94995 & -2.89906 \\ 0.75731 & -10.51774 \\ 1.08877 & 0.51818 \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Кривые для компонент напряжения, построенные с использованием параметров (4.56), имеют вид аналогичный кривым, изображенным на рис. 4.7 штриховыми линиями.

Стоит отметить, что используемый в данном параграфе подход является лишь частным вариантом общего нейросетевого метода, применение которого рассмотрено в параграфе 4.3.3. Тем не менее, в ряде случаев переход к дискретизированной задаче позволяет существенно сократить вычислительные затраты и увеличить точность полученного решения.

## 4.4 Анализ применения искусственных нейронных сетей

Процесс определения параметров, входящих в определяющие соотношения ползучести, является одним из основных этапов моделирования процессов деформирования и разрушения металлических конструкций. Традиционно для идентификации моделей ползучести используются графические методы, в которых характеристики ползучести вычисляются как величины тангенсов углов наклона прямых, построенных по экспериментальным данным в логарифмических или полулогарифмических координатах, в зависимости от вида используемых уравнений [95].

В качестве альтернативы описанному подходу в данной работе для определения характеристик ползучести используется метод нейронных сетей, вариант которого разрабатывается в работах А. Н. Васильева и Д. А. Тархова [12–14] для решения задач математической физики. Аппробация нейросетевого подхода на задачах идентификации одномерных моделей ползучести *при постоянных напряжениях* показывает хорошее качественное и количественное согласование расчетных и экспериментальных данных. Для модели, описывающей растяжение прямоугольных образцов из титанового сплава 3В относительная погрешность расчетного значения длительной прочности по отношению к эксперименту не превосходит трети процента. Для модели, описывающей растяжение цилиндрических образцов из стали 45 относительная погрешность расчетных значений длительной прочности и деформации ползучести в момент разрушения по отношению к эксперименту не превосходит двух процентов, опускаясь в ряде случаев до десятых долей процента. При этом, время счета для обеих задач составляет от 10 до 15 минут. Но главным преимуществом нейросетевого подхода является то, что алгоритм процесса идентификации модели не зависит от вида определяющих соотношений ползучести. Последнее открывает возможность использования для моделирования ползучести уравнений любого вида, а не только дробно-степенных или экспоненциальных зависимостей.

Помимо нейросетевого подхода, описанного в разделе 4.1, для определения характеристик ползучести предложен метод, комбинирующий возможности нейросетевого моделирования с продолжением решения по параметру. Данная модификация позволяет избежать вычислительных трудностей, связанных с плохой обусловленностью определяющих соотношений ползучести, что дает возможность сократить время счета в 3 раза при сохранении точность моделирования.

**Замечание 3.3.** Общая задача идентификации моделей ползучести не ограничивается рассмотренным случаем постоянных напряжений. В дальнейших исследованиях необходимо также рассмотреть задачу определения материальных констант для целого диапазона напряжений, для которой нейросетевой метод не претерпевает существенных изменений, за исключением введения напряжения как дополнительной переменной в нейросетевые разложения.

В данной главе также рассмотрена задача определения установившегося напряженно-деформированного состояния в равномерно прогретом сплошном диске постоянной толщины из сплава ОТ-4. При использовании метода стрельбы для решения данной задачи, за счет недоопределенности граничных условий, необходимо оценивать уровень напряжения в центре диска. Для этого используется упругое решение. Нейросетевой метод позволяет получить решение граничной задачи с точностью порядка одной десятой без применения упругого решения, что упрощает процесс решения (время счета – около 12 минут). Для увеличения точности решения производится дискретизация исходной задачи. Это дает возможность уменьшить погрешность до порядка  $10^{-4}$ , а также сократить время счета до 3 минут.

Таким образом, нейросетевой подход показал свою эффективность и универсальность как при построении моделей, описывающих процессы ползучести, так и при расчете полученных моделей. При дальнейшем развитии данный подход может стать мощным инструментом моделирования процесса деформирования конструкций при различных температурно-силовых режимах.

## Заключение

В диссертационной работе исследовалось применение ряда подходов к расчету моделей, описывающих процессы деформирования металлических конструкций вплоть до разрушения в условиях ползучести. Для моделирования подобных задач использовались определяющие соотношения в форме систем ОДУ двух теорий: теории структурных параметров Ю. Н. Работнова и энергетического варианта теории ползучести. При расчете рассматриваемых моделей традиционными методами показано, что

1. Для расчета моделей деформирования неупрочняющихся конструкций, описываемых начальными задачами для систем ОДУ с одной ПОТ, можно применять явные методы решения задачи Коши. Использование постоянного шага не позволяет близко подойти к моменту разрушения и требует значительных вычислительных ресурсов. Переход к переменному шагу снимает все вычислительные трудности, позволяя получить решение заданной точности и близко подойти к ПОТ.
2. Для расчета моделей деформирования упрочняющихся конструкций, описываемых начальными задачами для систем ОДУ с двумя ПОТ, применение явных методов решения задачи Коши малоэффективно и требуются специальные подходы. Для расчета моделей деформирования упрочняющихся конструкций выбраны неявные методы решения задачи Коши с переменным шагом, которые позволяют получить решение, но, в то же время, их реализация сопряжена с трудностями, описанными в параграфе 1.3.3.

Для преодоления трудностей, возникающих при расчете упрочняющихся конструкций неявными методами, к исходной задаче применяется метод продолжения по наилучшему аргументу  $\lambda$ , отсчитываемому вдоль интегральной кривой рассматриваемой задачи. Норма правой части  $\lambda$ -преобразованной задачи равна единице, что дает возможность применять к ее решению явные методы. В результате удастся существенно сократить время счета и погрешность решения при расчете упрочняющихся конструкций. Но для неупрочняющихся конструкций переход к аргументу  $\lambda$  приводит к значительному усложнению исходной задачи, что приводит к увеличению времени счета при малом возрастании погрешности. Лишь в редких случаях  $\lambda$ -преобразование для неупрочняющихся конструкций дает преимущества.

Все используемые в работе явные методы решения задачи Коши, в том числе и наилучшая параметризация, были реализованы в форме комплекса программ (см. приложение Г).

При всех достоинствах  $\lambda$ -преобразование имеет и ряд недостатков, главный из которых – усложнение вида параметризованной задачи по сравнению с исходной. Для смягчения недостатков  $\lambda$ -преобразования вводится модифицированный наилучший аргумент  $\kappa$ . В диссертации исследован механизм отсчета аргумента  $\kappa$  специального вида. Получено выражение для отклонения направления отсчета аргумента  $\kappa$  от наилучшего, с использованием которого доказана единственность наилучшего аргумента в данном классе аргументов продолжения.

Введена мера отклонения между направлениями отсчета аргументов  $\lambda$  и  $\kappa$ , величина которой связана с обусловленностью  $\kappa$ -преобразованной задачи.

Применение модифицированного наилучшего аргумента к расчету упрочняющихся конструкций позволило упростить вид определяющих уравнений, что дало возможность сократить время счета в разы. Несмотря на худшую обусловленность  $\kappa$ -преобразованных задач, погрешность для упрочняющихся конструкций возрасла незначительно по сравнению с решением  $\lambda$ -преобразованных задач. Для неупрочняющихся конструкций переход к параметру  $\kappa$  в большинстве случаев позволяет сократить время счета в разы по сравнению с непараметризованной задачей как при постоянном, так и при переменном шаге. Но, исходя из свойств используемого аргумента, погрешность решения  $\kappa$ -преобразованной задачи становится больше. Для переменного шага в сравнении с решением  $\lambda$ -преобразованной задачи погрешность возрастает мало, но для постоянного шага рост погрешности более значительный.

В целом, полученные результаты показывают эффективность метода продолжения решения по параметру применительно к расчету моделей ползучести по сравнению с другими рассмотренными подходами. При этом, применения модифицированного наилучшего аргумента позволяет учитывать специфику каждой решаемой задачи, увеличивая преимущества наилучшей параметризации.

В последней главе диссертационной работы рассмотрено применение искусственных нейронных сетей к построению и расчету моделей ползучести. Был разработан не зависящий от вида определяющих уравнений ползучести унифицированный метод определения характеристик ползучести по результатам экспериментальных данных. С использованием указанного подхода были получены две одномерные модели для постоянных значений напряжений. Для каждой из построенных моделей относительная погрешность расчетных данных по отношению к эксперименту не превосходит нескольких процентов. Помимо этого, для идентификации моделей ползучести разработан метод, комбинирующий возможности нейросетевого моделирования и продолжения решения по параметру. Комбинированный метод позволил в разы сократить время, затрачиваемое на построение модели, при сохранении аналогичного уровня точности. Также отметим, что все методы, применяющие искусственные нейронные сети, позволяют не только получать значения материальных констант, но и одновременно дают приближенное решение рассматриваемой задачи.

Для краевой задачи с недоопределенными граничными условиями, определяющей установившееся напряженно-деформированное состояние во вращающемся диске, нейросетевой подход позволил снять необходимость в нахождении упругого решения задачи для оценки уровня напряжения в центре диска. Это позволило значительно упростить процесс решения по сравнению с применением традиционного метода стрельбы и построить решение задачи с удовлетворительной точностью.

Таким образом, продемонстрировано, что нейросетевое моделирование является эффективным инструментом построения и расчета моделей ползучести. В дальнейшем, данный подход может быть без существенных изменений применен к решению более сложных задач.

## Список сокращений и условных обозначений

**ОДУ** – обыкновенное дифференциальное уравнение.

**ПОТ** – предельная особая точка.

**ЭЯ** – явный метод Эйлера решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

**ЭКЯ** – явный метод Эйлера-Коши решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**РК4Я** – явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**РРР** – метод Рунге-Ромберга-Ричардсона оценки локальной погрешности при решении начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**ЭНЯ** – неявный метод Эйлера решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Г4НЯ** – неявный гауссов метод четвертого порядка точности решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

## Список литературы

- [1] *Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
- [2] *Бажвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. – М.: Лаборатория знаний, 2015. – 636 с.
- [3] *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х частях. Часть I. Малые деформации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 600 с.
- [4] *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х частях. Часть II. Конечные деформации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 432 с.
- [5] *Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Проблема нелинейности при численном решении сверхжестких задач Коши // *Математическое моделирование.* – 2016. – Т. 28. – № 4. – С. 16-32.
- [6] *Бормотин К. С.* Итерационные численные методы компьютерного моделирования оптимальной формовки и клепки тонкостенных панелей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18. – Комсомольск-на-Амуре, 2014. – 282 с.
- [7] *Булатов М. В., Тыглиян А. В., Филиппов С. С.* Об одном классе одношаговых одностадийных методов для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2011. – Т. 51. – № 7. – С. 1251-1265.
- [8] *Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Идентификация параметров модели разрушения для анизотропных конструкций // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния».* – 2014. – № 4(22). – С. 33-45.
- [9] *Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Методы нейросетевого моделирования в задачах неупругого деформирования металлических конструкций // В кн. *Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А.* Нейросетевой подход к задачам математической физики. – СПб.: Нестор-История, 2015. – С. 216-259.
- [10] *Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Нейросетевое моделирование в задаче идентификации характеристик ползучести // *Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), 24-31 мая 2015 г., Алушта.* – М.: Изд-во МАИ, 2015. – С. 133-135.

- [11] *Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Нейросетевой метод идентификации и анализа модели деформирования металлических конструкций в условиях ползучести // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. – 2015. – Т. 2. – № 11. – С. 360-370.
- [12] *Васильев А. Н., Тархов Д. А.* Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2009. – 528 с.
- [13] *Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А.* Нейросетевой подход к задачам математической физики. – СПб.: Нестор-История, 2015. – 260 с.
- [14] *Васильев А. Н., Тархов Д. А.* Принципы и техника нейросетевого моделирования. – СПб.: Нестор-История, 2014. – 218 с.
- [15] *Гаврюшин С. С., Барышников О. О., Борискин О. Ф.* Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 479 с.
- [16] *Галанин М. П., Ходжаева С. Р.* Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2013. – № 98. – 29 с. Режим доступа: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-98>
- [17] *Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А.* Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек. – М.: Изд-во МАМИ, 2004. – 162 с.
- [18] *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
- [19] *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
- [20] *Горев Б. В.* Высокотемпературная ползучесть конструкционных сплавов и ее приложение к формообразованию крупногабаритных деталей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.04. – Новосибирск, 2003. – 426 с.
- [21] *Горев Б. В., Банщикова И. А.* К описанию процесса ползучести и разрушения упрочняющихся материалов по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. – 2009. – № 2. – С. 90–98.
- [22] *Горев Б. В., Захарова Т. Э., Клопотов И. Д.* К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств // *Физическая мезомеханика*. – 2002. – Т. 5. – № 2. – С. 17–22.

- [23] Горев Б. В., Любашевская И. В., Панамарев В. А., Иявойнен С. В. Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2014. – Т. 55. – № 6. – С. 132-144.
- [24] Горев Б. В., Панамарев В. А., Перетяцько В. Н. Энергетический вариант теории ползучести в обработке металлов давлением // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия*. – 2011. – № 6. – С. 16-18.
- [25] Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // *ДАН СССР*. – 1953. – Т. 88. – № 4. – С. 601-602.
- [26] Давиденко Д. Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // *Украинский математический журнал*. – 1953. – Т. 5. – № 2. – С. 196-206.
- [27] Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
- [28] Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Т. 1. Методы обработки данных. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
- [29] Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под общ. ред. С. А. Шестерикова. – М.: Машиностроение, 1983. – 101 с.
- [30] Зубанов А. М., Коконков Н. И., Ширков П. Д. Одностадийный метод Розенброка с комплексными коэффициентами и автоматическим выбором шага // *Математическое моделирование*. – 2011. – Т. 23. – № 3. – С. 127-138.
- [31] Калиткин Н. Н. Численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
- [32] Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Вычисления с использованием обратных схем Рунге-Кутты // *Математическое моделирование*. – 2013. – Т. 25. – № 10. – С. 79-96.
- [33] Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Решение задачи Коши для жестких систем с гарантированной точностью методом длины дуги // *Математическое моделирование*. – 2014. – Т. 26. – № 7. – С. 3-18.
- [34] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Известия АН СССР. Отделение технических наук*. – 1958. – № 8. – С. 26-31.
- [35] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. – М.: Дрофа, 2003. – 720 с.
- [36] Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.

- [37] *Кузнецов Е. Б.* Некоторые приложения метода продолжения по наилучшему параметру. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.
- [38] *Кузнецов Е. Б.* Параметризация краевых задач и прохождение точек бифуркации. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
- [39] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Идентификация параметров модели теории ползучести по результатам эксперимента [Электронный ресурс] // Материалы Всероссийской научной конференции «Обратные краевые задачи и их приложения», 20–24 сентября 2014 г., Казань. – Режим доступа: <http://kpfu.ru/math/conference/vserossijskaya-nauchnaya-konferenciya-39obratnye/materialy>
- [40] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Комбинированный метод нейронных сетей и продолжения решения по параметру в задаче идентификации параметров модели ползучести и длительной прочности // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20-24 августа 2015 г., Казань. Аннотации докладов. – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – С. 160.
- [41] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Комбинированный метод нейронных сетей и продолжения решения по параметру в задаче идентификации параметров модели ползучести и длительной прочности [Электронный ресурс] // Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20-24 августа 2015 г., Казань. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. – С. 2139-2141. – Режим доступа: <http://elibrary.ru/item.asp?id=24824619>
- [42] *Леонов С. С.* Математическое моделирование и численные методы решения задач ползучести // Конкурс научно-технических работ и проектов «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики», 26-27 ноября 2013 г., Москва. Аннотация работ. – М.: ПМТ Логотип Л, 2013. – С. 281-282.
- [43] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Математическое моделирование чистого изгиба балки из авиационного материала в условиях ползучести [Электронный ресурс] // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. – 2013. – № 65. – Режим доступа: <https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35927>
- [44] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Математическое моделирование чистого изгиба балки из разномодульного авиационного материала в условиях ползучести // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Инженерные исследования»*. – 2015. – № 1. – С. 111-122.
- [45] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в задачах ползучести // Материалы XVIII Международной конферен-

- ции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013), 22-31 мая 2013 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – С. 388-389.
- [46] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация при исследовании ползучести нагруженных образцов из стали Ст45 // 12-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2013», 12-15 ноября 2013 г., Москва. Тезисы докладов. – СПб.: Мастерская печати, 2013. – С. 601-603.
- [47] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Методика выбора функций определяющих уравнений ползучести и длительной прочности с одним скалярным параметром поврежденности // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2016. – Т. 57. – № 2. – С. 202-211 (Перевод: *Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Technique for Selecting the Functions of the Constitutive Equations of Creep and Long-term Strength with One Scalar Damage Parameter // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2016. – Vol. 57. – No. 2. – Pp. 369-377).
- [48] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Моделирование процесса ползучести и разрушения конструкций с учетом стадии упрочнения материала // Материалы XX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова, 17-21 февраля 2014 г., Ярополец. Т. 1. – М.: ООО «ТР-принт», 2014. – С. 123-125.
- [49] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Нейронные сети при расчете установившегося напряженного состояния вращающихся дисков // Московская молодёжная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике – 2015», 21-23 апреля 2015 г., Москва. Сборник тезисов докладов. – М.: Московский авиационный институт, 2015. – С. 258-259.
- [50] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Нейросетевое моделирование в задаче идентификации параметров модели ползучести и разрушения // 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2014», 17-21 ноября 2014 г., Москва. Тезисы докладов. – СПб.: Мастерская печати, 2014. – С. 637-639.
- [51] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Нейросетевой подход к решению задачи идентификации параметров модели ползучести // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова, 16-20 февраля 2015 г., Кременки. Т. 1. – М.: ООО «ТРП», 2015. – С. 113-115.
- [52] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. О модификации наилучшего параметра продолжения решения // *Журнал Средневожского математического общества*. – 2015. – Т. 17. – № 1. – С. 71-81.
- [53] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. О параметрах продолжения решения для задач ползучести // Материалы X Международной конференции по неравновесным процессам в

- соплах и струях (NPNJ'2016), 25-31 мая 2016 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – С. 354-356.
- [54] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Определение параметров моделей, описывающих процессы ползучести и разрушения при одноосном растяжении // Международная конференция «Успехи механики сплошных сред», 28 сентября - 04 октября 2014 г., Владивосток, Россия. Сборник докладов. – Иркутск: ООО «Мегапринт», 2014. – С. 254-256.
- [55] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Определение установившегося напряженно-деформированного состояния в сплошных вращающихся дисках [Электронный ресурс] // XXVI Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций», 28 сентября-30 сентября 2015 г., Санкт-Петербург. Тезисы докладов. – СПб: ИД «ФАРМиндекс», 2015. – С. 203-204. – (CD-ROM).
- [56] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Параметризация задач ползучести // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, 16-21 июня 2014 г., Чебоксары. Ч. 1. – Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет, 2014. – С. 227-229.
- [57] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВСППС'2015), 24-31 мая 2015 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2015. – С. 292-294.
- [58] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Установившееся напряженно-деформированное состояние вращающихся дисков при ползучести // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова, 15-19 февраля 2016 г., Кременки. Т. 1. – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 125-127.
- [59] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Численное исследование задачи растяжения прямоугольных образцов из сплава ЗВ с учетом начального упрочнения и анизотропии материала // Материалы X Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2014), 25-31 мая 2014 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2014. – С. 394-396.
- [60] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Чистый изгиб балки из разномодульного материала в условиях ползучести // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование».* – 2013. – Т. 6. – № 4. – С. 26-38.
- [61] *Локощенко А. М.* Виброползучесть металлов при одноосном и сложном напряженных состояниях // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 2014. – № 4. – С. 111-120.
- [62] *Локощенко А. М.* Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 2012. – № 3. – С. 116-136.

- [63] *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 504 с.
- [64] *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. – М.: Изд-во Московского университета, 2000. – 178 с.
- [65] *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах (обзор) // *Физикико-химическая механика материалов.* – 2001. – № 4. – С. 27-41.
- [66] *Локощенко А. М.* Применение кинетической теории при анализе длительного высоко-температурного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2012. – Т. 53. – № 4. – С. 149-164.
- [67] *Локощенко А. М.* Результаты исследований ползучести и длительной прочности металлов в Научно-исследовательском институте механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (к юбилею Ю. Н. Работнова) // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2014. – Т. 55. – № 1. – С. 144-165.
- [68] *Локощенко А. М.* Эквивалентные напряжения в расчетах длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // *Известия Саратовского государственного университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика».* – 2009. – Т. 9. – Вып. 4. – Ч. 2. – С. 128-136.
- [69] *Локощенко А. М., Шестериков С. А.* Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // *Прикладная механика и техническая физика.* – 1980. – №. 3. – С. 155-159.
- [70] *Локощенко А. М., Шестериков С. А.* Ползучесть // *Итоги науки. Серия «Механика».* – М.: ВИНТИ, 1965. – С. 177-227.
- [71] *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
- [72] *Никитенко А. Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН – НГАСУ, 1997. – 278 с.
- [73] *Новиков А. Е., Новиков Е. А.* Численное решение жестких задач с небольшой точностью // *Математическое моделирование.* – 2010. – Т. 22. – № 1. – С. 46-56.
- [74] *Новиков Е. А.* Аппроксимация матрицы Якоби в  $(M,2)$ -методах решения жестких задач // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2011. – Т. 51. – № 12. – С. 2194-2208.

- [75] *Новиков Е. А.* Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1997. – 195 с.
- [76] *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005. – 544 с.
- [77] *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. – М.: Мир, 1974. – 376 с.
- [78] *Работнов Ю. Н.* О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 5-7.
- [79] *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 2014. – 752 с.
- [80] *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
- [81] *Сигунов Ю. А., Диденко И. Р.* Комплексная реализация неявных одностадийных методов до 4-го порядка точности при численном интегрировании систем ОДУ // *Математическое моделирование.* – 2011. – Т. 23. – № 1. – С. 87-99.
- [82] *Скворцов Л. М.* Однократно неявные диагонально расширенные методы Рунге–Кутты четвертого порядка // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2014. – Т. 54. – № 5. – С. 755-765.
- [83] *Скворцов Л. М.* Эффективная реализация неявных методов Рунге–Кутты второго порядка // *Математическое моделирование.* – 2013. – Т. 25. – № 5. – С. 15-28.
- [84] *Скворцов Л. М.* Явные адаптивные методы Рунге–Кутты // *Математическое моделирование.* – 2011. – Т. 23. – № 7. – С. 73-87.
- [85] *Скворцов Л. М.* Явные адаптивные методы Рунге–Кутты для жестких и колебательных задач // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2011. – Т. 51. – № 8. – С. 1434-1448.
- [86] *Скворцов Л. М.* Явные стабилизированные методы Рунге–Кутты // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2011. – Т. 51. – № 7. – С. 1236-1250.
- [87] *Скворцов Л. М., Козлов О. С.* Эффективная реализация диагонально-неявных методов Рунге–Кутты // *Математическое моделирование.* – 2014. – Т. 26. – № 1. – С. 96-108.
- [88] *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Ред. Дж. Холл, Дж. Уатт.* – М.: Мир, 1979. – 312 с.
- [89] *Соснин О. В.* Энергетический вариант ползучести и длительной прочности. Сообщение 1. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов // *Проблемы прочности.* – 1973. – № 5. – С. 45-49.

- [90] *Соснин О. В., Горев Б. В.* Энергетический вариант ползучести и длительной прочности. Сообщение 3. Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков // *Проблемы прочности.* – 1974. – №. 3. – С. 3-7.
- [91] *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2010. – Т. 51. – №. 4. – С. 188-197.
- [92] *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. – 96 с.
- [93] *Соснин О. В., Торшенин Н. Г.* О ползучести и разрушении титанового сплава ОТ-4 в интервале температур 400-550° С // *Проблемы прочности.* – 1972. – №. 7. – С. 55-59.
- [94] *Соснин О. В., Торшенин Н. Г.* О ползучести и разрушении титанового сплава ОТ-4 при постоянной температуре // *Проблемы прочности.* – 1970. – №. 5. – С. 28-32.
- [95] *Соснин О. В., Шокало И. К.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 2. Ползучесть и разрушение материалов с начальным упрочнением // *Проблемы прочности.* – 1974. – № 1. – С. 43-48.
- [96] *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
- [97] *Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л.* Численные методы. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.
- [98] *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
- [99] *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
- [100] *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
- [101] *Чебышев П. Л.* Об интегрировании иррациональных дифференциалов // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. – М.: Изд-во АН СССР, 1944-1951. – Т. 2. Математический анализ. – С. 52-69.
- [102] *Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.
- [103] *Ширков П. Д.* Устойчивость ROW методов для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Математическое моделирование.* – 2012. – Т. 24. – № 5. – С. 97-111.

- [104] Шестериков С. А., Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки. Серия «Механика деформируемого твердого тела». – М.: ВИНТИ, 1980. – Т. 13. – С. 3-104.
- [105] Bal L., Buyle-Bodin F. Artificial neural network for predicting creep of concrete // *Neural Computing & Applications*. – 2014. – Vol. 25. – Issue 6. – Pp. 1359-1367.
- [106] Bhadeshia H. K. D. H. Neural Networks in Materials Science // *ISIJ International*. – 1999. – Vol. 39. – No. 10. – Pp. 966-979.
- [107] Budkina E. M., Kuznetsov E. B., Lazovskaya T. V., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2016. – Vol. 9719. – Pp. 277-283.
- [108] Düğenci M., Aydemir A., Esen İsmail, Aydın M. E. Creep modelling of polypropylenes using artificial neural networks trained with Bee algorithms // *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. – 2015. – Vol. 45. – No. 10. – Pp. 71-79.
- [109] Gorev B. V., Klopotov I. D., Lyubashevskaya I. V. Creep and damage behavior of AK4-1T and VT-9 alloys under different stress states // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 1998. – Vol. 29. – Pp. 1-10.
- [110] Johnson A. E. Complex-stress creep of metals // *Metallurgical Reviews*. – 1960. – Vol. 5. – № 20. – Pp. 447-506 (Перевод: Джонсон А. Ползучесть металлов при сложном напряженном состоянии // *Механика*. Период. сб. перев. иностр. статей. – 1962. – № 4. – С 91-146).
- [111] Kmet S., Sincak P., Stehlik P. Artificial Neural Network for Creep Behaviour Predictions of a Parallel-lay Aramid Rope Under Varying Stresses // *Strain*. – 2011. – Vol. 47. – Pp. 121-128.
- [112] Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Vasilyev A. N. Creep model identification problem for steel 45 specimens uniaxial tension // International Symposium «Mathematics of XXI Century & Natural Science», September 29 - October 3, 2015. Book of Abstracts. – St. Petersburg: Publishing House of SPbPU, 2015. – Pp. 27.
- [113] May S., Vignollet J., de Borst R. A new arc-length control method based on the rates of the internal and the dissipated energy // *Engineering Computations*. – 2016. – Vol. 33. – Issue 1. – Pp. 100-115.
- [114] Semenov A. A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // *Thin-Walled Structures*. – 2016. – Vol. 106. – С. 428-436.
- [115] Wang X., Ma T.-B., Ren H.-L., Ning J.-G. A local pseudo arc-length method for hyperbolic conservation laws // *Acta Mechanica Sinica*. – 2015. – Vol. 30. – No. 6. – Pp. 956-965.

## Список рисунков

1	Зависимости деформации $\varepsilon$ от времени $t$ . . . . .	7
1.1	Теоретико-экспериментальные кривые одноосной ползучести для стали X18H10T . . . . .	20
1.2	Кривые ползучести для стали X18H10T, метод РК4Я, переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$ . . . . .	25
1.3	Зависимость шага $h^t$ от аргумента $t$ при решении задачи (1.17), (1.4) . . . . .	25
1.4	Кривые ползучести для сплава ОТ-4, метод РК4Я, переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$ . . . . .	31
1.5	Зависимость шага $h^t$ от аргумента $t$ для задачи (1.25)-(1.26) . . . . .	31
1.6	Зависимость погрешности $\delta A$ от аргумента $t$ для задачи (1.25)-(1.26) . . . . .	32
1.7	Кривые ползучести для стали 45, метод ЭНЯ, переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$ . . . . .	41
1.8	Зависимость шага $h^t$ от аргумента $t$ для задачи (1.34), (1.4) . . . . .	41
1.9	Зависимость погрешности $\delta \omega$ от аргумента $t$ для задачи (1.34), (1.4) . . . . .	42
1.10	Кривые ползучести для сплава ЗВ, метод ЭНЯ, переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$ . . . . .	46
1.11	Зависимость шага $h^t$ от аргумента $t$ для задачи (1.42)-(1.43) . . . . .	46
1.12	Зависимость погрешности $\delta \omega$ от аргумента $t$ для задачи (1.42)-(1.43) . . . . .	47
3.1	Иллюстрация к лемме 3.1 . . . . .	74
3.2	Движение вдоль интегральной кривой по аргументам $\lambda$ и $\kappa$ . . . . .	85
4.1	Зависимость параметра поврежденности от времени, аналитические решения . . . . .	119
4.2	Зависимость параметра поврежденности от времени, нейросетевые решения . . . . .	119
4.3	Зависимость деформации ползучести и параметра поврежденности от времени . . . . .	123
4.4	Нейросетевые решения для деформации ползучести и параметра поврежденности . . . . .	123
4.5	Зависимость деформации ползучести и параметра поврежденности от времени . . . . .	126
4.6	Нейросетевые решения для деформации ползучести и параметра поврежденности . . . . .	126
4.7	Компоненты напряжений, нейросетевое решение . . . . .	131
Г.1	Блок-схема программного комплекса . . . . .	167
Г.2	Титульный экран комплекса программ . . . . .	174
Г.3	Экран для задания условий задачи Коши . . . . .	175
Г.4	Экран выбора метода решения . . . . .	175
Г.5	Экран выбора параметров вывода результатов . . . . .	175
Г.6	Экран построения графиков . . . . .	176

## Список таблиц

1	Основные теоретико-экспериментальные данные для стали X18H10T . . . . .	21
2	Расчетные данные для стали X18H10T при постоянном шаге интегрирования	22
3	Расчетные данные для стали X18H10T при переменном шаге интегрирования	23
4	Основные теоретико-экспериментальные данные для титанового сплава ОТ-4	27
5	Расчетные данные для титанового сплава ОТ-4 при постоянном шаге . . . . .	28
6	Расчетные данные для титанового сплава ОТ-4 при переменном шаге . . . . .	29
7	Относительная погрешность $\delta A$ при численном решении задачи (1.25)-(1.26) .	33
8	Основные теоретико-экспериментальные данные для стали 45 . . . . .	38
9	Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге интегрирования . . . . .	40
10	Относительная погрешность $\delta \omega$ при численном решении задачи (1.34), (1.4) .	42
11	Основные теоретико-экспериментальные данные для титанового сплава ЗВ . .	44
12	Расчетные данные для титанового сплава ЗВ при переменном шаге . . . . .	44
13	Относительная погрешность $\delta \omega$ при численном решении задачи (1.42)-(1.43) .	47
14	Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге, $\lambda$ -преобразование . . .	56
15	Относительная погрешность $\delta \omega$ для численного решения задачи (2.15), (2.14)	57
16	Расчетные данные для сплава ЗВ при переменном шаге, $\lambda$ -преобразование . .	59
17	Относительная погрешность $\delta \omega$ для численного решения задачи (2.17), (2.18)	61
18	Расчетные данные для сплава ОТ-4 при постоянном шаге, $\lambda$ -преобразование .	63
19	Расчетные данные для сплава ОТ-4 при переменном шаге, $\lambda$ -преобразование .	64
20	Относительная погрешность $\delta A$ для численного решения задачи (2.20), (2.21)	66
21	Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов $\lambda$ и $\kappa$ для задачи (3.63), (2.14) . . . . .	95
22	Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге, $\kappa$ -преобразование . . .	95
23	Относительная погрешность $\delta \omega$ для численного решения задачи (3.63), (2.14)	97
24	Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов $\lambda$ и $\kappa$ для задачи (3.69), (2.18) . . . . .	99
25	Расчетные данные для сплава ЗВ при переменном шаге, $\kappa$ -преобразование . .	99
26	Относительная погрешность $\delta \omega$ для численного решения задачи (3.69), (2.18)	101
27	Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов $\lambda$ и $\kappa$ для задачи (3.72), (2.21) . . . . .	103
28	Расчетные данные для сплава ОТ-4 при постоянном шаге, $\kappa$ -преобразование .	104
29	Расчетные данные для сплава ОТ-4 при переменном шаге, $\kappa$ -преобразование .	105
30	Относительная погрешность удельной энергии рассеяния для задачи (3.72), (2.21) . . . . .	107

31	Параметры нейросети для задачи (4.23)-(4.24) . . . . .	116
32	Характеристики ползучести для задачи (4.13)–(4.14) . . . . .	117
33	Основные сведения о процессе деформирования для задачи (4.13)–(4.15) . . .	117
34	Параметры нейросети для задачи (4.31)-(4.32) . . . . .	121
35	Характеристики ползучести для задачи (1.34), (1.4) . . . . .	121
36	Основные сведения о процессе деформирования для задачи (1.34), (1.4) . . . .	122
37	Параметры нейросети для параметризованной задачи . . . . .	125
38	Характеристики ползучести для параметризованной задачи . . . . .	125
39	Основные сведения о процессе деформирования для задачи (3.63), (2.14) . . .	125
40	Параметры нейросети для задачи (4.42)-(4.44) . . . . .	130
41	Основные данные об установившемся напряженном состоянии во вращающемся диске . . . . .	131
42	Параметры нейросети для дискретизированной задачи . . . . .	133
43	Основные данные об установившемся напряженном состоянии во вращающемся диске для дискретизированной задачи . . . . .	133
44	Экспериментальные данные для образцов из сплава ОТ-4, $\sigma_0 = 98$ МПа . . . .	156
45	Экспериментальные данные для образцов из сплава ОТ-4, $\sigma_0 = 112.7$ МПа . .	156
46	Экспериментальные данные для образцов из сплава ОТ-4, $\sigma_0 = 147$ МПа . . .	156
47	Экспериментальные данные для цилиндрических образцов из стали 45, $\sigma_0 = 35$ МПа . . . . .	157
48	Экспериментальные данные для цилиндрических образцов из стали 45, $\sigma_0 = 40$ МПа . . . . .	157
49	Экспериментальные данные для цилиндрических образцов из стали 45, $\sigma_0 = 45$ МПа . . . . .	157
50	Экспериментальные данные для продольных прямоугольных образцов из сплава 3В, $\bar{\sigma}_0 = 1.25$ . . . . .	158
51	Экспериментальные данные для продольных прямоугольных образцов из сплава 3В, $\bar{\sigma}_0 = 1.28$ . . . . .	158
52	Экспериментальные данные для продольных прямоугольных образцов из сплава 3В, $\bar{\sigma}_0 = 1.31$ . . . . .	159
53	Экспериментальные данные для поперечных прямоугольных образцов из сплава 3В, $\bar{\sigma}_0 = 1.35$ . . . . .	159
54	Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава 3В, $\sigma_0 = 603$ МПа	160
55	Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава 3В, $\sigma_0 = 618$ МПа	160
56	Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава 3В, $\sigma_0 = 638$ МПа	160

# Приложение А

## Неявные методы при решении задач ползучести

Рассмотрим применение неявных методов решения задачи Коши к расчету длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести с учетом неустановившейся стадии. В качестве определяющих, выберем уравнения теории структурных параметров Ю.Н. Работнова, которые в одномерном случае запишем в форме системы ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f(\sigma)}{\Psi(\omega)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{g(\sigma)}{\Psi(\omega)}, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

с однородными начальными условиями

$$t = 0 : \varepsilon(0) = 0, \omega(0) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Здесь  $\varepsilon$  – деформация ползучести,  $\omega$  – скалярный параметр поврежденности,  $\sigma$  – действующее напряжение, в общем случае переменное,  $t$  – время, функциональные зависимости, входящие в правые части, определяются по результатам эксперимента.

Как и ранее, будем рассматривать процессы, для которых  $\dot{\varepsilon} \geq 0$  и  $\dot{\omega} \geq 0$ , т. е. накопления повреждений в материале и деформации ползучести предполагаются монотонными. Функции  $f(\sigma)$  и  $g(\sigma)$  будем считать монотонными положительными,  $\sigma(t)$  будем полагать известной непрерывной функцией аргумента  $t$ . В качестве  $\Psi(\omega)$  будем рассматривать неотрицательные немонотонные унимодальные функции, такие что  $\Psi(0) = 0$ ,  $\Psi(1) = 0$ .

Рассмотрим применение некоторых неявных методов для решения подобных задач.

### А.1 Неявный метод Эйлера

Одним из наиболее простых в реализации неявных методов численного интегрирования задачи Коши является неявный метод Эйлера (ЭНЯ), схема которого [99, с. 11] для задачи (А.1)-(А.2) на каждом шаге сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + h \cdot \frac{f(\sigma_{k+1})}{\Psi(\omega_{k+1})}, \\ \omega_{k+1} = \omega_k + h \cdot \frac{g(\sigma_{k+1})}{\Psi(\omega_{k+1})}, \quad k = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

где  $h$  – шаг интегрирования по аргументу  $t$ , постоянный или переменный,  $N$  – количество интервалов разбиения,  $\sigma_{k+1} = \sigma(t_{k+1})$ ,  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\omega_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ .

Учитывая то, что значения  $\varepsilon_k$ ,  $\omega_k$  и  $\sigma_{k+1}$  известны на каждом шаге  $k$ , наиболее простым подходом к решению системы (А.3) является метод простых итераций, схема реализации

которого [31, с. 170-172] запишется в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1}^{(i+1)} = \varepsilon_k + h \cdot \frac{f_{k+1}}{\Psi_{k+1}^{(i)}} = \varphi_1(\omega_{k+1}^{(i)}) = \varphi_{1\ k+1}^{(i)}, \\ \omega_{k+1}^{(i+1)} = \omega_k + h \cdot \frac{g_{k+1}}{\Psi_{k+1}^{(i)}} = \varphi_2(\omega_{k+1}^{(i)}) = \varphi_{2\ k+1}^{(i)}, \quad k = 0, \dots, N, \quad i = 0, \dots, i_k, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

где верхними индексами в скобках обозначен номер текущей итерации,  $i_k$  – количество итераций на  $k$ -ом шаге,  $f(\sigma_{k+1}) = f_{k+1}$ ,  $g(\sigma_{k+1}) = g_{k+1}$ ,  $\Psi(\omega_{k+1}^{(i)}) = \Psi_{k+1}^{(i)}$ .

Относительно выбора начального приближения для каждого шага можно рекомендовать при  $k \geq 1$  положить  $\varepsilon_{k+1}^{(0)} = \varepsilon_k = \varepsilon_k^{(i_k)}$  и  $\omega_{k+1}^{(0)} = \omega_k = \omega_k^{(i_k)}$ . Однако при  $k = 0$  такой выбор приведет к делению на ноль, так как начальная точка является предельной особой, поэтому целесообразно в качестве начального приближения выбрать  $\varepsilon_1^{(0)} = \tilde{\varepsilon}$  и  $\omega_1^{(0)} = \tilde{\omega}$ , где  $\tilde{\varepsilon} > 0$ ,  $\tilde{\omega} > 0$ , для которых выполнены достаточные условия сходимости метода простых итераций.

Для проверки достаточного условия сходимости итерационного процесса, вычислим матрицу Якоби системы (A.4)

$$J_{\varphi_1, \varphi_2\ k+1}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -h \cdot \frac{f_{k+1}}{\Psi_{k+1}^{2(i)}} \cdot \Psi'_{k+1}^{(i)} \\ 0 & -h \cdot \frac{g_{k+1}}{\Psi_{k+1}^{2(i)}} \cdot \Psi'_{k+1}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

где  $J_{\varphi_1, \varphi_2\ k+1}^{(i)} = J_{\varphi_1, \varphi_2}(\omega_{k+1}^{(i)})$ ;  $\Psi'_{k+1}^{(i)} = \Psi'(\omega_{k+1}^{(i)}) = \left. \frac{d\Psi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{k+1}^{(i)}}$ .

В данном случае, для матрицы Якоби (A.5) удобно использовать норму  $\|\cdot\|_1$  [31, с. 25]

$$\left\| J_{\varphi_1, \varphi_2\ k+1}^{(i)} \right\|_1 = h \cdot \frac{f_{k+1} + g_{k+1}}{\Psi_{k+1}^{2(i)}} \cdot \left| \Psi'_{k+1}^{(i)} \right|.$$

Согласно достаточному условию сходимости метода простых итераций [31, с. 171-172], норма матрицы Якоби  $\left\| J_{\varphi_1, \varphi_2\ k+1}^{(0)} \right\|_1 < 1$ . Из этого условия получим ограничение на шаг интегрирования

$$0 < h < \frac{\Psi_{k+1}^{2(0)}}{[f_{k+1} + g_{k+1}] \cdot \left| \Psi'_{k+1}^{(0)} \right|}. \quad (\text{A.6})$$

Как можно видеть, для упрочняющихся материалов, так как  $\Psi(0) = 0$  и  $\Psi(1) = 0$ , по теореме Ферма и условиям налагаемым на  $\Psi(\omega)$  в интервале (0,1) должна существовать единственная точка  $\omega_e = \arg \max_{\omega \in [0;1]} \Psi(\omega)$ , такая что  $\Psi'(\omega_e) = 0$ . Учитывая это и неравенство (A.6) можно сказать, что при расчете упрочняющихся конструкций в окрестности начального момента времени шаг стремится к нулю, затем возрастает до точки  $\omega_e$ . После этого шаг начинает убывать до нуля в момент разрушения. Отметим также, что в окрестности точки  $\omega_e$  ограничение (A.6) фактически отсутствует, так как знаменатель стремится к нулю.

## A.2 Гауссов метод четвертого порядка точности

Несмотря на простоту реализации метода ЭНЯ, в случае когда необходимо получить решение высокой точности он может требовать чрезмерного уменьшения шага интегрирования, что приводит к увеличению числа шагов по независимой переменной, а следовательно и времени счета. В этой ситуации методы более высокого порядка точности могут быть эффективнее, хотя и значительно более сложными. Рассмотрим применение гауссового метода четвертого порядка точности (Г4НЯ), являющегося представителем семейства неявных методов Рунге-Кутты. Схема данного метода [99, с. 88] для задачи (A.1)-(A.2) на каждом шаге сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{1}{2} \cdot (K_{1\ k+1} + K_{2\ k+1}), \quad \omega_{k+1} = \omega_k + \frac{1}{2} \cdot (L_{1\ k+1} + L_{2\ k+1}), \\ K_{1\ k+1} = h \cdot \frac{f_{k+1}}{\Psi [\omega_k + L_{1\ k+1}/4 + (1/4 - \sqrt{3}/6) \cdot L_{2\ k+1}]}, \\ K_{2\ k+1} = h \cdot \frac{f_{k+1}}{\Psi [\omega_k + (1/4 + \sqrt{3}/6) \cdot L_{1\ k+1} + L_{2\ k+1}/4]}, \\ L_{1\ k+1} = h \cdot \frac{g_{k+1}}{\Psi [\omega_k + L_{1\ k+1}/4 + (1/4 - \sqrt{3}/6) \cdot L_{2\ k+1}]}, \\ L_{2\ k+1} = h \cdot \frac{g_{k+1}}{\Psi [\omega_k + (1/4 + \sqrt{3}/6) \cdot L_{1\ k+1} + L_{2\ k+1}/4]}, \end{array} \right. \quad k = 0, \dots, N, \quad (\text{A.7})$$

Как и для метода ЭНЯ, применим к решению системы (A.7) метод простых итераций. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \omega_{1\ k+1}^{(i)} &= \omega_k + L_{1\ k+1}^{(i)}/4 + (1/4 - \sqrt{3}/6) \cdot L_{2\ k+1}^{(i)}, \\ \omega_{2\ k+1}^{(i)} &= \omega_k + (1/4 + \sqrt{3}/6) \cdot L_{1\ k+1}^{(i)} + L_{2\ k+1}^{(i)}/4, \\ \Psi_{1\ k+1}^{(i)} &= \Psi (\omega_{1\ k+1}^{(i)}), \quad \Psi_{2\ k+1}^{(i)} = \Psi (\omega_{2\ k+1}^{(i)}), \end{aligned}$$

схему для применения метода простых итераций [31, с. 170-172] можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{k+1}^{(i+1)} = \varepsilon_k + \frac{1}{2} \cdot (K_{1\ k+1}^{(i)} + K_{2\ k+1}^{(i)}) = \varphi_1 (K_{1\ k+1}^{(i)}, K_{2\ k+1}^{(i)}) = \varphi_1^{(i)}, \\ \omega_{k+1}^{(i+1)} = \omega_k + \frac{1}{2} \cdot (L_{1\ k+1}^{(i)} + L_{2\ k+1}^{(i)}) = \varphi_2 (L_{1\ k+1}^{(i)}, L_{2\ k+1}^{(i)}) = \varphi_2^{(i)}, \\ K_{1\ k+1}^{(i+1)} = h \cdot \frac{f_{k+1}}{\Psi_{1\ k+1}^{(i)}} = \varphi_3 (L_{1\ k+1}^{(i)}, L_{2\ k+1}^{(i)}) = \varphi_3^{(i)}, \\ K_{2\ k+1}^{(i+1)} = h \cdot \frac{f_{k+1}}{\Psi_{2\ k+1}^{(i)}} = \varphi_4 (L_{1\ k+1}^{(i)}, L_{2\ k+1}^{(i)}) = \varphi_4^{(i)}, \\ L_{1\ k+1}^{(i+1)} = h \cdot \frac{g_{k+1}}{\Psi_{1\ k+1}^{(i)}} = \varphi_5 (L_{1\ k+1}^{(i)}, L_{2\ k+1}^{(i)}) = \varphi_5^{(i)}, \\ L_{2\ k+1}^{(i+1)} = h \cdot \frac{g_{k+1}}{\Psi_{2\ k+1}^{(i)}} = \varphi_6 (L_{1\ k+1}^{(i)}, L_{2\ k+1}^{(i)}) = \varphi_6^{(i)}, \end{array} \right. \quad k = 0, \dots, N, \quad i = 0, \dots, i_k. \quad (\text{A.8})$$

Матрица Якоби для системы (A.8) имеет вид

$$J_{\varphi_1, \dots, \varphi_6}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{4} f_{k+1} R_{1\ k+1}^{(i)} & -h \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) f_{k+1} R_{1\ k+1}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) f_{k+1} R_{2\ k+1}^{(i)} & -\frac{h}{4} f_{k+1} R_{2\ k+1}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{4} g_{k+1} R_{1\ k+1}^{(i)} & -h \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) g_{k+1} R_{1\ k+1}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) g_{k+1} R_{2\ k+1}^{(i)} & -\frac{h}{4} g_{k+1} R_{2\ k+1}^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Здесь введены следующие обозначения

$$R_{1\ k+1}^{(i)} = \frac{\Psi'_{1\ k+1}^{(i)}}{\Psi_{1\ k+1}^{(i)}}, \quad R_{2\ k+1}^{(i)} = \frac{\Psi'_{2\ k+1}^{(i)}}{\Psi_{2\ k+1}^{(i)}}, \quad \Psi'_{1\ k+1}^{(i)} = \Psi'(\omega_{1\ k+1}^{(i)}), \quad \Psi'_{2\ k+1}^{(i)} = \Psi'(\omega_{2\ k+1}^{(i)}).$$

Используя для матрицы Якоби (A.9) ту же норму, что и для (A.5), получим

$$\|J_{\varphi_1, \dots, \varphi_6}^{(i)}\|_1 = 1/2 + h \cdot (f_{k+1} + g_{k+1}) \cdot \left[ |R_{1\ k+1}^{(i)}|/4 + \left(1/4 + \sqrt{3}/6\right) \cdot |R_{2\ k+1}^{(i)}| \right]. \quad (\text{A.10})$$

Преобразовав (A.10), окончательно получим

$$\|J_{\varphi_1, \dots, \varphi_6}^{(i)}\|_1 = \frac{1}{2} + h \cdot \left[ \frac{|\Psi'_{1\ k+1}^{(i)}| \cdot \Psi_{2\ k+1}^{(i)2}/4 + (1/4 + \sqrt{3}/6) \cdot |\Psi'_{2\ k+1}^{(i)}| \cdot \Psi_{1\ k+1}^{(i)2}}{(f_{k+1} + g_{k+1})^{-1} \cdot \Psi_{1\ k+1}^{(i)2} \cdot \Psi_{2\ k+1}^{(i)2}} \right].$$

Согласно достаточному условию сходимости метода простых итераций [31, с. 171-172], норма матрицы Якоби  $\|J_{\varphi_1, \dots, \varphi_6}^{(0)}\|_1 < 1$ , откуда получим ограничение на шаг интегрирования

$$0 < h < \frac{(f_{k+1} + g_{k+1})^{-1} \cdot \Psi_{1\ k+1}^{(0)2} \cdot \Psi_{2\ k+1}^{(0)2}}{\left[ |\Psi'_{1\ k+1}^{(0)}| \cdot \Psi_{2\ k+1}^{(0)2}/2 + (1/2 + \sqrt{3}/3) \cdot |\Psi'_{2\ k+1}^{(0)}| \cdot \Psi_{1\ k+1}^{(0)2} \right]}. \quad (\text{A.11})$$

Если преобразовать неравенство (A.11)

$$0 < h < \frac{(f_{k+1} + g_{k+1})^{-1} \cdot \Psi_{1\ k+1}^{(0)2}}{\left[ |\Psi'_{1\ k+1}^{(0)}|/2 + (1/2 + \sqrt{3}/3) \cdot |\Psi'_{2\ k+1}^{(0)}| \cdot \frac{\Psi_{1\ k+1}^{(0)2}}{\Psi_{2\ k+1}^{(0)2}} \right]},$$

то можно видеть, что характер изменения шага остается такой же, что и для метода ЭНЯ, так как значения  $\omega_{1\ k+1}^{(i)}$  и  $\omega_{2\ k+1}^{(i)}$  мало отличаются, а значение  $\frac{\Psi_{1\ k+1}^{(0)2}}{\Psi_{2\ k+1}^{(0)2}}$  не равно нулю или бесконечности. Тем не менее шаг для метода Г4НЯ должен быть немного меньше, чем для метода ЭНЯ в окрестности особой точки. Более того, так как в общем случае  $\omega_{1\ k+1}^{(i)} \neq \omega_{2\ k+1}^{(i)}$ , то знаменатель неравенства (A.11) может быть очень мал, но обращается в ноль лишь в исключительных случаях.

## Приложение Б

### Результаты экспериментов

#### Экспериментальные данные для образцов из титанового сплава ОТ-4

В первом разделе приложения Б приводятся результаты эксперимента для плоских образцов из титанового сплава ОТ-4, подвергающихся одноосному растяжению при постоянных напряжениях и температуре  $T = 500^\circ\text{C}$ .

Таблица 44. Экспериментальные данные для образцов из сплава ОТ-4,  $\sigma_0 = 98$  МПа

	1	2	3	4	5	6
$t$ , ч	0	91.892	185.676	308.108	393.243	441.891
$\varepsilon$	0	0.041	0.091	0.193	0.341	0.693

Таблица 45. Экспериментальные данные для образцов из сплава ОТ-4,  $\sigma_0 = 112.7$  МПа

	1	2	3	4	5	6	7
$t$ , ч	0	53.243	95.405	151.351	190	204.054	212.703
$\varepsilon$	0	0.047	0.095	0.209	0.331	0.412	0.517

Таблица 46. Экспериментальные данные для образцов из сплава ОТ-4,  $\sigma_0 = 147$  МПа

	1	2	3	4	5	6	7
$t$ , ч	0	27.027	45.946	57.568	62.162	64.324	65.405
$\varepsilon$	0	0.057	0.155	0.275	0.399	0.493	0.605

## Экспериментальные данные для образцов из стали 45

Во втором разделе приложения Б приводятся результаты эксперимента для цилиндрических образцов из стали 45 диаметра  $d = 42$  мм, подвергающихся одноосному растяжению при постоянных напряжениях и температуре  $T = 850$  °С.

Таблица 47. Экспериментальные данные для цилиндрических образцов из стали 45,  $\sigma_0 = 35$  МПа

	1	2	3	4	5	6	7
$t$ , ч	0.51	0.98	1.461	1.918	2.441	2.935	3.433
$\varepsilon$	0.044	0.081	0.109	0.141	0.163	0.175	0.195
$\omega$	0.084	0.157	0.211	0.273	0.316	0.34	0.378
	8	9	10	11	12	13	14
$t$ , ч	3.902	4.445	4.898	5.327	5.837	6.531	6.706
$\varepsilon$	0.211	0.234	0.249	0.264	0.287	0.379	0.516
$\omega$	0.41	0.454	0.482	0.512	0.557	0.735	1

Таблица 48. Экспериментальные данные для цилиндрических образцов из стали 45,  $\sigma_0 = 40$  МПа

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t$ , ч	0.286	0.51	0.735	0.906	1.429	2	2.429	2.714	2.947	2.98
$\varepsilon$	0.05	0.111	0.155	0.187	0.24	0.3	0.366	0.412	0.505	0.616
$\omega$	0.0808	0.18	0.253	0.303	0.39	0.487	0.595	0.67	0.82	1

Таблица 49. Экспериментальные данные для цилиндрических образцов из стали 45,  $\sigma_0 = 45$  МПа

	1	2	3	4	5	6
$t$ , ч	0.088	0.273	0.392	0.527	0.637	0.739
$\varepsilon$	0.007	0.072	0.134	0.183	0.232	0.273
$\omega$	0.012	0.113	0.211	0.29	0.366	0.431
	7	8	9	10	11	12
$t$ , ч	0.857	0.996	1.061	1.163	1.184	1.224
$\varepsilon$	0.318	0.368	0.413	0.468	0.541	0.633
$\omega$	0.503	0.581	0.652	0.738	0.854	1

## Экспериментальные данные для образцов из титанового сплава ЗВ

В диссертационной работе рассматриваются две задачи для элементов конструкций из анизотропного титанового сплава ЗВ:

1. Одноосное растяжение прямоугольных образцов из анизотропного титанового сплава ЗВ при постоянных напряжениях и температуре  $T = 20^\circ\text{C}$ . При расчете используются образцы двух типов [95]: **1)** вырезанные в направлении прокатки листа (продольные образцы), **2)** вырезанные в направлении перпендикулярном к направлению прокатки (поперечные образцы).
2. Одноосное растяжение круглых стержней из титанового сплава ЗВ при постоянных напряжениях и температуре  $T = 20^\circ\text{C}$  [21].

Ниже приводятся результаты экспериментов для двух указанных задач.

Таблица 50. Экспериментальные данные для продольных прямоугольных образцов из сплава ЗВ,  $\bar{\sigma}_0 = 1.25$

	1	2	3	4	5	6	7
$t$ , ч	182.4	700.8	1315.2	2150.4	2812.8	3801.6	4996.8
$\omega$	0.217	0.277	0.315	0.354	0.379	0.395	0.434
	8	9	10	11	12	13	14
$t$ , ч	6060	7121.2	8116.6	9115.7	10070.4	11003.8	12890
$\omega$	0.437	0.464	0.49	0.513	0.528	0.551	0.587
	15	16	17	18	19	20	
$t$ , ч	13899.5	14898.2	15846.7	16081.4	16134.1	16167.2	
$\omega$	0.622	0.673	0.737	0.79	0.911	0.998	

Таблица 51. Экспериментальные данные для продольных прямоугольных образцов из сплава ЗВ,  $\bar{\sigma}_0 = 1.28$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t$ , ч	86.7	443.4	1050.6	1792.8	2149.4	2631.3	2949.4	3363.9	3412	3450.6
$\omega$	0.266	0.343	0.389	0.444	0.488	0.528	0.573	0.662	0.738	0.81

Таблица 52. Экспериментальные данные для продольных прямоугольных образцов из сплава ЗВ,  $\bar{\sigma}_0 = 1.31$

	1	2	3	4	5	6	7
$t, \text{ч}$	9.4	35.8	96	159.1	256	358.6	492.2
$\omega$	0.178	0.234	0.298	0.336	0.375	0.4	0.432
	8	9	10	11	12	13	14
$t, \text{ч}$	602.4	714.8	836.7	1015.5	1105.9	1203.8	1251.8
$\omega$	0.465	0.505	0.537	0.612	0.64	0.699	0.753
	15	16	17				
$t, \text{ч}$	1298.8	1303.5	1303.5				
$\omega$	0.846	0.93	0.992				

Таблица 53. Экспериментальные данные для поперечных прямоугольных образцов из сплава ЗВ,  $\bar{\sigma}_0 = 1.35$

	1	2	3	4	5	6	7
$t, \text{ч}$	23.5	47.1	106.4	173.2	298.4	384	400
$\omega$	0.104	0.161	0.219	0.246	0.279	0.28	0.294
	8	9	10	11	12	13	14
$t, \text{ч}$	489.412	634.4	751.1	787.2	928	1091.8	1233.9
$\omega$	0.301	0.31	0.313	0.329	0.332	0.339	0.348
	15	16	17	18	19	20	21
$t, \text{ч}$	1356.2	1459.2	1485.2	1581.2	2568	3340.8	4003.2
$\omega$	0.358	0.366	0.372	0.38	0.439	0.481	0.524
	22	23	24	25	26		
$t, \text{ч}$	4684.8	5404.8	5827.2	5904	5952		
$\omega$	0.569	0.605	0.668	0.715	0.848		

В таблицах 50-53  $\bar{\sigma}_0$  является безразмерным начальным напряжением, получаемым в результате деления действующего напряжения  $\sigma_0$  на предел ползучести  $\sigma_c$ .

Таблица 54. Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава 3В,  $\sigma_0 = 603$  МПа

	1	2	3	4	5	6	7	8
$t$ , ч	549.9	1042.3	1749.9	2256.8	2734.9	3021.8	3299.1	3452.1
$A$ , МДж/м <sup>3</sup>	21.767	25.029	28.29	31.885	35.247	38.142	43.933	54.584
$\varepsilon$	0.036	0.042	0.047	0.053	0.058	0.063	0.073	0.091

Таблица 55. Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава 3В,  $\sigma_0 = 618$  МПа

	1	2	3	4	5
$t$ , ч	133.9	172.1	382.5	573.8	860.6
$A$ , МДж/м <sup>3</sup>	15.443	21.301	25.894	29.888	35.08
$\varepsilon$	0.025	0.034	0.42	0.048	0.057

	6	7	8	9	10
$t$ , ч	1032.8	1118.8	1166.6	1204.9	1247.8
$A$ , МДж/м <sup>3</sup>	39.474	44.998	49.225	53.785	58.545
$\varepsilon$	0.064	0.073	0.08	0.087	0.095

Таблица 56. Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава 3В,  $\sigma_0 = 638$  МПа

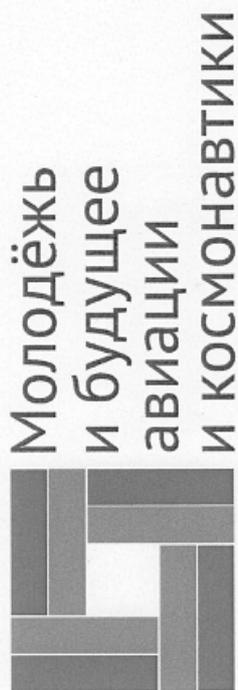
	1	2	3	4	5
$t$ , ч	3.8	4.3	26.4	88.7	148.3
$A$ , МДж/м <sup>3</sup>	8.787	18.605	24.829	30.753	35.946
$\varepsilon$	0.014	0.029	0.039	0.048	0.056

	6	7	8	9	10
$t$ , ч	205.5	235.7	244.1	248	249.9
$A$ , МДж/м <sup>3</sup>	42.602	47.595	52.587	60.042	65.368
$\varepsilon$	0.067	0.075	0.082	0.094	0.102

## Приложение В

### Грамоты, дипломы, патенты



*Международный межотраслевой молодёжный научно-технический форум*  
Конкурс научно-технических работ и проектов

# ГРАМОТА

награждается

**Леонов Сергей Сергеевич**

Московский авиационный институт

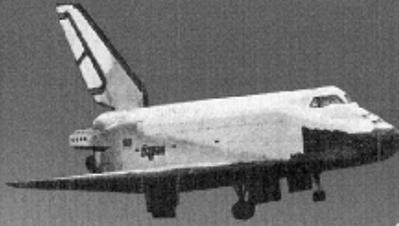
за работу «Математическое моделирование и численные методы решения задач ползучести»

представленную на конкурс и форум «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики»



Председатель О  
Ректор МАИ

А. Н. Герашченко



# ПОЧЁТНАЯ ГРАМОТА

*25 лет со дня запуска универсальной  
ракетно-космической транспортной  
системы «Энергия – Буран»*

НАГРАЖДАЕТСЯ

**Леонов Сергей Сергеевич**

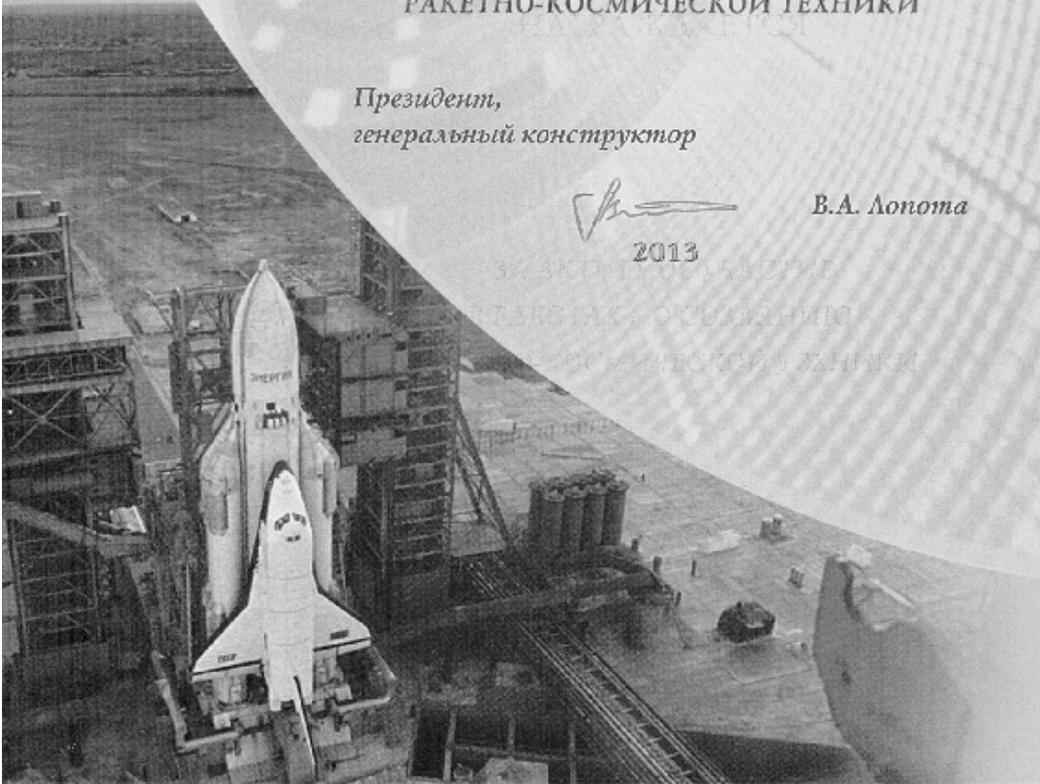
*участник форума «Молодежь и будущее  
авиации и космонавтики – 2013»*

ЗА АКТИВНОЕ УЧАСТИЕ  
В РАБОТАХ ПО СОЗДАНИЮ  
РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

*Президент,  
генеральный конструктор*

*В.А. Лопота*

2013



# ПОЧЕТНАЯ ГРАМОТА

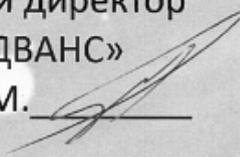
Вручается участнику межрегионального молодёжного конкурса научно-технических работ и проектов «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики» 2013 г.

**Леонову Сергею Сергеевичу**

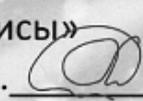
автору проекта «Математическое моделирование и численные методы решения задач ползучести» от компаний **Т-Сервисы** и **DATADVANCE** за высокую актуальность, научную новизну, высокую степень технической и технологической проработки проекта и возможность его практического внедрения.

Компании **Т-Сервисы** и **DATADVANCE** от всей души желают Вам успехов в учебе, научной деятельности и карьере!

Генеральный директор  
ООО «ДАТАДВАНС»  
Морозов С.М.



Исполнительный директор  
ЗАО «Т-Сервисы»  
Лапшина Е.В.



**DATADVANCE**

AN EADS COMPANY

**Т-СЕРВИСЫ**

холдинг Т-Платформы



# ДИПЛОМ

Участнику XIX Международной конференции по  
Вычислительной механике и современным прикладным  
программным системам (ВМСПМС'2015)

*Леонову Сергею Сергеевичу*

*за научные результаты, представленные в докладе*

*Васильев А.Н., Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.  
«Нейросетевое моделирование в задаче идентификации  
характеристик ползучести»*

*на секции*

*«Информационные технологии, базы и хранилища  
данных. Интеллектуальные вычисления и  
нейросетевые технологии»*

*Сопредседатель Оргкомитета конференции:*

*Академик РАН*

*И.Т. Горячева*

*Члены Оргкомитета:*

*Академик РАН*

*М.Я. Маров*

*Член-корреспондент РАН*

*С.И. Суржиков*



# ДИПЛОМ

Участнику XI Международной конференции по  
Неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ 2016)

**Леонову Сергею Сергеевичу**

за научные результаты, представленные в докладе  
**Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.**

«О параметрах продолжения решения для задач  
ползучести»

на секции

«Общая механика, механика деформируемого  
твёрдого тела»

Сопредседатель Оргкомитета конференции

Академик РАН

 Г.А. Попов

Члены Оргкомитета:

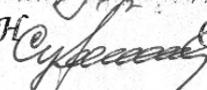
Академик РАН

 М.Я. Маров

Одобрительный  
член корреспондент РАН

 Д.А. Губайдуллин

Член корреспондент РАН

 С.П. Суржигов



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016613378

«Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации»

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU)*

Авторы: *Леонов Сергей Сергеевич (RU),  
Кузнецов Евгений Борисович (RU)*

Заявка № 2015662953

Дата поступления 23 декабря 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 25 марта 2016 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

## Приложение Г

### Комплекс программ «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации»

В данном приложении дается описание комплекса программ «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016613378), используемого для решения начальных задач в первых трех главах. Общая блок-схема данного программного комплекса изображена на рис. Г.1.



Рис. Г.1. Блок-схема программного комплекса

### Краткое описание программного комплекса

**Авторы:** Леонов Сергей Сергеевич, Кузнецов Евгений Борисович.

**Правообладатель:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

**Программа:** «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации».

**Аннотация:** Основным предназначением программы «Численное решение задачи Коши. Метод наилучшей параметризации» является решение начальных задач (задач Коши) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые возникают в авиационной и ракетно-космической отраслях (например, задача расчета прочностных характеристик конструкции, траекторий полета летательного аппарата и т. д.). Однако, программа может использоваться при решении начальных задач, возникающих в любой отрасли,

без ограничения функциональности. Входными данными служат символьные массивы аргумента, переменных и правых частей системы ОДУ, а также числовые массивы начальных условий, начальной и конечной точек. Программа позволяет проводить численное решение нежестких задач Коши явными методами Эйлера, Эйлера-Коши и Рунге-Кутты 4 порядка точности с постоянным или переменным шагом интегрирования. Вывод полученных решений осуществляется в числовом (с записью в файл) или графическом виде (с последующим сохранением). Впервые реализовано автоматическое преобразование вводимой задачи к наилучшему аргументу, что позволяет также решать плохо обусловленные и слабо жесткие задачи.

**Тип ЭВМ:** IBM PC – совместимый ПК.

**Язык:** Matlab.

**Операционная система:** Windows 7, домашняя расширенная, service pack 1.

**Объем программы:** 104 Кб.

## Используемые численные методы

В рамках программного комплекса было реализовано три явных метода решения задачи Коши: методы Эйлера, Эйлера-Коши и Рунге-Кутты 4 порядка точности. В программном комплексе реализованы варианты указанных методов как с постоянным шагом интегрирования, так и с переменным.

Для переменного шага интегрирования ниже приводятся программы для

1. метода Эйлера

```
%Реализация явного метода Эйлера с переменным шагом
function [xr,yr,c] = Euler_var(x0,y0,h0,x1,fun,eps)
5
% Задание начальных данных, шага и счетчика сделанных шагов
B(1)=x0;
A(:,1)=y0;
iter=1;
10 h=h0;

% Задание параметра аварийной остановки
b=0;

15 % Задание вектор-функции правой части
fun=char(fun);
F=inline(fun,'xarg','yarg');
```

```

    %Алгоритм явного метода Эйлера с переменным шагом
20 while B(iter) < x1
        M=F(B(iter),A(:,iter));
        A(:,iter+1)=A(:,iter)+h*M;
        H=A(:,iter)+2*h*M;
        % Аварийный выход
25     if isequal(norm(A(:,iter+1),2),Inf)
            warndlg(sprintf('При решении получены неограниченно воз-
                растающие компоненты. \n Рекомендуется использовать ме-
                тод наилучшей параметризации. '));
            b=1;
            break;
        end;
30     % Вычисление нормы разности решений с шагом h и 2h
        s=norm(H-A(:,iter+1),2);
        % Процедура Рунге-Ромберга-Ричардсона контроля точности
        if s>eps
            h=h/2;
35     else
            B(iter+1)=B(iter)+h;
            iter=iter+1;
            if s<(0.5*eps)
                h=2*h;
40     end;
        end;
    end;

    eps=1e-10;
45
    % Запись результата
    if B(iter)>x1+eps
        B(iter)=[];
        A(:,iter)=[];
50 end;

    xr=B;
    yr=A;
    c=b;

```

2. метода Эйлера-Коши

```

%Реализация явного метода Эйлера-Коши с переменным шагом
function [xr,yr,c] = Euler_Cauchy_var(x0,y0,h0,x1,fun,eps)

5 % Задание начальных данных, шага и счетчика сделанных шагов
B(1)=x0;
A(:,1)=y0;
iter=1;
h=h0;

10 % Задание параметра аварийной остановки
b=0;

% Задание вектор-функции правой части
15 fun=char(fun);
F=inline(fun,'xarg','yarg');

%Алгоритм явного метода Эйлера-Коши с переменным шагом
while B(iter) < x1
20     M=F(B(iter),A(:,iter));
        L=A(:,iter)+h*M;
        A(:,iter+1)=A(:,iter)+h*(M+F(B(iter)+h,L))./2;
        L=A(:,iter)+2*h*M;
        N=A(:,iter)+2*h*(M+F(B(iter)+2*h,L))./2;
25     % Аварийный выход
        if isequal(norm(A(:,iter+1),2),Inf)
            warndlg(sprintf('При решении получены неограниченно воз-
                растающие компоненты. \n Рекомендуется использовать ме-
                тод наилучшей параметризации. '));
            b=1;
            break;
30     end;
        % Вычисление 'нормы' разности решений с шагом h и 2h
        s=norm(N-A(:,iter+1),2)/3;
        % Процедура Рунге-Ромберга-Ричардсона контроля точности
        if s>eps
35             h=h/2;
        else
            B(iter+1)=B(iter)+h;
            iter=iter+1;
            if s<(0.5*eps)

```

```

40         h=2*h;
           end;
       end;
end;

45 eps=1e-10;

% Запись результата
if B(iter)>x1+eps
    B(iter)=[];
50    A(:,iter)=[];
end;

xr=B;
yr=A;
55 c=b;

```

### 3. метода Рунге-Кутты 4 порядка точности

```

%Реализация явного метода Рунге-Кутты с переменным шагом
function [xr,yr,c] = Runge_var(x0,y0,h0,x1,fun,eps)

5 % Задание начальных данных, шага и счетчика сделанных шагов
B(1)=x0;
A(:,1)=y0;
iter=1;
h=h0;

10 % Задание параметра аварийной остановки
b=0;

% Задание вектор-функции правой части
15 fun=char(fun);
F=inline(fun,'xarg','yarg');

%Алгоритм явного метода Рунге-Кутты с переменным шагом
while B(iter) < x1
20    K1=F(B(iter),A(:,iter));
        K2=F(B(iter)+h/2,A(:,iter)+h*K1./2);
        K3=F(B(iter)+h/2,A(:,iter)+h*K2./2);
        K4=F(B(iter)+h,A(:,iter)+h*K3);
        D=h*(K1+2*K2+2*K3+K4)./6;

```

```

25   A(:, iter+1)=A(:, iter)+D;
      K2=F(B(iter)+2*h/2,A(:, iter)+2*h*K1./2);
      K3=F(B(iter)+2*h/2,A(:, iter)+2*h*K2./2);
      K4=F(B(iter)+2*h,A(:, iter)+2*h*K3);
      D=2*h*(K1+2*K2+2*K3+K4)./6;
30   N=A(:, iter)+D;
      % Аварийный выход
      if isequal(norm(A(:, iter+1),2), Inf)
          warndlg(sprintf('При решении получены неограниченно воз-
              растающие компоненты. \n Рекомендуется использовать ме-
              тод наилучшей параметризации. '));
          b=1;
35       break;
      end;
      % Вычисление 'нормы' разности решений с шагом h и 2h
      s=norm(N-A(:, iter+1),2)/15;
      % Процедура Рунге-Ромберга-Ричардсона контроля точности
40   if s>eps
          h=h/2;
      else
          B(iter+1)=B(iter)+h;
          iter=iter+1;
45       if s<(0.5*eps)
              h=2*h;
          end;
      end;
      end;
      end;
50   eps=1e-10;

      % Запись результата
      if B(iter)>x1+eps
55         B(iter)=[];
          A(:, iter)=[];
      end;

      xr=B;
60   yr=A;
      c=b;

```

Изменение шага интегрирования производится при помощи процедуры оценки локальной погрешности решения в каждой точке по методу Рунге-Ромберга-Ричардсона. Программы для постоянного шага могут быть получены из приведенных выше путем исключения процедуры смены шага.

Помимо указанных выше методов в программном комплексе впервые реализована символьная процедура преобразования системы ОДУ к наилучшему аргументу  $\lambda$ , имеющая вид

```

%Реализация явного метода Эйлера-Коши с постоянным шагом, параметризация
function [xr,yr] = Euler_Cauchy_param_const(x0,y0,h0,x1,fun,M)

5 % Задание начальных данных, шага и счетчика сделанных шагов
B(1)=x0;
A(:,1)=y0;
iter=1;
h=h0;

10 % Процесс символьной параметризации исходной задачи
s=sym(1);

for j=1:M
15     s=s+(fun(j))^2;
end;

t=1/s;

20 t=simplify(t);

for i=1:M
    s(i)=(1/fun(i))^2;
    for j=1:M
25     s(i)=s(i)+(fun(j)/fun(i))^2;
    end;
end;

for i=1:M
30 s(i)=sqrt(s(i));
end;

for i=1:M
    fun(i)=1/s(i);

```

```

35 end;

fun=simplify(fun);

t=char(t);
40
T=inline(t,'xarg','yarg');

fun=char(fun);

45 F=inline(fun,'xarg','yarg');

```

Переход к наилучшему аргументу  $\lambda$  позволяет эффективно решать задачи Коши для систем ОДУ с несколькими ПОТ.

## Интерфейс программного комплекса

При запуске комплекса открывается титульный экран, изображенный на рис. Г.2.

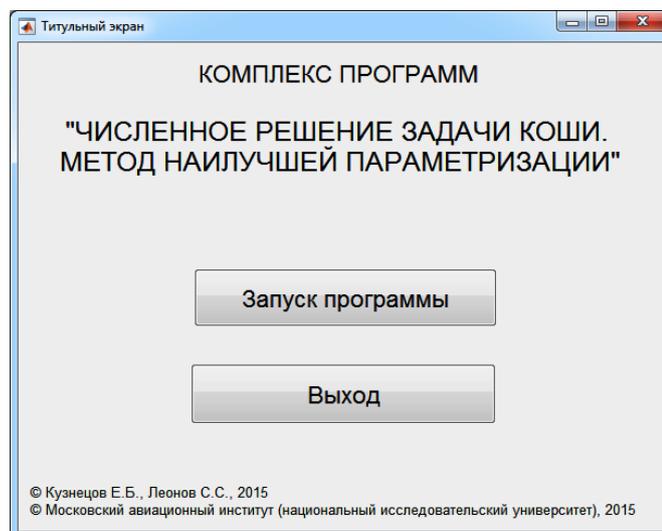


Рис. Г.2. Титульный экран комплекса программ

После титульного окна программный комплекс переходит к окну вводу системы ОДУ и начальных условий для дальнейшего решения (рис. Г.3). Также экран «Задача Коши» позволяет выбрать метод решения (рис. Г.4), в том числе и наилучшую параметризацию, и параметры вывода результата (рис. Г.5). После численного решения задачи Коши результаты могут быть сохранены в файл или выведены на печать в виде графика (рис. Г.6) с возможностью сохранения изображения.

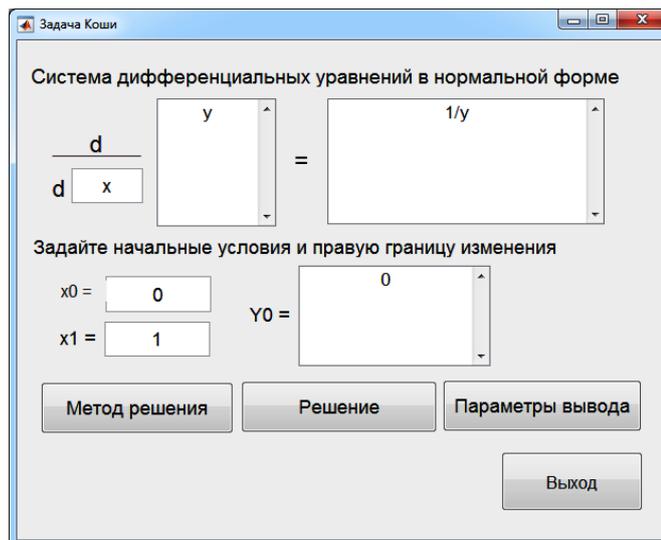


Рис. Г.3. Экран для задания условий задачи Коши

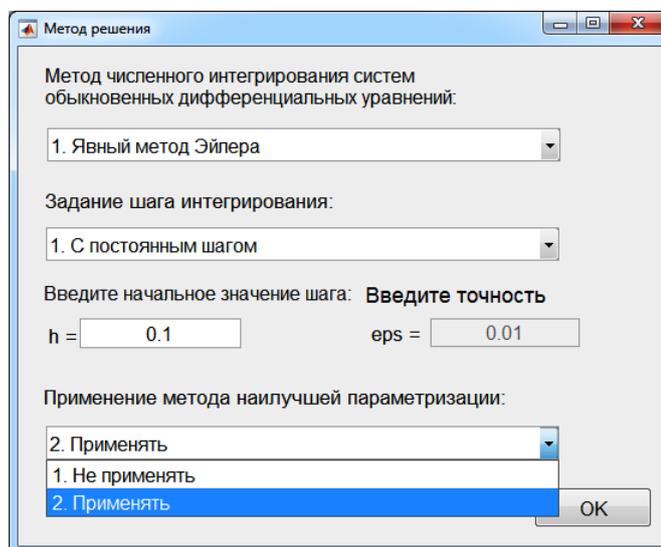


Рис. Г.4. Экран выбора метода решения

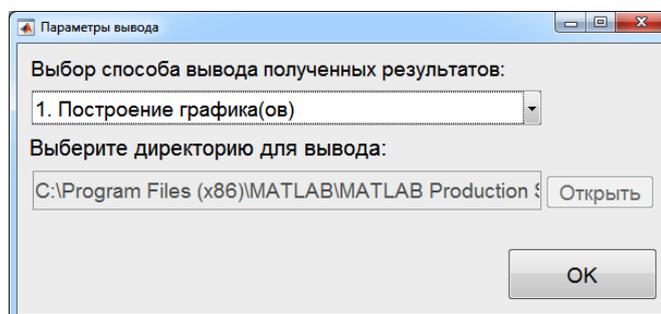


Рис. Г.5. Экран выбора параметров вывода результатов

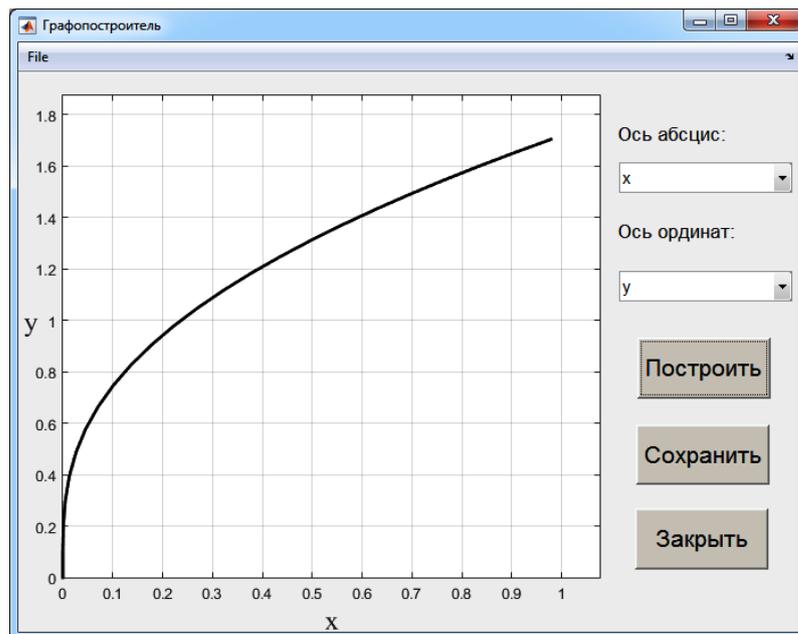


Рис. Г.6. Экран построения графиков