На правах рукописи

Агамиров Владимир Левонович

РАЗРАБОТКА ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК УСТАЛОСТНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ И ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Специальность:

01.02.06. «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Москва

2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент

Вестяк Владимир Анатольевич.

Официальные оппоненты: **Кузнецов Александр Павлович,**
доктор технических наук, советник генерального директора АО «Станкопром» Госкорпорации «Ростех»;

Аксенов Сергей Алексеевич,
кандидат технических наук, доцент департамента «Прикладная математика» Московского института электроники и математики НИУ «Высшая школа экономики».

Ведущая организация: Государственный научно-исследовательский институт гражданской авиации (ГосНИИ ГА).

Защита состоится «_11_» __декабря__ 2015 года в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО МАИ (НИУ) и на сайте http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=61486.

Автореферат разослан «___» ____________ 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Федотенков Г.В.

1. Общая характеристика работы

Актуальность исследований. В условиях конкуренции на рынке авиационной и ракетно-космической техники, происходит постоянное сокращение объемов экспериментальных исследований и сроков ввода в эксплуатацию изделий.

В соответствии с Методами Определения Соответствия (МОС) нормативным требованиям Авиационных Правил (АП25.571) безопасность конструкции по условиям прочности при длительной эксплуатации обеспечивается обоснованием допустимых повреждений и безопасного ресурса. Для обеспечения указанных требований необходима разработка оптимальных методов обоснования показателей надежности и ресурса элементов конструкций авиационной техники.

Таким образом, тема диссертационной работы, посвященной разработке оптимальных методов статистического оценивания характеристик сопротивления усталостному разрушению, является **актуальной**.

Целью работы является повышение эффективности, надежности и безопасности машин и элементов конструкций на всех этапах жизненного цикла путем разработки оптимальных методов статистического обоснования характеристик усталостных свойств в условиях незавершенных и ограниченных объемов экспериментальных данных.

Поставленная цель достигается решением следующих задач.

1. Эффективное точечное оценивание показателей надежности и долговечности путем оптимального решения уравнений максимального правдоподобия и наименьших квадратов при прямых и косвенных испытаниях в условиях многократного цензурирования.
2. Сокращение объемов механических испытаний, повышение точности определения расчетных характеристик выносливости деталей машин и элементов конструкций, стабилизация рассеяния усталостных свойств за счет оптимальных преобразований долговечности и пределов выносливости при статистическом анализе.
3. Планирование многофакторных усталостных испытаний и прогнозирование характеристик прочности и долговечности элементов конструкций в область

эксплуатационных значений путем точного расчёта толерантных интервалов.

4. Повышение надежности выбора материалов, полуфабрикатов, параметров технологических процессов в условиях ограниченных объемов экспериментальных данных путем оптимизации методов расчета точных распределений ранговых статистических критериев.

Методы исследования, использованные в работе:

- статистическое моделирование на ЭВМ методом Монте-Карло результатов испытаний с целью анализа функций распределения долговечности и пределов выносливости, поведения их параметров в связи с вариацией характеристик рассеяния;
- статистическое точечное и доверительное оценивание параметров моделей на основе методов максимального правдоподобия и наименьших квадратов;
- компьютерные программы на языке *VBA и PHP*, алгоритмы в среде *Mathcad*, реализующие разработанные методики и алгоритмы.

В работе использованы результаты реальных усталостных испытаний идентичных образцов с различной степенью концентрации напряжений из титанового сплава ВТ3-1 и алюминиевого сплава В-95. Вид образцов изображен на рис. 1.

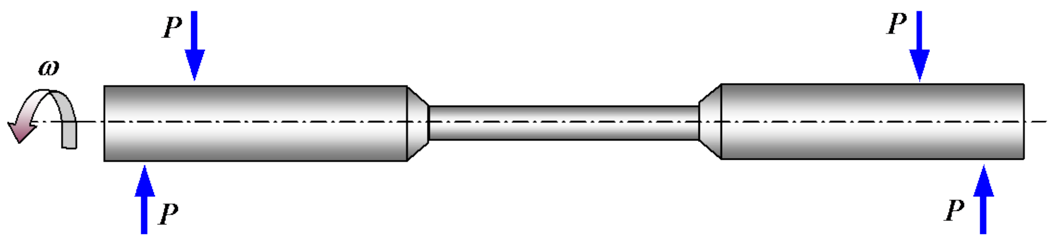


Рис. 1 Вид испытываемых образов.

Испытания проводились на усталостной машине на изгиб с вращением (Рис 2).

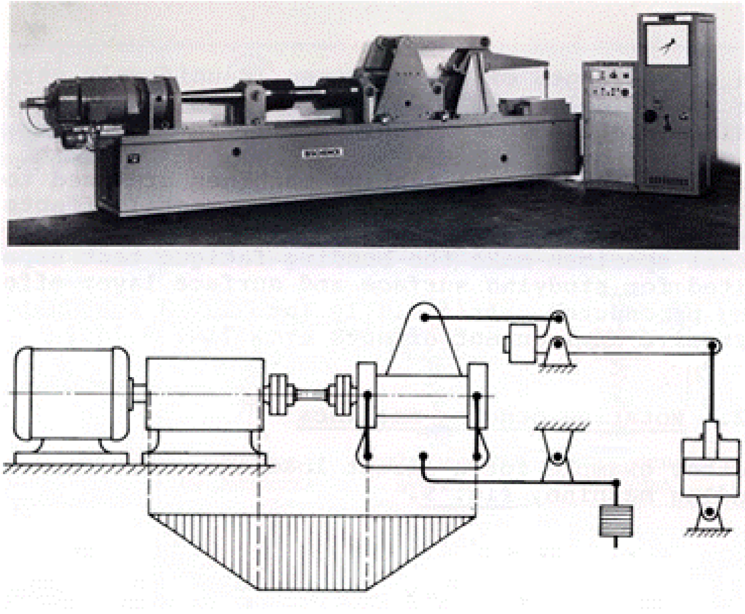


Рис 2.: Машина на изгиб с вращением.

Использовались партии (не менее 10-30) образцов круглого сечения диаметром 7-10 мм.

Во избежание концентрации напряжений образцам придается плавная форма, а поверхность тщательно шлифуется или полируется.

Предел выносливости зависит от размеров поперечного сечения образца. Поэтому всегда указывается, на образцах какого диаметра определялась эта усталостная характеристика.

Первый образец испытываемой партии нагружается так, чтобы максимальные напряжения превышали предел выносливости при данном коэффициенте асимметрии цикла, и по счетчику на усталостной машине устанавливается количество циклов, которое выдержал образец перед разрушением.

В каждом последующем образце при том же коэффициенте асимметрии цикла создается максимальное напряжение, меньшее, чем в предыдущем, и также регистрируется число N циклов, при котором эти образцы разрушаются.

Результаты испытаний представляются графически в виде кривой усталости. По оси ординат откладывается σ_{max} - максимальное напряжение цикла, при котором испытывался образец, а по оси абсцисс - число N циклов, которое выдержал образец перед разрушением.

На каждом уровне напряжений σ_{max} испытывается несколько образцов, и по результатам испытаний определяется среднее значение разрушающего числа циклов. Именно это значение N и откладывается по оси абсцисс при построении кривых усталости.

Научная новизна работы состоит в разработке:

- методов оптимального решения уравнений максимального правдоподобия и наименьших квадратов при обработке прямых и косвенных испытаниях;
- методов преобразований характеристик долговечности и пределов выносливости при статистической обработке, позволяющих повысить точность оценивания расчетных характеристик выносливости;
- метода точного расчёта доверительных интервалов для квантилей характеристик механических свойств, позволяющего решать задачи планирования и прогнозирования характеристик прочности и долговечности элементов конструкций;
- методов расчета распределений ранговых статистических критериев, позволяющих осуществлять надежный выбор материалов, полуфабрикатов, параметров технологических процессов в условиях малых выборок.

На защиту выносятся следующие положения:

- результаты исследования точечного и доверительного оценивания параметров и квантилей распределений в условиях неполных выборок;
- результаты оптимизации рассеяния характеристик усталостных свойств;
- результаты исследования задачи многофакторного планирования усталостных испытаний;
- результаты исследования точного расчета распределений критических значений непараметрических критериев проверки гипотез.

Практическую значимость работы представляют:

- разработанные методы, рекомендации, оптимальные алгоритмы и программы решения нестандартных статистических задач, возникающих при анализе результатов механических испытаний материалов и элементов конструкций.

Достоверность научных выводов и рекомендаций подтверждается:

- удовлетворительным совпадением расчетных оценок с экспериментальными данными, полученными при испытаниях лабораторных образцов. Применением апробированных методов теории вероятностей, математической статистики и вычислительной математики. Сравнением полученных результатов с результатами исследований других авторов. Применением лицензированных компьютерных программных комплексов *Exel, VBA, Mathcad, PHP*, сопоставлением аналитических результатов с данными статистического моделирования методом Монте-Карло.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались и обсуждались на различных международных, всесоюзных, республиканских и отраслевых конференциях, симпозиумах и коллоквиумах, в том числе:

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ. Материалы диссертации были представлены на 3-х Всероссийских конференциях, коллоквиумах и симпозиумах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит их введения, пяти глав, основных выводов, списка литературы из 106 наименований. Она содержит 129 страниц основного текста, ___ рисунков, ___ таблиц и приложения на 11 страницах.

2. Основное содержание работы

Во введении на основании анализа состояния проблемы сформулированы цель и задачи диссертационной работы, обоснована актуальность проводимых исследований, отражена научная новизна полученных результатов, отмечена их достоверность и практическая значимость, перечислены положения, выносимые на защиту, кратко изложено содержание диссертации.

В первой главе выполнен анализ проблемы разработки оптимальных методов оценивания характеристик усталостных свойств материалов и элементов конструкций. Выделены основные направления, связанные с темой диссертационной работы: исследования рассеяния усталостной долговечности, методы статистического оценивания характеристик усталостных свойств, методы проверки статистических гипотез при анализе результатов механических испытаний.

Исследованиям вопросов рассеяния усталостной долговечности, методов статистического анализа характеристик сопротивления усталости, надежности и долговечности элементов авиационных конструкций посвящены работы: С.В. Серенсена, В.Л. Райхера, М.Н. Степнова, Н.А. Махутова, В.П. Когаева, Б.В. Бойцова, Кордонского Х.Б., Парамонова Ю.М., В.В. Мозалева, И.И. Хазанова, А.Н. Лисина, Л.В. Агамирова, А.Ф. Селихова, В.М. Чижова, А.З. Воробьева, А.Г. Колосова, А.Н. Петухова и др.

Исследованиям прикладных вопросов статистического анализа и проверки статистических гипотез посвящены работы Дж. Кендалла, А. Стьюарта Б.Ю., Коэна А., Мана Н., Имана Р., Стифенса М., Лемешко, А.И. Орлова, Ю.Н. Тюрина, Холлендера М., Вулфа Д., Т. Хеттманспергера и других авторов.

Проведенный анализ состояния проблемы показал, что методы оценивания характеристик усталостных свойств не сопровождаются оптимальными алгоритмами численного решения сложных трансцендентных систем уравнений, имеющих во многих случаях множество локальных минимумов. Поэтому весьма актуальной представляется задача разработки оптимальной методики и компьютерных программ оценки характеристик усталостных свойств, позволяющей эффективно осуществлять обработку прямых и косвенных циклических испытаний.

Установлено, что высокий уровень рассеяния характеристик усталостных свойств материалов и элементов конструкций, и, прежде всего, не монотонность рассеяния при вариации уровня переменной нагрузки, весьма отрицательно влияет на точность обоснования расчетных характеристик долговечности и выносливости, что, в свою очередь, вызывает необходимость разработки методов преобразований параметров долговечности и предела выносливости с целью стабилизации рассеяния усталостных свойств.

Анализ литературных данных показывает, что для вероятностного обоснования нижнего гарантированного ресурса, необходимо расчетным путем оценивать доверительные границы для функции распределения нормативных характеристик прочности, надежности и ресурса натурных деталей. В то же время точный математический расчет этих показателей надежности связан с большой трудоемкостью вычислительных процедур, не позволяющих с высокой точностью и быстро вычислять интервальные оценки важнейших характеристик прочности и надежности. Необходимо отметить, что интервальное оценивание характеристик усталостных свойств позволяет решать ряд сопутствующих задач, например, факторного планирования усталостных испытаний. Вопросы проверки статистических гипотез при анализе усталостных испытаний имеют существенные особенности, связанные с ограниченностью статистического материала, большим рассеянием, наличием цензурирования, сложностью определения вида гипотетических функций распределений и оценки их параметров, что вызывает необходимость разработки оптимальных методов точного распределения непараметрических критериев проверки статистических гипотез, что особенно актуально в задачах технологической подготовки производства, обоснования преимуществ того или иного материала, полуфабриката, технологического процесса.

Вторая глава посвящена разработке оптимальных методов оценивания характеристик сопротивления усталостному разрушению. К числу наиболее распространенных методов оценивания параметров распределения долговечности и предела выносливости относятся метод максимального правдоподобия (ММП) и метод наименьших квадратов (МНК). В простых задачах (нормальное распределение случайных величин, не цензурированные выборки и т.п.) эти методы дают близкие, иногда совпадающие результаты. В общем случае многократно цензурированной выборки ММП-оценки параметров $\hat{a}_l, \hat{\sigma}_l, \hat{x}_0$ логарифмически нормального распределения определяют как корни нелинейной системы уравнений:

$$\left.\frac{d\ln L}{da_l}\right|_{a_l=\hat{a}_l} = \sum_{i=1}^{k}(y_i-\hat{a}_l)+\hat{\sigma}_l\cdot\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot\psi(z_j)=0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{d\ln L}{d\sigma_l}\right|_{\sigma_l=\hat{\sigma}_l} = \sum_{i=1}^{k}\left(y_i-\hat{a}_l\right)^2+\hat{\sigma}_l^2\cdot\left[\sum_{j=1}^{m}r_j\cdot\psi(z_j)\cdot z_j-k\right]=0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{d\ln L}{dx_0}\right|_{x_0=\hat{x}_0} = \sum_{i=1}^{k}\frac{y_i-\hat{a}_l}{x_i-\hat{x}_0}+\hat{\sigma}_l^2\cdot\sum\left(x_i-\hat{x}_0\right)^{-1}+\hat{\sigma}_l\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j\cdot\psi(z_j)}{x_{бj}-\hat{x}_0}=0, \tag{3}$$

где

$$y_i = \ln(x_i - \hat{x}_0),\ z_j = \frac{\ln(x_{бj} - \hat{x}_0) - \hat{a}_l}{\hat{\sigma}_l},\ \psi(z_j) = \frac{\phi(z_j)}{1 - \Phi(z_j)},$$
$$\phi(z_j) = \frac{e^{-\frac{z_j^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}},\ \Phi(z_j) = \int_{-\infty}^{z_j} \phi(t) \cdot dt. \tag{4}$$

Аналогичная система уравнений имеет место и для распределения Вейбулла-Гнеденко. Подобные системы имеют, как правило, несколько локальных минимумов, Поэтому любой стандартный метод численного решения систем нелинейных уравнений не сможет дать однозначного решения, так как решение будет зависеть в значительной степени от начального приближения. В этих условиях первостепенной представляется задача, во-первых, установления достаточно точных аппроксимаций, с целью обоснования начальных приближений и, во-вторых, выбора наиболее приемлемого численного метода решения систем нелинейных уравнений. В настоящей работе в качестве первого приближения при решении указанных систем уравнений для логарифмически-нормального, нормального и Вейбулла-Гнеденко законов распределения, рекомендуется выбирать обычные оценки для полных выборок, а в качестве метода решения – метод деформируемого многогранника (Налдера-Мида), который достаточно быстро с заданной точностью находит корни системы нелинейных уравнений. Автором разработана программа реализации метода в среде *Visual Basic* и *Mathcad.*

Применительно к задачам механических испытаний в линейной постановке универсальные подходы демонстрирует метод наименьших квадратов, основанный на системе матричных уравнений, которые легко реализуются, например, с помощью распространенных математических пакетов *Mathcad, Mathlab* и др. В соответствии с методом наименьших квадратов МНК-оценки параметров линейной модели производятся по уравнениям:

$$\hat{b} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y. \tag{5}$$

Матрица рассеяния оценок b определяется из следующего уравнения:

$$D(\hat{b}) = \sigma^2 (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}\ , \tag{6}$$

где несмещенная оценка для остаточной дисперсии σ^2 определяется формулой:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-k_1} \cdot (y - X \cdot \hat{b})^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot \hat{b}). \tag{7}$$

При прямых испытаниях**,** к которым относят испытания, связанные с непосредственным измерением случайных величин, уравнения (5) позволяют оценивать параметры сдвига и масштаба, исходя из порядковых статистик, то есть выборочных наблюдений, упорядоченных по величине. Вектор математических ожиданий (α) и ковариационная матрица (V) нормированных порядковых статистик определяются из следующих уравнений:

$$\alpha_l = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-l} \cdot [F(x)]^{l-1} \cdot dx}{B(l, n-l+1)}, \tag{8}$$

$$V_{l,l} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-l} \cdot [F(x)]^{l-1} \cdot dx}{B(l, n-l+1)} - \alpha_l^2, \tag{9}$$

$$V_{l,s}(l < s) = \\ = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)[1 - F(x)]^{n-s} dx \int_{-\infty}^{x} yf(y)[F(x) - F(y)]^{s-l-1} [F(y)]^{l-1} dy}{B(l, s-l+1) B(s, n-s+1)} - \alpha_l \alpha_s, \tag{10}$$

$$B(a,b) = \frac{(b-1)! \cdot (a-1)!}{(a+b-1)!}, \tag{11}$$

где $l, s = 1...n,\ f(z), F(z)$ - плотность и функция нормированного непрерывного распределения с параметрами сдвига и масштаба. В настоящей диссертации разработаны алгоритм и программы для расчета математических ожиданий и ковариаций порядковых статистик на основе разложения в ряд (порядок разложения $(n+2)^{-3}$) для нормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко. Для двухпараметрического логарифмически нормального и нормального распределений $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$, $F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t) \cdot dt$. Для представления распределения Вейбулла-Гнеденко к виду с параметрами сдвига и масштаба осуществлено следующее нормирующее преобразование:

$$\ln(x - x_0) = a + z \cdot \sigma, \quad \sigma = 1/b, \quad a = \ln c, \quad F(z) = 1 - e^{-e^z}, \; f(z) = e^{z - e^z}. \quad (12)$$

Для однократно цензурированной справа выборки оценки параметров сдвига и масштаба, их ковариационную матрицу определяют по тем же формулам, но при этом матрица X, вектор наблюдений y, ковариационная матрица V составляются по первым k наблюдениям случайной величины из n объектов, подвергшихся испытанию. При этом в формулах величина суммарного объема испытаний n остается неизменной. Автором разработаны программы оценивания параметров распределений методом наименьших квадратов на основе уравнений (5) с учетом функций (8)-(11).

При оценке параметров уравнений кривых усталости методом наименьших квадратов их необходимо привести к линейному виду в соответствии с общей линейной моделью $y = b \cdot x$. Например

$$x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1}), \; y = \lg N, \; b_1 = b_2 \cdot \overline{x} - b_2 \cdot \lg a, \; b_2 = -\frac{1}{\alpha}, \quad (13)$$

при использовании уравнения кривой усталости:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot \left(N\right)^{-\alpha}. \quad (14)$$

$$x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1}), \; y = \lg\lg N, \; b_1 = b_2 \cdot \overline{x} - b_2 \cdot \lg c, \; b_2 = -\frac{1}{\beta}, \quad (15)$$

при использовании уравнения кривой усталости:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + c \cdot \left(\lg N\right)^{-\beta}, \quad (16)$$

где $\sigma_{-1}, a, \alpha, \beta, c$ - параметры кривых усталости.

Для квантильной кривой усталости, то есть кривой усталости, соответствующей заданной вероятности p и для цензурированной выборки эта дисперсия определена приближенно:

$$V_{pi,i} = D\left\{\hat{y}_{pi} = \hat{y}_i + z_p \cdot \hat{\sigma}_{y_i}\right\} \approx \frac{\sigma_{y_i}^2}{n_i}\left(\nu_{1,1i} + 2 \cdot z_p \cdot \nu_{1,2i} + z_p^2 \cdot \nu_{2,2i}\right), \quad i = 1,\ldots,m, \quad (17)$$

где z_p - квантиль нормированного нормального распределения; (ν) - ковариационная матрица оценок $\hat{y}_i, \hat{\sigma}_{y_i}$. В полной выборке $\nu_{1,1} = 1, \nu_{1,2} = 0, \nu_{2,2} = 0{,}5$. При единичном испытании или малом числе наблюдений на данном уровне амплитуды напряжений циклов в первом приближении можно принять $V_{pi,i}=1$, считая равновесными все уровни.

Оценки параметров линейной модели равны:

$$\hat{b}(\hat{\sigma}_{-1p})_p = \left[X(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot X(\hat{\sigma}_{-1p}) \right]^{-1} \cdot X(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot \hat{y}_p \tag{18}$$

для квантильной кривой усталости, где $\hat{y}_{pi} = \hat{y}_i + z_p \cdot \hat{\sigma}_{y_i}$.

Задача обоснования нижних гарантированных (квантильных) значений характеристик прочности, надежности и долговечности деталей машин и элементов конструкций актуальна на всех этапах их проектирования, производства и эксплуатации. Методы, основанные на средних значениях характеристик прочности и надежности, к тому же выполненные зачастую по данным ограниченных выборочных совокупностей, являются приближенными и могут привести к серьезным ошибкам, если не учитывать в расчетах вероятной области рассеяния исследуемых характеристик. Точный расчет квантилей распределения этих характеристик позволяет существенно снизить риск отказов ответственных элементов авиационных конструкций. Односторонние верхние и нижние доверительные границы для квантилей нормального закона распределения в полной выборке определяют по формулам:

$$\hat{x}_{pu} = \hat{a} + t_{\beta}\left[n-1, z_p \cdot \sqrt{n} \right] \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \tag{19}$$

$$\hat{x}_{pl} = \hat{a} + t_{1-\beta}\left[n-1, z_p \cdot \sqrt{n} \right] \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \tag{20}$$

где β – уровень доверительной вероятности, $t_{\gamma}\left[f, \Delta \right]$ – квантиль уровня γ нецентрального распределения Стьюдента с $f = n-1$ степенями свободы и с параметром нецентральности $\Delta = z_p \cdot \sqrt{n}$, z_p – квантиль уровня P нормированного нормального распределения, $\hat{a}, \hat{\sigma}$ – оценки параметров нормального распределения. Формулы (19), (20) справедливы и для нормального распределения логарифма случайной величины. Автором разработана методика численного расчета обратной функции нецентрального распределения Стьюдента, которая заключается, во-первых, в задании приемлемых начальных приближений, во- вторых, в применении сплайн-аппроксимации дискретных значений прямой функции распределения, и в вычислении обратной функции распределения. Разработана программа для расчета на ЭВМ квантилей нецентрального распределения Стьюдента в широком диапазоне чисел степеней свободы и параметров нецентральности. Сравнения численного расчета и точных значений квантилей нецентрального распределения показали весьма близкое соответствие (по вероятности отличие обнаруживается в 5-7 знаке после запятой) результатов.

Верхние $\hat{y}_{pu}$ и нижние $\hat{y}_{pl}$ доверительные границы для квантиля случайной величины y в двухпараметрической линейной модели определяются из следующих уравнений:

$$\hat{y}_{pu} = \hat{y}(x_0) + t_{\beta}\left[\Delta, f\right] \cdot \delta\{\hat{y}\} \ , \tag{21}$$

$$\hat{y}_{pl} = \hat{y}(x_0) + t_{1-\beta}\left[\Delta, f\right] \cdot \delta\{\hat{y}\} \ , \tag{22}$$

где оценка условного математического ожидания y на заданном уровне x_0 равна:

$$\hat{y}(x_0) = (X_0)^T \cdot \hat{b} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \cdot (x_0 - \overline{x}), \tag{23}$$

а ее дисперсия на заданном уровне x_0 определяется из следующего уравнения:

$$\delta^2\{\hat{y}\} = (X_0)^T \cdot D(\hat{b}) \cdot (X_0) = D(\hat{b}_1) + D(\hat{b}_2) \cdot \left(x_0 - \overline{x}\right)^2 \ , \tag{24}$$

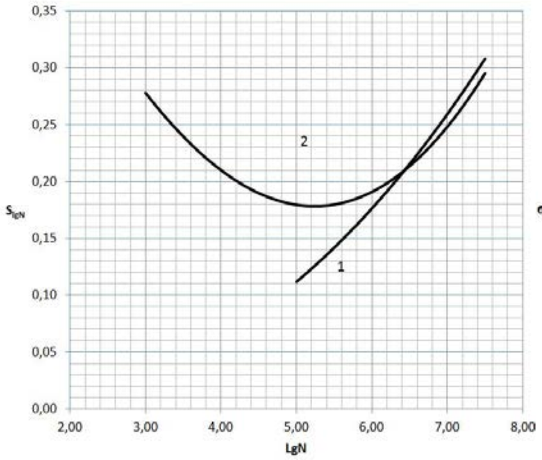
где параметр нецентральности $\Delta = z_p \cdot \dfrac{\hat{\sigma}_y(x_0)}{\delta\{\hat{y}\}}$, число степеней свободы $f = N - k_1$, где k_1 - число оцениваемых параметров линейной модели (в нашем случае $k_1 = 2$). Оценка $\hat{\sigma}_y(x_0) = \hat{\sigma}_0 \cdot h(x_0)$ вычисляется графически или аналитически для конкретного значения x_0, если условная дисперсия y изменяется по уровням (это изменение определяется эмпирической функцией $h(x_0)$). При постоянной дисперсии, а также при единичных наблюдениях принимают $h(x_0)$=1.

Необходимо отметить, что рассмотренная методика оценки параметров носит обобщенный характер и может использоваться для более сложных видов линейной модели с произвольным количеством параметров b и регрессоров x. Изменению подвергнется лишь матрица факторов в соответствии с принятым видом линейной модели.

В настоящей работе также решена задача оценки параметров нормального, логарифмически-нормального и Вейбулла-Гнеденко распределений предела выносливости при проведении усталостных испытаний методом «вверх-вниз», для решения которой разработана оптимальная методика и программы на ЭВМ для вычисления начальных приближений и последующего численного решения систем нелинейных уравнений максимального правдоподобия, позволяющая оперативно и с достаточной точностью вычислять значения оценок и нижних доверительных границы предела выносливости при усталостных испытаниях.

В третьей главе исследуются методы оптимизации рассеяния характеристик усталостных свойств конструкционных материалов при статистическом анализе результатов усталостных испытаний. Анализ результатов усталостных испытаний конструкционных материалов свидетельствует о том, что характеристики рассеяния усталостных свойств существенно зависят от долговечности. Для полной кривой усталости, имеющей участки малоцикловой и многоцикловой усталости, эта зависимость имеет немонотонный характер (кривая 2 на рисунке 1), но при достаточно больших долговечностях (низких уровнях амплитуды переменных напряжений), характерных для эксплуатации элементов конструкций самолетов и вертолетов, рассеяние стабильно возрастает.

Это обстоятельство вызывает необходимость введения весовых функций при использовании регрессионных методов статистического анализа, обеспечивающих предпочтение тем наблюдениям случайных величин, для которых при прочих равных условиях оказывается меньшим рассеяние свойств и большим объем статистического материала. В свою очередь это вызывает существенное усложнение статистических процедур и снижение точности оценивания характеристик сопротивления усталостному разрушению, особенно при экстраполяции в область больших долговечностей и статистическом обосновании доверительных областей для долговечности и пределов выносливости.



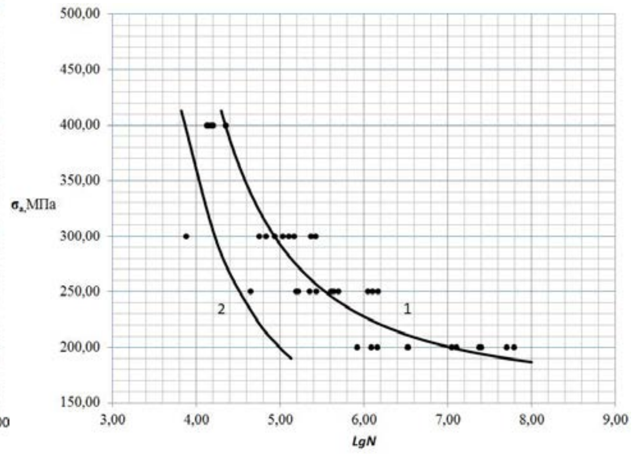


Рисунок 1. Зависимость среднего квадратичного отклонения логарифма долговечности от среднего значения логарифма долговечности,
1 – кривая, соответствующая области многоцикловой усталости,
2- кривая, соответствующая полной кривой усталости

Рисунок 2. Кривая усталости (1) образцов сплава ВТ3-1 с α_σ=2,36 и 95% нижняя доверительная граница уровня p=0,01 (2)

Рассеяние характеристик усталостных свойств вызвано объективными факторами: структурной неоднородностью конструкционных материалов, влиянием конструкционных, технологических и металлургических факторов. Повышение сопротивления усталости деталей машин и элементов конструкций, прежде всего, связано с оптимизацией вышеуказанных факторов и является приоритетной задачей современного машиностроения. В то же время весомый резерв для решения данной проблемы состоит в разработке и применении в инженерной практике эффективных математических методов анализа экспериментальной информации, которая зачастую оказывается неполной, противоречивой и подверженной, в силу особенностей переменной нагруженности, значительному рассеянию. Одним из путей решения данной задачи является рассматриваемая в настоящей диссертации модель стабилизации рассеяния усталостных свойств путем функционального преобразования случайной величины долговечности при обработке усталостных испытаний. Как показывает анализ экспериментальных данных усталостных испытаний литых и деформируемых алюминиевых и магниевых сплавов, значение S_{lgN} колеблется в среднем в пределах 0,1-0,5 при изменении lgN от 4 до 7, а наиболее приемлемой зависимостью выборочного среднего квадратического отклонения логарифма долговечности от выборочного среднего значения логарифма долговечности в области многоцикловой усталости является степенная зависимость:

$$S_{\lg N} = B \cdot \left(\lg N\right)^{\chi}, \tag{25}$$

где *B*, χ - параметры, оцениваемые по результатам усталостных испытаний на ряде уровней (обычно трех-четырех) амплитуд напряжений циклов.

Значения указанных параметров для легких сплавов колеблются в следующих пределах: $B = 1{,}6\ 10^{-4} \div 2\ 10^{-2}$, $\chi = 1{,}2 \div 4{,}2$. Если ввести следующее преобразование логарифма долговечности

$$\phi(\lg N) = \left(\lg N\right)^{1-\chi}, \tag{26}$$

то на основании теоремы о дисперсии функции случайной величины приближенно получим:

$$S^2_{\phi(\lg N)} \approx \left[\frac{d\phi}{d\lg N}\right]^2 \cdot S^2_{\lg N} = (1-\chi)^2 \cdot \left[\left(\lg N\right)^{-\chi}\right]^2 \cdot S^2_{\lg N}. \tag{27}$$

После подстановки (25) в (27) получим:

$$S^2_{\phi(\lg N)} \approx (1-\chi)^2 \cdot \left[\left(\lg N\right)^{-\chi}\right]^2 \cdot B^2 \cdot \left[\left(\lg N\right)^{\chi}\right]^2 = \left(1-\chi\right)^2 \cdot B^2 = const. \tag{28}$$

Таким образом, можно предположить, что преобразование долговечности в соответствии с уравнением (26) при предварительной оценке параметров корреляционного уравнения (25) по результатам усталостных испытаний, приведет к приближенной независимости дисперсии функции долговечности $\phi(\lg N)$ от среднего значения логарифма долговечности.

Указанные теоретические решения положены в работе в основу дальнейшего статистического анализа большого объема (порядка 200 образцов) усталостных испытаний образцов с различной степенью концентрации напряжений из титанового сплава ВТ3-1 и алюминиевого сплава В-95 с целью проверки разработанной модели стабилизации дисперсии логарифма долговечности. С этой целью была составлена программа на ЭВМ в среде *Mathcad* полной статистической обработки усталостных испытаний с преобразованием долговечности (26) с последующей проверкой по критерию Бартлета гипотезы о равенстве ряда вычисленных выборочных дисперсий преобразованной функции долговечности. Во всех случаях для 4 выборочных совокупностей критерий подтвердил с уровнем значимости 5% указанную гипотезу.

В этом случае эмпирические дисперсии функций $\phi\left(\lg N\right)$ долговечности, вычисленные для каждого уровня амплитуд напряжений, объединяются в общую оценку

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} \widehat{S}^2_{\phi(\lg N)_j} \cdot (n_j - 1)}{\sum_{j=1}^{m} n_j - m}. \qquad (29)$$

Преобразование (26), приводящее к стабилизации весовой функции, особенно полезно в дальнейшем статистическом анализе для оценки параметров уравнения кривой усталости. Рассмотрим кривую усталости следующего вида:

$$f\left(\sigma_a\right) = C + D \cdot \left(\lg N\right)^{1-\chi}, \qquad (30)$$

где C и D, подлежащие оценке параметры уравнения кривой усталости, в то время как показатель степени уравнения кривой усталости $1-\chi$ определяется по корреляционному уравнению (25):

$$x = f(\sigma_a), \qquad y = \left(\lg N\right)^{1-\chi}. \qquad (31)$$

В соответствии с теорией линейной регрессии при предположительно нормальном законе распределения зависимой случайной величины $y = \left(\lg N\right)^{1-\chi}$ на каждом уровне независимой случайной величины x, а также физической природой логарифмически нормального закона распределения, верхние (l) и нижние (u) доверительные интервалы имеют следующий вид:

$$y_{l,u} = \widehat{y} + t_{1-\beta,\beta}\left(n-2,\right) \cdot \left[D\left(\widehat{y}\right)\right]^{0,5}, \qquad (32)$$

или

$$y_{l,u}=\hat{a}+\hat{b}\cdot\left(x-\overline{x}\right)+t_{1-\beta,\beta}\left(n-2\right)\cdot\hat{\sigma}_0\cdot\left[\frac{1}{n}+\frac{\left(x-\overline{x}\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_j\cdot\left(x_j-\overline{x}\right)^2}\right]^{0,5},\tag{33}$$

где $\hat{\sigma}_0^2$ - обобщенная дисперсия, не зависящая, в соответствии с преобразованием (26) от уровня фактора x_j. По этой причине в уравнении (33) отсутствуют весовые функции.

Для квантильных кривых усталости (кривых усталости равной вероятности разрушения), представляющих собой с математической точки зрения кривые, отличающиеся от исходной медианной (p=0,5) кривой усталости на величину приращения квантиля случайной величины *y* для заданного уровня *x*:

$$\hat{y}_{p_j}=\overline{y}_j+z_p\cdot\hat{\sigma}_0,\tag{34}$$

где $\overline{y}_j$ -медианная оценка *y*.

В предлагаемой в работе модели стабилизации дисперсии $\hat{\sigma}_0^2$ второе слагаемое в уравнении (34) будет постоянным, то есть не зависящим от уровня *x*, в отличие от стандартного регрессионного анализа. Таким образом, для оценки параметров квантильных кривых усталости, необходимо вместо $\overline{y}_j$ подставить оценку $\hat{y}_{p_j}$. Однако дисперсия оценки квантиля существенно больше дисперсии оценки среднего. Приближенно эту дисперсию предложено определять в соответствии с теоремой о дисперсии функции случайных величин:

$$D\left(\hat{y}_{p_j}\right)\approx D\left(\overline{y}_j\right)+z_p^2\cdot D\left(\hat{\sigma}_0\right)=\frac{\hat{\sigma}_0^2}{n_j}\cdot\left(1+\frac{z_p^2\cdot n_j}{2\cdot\left(n_j-1\right)}\right),\tag{35}$$

Поэтому в уравнении (33) вместо величины n_j следует подставлять некоторый эквивалентный объем испытаний, меньший реального объема испытаний реализованного при оценке медианной кривой усталости:

$$n_j^{eq} = \frac{n_j}{\left(1 + \frac{z_p^2 \cdot n_j}{2 \cdot \left(n_j - 1\right)}\right)} \quad , \tag{36}$$

После подстановки y_{p_j} и n_j^{eq} нетрудно по тем же формулам получить оценки параметров $\widehat{a}_p, \widehat{b}_p, \widehat{C}_p, \widehat{D}_p$ квантильных кривых усталости. С учетом разработанной модели стабилизации дисперсии представляется возможным вычислять доверительные интервалы для квантиля по формуле:

$$y_{l,u}(p) = \widehat{a} + \widehat{b}\left(x - \overline{x}\right) + t'_{1-\beta,\beta}\left(n - 2, \frac{z_p \cdot \widehat{\sigma}_0}{\left[D(y)\right]^{0,5}}\right)\widehat{\sigma}_0 \left[\frac{1}{n} + \frac{\left(x - \overline{x}\right)^2}{\sum_{j=1}^{m} n_j \cdot \left(x_j - \overline{x}\right)^2}\right]^{0,5} , \tag{37}$$

Таким образом, в уравнениях кривых усталости подлежат оценке в соответствии с разработанной выше методикой лишь два параметра *C* и *D*. Это позволяет, прежде всего, повысить точность определения расчетных характеристик долговечности и предела выносливости по кривой усталости, а также существенно сократить объем потребных для достижения заданной точности длительных и дорогостоящих усталостных испытаний.

Как показали приведенные в диссертации расчеты, достаточно стабильным оказывается значение параметра *C* (в пределах 2,2 -2,39), что связано с незначительной вариацией логарифма амплитуды напряжения цикла, а также показателя степени $\gamma = -(1 - \chi)$ кривой усталости (в пределах 1,48-3,07). В то же время наблюдается достаточно широкий диапазон доверительных оценок для долговечности (иногда на два порядка по долговечности), что связано, прежде всего, с высоким рассеяниям усталостных свойств исследуемых материалов, тем большим, чем ниже уровень амплитуд переменных напряжений. В качестве иллюстрации этого на рисунке 2 приведены кривые усталости образцов сплава ВТ3-1 и нижняя 95% доверительная граница квантиля уровня *p*=0,01 для нее. Там же отмечены экспериментальные данные долговечностей до разрушения. Необходимо отметить, что при обосновании расчетных характеристик долговечности и пределов выносливости, в расчет необходимо закладывать именно эти нижние толерантные границы для обеспечения гарантированного ресурса элементов конструкций авиационной и ракетной техники. При этом методика расчета указанных характеристик для образцов, конструктивных элементов или натурных деталей не изменится, меняется, как правило, в силу особенностей отработки элементов конструкций авиационной техники, лишь объем испытанных объектов. Очевидно, что от объема испытаний также существенно зависит точность определения и ширина доверительных интервалов расчетных характеристик долговечности и пределов выносливости.

В четвертой главе разрабатываются методы расчета непараметрических критериев проверки статистических гипотез. Особенностью этой задачи является необходимость точного расчета процентных точек распределения вследствие большой неточности приближенных аппроксимаций при малых объемах наблюдений, в то время как непараметрические критерии особенно эффективны именно при работе с малыми выборками. Нецелесообразность применения обычных в практике статистического анализа нормальных или иных аппроксимаций для этих целей объясняется тем, что известные ранговые критерии (критерий знаков, критерий знаковых рангов Уилкоксона, двухвыборочный критерий Уилкоксона, критерий Краскелла-Уоллиса и др.) относятся к области непараметрической статистики, когда по тем или иным причинам не делается никаких предположений о виде гипотетической функции распределения исследуемой случайной величины. В технических задачах, особенно при анализе результатов механических испытаний, подобная ситуация возникает вследствие малых объемов испытаний, значительного рассеяния вследствие структурной неоднородности конструкционных материалов и большой вариативности внешних факторов при проведении испытаний. Таким образом, возникает парадоксальная ситуация, когда для успешного применения аппроксимаций распределений статистик непараметрических критериев необходимы довольно большие объемы данных, а сами эти критерии имеют особую эффективность по вышеуказанным причинам лишь в малых выборках. Увеличение выборочных совокупностей во многих случаях просто невозможно при испытаниях дорогостоящих материалов, конструктивных элементов и натурных объектов. Кроме того, если этого удается достичь, то наиболее целесообразным является традиционный параметрический статистический анализ, обладающий к тому же, всегда большей эффективностью по сравнению с непараметрическими методами. Поэтому актуальной является задача точного расчета распределений статистик непараметрических критериев. Существуют точные таблицы процентных точек распределений непараметрических критериев, известные рекуррентные формулы и производящие функции частот и моментов, однако методики и рациональные алгоритмы быстрого расчета отсутствуют.

В работе рассматриваются точные распределения следующих критериев: критерия знаков, критерия знаковых рангов Уилкоксона, двухвыборочного критерия Уилкоксона, критерия Краскела-Уоллиса. Так, например, двухвыборочный критерий Уилкоксона предназначен для проверки гипотезы об отсутствии сдвига двух независимых выборок, то есть об отсутствии различия между медианами двух совокупностей при одинаковом, но произвольном распределении. Пусть $x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1})$, $y = \lg N$, $b_1 = b_2 \cdot \overline{x} - b_2 \cdot \lg a$, $b_2 = -\dfrac{1}{\alpha}$ - случайная выборка из

$x = \lg \sigma_a$, $y = \lg N$, $b_1 = b_2 \cdot \overline{x} + \lg d$, $b_2 = -m$,

$x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1})$, $y = \lg \lg N$, $b_1 = b_2 \cdot \overline{x} - b_2 \cdot \lg c$, $b_2 = -\dfrac{1}{\beta}$ - случайная выборка из V ($m \times m$). Функцию распределения y не предполагают симметричной, но форма распределения должна быть одинаковой для двух совокупностей. Для проверки нулевой гипотезы о том, что обе выборки извлечены из одной и той же совокупности $D\{\hat{y}_i\}$ против альтернативы $p = 0,5$ строят вариационный ряд из $V_{i,i} = D\{\hat{y}_i\} = \dfrac{\sigma_{y_i}^2}{n_i}$ наблюдений и присваивают им ранги, равные порядковому номеру наблюдения в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают сумму рангов меньшей выборки в общем вариационном ряду:

$$i = 1, \ldots, m \ . \qquad (38)$$

Для проверки нулевой гипотезы: H_0: $\sigma_{y_i}^2$ при альтернативной гипотезе y должно выполняться неравенство x. При альтернативной гипотезе p должно выполняться следующее неравенство $V_{pi,i} = D\left\{\hat{y}_{pi} = \hat{y}_i + z_p \cdot \hat{\sigma}_{\hat{y}}\right\} \approx \frac{\sigma^2_{y_i}}{n_i}\left(\nu^*_{1,1i} + 2 \cdot z_p \cdot \nu^*_{1,2i} + z_p^2 \cdot \nu^*_{2,2i}\right)$. При двусторонней альтернативной гипотезе $i = 1,...,m$ должно выполняться неравенство z_p с уровнем значимости (ν^*).

Точные критические значения статистики *W*, вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид:

$$M(x) = \frac{m! \cdot n! \cdot \prod_{i=1}^{m+n} (x^i - 1)}{(n+m)! \cdot \prod_{i=1}^{m} (x^i - 1) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x^i - 1)} \tag{39}$$

Другим способом точного вычисления распределения статистики Уилкоксона является использование следующей рекурентной формулы [78]:

$$P(i,j,k) = \frac{j}{i+j} \cdot P(i, j-1, k-i) + \frac{i}{i+j} \cdot P(i-1, j, k); i = 1..m; j = 1..n; k = 0..x \quad , \tag{40}$$

при следующих начальных условиях:

$$P(i,j,k) = 0, при\, k < 0; P(i,0,k) = 1 \ при\, k = 0; P(i,0,k) = 0 \ при \ k \neq 0 \tag{41}$$

В диссертации разработаны несколько методов расчета точного распределения статистик ранговых критериев.

Первая методика основана на модели (39) и предполагает построение алгоритма автоматизированного умножения и деления полиномов. С этой целью разработаны компьютерные программы умножения и деления полиномов, заданных своими коэффициентами.

Другой подход основан на модели (40). Результатом работы программы являются точные значения вероятностей распределения статистики критерия, соответствующих значениям сумм рангов меньшей выборки. Результаты расчетов сравнивались с точными таблицами распределений критических значений ранговых критериев. Быстродействие методов вполне удовлетворительное.

В диссертационной работе реализована также рациональная методика вычисления точных распределений в *k*-выборочной модели путем попарного применения критерия Уилкоксона и методика прямого перебора вариантов в подобных задачах, для которых нет точных решений.

<u>В пятой главе</u> разрабатывается методика оптимального планирования усталостных испытаний. Значительная часть в общей структуре затрат, связанных с обеспечением ресурса, приходится на статические и особенно циклические испытания, как материалов и полуфабрикатов, так и натурных элементов конструкций. Высокая стоимость подобных испытаний связана со стоимостью современных материалов, физико-механических, термомеханических, химико-технологических и иных воздействий на объекты испытаний, которые являются обязательными этапами при отработке технологии производства конструкций, стоимостью изготовления моделей, прототипов и, наконец, натурных объектов, значительными временными затратами при проведении усталостных испытаний. В этих условиях оптимизация испытаний позволяет существенно снизить затраты за счет грамотной формулировки целевых функций, критериев обеспечения надежности, вероятностно-статистического обоснования факторов планирования эксперимента и точности оценивания расчетных характеристик выносливости и долговечности силовых элементов конструкций.

Среди всего многообразия технологий испытаний авиационной техники особая роль отводится усталостным испытаниям материалов и элементов конструкций в связи с их большой трудоемкостью, длительностью, весьма значительным рассеянием характеристик сопротивления усталостному разрушению, связанным с неоднородностью структуры конструкционных материалов и особенностями эксплуатационной нагруженности летательных аппаратов.

В связи с вышеизложенным в настоящей работе рассматривается задача оптимального планирования усталостных испытаний с целью определения долговечности до разрушения или до образования усталостной трещины, а также более трудоемкая задача планирования усталостных испытаний с целью обоснования важнейшей справочной характеристики – предела выносливости. Последняя задача рассматривается в постановке, связанной с построением кривой усталости, как наиболее надежном методе определения предела выносливости в широком диапазоне долговечностей, соответствующем реальному спектру эксплуатационной нагруженности элементов конструкций авиационной техники.

При планированием испытаний с целью оценки квантильных значений характеристик усталостных свойств объем выборки определяется исходя из нормативной ширины доверительного интервала для квантиля логарифма долговечности $x=lgN$. Верхние и нижние доверительные границы рассчитывают по формулам (19), (20). На рисунке 3 (1) в схематическом виде показаны доверительные границы для квантиля распределения логарифма долговечности. Для примера на рисунке указаны симметричные относительно медианы (P=0,5) уровни квантиля 0,01 и 0,99, то есть:

$$\lg \hat{N}_{0,99} = \hat{a} + z_{0,99} \cdot \hat{\sigma} = \hat{a} + 2,326 \cdot \hat{\sigma}$$

$$\lg \hat{N}_{0,01} = \hat{a} + z_{0,01} \cdot \hat{\sigma} = \hat{a} - 2,326 \cdot \hat{\sigma},$$

где $\hat{a}, \hat{\sigma}$ - оценки параметров нормального распределения логарифма долговечности. В работе нормируется относительная ширина одностороннего доверительного интервала:

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{pl}}{\hat{\sigma}} = z_p - t_{1-\beta}\left[n-1, z_p \cdot \sqrt{n}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \text{, для } p < 0,5 \text{ ,} \tag{42}$$

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_{pu} - \hat{x}_p}{\hat{\sigma}} = t_{\beta}\left[n-1, z_p \cdot \sqrt{n}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - z_p \text{, для } p \geq 0,5 \text{ ,} \tag{43}$$

где δ_p - максимальная ошибка оценки квантиля в долях выборочного среднего квадратичного отклонения. При таком подходе объем выборки не зависит от оценок характеристик распределения. Величина δ_p принимается 0,1-0,3 при высоких требованиях к точности, 0,4-0,6 при средних требованиях и 0,8-1,0 при низкой точности.

Однако после проведения полного объема испытаний, необходимо уточнить относительную ошибку в долях оценки квантиля с учетом, полученных по результатам испытаний, оценок распределения логарифма долговечности:

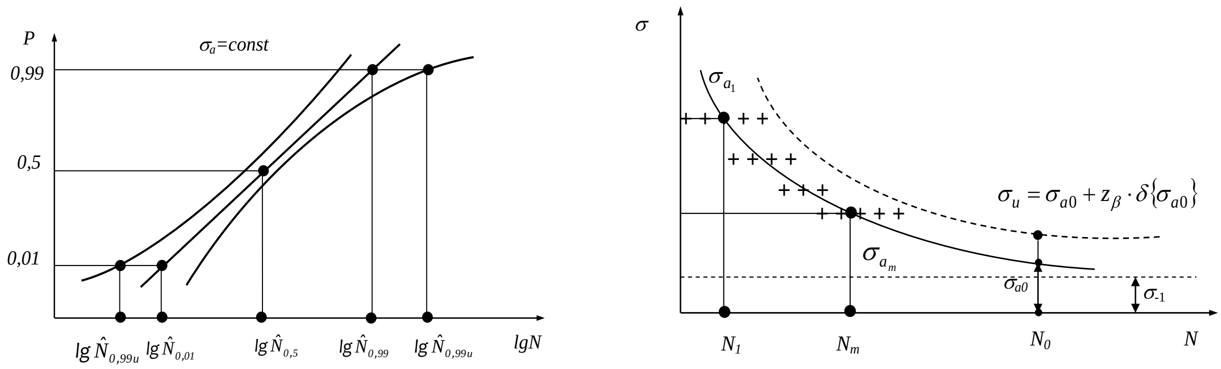
$$\Delta_P = \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{pl}}{\hat{x}_p} \quad \text{или} \quad \Delta_P = \frac{\hat{x}_{pu} - \hat{x}_p}{\hat{x}_p}. \tag{44}$$

Очевидно, что

$$\Delta_P = \frac{\delta_p}{z_p + 1/\hat{\gamma}} , \tag{45}$$

где $\hat{\gamma} = \hat{\sigma} / \hat{a}$ - оценка коэффициента вариации логарифма долговечности.

Эта ошибка уже зависит от оценок параметров распределения логарифма долговечности. Если ошибка (45) не удовлетворяет требованиям точности, то объем испытаний должен быть увеличен и испытания продолжены до достижения требуемой точности.



(1) (2)

Рисунок 3. Доверительные границы для квантиля логарифма долговечности (1) и предела выносливости (2)

Таким образом, для решения задачи планирования усталостных испытаний с целью оценки квантиля распределения логарифма долговечности, прежде всего, необходимо разработать методику расчета объема испытаний n по уравнениям (42), (43). При этом наибольшие затруднения представляет необходимость многократного вычисления обратной функции нецентрального распределения Стьюдента в точности соответствующей заданному уровню доверительной вероятности, значение которого равно интегралу вероятностей нецентрального распределения при том, что n и p являются аргументами функции распределения. Чтобы избежать связанных с этим итерационных процедур, в работе предложена методика численного расчета, предполагающая задание в качестве исходных данных величин относительной ошибки квантиля, минимального объема выборки равного 3, уровней доверительной вероятности и квантиля. Затем, исходя из соотношений (42) или (43), вычисляется значение квантиля и интеграла вероятностей нецентрального распределения Стьюдента. Значение объема выборки циклически увеличивается на единицу до тех пор, пока расчетное значение интеграла вероятностей не превысит значения заданной доверительной вероятности β. В диссертации рассчитаны минимальные объемы выборок для доверительных вероятностей 0,8; 0,9; 0,95; 0,99. Аналогично может быть решена задача определения квантилей нецентрального распределения Стьюдента, но при этом на входе задается значение относительной ошибки δ_p от нуля с шагом 0,0005 достаточным для точного вычисления квантиля. Вычисления продолжаются до тех пор, пока расчетное значение интеграла вероятностей не превысит значения заданной доверительной вероятности. В диссертации рассчитаны значения относительной ошибки для объемов выборки от 3 до 50 при тех же значениях доверительной вероятности, что и в предыдущем алгоритме. Необходимо отметить, что разработанные автором компьютерные программы расчета позволяют производить весьма быстрые вычисления без итерационных процедур во всех реальных диапазонах вероятностей и уровней доверительной вероятности.

При построении кривой усталости объем серии из n образцов или элементов конструкций разделяют в зависимости от планируемой протяженности кривой на 3-5 групп, каждую из которых испытывают при постоянном уровне переменных напряжений. С увеличением числа уровней амплитуд напряжений погрешность в определении предела выносливости возрастает. Значение ошибки определения предела выносливости зависит от характера распределения объема серии объектов усталостных испытаний n на отдельные группы по числу принятых уровней напряжений при испытаниях m. Наименьшая ошибка достигается в том случае, когда преобладающую часть объема серии испытывают на самом нижнем уровне переменных напряжений, но этот вариант распределения не является целесообразным из-за резкого увеличения времени испытаний. Если себестоимость объекта испытаний сравнительно не велика, то наиболее оптимальным с точки зрения минимума ошибки в определении предела выносливости и без резкого возрастания машинного времени является максимально возможный неравномерный вариант распределения образцов по уровням напряжений, симметричный относительно середины диапазона амплитуд цикла напряжений. Например, при $m = 4$ на двух крайних уровнях напряжения испытывают до 40% от *n,* при двух средних - по 10% от *n.* При m=3 на среднем уровне испытывают 10% от n образцов, а на крайних - по 45% от *n.* Большей асимметрии при $n \leq 10$ добиться практически невозможно.

Минимально необходимый набор факторов планирования усталостных испытаний, проводимых с целью обоснования медианы предела выносливости на данной базе с заданной погрешностью, является следующим: общий объем испытаний и характер распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений циклов, число и значения этих уровней, коэффициент вариации предела выносливости. Перечисленные факторы определяют в первом приближении среднюю квадратичную ошибку медианы предела выносливости, величина которой определяется по следующей приближенной формуле:

$$\delta\left\{\sigma_{a0}\right\} = \frac{s_\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(x_0 - \overline{x}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}} \ , \qquad (46)$$

где $\nu_i = \dfrac{n_i}{n}$ - относительный объем испытаний на i - ом уровне, n_i - объем испытаний на i - ом уровне, $n = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$ - общий объем испытаний, s_σ - оценка среднего квадратичного отклонения предела выносливости, $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i \cdot x_i$.

Приближенные доверительные границы для медианы предела ограниченной выносливости σ_{a0} имеют следующий вид:

$$\sigma_u = \sigma_{a0} + z_\beta \cdot \delta\left\{\sigma_{a0}\right\} = \sigma_{a0} + \frac{z_\beta \cdot s_\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(x_0 - \overline{x}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}} \ , \qquad (47)$$

что приводит к следующей величине относительной ошибки в определении медианы предела выносливости:

$$\delta_{0,5} = \frac{\sigma_u - \sigma_{a0}}{s_\sigma} = \frac{z_\beta}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(x_0 - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{m} \nu_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}} \ . \qquad (48)$$

На рисунке 3 (2) в схематическом виде представлена методика определения доверительных границ для предела выносливости при построении кривой усталости. Пунктиром на рисунке показана верхняя доверительная граница для кривой усталости.

На основании уравнения (48) определяется потребный объем испытаний для обеспечения нормативной относительной ошибки в определении медианы предела выносливости на заданной базе N_0, соответствующей значению $x_0 = \phi(\sigma_{a0})$:

$$n = \left(\frac{z_\beta}{\delta_{0,5}}\right)^2 \left(1 + \frac{\left(x_0 - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{m} \nu_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}\right) \ . \qquad (49)$$

Преобразование $x_i = \phi(\sigma_{ai})$ линеаризует уравнение кривой усталости и поэтому зависит от выбранного уравнения кривой усталости. Выбор факторов при оптимизации планирования усталостных испытаний должен учитывать себестоимость усталостных испытаний, которая определяется стоимостью объектов и стоимостью времени проведения испытаний:

$$C = n \cdot (C_1 + C_3 \cdot \overline{T}) \ , \qquad (50)$$

где C_1 - стоимость одного объекта испытаний, $C_3 = C_2 / (60 \cdot f)$ - стоимость одного цикла испытаний данного объекта, C_2 - стоимость одного часа испытаний, f - частота испытаний (об/мин). Общая долговечность испытаний (в циклах):

$$T = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \overline{N}_i \ , \ \ \overline{T} = \frac{T}{n} \qquad (51)$$

$\overline{N}_i$ - средняя долговечность, соответствующая i-му уровню амплитуды напряжения цикла.

Таким образом, задача оптимального планирования усталостных испытаний заключается в определении минимального объема испытаний n и необходимого характера распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений с целью обеспечения нормативной относительной ошибки (46) при минимальной себестоимости (50) для данного варианта плана испытаний. Может быть минимизировано время испытаний T (51), которое для данного варианта уровней напряжений зависит только от характера распределения объектов по уровням. Такой способ планирования актуален для испытаний, проводимых на дорогостоящих испытательных стендах. При усталостных испытаниях натурных крупногабаритных деталей, минимизировать следует объем испытаний n за счет увеличения продолжительности испытаний при прочих равных условиях. Необходимо отметить, что результаты оптимизации существенно варьируются в зависимости от предполагаемой базовой долговечности, для которой оценивается предел выносливости, то есть от степени экстраполяции по кривой усталости, а также от надежности обоснования априорных медианных кривых усталости.

В таблице 1 представлен фрагмент оптимального планирования усталостных испытаний с учетом их стоимости для четырех вариантов распределения объектов по уровням амплитуд напряжений циклов, соответствующих средним долговечностям в диапазоне от 10^5 до 10^7 циклов. В рассматриваемом примере заданы единичные стоимости объекта и часа испытаний и поэтому оптимальным по стоимости получился вариант со смещением объектов испытаний в сторону высоких амплитуд напряжений. В то же время, оптимальным по объему является неравномерный симметричный вариант распределения объектов (2 вариант), особенно при экстраполяции в область высоких базовых долговечностей, характерных для эксплуатационной нагруженности летательных аппаратов. Вариант № 4 представляется несколько экзотическим, так как требует значительного увеличения времени испытаний, что обычно не приветствуется испытателями. При изменении величин C_1, C_2 и C_3, а также других факторов эксперимента, выводы по оптимизации могут измениться.

Таблица 1. Планирование усталостных испытаний при построении кривых усталости $\delta_{0,5} = 0,3$

$\bar{N}_i$	10^5	$5*10^5$	$1,4*10^6$	10^7
$\sigma_{ai} = 67,5 + 4050 \cdot (\bar{N}_i)^{-2}$	229,50	192,20	174,71	150,15
$\nu_i = n_i / n$	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4
1 вариант	0,25	0,25	0,25	0,25
2 вариант	0,4	0,1	0,1	0,4
3 вариант	0,5	0,3	0,2	0,1
4 вариант	0,1	0,2	0,3	0,5
Базовые долговечности N_0	10^5	10^6	10^7	$5*10^7$
$\sigma_{a0} = 67,5 + 4050 \cdot (N_0)^{-2}$	229,50	180,00	150,15	135,83
n (1 вариант)	87,44	30,46	87,19	170,21
n (2 вариант)	67,22	30,32	67,15	121,00
n (3 вариант)	37,58	69,85	116,97	155,14
n (4 вариант)	30,07	43,69	76,92	107,37
C (1 вариант)	4459,68	1553,33	4446,50	8680,72
C (2 вариант)	4805,98	2168,19	4801,18	8651,85
C (3 вариант)	964,68	1792,84	3002,20	3981,83
C (4 вариант)	2801,38	4070,33	7166,27	10003,35

3. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. На основании анализа литературных данных установлено, что разработка оптимальных методов численного сложных решения задач статистического анализа, связанных с оценкой и обеспечением усталостной долговечности авиационных конструкций, представляет актуальную научную проблему, решение которой направлено на повышение эффективности расчетно-экспериментальной

отработки авиационных конструкций, снижение длительности и стоимости усталостных испытаний.

2. Разработана оптимальная методика и компьютерные программы для решения систем нелинейных уравнений максимального правдоподобия с целью оценки параметров распределений характеристик усталостных свойств при прямых наблюдениях в условиях многократного цензурирования и при косвенных испытаниях для оценки параметров квантильных кривых усталости и функций распределения пределов выносливости.

3. Разработана методика оценки параметров вероятностного распределения характеристик усталостных свойств и параметров кривых усталости на базе единой системы матричных уравнений метода наименьших квадратов в линейной постановке.

4. С целью вероятностного обоснования гарантированного ресурса, показателей надежности и долговечности элементов конструкций, разработана методика расчета доверительных границы для функции распределения.

5. Разработана методика оптимального выбора функциональных преобразований случайных величин при статистическом анализе усталостных испытаний, позволяющая стабилизировать характеристики рассеяния усталостных свойств, существенно сократить объем испытаний, повысить точность определения расчетных характеристик выносливости, что особенно актуально при экстраполяции в область больших долговечностей и малых вероятностей разрушения.

6. Разработаны рациональные методы и программы вычисления точных распределений ряда ранговых непараметрических критериев, позволяющие существенно повысить надежность проверки статистических гипотез при анализе механических испытаний в условиях непрерывного расчетно-экспериментального процесса отработки авиационных конструкций.

7. Разработана оптимальная методика и программный продукт для определения минимального объема выборки, необходимые для решения задач обоснования нижнего гарантированного ресурса ответственных элементов авиационных конструкций, позволяющие производить максимально быстрые вычисления без итерационных процедур во всех реальных диапазонах квантилей распределения.

8. Разработана оптимальная методика и программа планирования усталостных испытаний, проводимых с целью построения кривой усталости, определен минимально необходимый набор факторов планирования, что позволяет обосновать пути минимизации затрат при обеспечении требуемой точности определения предела выносливости по кривой усталости, что весьма актуально для дорогостоящих усталостных испытаний элементов конструкций.

4. СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

4.1. Научные статьи, опубликованные в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л. О едином подходе к оценке характеристик механических свойств при статических и циклических испытаниях, Технология машиностроения, 2007, № 9, с.53-57.

2. Агамиров В.Л., Агамиров Л.В., Вестяк В.А. Метод расчета квантилей распределения характеристик усталостных свойств элементов конструкций., Вестник Московского Авиационного института, 2011, т.18, № 4, с. 71-76.

3. Агамиров В.Л., Агамиров Л.В., Вестяк В.А. Стабилизация рассеяния характеристик усталостных свойств конструкционных материалов при статистическом анализе результатов усталостных испытаний, Вестник Московского Авиационного института, 2011, т.18, № 5, с. 62-72.

4. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Алгоритм оценки параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях. Вестник Московского Авиационного института, том 20, № 5, 2013.

5. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Численные методы и алгоритмы расчета точных распределений непараметрических критериев проверки статистических гипотез. Вестник Московского Авиационного института, том 20, № 4, 2013.

6. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А., Алгоритмы планирования усталостных испытаний. "Программные продукты и системы", № 4, 2014, с. 205-210.

4.2. Материалы, доложенные на международных конференциях, коллоквиумах симпозиумах

7. Агамиров В.Л. Разработка вычислительных алгоритмов в задачах статистического анализа (механических испытаний) // Матер. XVII междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2011., том 1 - С. 11.
8. Агамиров В.Л. Алгоритм расчета квантилей распределения характеристик усталостных свойств элементов конструкций // Матер. XIX междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2013., том 2 - С. 4-5.
9. Агамиров В.Л., Вестяк В.А., Агамиров Л.В. Алгоритмы планирования усталостных испытаний // // Матер. XXI междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2015., том 2 - С. 4-5.