Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 2. С. 17-26.
Aerospace MAI Journal, 2025, vol. 32, no. 2, pp. 17-26. (In Russ.).

Научная статья
УДК 533.6.011.6
URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=184987
EDN: https://www.elibrary.ru/KRLROJ

Оценка тепловых потоков в окрестности точки растекания с использованием модифицированного метода эффективной длины

Дмитрий Николаевич Минюшкин[1], Александр Валерьевич Брага[2]✉

[1, 2] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация
[1] minyushkin.dn@yandex.ru, orcid 0009-0007-8602-8053
[2] braga.av@phystech.edu✉, orcid 0009-0000-3712-0426

Аннотация. В настоящее время активно развиваются методы моделирования движения летательного аппарата (ЛА) в атмосфере. Актуальными остаются задачи полного расчета нагрузок по траектории движения и оптимизации траектории и/или конструкции ЛА. В рамках этих задач вычисление силовых и тепловых нагрузок на конструкцию ЛА становится массовой рутинной операцией, что создает огромные трудности из-за ресурсозатратности: вычисление силовых и тепловых нагрузок методами решения уравнения Навье–Стокса невозможно проводить в трехмерной постановке на сложных телах как массовую операцию в приемлемые сроки даже при современном уровне высокопроизводительных аппаратных платформ. Инженерные, упрощенные методы оценки тепловых нагрузок являются актуальными благодаря относительно высокой скорости получения результата. В этой работе приведено математического описание и представлена программная реализация модифицированного метода эффективной длины (MEFFL) и показана его работоспособность (робастность) на телах сложной геометрии.

Ключевые слова: конвективные тепловые потоки, метод эффективной длины, область растекания, ламинарно-турбулентный переход

Для цитирования: Минюшкин Д.Н., Брага А.В. Оценка тепловых потоков в окрестности точки растекания с использованием модифицированного метода эффективной длины // Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 2. С. 17-26. URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=184987

Original article

Heat Fluxes Estimation in the Stagnation Point Neighborhood by the Modified Effective Length Method

Dmitrii N. Minyushkin[1], Aleksandr V. Braga[2]

[1, 2] Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation
[1] minyushkin.dn@yandex.ru, orcid 0009-0007-8602-8053
[2] braga.av@phystech.edu✉, orcid 0009-0000-3712-0426

Abstract

Currently, methods for modeling the aircraft motion in the atmosphere are being actively developed. Tasks related to the full calculation of loads along the trajectory remain relevant, and methods for the trajectory optimizing and/or aircraft design, which require computing both power and thermal loads on the aircraft structure as a routine mass operation, are being actively elaborated. Solving the Navier-Stokes equations does not allow fulfilling these tasks in the format of a routine mass operation due to their high resource intensity. Thus, engineering methods that enable the heat fluxes estimation with relatively high computational speed are currently relevant. The effective length method is one of these methods.

The purpose of this work consists in modifying the effective length method to obtain smooth laminar heat fluxes in the stagnation area.

The main idea of the work is a combination of the two approaches: integration along the streamline in the stagnation area and application of engineering formulas outside the stagnation area. The field integration in the stagnation area is performed along the streamline built on a paraboloid, one of which properties consists in the presence of two symmetrical planes. Integration along the streamline follows the Buhl's rule, which is of a high order of accuracy, which allows ensuring low computational error in the stagnation area, i.e. the area where the effective length tends to zero. Besides, the paraboloid parameters are used to compute the surface curvature in the stagnation area, enabling the velocity gradient computing, which is used further to determine the laminar heat flux. The article reflects mathematical formulation for laminar-turbulent transition modeling based on the local Reynolds number plotted along the momentum loss thickness of the laminar boundary layer.

The article demonstrates the results of the heat flux simulation on a sphere with a radius of R = 1m, a Mach number of 6, and pressure and temperature of 300 Pa and 250 K, respectively. A comparison with experimental data for laminar-turbulent transition on a sphere with a radius of R = 6.35cm, a Mach number of 5, and pressure and temperature of 4424 Pa and 73.6 K, respectively, is provided as well. These comparisons revealed close agreement for laminar heat fluxes and an overestimation of turbulent fluxes. The heat fluxes uprating is typical for the engineering effective length method and its application will not lead to errors in practical computations.

The article presents the results of the heat flux simulations on a complex-shaped body, namely the Juno meteoroid. Its surface contains concaves, cavities, and lacks a symmetric shape. The gas-dynamic computing was performed at an altitude of 70 km and a velocity of Mach 6. The simulation demonstrated the algorithm stability and ability to perform computations on bodies of various shapes.

The authors demonstrate the relative speed of the heat fluxes obtaining. The modified version of the program operates longer while separate processing of the stagnation area, but this time remains incomparably small relative to the external flow-around problem solving.

Keywords: convective heat flows, effective length method, stagnation area, laminar-turbulent transition

For citation: : Minyushkin D.N., Braga A.V. Heat Fluxes Estimation in the Stagnation Point Neighborhood by the Modified Effective Length Method. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(2):17-26. (In Russ.). URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=184987

List of Figures

Введение

Моделирование обтекания при движении ЛА в атмосфере – важная задача при его проектировании. Примером, показывающим необходимость расчета обтекания ЛА, является моделирование тепловых нагрузок на ЛА для оптимизации его формы [1, 2]. Один из подходов к получению картины обтекания – решение уравнений Навье–Стокса с дальнейшим определением тепловых потоков [3, 4], однако данный способ неэффективен из-за ресурсозатратности и, следовательно, не может быть использован для быстрого получения картины обтекания при комплексном моделировании.

Существует подход, основанный на решении уравнений Эйлера, позволяющий получить картину течения на внешней границе пограничного слоя [5, 6]. По полученным полям рассчитываются конвективные тепловые потоки. Одним из методов для расчета конвективных потоков является метод эффективной длины, предложенный В.С. Авдуевским [7]. Основная идея метода заключается в предположении, что тепловой поток над произвольным телом зависит от локальных внешних параметров течения и толщины вытеснения пограничного слоя. В силу данного предположения течение над элементом поверхности тела может быть заменено течением над пластиной, длина которой вычисляется по параметрам течения на внешней границе пограничного слоя и учитывает его характер от точки растекания благодаря интегрированию вдоль линии тока [8].

В работе [9] предлагается модификация метода эффективной длины, которая заключается в интегрировании по полю, а не вдоль линии тока. Модификация позволяет сделать расчет сквозным, однако требует сгущения сетки для улучшения качества решения и повышения точности.

На рис. 1 видно, что при сгущении сетки решение становится более гладким, однако такое дробление сетки может существенно сказаться на эффективности метода. На идеальном внешнем газодинамическом поле тепловой поток не является гладким, и это серьезный недостаток модификации метода эффективной длины, предложенного в [9]. Таким образом, алгоритм требует доработки вблизи области растекания.

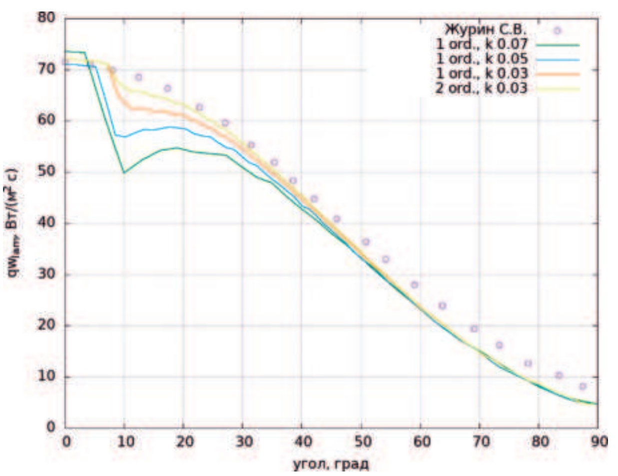

Рис. 1. Сходимость по сетке в работе [9], сравнение с данными из [10], параметр k – характерный размер ячейки, деленный на радиус сферы; ord – порядок схем, аппроксимирующих решаемые дифференциальные уравнения

Целью данной работы являются разработка математического метода и его программная реализация для модификации метода эффективной длины с целью получения гладких, качественных решений на сетке с незначительным количеством ячеек в области растекания, то есть без необходимости сгущения сетки в области растекания.

Моделирование ламинарного теплообмена в окрестности точки растекания

В общем случае конвективный тепловой поток определяется по формуле [11]

$$q_w = \frac{\alpha}{c_p}\left(H_e - h_w\right);\ H_e = h_\delta + \sqrt{\Pr}\frac{U_\delta^2}{2}, \qquad (1)$$

где α/c_p — коэффициент теплообмена; H_e — определяющая энтальпия; h — энтальпия; индекс w означает параметр на стенке; индекс δ означает параметр на внешней границе пограничного слоя; Pr — число Прандтля.

В методе эффективной длины из [9] коэффициенты теплообмена вычисляются по формулам:

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_l = 0,332\,\Pr^{-\frac{2}{3}}\frac{r_{eff}\rho_*\mu_*U_\delta}{z_l^{\frac{1}{2}}}; < \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_t = 0,0296\,\Pr^{-0,6}\frac{r_{eff}^{\frac{1}{4}}\rho_*\mu_*^{\frac{1}{4}}U_\delta}{z_t^{\frac{1}{5}}}, \qquad (3)$$

где r_{eff} — радиус эквивалентного осесимметричного тела; z_l, z_t – значения интегралов вдоль линии тока коэффициентов ламинарного (l) и турбулентного (t) теплообмена; ρ^*, μ^* — плотность и вязкость при эккертовской энтальпии [12]:

$$h_* = 0,5h_w + 0,22H_e + 0,28h_\delta. \qquad (4)$$

Для вычисления интегралов вдоль линии тока используется решение дифференциального уравнения [9]

$$div\left(z_i\vec{e}\right) - z_i div\left(\vec{e}\right) = B_i, \qquad (5)$$

где $i \in \{l,t\}$ – индекс, отвечающий за ламинарный или турбулентный режимы; B_i имеет вид:

$$B_i = r_{eff}^2\rho_*\mu_*U_\delta;\ B_t = r_{eff}^{1,25}\rho_*\mu_*^{0,25}U_\delta. \qquad (6)$$

В данной работе предлагается использовать оба подхода: вне области растекания использовать формулы (2) и (3), а в области растекания интегрировать вдоль линии тока.

Областью растекания будем называть область, которая удовлетворяет следующим критериям [12]:

$$\left|\vec{U}\right|_i < \alpha \max_i\left(\left|\vec{U}_1\right|\right); \qquad (7)$$

$$p_i > \alpha \max_i p_y; \tag{8}$$

$$div\left(\vec{e}_1\right) > 0;\ \vec{e}_1 = \frac{\vec{U}_l}{\left|\vec{U}_l\right|}, \tag{9}$$

где коэффициент $\alpha \in (0, 1)$.

После выделения области растекания выделяется точка растекания через усреднение координат ячеек из области растекания.

Основным предположением об особенностях геометрии области растекания является наличие у нее двух плоскостей симметрии и выпуклости. Такими свойствами обладает эллиптический параболоид. Данная поверхность второго порядка имеет три неизвестных коэффициента, что оправдывает ее выбор для аппроксимации области растекания. В дальнейшем параметры параболоида будут применяться для интегрирования вдоль линии тока и расчета градиента скорости. На рис. 2 представлено схематическое изображение области растекания и линий тока, вдоль которых производится интегрирование.

На рис. 2 красным цветом выделена область растекания, синим цветом – точка растекания, от которой начинается интегрирование по параболоиду вдоль линии тока. Зелеными линиями выделены плоскости симметрии параболоида, построенного на области растекания.

На основе координат ячеек из области растекания строится параболоид, общее уравнение которого имеет вид

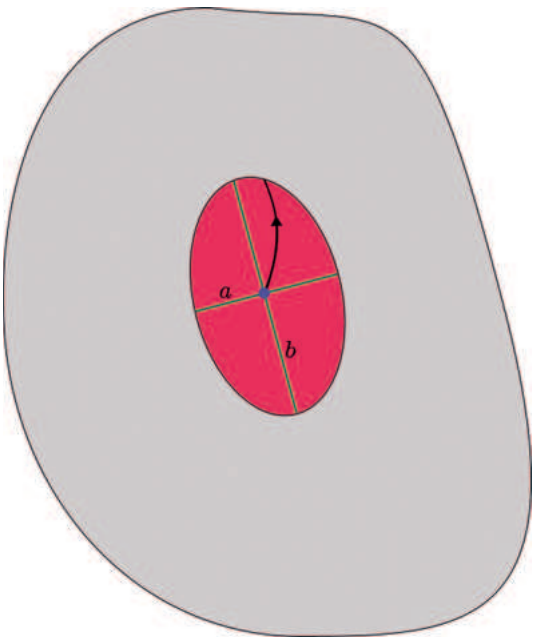

Рис. 2: Схематичное изображение области растекания, осей параболоида, точки растекания и линии тока

$$az^2 + by^2 + c = x, \tag{10}$$

где a, b, c – вещественные числа, причем a и b положительные. Для поиска коэффициентов используется метода наименьших квадратов [13].

После построения поверхности точки и поля интерполируются на параболоид. Для интегрирования вдоль линии тока необходимо произвести ее параметризацию в виде

$$\begin{cases} x = a\left[z_0 + t\left(z_1 - z_0\right)\right]^2 + b\left[y_0 + t\left(y_1 - y_0\right)\right]^2 + c; \\ y = y_0 + t\left(y_1 - y_0\right); \\ z = z_0 + t\left(z_1 - z_0\right), \end{cases} \tag{11}$$

где $t \in (0,1)$; (x_0,y_0,z_0) – координаты точки растекания; (x_1,y_1,z_1) – координаты точки, до которой производится интегрирование.

Длина кривой S может быть вычислена по определению через интеграл [14]:

$$S = \int_0^S ds, \tag{12}$$

где ds – элемент длины кривой.

При подстановке параметризации в определение длины кривой получаем интеграл вида

$$S = \int_0^1 \sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}\, dt, \tag{13}$$

где α, β, γ – вещественные коэффициенты.

Дальнейшее интегрирование производится с помощью составного правила Була [15]:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{14h}{15}\left(f(x_0) + f(x_N)\right) + \frac{64h}{45}\left(\sum_{i\in\{1,3,5,\ldots,N-1\}} f(x_i)\right) + \\ + \frac{24h}{45}\left(\sum_{i\in\{2,6,10,\ldots,N-2\}} f(x_i)\right) + \frac{28h}{45}\left(\sum_{i\in\{4,8,12,\ldots,N-4\}} f(x_i)\right) + O\left(h^7\right); \\ x_i = a + ih;\ h = \frac{b-a}{4N}, \tag{14}$$

где N – количество точек разбиения интервала (a,b); h – шаг интегрирования.

Данный метод был выбран с целью минимизации ошибки интегрирования, так как в области растекания решение чувствительно к значению z_l из-за того, что находится в знаменателе и в окрестности точки растекания стремится к нулю (2), (3).

Для повышения точности интегрирования полей вдоль линии тока интегрируются средневзвешенные по расстоянию поля, а не значение поля в ближайшей ячейке. Расстояние берется от точки интегрирования до K ближайших ячеек.

Следующим этапом является вычисление коэффициентов ламинарного и турбулентного теплообмена в области растекания и вне нее. Вне области растекания применяются формулы (2) и (3).

В области растекания используются формулы, учитывающие особенности ее геометрии через параметры параболоида, для турбулентных тепловых потоков используется та же формула, что и вне области растекания. Для вычисления коэффициента ламинарного теплообмена предлагается поступить иначе.

В окрестности точки растекания скорость характеризуется линейной зависимостью $U = \beta x$, где $[\beta] = 1/\text{с}$. Коэффициент β можно представить в виде производной скорости по координате:

$$\beta = \left(\frac{dU}{dx}\right)\Bigg|_{x=0}. \quad (15)$$

В работе [10] показано, что формула коэффициента ламинарного теплообмена может быть записана следующим образом:

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right) = 0,737\left(1+\frac{T_w}{T}\right)^{-0,15} \times \sqrt{1+0,16\left(1+\frac{T_w}{T}\right)}\sqrt{\mu_0\rho_0\beta}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{2}{3}}. \quad (16)$$

Для сферических и цилиндрических затуплений коэффициент β может быть представлен в виде приближенной формулы [16]:

$$\beta = \frac{1}{R_{sph}}\sqrt{\frac{2RT_0}{M}\left(1-\frac{p_\infty}{p}\right)}, \quad (17)$$

где R_{sph} – радиус осесимметричного тела.

Формула отлично себя зарекомендовала в расчетах тепловых потоков на сфере, что будет показано дальше, однако она не подходит для других тел, поэтому предлагается ввести локальную кривизну тела в области растекания K, которая будет вычислена на основе уравнения параболоида.

Пусть существует поверхность $x = f(y,z)$, тогда ее кривизна может быть вычислена по формуле [17]:

$$K = \frac{f_{yy}f_{zz} - f_{yz}}{\left(1+f_y^2+f_z^2\right)^2}, \quad (18)$$

причем для параболоида, заданного уравнением (9), с учетом направления скорости вдоль оси Ox, получаем кривизну, зависящую от координат y,z:

$$K = \frac{4ab}{\left(1+4b^2y^2+4a^2z^2\right)^2} = \frac{1}{R_{sph}^2}. \quad (19)$$

Тогда формула коэффициента пропорциональности принимает окончательный вид:

$$\beta = \frac{2\sqrt{ab}}{1+4b^2y^2+4a^2z^2} = \sqrt{\frac{2RT}{M}\left(1-\frac{p_\infty}{p}\right)}, \quad (20)$$

где теперь температуры и давление берутся не в точке растекания, а зависят от координаты. Окончательный вид формулы для определения коэффициента ламинарного теплообмена в области растекания записывается в виде [10]

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_l = 0,737\left(1+\frac{T_w}{T}\right)^{-0,15} \times \sqrt{1+0,16\left(1+\frac{T_w}{T}\right)}\sqrt{\mu\rho\beta}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{2}{3}}. \quad (21)$$

Коэффициент турбулентного теплообмена вычисляется по формуле (3). Несмотря на то что значение z_1 в окрестности точки растекания также стремится к нулю, значение $(\alpha/c_p)_t$ полагается равным нулю.

Моделирование тепловых потоков вне области растекания

На завершающем этапе рассчитываются тепловые потоки вне области растекания. Для этого ставится краевая задача на z_i. Дискретизируются уравнения (5), и производится численное решение, при этом значения z_i в области растекания фиксируются.

На основе полученных значений z_i рассчитываются коэффициенты теплообмена по формулам (2), (3).

Расчет полного теплового потока

После вычисления ламинарного и турбулентного тепловых потоков рассчитывается полный тепловой поток. Вычисление производится через коэффициент перемежаемости Γ [18]:

$$q_w = (1-\Gamma)\,q_{w,lam} + \Gamma q_{w,tur}. \quad (22)$$

Коэффициент перемежаемости принимает значения от 0 (ламинарный тепловой поток) до 1 (турбулентный тепловой поток), он вычисляется на основе локального числа Рейнольдса Re_θ, рассчитанного по толщине потери импульса θ ламинарного пограничного слоя. В представленной работе вычисление производится по формуле [11]:

$$\mathrm{Re}_\theta = 33\,\mathrm{Re}_{\delta_1}^{0.2}\,\Omega^{1,45}\left(2,6\frac{h_w}{h_\delta}+0,2\,\mathrm{M}_\delta^2\right)^{-1}; \quad (23)$$
$$\mathrm{Re}_{\delta_1} = \frac{\rho_\delta u_\delta}{\mu_\delta};\ \Omega = \overline{h_w}^{\,\beta}\,\mathrm{M}_\delta;\ \beta = 0,7\exp\left(-0,05\,\mathrm{M}_\delta^2\right);$$

где M_δ – число Маха на внешней границе пограничного слоя; $\overline{h_w}$ – температурный фактор, равный отношению энтальпии на стенке к энтальпии торможения. Функционал программы позволяет задавать диапазон ламинарно-турбулентного перехода, то есть задаются $\mathrm{Re}_\theta^{\min}$, $\mathrm{Re}_\theta^{\max}$ – минимальное и максимальное число Рейнольдса для начала и завершения перехода.

На основе вычисленных чисел Рейнольдса можно вычислить коэффициент перемежаемости следующим образом [11]:

$$\Gamma = \begin{cases} 0, \ \mathrm{Re}_\theta \le \mathrm{Re}_\theta^{\min}; \\ \dfrac{\mathrm{Re}_\theta - \mathrm{Re}_\theta^{\min}}{\mathrm{Re}_\theta^{\max} - \mathrm{Re}_\theta^{\min}}, \ \mathrm{Re}_\theta \in \left(\mathrm{Re}_\theta^{\min}, \mathrm{Re}_\theta^{\max}\right); \\ 1, \ \mathrm{Re}_\theta \ge \mathrm{Re}_\theta^{\max}. \end{cases} \quad (24)$$

Численные расчеты

Алгоритм получения тепловых потоков состоит из следующих этапов:

1. Выделение области растекания с использованием критерия (7)–(9).

2. Вычисление значений z_i и коэффициентов ламинарного и турбулентного теплообмена в области растекания с использованием формул (21) и (3) соответственно.

3. Аппроксимация дифференциальных операторов в уравнениях (5) и численное решение краевой задачи с фиксированными значениями z_i в области растекания. Аппроксимация производилась схемами второго порядка по пространству.

4. Расчет коэффициентов теплообмена вне области растекания по формулам (2) и (3).

5. Расчет числа Рейнольдса Re_θ, коэффициента перемежаемости и полного теплового потока с использованием формул (23), (24), (1) и (22).

Для валидации метода проведено сравнение полученных тепловых потоков по MEFFL с расчетами из [10].

Начальные данные: давление p = 300 Па, температура T = 250 K, молярная масса газа μ = 0,0289 кг/моль, скорость U = 6M = 1900 м/с. Температура стенки была принята постоянной и равной T_w = 300 K. Радиус сферы R=1 м. Количество ячеек в поверхностной сетке равно $3 \cdot 10^4$.

Уравнение построенного на области растекания параболоида (10) имеет вид $0{,}5z^2 + 0{,}5y^2 - 0{,}2 = x$. Распределение полученного ламинарного теплового потока и его сравнение с данными из [10] представлено на рис. 3, где угол на сфере отсчитывается от точки растекания вдоль координаты y.

На рис. 3 видно, что ламинарный тепловой поток совпадает с данными из работы [10], что говорит о корректности работы алгоритма.

На рис. 4 представлено сравнение ламинарных тепловых потоков с предыдущей версией программы для наглядной демонстрации улучшения работы алгоритма вблизи области растекания, где параметр k – характерный размер ячейки, деленный на радиус сферы.

Видно, что ранее наблюдалось уменьшение ламинарного теплового потока за областью растекания, что является некорректным результатом. Хотя и повышение порядка аппроксимации, и сгущение сетки помогало частично справиться с проблемой, этого было недостаточно для получения гладкой картины теплового потока. С использованием подхода, изложенного в данной работе, удалось получить гладкую картину.

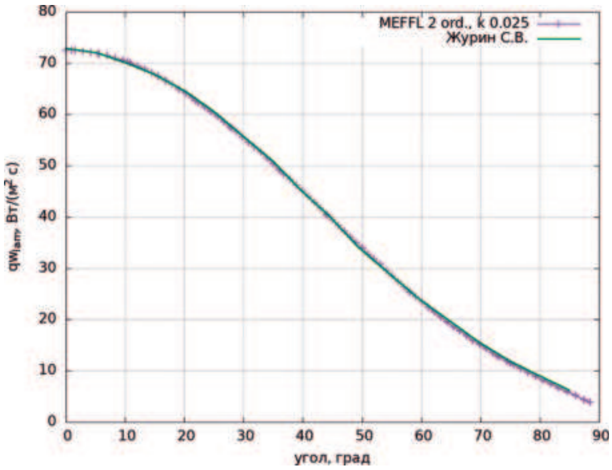

Рис. 3. Сравнение ламинарного теплового потока, полученного с помощью модифицированного метода эффективной длины (MEFFL), с данными из работы [10]

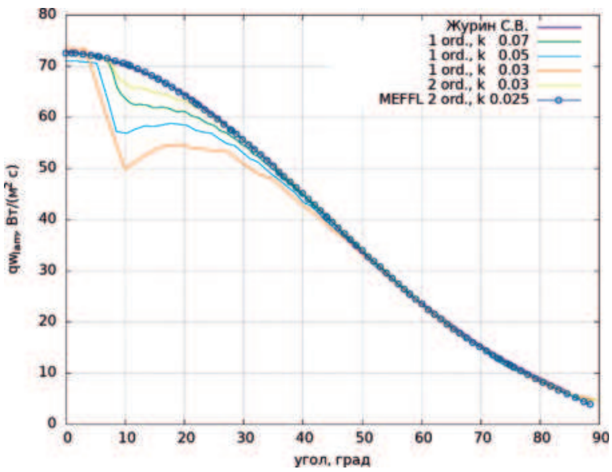

Рис. 4. Сравнение ламинарных тепловых потоков, полученных в работах [9, 10] и с помощью модифицированного метода эффективной длины

Было также проведено исследование сходимости решения по сетке. Выбраны сетки с относительным размером ячейки $k \in \{0{,}17; 0{,}09; 0{,}05; 0{,}025\}$. Результаты расчетов представлены на рис. 5.

Можно видеть, что при сгущении сетки решение приближается к решению из [10], что говорит о наличии сходимости. Кроме того, можно сказать, что алгоритм показывает отличную работу на грубых сетках с высокой точностью. При значении $k = 0{,}025$ вдоль образующей сферы находится 91 точка, а при $k = 0{,}09$ находится 27 точек. Несмотря на это, решение все еще остается гладким и удовлетворительно совпадает с данными из работы [10].

Для валидации методики расчета перехода тепловых потоков был выбран эксперимент из [19], в котором проявляется ламинарно-турбулентный переход на сфере радиусом $R = 6{,}35$ см.

Начальные данные: давление p = 4424 Па, температура T = 73,6 K, молярная масса газа μ = 0,029 кг/моль, скорость U = 5M = 859,2 м/с. Температура стенки T_w = 100,9 K.

Полученное распределение полного коэффициента теплообмена представлено на рис. 6.

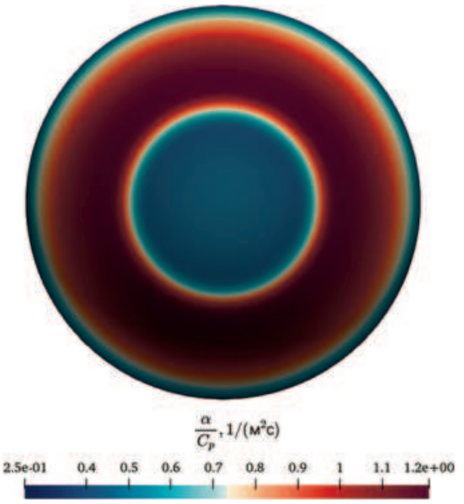

Рис. 6. Распределение полного коэффициента теплообмена по сфере

На рис. 6 хорошо виден ламинарно-турбулентный переход, повышение полного коэффициента теплообмена из-за преобладания турбулентной составляющей.

Сравнение полного коэффициента теплообмена с данными [19] представлено на рис. 7.

На рис. 7 нанесено несколько кривых для отображения различных диапазонов критических чисел Рейнольдса для ламинарно-турбулентного перехода.

Кроме того, были рассчитаны тепловые потоки на поверхности метеорного тела Юнона в масштабе 1 : 117000. Расчет производился на высоте h = 70 км с параметрами: p = 5,22 Па, T = 250,35 K, U = 6M = 1935 м/с, молярная масса μ = 0,028 кг/моль. На основе полученных полей давления, температуры и скорости была построена область растекания с параметром $\alpha = 0{,}2$. Полученное уравнение параболоида (10):

$$0{,}406(z - 0{,}013)^2 + 0{,}501(y - 0{,}02)^2 - 0{,}649 = x.$$

Распределение относительных ламинарного и турбулентного тепловых потоков представлено на рис. 8, распределение относительного полного теплового потока – на рис. 9.

На рис. 9 относительный коэффициент теплообмена распределен неравномерно, что объясняется неровностью поверхности метеорного тела, коэффициент теплообмена обладает гладкостью.

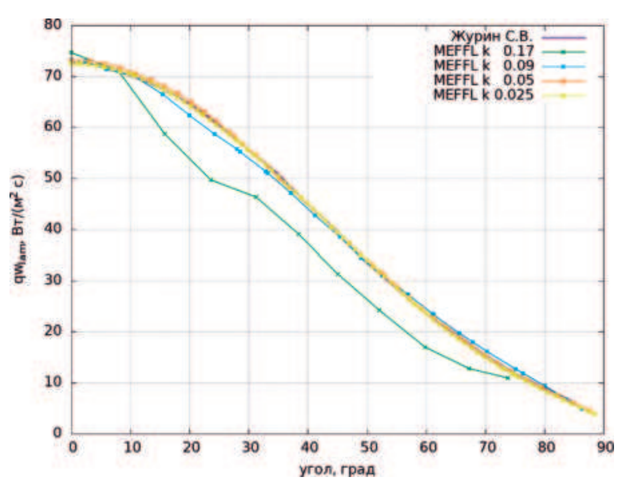

Рис. 5. Исследование сходимости тепловых потоков при сгущении сетки, сравнение с данными из работы [10]

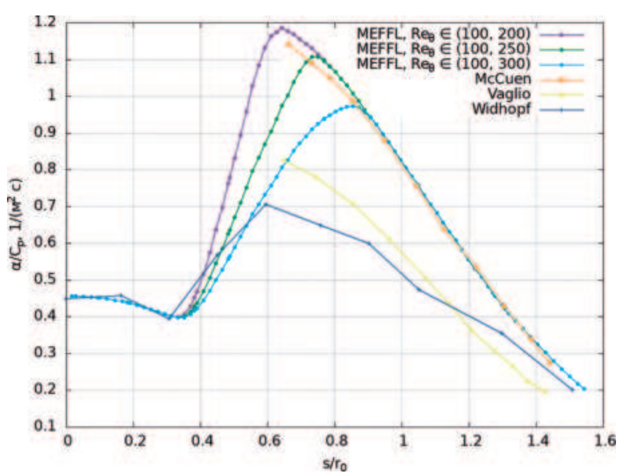

Рис. 7. Распределение полного коэффициента теплообмена вдоль линии тока для разных критических чисел Рейнольдса Re_θ и сравнение с данными из [19]

В данном случае критическое число Рейнольдса подобрано таким образом, чтобы демонстрировать ламинарно-турбулентный переход. Видно, что он происходит несимметрично. На рис. 10 представлено распределение относительных коэффициентов теплообмена вдоль горизонтальной линии.

На рис. 10 видно, что полный относительный коэффициент теплообмена имеет области резкого и плавного изменения, что обусловлено геометрией объекта. Максимальное значение полного относительного коэффициента теплообмена в два раза превосходит значение в точке растекания.

Было проведено исследование влияния отдельной обработки области растекания на время выполнения программы. Для этого была выбрана сетка размерностью в $3 \cdot 10^4$ ячеек. Использовался процессор AMD Ryzen 5 pro 4650g 3,7 ГГц, вычисление проводилось в однозадачном режиме с общей памятью. Время выполнения программы составило 56 с, что на 30 с больше времени выполнения предыдущей версии программы, однако оно незначительно по сравнению с временем газодинамического расчета, который занял порядка трех часов, и это время также считается незначительным в сравнении с временем решения полной системы уравнений Навье–Стокса [20].

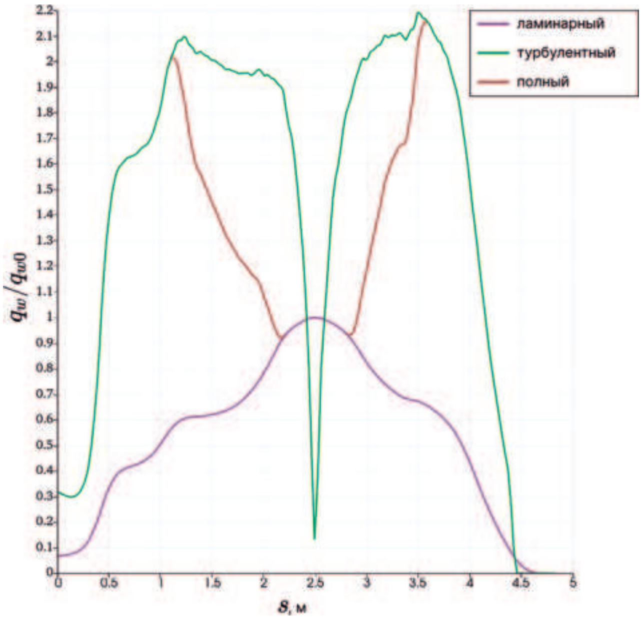

Рис. 10. Распределение относительных тепловых потоков по поверхности метеорного тела Юнона вдоль горизонтальной прямой

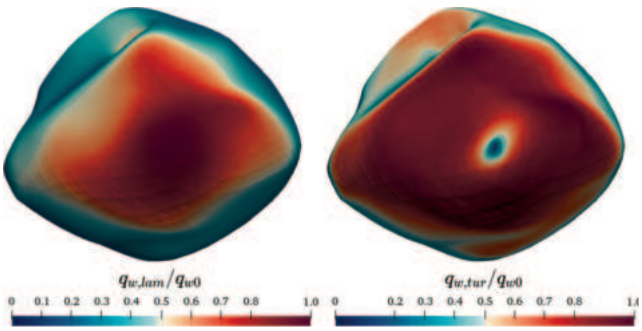

Рис. 8. Распределение относительных ламинарного и турбулентного тепловых потоков по поверхности метеорного тела Юнона, где q_{w0} – значение ламинарного теплового потока в точке растекания

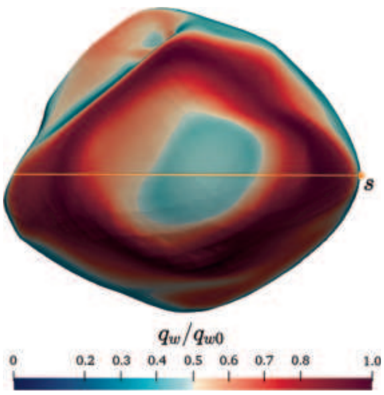

Рис 9. Распределение относительного полного теплового потока по поверхности метеорного тела Юнона, где s – длина дуги вдоль поверхности, q_{w0} – значение ламинарного теплового потока в точке растекания

Выводы

В статье представлена модификация метода эффективной длины – был доработан алгоритм расчета тепловых потоков в окрестности точки растекания и добавлена возможность моделирования ламинарно-турбулентного перехода по заданному диапазону чисел Рейнольдса.

Для валидации метода были проведены сравнения с работой [10] (задача расчета теплового потока на сфере) и сравнение с работой [19] (задача ламинарно-турбулентного перехода на сфере). Сравнения показали близкое совпадение ламинарных тепловых потоков и завышенное значение турбулентных. Завышение значений тепловых потоков характерно для инженерного метода эффективной длины и не является препятствием для его использования в практических расчетах.

Для демонстрации устойчивости работы вычислительного кода, реализованного на основе предложенного метода, был проведен расчет тепловых потоков на реальном метеорном теле Юнона, поверхность которого является неровной и которое не имеет симметричной формы. Полученные результаты позволяют сказать, что алгоритм обладает устойчивостью (робастностью) и позволяет проводить расчеты тепловых потоков на различных телах, в том числе несимметричных и с неровной поверхностью. Стоит отметить, что на телах с неровной поверхностью тепловой поток в выбоинах и кавернах не может корректно рассчитываться методом эффективной длины, потому что нельзя уверенно утверждать, что в этих местах не произошел развал или деградация пограничного слоя.

В статье показана относительная скорость получения тепловых потоков. Модифицированная версия программы работает дольше при отдельной обработке области растекания, однако время ее работы остается несопоставимо малым по сравнению с временем решения задачи внешнего обтекания.

В заключение отметим, что представленный метод расчета тепловых потоков позволит получать распределения тепловых потоков на гладких телах и телах сложной геометрии, обладает устойчивостью и высокой скоростью работы. К недостаткам метода можно отнести завышение значений турбулентных тепловых потоков и невозможность расчета в кавернах, впадинах и в донной области.

Список источников

1. *Пхио А.*, *Семенов В.Н.*, *Федулов Б.Н.* Оптимизация трансформируемых конструкций летательных аппаратов // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 1. С. 32-40.
2. *Махонин А.А.*, *Глазков В.П.*, *Аль-Духэйдахави М.А.Л.* и др. Оптимизация полета малого беспилотного летательного аппарата в статическом режиме // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2021. № 2. DOI: 10.24412/2541-9269-2021-2-16-22
3. *Филимонов СА.*, *Гаврилов А.А.*, *Дектерев А.А.* и др. Математическое моделирование взаимодействия свободно-конвективного течения и подвижного тела // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16. № 1. С. 89–100. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.7
4. *Манапова А.К.*, *Бекетаева А.О.*, *Макаров В.В.* Метод штрафных функций для моделирования обтекания цилиндра дозвуковым сжимаемым потоком // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. 2024. Т. 21. №4. С. 107–123. DOI: 10.55452/1998-6688-2024-21-4-107-123
5. *Власов В.И.*, *Горшков А.Б.*, *Ковалев Р.В.* Моделирование высокотемпературных течений многокомпонентного газа и процессов теплообмена космических аппаратов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Т. 7. URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2008-7/articles/438/
6. *Кузенов В.В.*, *Дикалюк А.С.* Реализация приближенного метода расчета конвективного теплообмена вблизи поверхности ГЛА сложной геометрической формы // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2017. Т.18. № 2. URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2017-18-2/articles/689
7. *Авдуевский В.С.* (ред). Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике: Учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
8. *Матковский Н.О.*, *Тишков В.В.*, *Гусев А.Н.* и др. Особенности расчета параметров теплообмена на поверхности объектов авиационной техники с использованием инструментария Data Science // Тепловые процессы в технике. 2022. Т. 14. № 10. С. 475–480. DOI: 10.34759/tpt-2022-14-10-475-480
9. *Минюшкин Д.Н.*, *Фролов И.С.* Оценка конвективных тепловых потоков для метеороидных тел в трехмерной постановке // Теплофизика высоких температур. 2023. Т. 61. № 4. С. 588–593. DOI: 10.31857/S0040364423040099
10. *Журин С.В.* Методика численного моделирования конвективного теплообмена на телах сложной формы с использованием метода эффективной длины: Дисс. ... канд. техн. наук. М., 2010. 122 с.
11. *Землянский Б.А.*, *Лунев В.В.*, *Власов В.И.* и др. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2014. 380 с.
12. *Минюшкин Д.Н.* Математическое моделирование изменения формы метеороидного тела при аэродинамическом нагреве: Дисс. ... канд. техн. наук. М., 2023. 111 с.
13. *Абубакаров М.С.С.*, *Юсупова А.В.* Аппроксимация экспериментальных данных методом наименьших квадратов // Актуальные вопросы физико-математического образования: Материалы межрегиональной студенческой научно-практической конференции (21 апреля 2022; Грозный). Махачкала: АЛЕФ, 2022. С. 223–231.
14. *Иванков П.Л.*, *Обухов В.П.* О некоторых вопросах методического характера, связанных с понятием длины кривой // Modern European Researches. 2022. Т. 1. №3. С. 99–103.
15. *Qureshi U.K.*, *Jamali S.*, *Kalhoro Z.A.*, et al. Modified quadrature iterated methods of boole rule and weddle rule for solving non- linear equations // Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences. 2021. Vol. 16. No. 2, pp. 87-101. DOI: 10.26782/jmcms.2021.02.00008
16. *Сидняев Н.И.* Исследование влияния тепломассопереноса сферического наконечника на сверхзвуковое обтекание комбинированного тела вращения // Известия высших учебных заведения. Авиационная техника. 2006. № 2. С. 32-36.
17. *Дубровин Б.А.*, *Новиков С.П.*, *Фоменко Ф.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. 7-е изд. М.: URSS, 2023. Т. 1, 336 с.

18. *Сафиуллин Р.А.* Теплообмен в области перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1971. № 6. С. 92-96. URL: https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1971/6/92-96
19. *Widhopf G.F., Hall R.* Transitional and Turbulent Heat-Transfer Measurements on a Yawed Blunt Conical Nosetip // AIAA Journal. 1972. Vol. 10. No. 10, pp. 1318-1325. DOI: 10.2514/3.50376
20. *Бабаев И.Ю., Башкин В.А., Егоров И.В.* Численное решение уравнений Навье–Стокса с использованием итерационных методов вариационного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1994. Т. 34. № 11. С. 1693–1703. URL: https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf2489

References

1. Phyo A, Semenov VN, Fedulov BN. Optimization of transformable aircraft structures. *Aerospace MAI Journal*. 2024;31(1):32–40. (In Russ.).
2. Makhonin AA, Glazkov VP, Al-Duhaidahawi MAL, et al. Optimization of small unmanned aerial vehicle static flight. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*. 2021(2). (In Russ.). DOI: 10.24412/2541-9269-2021-2-16-22
3. Filimonov SA, Gavrilov AA, Dekterev AA. Mathematical modeling of the interaction of a thermal convective flow and a moving body. *Computational continuum mechanics*. 2023;16(1):89–100. (In Russ.). DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.7
4. Manapova AK, Beketayeva AO, Makarov VV. Penalty function method for modeling of cylinder flow with subsonic compressible flow. *Herald of the Kazakh-British technical university*. 2024;21(4):107-123. (In Russ.). DOI: 10.55452/1998-6688-2024-21-4-107-123
5. Vlasov VI, Gorshkov AB, Kovalev RV. Modeling of hightemperature flows of multispecies gases and surface heat transfer to space vehicles. *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*. 2008;7. (In Russ.). URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2008-7/articles/438/
6. Kuznetsov VV, Dikalyuk AC. The realization of an approximate method for cal-culating convective heat transfer near the surface of a GLA of a complex geometric shape. *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*. 2017;18(2). (In Russ.). URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2017-18-2/articles/689
7. Avduevskii VS. (ed) *Fundamentals of heat transfer in aviation and rocket and space technology*. 2nd ed. Moscow: Mashinostroenie; 1992. 528 p. (In Russ.).
8. Matkovskiy N, Tishkov V, Gusev A, et al. Specifics of heat exchange parameters computing on the surface of aerotechnics employing Data Science toolkit. *Thermal processes in engineering*. 2022;14(10):475–480. (In Russ.). DOI: 10.34759/tpt-2022-14-10-475–480
9. Minyushkin DN, Frolov IS. Estimation of Convective Heat Fluxes for Meteoroid Bodies in a Three-Dimensional Formulation. *Teplofizika vysokih temperatur*. 2023;61(4):588–593. (In Russ.). DOI: 10.31857/S00403644230400
10. Zhurin SV. *Methodology of numerical modeling of convective heat transfer on bodies of complex shape using the effective method*. PhD thesis. M.: MIPT; 2010. 122 p. (In Russ.).
11. Zemlyanskii BA, Lunev VV, Vlasov VI, et al. *Convective heat exchange of aircraft*. Moscow: Fizmatlit; 2014. 380 p. (In Russ.).
12. Minyushkin DN. *Mathematical modeling of changes in the shape of a meteoroid body during aerodynamic*. PhD thesis. M.: MIPT; 2023. 111 p. (In Russ.).
13. Abubakarov MS-S, Yusupova AV. Approximation of experimental data by the least square method. *Materialy mezhregional'noi studencheskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Aktual'nye voprosy fiziko-matematicheskogo obrazovaniya" (April 21, 2022; Grozny)*. Makhachkala: ALEF; 2022. p. 223–231. (In Russ.).
14. Ivankov PL, Obukhov VP. About some methodological issues related to the concept of curve length. *Modern European Researches*. 2022;1(3):99–103. (In Russ.).
15. Qureshi UK, Jamali S, Kalhoro ZA, et al. Modified quadrature iterated methods of boole rule and weddle rule for solving non- linear equations. *Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences*. 2021;16(2):87-101. DOI: 10.26782/jmcms.2021.02.00008
16. Sidnyaev NI. Study of the influence of heat-and-mass transfer on the spherical tip surface on the supersonic flow around a combined body of revolution. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniya. Aviatsionnaya tekhnika*. 2006(2):32-36. (In Russ.).
17. Dubrovin BA, Novikov SP, Fomenko FT. *Modern geometry: Methods and applications: Geometry of surfaces, transformation groups and fields*. 7th ed. Moscow: URSS; 2023. Vol. 1. 336 p. (In Russ.).
18. Safiullin RA. Heat transfer in the transition region of the laminar boundary layer to the turbulent one. Izvestiya AN SSSR. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. 1971(6):92-96. (In Russ.). URL: https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1971/6/92-96
19. Widhopf GF, Hall R. Transitional and Turbulent Heat-Transfer Measurements on a Yawed Blunt Conical Nosetip. *AIAA Journal*. 1972;10(10):1318-1325. DOI: 10.2514/3.50376
20. Babaev IYu, Bashkin VA, Yegorov IV. Numerical solutionof the Navier-Stokes equations using variational iteration methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1994;34(11):1455–1462. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию / Received 15.03.2025
Одобрена после рецензирования / Revised 28.03.2025
Принята к публикации / Accepted 02.04.2025