

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
**«Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»**

На правах рукописи



**Березко Максим Эдуардович**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ  
В РАСШИРЕННОМ КНУДСЕНОВСКОМ СЛОЕ**

*Специальность: 1.1.9. – Механика жидкости, газа и плазмы*

**АВТОРЕФЕРАТ**

Диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022 год

Работа выполнена на кафедре «Аэродинамика летательных аппаратов» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:

**Никитченко Юрий Алексеевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Официальные оппоненты:

**Кузнецов Михаил Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии государственного образовательного учреждения высшего образования Московской области «Московский государственный областной университет»

**Хатунцева Ольга Николаевна**, доктор физико-математических наук, ученый секретарь публичного акционерного общества «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»

Ведущая организация:

Федеральное автономное учреждение «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского» (ФАУ «ЦАГИ»)

Защита диссертации состоится «29» декабря 2022 г. в 12 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.08 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте МАИ по ссылке: [https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=168930](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=168930)

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

Отзывы на автореферат в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
24.2.327.08, д.ф.-м.н., с.н.с.



Гидаспов В.Ю.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы исследования

В настоящее время одной из актуальных задач современной механики газов и плазмы является описание сверх- и гиперзвуковых течений с высокими числами Маха и Кнудсена. В этой области течения имеют место процессы, которые характеризуются высокой динамической неравновесностью, обусловленной высокими градиентами параметров течения и малым временем протекания этих процессов. Количественная оценка степени неравновесности приведена далее в настоящей работе.

В неравновесной газовой среде энергия неравномерно распределена между степенями свободы молекул, как поступательными, так и внутренними, и использование методов модели сплошной среды приводит к существенным количественным, а в отдельных случаях и качественным погрешностям.

Физически адекватно описать неравновесное течение позволяют кинетические модели и соответствующие им граничные условия, которые позволяют описать течение на молекулярном уровне, но кинетический расчёт поля течения слишком не экономичен в смысле количества вычислительных операций.

Повысить скорость вычисления помогают комбинированные кинетико-гидродинамические модели, которые используют кинетические модели только в областях, в которых важно учитывать микроскопические эффекты (неравновесные области). В остальной области, для экономии вычислительных ресурсов и ускорения вычислений, используются менее информативные гидродинамические модели.

Также особый интерес представляет задача обтекания потоком газа поверхностей большой кривизны. К такого рода задачам можно отнести гиперзвуковое обтекание передней кромки бесконечно тонкой пластины. В области передней кромки существует неравновесная высокоградиентная область. В этой области, называемой далее расширенным кнудсеновским слоем, существует разрыв функций распределения молекул по скоростям и применение

традиционных методов вычислительной аэродинамики приводит к принципиальным ошибкам.

**Цель** диссертационной работы – создание эффективных методов расчёта высоконеровесных течений.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

- Разработка эффективных методов сшивания кинетической и гидродинамической моделей.
- Изучение различных моделей гидродинамического приближения и типа граничных условий для выбора наиболее точных и экономичных,
- Разработка физически адекватной дискретизации пространства в окрестности поверхностей большой кривизны

**Объект исследования** – течения высокой степени динамической неравновесности.

**Предмет исследования** – физико-математические модели неравновесных течений однокомпонентных газов.

**Методология и методы исследования.**

В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученной гибридной модели использовался метод численного эксперимента. В численных экспериментах рассматривались вырожденные течения: плоское течение Куэтта, обтекание тонкой пластины гиперзвуковым потоком.

**Научная новизна** диссертационной работы состоит в следующем:

- Предложен метод описания высоко неравновесных течений в пристеночных областях, описывающий взаимодействие газа с поверхностью на молекулярном уровне.
- Показано, что в качестве гидродинамической составляющей кинетико-гидродинамических моделей целесообразно использовать модель Навье-Стокса-Фурье.

- Разработан метод решения модельного кинетического уравнения в окрестности абсолютно острой кромки, позволяющий учитывать разрывы функции распределения в расширенном кнудсеновском слое.

**На защиту выносятся:**

- Физико-математическая модель течения в пристеночной области.
- Метод решения модельного кинетического уравнения в окрестности поверхности большой кривизны.

- Интервалы применимости по числам Маха и Кнудсена граничных условий прилипания и граничных условий скольжения погранслоя на твердой поверхности.

**На защиту, также выносятся положения:**

- В качестве гидродинамической составляющей кинетико-гидродинамической модели целесообразно использовать систему моментных уравнений неполного второго порядка (модель Навье-Стокса-Фурье). В области пристеночных течений повышение порядка системы моментных уравнений не приводит к повышению точности модели.

- В особой точке, разделяющей газовую среду и острую кромку, газодинамические параметры претерпевают разрыв второго рода, причем значения параметра в самой особой точке выходит за границы интервала, ограниченного значениями параметра в окрестностях этой точки.

**Научная и практическая значимость работы.**

- Изучены основные свойства кинетико-гидродинамической модели применительно к пристеночным течениям.

- Получено численное решение задачи обтекания поверхности большой кривизны.

- Практическая значимость работы заключается в возможности разработки вычислительных ядер CFD-пакетов, ориентированных на расчеты высокоскоростных и разреженных течений.

**Достоверность результатов исследования** подтверждена сравнением полученных расчетных данных с данными экспериментальных исследований разных авторов.

### **Апробация и внедрение результатов.**

Материалы работы докладывались:

- Гагаринские чтения – 2017: XLII Международная молодёжная научная конференция. Доклад «Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта»
- 18-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019». Доклад «Сравнение комбинированных кинетико-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта»
- 19-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2020». Доклад «Методика построения расчётных сеток с выделением поверхности разрыва для решения кинетических уравнений»
- XXII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. Доклад "Метод решения модельного кинетического уравнения в окрестности абсолютно острой кромки обтекаемого тела".
- Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбГПУ – НИИМ МГУ. Доклад «Физико-математические модели пристеночных течений в расширенном кнудсеновском слое». 4 октября 2022 года.

Результаты работы использованы в учебном процессе МАИ:

- в курсе «Динамика неравновесных сред», читаемом студентам специальности 24.03.03
- в курсе «Современные модели неравновесных течений», читаемом аспирантам специальности 05.07.01.

Зарегистрированы программные продукты:

- «Программа расчёта газодинамических параметров в течении Куэтта с использованием кинетико-гидродинамической модели», свидетельство о регистрации №2021667827

- «Программа расчёта гиперзвукового обтекания тонкой пластины, установленной параллельно потоку», свидетельство о регистрации №2022612341

### **Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из введения, списка сокращений и условных обозначений, трёх глав, заключения и библиографического списка. Общий объём составляет 102 страницы, включая 33 рисунка. Библиографический список содержит 104 наименования.

Представленная диссертационная работа является одним из результатов комплексной исследовательской работы в области неравновесной газовой динамики, проводимой на кафедре «Аэродинамика ЛА» МАИ. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, номер темы FSFF-2020-0013.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность в разработке эффективных методов расчёта течений высокой неравновесности однокомпонентных газов, сформулированы цель и задачи работы, выделена научная новизна и теоретическая значимость работы, представлена общая структура диссертации.

**В первой главе** рассматривается метод комбинирования гидродинамической и кинетической моделей. Разработан метод комбинирования моделей для многоатомных газов. Проведён анализ результатов при использовании в качестве гидродинамической модели систем моментных уравнений различных порядков.

В качестве гидродинамической модели использована система моментных уравнений неполного 2-го порядка, которая соответствует модели Навье-Стокса-Фурье (НСФ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$p_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} c_\mu \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (2)$$

$$q_i = -\frac{c_p}{Pr} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$c_\mu = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5 - 3\gamma}{2} h \right) \quad (4)$$

В этих выражениях:

$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p$  – тензор напряжений,  $T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}$  – удельные напряжения;

$\mu = \mu(T^s)$  – коэффициент вязкости, – свободный параметр модели;

$h = Z \frac{(7-2s)(5-2s)}{30}$  – свободный параметр модели, имеющий смысл отношения

времени поступательно-вращательной релаксации к времени поступательно-поступательной релаксации энергии молекул, в настоящей работе принят  $h = 5$ .

Величина  $\frac{1}{Z}$  в выражении представляет долю неупругих столкновений по отношению к общему числу столкновений молекул;  $s$  – показатель степени температуры в аппроксимации коэффициента вязкости;

$c_v, c_p, \gamma, R$  – изохорная и изобарная теплоёмкости, показатель адиабаты, удельная газовая постоянная.

В качестве гидродинамической модели старшего порядка используется система моментных уравнений 3-го порядка (МЗ):

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\
& \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \\
& \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial t} p_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}) + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) q_\alpha) = -\frac{p_{ij}}{\tau_p} \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{h - 1}{h} \frac{p_{\alpha\alpha}}{\tau_p} \\
& \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \varphi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \varphi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\
& \quad + \frac{R}{2} \left( P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p} \\
& \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha q_i) + q_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + c_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{p_{i\beta}}{\rho} \right) = \\
& \quad = -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{q_i}{\tau_p} - \left( \frac{2}{3} - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \right) \frac{\varphi_i}{\tau_p}
\end{aligned} \right. \quad (5)$$

Здесь:

$c_\Omega$  – удельная теплоёмкость внутренних степеней свободы;

$c_\omega = \frac{c_p}{Pr} - \frac{15}{4} R$ , где  $Pr$  – число Прандтля.

Для кинетической области выбрано модельное кинетическое уравнение  
МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{p}{\mu} \left| \frac{f_t^+ - f_t}{f_t^- - f_r} \right| \quad (6)$$

Здесь:

$$f_t = \int f d\varepsilon; \quad f_r = \int \varepsilon f d\varepsilon;$$

$$f_t^+ = \frac{n}{(2\pi RT_t^+)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t^+}\right) \left(1 + \frac{\varphi_\alpha c_\alpha}{3\rho(RT_t^+)^2} \left(\frac{c^2}{5RT_t^+} - 1\right)\right);$$

$$f_r^+ = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} kT_r^+ f_t^+;$$

$$T_t^+ = T + \frac{5 - 3\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r); \quad T_r^+ = T - \frac{3}{2} (\gamma - 1) \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r);$$

Макроскопические параметры газа определяются следующими выражениями:

$$n = \int f_t d\mathbf{c}; P_{ij} = m_0 \int c_i c_j f_t d\mathbf{c}; T_t = P_{\alpha\alpha}/3\rho R; \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} nkT_r = \int f_r d\mathbf{c};$$

$$\varphi_i = \int \frac{m_0 c^2}{2} c_i f_t d\mathbf{c};$$

В этих выражениях  $m_0$  – масса молекулы,  $\int \dots d\mathbf{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} dc_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dc_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dc_3$ .

Для комбинированной модели граничные условия определяются только для кинетической области. В качестве таких граничных условий, используется предельный случай зеркально-диффузной схемы отражения, когда все молекулы отражаются диффузно с максвелловским распределением, отвечающим температуре стенки. Такие граничные условия вполне адекватно описывают физические процессы, которые протекают на шероховатых поверхностях при умеренных энергиях движения молекул ( $<1\text{эВ}$ ).

Методика сшивания моментных уравнений с кинетическим уравнением заключается в разделении рассматриваемой области течения на две подобласти – гидродинамическую и кинетическую. Схема такой расчётной области показана на Рисунке 1.

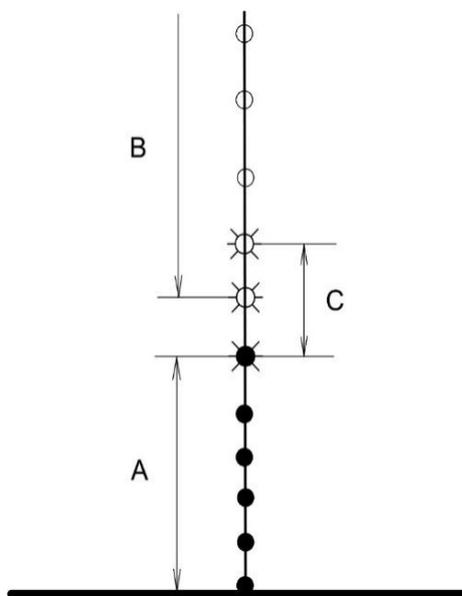


Рисунок 1. Схема расчётной области. А – кинетическая область, В – гидродинамическая область, С – область сшивания. Закрашенные точки – узлы кинетической модели, пустые точки – узлы гидродинамической модели, перечёркнутые окружности – область сшивания модели.

Кинетическая область непосредственно на границе раздела газа и обтекаемой твёрдой поверхности. Протяжённость кинетической области по нормали к твёрдой поверхности составляет несколько длин свободного пробега молекул  $\lambda$ , т.е. представляет собой расширенный кнудсеновский слой. Другая подобласть, не граничащая с твёрдой поверхностью, использует гидродинамическую модель.

В кинетической и гидродинамической областях комбинированной модели используются традиционные для них методы численной реализации. На границе стыка кинетической и гидродинамической области существует область сшивания этих моделей (область С на Рисунке 1).

Для передачи информации между гидродинамической моделью и модельным кинетическим уравнением будет принята аппроксимирующая функция  $f_A$ . Для гидродинамической модели НСФ используется функция, аналогичная навье-стоксовской функции распределения. Эта функция получена путём разложения равновесной максвелловой функции. Для многоатомных газов интегралы этой функции распределения по пространству вращательных энергий имеют следующий вид:

$$f_{At} = f_{Mt} \left( 1 + \frac{1}{p^m RT_t} \left( \frac{1}{2} p_{\alpha\beta}^m c_\alpha c_\beta + \left( \frac{c^2}{5RT_t} - 1 \right) \varphi_\alpha c_\alpha \right) \right) \quad (7)$$

$$f_{Ar} = kT_r \left( \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} f_{At} + f_{Mt} \frac{\omega_\alpha c_\alpha}{p^m RT_r} \right); \quad (8)$$

$$f_{Mt} = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp \left( -\frac{c^2}{2RT_t} \right) \quad (9)$$

Макропараметры функций  $f_{At}$ ,  $f_{Ar}$  определяются в приближении модели НСФ:

$$T_t = T - \frac{5 - 3\gamma}{3} \frac{h\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha};$$

$$T_r = T + (\gamma - 1) \frac{h\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad p^m = \rho RT_t;$$

$$p_{ij}^m = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right); \quad \varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad \omega_i = -\left( c_v - \frac{3}{2} R \right) \mu \frac{\partial T}{\partial x_i};$$

Для модели МЗ аппроксимирующая функция выглядит следующим образом:

$$f = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right) \times \frac{2\sqrt{\varepsilon/\pi}}{(2/3 \eta k T_r)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2/3 \eta k T_r}\right) \times \left( 1 + \frac{1}{\rho RT_t} \left( \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_p}\right) p_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta + \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\tau}{\tau_p}\right) \varphi_\alpha \left(\frac{c^2}{5RT_t} - 1\right) c_\alpha + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_p}\right) \frac{\omega_\alpha T_t}{\eta} \frac{T_t}{T_r} \left(\frac{\varepsilon}{\eta k T_r} - 1\right) c_\alpha \right) \right)$$

Для выполнения численных экспериментов, в качестве тестовой задачи выбрано течения Куэтта. Выбор этого течения в качестве теста, объясняется наличием множества теоретических и экспериментальных работ по данной тематике.

Схема течения проиллюстрирована на Рисунке 2. Система координат связана с центральной областью течения. Бесконечные параллельные поверхности, имеющие одинаковую температуру  $T_w$  движутся в противоположных направлениях со скоростью  $u_w$ . До начала движения плотность газа и концентрация молекул имели значения  $\rho_0$  и  $n_0$ .

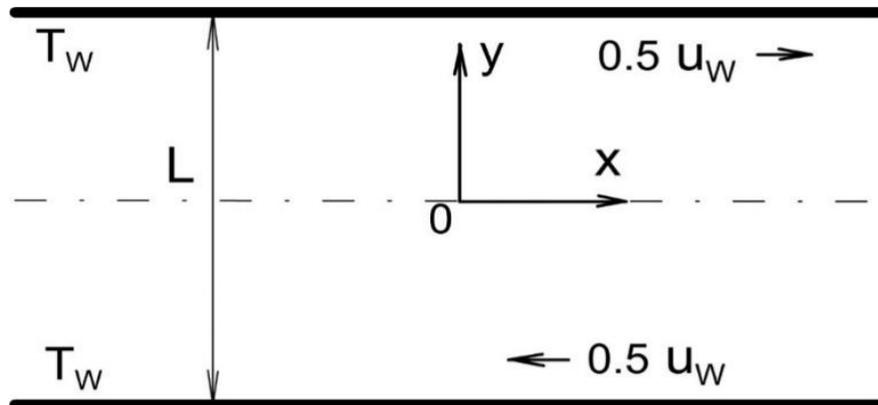


Рисунок 2. Схема течения Куэтта

Свободные параметры  $s$ ,  $h$  и  $Z$ , как отмечалось ранее, были подобраны путём наилучшего соответствия результатов моделей экспериментально полученным коэффициентам трения в интервале числе Кнудсена –  $Kn$  0.01...10 при фиксированном числе Маха  $M=1.4$ , исследуемый газ – воздух. Для модели МЗ, эти свободные параметры совпадают со свободными параметрами модели НСФ, для того чтобы исключить их влияние на несовпадение в полученных решениях.

Для более детального анализа различных моделей лучше использовать распределённые величины. В связи с этим, далее приводятся сравнения профилей температур, которые рассчитаны с помощью различных моделей.

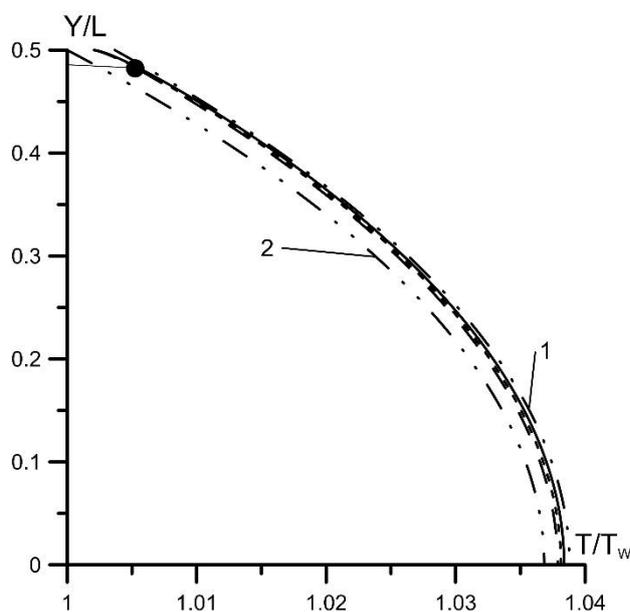


Рисунок 3. Профили температуры,  $M=1$ ,  $Kn=0.01$ .

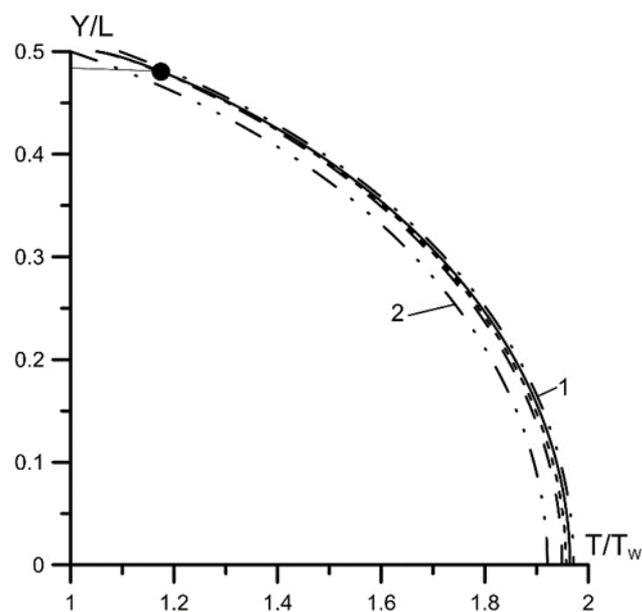


Рисунок 4. Профили температуры,  $M=5$ ,  $Kn=0.01$ .

На Рисунках 3-6, сплошная линия соответствует кинетической модели, мелкий пунктир –комбинированной модели КИН\_М3, крупный пунктир – КИН\_НСФ, штрих-пунктир – модель НСФ, штрих-пунктир с номером 1 – граничные условия скольжения пограничного слоя, штрих-пунктир 2 – граничные условия прилипания, чёрная точка – последняя точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания.

Из Рисунков 3 и 4 видно, что увеличение числа Маха до гиперзвуковых значений не существенно влияет на погрешность гидродинамических моделей, пока число Кнудсена находится в сплошнородной области течения. Отличия результатов, полученных различными комбинированными моделями от эталонного кинетического решения малы. Можно сказать, что результаты всех моделей, за исключением результатов модели НСФ с граничными условиями прилипания, довольно близки между собой.

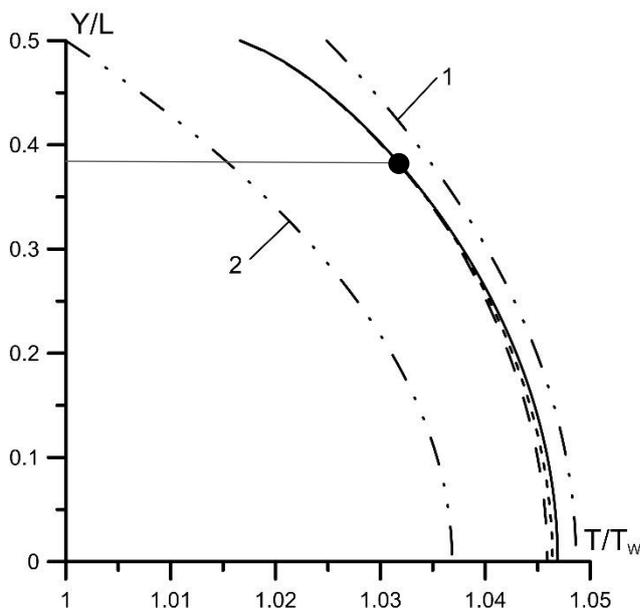


Рисунок 5. Профили температуры,  $M=1$ ,  $Kn=0.1$ .

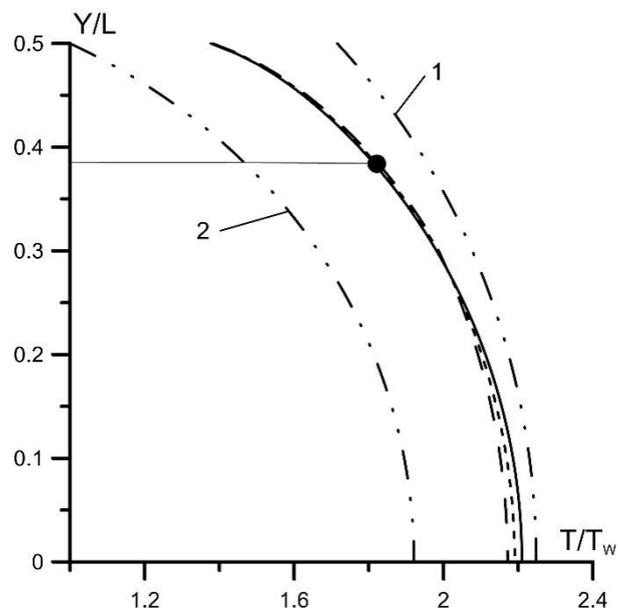


Рисунок 6. Профили температуры,  $M=5$ ,  $Kn=0.1$ .

Сравнение Рисунка 5 и Рисунка 6 показывает существенные отклонения профиля моделей НСФ и МЗ в верхней части профиля температуры, которая соответствует пристеночной области. Ещё раз подтверждается тот факт, что в переходной области течения, при больших скоростях, граничные условия скольжения пограничного слоя перестают адекватно описывать процесс взаимодействия газ с твёрдой поверхностью. Обе комбинированные модели показывают довольно хорошее совпадение с результатами расчёта кинетической модели, которую можно считать эталонной.

Увеличение чисел Маха и чисел Кнудсена означает повышение степени неравновесности течения, которая оценивается как произведение числа Маха на число Кнудсена. Модель НСФ теоретически обоснована только в слаборавновесных течениях. Комбинированные модели помогают получить результаты близкие к кинетическим. Модель КИН\_МЗ даже при высокой неравновесности даёт решение, слабо (в пределах вычислительной погрешности) отличающееся от кинетического.

**Во второй главе** проведен анализ различных граничных условий на твёрдой стенке для гидродинамической и кинетической моделей. В качестве тестовой задачи выбрано плоское течение Куэтта, а для величины сравнения – коэффициент

трения, отнесенный к его теоретическому пределу в свободномолекулярном режиме течения. Выбор этой величины обуславливается её важностью для практических задач.

Для гидродинамической модели НСФ выбирались граничные условия прилипания и скольжения пограничного слоя. Для кинетической модели – диффузный закон отражения молекул от твёрдой стенки.

В качестве кинетической модели будет использоваться, ранее рассмотренное, модельное кинетическое уравнение (6) с граничными условиями диффузного отражения с полной аккомодацией энергии. В качестве гидродинамической модели будет анализироваться модель неполного второго порядка НСФ (1) с двумя вариантами граничных условий: граничные условия прилипания и условия скольжения пограничного слоя.

Граничные условия прилипания подразумевают равенство нулю скорости газа на обтекаемой поверхности.

Граничные условия скольжения пограничного слоя для задачи Куэтта определяются следующими выражениями:

$$u_x|_{y=L/2} = \frac{1}{2}u_w - 1.21Kn \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (10)$$

$$T|_{y=L/2} = T_w - 0.55 \frac{15}{4} Kn \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (11)$$

где выражение (10) – скольжение скорости, выражение (11) – скачок температуры,  $L$ –расстояние между пластинами.

Для удобства анализа различных граничных условий используется отношение коэффициента трения  $c_f$  к его свободномолекулярному пределу  $c_{fm}$ :

$$\frac{c_f}{c_{fm}} = 2 \frac{|P_{12}|}{\rho(2u_w)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2u_w}{\sqrt{RT_w}}$$

здесь  $\rho$  – средняя по толщине зазора плотность газа.

На начальном этапе расчётов, для валидации различных моделей были использованы экспериментальные значения коэффициента трения [Alofs H., Springer G.S., 1971], полученные в интервале чисел Кнудсена –  $Kn$  0.01...10 при

фиксированном числе Маха  $M=1.4$ . Результаты этого сравнения показаны на Рисунке 7. Здесь и на следующих рисунках цвета соответствуют: Пустые кружки – экспериментальные данные, красный – НСФ с условиями прилипания, синий – НСФ с условиями скольжения пограничного слоя, чёрный - модельное кинетическое уравнение с диффузным законом отражения молекул от поверхности.

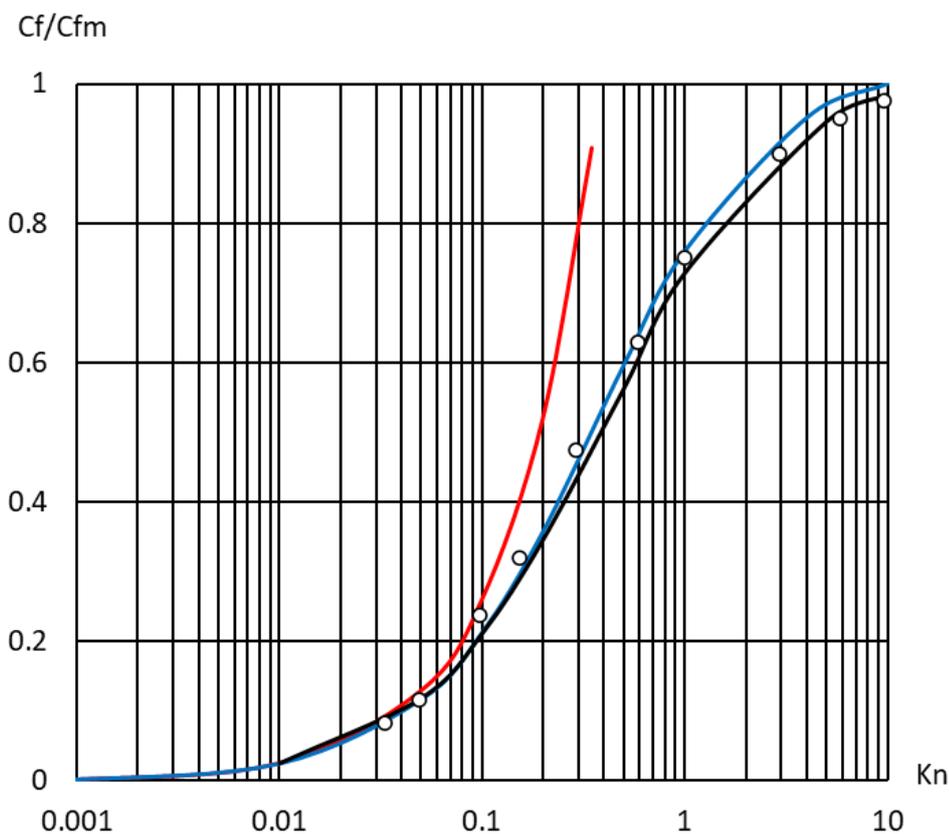


Рисунок 7. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. Число Маха  $M=1.4$ .

Сравнение зависимостей коэффициента трения от числа Кнудсена показывает, как указывалось ранее, физическую несостоятельность модели НСФ с граничными условиями прилипания при увеличении числа Кнудсена. Удовлетворительное совпадение с экспериментом даёт модель НСФ с условиями скольжения пограничного слоя. Однако при высоких значениях степени неравновесности течения, величины отношений коэффициентов трения выше теоретического предела, что, очевидно, не верно.

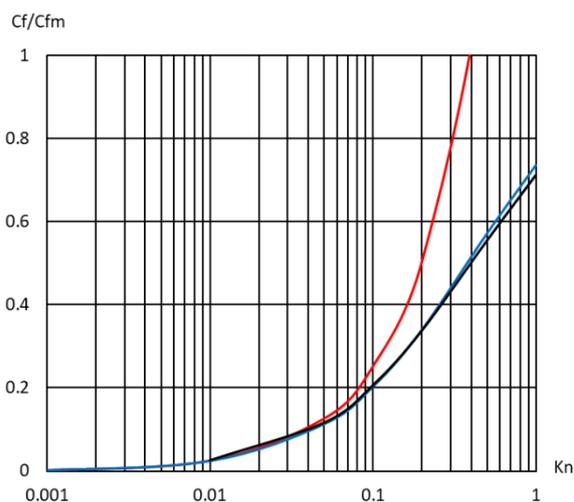


Рисунок 8. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. Число Маха  $M=0.5$ .

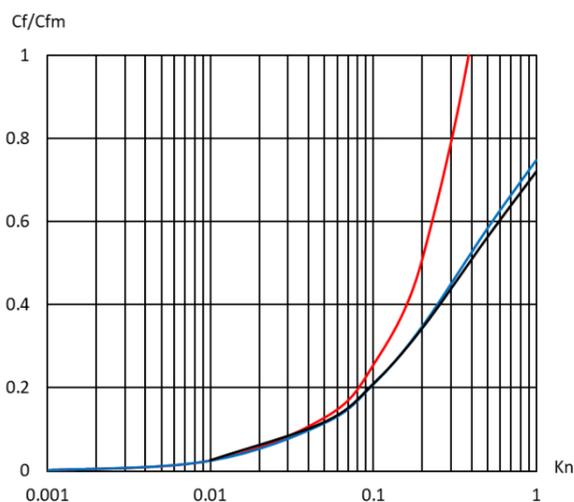


Рисунок 9. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. Число Маха  $M=1$ .

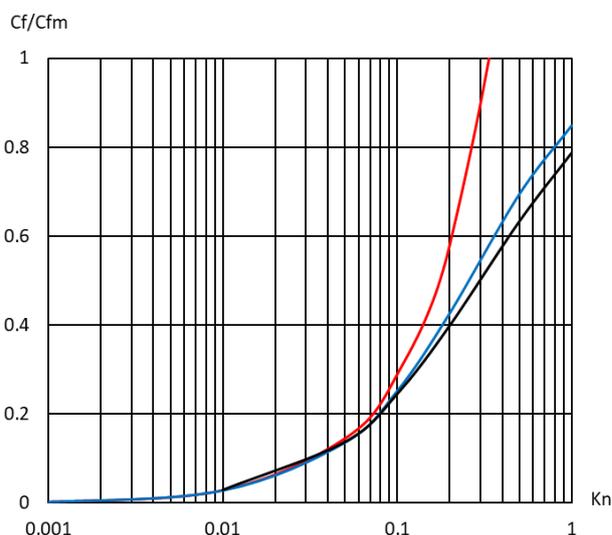


Рисунок 10. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. Число Маха  $M=3$ .

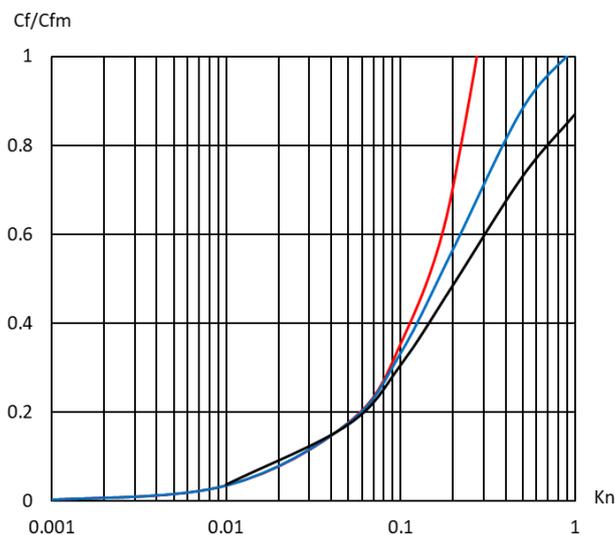


Рисунок 11. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. Число Маха  $M=5$ .

Из иллюстраций можно заметить, что для малых чисел Кнудсена значения коэффициентов для всех моделей практически совпадают. Это объясняется тем, что при малых числах Кнудсена модель НСФ теоретически обоснована. С увеличением числа Кнудсена модель НСФ с граничными условиями прилипания имеет наибольшее отклонение от кинетического решения, которое можно считать эталонным. При малых числах Маха модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя имеет удовлетворительное совпадение со

значениями, полученными с помощью кинетической модели, даже при высоких числах Кнудсена.

Для течений разреженного газа с сверх- и гиперзвуковыми скоростями, физически адекватные величины для отношений коэффициентов трения дает лишь кинетическая модель с описанием взаимодействия газа с твёрдой поверхностью на молекулярном уровне. Для высоких чисел Кнудсена модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя даёт значения отношения коэффициентов трения выше значения теоретического предела, что является физически неверным.

**В третьей главе** исследуется гиперзвуковое обтекание бесконечно острой кромки с нулевым углом атаки. Основное внимание уделено течению в окрестности особой точки с позиций молекулярно-кинетической теории газов. Особой точкой считается точка разделения молекулярных потоков на два потока, принадлежащих разным статистикам (Рисунок 12). Эта точка является математическим объектом и наибольший интерес представляет для теоретических исследований. В реальности (в эксперименте или в натурных испытаниях) такой особой точки не существует.

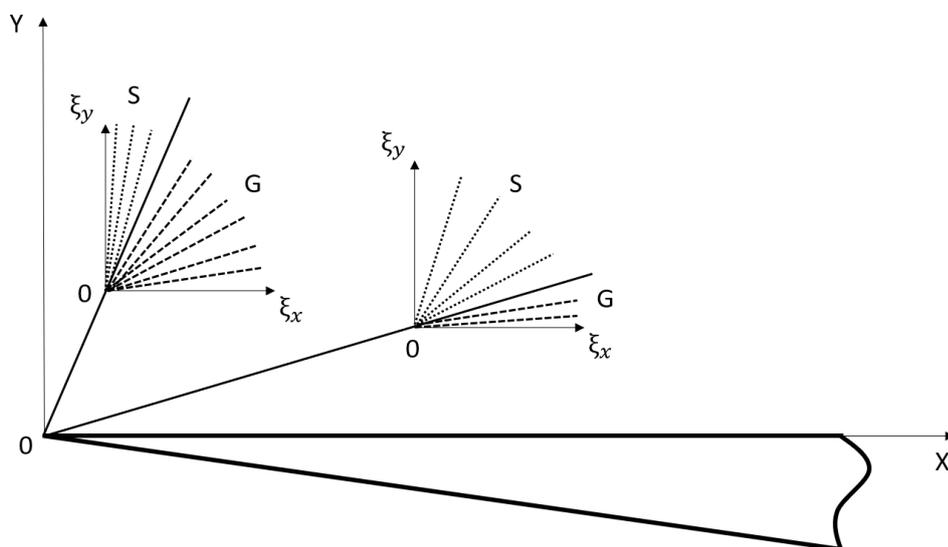


Рисунок 12. Схема распределения молекулярных потоков в кнудсеновском слое.  $OXY$  и  $O\xi_x\xi_y$  – системы координат в геометрическом пространстве и в пространстве молекулярных скоростей.  $G$  – область молекулярных потоков, сформировавшихся в газовой среде перед носиком клина.  $S$  – область молекулярных потоков, отраженных поверхностью клина.

На Рисунке 12 схематически проиллюстрировано движение молекулярных потоков в расширенном кнудсеновском слое в окрестности носика обтекаемого клина. В двух произвольных точках геометрического пространства  $OXY$  построена декартова система координат пространства  $O\xi_x\xi_y$  молекулярных скоростей  $\xi$ . Из передней кромки клина проведены линии, которые являются траекториями молекулярных потоков, пришедших из области в окрестности носика клина.

Указанные линии делят пространство молекулярных скоростей на две области, условно обозначенные  $G$  и  $S$ . В области  $G$  присутствуют молекулярные потоки, сформировавшиеся в газовой среде перед носиком клина. В области  $S$  – потоки, отраженные поверхностью клина. На линии, разделяющей эти области, имеют место две различные функции распределения молекул по скоростям, а сама линия является линией разрыва функции распределения в пространстве молекулярных скоростей.

Из общих физических соображений понятно, что разрыв функции распределения вдоль траектории невозможен, что учтено при постановке данной задачи. Разрыв возникает между соседними, сколь угодно близкими траекториями, где имеет место разрыв первого рода. Если положение линии (в общем случае - поверхности) разрыва определено, то вычисление моментов функции распределения (макропараметров газа) осуществляется стандартными методами вычислительной математики.

Математическую модель обтекания тонкой пластины целесообразно строить в полярных системах координат как в геометрическом, так и скоростном пространствах. Полнос полярной системы является особой точкой, так как не содержит полярного угла. Эта особая точка отличается от бесконечно малого элемента поверхности отсутствием нормали, т.е. полярного угла, определяющего направление нормали. Можно предположить, что это свойство особой точки потока и особой точки системы координат делает полярную систему наиболее удобной.

Спецификой решаемой задачи является то, что полярные углы геометрической и скоростной системы координат взаимосвязаны. Полярный угол

геометрической системы должен быть кратен полярному углу скоростной. Такая связь не характерна для кинетических уравнений, в которых геометрическое и скоростное пространства независимы. Для решения данной задачи эта взаимосвязь необходима для выделения линии разрыва.

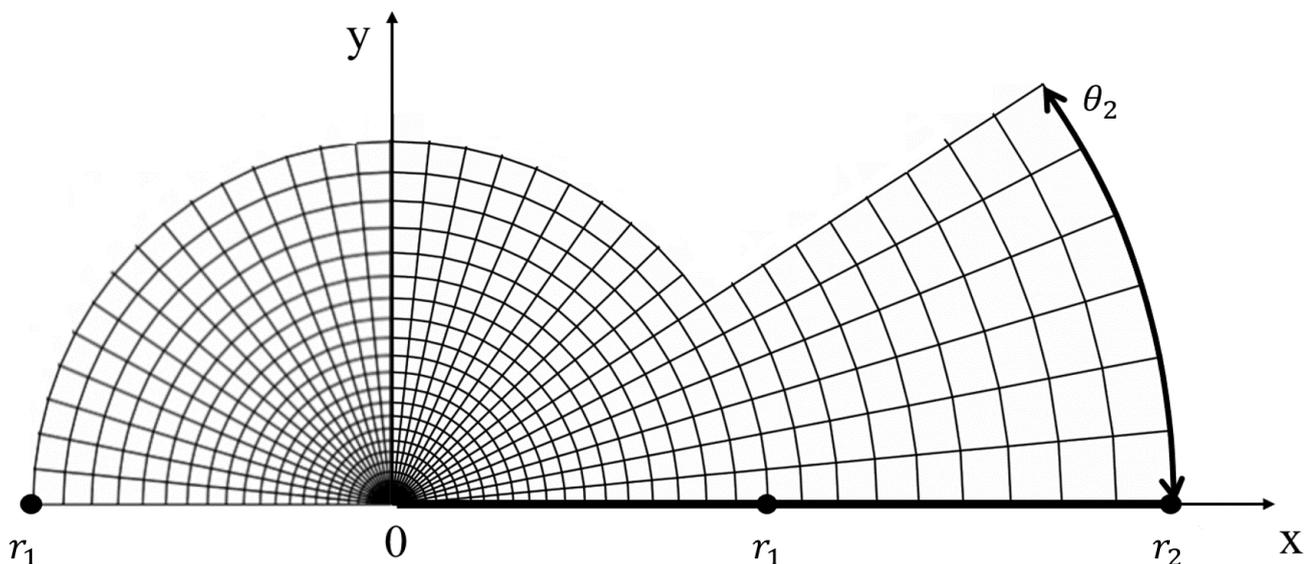


Рисунок 13. Полярная система координат  $Or\theta$  геометрического пространства. Пластина изображена утолщенной линией. Дополнительно нанесены оси декартовой системы  $OXY$ .

Система координат геометрического пространства  $Or\theta$  показана на Рисунке 13. Полюс системы совмещен с особой точкой, т.е. носиком пластины. Сама пластина изображена утолщенной линией. Дополнительно нанесены оси  $OX$  и  $OY$  прямоугольной декартовой системы, используемые для вычисления моментов функции распределения и иллюстрации результатов. В пространстве молекулярных скоростей полюс системы координат  $O\xi\psi$  соответствует  $\xi = 0$ . На Рисунке 14 изображен первый квадрант этой системы.

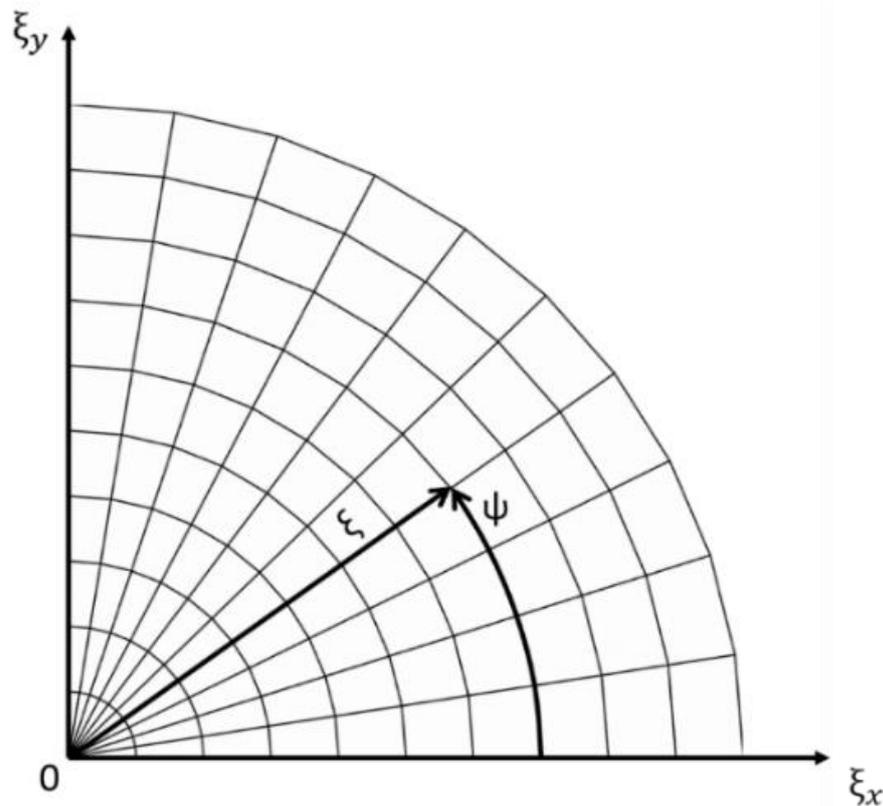


Рисунок 14. Первый квадрант полярной системы координат  $0\xi\psi$  пространства молекулярных скоростей  $\xi$ . Дополнительно нанесены оси декартовой системы  $0\xi_x\xi_y$

Решение кинетического уравнения будет строиться вдоль траектории молекулярного потока  $\xi \in (0, \xi_{max}), \psi = const$ . Это позволит выделить линии разрыва функции распределения, для которых  $\psi = \theta$ .

Расчеты проводились для течения, исследованного экспериментально. Число Маха принималось равным  $M_\infty = 10.15$ . Температура пластины  $T_w = 2.16T_\infty$ . Рассматривалось течение двухатомного газа. Свободные параметры модели: показатель степени  $s$  для аппроксимации вязкости степенной зависимостью  $\mu = \mu(T_t^s)$  принят равным  $s = 0.72$ . Аппроксимация для  $Z$  представлена следующим выражением:  $Z = 1.3(1 + 0.75 T_r/T_t)$ .

На Рисунке 15 показано распределение нормального напряжения  $P_{yy}$  на линии  $y = 0$  вдоль координаты  $0X$  декартовой системы координат или координаты  $r$  при  $\theta = 0$  полярной системы. На поверхности пластины расчетные данные удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Перед носиком пластины (кривая 2) газ достаточно сильно возмущен, что не учитывается в ряде работ.

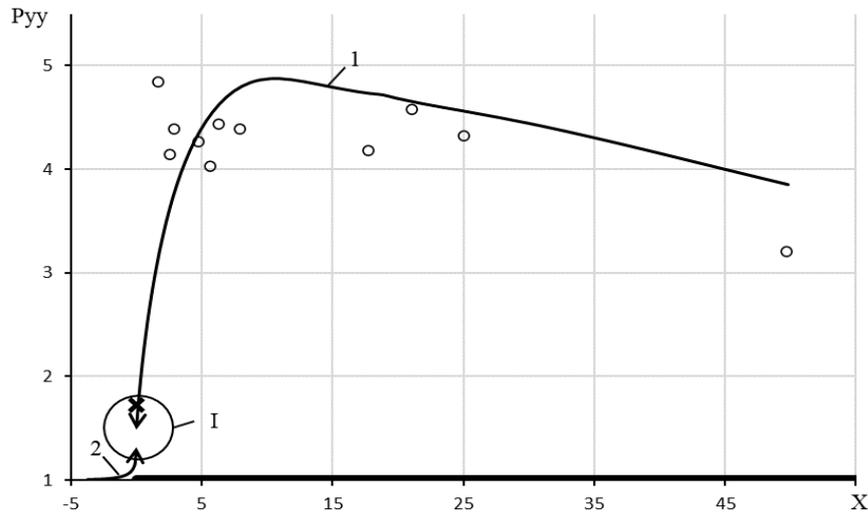


Рисунок 15. Распределение нормального напряжения  $P_{yy}$  на линии  $y = 0$ . Кружками отмечены экспериментальные данные, 1 и 2 – расчетная кривая. Крестик соответствует значению  $P_{yy}$  в особой точке, т.е. на носике пластины.

На носике пластины, в особой точке течения, имеет место разрыв, показанный на Рисунке 15. Обращает на себя внимание характер разрыва в особой точке, левая окрестность которой принадлежит набегающему потоку, а правая – поверхности пластины. Значение  $P_{yy}$  в самой особой точке существенно превышает значения в обеих ее окрестностях.

Предложенный метод решения модельного кинетического уравнения позволяет явным образом выделять поверхности разрыва в пространстве молекулярных скоростей. В пределах кнудсеновского слоя такие разрывы играют существенную роль (Рисунок 16).

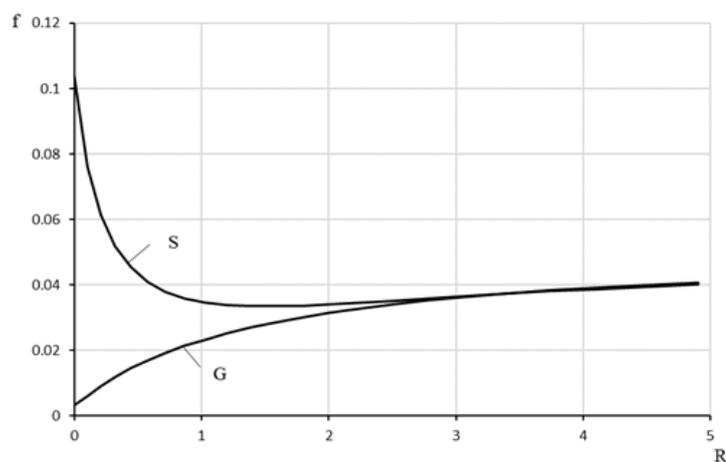


Рисунок 16. Изменение интегралов  $f$  функции распределения областей G и S, вычисленных на линии разрыва. Полярный угол линии разрыва  $\theta = \pi/8$ .

Анализируется значение интеграла:

$$f = \int_0^{\infty} f(\xi, \psi = \theta = const) d\xi$$

Полярный угол линии разрыва составлял  $\theta = \pi/8$ . Интеграл  $f$  вычислялся для молекулярных потоков, принадлежащих областям  $G$  и  $S$  согласно рис. 12. Различие в значениях интегралов становится несущественным при  $R \approx 3\lambda\infty$ . При меньших удалениях от особой точки различие в этих "неполных" моментах функции распределения достаточно велико.

Проведенные расчеты показывают, что даже при гиперзвуковом обтекании абсолютно острой кромки имеет место значительное возмущение потока перед кромкой.

Показано, что значение макропараметров газа в особой точке, разделяющей набегающий поток и носовую часть кромки, не является некоторым усредненным значением параметров в окрестности этой точки. В особой точке значение макропараметра значительно выходит за пределы интервала значений, определенных в окрестностях этой точки. Этот факт необходимо учитывать при разработке физико-математических моделей, направленных на описание динамики газа в окрестностях острой кромки.

**В заключении** перечислены основные результаты и выводы по диссертационной работе, намечены дальнейшие численные исследования.

## ВЫВОДЫ

1. Разработан метод комбинирования моментных уравнений различных порядков и кинетической модели для расчёта высоко неравновесных течений в пристеночных областях, позволяющий описать взаимодействие газа с поверхностью на молекулярном уровне.

2. Анализ расчётов комбинированных моделей показал, что модель КИН\_НСФ ненамного уступает в точности кинетической модели и существенно уменьшает время расчёта на ЭВМ. При описании течений плотных газов

экономичность комбинированных моделей не зависит от числа Кнудсена и слабо зависит от числа Маха.

3. Сравнение полученных результатов позволяет выделить следующие преимущества комбинированных моделей:

- Точность комбинированных моделей сравнима с точностью кинетической модели;
- Существенно повышена экономичность, в смысле количества вычислительных операций, этих моделей, по сравнению с кинетической моделью;
- Комбинированные модели позволяют выставить физически адекватные граничные условия, которые учитывают молекулярные процессы, в отличие от гидродинамических моделей.
- При числе Кнудсена  $Kn < 0.1$ , модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя обеспечивает удовлетворительную точность. Комбинированная модель КИН\_НСФ даёт удовлетворительные результаты во всей рассмотренной области параметров течения.
- При описании пристеночных течений уточнение гидродинамической составляющей комбинированной модели выше третьего порядка не приведёт к повышению точности. Для практических приложений вполне достаточно неполного второго приближения, т. е. модели КИН\_НСФ.

4. Исследованы различные типы граничных условий на твёрдой поверхности для гидродинамической модели НСФ. Результаты численных расчетов коэффициента трения показывают:

- граничные условия прилипания могут быть использованы при  $Kn < 0.1$ ;
- граничные условия скольжения пограничного слоя применимы для сверхзвуковых течений до  $Kn < 1$ , и для гиперзвуковых течений до  $Kn < 0.1$ .

- В остальных областях, определяемых числами Маха и Кнудсена, целесообразно использовать комбинированные кинетико-гидродинамические модели, предлагаемые в Главе 1 настоящей работы.

5. Разработан метод решения модельного кинетического уравнения в окрестности абсолютно острой кромки, позволяющий учитывать разрывы пространства скоростей в расширенном кнудсеновском слое.

Предложенный метод решения модельного кинетического уравнения позволяет явным образом выделять поверхности разрыва в пространстве молекулярных скоростей.

Проведенные расчеты показывают, что даже при гиперзвуковом обтекании абсолютно острой кромки имеет место значительное возмущение потока перед кромкой.

Показано, что значение макропараметров газа в особой точке, разделяющей набегающий поток и носовую часть кромки, не является некоторым усредненным значением параметров в окрестности этой точки. В особой точке значение макропараметра значительно выходит за пределы интервала значений, определенных в окрестностях этой точки.

Показано, что разрыв значений макропараметров возникает только на линии тока, проходящей через особую точку. На других линиях тока, сколь угодно близких к указанной выше, разрывов не возникает. Имеет место гладкое решение.

Выполненные автором исследования имеют значение для развития методов решения задач механики жидкости, газа и плазмы, которые имеют существенное значение для развития страны.

Разработанные метод комбинирования гидродинамической и кинетической моделей, а также методика расчёта течения около поверхности большой кривизны в дальнейшем могут быть распространены на задачи большей размерности. В дальнейшем планируется провести дополнительные исследования в этой области, а также рассмотреть иные граничные условия в кинетической области.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из списка ВАК:

- Березко М. Э., Никитченко Ю. А., Тихоновец А. В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ, 2017, №94
- Березко М. Э., Никитченко Ю. А. Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта // Труды МАИ, 2020, №110
- Березко М. Э., Никитченко Ю. А. Численное решение задачи гиперзвукового обтекания тонкой пластины // МЖГ №2. – 2022. – с.87-95
- Березко М. Э. Влияние выбора граничных условий на результаты расчёта пристеночных течений // Труды МАИ, 2022, №122

Тезисы докладов:

- Березко М.Э., Тихоновец А.В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта. // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов. – М.; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017. – 1479 с.
- Березко М.Э. Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта. // Материалы 18-ой международной конференции «Авиация и космонавтика – 2019». - Тезисы. – Москва МАИ. - 2019. – с. 181
- Березко М.Э. Методика построения расчётных сеток с выделением поверхности разрыва для решения кинетических уравнений. // Материалы 19-ой международной конференции «Авиация и космонавтика – 2020». – Тезисы. – Москва. - МАИ. - 2020. – с. 447
- Березко М.Э. Материалы XXII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. – Тезисы. – Алушта, Крым. – 2021. – с. 318-319