


МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи



ШРАМКО КОНСТАНТИН КОНСТАНТИНОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ
СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор Лурье Сергей Альбертович

Москва 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| ОБЗОР РАБОТ ПО ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАСШТАБНЫХ И АДГЕЗИОННЫХ ЭФФЕКТОВ | 8 |
| ГЛАВА 1. ГРАДИЕНТНЫЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, МОДЕЛИ СИММЕТРИИ | 13 |
| 1.1 Градиентные теории упругости с учетом симметрии..... | 13 |
| 1.1.1 Введение..... | 13 |
| 1.1.2 Симметричная изотропная модель | 13 |
| 1.1.3 Симметричная упругость | 15 |
| 1.1.4 Полностью симметричная изотропная упругость..... | 16 |
| 1.1.5 Градиентная теория дисторсий..... | 16 |
| 1.1.6 Градиентная теория – формы Мидлина | 19 |
| 1.1.7 Полностью симметричная модель | 22 |
| 1.2 ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 24 |
| ГЛАВА 2. О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ГРАДИЕНТНОЙ УПРУГОСТИ | 26 |
| 2.1 ВВЕДЕНИЕ..... | 26 |
| 2.2 О СВОЙСТВАХ СИММЕТРИИ КЛАССИЧЕСКОЙ И ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ..... | 27 |
| 2.3 ОСОБЕННОСТИ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ ПО УСЛОВИЯМ ГРАДИЕНТНОЙ ДЕФОРМАЦИИ И ПО ПОРЯДКУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ | 32 |
| 2.4 УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КРИТЕРИЯ СИММЕТРИИ ПО ПОРЯДКУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ..... | 39 |
| 2.5 ПРИМЕР ФОРМУЛИРОВКИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ С УЧЕТОМ СВОЙСТВА СИММЕТРИИ..... | 45 |
| 2.6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 50 |
| ГЛАВА 3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ... 52 | 52 |
| 3.1 ВВЕДЕНИЕ..... | 52 |
| 3.2 ПРИМЕРЫ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ УПРУГОСТИ..... | 52 |
| 3.3 ЗАДАЧА ФЛАМАНА И БУССЕНЕСКО | 54 |
| 3.4 ШТАМП..... | 56 |
| 3.5 КЛАССИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ | 58 |
| 3.6 ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОПЕРАТОРОВ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ГРАДИЕНТНЫХ ТЕОРИЙ УПРУГОСТИ..... | 59 |
| 3.7 РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ | 62 |

| | | |
|---|---|------------|
| 3.8 | НЕКОТОРЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ КЛАССИЧЕСКОЙ УПРУГОСТИ..... | 64 |
| 3.9 | ГРАДИЕНТНЫЕ НЕ СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН. | 66 |
| 3.10 | РЕГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА..... | 69 |
| 3.11 | О КОНЦЕПЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ | 76 |
| 3.12 | ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 80 |
| ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАДИЕНТНОЙ УПРУГОСТИ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН | | 81 |
| 4.1 | ВВЕДЕНИЕ..... | 81 |
| 4.2 | ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ..... | 81 |
| 4.3 | ВЫБОР КРИТЕРИЯ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ | 88 |
| 4.4 | ВЛИЯНИЕ МАСШТАБНОГО ПАРАМЕТРА НА СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ | 91 |
| 4.5 | СРАВНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ИССЛЕДОВАНИЯМИ..... | 93 |
| 4.6 | ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛА РОСТА (РАСПРОСТРАНЕНИЯ) ТРЕЩИНЫ | 94 |
| 4.7 | ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 100 |
| РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ | | 102 |
| ЛИТЕРАТУРА | | 104 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. В последнее десятилетие известно широкое применение градиентных теорий для моделирования масштабных эффектов для широкого класса проблем процессов деформирования, механики, теплопроводности и диффузии, термодинамики, гидродинамики, связанных термодинамических проблем деформирования и пр.

Значительные достижения связаны с моделирование эффектов масштаба в наноструктурированных средах, композитах керамика, электро- и магнито-упругих материалах.

В значительной степени успехи в многомасштабном моделировании на основе теорий высокого порядка связаны с успехами формального математического обоснования таких теорий в том числе на основе развития вариационных моделей, начиная с работ Миндлина, Тупина (1964 г.) и вплоть до работы Гао и Парка (2007г.). Несомненно, что исследования, направленные на формулировку условий корректности краевых задач градиентных теорий повышенного порядка, которые исключили бы ошибки при численном моделировании в прикладных задачах являются актуальными.

В связи с этим исследование, проводимое в диссертации посвящённое изучению условий симметрии, которые характерны только для градиентных теорий и условий корректности, вытекающих из них, является актуальным.

Структура уравнений равновесии и соответственно общего решения градиентной упругости такова, что разрешающий оператор, записанный в перемещения имеет вид произведения классического оператора Ламе и обобщенного оператора Гельмгольца, содержащего масштабный параметр. Соответственно общее решение также зависит от параметра масштаба. Особенность градиентных решений состоит в том, что частное решение может быть построено с той же сингулярностью в особой точке, что имеет место в классической упругости. Этот факт позволяет всегда исключить сингулярностью в градиентной решении, которая была в соответствующем классическом решении.

Такая особенность позволяет провести редукцию механики трещин, переводя эти задачи из класса сингулярных задач в класс обычных задач о концентрации напряжений. Это открывает новые возможности механики разрушения, Чрезвычайно важные для приложений, когда для анализа поведения трещин можно использовать известные Критерии прочности. В связи с этим исследования таких задач проводимые в диссертации, в приложении к механике разрушения несомненно является актуальными.

Целью работы является:

-исследование корректности градиентных теорий упругости вследствие учета дополнительных свойств симметрии, свойственных только градиентным теориям, а также важности учета дополнительных условий симметрии при постановке краевых задач градиентной упругости и коррекции известных градиентных прикладных теорий.

-исследование свойств локальной регуляризации сингулярных задач теории упругости и развитие на его основе концепции концентрации напряжений применительно к задачам теории трещин также является целью работы.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Впервые установлено, что учет дополнительного по отношению к классическим теориям упругости признака симметрии по порядку дифференцирования в краевых условиях является существенным и определяет класс корректных моделей градиентной упругости. Фактически это означает что доказана необходимость ревизии и проверки на корректность прикладных градиентных модели упругости.

- Впервые установлен класс краевых задач градиентной теории упругости, в которых условие симметрии по порядку дифференцирования должно обязательно учитываться. К ним относятся так называемые векторные модели, в которых краевые условия формулируются на обобщенные напряжения, входящие в уравнение равновесия. Показано, что учет симметрии необходим в краевых статических условиях, задаваемых на кусочно-гладкой поверхности тела ненулевой кривизны и ребрах. Неучёт условий симметрии приводит к тому что,

решение для напряжений (например, Коши) будет зависеть от энергетические несущественных физических констант, которые могут и приводить к значительным ошибкам.

- Впервые на примере численного моделирования и сравнения с экспериментальными данными показано, что параметр масштаба является постоянной материала для пластин, поврежденных трещинами и концепция концентрации напряжений может быть применена к трещинам смешанной моды и угловым вырезам для прогноза разрушения и направления развития трещины.

- Новыми представляется результаты, связанный с оценкой справедливости использования того или иного критерия разрушения в случае смешанной моды. Решение этих задачи играют большую роль в механике разрушений.

Практическое значение работы: полученные результаты являются практически значимыми, ибо они дают существенные уточнения для постановок краевых задач и решений широкого класса прикладных задач градиентной теории упругости. Численная реализация задач механики разрушения в рамках градиентной упругости совместно с использованием концепции концентрации напряжения, обеспечивающая высокую точность прогноза разрушающих нагрузок, представляет большую практическую значимость.

Реализация результатов работы: результаты, полученные в диссертации, используются в Институте Прикладной механики (ИПРИМ) РАН, Вычислительном центре РАН, МАИ (Государственном техническом университете).

Достоверность результатов: обосновывается использованием строгих математических методов механики деформируемых сред, вариационных подходов, а также совпадением результатов численного моделирования задач механики трещин в рамках градиентных теорий, полученных авторами и экспериментальных данных, приведенными в литературе.

Апробация работы и публикации. Основное содержание диссертационной работы опубликовано в четырех научных печатных работах, две из которых

опубликованы в рецензируемых международных журналах и две в изданиях, рекомендуемом Перечнем ВАК:

Лурье С.А., Белов П.А., Шрамко К.К., Кривень Г.И. О корректности математической постановки краевых задач в градиентной упругости // Механика композиционных материалов и конструкций, 2021, Т.27, №4, С.457-468.

Лурье С.А., Шрамко К.К., Об условии корректности в краевых задачах градиентных теорий упругости. Труды МАИ. 2021. Выпуск № 120

Sergey Lurie, Yury Solyaev, Konstantin Shramko, Comparison between the Mori-Tanaka and generalized self-consistent methods in the framework of anti-plane strain inclusion problem in strain gradient elasticity. April 2018 Mechanics of Materials 122.

На защиту выносятся:

- Формулировка градиентных теорий упругости, учитывающей масштабные эффекты и анализ условий симметрии градиентных модулей упругости шестого ранга, вывод условий корректности, как дополнительных необходимых условий симметрии.
- Формулировка требований к виду краевых условий при математической постановке краевых задач градиентной упругости, связанных с учетом дополнительных свойств симметрии по порядку дифференцирования.
- Анализ свойств градиентных моделей упругости, связанных с возможностью регуляризации сингулярных решений теории упругости.
- Построение регулярных решений градиентной упругости в механике трещины развитие концепции концентрации напряжений для оценки направления развития трещины и области возможного зарождения макротрещины по известным критериям прочности и масштабному параметру, найденному из данных экспериментов.

Объём и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов и списка используемой литературы. Она содержит 112 страниц, из них 9 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 90 наименований (из них 84 на иностранном языке).

ОБЗОР РАБОТ ПО ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАСШТАБНЫХ И АДГЕЗИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Современные градиентные варианты теории упругости исторически связаны с фундаментальными работами [1-3] и получили развитие применительно к описанию свойств неоднородных структур в работах [4-7]. Однако наиболее значительный интерес к модифицированным вариантам теорий упругости возник в последнее десятилетие, так как градиентные теории упругости зависят от параметров масштаба. В настоящее время градиентная упругость широко используется для описания размерных эффектов и нелокального поведения, наблюдаемых в полукристаллических и наноструктурных материалах, геоматериалов, биоматериалов [8, 9], а так же для описания взаимодействия нескольких фаз материалов [10-12], для моделирования особенностей деформирования сверхтонких консольных балок и пластин, углеродных нанотрубок и металлических нанопроволок [13, 14], при разработке методов усреднения, учитывающих масштабные эффекты-упругие эффекты второго порядка [15], а также для моделирования переходных эффектов связанных с использованием дискретного атомарного моделирования материалов и континуальных моделей, способных описывать свойства материалов на разных структурных уровнях [16]. Проблемы моделирования задач механики материалов, перечисленных выше, а также перспективы развития подобных исследования обсуждаются в интересных работах [17-21] и др... Эффективность использования углеродных наночастиц, особенно в композиционных материалах, описывается в работе [22].

В градиентной упругости в общем случае (см. [2, 17, 18]) имеется 300 независимых коэффициентов материалов, тогда как для изотропны centrosymmetric материалов это число уменьшается до 7 (два из них – коэффициенты Ламе, определяют физические свойства изотропного тела в классической упругости).

Такое сокращение физических постоянных связано с тем, что для определяющих соотношений в механике деформируемых сред имеют место система фундаментальных условий симметрии.

Чрезвычайно большое число физических независимых постоянных для градиентных моделей сред делает принципиально невозможным использовать такие модели в прикладных задачах. Использование условий симметрии упрощает градиентные модели и делает их доступными для решения прикладных проблем в механике материалов, проблемах тепло- и массопереноса, электроупругости и др. [5-9]. Однако возникает проблема потери корректности при таких упрощениях при постановке соответствующих краевых задач.

Изучение свойств симметрии тензора градиентных модулей упругости была начата в работах [4, 23]. Продолжение исследования начинается со свойств симметрии тензоров модулей упругости градиентных теорий, характерных для классической теории упругости, и для градиентной упругости, используя особый вид симметрии, характерный только для градиентных теорий.

Главным предметом изучения в рассматриваемых задачах является вариационная формулировка градиентных моделей упругости и специфические условия симметрии в градиентных теориях упругости общего вида. Особое внимание обращается на условия симметрии, которые являются следствием того, что в выражении плотности потенциальной энергии можно изменять порядок дифференцирования в компонентах тензора градиента перемещений $u_{i,jk}$, где u_i - компоненты вектора перемещений. Это условие симметрии обсуждается, в частности, разделе 5 основополагающей работы [1] и в недавних работах [24, 25, 26].

Изучение свойства симметрии тензора градиентных модулей упругости, начато в недавних работах [10].

В данных работах проводится анализ условий симметрии компонентов тензора обобщённых упругих свойств градиентных модулей упругости, выделяется условие симметрии, которое характерно лишь для градиентных моделей. Проблема заключается в том, что условия симметрии при построении

решения прямым методом минимизации обобщенного функционала Лагранжа могут не учитываться, так как специфические условия симметрии являются энергетически несущественными, и формально не входят в определение плотности потенциальной энергии. Тем не менее устанавливается нетривиальный результат, показывающий, что при невариационной записи краевых статических условий при формулировке математической проблемы, энергетически несущественные компоненты в общем представлении тензора градиентных модулей упругости могут приводить к ошибочной формулировке статических краевых условий и условий на контурах - линиях пересечений кусочно-гладких поверхностей, образующих поверхность тела.

Указывается процедура, позволяющая всегда получить корректные краевые условия для произвольных вариантов градиентных теорий упругости.

Примеры задач классической упругости, решение которой является сингулярным в перемещениях является задача о мембране [27]

В таком шаре отличны от нуля только радиальные напряжения, которые определяются уравнением равновесия описанным в [28].

Рассматриваются известные задачи Буссенеско и Фламанта с учетом свойства симметрии тензора градиентных модулей упругости.

Далее структурный анализ материалов может быть сведен к анализу отказов с предварительными трещинами в теории упругости градиента деформации (SGET) с использованием соответствующих критериев разрушения, сформулированных в терминах напряжений Коши. Эти напряжения сопряжены с деформациями, и они имеют не особые значения в решениях SGET для задач с трещинами и острыми зазубринами. Определенные параметры масштаба длины трещины и масштабный параметр материала позволяют прогнозировать разрушающие нагрузки для экспериментальных образцов с различными типами трещин с помощью критерия максимального главного напряжения Коши. Для экспериментов со смешанным режимом разрушения квазихрупкого материала (ПММА с наклонными трещинами) может возникать переход между

разрушением, определяемым критерием максимального главного напряжения, и критерием, связанным со вторым инвариантом напряжения Коши.

Альтернативные подходы, выходящие за рамки классической линейной механики упругого разрушения (LEFM), привлекают большое внимание в последние десятилетия. Проблемы нефизических сингулярных решений для полей напряжений и деформаций, а также явления перехода между режимами коротких и длинных трещин в хрупких и квазихрупких материалах рассматривались в рамках различных подходов, таких как модели когезионных зон [29], теория размерных эффектов Базанта [30], теория критических расстояний [31], подходы плотности энергии деформации [32] и т. д. Продвинутое вычислительные методы, позволяющие получить независимые от сетки решения для тел с трещинами, были разработаны в рамках расширенного / обобщенного метода конечных элементов [33, 34,35], пиродинамика [36], подходы фазового поля [37, 38] и др.

В настоящее время хорошо известно, что SGET позволяет получить не особые решения для деформаций и для так называемых напряжений Коши (или «монополярных» напряжений, которые связаны с деформациями при работе) в окрестности вершины трещины [39] и острые насечки [40]. Соответствующие асимптотические аналитические решения [39 -47] и численные решения полного поля [48 -57] до настоящего времени широко изучались в рамках различных частных и общих формулировок SGET.

Однако сравнению решений SGET с экспериментальными данными уделено гораздо меньше внимания. Можно упомянуть недавние работы Askes, Susmel и соавторов [58 – 61], где большое количество Экспериментальные данные для различных статических и усталостных испытаний на разрушение были обработаны на основе так называемого подхода «градиентно-обогащенных линейно-упругих остаточных напряжений». В качестве альтернативы аналогичный подход был предложен и использован Васильевым и соавторами [62 - 66]. Простота подхода к напряжению на кончике, обогащенного градиентом, может сделать его привлекательным, но в то же время

приблизительным техническим инструментом. Происхождение этого метода лежит в возможной технике разделения операторов для решения уравнений равновесия в рамках упрощенных теорий градиента [67-69]. Однако обоснованность этого подхода была предметом недавних обсуждений [70-71]. А именно, для упрощенного (Айфантис) SGET было показано [52], что могут возникнуть проблемы корректного выполнения граничных условий.

Реализация смешанного FEM для SGET в различном программном обеспечении с открытым исходным кодом и коммерчески доступном программном обеспечении описана в ряде недавних работ [55, 72 - 75].

Для рассматриваемых хрупких и квазихрупких материалов используются критерии разрушения, сформулированные с учетом напряжений Коши, оцененных в SGET. В отличие от классических решений [76], в SGET эти напряжения имеют конечные значения во всей области, а также на вершине трещины [см., например, 38]. В связи с этим представленный подход называется «анализом отказов», поскольку подходы линейной механики разрушения с сингулярными полями здесь не задействованы.

ГЛАВА 1. ГРАДИЕНТНЫЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, МОДЕЛИ СИММЕТРИИ

1.1 Градиентные теории упругости с учетом симметрии

1.1.1 Введение

В данной главе приводятся различные симметричные модели градиентной упругости. В частности, рассмотрена симметричная изотропная модель и показана симметричная упругость. Описана градиентная теория дисторсий и формы Мидлина. На основании этого построена полностью симметричная модель.

Показано, что для изотропных твердых тел, можно уменьшить количество независимых упругих коэффициентов градиента дисторсии с пятнадцати до пяти в полностью симметричной модели на примере форм Мидлина I и II.

1.1.2 Симметричная изотропная модель

Рассмотрим упругое тело и определим упругую энергию

$$U = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV \quad (1)$$

Пусть Π – полная потенциальная энергия

$$\Pi = U - A = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV - \int f_i u_i dV - \int t_i u_i dS \quad (2)$$

где A – это работа, совершаемая внешней силой тела f_i и силой t_i Коши. Поверхностный интеграл берется по замкнутой (гладкой) поверхности $d\Omega$ области Ω и dS обозначает элемент поверхности. Беря вариацию по полной потенциальной энергии, найдем:

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} (u_{i,j} \delta u_{k,l} + u_{k,l} \delta u_{i,j}) dV - \int f_i \delta u_i dV - \int t_i \delta u_i dS \quad (3)$$

Используя условие возможности (потенциальности) симметрии

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (4)$$

тогда можно записать вариацию потенциальной энергии как:

$$\delta\Pi = \int C_{ijkl}u_{k,l}\delta u_{i,j}dV - \int f_i\delta u_i dV - \iint t_i\delta u_i dS \quad (5)$$

Для формы вариации работы (5), потенциальные условия (4) гарантируют существование основного скалярного потенциала U выражения (1), таким образом находя формулировки минимума потенциальной полной энергии и нулевой вариации работы в классическом упругом эквиваленте.

Бесконечно малый тензор дисторсии $u_{i,j}$ может быть представлен как сумма симметричных и кососимметричных частей

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (6)$$

где ε_{ij} и ω_{ij} бесконечно малыми деформациями и тензорами поворота. В классической упругости, оно является единственной симметрией упругой части, которая вносит свой вклад в энергию упругой части U уравнения (1), которая может быть естественно учтена внушительным условием симметрии деформаций

$$C_{ijkl} = C_{jilk} \quad (7)$$

Очевидно, из-за потенциальных условий (4), так же выполняются связанные с этим условия «напряжений» $C_{ijkl} = C_{jilk}$, которое в свою очередь подразумевает что результирующее напряжение Коши

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (8)$$

является симметричным и может быть записано или в терминах тензора дисторсии $u_{k,l}$, или в тензоре деформации ε_{kl} . Опыт показывает, что такая симметричная теория упругости может быть на удивление успешной в описании упругих реакций различных твердых тел и структур.

Подставляя уравнение (8) в уравнение (5) и интегрируя по частям, найдем

$$\delta\Pi = \iint (\tau_{ij}n_j - t_i)\delta u_i dS - \int (f_i + \tau_{ij,j})\delta u_i dV \quad (9)$$

где n_j являются компонентами внешнего вектора нормали к поверхности $d\Omega$. Используя условие $\delta\Pi = 0$ можно получить уравнения равновесия в Ω

$$\tau_{ij,j} + f_i = 0 \quad (10)$$

и оба естественных, Вон Неймана и основной Дирихле, граничных условий на $d\Omega$

$$\tau_{ij}n_j = \bar{t}_i \text{ и } u_j = \bar{u}_i \quad (11)$$

где \bar{t}_i и \bar{u}_i компоненты установленных векторов напряжений и перемещений.

1.1.3 Симметричная упругость

Упругие постоянные изотропного твердого тела могут быть в основном записаны как линейная комбинация всех отдельных пар тензора Кронекера δ_{ij} :

$$C_{ijkl} = B_1\delta_{ij}\delta_{kl} + B_2\delta_{ik}\delta_{jl} + B_3\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (12)$$

где B_1 , B_2 и B_3 являются некоторыми неотрицательными коэффициентами материала. Уравнение (12) автоматически удовлетворяет потенциальным условиям (4). Выполняя условие деформации (7), можно получить классическую форму упругих констант изотропного твердого тела

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (13)$$

где $\lambda = B_1$ и $\mu = B_2 = B_3$ - коэффициенты Ламе.

Соответствующая плотность упругой энергии тогда имеет вид

$$\frac{1}{2}C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} = \frac{1}{2}\lambda\theta^2 + \frac{1}{2}\mu(u_{i,j}u_{i,j} + u_{i,j}u_{j,i}) = \frac{1}{2}\lambda\theta^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (14)$$

и напряжения Коши имеют вид

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} = \lambda\theta\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (15)$$

где $\theta = u_{i,i}$ является дилатацией. Очевидно, условия деформаций (7) позволяют уменьшить количество неопределенных коэффициентов материала от 3 к 2, учитывая уравнения (12) и (13).

Подставляя уравнение (13) в уравнение (12) можно получить форму смещения уравнений равновесий изотропного твердого тела

$$L_{ij}u_j + f_i = (\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu\Delta u_i + f_i = 0, \quad (16)$$

где $L_{ij} = (\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + \mu\Delta\delta_{ij}$ - являются операторами Ламе в классической изотропной упругости и $\Delta u_i = u_{i,jj}$ - вектор Лапласиана.

1.1.4 Полностью симметричная изотропная упругость

Классические упругие постоянные (13) не являются полностью симметричными. Чтобы получить полностью симметричную теорию, нужно наложить еще одно условие симметрии, а именно $C_{ijkl} = C_{kjil}$, которое приводит

$$C_{ijkl} = \chi(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (17)$$

где $\chi = \lambda = \mu$ являются единичными коэффициентами материала.

Очевидно, такая полная симметрия упругости может быть количественно достоверна только для твёрдых тел с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$, который является актуальным для такого представительного материала как керамика. Однако в общем случае коэффициент Пуассона $\nu \neq 0.25$ для многих твердых тел, в том числе чаще всего для используемых металлов, керамик и твердых некристаллических полимеров – их коэффициент Пуассона изменяется в пределах от 0.15 до 0.35, что примерно соответствует отношению $\lambda / \mu = 0.5 \div 2$. Для таких твердых тел, классическая теория упругости (13) как правило позволяет прогнозировать торические исследования и более точное конструирование, тогда как полностью симметричная теория упругости (17) может быть ситуативной, но также пригодной для предварительного исследования.

1.1.5 Градиентная теория дисторсий

Вернемся к потенциальной энергии, описанной выражением (2)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV + \frac{1}{2} \int C_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn} dV - \int f_i u_i dV - \int (t_i u_i + q_i u_{i,j} n_j) dS, \quad (18)$$

где q_i и $u_{i,jk}$ являются компонентами двойного вектора напряжения и градиент тензора дисторсии (второй градиент перемещений) соответственно, и

коэффициенты C_{ijklmn} - константа компонент тензора шестого ранга дисторсии градиентной упругости.

Выполнение вариации и использование потенциальных условий

$$C_{ijkl} = C_{klij} \text{ и } C_{ijklmn} = C_{lmnijk}, \quad (19)$$

можно найти (используя выражение (5))

$$\delta\Pi = \int \tau_{ij} \delta u_{i,j} dV + \int \mu_{ijk} \delta u_{i,jk} dV - \int f_i \delta u_i dV - \iint [t_i \delta u_i + q_i \delta(u_{i,j} n_j)] dS, \quad (20)$$

где

$$\mu_{ijk} = C_{ijklmn} u_{l,mn} \quad (21)$$

компоненты тензора двойного напряжения. По аналогии с классической упругостью (уравнения (3) – (5)), существуют потенциальные условия (19) что делает формулировки минимума потенциальной энергии и нулевую виртуальную работу эквивалентной.

Тензор двойного напряжения может быть записан как

$$\mu_{ijk} = \frac{1}{2}(\mu_{ijk} + \mu_{ikj}) + \frac{1}{2}(\mu_{ijk} - \mu_{ikj}) = \hat{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{ijk}, \quad (22)$$

где $\hat{\mu}_{ijk}$ и $\tilde{\mu}_{ijk}$ являются симметричными и кососимметричными частями соответственно. Поскольку в теории упругости $\delta u_{i,jk} = \delta u_{i,kj}$ является только симметричной частью $\hat{\mu}_{ijk}$ что соответствует уравнению (20), в то время как кососимметричная часть $\tilde{\mu}_{ijk}$ остается энергетически невидима. Следовательно чтобы избежать ложных решений связанных с присутствием $\tilde{\mu}_{ijk}$, только $\hat{\mu}_{ijk}$ следует оставить в теории, в то время как $\tilde{\mu}_{ijk}$ должен быть принудительно опущен.

Теорема о симметрии тензора моментов будет доказана далее при обсуждении свойств симметрии.

Моменты – симметричны по последней паре индексов, следовательно

$$C_{ijklmn} = C_{ijklnm}. \quad (23)$$

Очевидно, за счет условий второго потенциала (19) так же имеются связанные симметричные условия $C_{ijklmn} = C_{ikjlmn}$. Если явно не указано иное, всегда предполагается что условия (23) удовлетворены, и, следовательно, $\mu_{ijk} = \hat{\mu}_{ijk}$ и $\tilde{\mu}_{ijk} = 0$.

Интегрирование по частям и используя $\delta\Pi = 0$, можно получить уравнения равновесия в Ω

$$\tau_{ij,j} - \mu_{ijk,kj} + f_i = 0 \quad (24)$$

и оба естественных граничных условий на $\partial\Omega$, таких как Вон Неймана и Дирихле,

$$\tau_{ij}n_j - \mu_{ijk,k}n_j - (\mu_{ijk}n_k)_{,j} + (\mu_{ijk}n_k n_l)_{,l}n_j = \bar{t}_i \text{ и } \mu_{ijk}n_j n_k = \bar{q}_i, \quad (25)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ и } u_{i,j}n_j = \overline{\partial u_i / \partial n}, \quad (26)$$

где черта сверху обозначает предписанные функции.

Уравнения равновесия (24) и граничные условия (25) и (26) которые были получены и описаны [76], в контексте специальной изотропной теории, а именно упрощённая теория градиента упругости (SSGET). Однако, авторы не оценили факт, что только симметричную часть $\hat{\mu}_{ijk}$ следует сохранить в полученных естественных граничных условиях, несмотря на то что в SSGET явно включает несимметричный двойные напряжения с $\tilde{\mu}_{ijk} \neq 0$. Как следствие, следует ожидать ложных решений.

Описанное выше, показывает, что уравнения равновесия (24) и граничные условия (25) и (26) являются прямым следствием предполагаемого полного функционала потенциальной энергии (18) и что они обычно справедливы для любых анизотропных твердых тел с константами упругости, удовлетворяющими условиям потенциальности и порядка дифференцирования.

1.1.6 Градиентная теория – формы Мидлина

Упругие константы градиента дисторсии изотропных твердых тел в общем случае можно записать как линейную комбинацию всех различных троек тензоров Кронекера

$$\begin{aligned}
 C_{ijklmn} = & C_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + C_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + C_4 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} \\
 & + C_5 \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + C_6 \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + C_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + C_8 \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + C_9 \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} \\
 & + C_{10} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + C_{11} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + C_{12} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + C_{13} \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + C_{14} \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} \\
 & + C_{15} \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl},
 \end{aligned} \tag{28}$$

где C_γ ($\gamma = 1, 2, \dots, 15$) некоторые неотрицательные коэффициенты.

Условие потенциальности $C_{ijklmn} = C_{lmnij k}$ дают

$$C_1 = C_{13}, C_2 = C_6, C_4 = C_{10}, \text{ и } C_{12} = C_{14}$$

Накладывая условие порядка дифференцирования $C_{ijklmn} = C_{ijk lnm}$, можно получить

$$C_1 = C_4 = C_{10} = C_{13}, C_2 = C_3 = C_5 = C_6, C_8 = C_9 \text{ и } C_{11} = C_{12} = C_{14} = C_{15} \tag{29}$$

и, следовательно

$$\begin{aligned}
 C_{ijklmn} = & C_1 \left(\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} \right) \\
 & + C_2 \left(\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} \right) + C_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} \\
 & + C_8 \left(\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} \right) + C_{11} \left(\delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right),
 \end{aligned} \tag{30}$$

Любой набор из пяти неотрицательных коэффициентов C_1, C_2, C_7, C_8 и C_{11} дает действительную физическую модель изотропной дисторсии градиента деформации с краевыми задачами, заданными уравнениями равновесия (24) и граничными условиями (25) и (26), определенную в терминах симметричного двойного напряжения, удовлетворяющего условию $\mu_{ijk} = \mu_{ikj}$ (и, таким образом,

$$\mu_{ijk} = \hat{\mu}_{ijk} \text{ и } \tilde{\mu}_{ijk} = 0):$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{ijk} = & C_1 (\Delta u_k \delta_{ij} + \Delta u_j \delta_{ik} + \Delta \theta_{,i} \delta_{jk}) + 2C_2 (\theta_{,k} \delta_{ij} + \theta_{,j} \delta_{ik}) \\
 & + C_7 \Delta u_i \delta_{jk} + 2C_8 u_{i,jk} + 2C_{11} (u_{j,ik} + u_{k,ij})
 \end{aligned} \tag{31}$$

который можно легко получить, подставив уравнение. (30) в уравнение. (21).

Используя упругие постоянные уравнения (30) получаем

$$\tilde{w}(u_{i,jk}) = \frac{1}{2} C_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn} = \tilde{c}_1 \theta_{,i} \Delta u_i + \tilde{c}_2 \theta_{,i} \theta_{,i} + \tilde{c}_3 \Delta u_i \Delta u_i + \tilde{c}_4 u_{i,jk} u_{i,jk} + \tilde{c}_5 u_{i,jk} u_{i,jk}, \quad (32)$$

где \tilde{w} является первой формой Миндлина плотности упругой энергии градиента дисторсии, с

$$\tilde{c}_1 = 2C_1, \tilde{c}_2 = 2C_2, \tilde{c}_3 = \frac{1}{2} C_7, \tilde{c}_4 = C_8 \text{ и } \tilde{c}_5 = 2C_{11} \quad (33)$$

коэффициенты некоторых материалов. Любой набор таких пяти неотрицательных коэффициентов дает действительную теорию упругости градиента дисторсии с соответствующими упругими константами, заданными формулой (30).

Подставляя выражение

$$u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (34)$$

в уравнение (32), получается вторая форма

$$\hat{w}(u_{i,jk}) = \hat{c}_1 \theta_{,i} \varepsilon_{ij,j} + \hat{c}_2 \theta_{,k} \theta_{,k} + \hat{c}_3 \varepsilon_{ij,j} \varepsilon_{ik,k} + \hat{c}_4 \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{ij,k} + \hat{c}_5 \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{jk,i}, \quad (35)$$

где ε_{ij} - бесконечно малая деформация и

$$\hat{c}_1 = 2\tilde{c}_1 - 4\tilde{c}_3, \hat{c}_2 = -\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3, \hat{c}_3 = 4\tilde{c}_3, \hat{c}_4 = 3\tilde{c}_4 - \tilde{c}_5 \text{ и } \hat{c}_5 = -2\tilde{c}_4 + 2\tilde{c}_5 \quad (36)$$

Только коэффициент \hat{c}_3 должен быть неотрицательным, в то время как остальные четыре коэффициента могут быть положительными или отрицательными. Ясно, что для того, чтобы данный набор из пяти коэффициентов \hat{c}_γ был допустимым, все соответствующие коэффициенты с должны быть неотрицательными в соответствии с уравнением (33).

Формы (32) и (35) были впервые представлены [2]. Они, очевидно, эквивалентны, и ни одно из них не может автоматически привести к теории с симметричным двойным напряжением «градиента деформации» $\mu_{ijk} = \mu_{jik}$. Но такие теории упругости с градиентом деформации составляют лишь относительно небольшое подмножество богатой теории упругости с градиентом искажения Миндлина.

Сокращая последние два индекса в уравнении (31) получим

$$\mu_{ijk,jk} = 4(C_1 + C_2 + C_{11}) \Delta \theta_{,i} + (C_7 + 2C_8) \Delta \Delta u_i. \quad (37)$$

Используя легко проверяемое тождество

$$\Delta\theta_{,i} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \partial_i \partial_j L_{jk} u_k \text{ и } \Delta\Delta u_{,i} = \frac{1}{\mu} (\Delta\delta_{ij} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \partial_i \partial_j) L_{jk} u_k, \quad (38)$$

где L_{jk} - классический оператор Ламе, и можно факторизовать уравнение (37) как

$$\mu_{ijk,jk} = (l_1^2 \Delta\delta_{ij} + l_2^2 \partial_i \partial_j) L_{jk} u_k, \quad (39)$$

Где

$$l_1 = \sqrt{\frac{C_7 + 2C_8}{\mu}} \text{ и } l_2 = \sqrt{\frac{4\mu(C_1 + C_2 + C_{11}) - (\lambda + \mu)(C_7 + 2C_8)}{\mu(\lambda + 2\mu)}} \quad (40)$$

некоторые характерные параметры масштаба длины, определяющие размерные эффекты.

Подставляя уравнения (15) и (39) в уравнение (24) можно получить факторизованные уравнения равновесия градиентной упругости деформации изотропных твердых тел в форме дисторсии

$$H_{ij} L_{jk} u_k + f_i = 0, \text{ с } H_{ij} = \delta_{ij} - l_1^2 \Delta\delta_{ij} - l_2^2 \partial_i \partial_j, \quad (41)$$

как оператор Гельмгольца. Поскольку операторы H_{ij} и L_{jk} коммутируют, общий интеграл дифференциального уравнения четвертого порядка (41) всегда может быть представлен как сумма общих интегралов этих двух операторов второго порядка.

Можно видеть, что в формуле (40) параметр масштаба длины l_1 всегда действительный, в то время как параметр l_2 может быть действительным или мнимым. Следовательно, с точки зрения теории однородных решений, градиентная упругость может включать не только экспоненциально убывающие фундаментальные решения, связанные с действительными корнями результирующих характеристических уравнений, но также и колебательные решения, связанные с мнимой частью корней. Возможность таких колебательных решений может иметь важные физические последствия в различных ситуациях, таких как, например, механике разрушения и потере устойчивости.

Действительно, примечательно, что уравнения равновесия (41) включают только два параметра градиента искажения материалов l_1 и l_2 . Следовательно, при использовании основных или периодических граничных условий или изучении откликов бесконечных сред необходимо указать только два параметра градиента дисторсии. Но, к сожалению, эту привлекательную простоту нельзя распространить на двойное напряжение (31) и, следовательно, на естественные граничные условия (25).

$$2C_1(\Delta u_{j;n_j n_i} + \theta_{,i}) + 4C_2 \theta_{,j} n_j n_i + C_7 \Delta u_i + 2C_8 u_{i,jk} n_j n_k + 4C_{11} u_{j,ik} n_j n_k = \bar{q}_i, \quad (42)$$

который включает в себя все пять коэффициентов упругости градиента дисторсии.

Для изотропных твердых тел, полагаясь на соображения рациональной симметрии, можно уменьшить количество независимых упругих коэффициентов градиента дисторсии с пятнадцати до пяти, но все же не до одного или двух. Альтернативой пути фундаментальной симметрии могло бы быть прямое упрощение упругих постоянных (27) или (30). исходя из некоторых «физических» соображений. Однако, этот альтернативный маршрут не лишен подводных камней.

1.1.7 Полностью симметричная модель

Рассмотрим снова уравнение (29).

Применяя условия потенциальности и симметрии деформации, можно получить тензоры жесткости изотропной упругости градиента деформации формы II Миндлина [2, 3].

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} = & a_1 (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm}) + a_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \\ & + a_4 (\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn}) \\ & + a_8 (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn}) + a_9 (\delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}), \end{aligned} \quad (43)$$

где λ и μ это классические коэффициенты Ламе и a_1, a_3, a_4, a_8, a_9 пять оставшихся независимых коэффициентов градиента деформации и, следовательно, всего имеется семь коэффициентов материалов.

Наложив условие порядка дифференцирования уравнения (43), можно найти

$$A_{ijklmn} = a_1 \left(\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} \right. \\ \left. + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} \right) \\ + a_8 \left(\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right). \quad (44)$$

Уравнения (44) определяют тензоры жесткости единой теории симметрии изотропной градиентной упругости деформации.

В изотропной упругости второго градиента смещения формы Миндлина I [2, 3] классические упругие постоянные C задаются формулой (22). Что касается тензора A , то налагаются условия потенциальности и порядка дифференцирования, а компоненты A имеют вид

$$A_{ijklmn} = a_1 \left(\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} \right) \\ + a_2 \left(\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} \right) + a_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} \\ + a_8 \left(\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} \right) + a_{11} \left(\delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right),$$

где a_1, a_3, a_7, a_8 и a_{11} - пять оставшихся коэффициентов градиента деформации и, следовательно, всего семь независимых коэффициентов материала. Можно видеть, что в отличие от изотропной упругости формы Миндлина I, представленная унифицированная теория симметрии имеет всего четыре коэффициента материала.

Для полноты и дальнейших ссылок тензор напряжений представленной теории задается классическим выражением Коши

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (45)$$

где $\theta = \varepsilon_{ll}$ - дилатация, а тензор двойных напряжений $\mu_{ijk} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}$ представляется

$$\mu_{ijk} = a_1 \left[(2\varepsilon_{il,l} + \theta_{,i}) \delta_{jk} + (2\varepsilon_{jl,l} + \theta_{,j}) \delta_{ki} + (2\varepsilon_{kl,l} + \theta_{,k}) \delta_{ij} \right] + 2a_8 (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}), \quad (46)$$

который является полностью симметричным и, следовательно, его можно напрямую использовать в существующих уравнениях поля формы напряжения для градиентной упругости деформации [2, 77].

Подставляя уравнение (46) в уравнения равновесия в виде напряжений

$$\sigma_{ij,j} - \mu_{ijk,kj} + f_i = 0, \quad (47)$$

можно получить факторизованное смещение из уравнений равновесия

$$H_{ij}L_{jk}u_k + f_i = 0, \text{ где } L_{ij} = (\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + \mu\delta_{ij}\Delta \text{ и } H_{ij} = \delta_{ij} - l_1^2\delta_{ij}\Delta - l_2^2\partial_i\partial_j, \quad (48)$$

с f_i составляющие вектора объемной силы f , L_{ij} оператор Ламе классической изотропной упругости, H_{ij} оператор Гельмгольца упругости градиента изотропной деформации, $\Delta = \partial_i\partial_i$ вектор Лапласиана, и два характерных параметра масштаба длины, l_1 и l_2 , дают

$$l_1 = \sqrt{\frac{a_1 + 2a_8}{\mu}} \text{ и } l_2 = \sqrt{\frac{4\mu(2a_1 + a_8) - (\lambda + \mu)(a_1 + 2a_8)}{\mu(\lambda + 2\mu)}}. \quad (49)$$

Поскольку операторы H_{ij} и L_{ij} коммутируют, общий интеграл дифференциального уравнения четвертого порядка (48) всегда можно удобно представить в виде суммы общих интегралов этих двух операторов второго порядка.

Очевидно, что (49) является частным случаем (40). При этом структура общего решения остается прежней, и зависит от двух масштабных параметров.

1.2 Заключение

Показано, что структура решения градиентных теорий упругости всегда состоит из классических операторов Ламе и обобщенных операторов Гельмгольца.

Рассмотрены модели градиентной деформации и дисторсии, хотя они и родственные так как между ними имеется связь, но они не эквивалентны.

Устанавливается что оператор Гельмгольца в общем случае зависит от двух масштабных параметров, один отвечает за изменение объема, второй в свою очередь за сдвиг.

Показывается, что в общем случае для изотропной упругости могут быть пять модулей упругости, как в модели деформации, так и в модели дисторсии, но это разные модули и в этом отношении теории не эквивалентны. Однако в уравнении равновесия в перемещениях входят два масштабных параметра,

которые и есть комбинация этих пяти модулей упругости. Общее решение строится с точностью до двух параметров, остальные входят в решение через граничные условия (через запись напряжений).

Показано, что имеется двух параметрическая градиентная модель, в которой выполняются и свойства симметрии, характерное для теории деформаций и свойства симметрии по порядку дифференцирования.

ГЛАВА 2. О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ГРАДИЕНТНОЙ УПРУГОСТИ

2.1 Введение

Известно, что в изотропной теории упругости всего две физические постоянные – коэффициенты Ламе. Переход от общего случая с 21 физической постоянной до двух осуществляется путем учета изотропии (том числе центральной симметрии), симметрии в тензоре модулей упругости четвертого ранга, связанной с потенциальностью плотности потенциальной энергии и с учетом симметрии тензора напряжений. Следовательно, знаки симметрии играют существенную роль в упрощении физической модели материала.

Известно [4] что в градиентной теории для общей анизотропной среды имеется 300 независимых физических постоянных, в то время как для изотропного тела их всего семь: коэффициенты Ламе - две физические постоянные и пять градиентных модулей упругости. Чрезвычайно большое число физических независимых постоянных для градиентных моделей сред делает принципиально невозможным использовать такие модели в прикладных задачах. Использование условий симметрии позволяет упростить градиентные модели и сделать их доступными для решения прикладных проблем в механике материалов, проблемах тепло- и массо-перенос, электро-упругости и др [1-8]. Однако возникает вопрос о том не теряем ли мы при таких упрощениях корректность при постановке соответствующих краевых задач.

В этой работе мы продолжаем изучать свойства симметрии тензора градиентных модулей упругости, начатое в недавних работах [14,15]. Сначала мы исследуем свойства симметрии тензоров модулей упругости градиентных теорий, характерные и для классической теории упругости и градиентной упругости, обращая внимание на особый вид симметрии, характерный только для градиентных теорий. Затем рассматривается структура градиентной части плотности потенциальной энергии и ее вариация, определяющая структуру

краевых неклассических условий. В результате решается вопрос о том является ли существенным учет этих условий при постановке краевых условий и формулировки математических моделей сред в целом. Обсуждаются возможные ошибки в постановке краевых условий, связанные с потерей некоторых свойств симметрии. Формулируются критерии корректности, позволяющие исправить ситуацию, что представляется нам важным и для теорий градиентной упругости в целом и для приложений.

2.20 свойствах симметрии классической и градиентной теории упругости

Определяющие уравнения в линейной теории упругости записываются на через тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (50)$$

Для линейной градиентной теории определяющие уравнения в линейной градиентной теории упругости в некоторой трехмерной декартовой системе координат также могут быть записаны в терминах деформаций [4, 12]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + B_{ijklm} \varepsilon_{kl,m} \quad \text{и} \quad \mu_{ijk} = B_{lmijk} \varepsilon_{lm} + A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n} \quad (51)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} , μ_{ijk} и $\varepsilon_{ij,k}$ являются компонентами тензоров $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\mu}$ и $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$.

С другой стороны, определяющие соотношения градиентной упругости (51) могут быть записаны в терминах перемещений

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad \text{и} \quad \mu_{ijk} = A_{ijklmn} u_{l,mn} \quad (52)$$

Рассмотрим возможные условия симметрии. Так как обсуждаемые далее вопросы являются важными с точки зрения градиентных теорий, будем последовательно излагать все положения, касающиеся симметрии, даже если они и кажутся хорошо известными.

Рассмотрим сначала одно из базовых, фундаментальных свойств симметрии для тензоров модулей упругости в механике сред. Плотность энергии деформации $U(\boldsymbol{\varepsilon})$ однородного линейно-упругого материала определяется выражением

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad \text{где } \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (53)$$

Тензор упругих постоянных C_{ijkl} в (53) может быть ограничен, если предположить, что $U(\boldsymbol{\varepsilon})$ не зависит от пути интегрирования, пройденного в пространстве деформаций, и, следовательно

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (54)$$

Аналогично, плотность энергии градиента деформации $W(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})$ линейного упругого материала определяется уравнением

$$W(\nabla \boldsymbol{\varepsilon}) = \int_0^{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} \mu_{ijk} d\varepsilon_{ij,k}, \quad \text{где } \mu_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = C_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n},$$

И аналогично, тензор C_{ijklmn} также можно ограничить, что $W(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})$ не зависит от пути, и следовательно требует

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{lm,n} \partial \varepsilon_{ij,k}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij,k} \partial \varepsilon_{lm,n}} \Rightarrow C_{ijklmn} = C_{lmnijk}. \quad (55)$$

Аналогичные выражения могут быть записаны и для определяющих соотношений (3). Следуя (53) - (55) можно сделать вывод, что компоненты A_{ijklmn} ,

B_{ijklm} и C_{ijkl} тензоров упругой жесткости **A**, **B** и **C** подчиняются потенциальности

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad A_{ijklmn} = A_{lmnijk} \quad (56)$$

Заметим, что для тензора пятого ранга, симметрия, связанная с потенциальностью, не навязывает никаких дополнительных свойств.

Отметим еще одно свойство градиентной теории деформаций, которое связано с симметрией тензора деформации (условия симметрии деформаций):

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad B_{ijklm} = B_{jiklm} = B_{ijlkm}, \quad A_{ijklmn} = A_{ijkmln}. \quad (57)$$

Для centrosymmetric материалов (т. е. материалов с точечными группами, включающими центр инверсии в качестве одного из элементов симметрии) тензор пятого ранга **B** обращается в нуль. В результате количество независимых коэффициентов материала уменьшается, и определяющие соотношения (54) становятся несвязанными.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{и} \quad \mu_{ijk} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}. \quad (58)$$

В дальнейшем, с целью упрощения мы будем изучать свойства симметрии тензора шестого ранга \mathbf{A} и будем рассматривать лишь centrosymmetric материалы.

Полагаем, что оба тензора \mathbf{C} и \mathbf{A} в (58) подчиняются условиям (56). Тогда и напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\mu}$ также удовлетворяют аналогичным условиям симметрии

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{и} \quad \mu_{ijk} = \mu_{jik}$$

Подставляя $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ в определяющие соотношения (58), найдем

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad \text{и} \quad \mu_{ijk} = A_{ijklmn} u_{l,mn} \quad (59)$$

Укажем на еще одно свойство симметрии, которое имеет место только лишь для градиентной теории упругости. Очевидно, что в выражении (59) тензор третьего ранга $u_{l,mn}$ является симметричным в отношении перестановки индексов дифференцирования m,n , $u_{l,mn} = u_{l,nm}$. Более того, указанная симметрия является необходимым и достаточным условием существования непрерывных первых производных вектора перемещений, которые по определению являются аргументами плотности потенциальной энергии в вариационной формулировке градиентных моделей. В противном случае имеет место не интегрируемость $u_{i,jk}$, что соответствует кинематике сред с полями дефектов [13].

В силу указанной симметрии, которую назовем симметрией по порядку дифференцирования, в определяющем уравнении для тензора третьего ранга μ_{ijk} могут присутствовать только симметричные компоненты тензора модулей упругости шестого ранга по последней паре индексов в первой и второй тройке индексов

$$A_{ijklmn}^s : A_{ijklmn}^s = A_{ijklmn}^s. \quad A_{ijklnm}^s = A_{ijklmn}^s \quad (60)$$

Следовательно, только симметричные по порядку дифференцирования компоненты тензора A_{ijklmn} являются физически существенными. Действительно, тензоры шестого ранга несимметричные по указанным индексам

$$A_{ijklmn}^a : A_{ijklmn}^a = -A_{ikjlmn}. \quad A_{ijklnm}^a = -A_{ikjlmn} \quad (61)$$

могут быть произвольными в (59). В силу свертки с учетом симметрии тензора $u_{i,jk}$ сумма всех слагаемых, соответствующих компонентам A_{ijklmn}^a в (59) тождественно равны нулю, $\mu_{ijk} = A_{ijklmn}^a u_{l,mn} = 0$.

Очевидно, что и для градиентной составляющей плотности потенциальной энергии $w_g(u_{i,jk})$, записанной в перемещениях, существенными (энергетически существенными) являются лишь компоненты тензора модулей упругости шестого ранга A_{ijklmn}^s , а компоненты A_{ijklmn}^a являются энергетически несущественными:

$$2w_g(u_{i,jk}) = \mu_{ijk} u_{i,jk} = A_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn} = A_{ijklmn}^s u_{i,jk} u_{l,mn}. \quad (62)$$

При этом для любых значений A_{ijklmn}^a и любых $u_{i,jk}$ имеет место тождество

$$A_{ijklmn}^a u_{i,jk} u_{l,mn} \equiv 0. \quad (63)$$

Следовательно, равенство (63) является необходимым условием отсутствия симметрии по порядку дифференцирования.

С другой стороны, рассмотрим квадратичную форму, соответствующую плотности градиентной части потенциальной энергии, записанной для дисторсий. Имеем

$$u_{i,jk} A_{ijklmn} u_{l,mn} = u_{i,jk} \frac{1}{4} (A_{ijklmn} + A_{ikjlmn} + A_{ijklmn} + A_{ikjlmn}) u_{l,mn}$$

Следовательно, для потенциальной энергии, записанной для интегрируемых дисторсий, только симметричные при перестановке индексов дифференцирования компоненты тензора шестого ранга являются существенными

$$\hat{A}_{ijklmn} = \frac{1}{4} (A_{ijklmn} + A_{ikjlmn} + A_{ijklmn} + A_{ikjlmn})$$

Рассмотрим тензор \mathbf{B} шестого порядка. В индексных обозначениях Леви-Чивиты он может быть представлен компонентами B_{ijklmn} . Пусть для любых тензоров третьего ранга $u_{i,jh}$, симметричных относительно второго и третьего индексов имеет место равенство

$$u_{i,jk} B_{ijklmn} u_{l,mn} = 0$$

Тогда мы утверждаем, что из справедливости ранее написанного уравнения следует, что $B_{ijklmn} = -B_{ijklmn}$

Последнее равенство вместо этого является достаточным условием.

Действительно, необходимым и достаточным свойством тензора B , обеспечивающим выполнение условия $u_{i,jk} B_{ijhklm} u_{k,lm} = 0$ является следующим:

$$B_{ijklmn} + B_{ijklnm} + B_{ikjnlm} + B_{ikjlnm} = 0.$$

Необходимость этого условия можно доказать, просто выбрав тензор третьего порядка по $u_{i,jk} B_{ijklmn} u_{l,mn} = 0$ такой, что $u_{l,mn} = u_{l,mn} = 1$; в то время как все остальные $u_{i,jk} = 0$.

Этого также достаточно, так как любой тензор, симметричный относительно индексов второго и третьего порядка, может быть представлен в виде линейной комбинации рассматриваемых выше.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. В градиентной теории дисторсий для корректной вариационной постановки градиентной модели достаточно, чтобы тензор моментных напряжений был симметричным по последней паре индексов

Доказательство.

Для тензоров третьего ранга μ_{ijk} и $u_{i,jk}$ имеют место разложения на симметричные и несимметричные составляющие в отношении последних индексов (симметрии и несимметрии по порядку дифференцирования)

$$\begin{aligned} \mu_{ijk} &= \frac{1}{2}(\mu_{ijk} + \mu_{ikj}) + \frac{1}{2}(\mu_{ijk} - \mu_{ikj}) = \hat{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{ijk} \\ u_{i,jk} &= \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{i,kj}) + \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{i,kj}) = \hat{u}_{i,jk} + \tilde{u}_{i,jk} \end{aligned} \quad (64)$$

Будем рассматривать кинематику сред без полей дефектов, которая определяется симметричной составляющей тензора второго ранга градиента дисторсии $\hat{u}_{i,jk}$. Для формулировки кинематики такой среды при вариационном моделировании следует ввести с кинематические связи:

$$\tilde{u}_{i,jk} = 0 \quad (65)$$

Рассмотрим градиентную часть плотности потенциальной энергии $w_g(u_{i,jk})$ и введем соответствующий расширенный функционал Лагранжа $\bar{w}_g(u_{i,jk})$, учитывающий связи (65), используя технику множителей Лагранжа

$$\bar{w}_g(u_{i,jk}) = \mu_{ijk} \delta u_{i,jk} + \lambda_{ijk} \delta \tilde{u}_{i,jk} \quad (66)$$

здесь λ_{ijk} тензор множителей Лагранжа

Преобразуем вариационную форму (62), учитывая разложения (64)

$$\begin{aligned} 2\bar{w}_g(u_{i,jk}) &= \mu_{ijk} \delta u_{i,jk} + \lambda_{ijk} \delta \tilde{u}_{i,jk} = (\hat{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{ijk})(\delta \hat{u}_{i,jk} + \delta \tilde{u}_{i,jk}) + \lambda_{ijk} \delta \tilde{u}_{i,jk} = \\ &= \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{u}_{i,jk} + \tilde{\mu}_{ijk} \delta \tilde{u}_{i,jk} + \lambda_{ijk} \delta \tilde{u}_{i,jk} = \hat{\mu}_{ijk} \delta u_{i,jk} + \tilde{\mu}_{ijk} \delta \tilde{u}_{i,jk} + \lambda_{ijk} \delta \tilde{u}_{i,jk} = \\ &= \hat{\mu}_{ijk} \delta u_{i,jk} + (\tilde{\mu}_{ijk} + \lambda_{ijk}) \delta \tilde{u}_{i,jk} \end{aligned} \quad (67)$$

В последнем равенстве (67) в первом слагаемом все $\delta u_{i,jk}$ являются свободными вариациями. Полагаем что тензор множителей Лагранжа определяется из условий $\tilde{\mu}_{ijk} + \lambda_{ijk} = 0$. Тогда из (67) имеем

$$2\bar{w}_g(u_{i,jk}) = \hat{\mu}_{ijk} \delta u_{i,jk}$$

Лемма доказана.

2.3 Особенности свойств симметрии по условиям градиентной деформации и по порядку дифференцирования

Рассмотрим обсуждаемые условия симметрии и установим связанную с ними структуру тензоров модулей упругости шестого ранга. Общий вид тензоров шестого ранга для изотропного тела можно построить в виде разложения по системе 15 линейно независимых базисных тензоров шестого ранга e_{ijklmn}^s :

$$A_{ijklmn} = a_\alpha e_{ijklmn}^\alpha = a_1 e_{ijklmn}^1 + a_2 e_{ijklmn}^2 + \dots + a_{15} e_{ijklmn}^{15} \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned}
e_{ijklmn}^1 &= \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn}; & e_{ijklmn}^2 &= \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln}; & e_{ijklmn}^3 &= \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm}; \\
e_{ijklmn}^4 &= \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn}; & e_{ijklmn}^5 &= \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln}; & e_{ijklmn}^6 &= \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm}; \\
e_{ijklmn}^7 &= \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn}; & e_{ijklmn}^8 &= \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{kl}; & e_{ijklmn}^0 &= \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}; \\
e_{ijklmn}^{10} &= \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln}; & e_{ijklmn}^{11} &= \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn}; & e_{ijklmn}^{12} &= \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl}; \\
e_{ijklmn}^{13} &= \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm}; & e_{ijklmn}^{14} &= \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km}; & e_{ijklmn}^{15} &= \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}
\end{aligned}$$

Учет условий (7), $A_{ijklmn} = A_{lmnijk}$, приводит к дополнительным связям на коэффициенты a_s в разложении (68):

$$a_1 = a_{13}, \quad a_2 = a_6, \quad a_4 = a_{10}, \quad a_{12} = a_{14}$$

и снижает число независимых градиентных модулей упругости до 11

$$\begin{aligned}
A_{ijklmn} &= a_1(e_{ijklmn}^1 + e_{ijklmn}^{13}) + a_2(e_{ijklmn}^2 + e_{ijklmn}^6) + \\
&+ a_3 e_{ijklmn}^3 + a_4(e_{ijklmn}^4 + e_{ijklmn}^{10}) + a_5 e_{ijklmn}^5 + a_7 e_{ijklmn}^7 + \\
&+ a_8 e_{ijklmn}^8 + a_9 e_{ijklmn}^9 + a_{11} e_{ijklmn}^{11} + a_{12}(e_{ijklmn}^{12} + e_{ijklmn}^{14}) + a_{15} e_{ijklmn}^{15}
\end{aligned}$$

Следовательно, число базисных тензоров снизилось до 11.

Дополнительный учет симметрии по порядку дифференцирования (60), $A_{ijklmn} = A_{lmnijk} = A_{ijklmn}$ приводит к дополнительным связям между модулями упругости в последнем равенстве

$$a_1 = a_4 = a_{10} = a_{13}, \quad a_2 = a_3 = a_5 = a_6, \quad a_8 = a_9, \quad a_{11} = a_{12} = a_{14} = a_{15}$$

Это снижает число независимых базисных тензоров до пяти и тензор модулей упругости шестого ранга определяется пятью физическими постоянными $a_1, a_2, a_7, a_8, a_{11}$:

$$\begin{aligned}
A_{ijklmn} &= a_1 \left(\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} \right) \\
&+ a_2 \left(\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} \right) + a_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} \\
&+ a_8 \left(\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} \right) + a_{11} \left(\delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right)
\end{aligned} \tag{69}$$

Структура модулей упругости шестого ранга (20) соответствует первой форме Миндлина [2, 3].

С другой стороны, если мы, рассматривая соотношения (68), потребуем выполнения и условий потенциальности (56) и условий симметрии деформации

($A_{ijklmn} = A_{ijkmln} (= A_{jiklmn})$), то, дополнительно устанавливается следующие связи между модулями

$$a_1 = a_2, \quad a_4 = a_5 = a_7, \quad a_8 = a_{11}, \quad a_9 = a_{12} = a_{15}$$

В результате число модулей также снизится до пяти, но структура тензора модулей упругости будет иной

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} = & a_1 (\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm}) + a_3 \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} \\ & + a_4 (\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}) + a_8 (\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}) \\ & + a_9 (\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}) \end{aligned} \quad (70)$$

Структура модулей упругости шестого ранга (70) соответствует второй форме Миндлина [2]. Очевидно, что в (69) по сравнению с (70) разложение осуществляется по иным базисным тензорам, так как эти разложения содержат различные пятерки модулей упругости.

Рассмотрим теперь тензоры моментов и плотности потенциальной энергии, построенные по двум рассмотренным признакам симметрии: симметрии по порядку дифференцирования (69) –и симметрии по первым двум индексам в каждой тройке (70) - симметрии, связанной с симметрией тензора деформаций - соответствует второй форме Миндлина [2].

Для модулей упругости (69) формы Миндлина I найдем выражение для тензора моментов

$$\begin{aligned} \sigma_{ijk} = & A_{ijklmn} u_{l,mn} = a_1 (\delta_{ij} u_{k,mm} + \delta_{jk} u_{m,mi} + \delta_{ik} u_{j,mm} + \delta_{jk} u_{n,ni}) + \\ & + a_2 (\delta_{ij} u_{n,nk} + \delta_{ik} u_{m,mj} + \delta_{ij} u_{m,mk} + \delta_{ik} u_{n,nj}) + a_7 \delta_{jk} u_{i,mm} + \\ & + 2a_8 (u_{i,jk}) + 2a_{11} (u_{j,ik} + u_{k,ij}) = \\ & = a_1 (\delta_{ij} \Delta u_k + 2\delta_{jk} \theta_{,i} + \delta_{ik} \Delta u_j) + 2a_2 (\delta_{ij} \theta_{,k} + \delta_{ik} \theta_{,j}) + \\ & + a_7 \delta_{jk} \Delta u_i + 2a_8 u_{i,jk} + 2a_{11} (u_{j,ik} + u_{k,ij}) \end{aligned} \quad (71)$$

Для модулей упругости (70) формы Миндлина II будем иметь иной вид моментных напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{ijk} &= A_{ijklmn}u_{l,mm} = a_1(\delta_{ij}u_{k,mm} + \delta_{jk}u_{l,li} + \delta_{ij}u_{l,kl} + \delta_{ik}u_{l,lj}) + a_3\delta_{ij}u_{l,lk} + \\
&+ a_4(\delta_{ik}u_{j,mm} + \delta_{jk}u_{l,il} + \delta_{ik}u_{l,jl} + \delta_{jk}u_{i,mm}) + a_8(u_{i,jk} + u_{j,ik}) + \\
&+ a_9(u_{k,ij} + u_{j,ki} + u_{i,kj} + u_{k,ji}) = \\
&= a_1(\delta_{ij}\Delta u_k + \delta_{jk}\theta_{,i} + \delta_{ij}\theta_{,k} + \delta_{ik}\theta_{,j}) + a_3\delta_{ij}\theta_{,k} + \\
&+ a_4(\delta_{ik}\Delta u_j + \delta_{jk}\theta_{,i} + \delta_{ik}\theta_{,j} + \delta_{jk}\Delta u_i) + (a_8 + a_9)(u_{i,jk} + u_{j,ik}) + \\
&+ 2a_9u_{k,ij}
\end{aligned} \tag{72}$$

Из сравнения тензоров моментных напряжений (71) и (72) следует, что модели, построенные с использованием свойств симметрии по порядку дифференцирования и свойств симметрии, связанных с симметрией по первым двум индексам, являются различными.

Для модели Миндина I тензор моментов является симметричным по двум последним индексам, в то время как для модели Миндлина II тензор моментов обладает симметрией «парности»- симметрией по первым двум индексам.

Исследуемые два типа симметрии являются принципиально различными, ибо симметрия по порядку дифференцирования является фундаментальной и связана с существованием градиентной бездефектной среды, когда условия симметрии у тензора вторых производных перемещений являются необходимыми и достаточными условиями непрерывности дисторсий. Нарушение этой симметрии приводит к появлению энергетически несущественных «лишних» модулей в тензоре шестого ранга, которые, тем не менее, никак не влияют на вид потенциальной энергии. Тем не менее, пока не ясно, следует ли при построении решений удерживать лишь энергетически значимые компоненты тензора шестого ранга с указанным свойством симметрии.

Симметрия, связанная с парностью (симметрия по первым индексам в первой и второй тройке индексов) вносится при построении градиентной теории деформаций и связана с симметрией тензора деформации. Это совершенно иная симметрия.

Рассмотрим снова тензоры модулей упругости для формы Миндлина I со свойствами $(A_{ijklmn} = A_{lmnij k} = A_{ijklmn})$ и формы Миндлина II со свойствами

($A_{ijklmn}^* = A_{lmnij}^* = A_{ijkmln}^*$). Соответственно, для формы Миндлина I плотность градиентной части потенциальной энергии записывается через тензор модулей упругости, обладающих свойством симметрии по порядку дифференцирования (60), (69):

$$w(u_{l,mn}) = \frac{1}{2} u_{i,jk} A_{ijklmn}^s u_{l,mn} \quad (73)$$

Для формы Миндлина II плотность градиентной части потенциальной энергии записывается через деформации формально с другим тензором градиентных свойств шестого ранга A_{ijklmn}^* , которые не обладают свойствами (60)

$$w^*(\varepsilon_{lm,n}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij,k} A_{ijklmn}^* \varepsilon_{lm,n} \quad (74)$$

Записанные две формы теории Миндлина (73) и (74) являются эквивалентными в том смысле, что каждая из них записывается через пять физических постоянных (a_i для формы Миндлин I и a_i^* для формы Миндлин II) и коэффициенты a_i и a_i^* могут быть выражены друг через друга, если, например, квадратичную форму (73) переписать в деформациях учитывая тождество $u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}$. В результате такой идентификации можно получить одинаковые формы для плотности потенциальной энергии для любого пробного поля смещения.

Замечание.

Тождество $u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}$ считается известным, тем не менее приведем его доказательство. Для этого сначала используем очевидное разложение тензора дисторсии $u_{i,j}$ и запишем соответствующее выражение для производной тензора дисторсии:

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} - \omega_a \partial_{ija}, \quad u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} - \omega_{a,k} \partial_{ija} \quad (75)$$

Исключим теперь из второго выражения в (26) тензор градиента вектора поворотов $\omega_{a,k}$ используя уравнение совместности- условие интегрируемости:

$$R_{i,jk} \partial_{jkr} = \varepsilon_{ij,k} \partial_{jkr} - \omega_{a,k} \partial_{ija} \partial_{jkr} = 0$$

Если учесть свойства тензора Леви-Читы, то последнее равенство позволяет получить

$$\omega_{a,k} = -\varepsilon_{kp,q} \mathcal{E}_{pqa} \quad (76)$$

Подстановка $\omega_{a,k}$ с помощью (76) в выражение (75) дает искомое тождество

$$u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{kp,q} \mathcal{E}_{pqa} \mathcal{E}_{ija} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{kp,q} (\delta_{pi} \delta_{qj} - \delta_{pj} \delta_{qi}) = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i}.$$

Вернемся к плотности потенциальной энергии и покажем, что форма Миндлина I может быть переписана в деформациях в форме Миндлина II, что дает возможность формально выразить в общем случае тензор модулей формы Миндлина I через тензор модулей формы Миндлина II. Действительно рассмотрим формы Миндлина I

$$w_V^I = A_{ijklmn}^I u_{i,jk} u_{l,mn}$$

и перепишем ее учитывая соотношения

$$u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i}$$

$$u_{l,mn} = \varepsilon_{lm,n} + \varepsilon_{nl,m} - \varepsilon_{nm,l}$$

Получим, в результате выражение для плотности потенциальной энергии, выраженное через модули упругости модели Миндлина I, но записанное через производные от компонент тензора деформации, т.е. в форме разложения Миндлина II

$$\begin{aligned} w^I &= A_{ijklmn}^I u_{i,jk} u_{l,mn} = A_{ijklmn}^I (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i})(\varepsilon_{lm,n} + \varepsilon_{nl,m} - \varepsilon_{nm,l}) = \\ &= A_{ijklmn}^I (\varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} + \varepsilon_{ki,j} \varepsilon_{lm,n} - \varepsilon_{kj,i} \varepsilon_{lm,n} + \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{nl,m} + \varepsilon_{ki,j} \varepsilon_{nl,m} - \varepsilon_{kj,i} \varepsilon_{nl,m} + \\ &- \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{nm,l} - \varepsilon_{ki,j} \varepsilon_{nm,l} + \varepsilon_{kj,i} \varepsilon_{nm,l}) = \\ &= A_{ijklmn}^I (\varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} + \varepsilon_{ki,j} \varepsilon_{lm,n} - \varepsilon_{kj,i} \varepsilon_{lm,n} + \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{nl,m} + \varepsilon_{ki,j} \varepsilon_{nl,m} - \varepsilon_{kj,i} \varepsilon_{nl,m} + \\ &- \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{nm,l} - \varepsilon_{ki,j} \varepsilon_{nm,l} + \varepsilon_{kj,i} \varepsilon_{nm,l}) = \\ &= [(A_{ijklmn}^I + A_{ikjlmn}^I - A_{kjilmn}^I) + (A_{ijknml}^I + A_{jkimnl}^I - A_{kjimnl}^I) - (A_{ijknml}^I + A_{jkinml}^I - A_{kjinml}^I)] \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} \end{aligned}$$

Сравнивая полученную форму с квадратичной формой, записанной через модули формы Миндлина II, $A_{ijklmn}^{II} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n}$, найдем в общем случае связь между компонентами тензора модулей формы Миндлина I и компонентами тензора модулей формы Миндлина II

$$A_{ijklmn}^{II} = (A_{ijklmn}^I + A_{ikjlmn}^I - A_{kjilmn}^I) + (A_{ijknml}^I + A_{jkimnl}^I - A_{kjimnl}^I) - (A_{ijknml}^I + A_{jkinml}^I - A_{kjinml}^I)$$

В заключение раздела отметим, что кажущая эквивалентность квадратичных форм (73) и (74) не обеспечивает полную эквивалентность, ибо эти формы построены по тензорам модулей упругости с разными свойствами

симметрии, которые не обеспечивают формального тождественного перехода от одной симметрии к другой.

Действительно, рассмотрим определения тензора A_{ijklmn} с помощью равенства (69), а тензора A_{ijklmn}^* с помощью равенства (70) и построим тензор градиентных модулей упругости $A_{ijklmn}^\#$ обладающий одновременно и симметрией по порядку дифференцирования и симметрии по парности ($A_{ijklmn}^\# = A_{lmnij}^\# = A_{ijklmn}^\# = A_{ijkmln}^\#$). Получим

$$\begin{aligned} A_{ijklmn}^\# = & a_1 \left(\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} \right. \\ & \left. + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} \right) \\ & + a_8 \left(\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что квадратичная форма, определяющая плотность потенциальной энергии

$$w^\# = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij,k} A_{ijklmn}^\# \varepsilon_{lm,n}$$

является идентичной в указанном смысле формам (73) и (74), но определяет модель с полной симметрией, отличную от двух упомянутых выше моделей. Для этой полностью корректной с точки зрения свойств симметрии модели тензор моментов третьего ранга симметричен по первой и второй парам индексов. Действительно, эта модель автоматически удовлетворяет требованиям теоремы о симметрии тензоров моментов и является одновременно моделью градиентной деформации. Однако, обратим внимание, эта теория накладывает на градиентные свойства более жесткие требования, что отражается на числе соответствующих базисных тензоров и модулей.

Далее мы рассмотрим проблему о важности соблюдения условий симметрии по порядку дифференцирования, как необходимых условий отсутствия полей дефектов в градиентной теории упругости. Возникает вопрос о том, надо ли строго добиваться выполнения этих условия в прикладных моделях, если тензор модулей шестого ранга этим условиям по построению не удовлетворяет, или наличие несимметричных компонент не влияет на решение прикладных задач в

силу того, что антисимметричные компоненты являются энергетически несущественными (14).

2.4 Условия выполнения критерия симметрии по порядку дифференцирования

Представим тензор шестого ранга в виде разложения:

$$C_{ijkml} = C_{ijkml}^{++} + C_{ijkml}^{+-} + C_{ijkml}^{-+} + C_{ijkml}^{--} \quad (77)$$

$$\begin{cases} C_{ijkml}^{++} = (C_{ijkml} + C_{ikjml} + C_{ijkmln} + C_{ikjmln}) / 4 \\ C_{ijkml}^{+-} = (C_{ijkml} + C_{ikjml} - C_{ijkmln} - C_{ikjmln}) / 4 \\ C_{ijkml}^{-+} = (C_{ijkml} - C_{ikjml} + C_{ijkmln} - C_{ikjmln}) / 4 \\ C_{ijkml}^{--} = (C_{ijkml} - C_{ikjml} - C_{ijkmln} + C_{ikjmln}) / 4 \end{cases} \quad (78)$$

Формулами (77) вводится тензорный базис в пространстве тензоров 6 ранга, для выделенных четырех ортогональных подпространств, учитывающих симметрию по парам индексов дифференцирования. Индексами дифференцирования являются последние два индекса в каждой из троек индексов в рассматриваемых тензорах шестого ранга. Ортогональность означает, что свертка по любым индексам дифференцирования равна нулю, если они не одинаковы.

Непосредственной сверткой разложения (77) с тензором шестого ранга $R_{i,jk}R_{m,nl}$ можно убедиться, что потенциальная энергия кривизн зависит только от модулей, входящих в определение тензора C_{ijkml}^{++} . Следовательно, модули, входящие в состав тензоров $C_{ijkml}^{+-}, C_{ijkml}^{-+}, C_{ijkml}^{--}$, не ограничены никакими связями. Отметим, что как показано ранее, среди компонент тензора C_{ijkml} физически и энергетически значимыми являются только компоненты C_{ijkml}^{++} .

Рассмотрим вариацию градиентной части потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \delta w_g &= \int_V \sigma_{ijk} \delta u_{i,jk} dV = \int_V \sigma_{ijk,jk} \delta u_i dV - \int_F [\sigma_{ijk,k} n_j \delta u_i - \sigma_{ijk} n_k \delta u_{i,j}] dF = \\ &= - \int_F [\sigma_{ijk,k} n_j + (\sigma_{ijk} n_k)_{,p} \delta_{jp}^* + 2H \sigma_{ijk} n_k n_j] \delta u_i dF + \int_F (\sigma_{ijk} n_k) n_j \delta (u_{i,p} n_p) dF - \\ &+ \int_{\Gamma} [(\sigma_{ijk} n_k) v_j] \delta u_i ds \end{aligned} \quad (79)$$

где $H = -(1/2)(n_i)_{,j} \delta_{ij}^*$, $\delta_{ij}^* = \delta_{ij} - n_i n_j$

При записи (79) учтено следующее равенство [14]

$$\int_F (\sigma_{ijk} n_k \delta R_i)_{,p} \delta_{jp}^* dF = \iiint (\sigma_{ijk} n_k) v_j \delta R_i ds - \int_F 2H \sigma_{ijk} n_k n_j \delta R_i dF, \quad H = -(1/2)(n_i)_{,j} \delta_{ij}^*$$

Равенство (79) можно переписать полностью в перемещениях, учитывая соотношения закона Гука $\sigma_{ijk} = C_{ijklmn} u_{l,mn}$

$$\begin{aligned} \delta w_g &= \int_V C_{ijklmn} u_{l,mnjk} \delta u_i dV - \int_F [C_{ijklmn} u_{l,mnk} n_j \delta u_i - C_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \delta u_{i,j}] dF = \\ &= - \int_F [C_{ijklmn} u_{l,mnk} n_j + (C_{ijklmn} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta_{jp}^* + 2H C_{ijklmn} u_{l,mn} n_k n_j] \delta u_i dF + \\ &+ \int_F (C_{ijklmn} u_{l,mn} n_k) n_j \delta (u_{i,p} n_p) dF + \iiint [(C_{ijklmn} u_{l,mn} n_k) v_j] \delta u_i ds \end{aligned} \quad (80)$$

Построим условие корректности для вариационной формы плотности потенциальной энергии градиентных моделей. Будем говорить, что градиентная модель является корректной, если в краевых условиях не входят физически и энергетически несущественные компоненты модулей упругости A_{ijklmn}^a , (57) и, соответственно, несимметричные по последним индексам тензор моментов $\tilde{\sigma}_{ijk}$ (см. (64)). Напомним, что компоненты тензоров модулей упругости A_{ijklmn} называются физически и энергетически несущественными, если для них выполняются тождества

$$A_{ijklmn}^a u_{l,mn} = 0, \quad A_{ijklmn}^a u_{i,jk} u_{l,mn} \equiv 0$$

Запишем равенство (80) сначала только через физически и энергетические значимые (существенные) компоненты тензора моделей шестого ранга C_{ijkml}^{++} .

$$\begin{aligned} \delta w_g^s &= \int_V C_{ijkml}^{++} u_{l,mnjk} \delta u_i dV - \\ &- \int_F [C_{ijkml}^{++} u_{l,mnk} n_j + (C_{ijkml}^{++} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta_{jp}^* + 2H C_{ijkml}^{++} u_{l,mn} n_k n_j] \delta u_i dF + \\ &+ \int_F (C_{ijkml}^{++} u_{l,mn} n_k) n_j \delta (u_{i,p} n_p) dF + \iiint [(C_{ijkml}^{++} u_{l,mn} n_k) v_j] \delta u_i ds \end{aligned} \quad (81)$$

С другой стороны, удержим в (80) полное разложение для тензора модулей упругости шестого ранга (77). В таком случае получим

$$\begin{aligned}
\delta w_g^{full} = & \int_V C_{ijklmn}^{++} u_{l,mnjk} \delta u_i dV - \\
& - \int_F [(C_{ijklmn}^{++} + C_{ijklmn}^{-+}) u_{l,mnk} n_j + ((C_{ijklmn}^{++} + C_{ijklmn}^{-+}) u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta_{jp}^* + 2HC_{ijklmn}^{++} u_{l,mn} n_k n_j] \delta u_i dF + \\
& + \int_F ((C_{ijklmn}^{++} + C_{ijklmn}^{-+}) u_{l,mn} n_k) n_j \delta(u_{i,p} n_p) dF + \int_{\Gamma} [((C_{ijklmn}^{++} + C_{ijklmn}^{-+}) u_{l,mn} n_k) v_j] \delta u_i ds
\end{aligned} \tag{82}$$

Сравнивая вариационные формы (32) и (33), найдем

$$\begin{aligned}
\delta w_g^{full} - \delta w_g^s = & - \int_F [C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mnk} n_j + (C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF - \\
& + \int_{\Gamma} [C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mn} n_k v_j] \delta u_i ds
\end{aligned} \tag{83}$$

Равенство (34) устанавливает структуру возможных паразитных составляющих - невязок в статических граничных условиях (при вариации перемещений) и статических условиях на контурах ребер для реберных сил, которые могут появиться если не требовать дополнительно симметрии по порядку дифференцирования от компонент тензора шестого ранга. Уравнение (83) показывает, что постановка краевой задачи без учета симметрии тензора модулей упругости по индексам дифференцирования может приводить к значительным погрешностям за счет возможного появления в краевых условиях физически и энергетически несущественных составляющих модулей упругости, которые могут принимать любые значения.

Таким образом, для исключения паразитных внутренних сил в граничных условиях следует требовать выполнения следующего условия корректности

$$\begin{aligned}
B = \delta w_g^{full} - \delta w_g^s = & - \int_F [C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mnk} n_j + (C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF - \\
& + \int_{\Gamma} [C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mn} n_k v_j] \delta u_i ds = 0
\end{aligned} \tag{84}$$

Следуя (84), можно утверждать, что паразитные напряжения связаны с величиной C_{ijknml}^{-+} и могут формально появляться лишь в краевых условиях для напряжений на поверхности тела и ребрах.

Для большей ясности запишем вариационную форму (80) в терминах моментных напряжений

$$\begin{aligned}
\delta w_g &= -\int_V \sigma_{ijk,jk} \delta R_i dV + \\
&= \int_F [(\sigma_{ijk,k})n_j + [(\sigma_{ijk}n_k)]_{,p} \delta_{jp}^* + 2H\sigma_{ijk}n_k n_j] \delta R_i dF - \int_F (\sigma_{ijk}n_k)n_j \delta(R_{i,p}n_p) dF - \\
&- \int_{\Gamma} [(\sigma_{ijk}n_k)v_j] \delta R_i ds
\end{aligned}$$

Представим в последнем равенстве тензор моментов в виде суммы симметричного и несимметричного тензоров в отношении последней пары индексов (64), $\sigma_{ijk} = \hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk}$. После преобразований свертки получаем

$$\begin{aligned}
\delta w_g &= -\int_V \hat{\sigma}_{ijk,jk} \delta R_i dV + \\
&= \int_F [(\hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk})_{,k} n_j + [(\hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk})n_k]_{,p} \delta_{jp}^* + 2H\hat{\sigma}_{ijk}n_k n_j] \delta R_i dF - \\
&- \int_F (\hat{\sigma}_{ijk}n_k)n_j \delta(R_{i,p}n_p) dF - \int_{\Gamma} [(\hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk})n_k v_j] \delta R_i ds
\end{aligned} \tag{85}$$

Учтем, что физически несущественные моменты $\tilde{\mu}_{ijk}$ не должны входить в выражение для вариации плотности градиентной части потенциальной энергии, чтобы не вносить, вообще говоря, сколь угодно большие погрешности в граничные условия. Рассмотрим случай, когда поверхность тела образована плоскостями. В этом случае $H=0$ и выражение (85) принимает более простой вид

$$\begin{aligned}
\delta w_g &= -\int_V \hat{\sigma}_{ijk,jk} \delta R_i dV + \\
&+ \int_F [(\hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk})_{,k} n_j + [(\hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk})n_k]_{,p} \delta_{jp}^*] \delta R_i dF - \\
&- \int_F (\hat{\sigma}_{ijk}n_k)n_j \delta(R_{i,p}n_p) dF - \int_{\Gamma} [(\hat{\sigma}_{ijk} + \tilde{\sigma}_{ijk})n_k v_j] \delta R_i ds = \\
&= -\int_V \hat{\sigma}_{ijk,jk} \delta R_i dV + \int_F [\hat{\sigma}_{ijk,k}n_j + (\hat{\sigma}_{ijk}n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta R_i dF - \int_{\Gamma} [\hat{\sigma}_{ijk}n_k v_j] \delta R_i d + \\
&+ \int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,k}n_j + (\tilde{\sigma}_{ijk}n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta R_i dF - \int_{\Gamma} [\tilde{\sigma}_{ijk}n_k v_j] \delta R_i ds
\end{aligned} \tag{86}$$

В равенстве (86) последняя строка содержит слагаемые, которые могут давать ошибочные составляющие в граничных условиях для градиентной упругости, ибо она содержат физически и энергетические несущественные моменты. В корректной постановке краевых задач градиентной упругости эти слагаемые в совокупности должны отсутствовать. Следовательно, условия корректности запишутся в виде

$$\int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,k} n_j + (\tilde{\sigma}_{ijk} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta R_i dF - \int \int [\tilde{\sigma}_{ijk} n_k v_j] \delta R_i ds = 0 \quad (87)$$

Рассмотрим первый член в выражении (38)

$$\begin{aligned} & \int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,k} n_j + (\tilde{\sigma}_{ijk} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF = \\ & = \int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,k} n_j + (\tilde{\sigma}_{ijk} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF = \int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,p} (n_j \delta_{kp} + n_k \delta_{jp}^*) + \tilde{\sigma}_{ijk} n_{k,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF = \\ & = \int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,p} (n_j \delta_{kp}^* + n_k \delta_{jp}^*) + \tilde{\sigma}_{ijk,p} (n_j n_k) n_p + \tilde{\sigma}_{ijk} n_{k,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF = \\ & = \int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,p} (n_j \delta_{kp}^* + n_k \delta_{jp}^*)] \delta u_i dF + \int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,p} (n_j n_k) n_p + \tilde{\sigma}_{ijk} n_{k,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF \end{aligned} \quad (88)$$

Очевидно, что первое слагаемое в последней строке (88) равно нулю в силу свертки симметричного $(n_j \delta_{kp}^* + n_k \delta_{jp}^*)$ и антисимметричного $\tilde{\sigma}_{ijk,p}$ тензоров. В случае, когда поверхность тела образована семейством плоскостей, второе слагаемое также равно нулю, ибо $n_{k,p} = 0$. Следовательно, если поверхность образована плоскостями, то не возникает паразитных слагаемых в статическом граничном условии, ибо первое слагаемое в (87) равно нулю.

В общем случае, однако, равенство (88) показывает, что паразитные слагаемые в классическом краевом условии (при вариации δu_i) могут появиться в слагаемом, характеризующим кривизну поверхности через плоскую дивергенцию вектора нормали

$$\int_F [\tilde{\sigma}_{ijk} n_{k,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF \neq 0$$

Уравнения (84), (88) позволяют сформулировать следующее утверждение:

1. Для любой градиентной теории упругости корректные статические краевые условия вектор сил и статические условия для менисковых сил $f_i = C_{ijklmn} u_{l,mn} n_k v_j$ следует формулировать в перемещениях для тензора градиентных модулей упругости, C_{ijklmn}^{++} , симметричного относительно порядка дифференцирования (т.е. симметричного по последним индексам в каждой тройке) даже если эти модули упругости таким свойством не обладают для рассматриваемой модели:

$$\begin{aligned} & (C_{ijkl} u_{k,l} - C_{ijklmn}^{++} u_{l,mnk}) n_j + (C_{ijklmn}^{++} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta_{jp}^* + \\ & + 2HC_{ijklmn}^{++} u_{l,mn} n_k n_j = t_i^0, \quad x_i \in F = F_1 \cup F_2 \dots \cup F_i \end{aligned} \quad (89)$$

$$C_{ijklmn}^{++} u_{l,mn} n_k v_j = f_i^0, \quad x_i \in S = s_1 \cup s_2 \dots \cup s_i \quad (90)$$

Если поверхность тела образована плоскостями, то соотношение (89) выполняется тождественно, однако условие (90) следует иметь ввиду.

2. Если краевые статические условия формулируются в усилиях и моментах, то они и для вектора сил на поверхности и для вектора менисковых сил на контурах должны быть записаны через симметричную составляющую тензора моментов относительно последних индексов $\hat{\sigma}_{ijk}$

Замечание

Обратим внимание, что в интеграле по поверхности

$$\int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,k} n_j + (\tilde{\sigma}_{ijk} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF \quad (91)$$

нулевая свертка вида $\int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,p} (n_j \delta_{kp}^* + n_k \delta_{jp}^*)] \delta u_i dF = 0$ может быть реализована в общем

случае только лишь комбинацией обоих слагаемых. Это замечание представляется важным, если учесть, что второе слагаемое в (91) дает поправку в граничные условия, сформулированные для квазиклассических силовых условий за счет учета моментных силовых факторов. Однако имеется целый класс градиентных моделей сред [15], для которых моментные поправки вида $(\sigma_{ijk} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*$ в краевых условиях отсутствуют и статические граничные условия записываются фактически в форме условий классической упругости через квазиклассические напряжения $\tau_i = (\sigma_{ij} - \sigma_{ijk,k}) n_j$. В этом случае в краевых условиях не равно нулю выражение $[\tilde{\sigma}_{ijk,k} n_j] \neq 0$, которое может быть, вообще говоря, произвольным. Поэтому требование симметрии по порядку дифференцирования (симметрии тензора моментов по последним индексам) становится существенным и корректное силовое условие, записанное с учетом указанного свойства симметрии, имеет вид

$$\tau_i = (\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ijk,k}) n_j = t_i^0$$

t_i^0 - известная функция на поверхности тела.

$$\tau_i = (\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ijk,k}) n_j = t_i^0, \quad t_i^0 \text{ - известная функция на поверхности тела.}$$

Замечание

Отметим, что проблема, рассмотренная выше полностью устраняется если все компоненты тензора модулей упругости шестого ранга прежде всего удовлетворяют условию потенциальности. В этом случае в силу дополнительного требования потенциальности для компонент C_{ijklmn}^{-+} и C_{ijklmn}^{+-} имеем $C_{ijklmn}^{+-} = C_{ijklmn}^{-+} = 0$. Рассмотренная проблема остается важной и для бездефектных сред не обладающих в общем случае потенциальностью, т.е. для необратимых процессов.

2.5 Пример формулировки краевых условий с учетом свойства симметрии

Рассмотрим прикладную задачу о деформирования полуплоскости нормальной нагрузкой, приложенной на границе полуплоскости $-\infty < x_1 < \infty, x_2 \geq 0$. Для нее далее рассмотрим аналог решения в градиентной упругости, чтобы выяснить существенность учета условий симметрии. Для этого будем использовать градиентную модель дилатации с вариантом векторной модели, где, как указано в теореме об условиях симметрии, может проявиться эффект потери симметрии и, как следствие, ошибки в решении, если условия симметрии не гарантируются физической моделью.

Сначала кратко формулируется задача о деформирования полуплоскости нормальной нагрузкой.

Слой нагружен поперечной нагрузкой $q(x_1)$. Рассматривается симметричная задача в отношении координаты x_1 . Предполагается, что нагрузка локальна и может быть представлена, например, через интеграл Фурье.

Прикладная плоская задача о нагружении полуплоскости решается при следующих предположениях. Полоса является недеформируемой в направлении продольной оси x_1 . Принимаются следующие кинематические соотношения и соотношения закона Гука

$$\partial u_1 / \partial x_1 = 0, \quad u_2 = w(x_1, x_2), \quad u_{2,2} = w_{,2}, \quad \sigma_2 = E u_{2,2} = E w_{,2}, \quad \sigma_{12} = G w_{,1} \quad (92)$$

Уравнение равновесия для модели (92) записывается в следующем виде

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{E}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0 \quad (93)$$

Граничные значения на поверхности $x_2 = 0$ ставится для напряжений $\sigma_2 = Ew_{,2}$

$$\sigma_2 \Big|_{x_2=0} = q(x_1) \quad (94)$$

Ищется убывающее решение при $x_2 \rightarrow \infty$.

Наиболее просто это решение строится с помощью интегрального косинус-преобразования Фурье. В результате в трансформантах Фурье $\bar{w}(x_1, p)$ следует построить убывающее решение для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\frac{G}{E} p^2 \bar{w} + \bar{w}'' = 0, \quad \bar{w}(x_2, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2) \cos(px_1) dx_1, \quad \bar{w}'' = \bar{w}_{,22}$$

с граничным условием (94), которое записывается в трансформантах с учетом (92)

$$E\bar{w}'(p, x_2) \Big|_{x_2=0} = \bar{q}(p), \quad (95)$$

где p - параметр преобразования Фурье, $\bar{q}(p)$ - косинус-преобразование Фурье для заданной на поверхности нагрузки. Очевидно, что это решение в трансформантах $\bar{w}(x_2, p)$ имеет вид

$$\bar{w}(x_2, p) = -\frac{q(p)}{Er} \exp(-px_2), \quad r^2 = \frac{G}{E} p^2$$

Отметим, что другое уравнение равновесия - проекция на ось x_1 используется для определения напряжения σ_1 путем интегрирования касательных поперечных напряжений $\sigma_{12} = Ew_{,1}$, поскольку это прикладная приближенная модель.

Запишем аналогичную задачу для полуплоскости для достаточно простого варианта векторной градиентной упругости, полагая, что рассматривается дилатационная градиентная упругость.

Для такой модели плотность потенциальной энергии, плотность градиентной части энергии деформации имеют вид

$$\begin{aligned}
2U &= C_{ijkm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + (Kl^2) \theta_k \theta_k, \\
2U_g &= C_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn} = \underbrace{(Kl^2) \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{kn}}_{C_{ijklmn}} u_{i,jk} u_{l,mn}, \quad C_{ijklmn} = (Kl^2) \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{kn}
\end{aligned} \tag{96}$$

Моментные напряжения для рассматриваемой градиентной модели имеет согласно формулам Грина и (96) вид

$$\sigma_{ijk} = C_{ijklmn} u_{l,mn} = (Kl^2) \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{kn} u_{l,mn} = D \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{kn} u_{l,mn} = D \delta_{ij} u_{l,lk} \tag{97}$$

Очевидно, что для принятой физической модели тензор свойств C_{ijklmn} , (96) и тензор моментов не являются симметричными в отношении двух последних индексов.

Из вариационной процедуры для рассматриваемой векторной модели (96) имеем

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} + \sigma_{ijk} \delta u_{i,jk} dV = \\
& - \int_V (\sigma_{ij} - (\tilde{\sigma}_{ijk,k} + \hat{\sigma}_{ijk,k}))_{,j} \delta u_i dV + \int_F [\sigma_{ij} - (\tilde{\sigma}_{ijk,k} + \hat{\sigma}_{ijk,k})] n_j \delta u_i dF + \int_F (Kl^2) u_{l,lk} n_k [\delta u_{j,j}]
\end{aligned} \tag{98}$$

Следовательно, статические краевые условия, следующие из принципа Лагранжа с вариацией потенциальной энергией (98) записываются на квазиклассические напряжения

$$\sigma_{ij} - (\tilde{\sigma}_{ijk,k} + \hat{\sigma}_{ijk,k})$$

а моментные условия формулируются на момент

$$(Kl^2) u_{l,lk} n_k = m$$

или как альтернативные кинематические условия на дилатацию $u_{j,j} = \theta$.

Здесь, как и ранее $\tilde{\sigma}_{ijk,k}$, $\hat{\sigma}_{ijk,k}$ - антисимметричные и симметричные компоненты в отношении последних двух индексов (индексов, связанных с порядком дифференцирования).

Как отмечалось ранее для векторных моделей неучет признака симметрии, указанного ранее может приводить к ошибкам. Покажем это на примере рассматриваемой задачи.

Отметим, что $\tilde{\sigma}_{ijk}$ - являются энергетически несущественными и поэтому для этих составляющих можно использовать представление (97), с амплитудой \tilde{D}

которая может принимать любые значения. Модуль \tilde{D} , является как было указана ранее модулем в энергетически несущественной в компоненте тензора модулей упругости C_{ijklmn}^{-+} в разложении по ортогональным базисам

$$C_{ijklmn} = C_{ijklmn}^{++} + C_{ijklmn}^{+-} + C_{ijklmn}^{-+} + C_{ijklmn}^{--}$$

$$\text{и } \tilde{\sigma}_{ijk} = C_{ijklmn}^{-+} u_{i,jk}.$$

Полагаем, что справедлива кинематические предположения для рассматриваемой задачи, и определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0, \quad \sigma_{22} = Ew_{,2}, \quad \sigma_{12} = Gw_{,1} \\ \sigma_{111} &= (Kl^2)w_{,21}, \quad \sigma_{112} = (Kl^2)w_{,22}, \quad \sigma_{121} = \sigma_{122} = \sigma_{211} = \sigma_{212} = 0 \\ \sigma_{221} &= (Kl^2)w_{,21}, \quad \sigma_{222} = (Kl^2)w_{,22}, \quad (\sigma_{221} = \sigma_{111}, \quad \sigma_{222} = \sigma_{112}) \end{aligned}$$

Уравнение равновесия здесь вместо (93) имеет вид

$$(\sigma_{11} - (\sigma_{111,1} + \sigma_{112,2}))_{,1} + (\sigma_{12} - (\sigma_{121,1} + \sigma_{122,2}))_{,2} = 0$$

Здесь, как мы установили ранее, нарушение симметрии не проявляется и можно формально воспользоваться определяющими соотношениями, чтобы записать уравнения равновесия в перемещениях

$$Gw_{,11} + Ew_{,22} - Dw_{,2112} - Dw_{,2222} = 0 \quad (99)$$

Иначе обстоит ситуация со статическим краевым условием (94) при $x_2 = 0$, которое имеет вид

$$Ew_{,2} - ((\tilde{\sigma}_{221,1} + \hat{\sigma}_{221,1}) + \sigma_{222,2}) = t_2 = q(x_1) \quad (100)$$

где $\tilde{\sigma}_{221} = \tilde{D}w_{,21}$

Корректное статическое условие вместо (100) содержит только симметричную составляющую моментов и имеет вид

$$[Ew_{,2} - (\hat{\sigma}_{221,1} + \sigma_{222,2})] = t_2 = q(x_1) \quad (101)$$

Замечание

Если рассматривать условие (100) то его можно записать не выделяя симметрии в виде

$$Ew_{,2} - (\sigma_{221,1} + \sigma_{222,2}) = t_2 = q(x_1)$$

Если же выделять симметрию, то в силу принятой кинематики $\hat{\sigma}_{221,1} = (1/2)(\sigma_{221,1} + \sigma_{212,1}) = (1/2)\sigma_{221,1}$, $\sigma_{212,1} = 0$

Следовательно корректное статическое условие вместо записанного выше некорректного равенства $Ew_{,2} - (\sigma_{221,1} + \sigma_{222,2}) = t_2 = q(x_1)$ имеет вид

$$Ew_{,2} - \left(\frac{1}{2}\sigma_{221,1} + \sigma_{222,2}\right) = t_2 = q(x_1)$$

В этом примере различие в статических условиях имеет место из-за навязывания кинематики (92) в модели дилатации.

Рассмотрим и иную трактовку. Моментное статическое краевое условие также не изменяется из-за требований симметрии и имеет вид

$$w_{,22} = 0 \tag{102}$$

Соответствующее неклассическое кинематическое условие, когда дилатация $\theta = 0$ равна нулю на краю полуплоскости имеет вид

$$w_{,2} = 0 \tag{103}$$

Введем теперь еще функцию погрешности, которая может появиться если использовать некорректное краевое условие (100)

$$\Omega = w_c - w_{nc}$$

где w_c решение краевой задачи с корректным условием (101), а w_{nc} решение краевой задачи с некорректным условием (100)

Нетрудно видеть, что $\Omega = w_c - w_{nc}$ удовлетворяет однородному уравнению (99)

$$G\Omega_{,11} + E\Omega_{,22} - D\Delta\Omega_{,22} = 0$$

Моментные краевые условия (102) и альтернативные кинематические (103) также записываются как однородные через Ω .

Однако, статическое условие на функцию Ω записывается очевидно в виде $E\Omega_{,2} - (Kl^2)(\Omega_{,211}/2 + \Omega_{,222}) = \tilde{D}w_{,211}/2$ (104)

где правая часть определяется по корректному решению.

Следовательно, в случае задания на краю $x_2 = 0$ момента. Краевые условия имеют вид

$$\begin{cases} E\Omega_{,2} - (Kl^2)(\Omega_{,211}/2 + \Omega_{,222}) = \tilde{D}w_{,211}/2 \\ \Omega_{,22} = 0 \end{cases} \quad (105)$$

А в случае, когда равна нулю дилатация на краю $x_2 = 0$, получим задачу на функцию Ω с краевыми условиями

$$\begin{cases} \Omega_{,222} = (\tilde{D}/D)w_{,211}/2 \\ \Omega_{,2} = 0 \end{cases} \quad (106)$$

В любом случае и задача (104), (105), и задача (104),(106) являются задачами с краевыми неоднородными условиями которые приводят к решения не равным тождественно нулю. Более того эти решения могут быть как угодно большими, ибо амплитуда (\tilde{D}/D) может принимать любые значения.

Очевидно, что если $\tilde{D} = 0$, то равна нулю и C_{ijklmn}^{--} , что имеет место для моделей с тензорами модулей упругости, удовлетворяющих симметрии по индексам связанным с порядком дифференцирования.

Кроме того, некорректность может проявиться в силу введенных кинематических соотношений (кинематическая модель) в прикладных задачах (см. замечание).

Следовательно, мы доказали важность формулировки краевых условий с учетом свойства симметрии.

2.6 Заключение

Исследовано условие асимметрии для градиентной теории, показано что в отличии от теории упругости есть отдельный специфический вид симметрии, связанный с порядком дифференцирования по последним индексам. Показаны примеры задач где не учет этого условия может привести к ошибкам.

Установлено что существует единственная теория, сохраняющая признаки модели Мидлина I и Мидлина II.

Показано, что не все прикладные теории удовлетворяют признаку симметрии, например модель межфазного слоя или обобщенная модель дилатации.

Впервые поставлен вопрос, важен ли признак симметрии, поскольку при полной вариационной постановке задачи тензор модуль упругости раскладывается на симметричные и антисимметричные тензоры в отношении индексов, и антисимметричные тензоры всегда энергетически не существенны, то есть за счет свертки они обнуляются. Таким образом при решении задачи прямыми вариационными методами можно не учитывать это свойство.

Представлено условие корректности, которое показывает, что условие надо учитывать если задача решается не прямым методом минимизации градиентного функционала и записаны явные условия корректности.

Установлено, что учет дополнительного признака симметрии по отношению к классическим теориям упругости в краевых условиях является существенным и определяет класс корректных моделей градиентной упругости. Фактически это означает необходимость ревизии и проверки на корректность всех прикладных градиентных модели упругости. Исключением являются модели соответствующие модели Миндлина формы I.

Выделен класс краевых задач градиентной теории упругости, в которых условие симметрии по порядку дифференцирования должно обязательно учитываться путем введения дополнительного требования симметрии к моментным напряжениям. К ним относятся так называемые векторные модели, где статические краевые условия ставятся на те же обобщенные напряжения (totalstresses), что входят в уравнения равновесия. Установлено, что учет симметрии в граничных статических условиях и на ребрах обязателен, если поверхность тела кусочно гладкая и имеет кривизну. Показано что неучёт условий симметрии приводит к тому что, решение для напряжений (например, Коши) будет зависеть от энергетически несущественных физических констант, которые могут приводить к значительным ошибкам.

ГЛАВА 3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

3.1 Введение

В данной главе рассматривается проблема сингулярных решений в классической упругости и возможности регуляризации сингулярных решений, используя варианты градиентных моделей упругости. Приводятся примеры задач мембраны и Фламана и Буссенеско, штампа и сингулярных трещин.

Показывается, что большинство данных задач можно перевести к задачам концентрации напряжений.

3.2 Примеры сингулярных задач упругости

Рассмотрим несколько примеров задач классической упругости.

Первый и простейший пример задачи классической упругости, решение которой является сингулярным уже в перемещениях является задача о мембране [26].

Пусть имеется изотропная круглая мембрана, нагруженная давлением p , зависящем от радиальной координаты r , и усилиями t , создающими предварительное натяжение мембраны.

Очевидно что уравнение равновесия такой мембраны имеет вид

$$t(rw'' + w') = -p(r) \quad (107)$$

$$\text{где } w' = dw/dr. \quad (108)$$

Это уравнение легко получается из равновесия кольцевого элемента, с радиальным размером $a = dr$, определяющего прогиб.

Известно, что если мембрана нагружена в центре сосредоточенной силой P , давление $p(r)$ может быть выражено через дельта-функцию, т.е. $p(r) = P\delta(r)$

$$w = \frac{P}{2\pi t} \ln \frac{R}{r} \quad (109)$$

Решение (109) является сингулярным и обращается в бесконечность при $r = 0$. Очевидно, что решение (109) не имеет физического смысла, так как прогиб реальной мембраны не может быть бесконечно большим.

Решение является не вполне корректным и в физическом отношении. Действительно, производная прогиба (108) также обращается в бесконечность при $r = 0$, т.е. решение (108) не является дифференцируемым в этой точке, и вообще не имеет физического смысла, так как уравнение выведено в предположении о дифференцируемости прогиба везде, а здесь дифференцируемость нарушается при $r = 0$.

Отметим, что указанный пример относится в общем случае ко многим физическим процессам которые в квазистатической постановке определяются гармоническим: уравнением- ($k\Delta u = q$, где Δ – оператор Лапласа)- теплопроводности, диффузии, гидродинамике (для скоростей) в этом случае градиентном $t_i = kgrad(u)$ задается определяющее соотношение для теплового потока, потока концентрации, давления и пр.

Другим примером с сильной сингулярностью является задача о напряженном состоянии сплошного в общем случае сферически ортотропного шара, нагруженного по наружной поверхности $r = R$ давлением q .

В таком шаре отличны от нуля только радиальные напряжения σ_r , которые определяются уравнением равновесия [27].

$$\frac{d}{dr}(r^2 \sigma_r) = 0$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $\sigma_r(r = R) = -q$, имеет вид

$$\sigma_r = -\frac{qR^2}{r^2}$$

3.3 Задача Фламана и Буссенеско

Задача Буссенеска соответствует действию сосредоточенной силы на полупространство, ее плоский аналог соответствует действию сосредоточенной силы на полуплоскость. Решение плоской задачи Буссенеска получено с помощью представления Папковича-Нейбера и потенциалов, построенных на основе фундаментального решения плоского уравнения Лапласа:

$$\mathbf{u}(P) = \frac{\mathbf{f}}{\mu} + \frac{\nabla(\phi - \mathbf{r} \mathbf{f})}{4\mu(1-\nu)}, \quad \nabla^2 \mathbf{f}(P) = \mathbf{h}(P), \quad \nabla^2 \phi(P) = \mathbf{r} \mathbf{h}(P), \quad (110)$$

где $\mathbf{h}(P)$ представляет собой вектор сил, действующих на тело. Для задачи Буссенеска $\mathbf{h}(P)$ – векторная дельта-функция, действующая в направлении одной из осей x или y , а $\mathbf{f}(P)$ – соответствующее фундаментальное решение уравнения Лапласа, действующее в направлении одной из осей (функция точечного источника):

$$f_x(P) = A \ln r, \quad f_y(P) = 0 \quad \text{– для источника в направлении оси } x;$$

$$f_x(P) = 0, \quad f_y(P) = A \ln r \quad \text{– для источника в направлении оси } y.$$

Константа A выбирается из условия нормировки для напряжений так, чтобы интеграл по границе полуплоскости был равен 1. Решение для напряжений и перемещений получено для задачи Фламана в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{2x^3}{\pi r^4}, \quad \sigma_{xy} = \frac{2x^2y}{\pi r^4}, \quad \sigma_{yy} = \frac{2xy^2}{\pi r^4}, \quad (111)$$

$$u_x = \frac{1}{2\pi\mu} \left(2(1-\nu) \ln r - \frac{x^2}{r^2} \right), \quad u_y = \frac{1}{2\pi\mu} \left((1-2\nu) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{r^2} \right)$$

Как видно, эти решения имеют логарифмическую особенность уже для перемещений.

Рассмотрим перемещение u_x на плоской границе $x=0$

$$u_x = \frac{1}{2\pi\mu} (2(1-\nu) \ln r)$$

И возьмем производную по координате y , получим

$$\frac{du_x}{dy} = P \frac{(1-\nu)}{\pi \mu y} \quad (112)$$

Производная в точке приложения силы становится бесконечно большой, перпендикулярной к плоскости нагружения для любой силы P что совсем нефизично.

Для пространственной задачи Буссенеска ищется решение (перемещения) для случая нагружения пространства локальной силой, действующей в определенном направлении.

Как известно [13,14], решение проблемы дается тензором Грина для уравнения Ламе

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{L}(\mathbf{U}) = \mu \Delta \mathbf{U} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} \quad (113)$$

Решения уравнения Ламе (113), как известно [12,13], могут быть представлены в виде дифференциального выражения через вспомогательные потенциалы ϕ, \mathbf{f} , удовлетворяющие уравнению Пуассона

$$\mathbf{U}(P) = \frac{\mathbf{f}(P)}{\mu} + \frac{\nabla(\phi - \mathbf{r}\mathbf{f})}{4\mu(1-\nu)}, \quad \Delta \mathbf{f} = \mathbf{h}(P), \quad \Delta \phi = \mathbf{r}\mathbf{h}(P) \quad (114)$$

Здесь $\mathbf{h}(P)$, представляет собой вектор плотности объемных сил, действующих на упругое тело в точке P ; \mathbf{r} – радиус-вектор из начала координат в точку $P = (x_1, x_2, x_3)$.

Тензор Грина представляет собой три вектор-столбца $\mathbf{G}_i = \{G_{ik}\}$, являющихся откликом вектора перемещений с компонентами U_k на действие сосредоточенной силы в направлении одной из координатных осей x_i . Вектору сосредоточенной силы, действующей в направлении одной из координатных осей x_i соответствует вектор потенциал \mathbf{f}_i в представлении Папковича–Нейбера (114).

Представление (114) является общим и позволяет записать фундаментальное решение уравнений Ламе (113) с помощью фундаментального решения уравнения Лапласа через гармонический векторный потенциал \mathbf{f} , ($\varphi = 0$) действующий в определенном направлении. Как известно [13,14], тензор Грина для уравнения Ламе представляет собой три вектор-столбца $\mathbf{G}_i = \{G_{ik}\}$,

являющихся откликом вектора перемещений с компонентами U_k на действие сосредоточенной силы в направлении одной из координатных осей x_i . Вектору сосредоточенной силы, действующей в направлении одной из координатных осей x_i соответствует вектор потенциал \mathbf{f}_i в представлении Папковича–Нейбера (114).

Поскольку фундаментальным решением уравнения Лапласа в 3D является функция $(4\pi r)^{-1}$, то компоненты тензора Грина $\mathbf{G}_i = \{G_{ik}\}$, являющиеся откликом на сосредоточенную силу, действующую в направлении оси x_i , соответствуют потенциалу $\mathbf{f}_i = \{\delta_{ik}/(4\pi r)\}$. Подставляя это выражение в (114), приводим тензор Грина (см. [14]) к дифференциальной суперпозиции фундаментальных решений бигармонического r и гармонического r^{-1} уравнений

$$G_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_k} \right) \quad (115)$$

Следовательно, решение для перемещений имеет в рассматриваемой точке сингулярность.

3.4 Штамп

Пусть упругое полупространство нагружается силой P в направлении координаты z , приложенной к абсолютно жесткому круговому цилиндрическому штампу с основанием $z=0$ с радиусом a . Как и в задаче Буссенеска, существенными для дальнейшего являются распределение контактных напряжений по плоскости $z=0$. Известно классическое решение такой задачи [2]

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{при } 0 \leq r \leq a \quad \text{и} \quad \sigma_z = 0 \quad \text{при } r \geq a \quad (116)$$

Перемещение точек плоскости $z=0$ по оси z определяется зависимостью

$$w = \frac{P(1-\nu^2)}{2aE} \quad \text{при } 0 \leq r \leq a, \quad w = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi a E} \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \quad \text{при } r \geq a \quad (117)$$

Как следует из равенства (116) на границе штампа (при $\bar{r} = \lambda$) контактное напряжение обращается в бесконечность.

Перемещение штампа по оси z , определяемое первым равенством (117), имеет вид

$$w = \text{constant} \quad \text{при } 0 \leq r \leq a$$

Нетрудно убедиться, что и здесь производная от прогиба, определяемого (117) при $r \geq a$ имеет вид

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{C}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \quad (118)$$

Эта зависимость определяет угол наклона касательной к деформированной поверхности $z = 0$. На границе штампа (при $r = a$ касательная оказывается вертикальной, то есть при сколь угодно малой силе P она поворачивается на 90° . Этот результат позволяет усомниться в справедливости обсуждаемого решения, так как линейная теория упругости, на основе которой он получен, несправедлива при таких углах поворота. Как и в задаче Буссенеска, существенными для дальнейшего являются распределение контактных напряжений по плоскости $z = 0$

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{при } 0 \leq r \leq a \quad \text{и} \quad \sigma_z = 0 \quad \text{при } r \geq a \quad (119)$$

и перемещений по оси z

$$w = \frac{P(1 - \nu^2)}{2aE} \quad \text{при } 0 \leq r \leq a, \quad w = \frac{P(1 - \nu^2)}{\pi a E} \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \quad \text{при } r \geq a \quad (120)$$

точек плоскости $z = 0$ [2]. Введем относительные величины

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_0}, \quad \sigma_0 = \frac{P}{\pi a^2}, \quad \bar{w} = \frac{2aEw}{P(1 - \nu^2)}, \quad \bar{r} = \frac{r}{s}, \quad \lambda = \frac{a}{s} \quad (121)$$

где s , как и ранее, некоторый пока неизвестный параметр. С учетом обозначений (121) контактное напряжение (119) принимает вид

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - \bar{r}^2}} \quad \text{при } 0 \leq \bar{r} \leq \lambda \quad (122)$$

Зависимость $\bar{\sigma}_z(\bar{r})$ показана на фиг. 3 штриховой линией. Как следует из равенства (122) и фиг. 3, на границе штампа (при $\bar{r} = \lambda$) контактное напряжение обращается в бесконечность.

С учетом обозначений (121) перемещение штампа по оси z , определяемое первым равенством (120), имеет вид

$$\bar{w} = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq \bar{r} \leq \lambda \quad (123)$$

а перемещение точек плоскости $z = 0$ вне штампа, т.е. второе равенство (120) приводится к форме

$$\bar{w} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\bar{r}}\right)^2} \quad \text{при} \quad \bar{r} \geq \lambda \quad (124)$$

Производная этого выражения

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} = -\frac{2\lambda}{\bar{r}\sqrt{\bar{r}^2 - \lambda^2}} \quad (125)$$

определяет угол наклона касательной к деформированной поверхности $z = 0$. Как следует из равенства (125), на границе штампа (при $\bar{r} = \lambda$) касательная оказывается вертикальной, то есть при сколь угодно малой силе P она поворачивается на 90° . Этот результат позволяет усомниться в справедливости обсуждаемого решения, так как линейная теория упругости, на основе которой он получен, несправедлива при таких углах поворота.

3.5 Классическое сингулярное решение задачи о трещине

Общие выражения для напряжений и перемещений в плоской задаче для пластины с трещиной имеют вид [1]

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma [\operatorname{Re} f'(z) + y \operatorname{Im} f''(z)], \quad t_y = \sigma [\operatorname{Re} f'(z) - y \operatorname{Im} f''(z)] \\ t_{xy} &= -\sigma y \operatorname{Re} f''(z) \end{aligned} \quad (126)$$

$$v_x = \frac{\sigma}{2G} [(1 - 2\nu) \operatorname{Re} f(z) + y \operatorname{Im} f'(z)], \quad v_y = \frac{\sigma}{2G} [2(1 - \nu) \operatorname{Im} f(z) - y \operatorname{Re} f'(z)] \quad (127)$$

Здесь G и ν - модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала пластины, $z = x + iy$ - комплексная переменная и $(\dots)' = d(\dots)/dz$.

Для пластины с конечной трещиной, расположенной вдоль оси z и длиной $2c$ [1] кроме представления (1) удобно использовать гармонический $\varphi(z)$ и бигармонический... $\psi(z)$ потенциалы

$$\phi(z) = f'(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad \psi(z) = yf''(z) = \frac{yc^2}{\sqrt{(z^2 - c^2)^3}} \quad (128)$$

Напряжения (1.1) выражаются через эти функции следующим образом:

$$t_x = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re}(\phi + \psi), \quad t_y = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re}(\phi - \psi), \quad t_{xy} = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Im} \psi \quad (129)$$

Нетрудно записать и выражения для перемещений. Таким образом, напряженно-деформированное состояние пластины с трещиной определяется в классической теории упругости равенствами (126) (или (129)) и (127).

Для анализа полученного решения запишем перемещение на оси трещины x принимая $y = 0$, [1]

$$v_y^0 = \frac{\sigma}{G} (1 - \nu) \sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{при } 0 \leq x \leq c \quad \text{и} \quad v_y = 0 \quad \text{при } x \geq c \quad (130)$$

Равенство (130) показывает, что контур трещины в деформируемом состоянии является эллипсом, определяемым уравнением

$$v_y^2 + k^2 x^2 = k^2 c^2, \quad k = (1 - \nu) \sigma / G$$

В точке $x = c$ касательная к контуру эллипса вертикальна, то есть при сколь угодно малом напряжении она поворачивается на 90° по сравнению с исходным положением, в котором она горизонтальна. Такой результат снова вызывает удивление с точки зрения физического смысла и положений теории упругости.

В дальнейшем разделе кратко обсудим процесс регуляризации в градиентных решениях и приведем соответствующие простейшие регулярные градиентные решения.

3.6 Об особенностях операторов уравнений равновесия градиентных теорий упругости

В современной научной литературе широко обсуждается проблема сингулярностей в задачах теории упругости и механики трещин [78-80].

Сингулярность решений для напряжений в линейной теории упругости в вершине трещины исключает применение традиционных критериев прочности тел с концентрацией напряжений. Более того полученные формально

сингулярные решения не только противоречат физическому смыслу, но и постулатам теории упругости. Подобные парадоксы еще требуют своего объяснения [80]. Градиентная упругость позволяет описывать размерные эффекты [19] и дает регуляризацию сингулярных решений дифференциальных уравнений теории упругости [76, 81]. В связи с этим было бы вполне естественно ожидать развития градиентной механики трещин. Тем не менее, не сингулярные решения в градиентной механике трещин построены к настоящему времени лишь для тестовых задач, соответствующих трещинам моды III.

Для общей теории градиентной деформации вариационная модель описывается плотностью потенциальной энергии

$$2w = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + C_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn}$$

где u_i - вектор перемещений, ε_{ij} тензор деформаций, C_{ijkl} and C_{ijklmn} - классический и градиентный модули упругости соответственно, имеющие различную размерность. Силовая модель определяется тензором напряжений Коши σ_{ij} и тензором моментных напряжений третьего ранга μ_{ijk} , которые, очевидно, легко записываются с помощью формул Грина.

$$\sigma_{ij} = \partial w / \partial \varepsilon_{ij}, \quad \mu_{ijk} = \partial w / \partial u_{i,jk}, \quad (u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j)$$

В общем случае физические свойства изотропной градиентной теории описываются с помощью семи физических постоянных, из которых две являются постоянными Ламе, а пять других определяют тензор градиентных модулей шестого ранга.

Известно, что тела, являющиеся линейными, изотропными, классически упругими с граничными условиями, не зависящими от времени, ведут себя в соответствии с обобщенным уравнением равновесия Навье-Коши, записанным в терминах смещений (без наличия объемных сил):

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) = 0$$

Где ∇ - оператор градиента, и \mathbf{L} - классический оператор Ламе.

Другая, координатная форма записи записанного выше уравнения равновесия имеет вид (см. гл 1).

$$L_{ij}(u_j) = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} = 0$$

Для общих градиентных моделей, как было указано ранее разрешающее уравнение может быть записано в виде

$$H_{ij} L_{ik}(u_k) = 0, \quad H_{ij} = \delta_{ij} - l_1^2 \delta_{ij} \Delta - l_2^2 \partial_i \partial_j$$

H_{ij} - обобщенный оператор Гельмгольца, l_1^2 , l_2^2 - масштабные параметры, соответствующие изменению объема и объема со сдвигом соответственно. Если полагать, что масштабные параметры изменения объема и сдвига одинаковы (т.е. имеет место однородность масштабных эффектов) то следует принять $l_2^2 = 0$.

Тогда разрешающее уравнение принимает вид

$$(\delta_{ij} - l_1^2 \delta_{ij} \Delta) L_{ik}(u_k) = 0, \quad (1 - l_1^2 \Delta) [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}] = 0 \quad (131)$$

Последнее уравнение чрезвычайно важно и очень часто используется для приложений. Оно является фактически главным уравнением для процессов регуляризации, проводимой в рамках градиентной упругости.

Для решения прикладных задач, как правило, используются однопараметрические модели. Уравнение (131) полностью соответствует и Модели Айфантиса [77].

Эта модель является одной из наиболее распространенной в приложениях является моделью среды, в которой тензоры напряжений и моментов определяются формулами

$$\tau_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \mu_{ijk} = s^2 (\lambda \theta_{,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,k})$$

и соответственно, упругие модули имеют вид

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad C_{ijklmn} = s^2 \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + s^2 \mu (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn}),$$

здесь λ, μ - коэффициенты Ламе, s - масштабный параметр, δ_{ij} - дельта Кронекера.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения в такой модели записываются через тензор «классических» напряжений [77]

$$(\tau_{ij} - \mu_{ijk,k})_{,j} = 0 \quad (132)$$

$$\text{или } \sigma_{ij,j} = 0 \quad \sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k} = \tau_{ij} - s^2 \tau_{ij,kk} = (1 - s^2 \Delta) (\lambda \theta_{,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,k}), \quad \theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$$

где $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$, Δ - оператор Лапласа

Нетрудно видеть, что в перемещениях уравнения равновесия имеют вид (131).

Примечательно, что относительно квазиклассических напряжений σ_{ij} , уравнения равновесия совпадают с классическими.

3.7 Регулярные решения

Особенность представления напряжений (132) позволяет ввести следующую процедуру: сначала предлагается решать задачу классической упругости для обобщенных напряжений σ_{ij} , а затем локальные поля находить, решая соответствующие уравнения Гельмгольца

$$\tau_{ij} - s^2 \Delta \tau_{ij} = \sigma_{ij} \quad (133)$$

Отметим, что в работах [82, 83] где приводится иной вариант градиентной упругости показано, что уравнениями (133) вводятся обобщенные нелокальные решения, построенные в форме осреднений по представительному фрагменту материала с учетом того, что при осреднении по локальным координатам учитывались не только средние значения соответствующих функций, но и их локальные производные. Таким образом, нелокальные решения определяются не только значениями в рассматриваемой точке среды, но и соответствующими производными. В обобщенной теории закон Гука записывается на обобщенные («классические») напряжения, что вполне оправдано физически. Как нетрудно видеть для них же выполняются уравнения равновесия. Что касается напряжений τ_{ij} , то их важность не отрицается. Более того, предполагается, что именно эти напряжения важны для оценки прочности и именно они участвуют в критериях прочности. Эти напряжения находятся после определения обобщенных напряжений («классических») τ_{ij} из уравнений, $\tau_{ij} - s^2 \Delta \tau_{ij} = \sigma_{ij}$, так, чтобы они задавали не сингулярное поле напряжений.

В дальнейшем уравнение (3) будет основным при обсуждении проблемы регуляризации

Пусть рассматривается решение уравнения

$$\phi - s^2 \nabla^2 \phi = \phi_0 \quad (134)$$

где функция ϕ_0 имеет сингулярность заданного специального вида.

Для регуляризации, т.е. построения регулярного решения записанного уравнения используется следующее утверждение о компенсации сингулярностей функции, стоящей в правой части этого уравнения, доказанное в работе [84].

Нам требуется скомпенсировать сингулярности за счет разложения искомого решения по специальным фундаментальным решениям уравнения Гельмгольца. Утверждается, что можно определить такие фундаментальные системы функций, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца и имеют особенность в начале координат порядка $w^{-k/2}$, $w = x + iy$ или $w = r e^{i\theta}$.

Такие функции, со свойством затухающих решений на бесконечности можно построить [84] с помощью радиальных множителей. Соответствующая фундаментальная система функций уравнения Гельмгольца будет иметь вид:

$$\chi_n(w, \bar{w}) = \hat{h}_n(r) w^{-n-1/2}. \quad (135)$$

Запишем несколько первых функций (135):

$$\hat{h}_0(r) = e^{-r/s}, \quad \hat{h}_1(r) = -\frac{1}{2}(r/s+1)e^{-r/s}, \quad \hat{h}_2(r) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{r}{s}\right)^2 + 3\left(\frac{r}{s}+1\right)\right)e^{-r/s}. \quad (136) \text{ Коэф}$$

функции:

$$\chi_0 = e^{-r/s} w^{-1/2}, \quad \chi_1 = (r/s+1)e^{-r/s} w^{-3/2}, \quad \chi_2 = \left(\left(\frac{r}{s}\right)^2 + 3\left(\frac{r}{s}+1\right)\right)e^{-r/s} w^{-5/2}.$$

Таким образом, если функция, стоящая в правой части, имеет сингулярность $\square w^{-1/2}$, то компенсирующее разложение решения однородного уравнения имеет вид

$$\chi^\pm = e^{-r/s} (w^\pm)^{-1/2}$$

Общее решение уравнения (134) записывается в виде суммы частного решения и общего решения, представленного в виде разложения по системе фундаментальных решений типа, амплитуда которых выбирается так, чтобы скомпенсировать сингулярность. В рассматриваемом последнем случае, если $\phi_0 = w^{-1/2}$ регулярное решение имеет вид

$$\phi = (1 - e^{-r/s})(w)^{-1/2}$$

Эта идея реализуется в частных задачах классической упругости, рассмотренных ранее.

3.8 Некоторые регулярные обобщенные решения сингулярных задач классической упругости

3.8.1 Регулярное решение для мембраны строится как решение неоднородного уравнения Гельмгольца $W = w - s^2 \Delta w$, $W = \frac{P}{2\pi t} \ln \frac{R}{r}$ с масштабным параметром равным s^2

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} - w = -\frac{P}{2\pi t} \ln \frac{R_s}{\rho}, \quad \rho = \frac{r}{s}, \quad R_s = \frac{R}{s}$$

Для мембраны конечных размеров с граничным условием $w(R) = 0$ общее регулярное везде в области занятой мембраной, решение имеет вид

$$w(\rho) = \frac{P}{2\pi t} \left[\ln \frac{R_s}{\rho} - K_0(\rho) + \frac{K_0(R_s)}{I_0(R_s)} I_0(\rho) \right]$$

где $I_0(\rho)$, $K_0(\rho)$ модифицированная функция Бесселя и Функция Макдональда

3.8.2 Задача Буссинеска. Сингулярное решение для функции Грина в этой проблем имеет вид

$$G_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_k} \right)$$

И может быть записано через гармоническую функцию $\phi = r^{-1}$ и бигармоническую функцию $\psi(r) = r$ [85].

$$\tilde{G}_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\delta_{ik} \phi - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} \right),$$

Соответственно регулярные решения, соответствующие этим функциям, находятся как затухающие регулярные решения уравнений

$$\phi - s^2 \Delta \phi = r^{-1}, \quad \psi - s^2 \Delta \psi = r$$

найдем сначала частные решения уравнения Гельмгольца $\phi^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$,

компенсирующие правую часть r^{-1} и r в (4.2). Затем, в качестве общего решения однородного уравнения Гельмгольца добавим затухающее на бесконечности фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $h_0 = e^{-r/s}/r$, подобрав коэффициент при нем так, чтобы скомпенсировать особенности функций $\phi^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$

Нетрудно проверить, что

$$\phi^{(0)} = r^{-1} \text{ и } \psi^{(0)} = r + s^2 \Delta r = r + 2s^2/r$$

Общие решения для функции ϕ и ψ со сглаженными особенностями определяемыми функцией r^{-1} строятся путем добавления соответствующих фундаментальных решений $-e^{-r/s}/r$ и $-2s^2 e^{-r/s}/r$:

$$\phi(r) = \frac{1}{r} - h_0(r), \quad \psi(r) = r + 2s^2 \left(\frac{1}{r} - h_0(r) \right), \quad h_0(r) = \frac{e^{-r/s}}{r}$$

Регулярное решение для функции Грина имеет в результате вид

$$\tilde{G}_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\delta_{ik} \left(\frac{1}{r} - h_0 \right) - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(r + 2s^2 \left(\frac{1}{r} - h_0 \right) \right) \right]$$

Нетрудно проверить, что Обобщенный тензор Грина \tilde{G}_{ik} не имеет особенностей в начале координат, поскольку все коэффициенты в разложении (4.6), начиная с s^{-2} , обращаются в нуль, и принимает там конечное значение $\tilde{G}_{ik}(0) = s^{-1} (\delta_{ik} / (12\pi\mu))$.

3.8.3 Регулярное решение для штампа.

Для построения регулярного решения для штампа, следует согласно модели Айфантиса (3) получить регулярное решение для неоднородного уравнения Гельмгольца, правая часть которого является классическим решением для напряжений $\bar{\sigma}_z$ в осесимметричной задаче об цилиндрическом штампе, нагруженном силой P

$$\bar{\sigma}_z'' + \frac{1}{\bar{r}} \bar{\sigma}_z' - \bar{\sigma}_z = \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - \bar{r}^2}}$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_0}, \quad \sigma_0 = \frac{P}{\pi a^2}, \quad \bar{w} = \frac{2aEw}{P(1-\nu^2)}, \quad \bar{r} = \frac{r}{s}, \quad \lambda = \frac{a}{s}$$

Регулярное решение этой проблемы найдено в работе [86] и имеет вид

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_z^0 I_0(\bar{r}) + \frac{\lambda}{2} \left[I_0(\bar{r}) \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{r} K_0(\bar{r}) d\bar{r}}{\sqrt{\lambda^2 - \bar{r}^2}} - K_0(\bar{r}) \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{r} I_0(\bar{r}) d\bar{r}}{\sqrt{\lambda^2 - \bar{r}^2}} \right]$$

Контактное напряжение, определяемое этим решением, не имеет особенностей на границе штампа и при уменьшении распределяется по радиусу более равномерно чем сингулярное классическое решение.

3.9 Градиентные не сингулярные решения в механике трещин.

Модельная задача

Рассмотрим модельную задачу для трещины нормального отрыва, сформулированную для среды, недеформируемой в направлении продольной оси. Трещина расположена также в направлении продольной оси ОХ так что разрез трещины располагается при $x > 0$.

Берега трещины при $x > 0$ (при $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$, угол отсчитывается против часовой стрелки от верхней границы трещины) свободны от нормальных σ_{yy} и касательных σ_{xy} напряжений

Однородные напряжения приложены на бесконечности в направлении оси ОУ. Используются следующие кинематические соотношения для вектора перемещений

$$u_i Y_i = u(x, y), \quad u_i X_i \equiv 0 \quad (137)$$

Напряжения имеют вид (коэффициент Пуассона предполагается равным нулю)

$$\sigma_{yy} = (2\mu + \lambda)u_{,y}, \quad \sigma_{xy} = Gu_{,x} \quad (138)$$

и удовлетворяют уравнению равновесия

$$(\sigma_{yy})_{,y} + (\sigma_{xy})_{,x} = 0 \quad (139)$$

Следовательно, перемещение u в классической постановке является решением гармонического уравнения

$$\nabla^2 u = 0, \quad (140)$$

Записанного в координатах $\bar{x} = x\sqrt{(2\mu + \lambda)/\mu}$, y

Соответственно классическое сингулярное решение для рассматриваемой модельной задачи, записанное в полярных координатах, имеет вид

$$u(r, \phi) = 2[K_I / (2\pi)^{1/2}]r^{1/2} \text{Cos}(\phi / 2) / (2\mu + \lambda), \quad \sigma_{yy} = [K_I / (2\pi)^{1/2}]r^{-1/2} \text{Sin}(\phi / 2), \quad (141)$$

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + y^2}, \quad \phi = \text{Arctg}(y / \bar{x})$$

Полученное решение соответствует приближенной модели волокнистого, однонаправленного композита (137)-(140)

Нетрудно проверить, что для записанного решения касательные напряжения τ равны нулю при $y = 0, x < 0$.

Для обобщенной теории упругости, уравнение равновесия (139) записывается относительно обобщенных нормальных и касательных напряжений. Нетрудно показать, что в этом случае использование модели Айфантиса (или подхода Васильева В.В.) сводится к решению проблемы Гельмгольца относительно локальных напряжений t_y , т.е. сводится к решению неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$t_y - s^2 \Delta t_y = \sigma_{yy}, \quad (142)$$

где $\sigma_y(r, \phi) = K_I r^{-1/2} \text{sin}(\phi/2)$

Правая часть уравнения (142) совпадает с классическим решением для данной постановки (141) с заданной сингулярностью $r^{-1/2}$ в вершине трещины. Неклассическое краевое условия для искомым напряжений t_y сводится, очевидно, к выполнению условия

$$t_y = 0 \quad (143)$$

на свободных берегах трещины, включая вершину трещины.

Асимптотическое решение задачи (143) имеет следующий простой вид:

$$t_y = [K_I / (2\pi)^{1/2}]s^{-1/2} \{z^{-1/2} - (2/\pi)^{1/2} K_{1/2}(z)\} \text{sin}(\phi/2), \quad z = r/s \quad (144)$$

Это решение всюду регулярное, и имеет в пределе при $r \rightarrow \infty$ классическую асимптотику.

На рисунке представлены зависимости асимптотического решения для напряжений (14), $\bar{\sigma} = t_y / \bar{K}_I$, $\bar{K}_I = K_I / (2\pi)^{1/2}$ показывающие, что напряжения не имеют особенности в вершине трещины. Графики построены для трех различных значений масштабного параметра s .

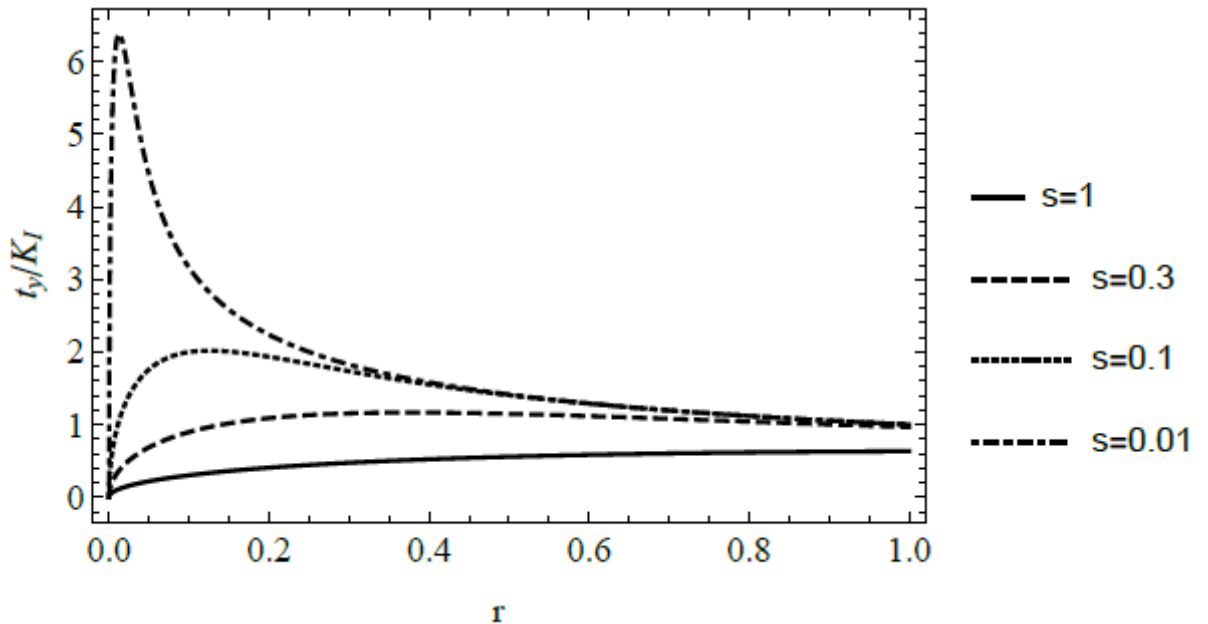


Рис. 1 – Распределение не сингулярных напряжений в окрестности вершины трещины.

Так как коэффициент интенсивности пропорционален действующему напряжению, то можно написать

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$$

Нетрудно показать, что такое соотношение позволяет перейти от точного решения для конечной трещины длиной $2a$, находящейся под действием поперечной нагрузки σ_0 к классическому сингулярному решению в локальных координатах, связанных с вершиной трещины.

Тогда решение (14) запишется в виде

$$t_y = [\sigma_0 / \sqrt{2}](a/s)^{-1/2} \{z^{-1/2} - (2/\pi)^{1/2} K_{1/2}(z)\} \sin(\varphi/2), \quad z = r/s$$

Следовательно, кривые на рисунке 1 можно трактовать как нормированный коэффициент концентрации напряжений.

Замечание по поводу граничных условий.

Мы ограничиваем наше рассмотрение задачами со статическими краевыми условиями. Все приведенные выше задачи относятся к этому классу проблем, включая задачи механики трещин.

Многие из задач решаемых с применением модели Айфантиса и уравнений решаются в предположении, что при формулировке статических краевых условий граничные условия формулируются на квазиклассические напряжения σ_{ij} . Однако в соответствии с вариационной моделью статические краевые условия иные. На прямолинейных границах они имеют вид (см. (25) в главе, посвященной градиентным теориям)

$$(\tau_{ij} - \mu_{ijk,k})n_j - \mu_{ijk,j}n_k + \mu_{ijk,l}n_l n_k n_j = t_i$$

Если граничные условия формируются на квазиклассические напряжения как в некоторых редуцированных моделях (см. рассмотренный пример модельной трещины) или в модели типа В.В.Васильева или в векторных моделях, то можно показать, что в задачах о трещинах граничные условия для локальных искомым напряжений тоже выполняются, полностью или асимптотически. Это следует из сформулированной выше структуры фундаментальных решений, записываемых через радиальные множители. Другие случаи требуют анализа, однако и для них показывается, что для регулярных составляющих имеет место асимптотическое выполнение условий в вершине трещины в силу регулярности решения.

3.10 Регулярное решение для конечной трещины нормального отрыва

Классическое решение для конечной трещины может быть выражено через комплексный потенциал $f(w) = \sqrt{w^2 - l^2}$; оно дано с ошибкой в книжке [87], трещина расположена вдоль оси x :

$$\sigma_x = \sigma(\operatorname{Re} f' + y \operatorname{Im} f''), \quad \sigma_y = \sigma(\operatorname{Re} f' - y \operatorname{Im} f''), \quad \sigma_{xy} = -\sigma y \operatorname{Re} f'',$$

Перепишем уравнения для перемещений и напряжений в комплексной форме:

$$\sigma_x = \sigma \operatorname{Re} \left(f'(w) + \frac{\bar{w} - w}{2} f''(w) \right), \quad \sigma_y = \sigma \operatorname{Re} \left(f'(w) + \frac{w - \bar{w}}{2} f''(w) \right), \quad (145)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{w} - w}{2} f''(w) \right), \quad (146)$$

где

$$f(w) = \sqrt{w^2 - l^2}, \quad w = x + iy, \quad f'(w) = \frac{w}{\sqrt{w^2 - l^2}}, \quad f''(w) = -\frac{l^2}{(w^2 - l^2)^{3/2}},$$

l – длина трещины.

Перепишем все формулы через две функции: одну гармоническую ϕ_0 и другую бигармоническую ψ_0 :

$$\sigma_x = \sigma \operatorname{Re}(\phi_0 + \psi_0), \quad \sigma_y = \sigma \operatorname{Re}(\phi_0 - \psi_0), \quad \sigma_{xy} = \sigma \operatorname{Im} \psi_0; \quad (147)$$

$$\phi_0 = f'(w) = \frac{w}{\sqrt{w^2 - l^2}}, \quad \psi_0 = \frac{\bar{w} - w}{2} f''(w) = \frac{l^2(w - \bar{w})}{2(w^2 - l^2)^{3/2}}; \quad (148)$$

Асимптотика в конечной трещине.

Выведем из конечной трещины решение для бесконечной трещины:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sigma_y &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(\phi_0 - \psi_0) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\hat{w}}{\sqrt{w^2 - 1}} + \frac{\hat{w} - \bar{\hat{w}}}{2(\hat{w}^2 - 1)^{3/2}} \right) = \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\hat{w}^+ + 1}{(\hat{w}^+ + 2)^{1/2} (\hat{w}^+)^{1/2}} + \frac{\hat{w}^+ - \bar{\hat{w}}^+}{2(\hat{w}^+ + 2)^{3/2} (\hat{w}^+)^{3/2}} \right), \quad \hat{w} = w/l, \quad \hat{w}^+ = \hat{w} - 1 = r e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Выделяем сингулярные члены и приводим их к полярной системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sigma_y &= \operatorname{Re} \left((\hat{w}^+)^{-1/2} + \frac{(\hat{w}^+ - \bar{\hat{w}}^+)(\hat{w}^+)^{-3/2}}{4} \right) = r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) = \\ &= r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) = r^{-1/2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K_I} \sigma'_y, \end{aligned}$$

где σ'_y – решение для бесконечной трещины. Аналогично получаем асимптотику для других компонентов тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sigma_x &= \operatorname{Re} \left((\hat{w}^+)^{-1/2} - \frac{(\hat{w}^+ - \bar{\hat{w}}^+)(\hat{w}^+)^{-3/2}}{4} \right) = r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) = \\ &= r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) = r^{-1/2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K_I} \sigma'_x, \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sigma_{xy} = \operatorname{Im} \left(\frac{(\hat{w}^+ - \bar{\hat{w}}^+)(\hat{w}^+)^{-3/2}}{4} \right) = r^{-1/2} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \right) = r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K_1} \sigma'_{xy}.$$

Получаем известное классическое сингулярное решение.

Градиентное решение.

Обобщенная теория упругости имеет дело с напряжениями, которые связаны с классическими напряжениями и перемещениями через уравнение Гельмгольца с масштабным параметром s в следующей форме:

$$\Xi_x - s^2 \nabla^2 \Xi_x = \sigma_x, \quad \Xi_y - s^2 \nabla^2 \Xi_y = \sigma_y, \quad \Xi_{xy} - s^2 \nabla^2 \Xi_{xy} = \sigma_{xy}, \quad (149)$$

Для того чтобы построить обобщенное решение (149), не имеющее особенностей в начале координат, достаточно построить обобщенное решение для гармонической и бигармонической функции ϕ_0 и ψ_0 :

$$\phi - s^2 \nabla^2 \phi = \phi_0, \quad \psi - s^2 \nabla^2 \psi = \psi_0. \quad (150)$$

Частное решение Φ_0 и Ψ_0 этих уравнений имеет простой вид, с учетом гармоничности функции ϕ_0 и бигармоничности функции ψ_0 :

$$\Phi_0 = \frac{w}{\sqrt{w^2 - l^2}}, \quad \Psi_0 = \psi_0 + s^2 \nabla^2 \psi_0 = \frac{l^2(w - \bar{w})}{2(w^2 - l^2)^{3/2}} + \frac{6s^2 w l^2}{(w^2 - l^2)^{5/2}}.$$

Оно подправляется решениями однородного уравнения Гельмгольца, имеющими такую же особенность в сингулярных точках, как и частные решения Φ_0 и Ψ_0 . Нам требуется определить такие фундаментальные системы функций, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца и имеют особенность в начале координат порядка $w^{-k/2}$. Такие функции можно построить с помощью радиальных множителей. Соответствующая фундаментальная система функций уравнения Гельмгольца будет иметь вид:

$$\chi_n(w, \bar{w}) = \hat{h}_n(r) w^{-n-1/2}. \quad (151)$$

Запишем несколько первых функций:

$$\hat{h}_0(r) = e^{-r/s}, \quad \hat{h}_1(r) = -\frac{1}{2}(r/s + 1)e^{-r/s}, \quad \hat{h}_2(r) = \frac{1}{4} \left((r/s)^2 + 3(r/s + 1) \right) e^{-r/s}.$$

Коэффициент $-1/2$ и $1/4$ можно отбросить, т.к. рассматривается однородное

уравнение Гельмгольца, и тем самым можем рассматривать следующие три дополнительные функции:

$$\chi_0 = e^{-r/s} w^{-1/2}, \quad \chi_1 = (r/s+1) e^{-r/s} w^{-3/2}, \quad \chi_2 = \left((r/s)^2 + 3(r/s+1) \right) e^{-r/s} w^{-5/2}.$$

В решении для конечной трещины имеется два конца, с которыми мы связываем две локальные переменные (сдвиги на l и $-l$ для компенсации особенностей в частном решении Φ_0 и Ψ_0) и соответствующие радиальные координаты:

$$w^+ = w-l, \quad r^+ = \sqrt{(w-l)(\bar{w}-l)}, \quad w^- = -w-l, \quad r^- = \sqrt{(w+l)(\bar{w}+l)}. \quad (152)$$

Соответствующие компенсирующие функции, связанные с концами трещины будут иметь вид:

$$\chi^\pm = e^{-r^\pm/s} (w^\pm)^{-1/2}, \quad \chi_1^\pm = (r^\pm/s+1) e^{-r^\pm/s} (w^\pm)^{-3/2}, \quad \chi_2^\pm = \left((r^\pm/s)^2 + 3(r^\pm/s+1) \right) e^{-r^\pm/s} (w^\pm)^{-5/2}.$$

С учетом частного решения Φ_0 , имеющего простой вид, и с учетом определения локальных координат, можем представить решение ϕ в уравнении (12) в следующем виде:

$$\phi = \frac{w}{\sqrt{w^2-l^2}} - \left(\frac{l}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{e^{-r^+/s}}{(w-l)^{1/2}} + i \frac{e^{-r^-/s}}{(w+l)^{1/2}} \right), \quad (153)$$

где r^+ и r^- – радиус, отсчитываемый от правой или левой вершины трещины. Выбор коэффициента в сглаживающих асимптотику слагаемых обусловлен асимптотикой частного решения в окрестности точек $w=l$ и $w=-l$:

$$\Phi_0(w) \approx \left(\frac{l}{2} \right)^{1/2} (w^+)^{-1/2}, \quad w \approx l; \quad \Phi_0(w) \approx \left(\frac{l}{2} \right)^{1/2} (w^-)^{-1/2}, \quad w \approx -l.$$

Отсюда следует выбор коэффициента i во втором компенсирующем слагаемом, поскольку $(w^-)^{-1/2} = (-w-l)^{-1/2} = i(w+l)^{-1/2}$.

Аналогично, бигармоническое решение ψ в уравнении (150), не имеющее сингулярностей в концах трещины, ищем в виде:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{wl^2}{2(w^2-l^2)^{3/2}} - \frac{\bar{w}l^2}{2(w^2-l^2)^{3/2}} - C_1 \left(\frac{e^{-r^+/s}}{(w-l)^{1/2}} - i \frac{e^{-r^-/s}}{(w+l)^{1/2}} \right) + \\ & + \frac{6s^2l^2w}{(w^2-l^2)^{5/2}} - C_2 \left(\frac{(r^+/s+1)e^{-r^+/s}}{(w-l)^{3/2}} + i \frac{(r^-/s+1)e^{-r^-/s}}{(w+l)^{3/2}} \right) - \\ & - C_3 \left(\frac{((r^+/s)^2 + 3(r^+/s+1))e^{-r^+/s}}{(w-l)^{5/2}} - i \frac{((r^-/s)^2 + 3(r^-/s+1))e^{-r^-/s}}{(w+l)^{5/2}} \right). \end{aligned}$$

Чтобы разобраться с коэффициентами, перепишем это выражение, отделяя в последнем компенсирующем слагаемом члены с $(r^\pm/s)^2$ так, чтобы при коэффициенте C_3 оставалось слагаемое, которое имеет сингулярность только $(w^+)^{-5/2}$ и $(w^-)^{-5/2}$:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{wl^2}{2(w^2-l^2)^{3/2}} - C_1 \left(\frac{e^{-r^+/s}}{(w-l)^{1/2}} - i \frac{e^{-r^-/s}}{(w+l)^{1/2}} \right) - \\ & - \frac{\bar{w}l^2}{2(w^2-l^2)^{3/2}} + \frac{C_3}{2} \left(\frac{(r^+/s)^2 e^{-r^+/s}}{(w-l)^{5/2}} - i \frac{(r^-/s)^2 e^{-r^-/s}}{(w+l)^{5/2}} \right) + \\ & + \frac{6s^2l^2w}{(w^2-l^2)^{5/2}} - C_2 \left(\frac{(r^+/s+1)e^{-r^+/s}}{(w-l)^{3/2}} + i \frac{(r^-/s+1)e^{-r^-/s}}{(w+l)^{3/2}} \right) - \\ & - 3C_3 \left(\frac{((r^+/s)^2/2 + r^+/s+1)e^{-r^+/s}}{(w-l)^{5/2}} - i \frac{((r^-/s)^2/2 + r^-/s+1)e^{-r^-/s}}{(w+l)^{5/2}} \right). \end{aligned}$$

После преобразований и сопоставления асимптотик, получаем значения коэффициентов:

$$C_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{15s^2}{16l^2} \right), \quad C_2 = -\frac{3s^2}{16} \left(\frac{l}{2} \right)^{-1/2}, \quad C_3 = \frac{s^2}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^{1/2}.$$

В результате, решение ψ в уравнении (150), не имеющее сингулярностей в концах трещины, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{wl^2}{2(w^2-l^2)^{3/2}} - \frac{\bar{w}l^2}{2(w^2-l^2)^{3/2}} - 4 \left(\frac{l}{2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{15s^2}{16l^2} \right) \left(\frac{e^{-r^+/s}}{(w-l)^{1/2}} - i \frac{e^{-r^-/s}}{(w+l)^{1/2}} \right) + \\ & + \frac{6s^2l^2w}{(w^2-l^2)^{5/2}} + \frac{3s^2}{16} \left(\frac{l}{2} \right)^{-1/2} \left(\frac{(r^+/s+1)e^{-r^+/s}}{(w-l)^{3/2}} + i \frac{(r^-/s+1)e^{-r^-/s}}{(w+l)^{3/2}} \right) - \\ & - \frac{s^2}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{((r^+/s)^2 + 3(r^+/s+1))e^{-r^+/s}}{(w-l)^{5/2}} - i \frac{((r^-/s)^2 + 3(r^-/s+1))e^{-r^-/s}}{(w+l)^{5/2}} \right). \end{aligned} \quad (154)$$

Обезразмерим выражение (154), введя безразмерные величины $\hat{w} = w/l$ и

$$\lambda = l/s$$

$$\frac{w}{(w^2 - l^2)^{1/2}} = \frac{\hat{w}}{(\hat{w}^2 - 1)^{1/2}}, \quad \frac{wl^2}{(w^2 - l^2)^{3/2}} = \frac{\hat{w}}{(\hat{w}^2 - 1)^{3/2}},$$

$$-\frac{\bar{w}l^2}{(w^2 - l^2)^{3/2}} = -\frac{\bar{\hat{w}}}{(\hat{w}^2 - 1)^{3/2}}, \quad \frac{s^2 l^2 w}{(w^2 - l^2)^{5/2}} = \frac{\lambda^{-2} \hat{w}}{(\hat{w}^2 - 1)^{5/2}}.$$

Получаем решение уравнений (12) в безразмерном виде:

$$\phi = \frac{\hat{w}}{\sqrt{\hat{w}^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{-\lambda \hat{r}^+}}{(\hat{w} - 1)^{1/2}} + i \frac{e^{-\lambda \hat{r}^-}}{(\hat{w} + 1)^{1/2}} \right), \quad \hat{r}^+ = |\hat{w} - 1|, \quad \hat{r}^- = |\hat{w} + 1|; \quad (155)$$

$$\psi = \frac{\hat{w} - \bar{\hat{w}}}{2(\hat{w}^2 - 1)^{3/2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(1 - \frac{15}{16} \lambda^{-2} \right) \left(\frac{e^{-\lambda \hat{r}^+}}{(\hat{w} - 1)^{1/2}} - i \frac{e^{-\lambda \hat{r}^-}}{(\hat{w} + 1)^{1/2}} \right) +$$

$$+ \frac{6\lambda^{-2} \hat{w}}{(\hat{w}^2 - 1)^{5/2}} + \frac{3\lambda^{-2}}{8\sqrt{2}} \left(\frac{(\lambda \hat{r}^+ + 1)e^{-\lambda \hat{r}^+}}{(\hat{w} - 1)^{3/2}} + i \frac{(\lambda \hat{r}^- + 1)e^{-\lambda \hat{r}^-}}{(\hat{w} + 1)^{3/2}} \right) - \quad (156)$$

$$- \frac{\lambda^{-2}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{((\lambda \hat{r}^+)^2 + 3(\lambda \hat{r}^+ + 1))e^{-\lambda \hat{r}^+}}{(\hat{w} - 1)^{5/2}} - i \frac{((\lambda \hat{r}^-)^2 + 3(\lambda \hat{r}^- + 1))e^{-\lambda \hat{r}^-}}{(\hat{w} + 1)^{5/2}} \right).$$

Таким образом, формулы (155), (156) дают сглаженное (без сингулярных членов) решение уравнений (150), и принимают на отрезке $[-1, 1]$ мнимое значение.

Рассмотрим решение на вещественной прямой $\hat{w} = \hat{x}$ окрестности правого конца трещины, т.е. при $\hat{x} > 1$; учтем при этом, что $\hat{r}^+ = \hat{x} - 1$, $\hat{r}^- = \hat{x} + 1$.

Запишем полное выражение для функций ϕ и ψ в исходных координатах:

$$\phi = \frac{\hat{x}}{(\hat{x}^2 - 1)^{1/2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\hat{x} - 1)^{-1/2} e^{-\lambda(\hat{x}-1)} + i (\hat{x} + 1)^{-1/2} e^{-\lambda(\hat{x}+1)} \right),$$

$$\psi = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(1 - \frac{15}{16} \lambda^{-2} \right) \left((\hat{x} - 1)^{-1/2} e^{-\lambda(\hat{x}-1)} - i (\hat{x} + 1)^{-1/2} e^{-\lambda(\hat{x}+1)} \right) +$$

$$+ \frac{3}{8\sqrt{2}} \lambda^{-2} \left(\frac{\lambda(\hat{x} - 1) + 1}{(\hat{x} - 1)^{3/2}} e^{-\lambda(\hat{x}-1)} + i \frac{\lambda(\hat{x} + 1) + 1}{(\hat{x} + 1)^{3/2}} e^{-\lambda(\hat{x}+1)} \right) + \frac{6\lambda^{-2} \hat{x}}{(\hat{x}^2 - 1)^{5/2}} -$$

$$- \frac{\lambda^{-2}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda^2(\hat{x} - 1)^2 + 3(\lambda(\hat{x} - 1) + 1)}{(\hat{x} - 1)^{5/2}} e^{-\lambda(\hat{x}-1)} - i \frac{\lambda^2(\hat{x} + 1)^2 + 3(\lambda(\hat{x} + 1) + 1)}{(\hat{x} + 1)^{5/2}} e^{-\lambda(\hat{x}+1)} \right).$$

Преобразуем выражение для ψ , собрав все одинаковые члены при экспонентах:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{6\lambda^{-2}\hat{x}}{(\hat{x}^2-1)^{5/2}} + \frac{-6+3\lambda^{-1}+15/8\lambda^{-2}}{8\sqrt{2}} \frac{e^{-\lambda(\hat{x}-1)}}{(\hat{x}-1)^{1/2}} - i \frac{-6-3\lambda^{-1}+15/8\lambda^{-2}}{8\sqrt{2}} \frac{e^{-\lambda(\hat{x}+1)}}{(\hat{x}+1)^{1/2}} + \\ & + \frac{3(\lambda^{-2}-4\lambda^{-1})}{8\sqrt{2}} \frac{e^{-\lambda(\hat{x}-1)}}{(\hat{x}-1)^{3/2}} + i \frac{3(\lambda^{-2}+4\lambda^{-1})}{8\sqrt{2}} \frac{e^{-\lambda(\hat{x}+1)}}{(\hat{x}+1)^{3/2}} - \frac{3\lambda^{-2}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{e^{-\lambda(\hat{x}-1)}}{(\hat{x}-1)^{5/2}} - i \frac{e^{-\lambda(\hat{x}+1)}}{(\hat{x}+1)^{5/2}} \right). \end{aligned}$$

Это точное выражение для функции ψ без каких-либо асимптотик. Из всех этих функций составляется полное градиентное решение задачи о конечной трещине с учетом дополнительного слагаемого для асимптотики на бесконечности. Можно теперь найти и локальные напряжения

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \Xi_y = & \sqrt{2}(\bar{x}+1)\left((\bar{x})^2(\bar{x}+2)^2-6\lambda^{-2}\right)(\bar{x}+2)^{-5/2}(\bar{x})^{-5/2} - \sqrt{2}(\bar{x})^{1/2}(\bar{x}+2)^{-1/2} + \\ & + \frac{3\lambda^{-2}}{2}(\bar{x})^{-5/2}e^{-\lambda\bar{x}} - \frac{3(\lambda^{-2}-4\lambda^{-1})}{8}(\bar{x})^{-3/2}e^{-\lambda\bar{x}} - \frac{2+3\lambda^{-1}+15/8\lambda^{-2}}{8}(\bar{x})^{-1/2}e^{-\lambda\bar{x}}. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить и локальные напряжения для Ξ_x . После перехода к локальным координатам, например при $\bar{x} = \hat{r}^+ = \hat{x} - 1$. И разложения в ряды, можно убедиться, что полученные решения регулярны в вершине.

Так, асимптотика Ξ_y в окрестности вершины трещины имеет вид:

$$\begin{aligned} \Xi_y = & \sigma \left[\frac{\hat{x}\left((\hat{x}^2-1)^2-6\lambda^{-2}\right)}{(\hat{x}^2-1)^{5/2}} - \frac{2+3\lambda^{-1}+15/8\lambda^{-2}}{8\sqrt{2}} \frac{e^{-\lambda(\hat{x}-1)}}{(\hat{x}-1)^{1/2}} - \right. \\ & \left. - \frac{3(\lambda^{-2}-4\lambda^{-1})}{8\sqrt{2}} \frac{e^{-\lambda(\hat{x}-1)}}{(\hat{x}-1)^{3/2}} + \frac{3\lambda^{-2}}{2\sqrt{2}} \frac{e^{-\lambda(\hat{x}-1)}}{(\hat{x}-1)^{5/2}} \right] \approx \\ \approx & \sigma \left[\frac{(\bar{x})^{1/2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{23}{24} + \frac{2\lambda}{3} + \frac{15\lambda^{-1}}{64} - \frac{105\lambda^{-2}}{256} \right) - \frac{(\bar{x})^{3/2}}{4\sqrt{2}} \left(\frac{35}{32} + \frac{5\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} - \frac{1575\lambda^{-2}}{1024} \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

где $\bar{x} = \hat{r}^+ = \hat{x} - 1$ – локальная координата в окрестности вершины трещины.

Аналогичное решение для бесконечной трещины:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{K_I} \Xi_y = (\bar{x})^{-1/2} \left(1 - e^{-\lambda\bar{x}} + \frac{3(\lambda\bar{x})^{-2}}{2} \left(1 - \left(\frac{(\lambda\bar{x})^2}{2} + \lambda\bar{x} + 1 \right) e^{-\lambda\bar{x}} \right) \right).$$

На рисунке приведен график компоненты Ξ_y напряжений на вещественной оси при различных значениях параметра масштаба $\lambda = 10, 20, 30, 50, 100$

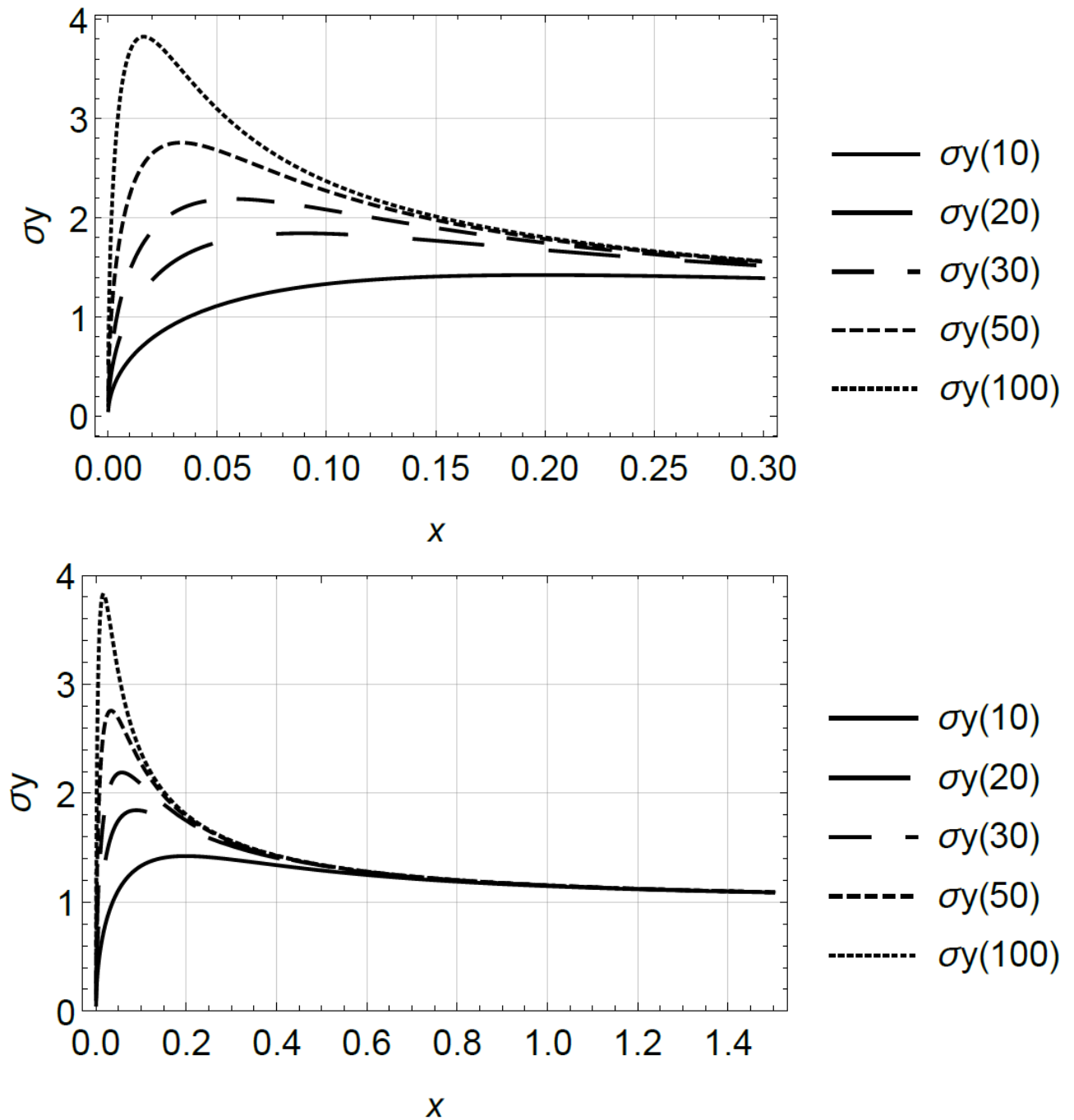


Рисунок 2 – Распределение не сингулярных напряжений в окрестности вершины трещины (в разных масштабах).

3.11 О концепции концентрации напряжений

Возможность регуляризации сингулярных задач упругости и перевода их в класс регулярных задач теории упругости позволяет для оценки прочности пластин с трещинами использовать концепцию концентрации напряжений, которая была впервые реализована в работах Васильева и Лурье.

Приведем кратко алгоритм оценки прочности пластин с трещинами.

Отсутствие сингулярностей позволяет использовать критерии прочности, чтобы для выяснить при каких нагрузках будет иметь место разрушение.

Однако использование градиентных теорий приводит к тому, что решение зависит от дополнительного масштабного параметра модели. Возникает проблемы связанная с определением этого параметра.

Проведенные к настоящему времени исследования и экспериментальные работы показали, что масштабный параметр вместе с правильно выбранным критерием прочности позволяет с высокой точностью решать проблему оценки прочности. В рамках концепции концентрации напряжений.

Кратко опишем один из начальных вариантов определения масштабных параметров. Этот прием особенно эффективен если имеется аналитическое решение. Пусть имеется решение для напряжений, которое описывает эффекты концентрации напряжений типа тех, которые приведены на рисунке3.

В окрестности вершины трещины регистрируется конечный максимум напряжений. Он зависит от параметра масштаба модели. Строится зависимость этого максимума от параметра масштаба. При этом максимум напряжений нормируется на амплитуду приложенных напряжений вдали от трещины (условно на бесконечности), учитывая, что $\sigma_x^m = k \sigma_b$, k -коэффициенты концентрации напряжений в окрестности трещины, σ_b -предел прочности материала.

Отметим, что фактически при этом мы используем критерий прочности по максимальным напряжениям σ_b .

Таким образом строится зависимость фактически строится теоретическая зависимость для коэффициента концентрации напряжений.

Пример такой теоретической зависимости, полученной для приведенного в предыдущем разделе решения, имеет вид

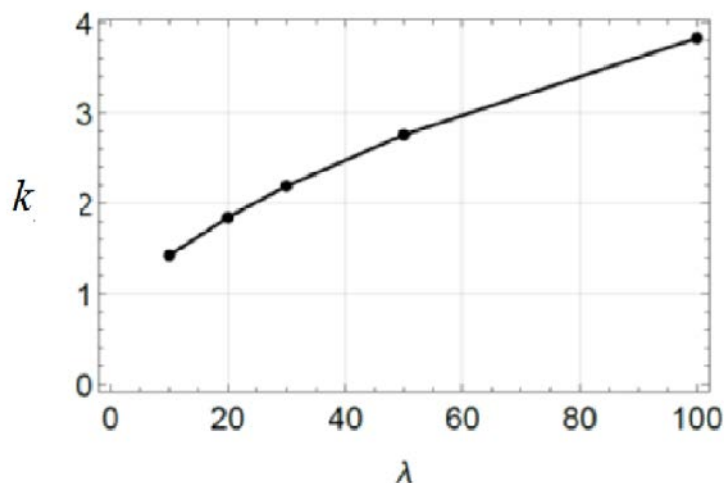


Рисунок 3– Теоретическая зависимость коэффициента концентрации напряжений

Далее для конкретного образца с трещиной с заданной длиной трещины находится экспериментальное значение коэффициента концентрации, это значение откладывается по оси ординат построенного графика и затем находится масштабный параметр, при котором теоретическая зависимость дает значение разрушающей нагрузки, найденное в эксперименте.

Оказалось следующее важное обстоятельство, проверенное на многочисленных экспериментальных данных.

Для данного конкретного материала параметр масштаба остается постоянным, т.е. наряду с пределом прочности параметр масштаба является характеристикой материала, определяющей разрушение в механике трещин.

Таким образом для обеспечения прогноза поведения необходимо сначала определить параметр масштаба используя один из образцов пластины с трещиной заданной длины. Затем, полагая, что этот параметр является неизменным теоретическая кривая позволяет прогнозировать величину коэффициента концентрации для произвольных длин трещин, а значит прогнозировать величину разрушающей нагрузки.

Заметим, что сформулированная концепция позволяет осуществлять прогноз прочности и в случае численной реализации решения для трещин в рамках градиентной модели. В этом случае численное решение позволяет также построить теоретическую кривую для коэффициента концентрации и использовать ее

найти параметр масштаба по данным экспериментам для одного из образцов. Иначе говоря, параметр масштаба подбирается так для данного образца, чтобы предельная нагрузка теоретического расчета совпала бы с экспериментальной. Далее параметр масштаба для данного материала считается известным, и методика позволяет прогнозировать прочность для иных размеров трещин.

Второй важный вопрос связан с выбором критерия разрушения. В статьях ВВВ и Лурье было показано, что для ортотропных материалов, например, подходящим является следующий критерий прочности

$$\left(\frac{\sigma_x^m}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y^m}{s_y}\right)^2 = 1$$

где s_x и s_y - пределы прочности при растяжении в направлении осей ОХ и ОУ.

Используя теоретические решения находятся зависимости для максимальных значений компонент напряжений σ_x^m и σ_y^m строится теоретическая предельная кривая соответствующая этому критерию.

Выражая напряжения через коэффициенты концентрации и используя критерий (4.1), можно получить и зависимость для предельного напряжения, растягивающего пластину:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_x}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{s_y}\right)^2}}$$

k_x и k_y - коэффициенты концентрации напряжений в окрестности трещины.

Эта зависимость позволяет осуществлять прогноз прочности в рамках рассматриваемой концепции.

Вопрос выбора критерия прочности, таким образом также является определяющим. Например, Васильевым и Лурье доказано, что использование концепции для прогноза предела пропорциональности для пластических материалов следует использовать критерий прочности Мизеса.

В данной диссертации в дальнейшем впервые использовать концепцию концентрации напряжений для прогноза направления развития трещины со

сложной модой разрушения. В этом случае одной из ключевых вопросов является вопрос выбора критерия прочности.

3.12 Заключение

Показано что все градиентные теории обладают следующим характерным качеством – позволяют регулировать решения (перевести в класс регулярных задач теории упругости, те, которые являются сингулярными). Например, в задачах мембран, Фламана и Буссенеско перемещения терпят разрыв и в точке сингулярности не имеет смысла условие совместности и уравнения равновесия теряют свои свойства. Указаны примеры физического несоответствия сингулярности физическому смыслу, например, сингулярная трещина – предельный переход от эллипса.

Показано что уравнения Гельмгольца имеют частные решения, которые строятся с использованием техник радиальных множителей с той же особенностью, что и для сингулярных задач, что и позволяет компенсировать сингулярности в градиентных решениях. Получено точное регулярное решение для пластины с конечной трещиной для градиентной упругости типа Айфантиса с использованием способа компенсации сингулярности.

Показано что регуляризация по отношению к механике трещин представляется весьма важным, т.к. переводит все задачи в класс концентрации напряжений (концепция концентрации напряжений). Сформулированы особенности реализации концепции концентрации напряжений в прикладных задачах оценки предельных нагрузок для пластин с трещинами.

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАДИЕНТНОЙ УПРУГОСТИ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

4.1 Введение

Известно, что при испытании различным стандартных образцов с концентраторами в классических решениях возникает сингулярность. Подход к регуляризации решения о трещине позволяет отойти от данных бесконечных напряжений в точке зарождения и развития трещины. Уровень нагрузок, при которых происходит зарождение и развитие трещины, определяется в том числе масштабным параметром материала. Нахождение точки зарождения начала трещины, разрушающей нагрузки и угла роста трещины может быть выполнено на основе регуляризованных решений градиентной теории упругости в рамках применения подходящих критериев, формулируемых относительно напряжений. При этом для нахождения точки зарождения трещины необходимо подобрать правильные сходящиеся критерии, корректно описывающие начало разрушения в условиях сложно напряженного состояния. Примеры таких вычислений представлены в данном разделе. Для описания механических взаимодействий в модели используется уточненная модель симметрии, описанная ранее.

4.2 Постановка задачи

Численное моделирование производится на основе экспериментальных данных работы Torabi [89] и на программном обеспечении ComsolMultiphysics. Численное моделирование реализовано в Comsol с использованием подхода, изложенного в работах Васильева, Лурье. Использован интерфейс WeakFormPDE для задания соотношений градиентной теории упругости в слабой формулировке. Решение строится с использованием смешанного метода конечных элементов, основанного на введении промежуточных переменных, определяющих компоненты тензора деформаций, для которых вводится отдельная аппроксимация. Таким образом, в Comsol задается пользовательская модель

упругой среды, отвечающая структуре энергии деформаций градиентной теории упругости. Решения строятся в линейной формулировке для задачи плоского деформированного состояния. В расчетах используются треугольные элементы с аппроксимацией третьего порядка для всех переменных модели (перемещения и промежуточные переменные для деформаций).

Далее будут рассмотрены примеры экспериментальных данных, для которых проведено моделирование, и на основе известных разрушающих нагрузок и заданной геометрии образцов оценивается уровень концентрации напряжений. Дается оценка значений масштабных параметров для рассматриваемых материалов. Сопоставление расчетов и эксперимента проводится для разрушающих нагрузок и направления роста трещины.

В работе Togaби исследование проводилось на хрупком диске полиметилметакрилата с характеристиками материала, представленными в таблице 1.

Таблица 1 – Свойства полиметилметакрилата

| Свойства материала | Значение |
|--|----------|
| Модуль упругости E, ГПа | 1,816 |
| Коэффициент Пуассона | 0,38 |
| Прочность при растяжении, МПа | 68,5 |
| Прочность при сжатии, МПа | 100,5 |
| Вязкость разрушения при плоской деформации, МПа*м ^{0.5} | 1,71 |

Диск обладает толщиной $t = 8$ мм, углом выреза $2\alpha = 30$ и 60 град, а так же радиусом скругления данного угла $\rho = 0.5, 1.0, 2.0$ и 4.0 мм соответственно. Диаметр диска составляет $D = 80$ мм, длина выреза без учета скругления $d = 40$ мм. Вид образца представлен на рисунке 4.

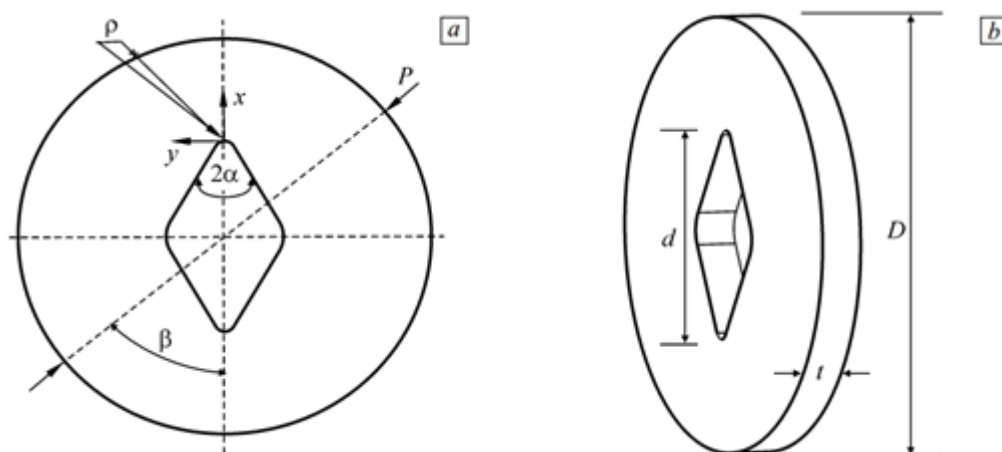


Рисунок 4 – «Бразильский» диск с V-образным вырезом: а – фронтальный вид, б – изометрия

В процессе моделирования меняются такие характеристики как угол выреза, радиус скругления, а также сам поворот данного выреза относительно оси приложения нагрузки.

Необходимо учитывать, что для каждого этого изменяющегося параметра меняется и экспериментальная нагрузка, полученная при испытаниях образцов. Поэтому данная задача является задачей параметризации. Учет разрушающей нагрузки в зависимости от выбора параметров приведен в таблице 2.

Таблица 2 – Значение экспериментальных нагрузок при разрушении образца

| 2α | ρ , мм | β | P_1 , Н | P_2 , Н | P_3 , Н | P_{av} , Н |
|-----------|-------------|---------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| 30 | 0.5 | 30 | 3379 | 3862 | 3512 | 3717 |
| | | 40 | 4263 | 4760 | 5055 | 4692 |
| | | 50 | 6376 | 6863 | 7677 | 6972 |
| | 1.0 | 30 | 3630 | 3689 | 3232 | 3517 |
| | | 40 | 4009 | 4084 | 4651 | 4248 |
| | | 50 | - | 6674 | 7334 | 7004 |
| | 2.0 | 30 | 3803 | - | 3936 | 3869 |
| | | 40 | 5211 | 4106 | 4244 | 4520 |

| 2α | ρ , мм | β | P_1 , Н | P_2 , Н | P_3 , Н | P_{av} , Н |
|-----------|-------------|---------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| | 4.0 | 50 | - | 5605 | 6314 | 5960 |
| | | 30 | 4729 | 4376 | 4474 | 4526 |
| | | 40 | 4779 | 6028 | 5681 | 5496 |
| | | 50 | 5818 | 6647 | 5589 | 6018 |
| 60 | 0.5 | 30 | 4228 | 4502 | 4082 | 4271 |
| | | 40 | 8374 | 8362 | - | 8368 |
| | | 45 | 10942 | 11252 | - | 11097 |
| | 1.0 | 30 | 4149.6 | 4146 | 4285 | 4194 |
| | | 40 | 7380 | 6073 | 8434 | 7296 |
| | | 45 | 8859 | 8865 | 8890 | 8871 |
| | 2.0 | 30 | - | 4215 | 4252 | 4234 |
| | | 40 | 6360 | 6525 | 7017 | 6634 |
| | | 45 | 7179 | 7324 | - | 7252 |
| | 4.0 | 30 | 5359 | 4436 | 5088 | 4961 |
| | | 40 | 5401 | 6158 | 5335 | 5631 |
| | | 45 | 7255 | 6293 | - | 6774 |

Построена геометрическая модель исследуемого образца при разном 2α и ρ (рисунок 5).

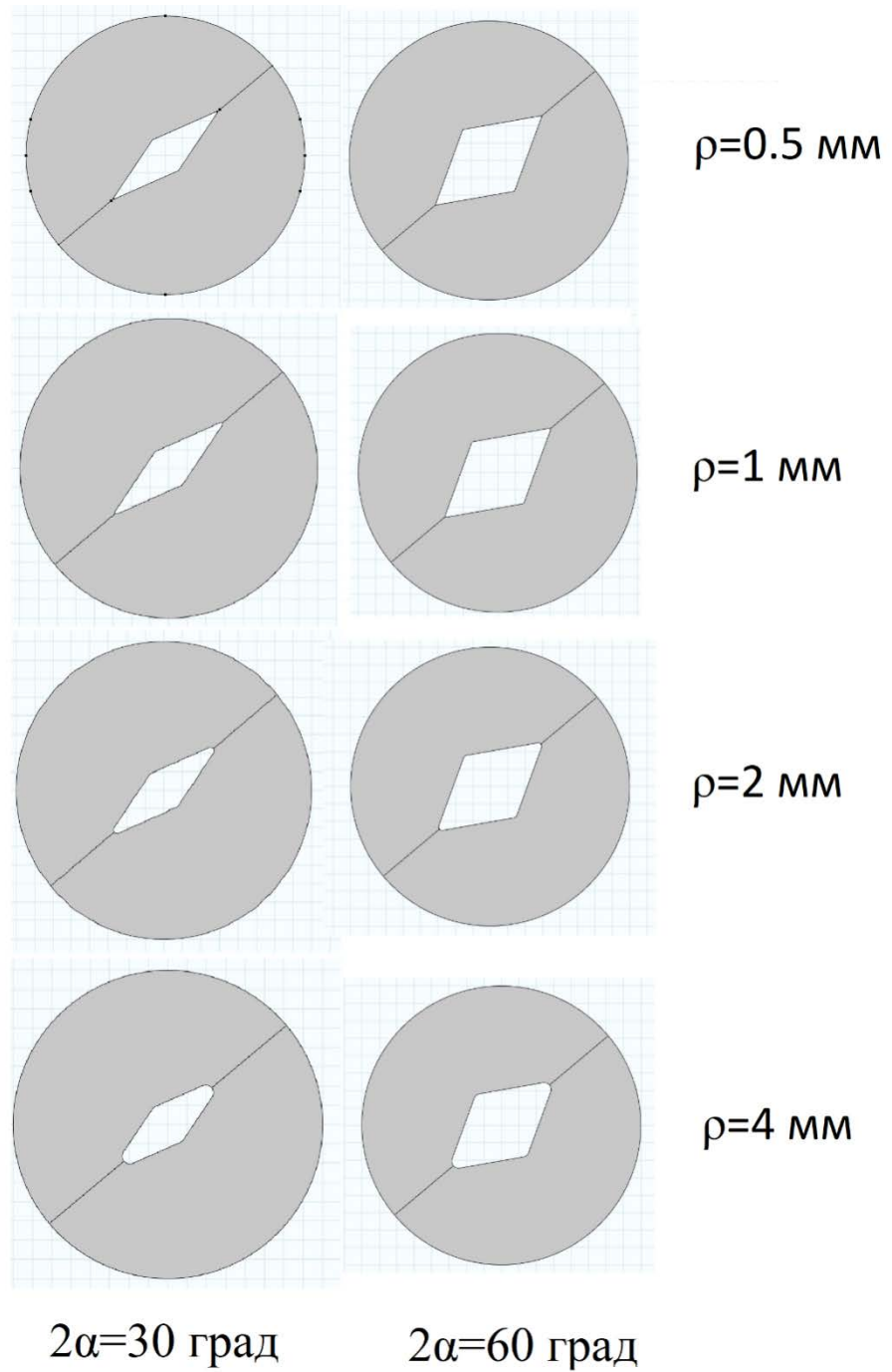


Рисунок 5 – Геометрическая модель образца

Моделируемый образец находится в условиях отрицательных нагрузок типа I. Приложение нагрузки полностью соответствует эксперименту (рисунок 6).

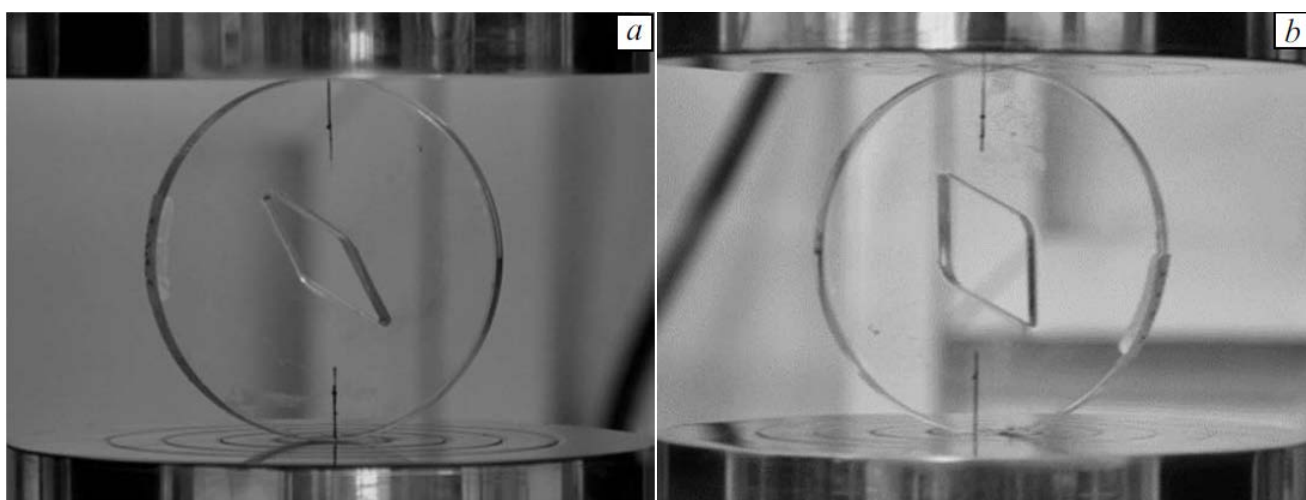


Рисунок 6 – Фотография эксперимента (способ приложения нагружения)

Для дальнейшего исследования очень важно уточнять сетчатую модель в месте предполагаемого начала разрушения, а значит можно предположить измельчение конечно-элементной сетки радиусу закругления. Пример такой сетки на одном из моделируемых образцов представлен на рисунке 7.

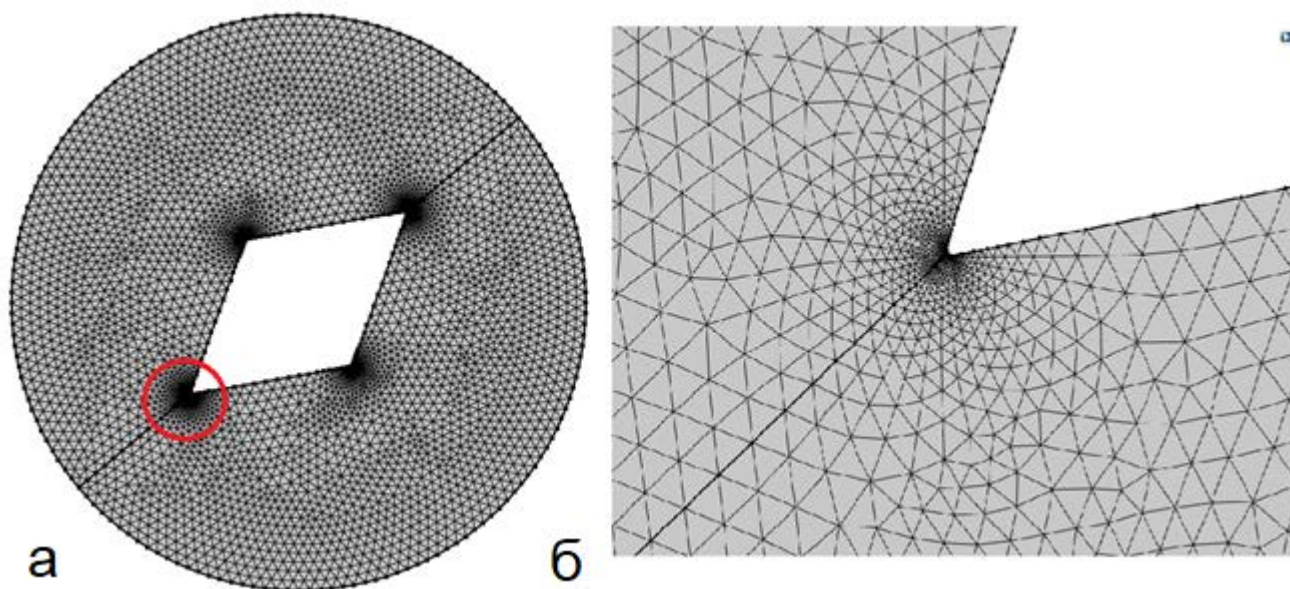


Рисунок 7 – Конечно элементная сетка; а – глобальная, б – местная

Полученное конечно элементное решение показано на рисунке 8 и 9. Как можно заметить несмотря на действие отрицательной нагрузки типа Юдна

сторона надреза находится под действием растягивающих касательных напряжений, что указывает на вероятность начала разрушения с данной стороны надреза.

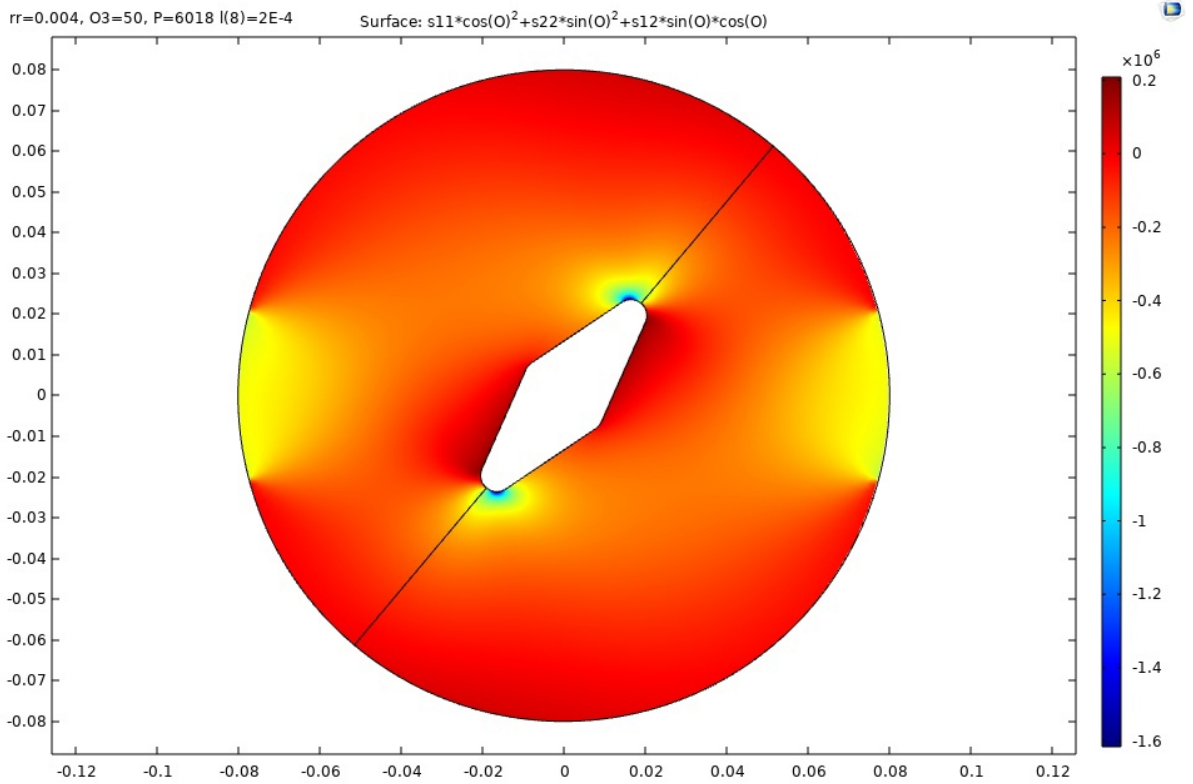


Рисунок 8 – Распределение напряжений в образце

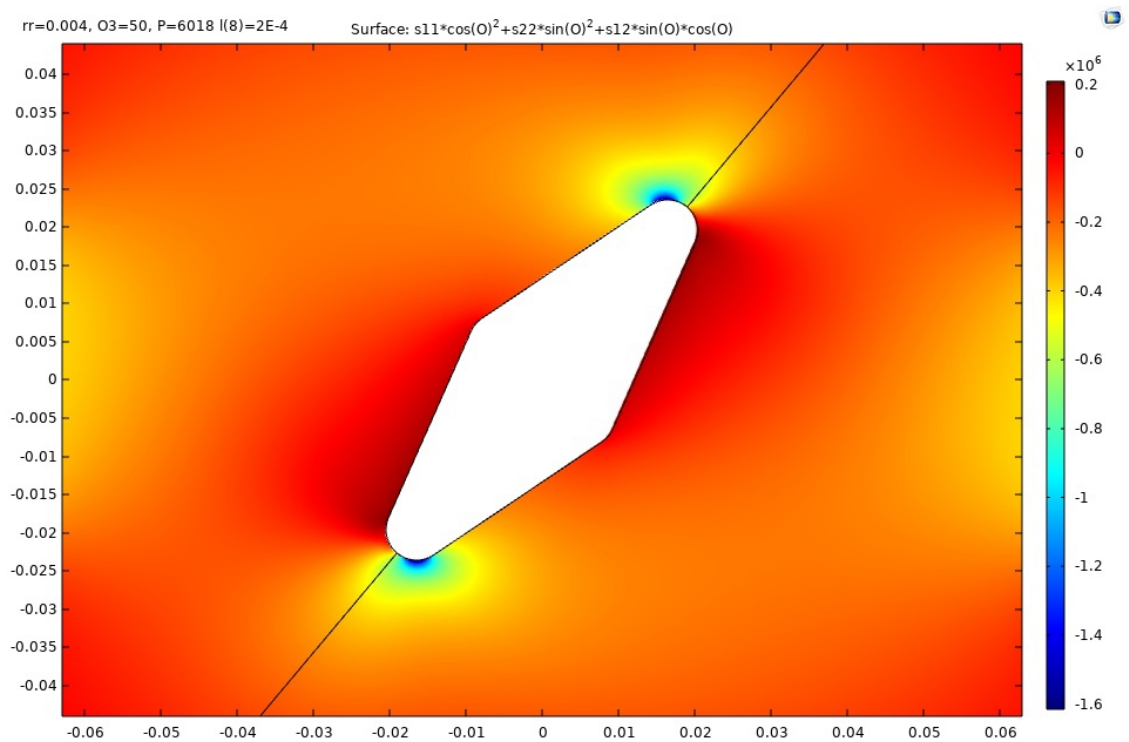


Рисунок 9 – Распределение напряжений в окрестности выреза

4.3 Выбор критерия по напряжениям

В задаче рассматривалось 4 критерия по напряжениям (для масштабного параметра $l=200\text{e-}6$ м):

1. Критерий максимальных главных напряжений (рисунок 10)

$$\sigma_{\max} = \frac{S_{11} + S_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{S_{11} - S_{22}}{2}\right)^2 + S_{12}^2}$$

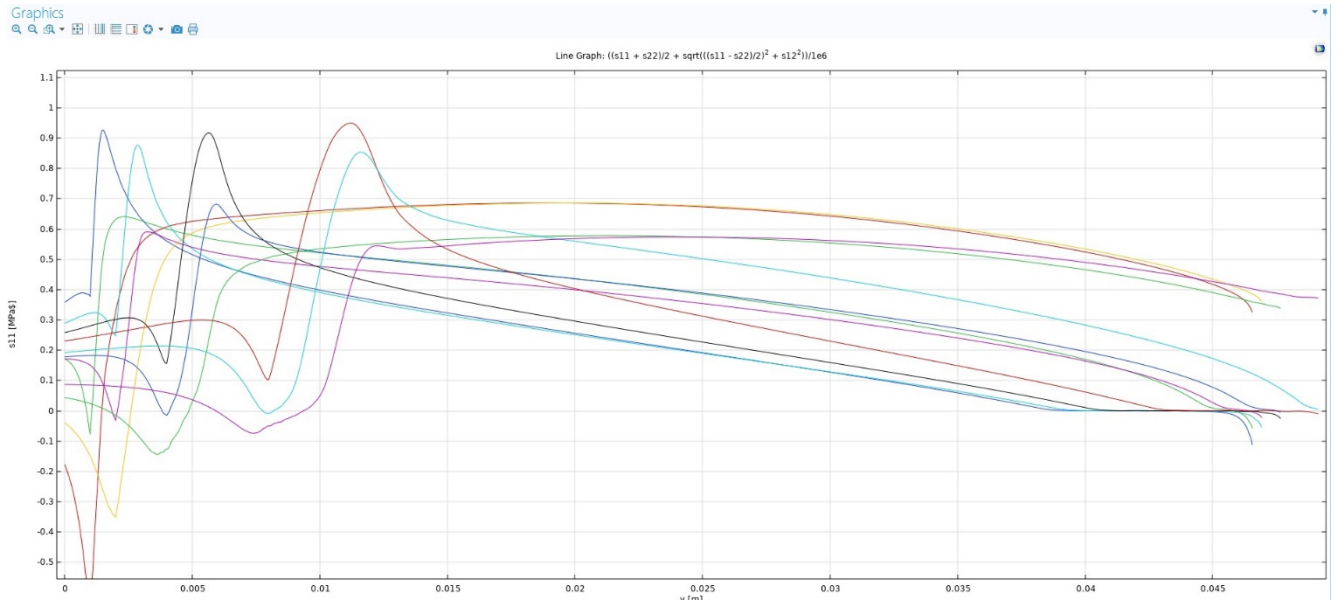


Рисунок 10 – Сравнение критерия максимальных главных напряжений для разных параметров диска (по оси абсцисс откладывается распределение напряжений σ_{\max} в зависимости от четверти длины дуги окружности скругления V-образного выреза)

2. Критерий Треска (рисунок 11).

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2}$$

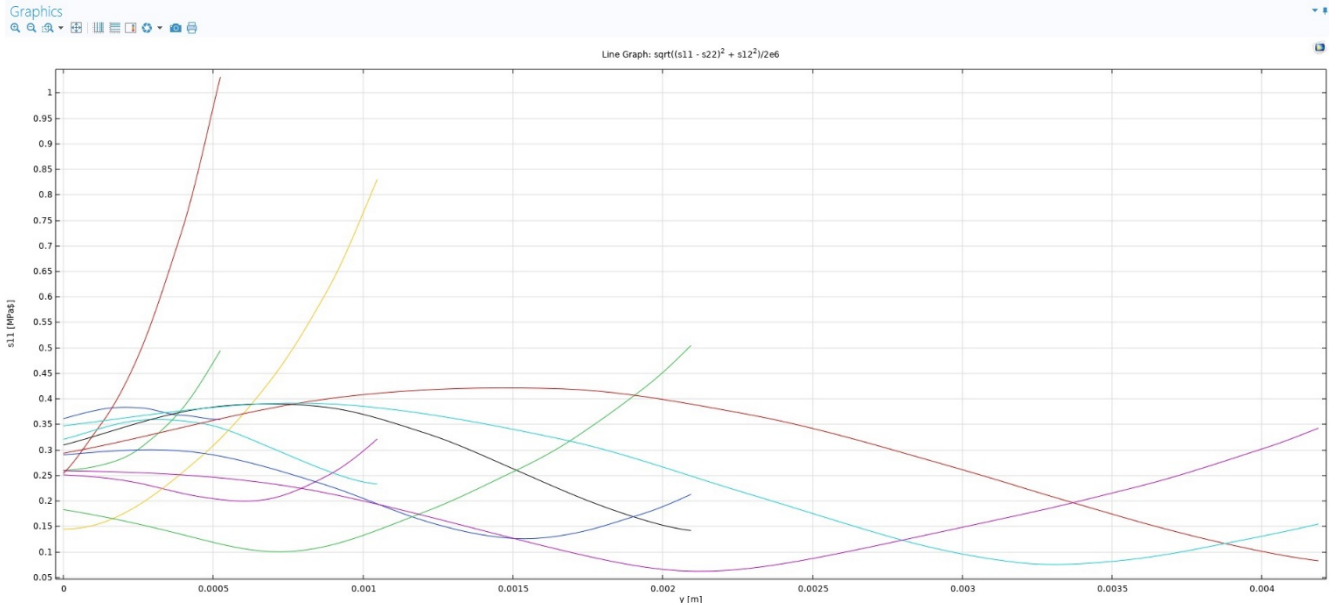


Рисунок 11 – Сравнение критерия Треска для разных параметров диска (по оси абсцисс откладывается распределение напряжений τ_{max} в зависимости от четверти длины дуги окружности скругления V-образного выреза)

3. Критерий Мизеса (рисунок 12).

$$\tau_{J2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + (S_{11} - S_{33})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + 6S_{12}^2}$$

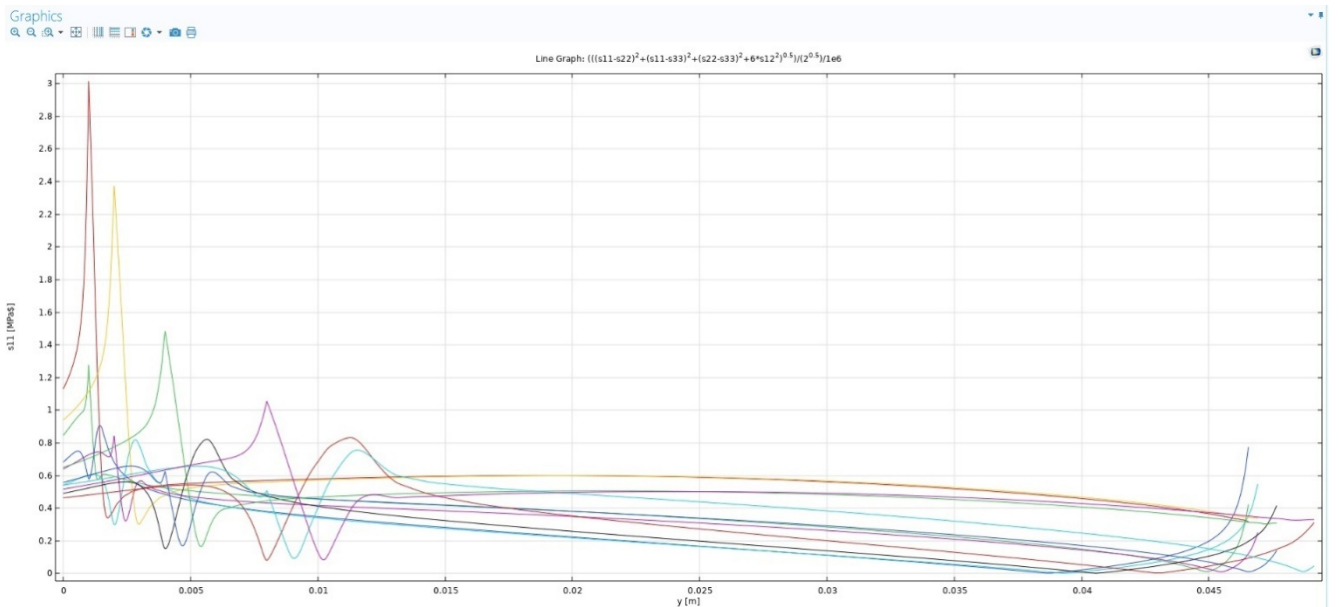


Рисунок 12 – Сравнение критерия Мизеса для разных параметров диска (по оси абсцисс откладывается распределение напряжений τ_{J2} в зависимости от четверти длины дуги окружности скругления V-образного выреза)

4. Триаксиальный критерий Коши (рисунок 13).

$$\beta = \frac{(S_{11} + S_{22} + S_{33})/3}{\sqrt{\left(\frac{(S_{11} - S_{22})^2 + (S_{11} - S_{33})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + 6S_{12}^2}{2}\right)^{0.5}}}$$

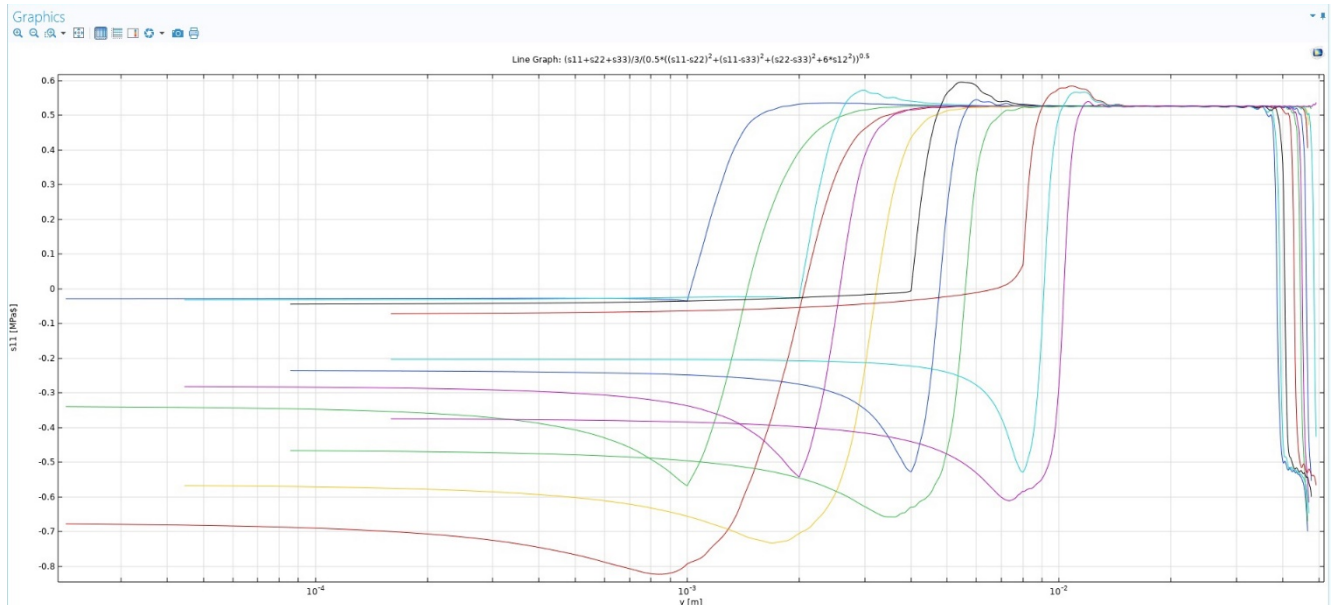


Рисунок 13 – Сравнение триаксиального критерия для разных параметров диска (по оси абсцисс откладывается распределение напряжений β в зависимости от четверти длины дуги окружности скругления V-образного выреза)

На рисунках 10-13 разным цветом показано распределение 4-х критериев в зависимости от геометрических параметров задачи, таких как: угол поворота диска относительно прикладываемой нагрузки, угол центрального V-образного выреза и радиуса скругления.

Как видно из графиков лучшую сходимость (соответствие концепции концентрации напряжений) для малых углов наклона выреза β по результатам для различных параметров исследуемого образца показал критерий по максимальным главным напряжениям. Дополнительным критерием для оценки смешанной моды нагружения может так же являться критерий по максимальным касательным напряжениям, но только при переходе на большие углы поворота β диска что соответствует большому отклонению трещины от направления приложения нагрузки.

4.4 Влияние масштабного параметра на сходимость решений

Для оценки влияния масштабного параметра на соответствие решения концепции концентрации напряжений решения необходимо ввести дополнительную параметризацию исследования по l .

Масштабный параметр можно приближенно оценить по следующей формуле

$$l = \left(\frac{K_{lc}}{S_{ult}} \right)^2 / (2.82 * \pi) \text{ [м]}$$

Для полиметилметакрилата получаем значение $l=200\text{e-}6$ м, что важно, т.к. при этом значении имеет место лучшее соответствие результатов для точки концентрации напряжений. Однако лучше всего критерий по максимальным главным напряжениям реализуется для масштабного параметра $l=300\text{e-}6$ м.

В работе были проанализированы случаи значений масштабного параметра от $1\text{e-}6$ м до $500\text{e-}6$ м, но данное исследование включает в себя много табличных и графических данных, поэтому в работе показано сравнение результатов полученного решения для $l=100\text{e-}6$ м, $l=200\text{e-}6$ м и $l=300\text{e-}6$ м показано на рисунке 14, 15, 16 соответственно.

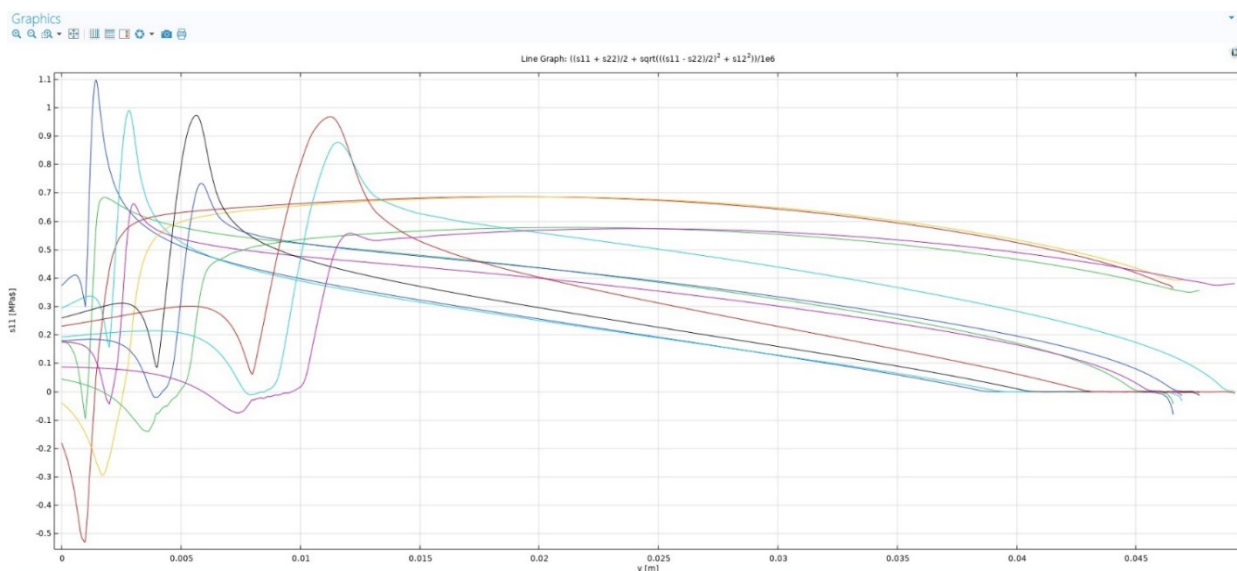


Рисунок 14 – Критерий максимальных главных напряжений для масштабного параметра l равного $100\text{e-}6$ м (по оси абсцисс откладывается распределение напряжений σ_{max} в зависимости от четверти длины дуги окружности скругления V-образного выреза)

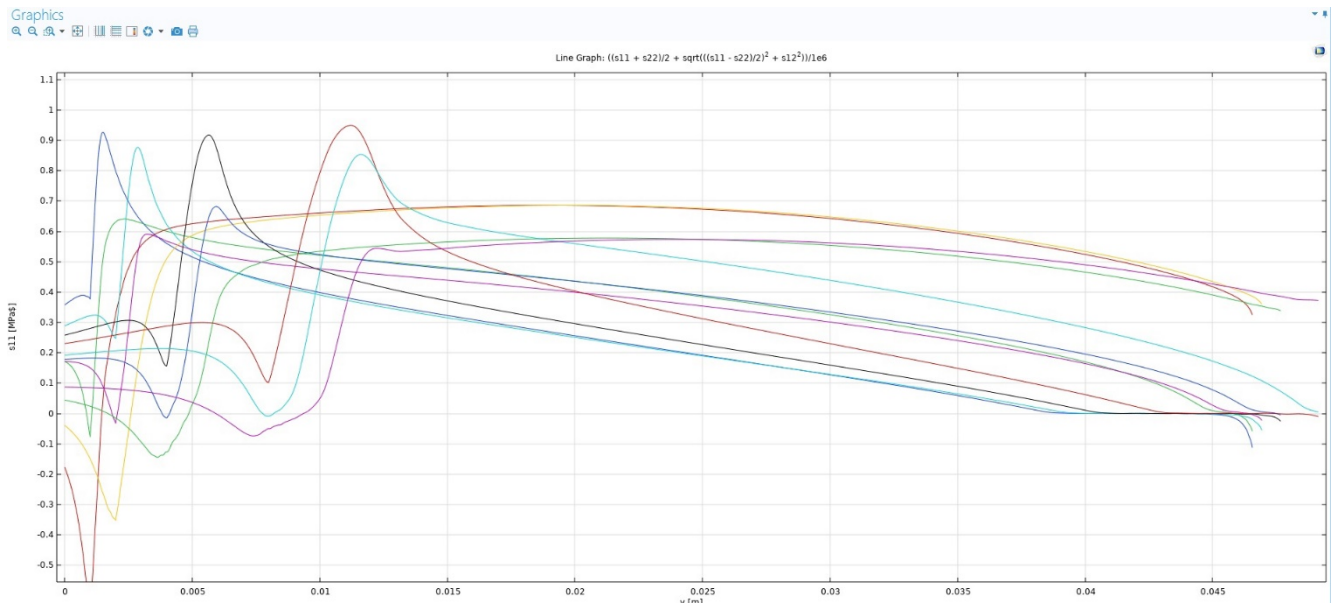


Рисунок 15 – Критерий максимальных главных напряжений для масштабного параметра l равного $200e-6$ м (по оси абсцисс откладывается распределение напряжений σ_{max} в зависимости от четверти длины дуги окружности скругления V-образного выреза)

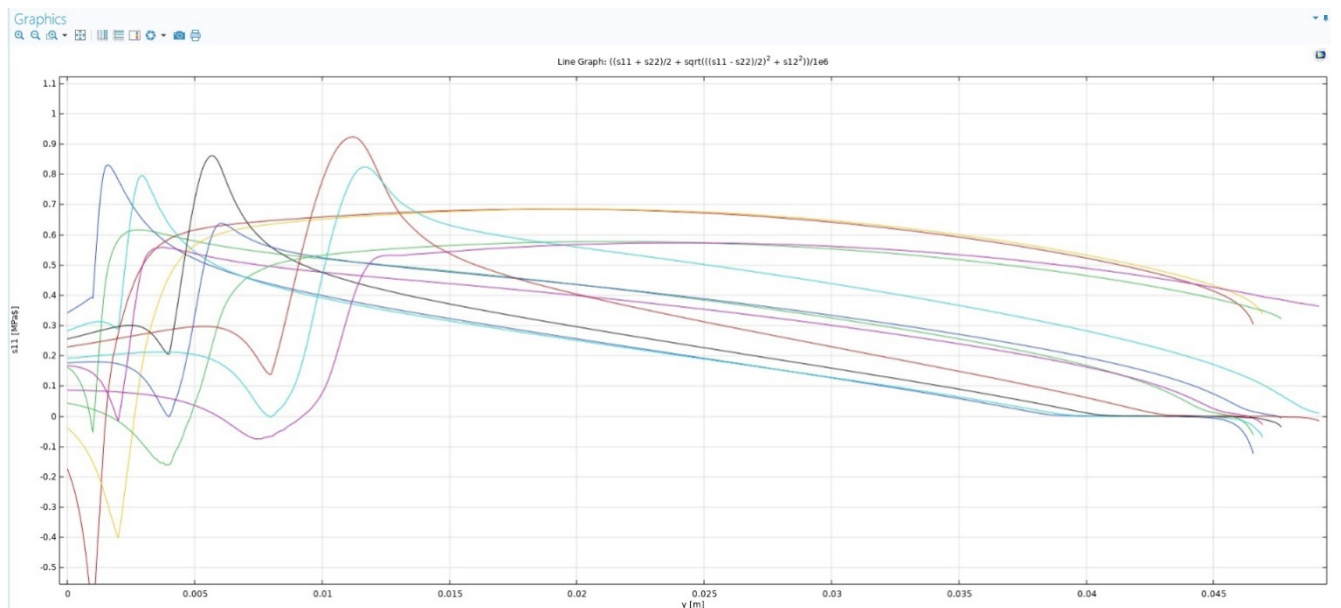


Рисунок 16 – Критерий максимальных главных напряжений для масштабного параметра l равного $300e-6$ м (по оси абсцисс откладывается распределение напряжений σ_{max} в зависимости от четверти длины дуги окружности скругления V-образного выреза)

На рисунках 14-16 разным цветом показано распределение 4-х критериев в зависимости от геометрических параметров задачи, таких как: угол поворота

диска относительно прикладываемой нагрузки, угол центрального V-образного выреза и радиуса скругления.

Как видно из графиков 14-16, можно отметить, что лучшее соответствие результатов принятой концепции при использовании критерия по максимальным главным напряжениям имеет место при масштабном параметром l равном $300\text{e-}6$ м. Однако при таком значении погрешность при определении концентрации напряжений (как показатель места наиболее вероятного зарождения трещины) составляет 10%, при том что при l равным $200\text{e-}6$ м он в среднем по сравнению с экспериментом отличается всего на 2%. Поэтому предлагается выбирать среднее значение для его определения ($l = 250\text{e-}6$ м).

4.5 Сравнения результатов с экспериментальными исследованиями

При масштабном параметре равным $250\text{e-}6$ точка зарождения трещины, найденная в конечно элементном моделировании почти полностью совпадает с экспериментом и так же хорошо описывается критерием максимальных главных напряжений. Результаты сравнения приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Сравнение результатов, полученных при конечно-элементном расчете с экспериментом

| 2α | ρ (радиус скругления) | θ (поворот образца) | Концентратор (α_0 , расчет) | Концентратор (эксперимент) | Угол роста трещины с учетом площадки, β | Отклонение от эксперимента, % |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------|----------------------------|---|-------------------------------|
| 30 | 1 | 30 | 57,04 | 63,00 | 83,87 | 10 |
| 30 | 1 | 40 | 66,18 | 66,00 | 91,12 | 0 |
| 30 | 1 | 50 | 74,05 | 75,00 | 96,83 | 1 |
| 30 | 2 | 30 | 54,44 | 59,00 | 78,71 | 8 |
| 30 | 2 | 40 | 61,54 | 63,70 | 83,63 | 4 |
| 30 | 2 | 50 | 69,17 | 70,70 | 87,33 | 2 |
| 30 | 4 | 30 | 50,17 | 53,00 | 69,12 | 6 |
| 30 | 4 | 40 | 57,23 | 60,30 | 75,57 | 5 |
| 30 | 4 | 50 | 63,66 | 62,30 | 77,63 | 2 |
| 60 | 2 | 30 | 48,41 | 50,30 | 66,99 | 4 |
| 60 | 2 | 40 | 57,32 | 57,70 | 74,27 | 1 |
| 60 | 2 | 45 | 62,24 | 60,00 | 78,05 | 4 |
| 60 | 4 | 30 | 45,91 | 48,70 | 62,46 | 6 |
| 60 | 4 | 40 | 51,81 | 55,70 | 63,82 | 8 |
| 60 | 4 | 45 | 55,39 | 56,50 | 65,79 | 2 |
| Среднее отклонение, %: | | | | | | 4 |

Система координат вдоль которых находились угол начала роста трещины α_0 и направление роста трещины β представлены на рисунке 17.

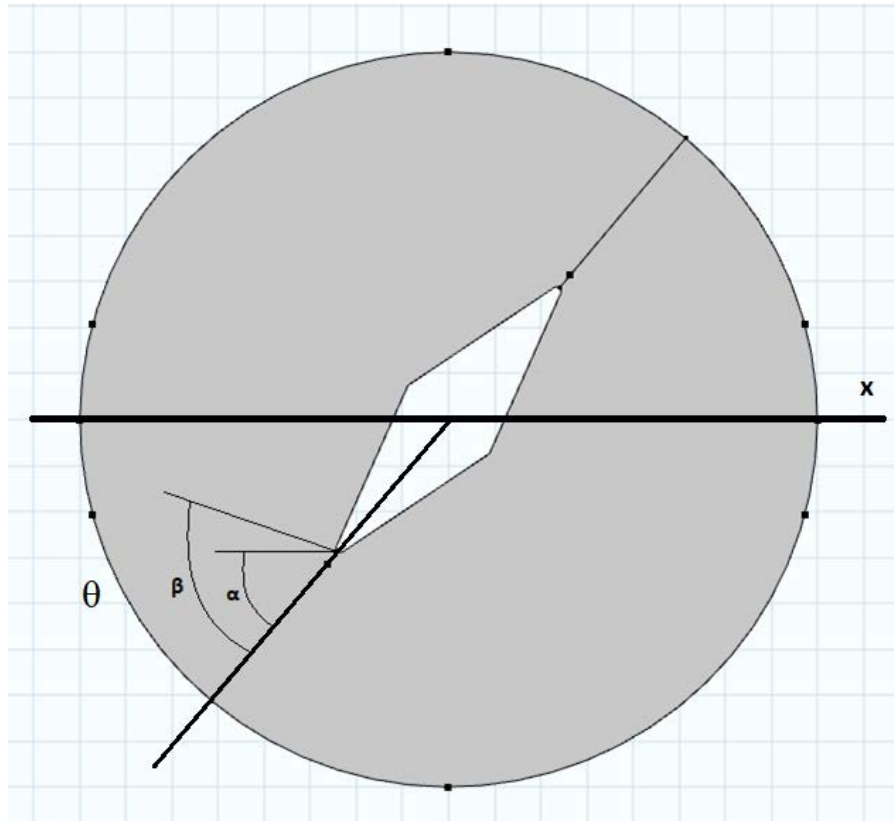


Рисунок 17 – Положение системы координат для расчета начала роста трещины

4.6 Исследование угла роста (распространения) трещины

Для определения угла роста трещины использовалась другая модель, построенная на эксперименте [90] для которого имеются экспериментальные данные.

В данной работе испытывалась пластина из того же материала подверженная трехточечному изгибу. Схема нагружения приведена на рисунке 15. Конечно-элементная модель создана в том же программном обеспечении, с использованием тех же подходов, что и для задачи расчета концентратора напряжения «бразильского» диска.

Моделирование проводилось с углом отклонения первоначальной трещины равным 0, 15, 26, 33 и 39 градусам. Геометрические характеристики, обозначенные на рисунке 18 не варьировались и соответственно равны:

$W=12$ мм; $S=18$ мм; $L=36$ мм; $t=4$ мм, угол отклонения варьируются соответственно: $\alpha_1=0^\circ$; $\alpha_2=15^\circ$; $\alpha_3=26^\circ$; $\alpha_4=33^\circ$; $\alpha_5=39^\circ$; а длина трещины соответственно варьируется по углу α_n : $a_n = 0.3W(1 - \cos(\alpha_n))$

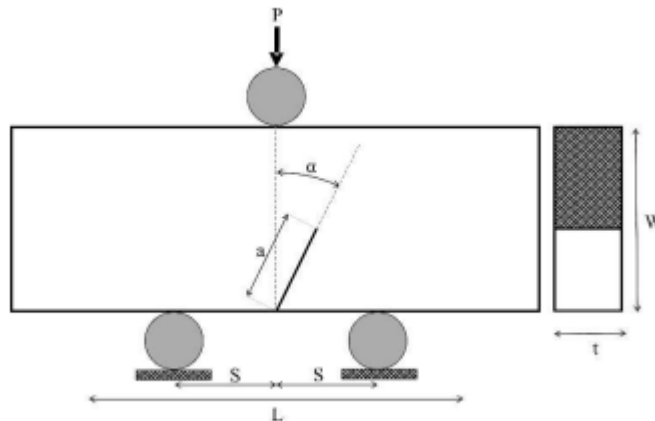


Рисунок 18 – Схема нагружения и тип образца

Как и в предыдущем случае каждому начальному углу поворота трещины соответствует своя разрушающая нагрузка. Параметры, при которых производили испытания приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Нагрузка при разрушении образца соответствующая углу направления начальной трещины

| Угол направления начальной трещины, ° | Нагрузка при разрушении P, Н |
|---------------------------------------|------------------------------|
| 0 | 430,3 |
| 15 | 570,3 |
| 26 | 603,8 |
| 33 | 693,8 |
| 39 | 792,1 |

Геометрия модели в зависимости от начального угла трещины представлена на рисунке 19.

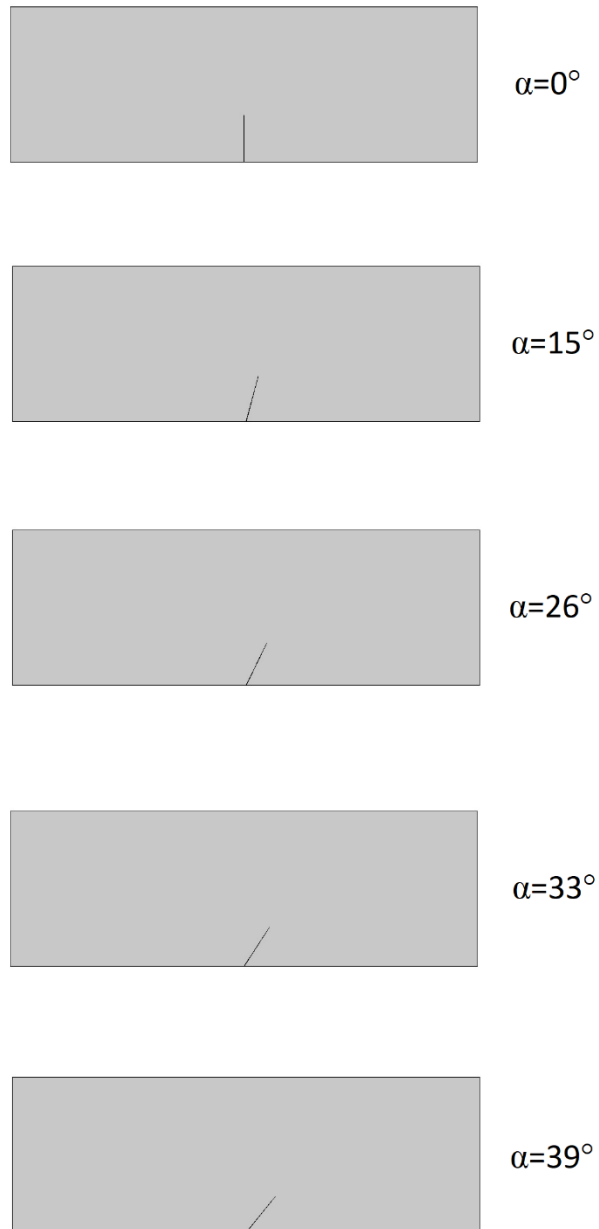


Рисунок 19 – Геометрия модели в зависимости от угла распространения начальной трещины

Конечно-элементная сетка для угла $\alpha_5=39^\circ$ представлена на рисунке 20.

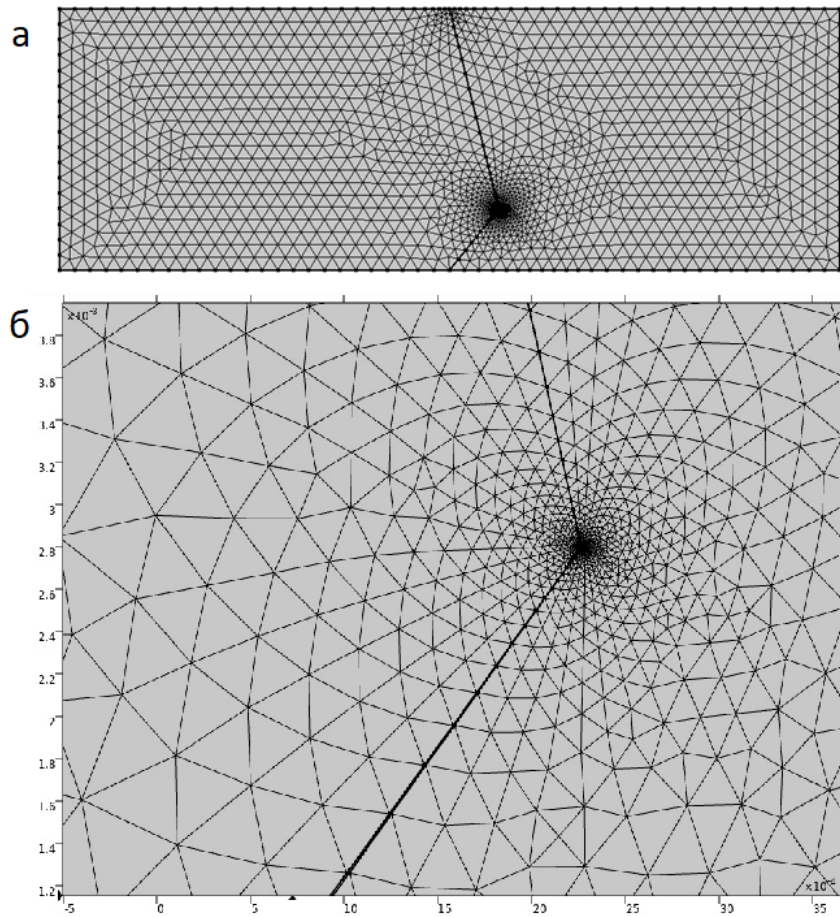


Рисунок 20 – Конечно-элементная сетка; а – по всему образцу; б – в вершине трещины

Распределение напряжений S_{11} по образцу представлена на рисунке 21.

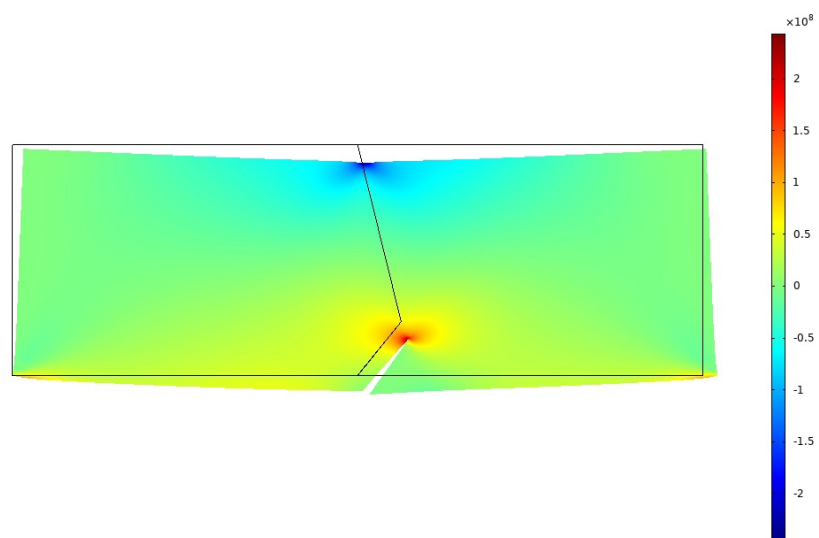


Рисунок 21 – Распределение напряжений S_{11}

Для данного образца так же исследуется влияние масштабного параметра и выбор критерия по напряжениям в зависимости от угла наклона первоначальной трещины и ее длины для определения направления развития трещины в соответствии с концепцией концентрации напряжений.

Оказалось, в этом случае снова, что масштабный параметр не зависит как от длины трещины, так и от его угла поворота и при вычисленном его значении $l=250e-6$ м критерий по максимальным напряжениям имеет вид, как показано на рисунке 22, но оказывается важным выбор критерия.

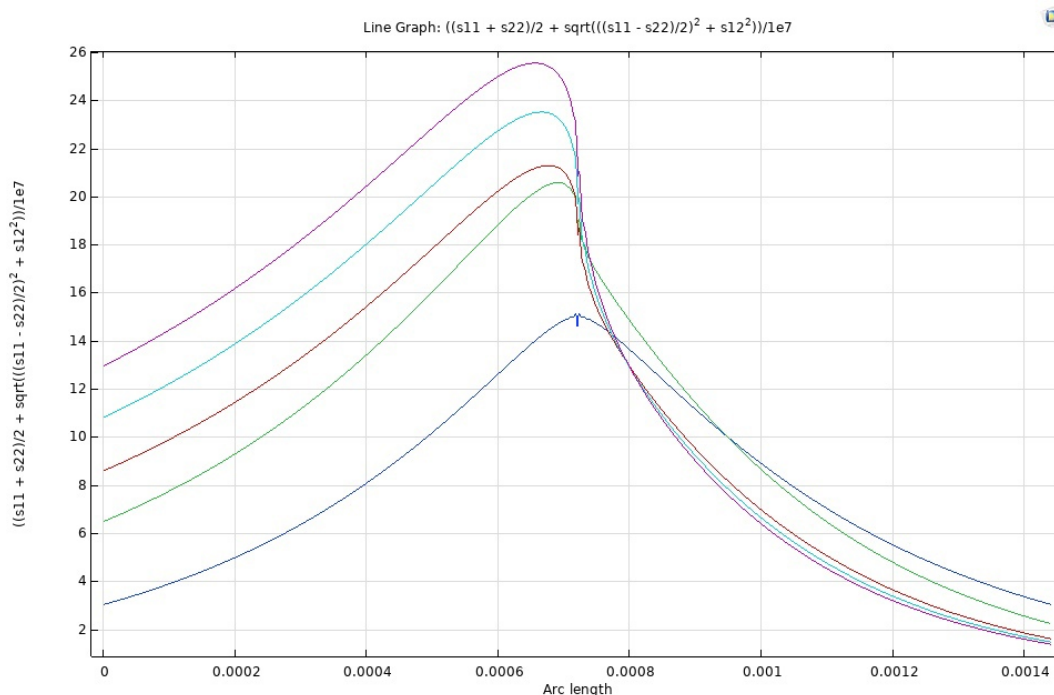


Рисунок 22 – Критерий максимальных напряжений в зависимости от угла поворота первоначальной трещины (по оси абсцисс откладывается распределение по длине преднанесенной трещины напряжений σ_{max}), синим цветом показан 0° , зеленым 15° , бордовым 26° , голубым 33° и фиолетовым 36°

Так же было выяснено что, концепция концентрации напряжений показывает хорошее соответствие данным эксперимента как для угла $\alpha_1=0^\circ$ соответствующему критерию по максимальным нормальным напряжениям σ_B (рисунок 23), так и для угла $\alpha_1=39^\circ$ по критерию по максимальных касательных напряжений τ_B (что соответствует чистому сдвигу (рисунок 24)).

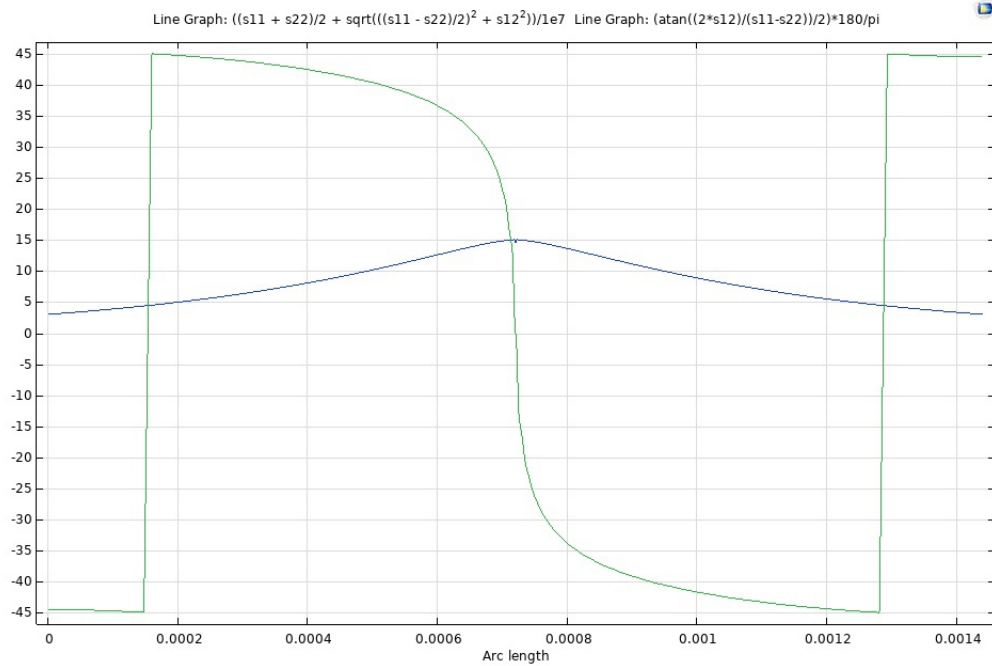


Рисунок 23 – Критерий по максимальным нормальным напряжениям (по длине преднанесенной трещины синим цветом по оси абсцисс откладывается распределение напряжений $\sigma_{max}/10e6$, зеленым – угол распространения трещины).

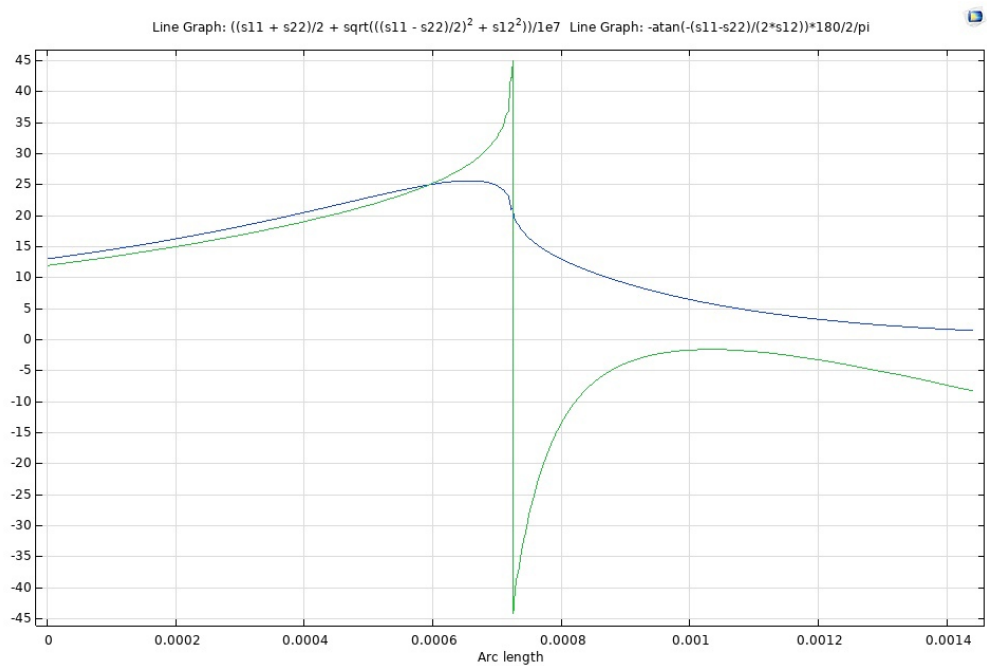


Рисунок 24 – Критерий по максимальным касательным напряжениям (по длине преднанесенной трещины синим цветом по оси абсцисс откладывается распределение напряжений $\tau_{max}/10e6$, зеленым – угол распространения трещины)

Для угла $\alpha_1=0^\circ$ и $\alpha_2=39^\circ$ были найдены углы распространения трещины при разрушении. Для первого случая (мода I) она равно 0° , а для $\alpha_2=39^\circ$ (мода II) 84° и произведено сравнение с экспериментом [90].

Для α_1 угол распространения трещины совпадает с экспериментом, а для $\alpha_2=39^\circ$ отличается на 7%.

4.7 Заключение

Представлены результаты численного моделирования в рамках градиентной теории упругости для задач с концентрацией напряжений. Моделирование сопоставлено с известными экспериментальными данными. Рассмотрены варианты испытаний на разрушение «бразильских» дисков с закругленным V-образным разрезом в условиях сжатия для различных значений угла наклона и радиуса скругления надреза с целью экспериментального определения разрушающей нагрузки и угла, при котором начинается разрушение. Рассмотрен также вариант испытания на трехточечный изгиб образцов с наклонными трещинами. Подобраны критерии позволяющие описать начало разрушения материала. Найдены точки зарождения и углы роста трещины. Проведена оценка результатов с помощью четырех предложенных критериев, формулируемых относительно напряжений: критерий максимальных главных напряжений, критерий Треска, критерий Мизеса. Показано что критерий максимальных главных напряжений наиболее точно описывает поведение материала под нагрузкой. Установлено, что направление роста трещины может прогнозироваться на основе критерия по максимальным главным напряжениям в условиях состояний, близких к моде I, и на основе критерия по максимальным касательным напряжения, для, соответственно, моды II. При этом в рамках реализованного подхода соответствующие критерии используются для определения ориентации площадок, по которым происходит рост трещины (площадка максимальных главных напряжений и максимальны касательных

напряжений). Установлено, что указанные критерии позволяют определить диапазон углов роста трещины, однако в условиях нагружения по смешанной моде ни один из этих критериев не позволяет получить точные значения (критерии дают верхнюю и нижнюю оценку). Поэтому задача для дальнейших исследований должна быть связана с формулировкой комбинированных критериев для оценки направления роста трещины в условиях сложнапряженного состояния в рамках решений градиентной теории упругости.

Найдены значения масштабного параметра рассматриваемого материала (ПММА). Этот параметр подобран по условия наилучшего описания имеющихся экспериментальных данных. Показано что масштабный параметр материала не зависит от угла поворота начальной трещины, а также от ее длины. Исследована зависимость прогнозируемого угла распространения трещины от значений масштабного параметра.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Впервые установлено, что учет дополнительного признака симметрии по отношению к классическим теориям упругости в краевых условиях является существенным и определяет класс корректных моделей градиентной упругости. Фактически это означает необходимость ревизии и проверки на корректность всех прикладных градиентных модели упругости. Исключением являются модели соответствующие модели Миндлина формы I.

2. Новым в области градиентных теорий является результат, связанный выделением класса краевых задач градиентной теории упругости, в которых условие симметрии по порядку дифференцирования должно обязательно учитываться путем введения дополнительного требования симметрии к моментным напряжениям. К ним относятся так называемые векторные модели, где статические краевые условия ставятся на те же обобщенные напряжения (total stresses), что входят в уравнения равновесия. Установлено, что учет симметрии в граничных статических условиях и на ребрах обязателен, если поверхность тела кусочно гладкая и имеет кривизну. Показано что неучёт условий симметрии приводит к тому что, решение для напряжений (например, Коши) будет зависеть от энергетические несущественных физических констант, которые могут приводить к значительным ошибкам.

4. На основе численного моделирования в рамках градиентной теории упругости показана возможность описания известных экспериментальных данных для образцов с концентраторами в виде вырезов с различным радиусом скругления. Для этих экспериментов получены прогнозы по разрушающим нагрузкам, расположению точек зарождения трещин и углов их распространения. Показано, что идентифицируемое значение масштабного параметра для образцов с вырезами не зависит от их угла наклона по отношению к нагрузке при использовании критерия по максимальным главным напряжениям. На основе сопоставления расчетов и экспериментов для образцов с трещинами показано, что на основе представленных численных решений возможно прогнозирование угла

роста трещины в условиях состояний, близких к чистой моде I или моде II, на основе критериев, связанных с нахождением площадок максимальных главных и максимальных касательных напряжений, соответственно. Для нагружения по смешанной моде необходимо формулировать комбинированные критерии, что является задачей для будущей работы.

.

ЛИТЕРАТУРА

1. Toupin, R.A., 1962. Elastic materials with couple stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.* 11, 385-414.
2. Mindlin, R.D. 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 16, 51-78.
3. Mindlin, R.D., Eshel, N.N., 1968. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 4, 109-124.
4. Auffray, N., Le Quang, H., He, H.C., 2013. Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 61, 1202–1223.
5. Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 1997. Strain gradient plasticity. In: Hutchinson, J.W., Wu, T.Y. (Eds.), *Advances in Applied Mechanics*, vol. 33. Academic Press, New York, pp. 295-361.
6. Liu, X.N., Huang, G.L., Hu, G.K., 2012. Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices. *J. Mech. Phys. Solids* 60, 1907–1921. Ma, H.M.,
7. Gao, X.-L., Reddy, J.N., 2008. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *J. Mech. Phys. Solids* 56, 3379–3391.
8. Wang, Q, Wang, C.M., 2007. The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes. *Nanotechnology* 18, 075702.
9. Forrest, S., 1998. Mechanics of generalized continua: construction by homogenization. *J. Phys. IV* 8, 39–48
10. Gusev A.A. and Lurie S.A. 2017. Symmetry conditions in strain gradient elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(4):683–691.
11. Vasiliev V. V., Lurie S. A. 2016. On correct nonlocal generalized theories of elasticity. *Physical Mesomechanics* 07/2016; 19(3):269-281., DOI:10.1134/S102995991603005X
12. dell’Isola, F., Sciarra, G., Vidoli, S., 2009. Generalized Hooke’s law for isotropic second gradient materials. *Proc. R. Soc. A* 465, 2177-2196.

13. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная модель микрогетерогенных сред», 2009, «Прикладная математика и механика», Т. 73. № 5. стр. 599-608].
14. Ludu, Andrei *Nonlinear Waves and Solitons on Contours and Closed Surfaces*, 2007, Springer, 466 DOI:10.1007/978-3-540-72873-3
15. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O., Aifantis E.C. 2017. On one class of applied gradient models with simplified boundary problems. *Materials Physics and Mechanics* 01/2017; 32(3):353-369.
16. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1962, vol. 11, pp. 385-414.
17. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964, no. 16, pp. 51-78.
18. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity // *International Journal of Solids and Structures*, 1968, no. 4, pp. 109-124. DOI:[10.1016/0020-7683\(68\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90036-X)
19. Altan B.S., Aifantis E.C. On the structure of the mode-III crack-tip in gradient elasticity // *Scripta Metallurgica Et Materialia*, 1992, no. 26, pp. 319–324. DOI:[10.1016/0956-716X\(92\)90194-J](https://doi.org/10.1016/0956-716X(92)90194-J)
20. Vardoulakis I., Georgiadis H.G. SH surface waves in a homogeneous gradientelastic half-space with surface energy // *Journal of Elasticity*, 1997, no. 47, pp. 147-165. URI:<http://hdl.handle.net/123456789/12434>
21. S. Li, I. Miskioglu, B.S. Altan. Solution to line loading of a semi-infinite solid in gradient elasticity // *International Journal of Solids and Structures*, 2004, no. 41, pp. 3395-3410. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2004.02.010](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.02.010)
22. Aifantis E.C. et al. The role of interfaces in enhancing the yield strength of composites and polycrystals // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, no. 53, pp. 1047-1070. DOI:[10.1016/j.jmps.2004.12.003](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2004.12.003)
23. Gusev A.A., Lurie S.A. Strain-gradient elasticity for bridging continuum and atomistic estimates of stiffness of binary Lennard-Jones crystals // Advanced Engineering Materials, 2010, no.12, pp. 529–533. DOI: [10.1002/adem.201000004](https://doi.org/10.1002/adem.201000004)

24. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity. *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, 1997, vol. 33, pp. 295-361. DOI:[10.1016/S0065-2156\(08\)70388-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70388-0)
25. Liu X.N., Huang G.L., Hu, G.K. Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2012, no. 60, pp. 1907–1921. DOI:[10.1016/j.jmps.2012.06.008](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2012.06.008)
26. Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, no. 56, no. 3379-3391. DOI:[10.1016/j.jmps.2008.09.007](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.09.007)
27. Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных*. М.: Высшая школа, 1977, 423с
28. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Наука, 1977. 416 с.
29. N. Dourado, S. Morel, *On the Evaluation of the R-Curve Including the Self-Weight Contribution: Mortar*, 2011
30. Bazant, Z. P., Yu, Q., 2009. Universal size effect law and effect of crack depth on quasi-brittle structure strength. *Journal of engineering mechanics* 135 (2), 78–84.
31. Taylor, D., 2008. The theory of critical distances. *Engineering Fracture Mechanics* 75 (7), 1696–1705.
32. P. Lazzarin, R. Zambardi, A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches, *International Journal of Fracture* volume 112, pages 275–298 (2001)
33. Fries, T.-P., Belytschko, T., 2010. The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications. *International journal for numerical methods in engineering* 84 (3), 253–304.
34. Khosravifard, A., Hematiyan, M., Bui, T., Do, T., 2017. Accurate and efficient analysis of stationary and propagating crack problems by meshless methods. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 87, 21–34.

35. Ching, H., Batra, R., 2001. Determination of crack tip fields in linear elastostatics by the meshless local. CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences.
36. Breitenfeld, M., Geubelle, P., Weckner, O., Silling, S., 2014. Non-ordinary state-based peridynamic analysis of stationary crack problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 272, 233–250.
37. Ambati, M., Gerasimov, T., De Lorenzis, L., 2015. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics* 55 (2), 383–405.
38. Makvandi, R., Duczek, S., Juhre, D., 2019. A phase-field fracture model based on strain gradient elasticity. *Engineering Fracture Mechanics* 220, 106648.
39. Sciarra, G., Vidoli, S., 2013. Asymptotic fracture modes in strain-gradient elasticity: Size effects and characteristic lengths for isotropic materials. *Journal of Elasticity* 113 (1), 27–53.
40. Gourgiotis, P., Sifnaiou, M., Georgiadis, H., 2010. The problem of sharp notch in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *International journal of fracture* 166 (1-2), 179–201.
41. Gourgiotis, P., Georgiadis, H., 2009. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57 (11), 1898–1920.
42. Aravas, N., Giannakopoulos, A., 2009. Plane asymptotic crack-tip solutions in gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures* 46 (25-26), 4478–4503.
43. Morini, L., Piccolroaz, A., Mishuris, G., Radi, E., 2013. On fracture criteria for dynamic crack propagation in elastic materials with couple stresses. *International Journal of Engineering Science* 71, 45–61.
44. Kotoul, M., Profant, T., 2018. Asymptotic solution for interface crack between two materials governed by dipolar gradient elasticity. *Engineering Fracture Mechanics* 201, 80–106.

45. Lurie, S., Belov, P., 2014. Gradient effects in fracture mechanics for nanostructured materials. *Engineering Fracture Mechanics* 130, 3–11.
46. Joseph, R. P., Wang, B., Samali, B., 2018. Strain gradient fracture in an antiplane cracked material layer. *International Journal of Solids and Structures* 146, 214–223.
47. Isaksson, P., Hagglund, R., 2013. Crack-tip fields in gradient enhanced elasticity. *Engineering Fracture Mechanics* 97, 186–192.
48. Chen, S., Wang, T., 2002. Finite element solutions for plane strain mode I crack with strain gradient effects. *International journal of solids and structures* 39 (5), 1241–1257.
49. Imatani, S., Hatada, K., Maugin, G., 2005. Finite element analysis of crack problems for strain gradient material model. *Philosophical Magazine* 85 (33-35), 4245–4256.
50. Karlis, G., Tsinopoulos, S., Polyzos, D., Beskos, D., 2007. Boundary element analysis of mode I and mixed mode (I and II) crack problems of 2-d gradient elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (49-52), 5092–5103.
51. Rudraraju, S., Van der Ven, A., Garikipati, K., 2014. Three-dimensional isogeometric solutions to general boundary value problems of Toupin's gradient elasticity theory at finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 278, 705–728.
52. Kolo, I., Askes, H., de Borst, R., 2017. Convergence analysis of Laplacian-based gradient elasticity in an isogeometric framework. *Finite Elements in Analysis and Design* 135, 56–67.
53. Markolefas, S., Papathanasiou, T., Georgantzinos, S., 2019. p-extension of C0 continuous mixed finite elements for plane strain gradient elasticity. *Archives of Mechanics* 71 (6), 567–593.
54. Kotoul, M., Skalka, P., Profant, T., Řehák, P., Šesták, P., Černý, M., Pokluda, J., 2020. A novel multiscale approach to brittle fracture of nano/micro-

- sized components. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 43 (8), 1630–1645.
55. Papanicolopoulos, S.-A., Zervos, A., 2010. Numerical solution of crack problems in gradient elasticity. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering and Computational Mechanics* 163 (2), 73–82.
56. Barchiesi, E., Yang, H., Tran, C., Placidi, L., Müller, W., 2020. Computation of brittle fracture propagation in strain gradient materials by the fenics library. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1081286520954513.
57. Placidi, L., Barchiesi, E., 2018. Energy approach to brittle fracture in strain-gradient modelling. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 474 (2210), 20170878.
58. Askes, H., Livieri, P., Susmel, L., Taylor, D., Tovo, R., 2013. Intrinsic material length, theory of critical distances and gradient mechanics: analogies and differences in processing linear-elastic crack tip stress fields. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 36 (1), 39–55.
59. Askes, H., Susmel, L., 2013. Gradient enriched linear-elastic crack tip stresses to estimate the static strength of cracked engineering ceramics. *Frattura ed Integrità Strutturale* 7 (25), 87–93.
60. Bagni, C., Askes, H., Susmel, L., 2015. Gradient-enriched linear-elastic tip stresses to perform the high-cycle fatigue assessment of notched plain concrete. *Frattura ed Integrità Strutturale* (33), 105–110.
61. Askes, H., Susmel, L., 2015. Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 38 (2), 154–160.
62. Solyaev, Y., Lurie, S., Korolenko, V., 2019. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 78, 103853.
63. Solyaev, Y. O., Lurie, S. A., 2021. Trefftz collocation method for two-dimensional strain gradient elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 122 (3), 823–839.

64. Vasiliev, V., Lurie, S., 2020. New method for studying the strength of brittle bodies with cracks. *Russian Metallurgy (Metally)* 2020, 291–297.
65. Vasiliev, V., Lurie, S., Salov, V., 2019. Estimation of the strength of plates with cracks based on the maximum stress criterion in a scale-dependent generalized theory of elasticity. *Physical Mesomechanics* 22 (6), 456–462.
66. Vasiliev, V., Lurie, S., Salov, V., 2020. Determination of a load causing the appearance of plastic deformation in a tensile plate with a crack. *Mechanics of Solids* 55 (4), 490–495.
67. Ru, C., Aifantis, E., 1993. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta Mechanica* 101 (1), 59–68.
68. Askes, H., Aifantis, E. C., 2011. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures* 48 (13), 1962–1990.
69. Lazar, M., Po, G., 2018. On mindlin's isotropic strain gradient elasticity: Green tensors, regularization, and operator-split. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics* 3 (03n04), 1840008.
70. Lazar, M., Polyzos, D., 2015. On non-singular crack fields in helmholtz type enriched elasticity theories. *International Journal of Solids and Structures* 62, 1–7.
71. Aifantis, E. C., 2014. On non-singular gradela crack fields. *Theoretical and Applied Mechanics Letters* 4 (5), 051005.
72. Amanatidou, E., Aravas, N., 2002. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (15-16), 1723–1751.
73. Phunpeng, V., Baiz, P., 2015. Mixed finite element formulations for strain-gradient elasticity problems using the fenics environment. *Finite Elements in Analysis and Design* 96, 23–40.
74. Andreaus, U., Dell'Isola, F., Giorgio, I., Placidi, L., Lekszycki, T., Rizzi, N. L., 2016. Numerical simulations of classical problems in two-dimensional (non)

- linear second gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science* 108, 34–50.
75. Reiher, J. C., Giorgio, I., Bertram, A., 2017. Finite-element analysis of polyhedra under point and line forces in second-strain gradient elasticity. *Journal of Engineering Mechanics* 143 (2), 04016112.
76. Carpinteri, A., Paggi, M., 2009. Asymptotic analysis in linear elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today. *Engineering Fracture Mechanics* 76 (12), 1771–1784.
77. Gao, X.-L., Park, S., 2007. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *International Journal of Solids and Structures* 44 (22-23), 7486–7499.
78. Cherepanov, G.P. *Mechanics of Brittle Fracture*; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 1979.
79. Anderson, T. L., 2017. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC press.
80. Miannay, D.P. *Fracture Mechanics*; Springer: Berlin, Germany, 2012
81. Carpinteri, A., Cornetti, P., Pugno, N., Sapora, A., Taylor, D., 2008. A finite fracture mechanics approach to structures with sharp V-notches. *Engineering Fracture Mechanics* 75 (7), 1736–1752.
82. Vasiliev, V.V.; Lurie, S.A. Generalized theory of elasticity. *Mech. Solids* 2015, 50, 379–388.
83. Vasiliev, V.V.; Lurie, S.A. Nonlocal Solutions to Singular Problems of Mathematical Physics and Mechanics. *Mech. Solids* 2018, 53, 135–144.
84. Lurie, S.; Volkov-Bogorodskiy, D.; Moiseev, E.; Kholomeeva, A. Radial multipliers in solutions of the Helmholtz equations. *Integral Transform. Spec. Funct.* 2019, 30, 254–263.
85. С.А. Лурье, Д.Б. Волков-Богородский, Тензор Грина и решение задачи Буссинеска в обобщенной теории упругости, *Механика Твёрдого Тела*, №4, 2018, с. 100-114

86. Васильев В.В., Лурье С.А. Новое решение осесимметричной контактной задачи теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 12-21.
87. Работнов Ю.Н., Введение в механику разрушения, 1987
88. Ted L. Anderson, Fracture Mechanics Fundamentals and Applications, Fourth Edition 2017
89. A. R. Torabi, B. Bahrami, M. R. Ayatollahi Mixed mode I/II brittle fracture in V-notched Brazilian disk specimens under negative mode I conditions, Physical Mesomechanics volume 19, pages 332–348 (2016)
90. S.S. Mousavi, M.R.M. Aliha, D.M. Imani, On the use of edge cracked short bend beam specimen for PMMA fracture toughness testing under mixed-mode I/II, Polymer Testing Volume 81, January 2020, 106199