

УДК - 539.3

Особенности конечно-разностной аппроксимации граничных условий сопряжения элементов составных конструкций при численном решении нелинейных начально-краевых задач

Дмитриев В.Г.^{1*}, Егорова О.В.^{2}, Рабинский Л.Н.^{2***} Роффе А.И.²**

¹*Московский государственный университет путей сообщения, ул. Образцова 9,
Москва, 127994, Россия*

²*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993,
Россия*

**e-mail: vgd2105@mail.ru*

***e-mail: janus_olga@mail.ru*

****e-mail: f9_dec@mai.ru*

Аннотация

На основе разработанных консервативных разностных схем построены корректные конечно-разностные аппроксимации для граничных условий при различных вариантах сопряжения элементов составных конструкций каркасного типа. Квазидинамическая форма метода установления адаптирована для решения прикладных задач механики составных конструкций, что позволило построить однотипный итерационный процесс для решения как линейных, так и нелинейных начально-краевых задач. Получены оценки оптимальных значений параметров итерационного процесса и разработана процедура ускорения сходимости метода установления при решении нелинейных статических задач.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных разностей, метод установления, нелинейное деформирование, составные железобетонные конструкции, аппроксимация, устойчивость, сходимость.

Современные стартовые комплексы (СК) ракетно-космических систем (РКС) включают в себя здания и сооружения, выполненные в виде конструкции каркасного типа. Оценка несущей способности таких конструкций изготовленных, как правило, из железобетона, при различных вариантах воздействий, особенно с учетом возросшей сейсмической активности в районах расположения СК, является актуальной задачей. Разработанные в статье методы решения нелинейных задач могут быть распространены на аналогичные типы конструкции авиационной и космической техники.

Рассматриваются составные конструкции каркасного типа, подверженные воздействию системы статических и динамических нагрузок общего и локального характера, включая сейсмические, заданные в виде соответствующей функции $x_{sw} = x_{sw}(t)$ (сейсмограмма, велосигграмма, акселерограмма, рис. 1).

Каркасные железобетонные конструкции, деформирование которых описывается в рамках плоских задач, рассматриваются как составные, состоящие из набора вертикальных и горизонтальных прямолинейных несущих элементов (колонны, перегородки, перекрытия и т.п.), соответствующим образом связанных между собой (монолитные и сборные конструкции). Для описания процессов деформирования конструкций при статических и динамических воздействиях различного характера используются соотношения теории балок и пластин Тимошенко.

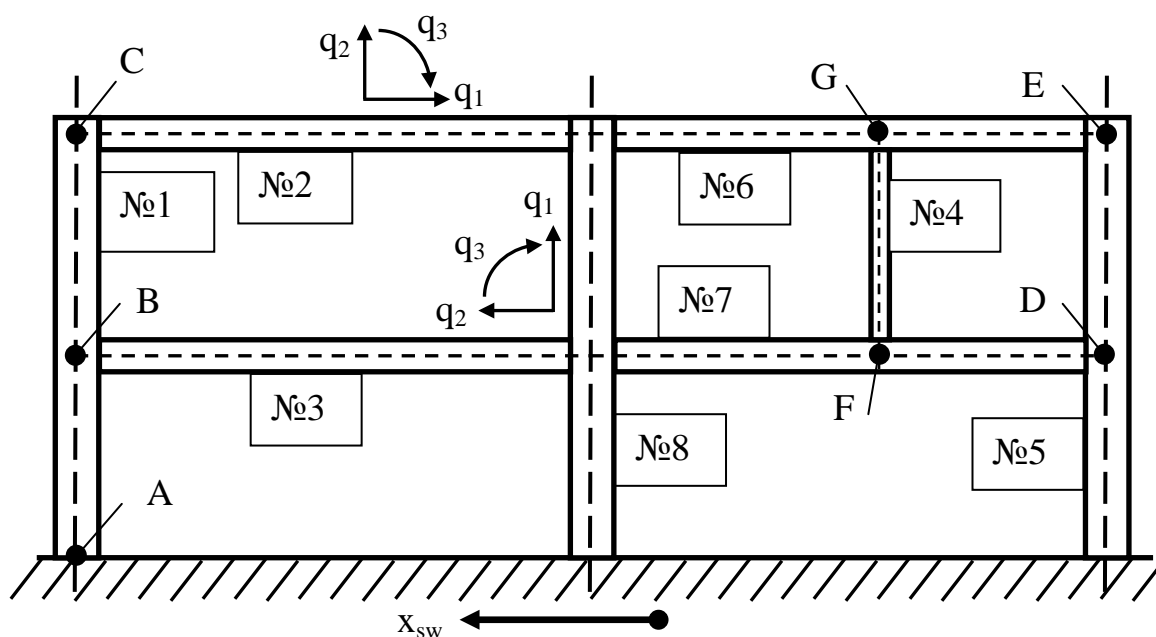


Рис. 1

Математическая модель строится в рамках геометрически нелинейных соотношений теории среднего изгиба в предположении упругой работы бетона и упруго-пластической работы арматуры. Учет геометрической нелинейности особенно важен при расчете большепролетных конструкций [1-4]. Кроме того, уравнения Тимошенко, относящиеся к гиперболическому типу, описывают распространение как волн деформации координатной поверхности, так и изгибно-сдвиговых волн.

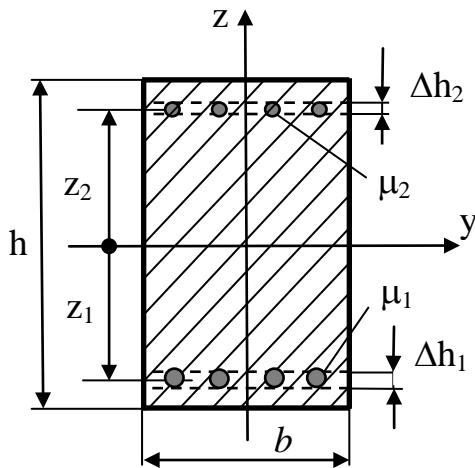


Рис. 2

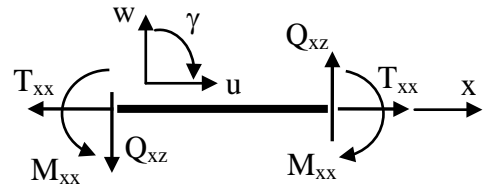


Рис. 3

В поперечном сечении балки нормальные σ_b^z и касательные τ_b^z напряжения в бетоне в слое с координатой z выражаются через компоненты продольной E_{xx} , трансверсальной E_{xz} и изгибной K_{xx} деформации координатной линии $z=0$ по формулам (рис. 2)

$$\sigma_{\delta}^z = E_{\delta} \varepsilon_{xx}; \quad \tau_{\delta}^z = G_{\delta} \varepsilon_{xz}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= E_{xx} + z \cdot K_{xx}; & E_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_x^2; & K_{xx} &= \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \\ \varepsilon_{xz} &= E_{xz} = \gamma - \theta_x; & \theta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

и где E_b, G_b - модули Юнга и сдвига бетона, u - тангенциальное перемещение, w - прогиб, θ_x - угол поворота в соответствии с гипотезой о "жесткой" нормали; γ - полный угол поворота нормали (рис. 3). Предполагается, что трещина в бетоне возникает при значениях растягивающих напряжений $\sigma_b^z \geq R_{bt}$ (R_{bt} - предел проч-

ности бетона на растяжение). При этом, если в процессе деформирования в слое бетона с координатой z происходит закрытие трещины (при смене знака компоненты деформации $\varepsilon_{xx} \geq 0$ на деформацию сжатия $\varepsilon_{xx} < 0$), то данный слой полностью включается в работу поперечного сечения балки. Повторное раскрытие трещины в процессе деформирования сечения происходит при смене знака деформации $\varepsilon_{xx} < 0$ на $\varepsilon_{xx} \geq 0$ и т.д.

При математическом моделировании армирующие элементы рассматриваются в виде ортотропного слоя, эквивалентного по жесткости и работающего на растяжение-сжатие и поперечный сдвиг в направлении армирования и при нулевых значениях коэффициентов Пуассона [3-5]. Приведенные толщины слоев Δh_1 и Δh_2 для общего случая двустороннего армирования могут быть определены через значения коэффициентов армирования как: $\Delta h_1 = \mu_1 \cdot h$; $\Delta h_2 = \mu_2 \cdot h$, где μ_1, μ_2 - коэффициенты армирования в слоях $z < 0$ и $z > 0$ соответственно (рис. 2). В упругой стадии нормальные σ_a и касательные τ_a напряжения в арматуре связаны с деформациями законом Гука

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_{xx}; \quad \tau_a = G_a \varepsilon_{xz}, \quad (3)$$

где E_a, G_a - модули Юнга и сдвига арматуры. Деформация ε_{xx} определяется по формулам (2) при $z=z_1$ - для армирующего слоя $z < 0$ и $z=z_2$ - для слоя арматуры $z > 0$ (рис. 2). Для описания упруго-пластической работы арматуры используются соотношения деформационной теории пластичности [5,6]. Поскольку для описания процессов деформирования отдельного элемента арматуры могут быть приняты условия одноосного напряженного состояния, то соотношения деформационной теории пластичности могут быть представлены в виде:

- в области активного нагружения: $d\sigma_i > 0$ ($de_i > 0$)

$$\sigma_a = \sigma_{11} = \left(K + \frac{4E_c}{9} \right) \varepsilon_{xx}; \quad \tau_a = \tau_{13} = E_c \varepsilon_{xz} / 3; \quad (4)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \tau_{12} = \tau_{23} = 0;$$

- при разрузке: $d\sigma_i < 0$ ($de_i < 0$)

$$\sigma_a = \sigma_a^* + E_a (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^*); \quad \tau_a = \tau_a^* + G_a (\varepsilon_{xz} - \varepsilon_{xz}^*). \quad (5)$$

Звездочкой отмечены напряжения и деформации в момент начала разгрузки. Выражения для интенсивностей деформаций e_i и напряжений σ_i записываются в виде

$$e_i = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \frac{3}{4} \varepsilon_{xz}^2}; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}. \quad (6)$$

Пластические деформации в элементе конструкции возникают при условии текучести Мизеса: $\sigma_i \geq \sigma_T$ ($e_i \geq \varepsilon_T$); σ_T, ε_T - предел текучести и деформация текучести при одномерной деформации растяжения - сжатия. Процесс активного нагружения определяется условием $d\sigma_i > 0$ ($de_i > 0$); при $d\sigma_i < 0$ ($de_i < 0$) начинается разгрузка материала, которая полагается линейно-упругой. С учетом вида диаграмм деформирования малоуглеродистых арматурных сталей зависимость $\sigma_i(e_i)$ может быть аппроксимирована диаграммой с линейным упрочнением (рис. 4). Тогда секущий модуль равен

$$E_c = \frac{\sigma_T}{e_i} + E_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{e_i} \right), \quad (7)$$

где E_1 - касательный модуль при $\sigma_i > \sigma_T$ ($e_i > \varepsilon_T$) (рис.4).

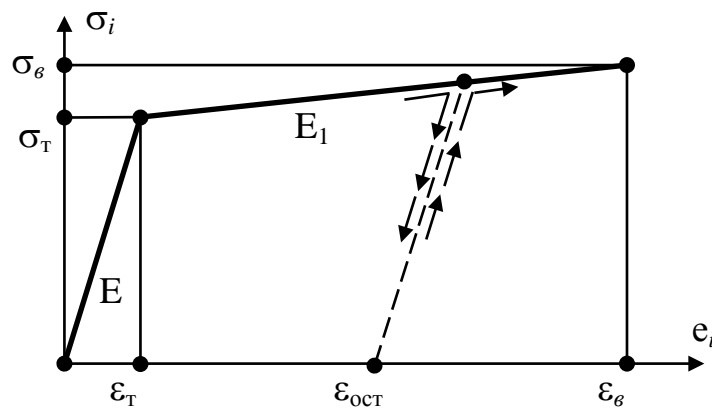


Рис. 4

Приведенные к координатной линии силовые факторы – растягивающая (сжимающая) сила T_{xx} , перерезывающая сила Q_{xz} , изгибающий момент M_{xx} – определяются в результате интегрирования напряжений в бетоне и арматуре по толщине h (рис. 2,3)

$$T_{xx} = b \cdot \int_h (\sigma_{a1} + \sigma_{a2} + \sigma_{\sigma}^z) dz; \quad M_{xx} = b \cdot \int_h (\sigma_{a1} \cdot z_1 + \sigma_{a2} \cdot z_2 + \sigma_{\sigma}^z \cdot z) dz;$$

$$Q_{xz} = k^2 b \cdot \int_h (\tau_{a1} + \tau_{a2} + \tau_{\sigma}^z) dz, \quad (8)$$

где b - ширина балки, σ_{a1}, τ_{a1} и σ_{a2}, τ_{a2} - нормальные и касательные напряжения в арматуре при $z=z_1$ и $z=z_2$ соответственно, $k^2=5/6$. При выполнении интегрирования в (8) предполагается равномерное распределение деформаций и напряжений в пределах толщины приведенного слоя $\Delta h_1(\Delta h_2)$ с учетом дискретного характера распределения напряжений σ_a и τ_a по толщине h .

Предполагается, что конструкция может быть подвержена воздействию системы статических и/или динамических нагрузок различного вида. Для получения уравнений равновесия и движения используются вариационный принцип Лагранжа и Гамильтона-Остроградского соответственно

$$\delta \mathcal{E} = \delta \Pi - \delta A = 0, \quad (9)$$

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi - \delta A) dt = 0, \quad (10)$$

где Π - потенциальная энергия деформации, A - работа внешних сил, K - кинетическая энергия [1-5]. Вытекающие из (9),(10) уравнения равновесия и движения в операторной форме могут быть представлены как

$$[L_x(U)]_k + q_k = 0; \quad (11)$$

$$[L_x(U)]_k + q_k = m_k \ddot{u}_k, \quad (12)$$

где $[L_x(U)]_k$ - соответствующие дифференциальные операторы для вектора обобщенных перемещений $U=U(u_1, u_2, u_3)$; q_k - компоненты нагрузки; $u_1=u$, $u_2=w$, $u_3=\gamma$ - обобщенные перемещения u_k ($k=1,2,3$). В компоненты нагрузки входят составляющие от собственного веса, веса фасадных элементов конструкции и оборудования, снеговые нагрузки, нагрузки, передаваемые от смежных элементов составной конструкции друг на друга и т.д. Для железобетонных конструкций параметры массовых характеристик определяются как

$$m_k = b \cdot \left[\rho_b h + \sum_{i=1}^n \rho_a h_i \right] \quad (k=1,2); \quad (13)$$

$$m_3 = b \cdot \left[\frac{\rho_b h^3}{12} + \sum_{i=1}^n \rho_a \cdot \left(\frac{h_i^3}{12} + z_i^2 \cdot h_i \right) \right],$$

где ρ_a - плотность арматуры, ρ_b - плотность бетона, $n=1$ – при одностороннем армировании, $n=2$ – для случая двустороннего армирования [3,4].

Поскольку уравнения равновесия (11) и уравнения движения (12) получены в проекциях на оси, связанные с недеформированной координатной системой, это позволяет легко сформулировать задачу для составной конструкции. Для моделирования монолитного соединения элементов каркасной конструкции используются условия жесткого защемления (рис. 5а), а граничные условия сопряжения в точках В и С элементов сборных конструкций описываются различными вариантами шарнирного закрепления краев, как неподвижных, так и подвижных с учетом наличия упруго-деформируемых элементов (рис. 5б) [4].

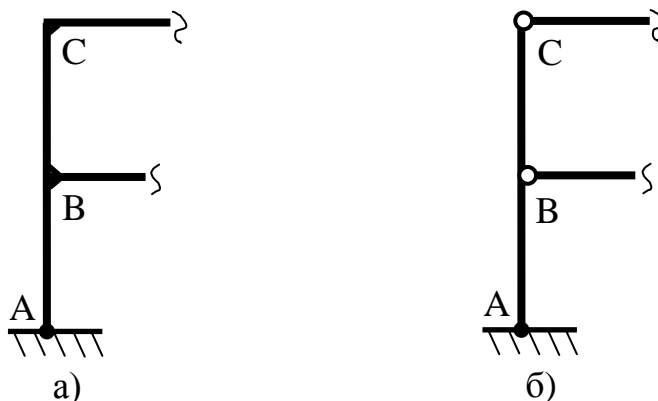


Рис. 5

Не теряя общности, ограничимся условиями монолитного соединения элементов составной конструкции. В соответствии с принятым правилом знаков для обобщенных перемещений и силовых факторов, имеем следующие кинематические и силовые условия сопряжения (условия совместности работ) элементов №1, №2 и №3 каркасной конструкции (рис. 2,6):

т. А:

$$u_{1A} = u^* ; \quad w_{1A} = w^* ; \quad \gamma_{1A} = 0 ; \quad (14)$$

т. В:

$$u_{3B} = -w_{1B} ; \quad w_{3B} = u_{1B} ; \quad \gamma_{3B} = \gamma_{1B} ; \quad (15)$$

$$q_{1B} = \frac{Q_{3-1}}{dx} ; \quad q_{2B} = -\frac{T_{3-1}}{dx} ; \quad q_{3B} = \frac{M_{3-1}}{dx} ;$$

т. С:

$$u_{2C} = -w_{1C}; \quad w_{2C} = u_{1C}; \quad \gamma_{2C} = \gamma_{1C}; \quad (16)$$

$$T^{**} = Q_{2-1}; \quad Q^{**} = -T_{2-1}; \quad M^{**} = M_{2-1};$$

где Q_{3-1} и Q_{2-1} представляют собой обобщенные перерезывающие силы, определенные в краевых точках В и С элементов № 3 и № 2

$$Q_{3-1} = (Q_{xz} - T_{xx} \cdot \theta_x)_2^B; \quad Q_{2-1} = (Q_{xz} - T_{xx} \cdot \theta_x)_2^C. \quad (17)$$

Звездочками отмечены краевые кинематические параметры, заданные или определяемые в процессе решения.

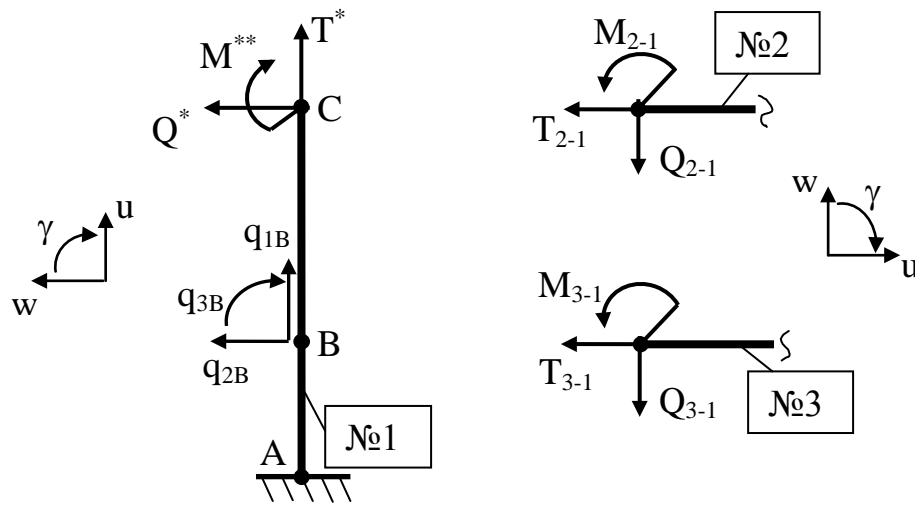


Рис. 6

При решении динамических задач начальные условия ставятся для обобщенных перемещений u_k и их скоростей \dot{u}_k

$$u_k|_{t=0} = u_k^0; \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_k^0, \quad (18)$$

где u_k^0, \dot{u}_k^0 – заданные начальные значения обобщенных перемещений и их скоростей при $t=0$.

При численном решении нелинейной начально-краевой задачи для дискретизации по пространственной x и временной t координате используется метод конечных разностей [1,8]. Для каждого элемента составной конструкции в области непрерывного изменения аргумента x ($0 \leq x \leq l$) вводится основная сетка с шагом $\Delta x = \text{const}$, узлы которой имеют целочисленные индексы i , а также

вспомогательная сетка с дробными индексами ($i \pm 1/2$), узлы которой лежат по середине между узлами основной (рис. 7). Шаги сетки Δx определяются как

$$\Delta x = \frac{l}{N-1}, \quad (19)$$

где N - число точек дискретизации: $1 \leq i \leq N$.

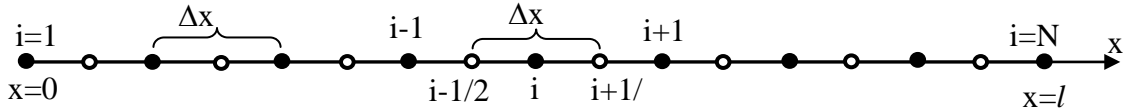


Рис. 7

В узлах основной сетки функциям обобщенных перемещений $u_k(x)$, скоростей $\dot{u}_k(x)$ и нагрузок $q_k(x)$ сопоставляются сеточные функции $u_k(i)$, $\dot{u}_k(i)$ и $q_k(i)$. С узлами вспомогательной сетки сопоставляются сеточные функции параметров НДС.

Сеточные функции физико-механических характеристик элемента конструкции и нагрузок вводятся в соответствующих точках основной и вспомогательной сеток.

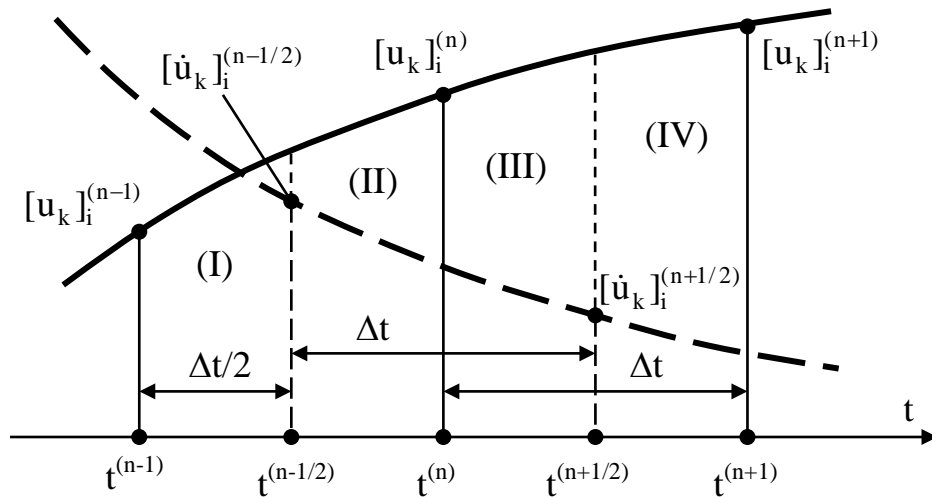


Рис. 8

При дискретизации по временной координате t в области непрерывного изменения времени $t \geq 0$ вводятся две равномерные сетки с постоянным шагом по времени Δt : основная сетка с целочисленными индексами n и слоями

$$t^{(n)} = \Delta t \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

а также вспомогательная сетка с дробными индексами $(n \pm 1/2)$ и временными слоями $t^{(n \pm 1/2)}$ (рис. 8). Сеточные функции обобщенных перемещений $u_k(i)$ соотносятся с узлами основной сетки, а сеточные функции скоростей $\dot{u}_k(i)$ - с узлами вспомогательной. При использовании скрещивающейся сетки дифференциальные операторы для скоростей $\dot{u}_k(x)$ аппроксимируются разностными второго порядка точности $O(\Delta t^2)$ на шаге Δt (рис. 8)

$$[\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} = \frac{[u_k]_i^{(n)} - [u_k]_i^{(n-1)}}{\Delta t}; \quad [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \frac{[u_k]_i^{(n+1)} - [u_k]_i^{(n)}}{\Delta t}. \quad (21)$$

Для получения конечно-разностных аналогов уравнений равновесия (11) и движения (12) используется вариационно-разностный метод [1-3,7]. Исходный функционал Лагранжа (9) записывается в конечно-разностной форме с заменой дифференциальных выражений для компонент деформации конечно-разностными второго порядка аппроксимации. Операция интегрирования заменяется суммированием по ячейкам сетки. Вариационно-разностная схема получается при варьировании дискретизированного функционала Лагранжа, который для расчетной области элемента составной конструкции $0 \leq x \leq l$ можно представить в виде суммы

$$\mathcal{E}_\Sigma = \sum_i (\Pi_i - A_i), \quad (22)$$

где Π_i и A_i - потенциальная энергия деформации и работа внешних сил в сеточной области на элементе $\Delta F_i = \Delta x$. В (22) суммирование осуществляется по тем узловым точкам разностной схемы (РС), в которых варьируются соответствующие обобщенные перемещения $u_k(i)$.

Потенциальная энергия деформации Π_i может быть представлена в виде суммы

$$\Pi_i = \Pi_i(E_{xx}) + \Pi_i(E_{xz}) + \Pi_i(K_{xx}), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_i(E_{xx}) &= 0,5 \cdot [(T_{xx} E_{xx} \cdot b_{11}^* \Delta F)_{i-1/2} + (T_{xx} E_{xx} \cdot b_{22}^* \Delta F)_{i+1/2}]; \\ \Pi_i(E_{xz}) &= 0,5 \cdot [(Q_{xz} E_{xz} \cdot b_{11}^* \Delta F)_{i-1/2} + (Q_{xz} E_{xz} \cdot b_{22}^* \Delta F)_{i+1/2}]; \\ \Pi_i(K_{xx}) &= 0,5 \cdot [(M_{xx} K_{xx} \cdot b_{11}^* \Delta F)_{i-1/2} + (M_{xx} K_{xx} \cdot b_{22}^* \Delta F)_{i+1/2}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Элементарная работа краевой и поверхностной нагрузки в дискретной форме A_i записывается в виде

$$\begin{aligned} A_i &= [(q_1 u + q_2 w + q_3 \gamma) \cdot c^* \Delta F]_i - \\ &- [d_1^* (T^* u + Q^* w + M^* \gamma)]_{i=1} + [d_2^* (T^{**} u + Q^{**} w + M^{**} \gamma)]_{i=N}, \end{aligned} \quad (25)$$

где одной звездочкой отмечены заданные краевые нагрузки на крае $x=0$ ($i=1$), а двумя звездочками - на крае $x=l$ ($i=N$). В формулах (24), (25) $b_{11}^*, b_{22}^*, d_1^*, d_2^*, c^*$ - весовые коэффициенты, учитывающие размеры области интегрирования при отображении соответствующей части элемента на сеточную область (рис. 9).

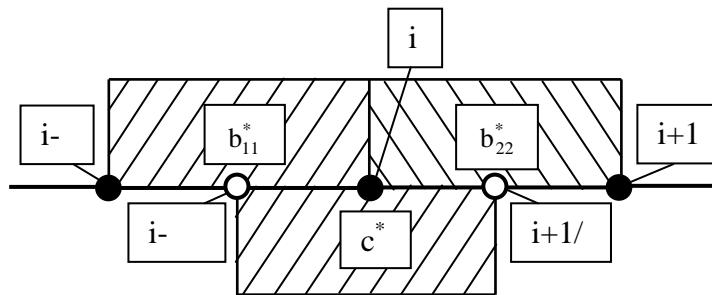


Рис. 9

Весовые коэффициенты d_1^* и d_2^* равны нулю при задании кинематических граничных условий на краях $x=0$ ($i=1$) и $x=l$ ($i=N$) соответственно (рис. 8), и равны единице - при задании граничных условий в силовой (естественной) форме. Значения коэффициентов в зависимости от области численного интегрирования лежат в диапазоне: $0 < c^* \leq 1$; $0 \leq b_{11}^* \leq 1$; $0 \leq b_{22}^* \leq 1$ [1,7]. В регулярных узловых точках разностной сетки весовые коэффициенты равны единице.

Для получения конечно-разностных аналогов уравнений равновесия (11) используется условие минимизации функционала (22)

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial w_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial \gamma_i} = 0. \quad (26)$$

Конечно-разностные аналоги уравнений движения (12) вытекают из вариационно-разностных уравнений, аналогичных (26)

$$\frac{\partial I_\Sigma}{\partial [u_k]_i^{(n)}} = 0, \quad (27)$$

где дискретная форма функционала I (10) представляется суммированием по сеточной области $t^{(n)}$

$$I_\Sigma = \sum_n \{0,5[(f_2 K_\Sigma)^{(n-1/2)} + (f_3 K_\Sigma)^{(n+1/2)}] - (f^* \mathcal{E}_\Sigma)^{(n)}\} \Delta t, \quad (28)$$

и где $\mathcal{E}_\Sigma^{(n)}$ - дискретизированный функционал Лагранжа (22), выраженный через значения сеточных функций обобщенных перемещений $[u_k]_i^{(n)}$, физико-механических характеристик и нагрузок на n -ом временном слое, f_1, f_2, f_3, f_4 - весовые коэффициенты, используемые при численном интегрировании на временных подобластях (I),(II),(III),(IV) соответственно (рис. 8), $f^* = (f_1 + f_2)/2$ - суммарный весовой коэффициент подобластей (II) и (III): $0 \leq f_{1,2,3,4} \leq 1$; $0 \leq f^* \leq 1$. Кинетическая энергия K_Σ каждого элемента составной конструкции определяется в виде суммы

$$K_\Sigma = \sum_i \left\{ 0,5 \left[\sum_{k=1}^3 (m_k \dot{u}_k^2)_i \right] \cdot c^* \Delta F_i \right\}. \quad (29)$$

После выполнения соответствующих преобразований конечно-разностные аналоги уравнений равновесия (15) и движения (16), аппроксимированных относительно узловой точки i , можно представить в операторной форме как

$$[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i = 0; \quad (30)$$

$$\{f^* [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]\}_i^{(n)} = \frac{[f_{22}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} - [f_{11}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n-1/2)}}{\Delta t}, \quad (31)$$

где через $[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]$ обозначены левые части разностных аналогов уравнений равновесия (11), f_{11}^*, f_{22}^* - весовые коэффициенты: $f_{11}^* = (f_1 + f_2)/2$, $f_{22}^* = (f_3 + f_4)/2$ [1-3]. Для регулярной в сеточной области $t^{(n)}$ узловой точки с индексом $n > 0$:

$f_{11}^* = f_{22}^* = f^* = 1$. Уравнения (31) позволяют описать переходные процессы при изменении во времени не только нагрузок, но и физико-механических характеристик материалов, массовых характеристик и геометрических параметров элементов конструкций, что имеет существенное значение при расчете железобетонных каркасных конструкций с учетом процессов трещинообразования в бетоне и упруго-пластической работы арматуры. Вариационно-разностная формулировка исходной начально-краевой задачи позволяет построить консервативные разностные схемы, обеспечивающих сходимость численных решений $u_k(i)$ к точному $u_k(x)$ при сгущении сетки [1,7].

При построении дискретных моделей для составных конструкций (рис. 1,5,6) полагается, что начальный ($i=1$) и конечный ($i=N$) узлы несущих горизонтальных элементов сопрягаются с соответствующими узлами основной сетки вертикальных элементов (рис. 10-12). Нерегулярными узловыми точками являются краевые точки типа С и Е для вертикальных элементов № 1 и № 5 (колонны), на которые в виде краевой нагрузки T^{**}, Q^{**}, M^{**} передается реакция от горизонтальных элементов № 2 и № 6 (балок).

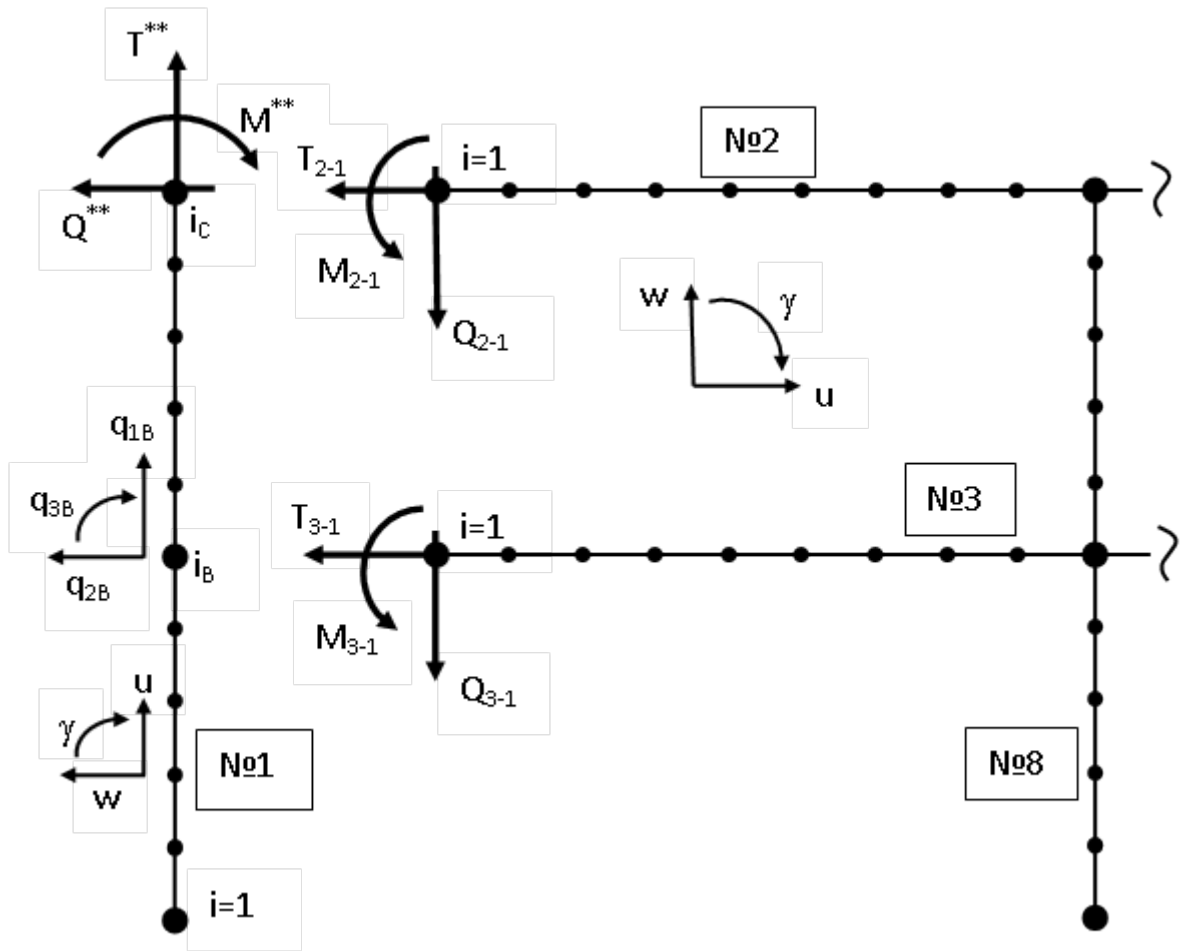


Рис. 10

Сеточные функции обобщенных перемещений и их скоростей в узловых точках $i_C=N_1$ и $i_E=N_5$ определяются из решения основных уравнений, аппроксимированных в этих узлах; N_1 и N_5 - число точек дискретизации на элементах № 1 и № 5 соответственно.

Кинематические и силовые условия сопряжения элементов составной конструкции (14)-(16) аппроксимируются следующим образом:

- сопряжение элементов № 1, № 2 и № 3 в точках B и C (рис. 10)

$$\begin{aligned}
 u_{3,1} &= -w_{1,i_B}; & w_{3,1} &= u_{1,i_B}; & \gamma_{3,1} &= \gamma_{1,i_B}; \\
 q_{1B} &= \frac{Q_{3-1}}{\Delta x_1}; & q_{2B} &= -\frac{T_{3-1}}{\Delta x_1}; & q_{3B} &= \frac{M_{3-1}}{\Delta x_1}; \\
 u_{2,1} &= -w_{1,i_C}; & w_{2,1} &= u_{1,i_C}; & \gamma_{2,1} &= \gamma_{1,i_C}; \\
 T^{**} &= Q_{2-1}; & Q^{**} &= -T_{2-1}; & M^{**} &= M_{2-1};
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

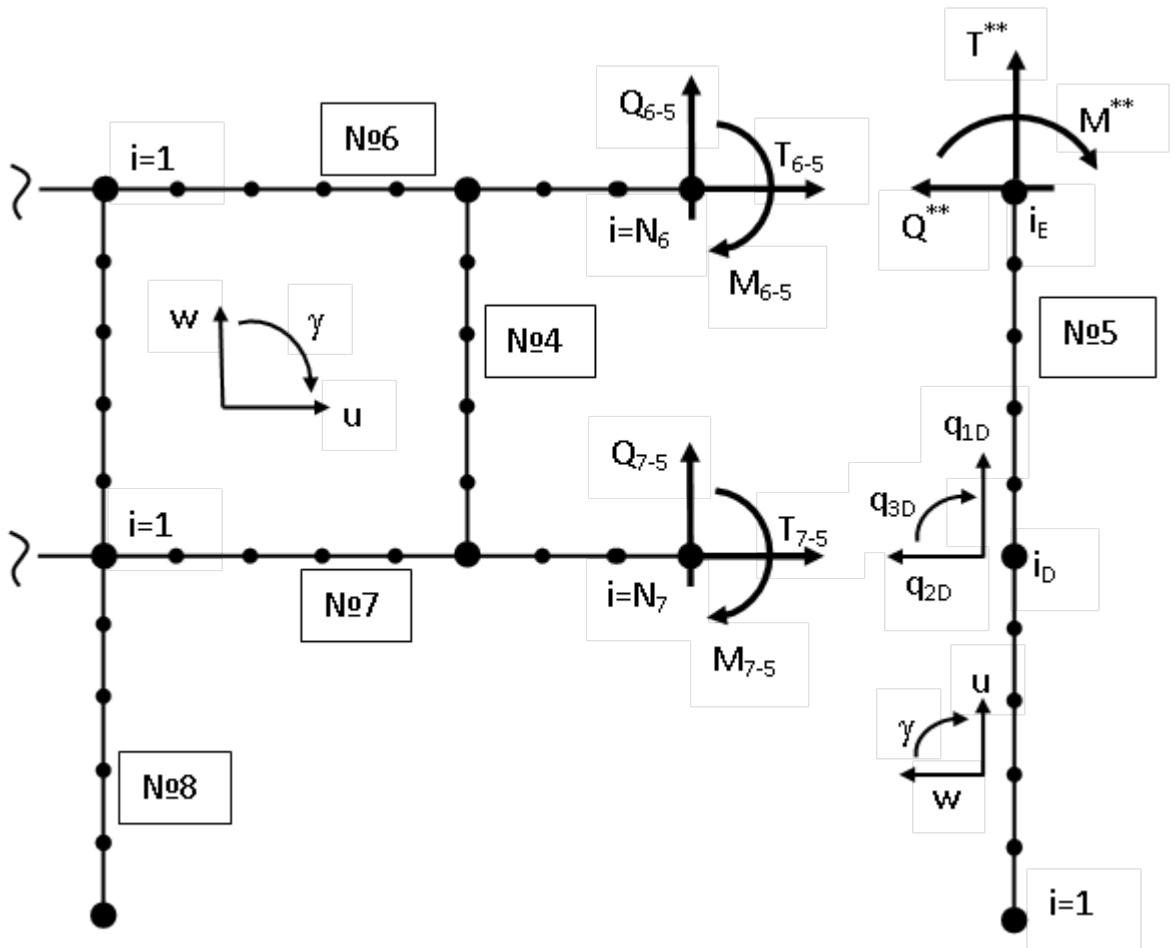


Рис. 11

- сопряжение элементов № 5, № 6 и № 7 в точках D и E (рис. 11)

$$\begin{aligned}
 u_{7,N_7} &= -w_{5,i_D}; & w_{7,N_7} &= u_{5,i_D}; & \gamma_{7,N_7} &= \gamma_{5,i_D}; \\
 q_{1D} &= -\frac{Q_{7-5}}{\Delta x_5}; & q_{2DB} &= \frac{T_{7-5}}{\Delta x_5}; & q_{3D} &= -\frac{M_{7-5}}{\Delta x_5}; \\
 u_{6,N_6} &= -w_{5,i_E}; & w_{6,N_6} &= u_{5,i_E}; & \gamma_{6,N_6} &= \gamma_{5,i_E}; \\
 T^{**} &= Q_{6-5}; & Q^{**} &= T_{6-5}; & M^{**} &= -M_{6-5}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

В формулах (32),(33) двойной нижний индекс при сеточных функциях обобщенных перемещений $u_{k,i}, w_{k,i}, \gamma_{k,i}$ используется для обозначения номера элемента (первый индекс k) и номера узловой точки, которой сопоставляется соответствующая сеточная функция (второй индекс i). Силовые факторы $T_{k-n}, Q_{k-n}, M_{k-n}$, передаваемые в качестве нагрузки с горизонтальных элементов на вертикальные, вычисляются в точках вспомогательной сетки $i=1+1/2$ и $i=N_k-1/2$

(рис. 10-12). Условия сопряжения элементов сборной конструкции аппроксимируются аналогично (32),(33).

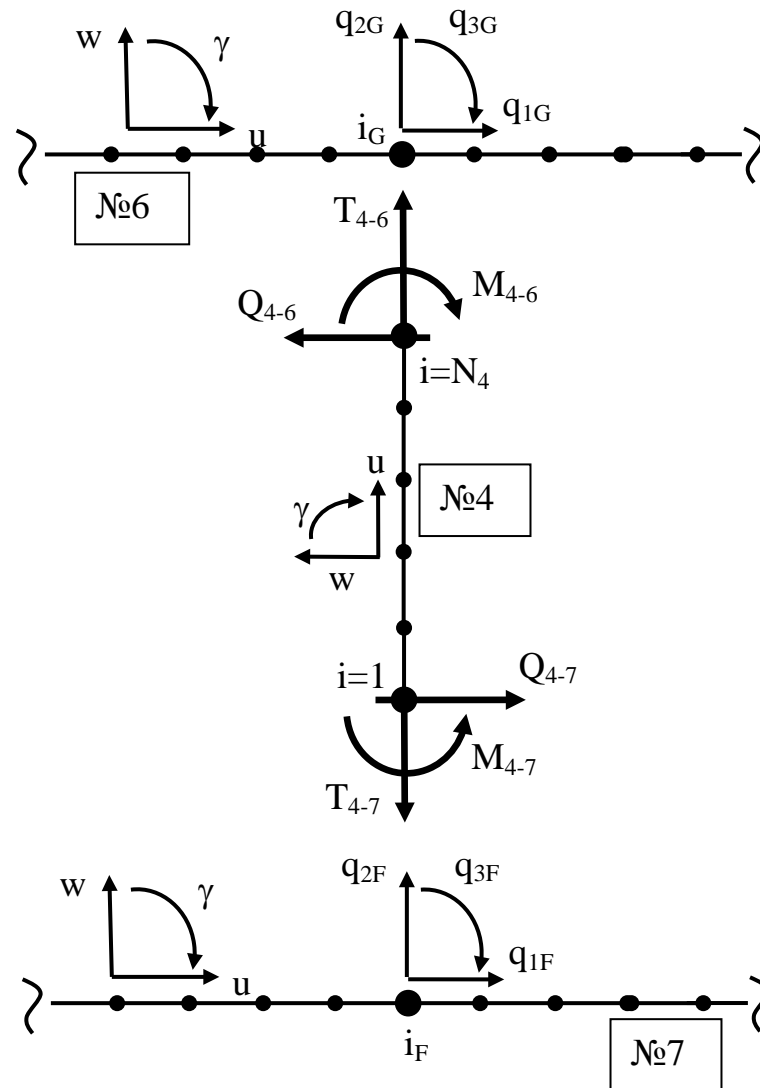


Рис. 12

Для случая, когда составная конструкция помимо несущих содержит самонесущие элементы типа перегородок (элемент № 4), условия сопряжения аппроксимируются следующим образом:

- сопряжение элементов № 4, № 6 и № 7 в точках F и G (рис. 12)

$$\begin{aligned}
 u_{4,1} &= w_{7,i_F}; & w_{4,1} &= -u_{7,i_F}; & \gamma_{4,1} &= \gamma_{7,i_F}; \\
 q_{1F} &= -\frac{Q_{4-7}}{\Delta x_7}; & q_{2F} &= \frac{T_{4-7}}{\Delta x_7}; & q_{3F} &= \frac{M_{4-7}}{\Delta x_7}; \\
 u_{4,N_4} &= w_{6,i_G}; & w_{4,N_4} &= -u_{6,i_G}; & \gamma_{4,N_4} &= \gamma_{6,i_G};
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$q_{1G} = \frac{Q_{4-6}}{\Delta x_6}; \quad q_{2G} = -\frac{T_{4-6}}{\Delta x_6}; \quad q_{3G} = -\frac{M_{4-6}}{\Delta x_6}.$$

В формулах (32)-(34) сеточные функции обобщенной перерезывающей силы Q_{k-n} вычисляются в точках вспомогательной сетки $(i \pm 1/2)$ как

$$(Q_{k-n})_{i \pm 1/2} = [(Q_{xz} - T_{xx} \cdot \theta_x)_k]_{i \pm 1/2}. \quad (35)$$

Условия сопряжения несущих элементов № 2,3,6,7 и вертикального элемента № 8 (колонны), а также краевые условия (1.51) в точке контура А аппроксимируются аналогично (32)-(35).

При численном решении статических задач для решения сеточных уравнений (30) используется квазидинамическая форма метода установления [1-5,7], в которой уравнения равновесия заменяются на уравнения, совпадающие по форме с уравнениями движения в вязкой среде вида

$$[L_{\Delta x}(u_k; g_k)]_i = (a_k c^* m_k \ddot{u}_k)_i + (c^* \varepsilon_k \dot{u}_k)_i, \quad (36)$$

где $\varepsilon_k(i)$ - параметры удельной вязкости искусственной среды ($k=1,2,3$), $a_k \geq 1$ - весовые коэффициенты, позволяющие ускорить сходимость итерационного процесса [1-5]. Аппроксимация нестационарных уравнений (36) на сетке с шагом $\Delta t = \text{const}$ с учетом (21) позволяет построить итерационный процесс для определения скоростей $[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}$ на временном слое $t^{(n+1/2)}$ и сеточных функций $[u_k]_i^{(n+1)}$ на временном слое $t^{(n+1)}$

$$\begin{aligned} [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} &= \left[\frac{2a_k m_k - \varepsilon_k \Delta t}{2a_k m_k + \varepsilon_k \Delta t} \right]_i \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \frac{2\Delta t \cdot [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i^{(n)}}{c_i^* \cdot [2a_k m_k + \varepsilon_k \Delta t]_i}; \\ [u_k]_i^{(n+1)} &= [u_k]_i^{(n)} + \Delta t \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Следует отметить, что принятая форма метода установления (36) позволяет построить одноподобный итерационный процесс (32) для решения как линейных, так и нелинейных краевых задач [1-5]. Оптимальные значения параметров итерационного процесса определяются из условия ускорения сходимости и устойчивости разностной схемы по формулам [1,7]

$$\varepsilon_k = 2a_{\varepsilon, (k)} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1, (k)} \mu_{2, (k)}}{\mu_{1, (k)} + \mu_{2, (k)}}}; \quad \Delta t_k = 2a_{t, (k)} \sqrt{\frac{m_k}{\mu_{1, (k)} + \mu_{2, (k)}}}, \quad (38)$$

где $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ - наименьшие и наибольшие собственные числа для соответствующих разностных операторов в уравнениях (30); $a_{\varepsilon,(k)}$ и $a_{t,(k)}$ – близкие к единице поправочные коэффициенты. Оценочные формулы для $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$, полученные в рамках упрощенных линеаризованных соотношений, запишутся следующим образом [1-6]:

- наименьшие собственные числа

$$\begin{aligned}\mu_{1,(1)} &= 4 \cdot \left(\frac{B_b + B_a}{\Delta x^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); & \mu_{1,(2)} &= 16 \cdot \left(\frac{D_b + D_a}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); \\ \mu_{1,(3)} &= 4 \cdot \left(\frac{D_b + D_a}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); & & (39)\end{aligned}$$

- наибольшие собственные числа

$$\begin{aligned}\mu_{2,(1)} &= 4 \cdot \left(\frac{B_b + B_a}{\Delta x^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); & \mu_{2,(2)} &= 16 \cdot \left(\frac{D_b + D_a}{\Delta x^4} \cos^4 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); \\ \mu_{2,(3)} &= 4 \cdot \left(\frac{D_b + D_a}{\Delta x^2} \cos^2 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); & & (40)\end{aligned}$$

где жесткостные коэффициенты определяются через физико-механические характеристики бетона и арматуры как

$$\begin{aligned}B_b &= E_b \cdot (bh); & D_b &= E_b \cdot \left(\frac{bh^3}{12} \right); \\ B_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a \cdot \Delta h_i; & D_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a \left[(z_i^2 \cdot \Delta h_i) + \frac{\Delta h_i^3}{12} \right], & (41)\end{aligned}$$

и где $n=2$ – для случая двустороннего армирования и $n=1$ – при одностороннем армировании.

В отличие от динамических задач при счете на установление интерес представляет только конечный результат, а промежуточные решения не имеют смысла. Величину шага по времени Δt , ограниченную условием устойчивости разностной схемы в (38), можно увеличить введение коэффициентов фиктивных плотностей $\rho_k = a_k \rho$ в эволюционном уравнении (36). Использование коэффициентов $a_k \geq 1$ позволяет отфильтровать высокочастотные составляющие погрешности, повысить критическое значение Δt для всей РС и существенно со-

кратить затраты машинного времени. Значения коэффициентов a_k могут быть оценены из условия $\Delta t_k = \Delta t_{\max}$ как

$$a_k = \left(\frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_k} \right)^2. \quad (42)$$

Аппроксимация производных по времени в (21),(31) разностными операторами второго порядка точности $O(\Delta t^2)$ позволяет построить единую разностную схему в форме (37)) для решения статических и динамических задач, что существенно при расчете строительных конструкций на динамические воздействия в силу необходимости учета исходного статического НДС, обусловленного, в первую очередь, действием гравитационных нагрузок. Параметры вязкости ε_k могут быть использованы для учета диссипации энергии

$$\varepsilon_k = a_{\varepsilon,(k)} \frac{\delta_k}{\pi} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (43)$$

где δ_k - логарифмический декремент колебаний, $a_{\varepsilon,(k)}$ - поправочные коэффициенты [2,3]. Начальные условия (18) аппроксимируются в виде

$$u_k(i) \Big|_{t=0} = [u_k]_i^{(0)}; \quad \dot{u}_k(i) \Big|_{t=0} = [\dot{u}_k]_i^{(0)}, \quad (44)$$

где $[u_k]_i^{(0)}, [\dot{u}_k]_i^{(0)}$ - заданные начальные значения сеточных функций обобщенных перемещений и их скоростей ($k=1,2,3$). Поскольку в начальный момент времени вариации обобщенных перемещений равны нулю, то начальный временной слой $n=0$ полагается совпадающим с узлом основной сетки (рис. 13).

Для начального (нерегулярного) слоя $n=0$ весовые коэффициенты в (31) соответственно равны: $f_{11}^* = 0; f_{22}^* = 1; f^* = 0,5$. Для определения сеточных функций $[u_k]_i^{(n)}$ на временном слое $n=1$ используется разложение в ряд Тейлора

$$[u_k]_i^{(1)} = [u_k]_i^{(0)} + \Delta t [\dot{u}_k]_i^{(0)} + \frac{\Delta t^2}{2} [\ddot{u}_k]_i^{(0)}, \quad (45)$$

где $[\ddot{u}_k]_i^{(0)}$ - заданные начальные ускорения. Тогда сеточные функции обобщенных скоростей на временном слое $t^{(1/2)}$, определяются следующим образом

$$[\dot{u}_k]_i^{(1/2)} = [\dot{u}_k]_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{u}_k]_i^{(0)}. \quad (46)$$

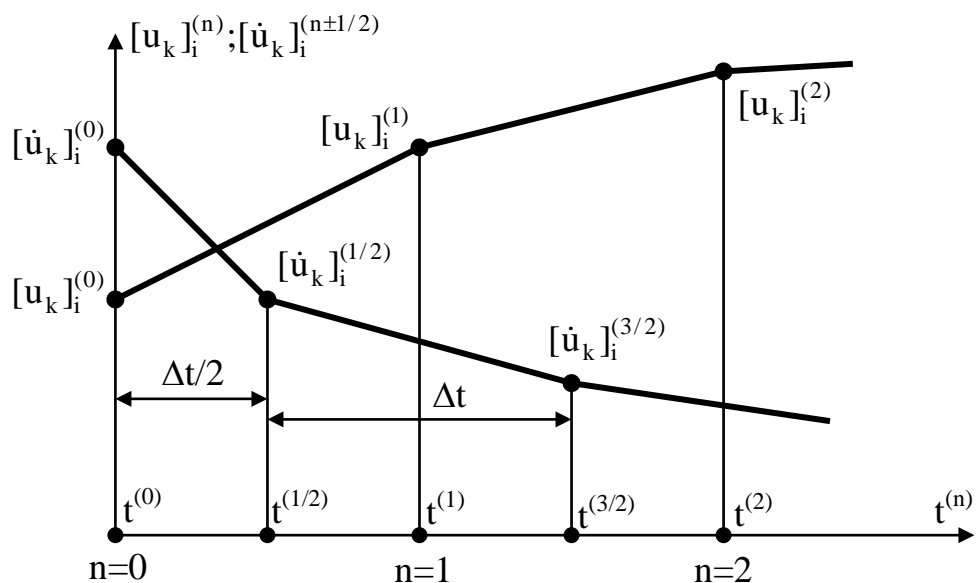


Рис. 13

Разработанный вычислительный алгоритм решения начально-краевых задач с учетом геометрической и физической нелинейности позволяет при численном анализе задач типа "статика-динамика-статика" получать оценку остаточной несущей способности железобетонных строительных конструкций после динамических воздействий, в том числе - сейсмического характера.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ № 13-01-00434а, №14-01-00429а).

Библиографический список

1. Дмитриев В.Г. Вариационно-разностные схемы в нелинейной механике оболочек // Материалы IV Международного семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск, МГОУ, 1997. С. 57 - 67.
2. Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Рабинский Л.Н., Роффе А.И. Особенности построения консервативных разностных схем в нелинейных задачах механики

многосвязных оболочек из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Том 20. № 3. С. 364 - 374.

3. Dmitriev V.G., Sudyin A.A. Deformation of reinforced concrete spherical dome with cutouts on the damped foundation beds. – Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2009. (1&2), № 5, pp. 13-22.

4. Dmitriev V.G. Mathematical Modeling of Non-Linear Deformation Process for Frame-Type Building Structures Under Seismic Loads. – Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. Volume 8, Issue 2, pp. 13-29.

5. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Исследование процессов особенностей статического и динамического деформирования железобетонных строительных конструкций с учетом упруго-пластической работы арматуры // XIX Международный семинар "Технологические проблемы прочности". Подольск, МГОУ. 2012. С. 37 - 44.

6. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.

7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Физматлит. Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 632 с.