

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 629.4.015, 62-752, 621.01, 62-932.4, 51-74, 534.014, 531.4

DOI: [10.34759/trd-2021-120-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-08)

Новые подходы в оценке динамических свойств колебательных структур: частотные функции и связность движений

**Андрей Владимирович Елисеев^{1✉}, Николай Константинович Кузнецов²,
Сергей Викторович Елисеев³**

^{1,2}Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

³Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

¹eavsh@ya.ru ✉

²knik@istu.edu

³eliseev_s@inbox.ru

Аннотация. Развиваются научно-методологические основы решения задач динамики объектов технологического и транспортного назначения, работающих в условиях повышенных вибрационных динамических нагрузок. Цель предлагаемого исследования заключается в разработке детализированных подходов в анализе динамических свойства технических средств (машин, оборудования, приборов), расчетные схемы которых отображаются в виде механических колебательных систем с несколькими степенями свободы. Используется аналитический аппарат системного анализа и его приложений к задачам динамики машин, защиты оборудования и приборов от вибрационных воздействий, что составляет основу подходов в обеспечении безопасности и надежности эксплуатации технических

средств. Рассмотрен эффект сближения частот динамического гашения колебаний к одной из собственных частот. Показана редукция механической системы с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы. Приводятся данные численного моделирования.

Ключевые слова: технический объект, расчетная схема, математическая модель, передаточная функция, динамическое гашение колебаний, связность движений, частотная функция

Финансирование: работа выполнена в рамках инициативной НИР

Для цитирования: Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Новые подходы в оценке динамических свойств колебательных структур: частотные функции и связность движений // Труды МАИ. 2021. № 120. DOI: [10.34759/trd-2021-120-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-08)

MECHANICS

Original article

New approaches to the estimation of dynamic properties of vibrational structures: frequency functions and connectivity of movements

Andrey V. Eliseev^{1✉}, Nikolai K. Kuznetsov², Sergey V. Eliseev³

^{1,2}Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

³Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

¹eavsh@ya.ru ✉

²knik@istu.edu

³eliseev_s@inbox.ru

Abstract. The scientific and methodological foundations for solving dynamics problems of technological and transport objects, operating under high vibration loads, are being developed. The purpose of the study consists in developing methods for dynamic properties analyzing of technical means (machines, equipment, devices), which design schemes are being reflected in the form of mechanical vibratory systems with several degrees of freedom. The studies are based on application of analytical apparatus of system analysis and its applications to the problems of machines dynamics, equipment and instruments protection from the vibrational impacts, which constitutes the basis for operational safety and reliability provision of hardware components. The issues of extra bonds, being realized by the simplest mechanisms, impact on the dynamic properties of the systems were regarded. Specifics of mechanical vibrational systems were studied based on introducing the notions on frequency systems and their forms. Specifics of dynamic vibrations damping modes under single and joint (by two coordinates) effect of the two periodical disturbances were studied. The numerical modeling data is presented. Characteristic modes of natural vibrations can be distinguished in the dynamics of mechanical vibrational systems, being regarded as design schemes of technical objects of both transport and technological purpose. Vibrations occurring herewith reflect the system reaction on the harmonic type external disturbances, representing movement of elements with certain amplitudes vibrations ratios along various coordinates. These ratios are being formed based on the parameters values of the system elements at the introduction notion on frequency functions, associated with the detailed regard of potential and kinetic

energies ratio, as well as natural vibrations frequencies function of the energy expressions structure. Particularly, extremal property of the potential and kinetic energies ratio of the system is associated with the natural vibrations frequencies values. Within the framework of the approach being developed, the effect of frequencies closing-in of the dynamic vibrations damping to the one of the natural frequencies was considered. The possibility of the limit mode of the mechanical system realization with two degrees of freedom in the form reduction to the system with one degree of freedom was demonstrated.

Keywords: technical object, design scheme, mathematical model, transfer function, dynamic vibration damping, motion connectivity, frequency function

Funding: the work was carried out within the framework of the initiative research

For citation: Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Eliseev S.V. New approaches to the estimation of dynamic properties of vibrational structures: frequency functions and connectivity of movements. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. DOI: [10.34759/trd-2021-120-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-08)

Введение

Технические объекты транспортного и технологического назначения часто работают в условиях интенсивного динамического нагружения различной природы. Вопросам безопасности эксплуатации машин, надежности реализаций техническими объектами производственно-технических функций уделяется большое внимание [1-3].

Возможности оценки, контроля и управления динамическими состояниями рассматриваются на всех стадиях «жизненного цикла» машин от теоретических

исследований до экспериментальной проверки динамического качества и уровня надежности [4-6].

В использовании подходов и методов динамики машин и системного анализа математическое моделирование технических объектов является достаточно сложной проблемой, поскольку исходный объект чаще всего представляет собой механическую систему со многими степенями свободы и включает в свой состав различные механизмы и связи между элементами машин. Развитие методов вычислительного моделирования дает возможность получать детализированную информацию о динамических свойствах объектов [7-9].

Вместе с тем, решение конкретных задач оценки и контроля динамических состояний в рамках вибрационной защиты и виброизоляции оборудования требует учёта динамических факторов при детализации рассмотрения конкретных конструктивно-технических форм введения дополнительных связей, реализуемых упругими элементами, демпферами, устройствами для преобразования движений и др. [10-12].

Разработка упрощенных подходов, связанных с использованием расчетных схем технических объектов, рассматриваемых как механические колебательные системы с несколькими степенями свободы, может создать условия для выявления особенностей систем [10, 13-15]. Возможности в оценке динамических свойств на основе энергетических подходов, связанных с введением частотных функций, рассмотрены в работах [3, 4, 16, 17].

Развитие методов системного анализа, основанных на использовании аналитического аппарата теории систем и теории автоматического управления позволяет рассматривать малоизученные динамические эффекты, возникающие в механических колебательных системах в режимах свободных колебаний или в режимах вынужденных движений элементов систем при одновременном действии нескольких гармонических возмущений.

Цель статьи заключается в развитии научно-методологической основ в решении задач динамики технических объектов, расчётные схемы которых могут быть представлены механическими колебательными системами с несколькими степенями свободы при учёте специфических динамических свойств, проявляющихся при введении дополнительных связей и при одновременном действии двух вибрационных возмущений.

I. Некоторые общие положения

Рассматривается упруго-диссипативная механическая колебательная система с двумя степенями свободы с встроенными устройствами преобразования движения с приведенными массами L_1, L_0, L_2 (рис.1). Система совершает вынужденные колебания в результате приложения к массам m_1 и m_2 гармонических сил Q_1 и Q_2 .

Особенностью является нетрадиционный типовой элемент в форме устройства для преобразования движения. Такое устройство, как элемент с приведённой массой

L , может быть реализовано на основе рычажного или винтового несамотормозящегося механизма [18].

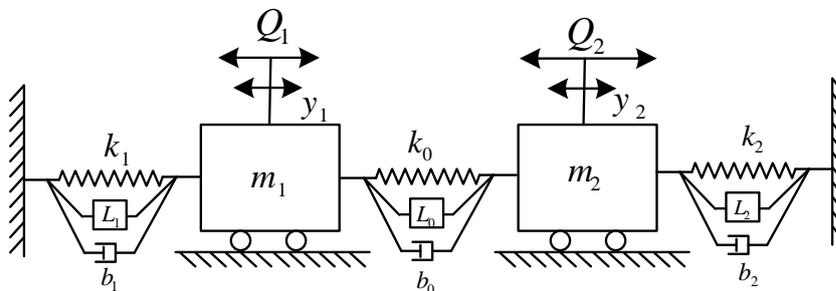


Рис. 1. Механическая колебательная система с учетом вязкого трения. k_0, k_1, k_2 – упругие элементы; b_0, b_1, b_2 – демпферы; L_0, L_1, L_2 – устройства для преобразования движения.

Для оценки динамических особенностей механических колебательных систем может быть использована частотная функция аргумента коэффициента связности. С физической точки зрения коэффициент связности выражает передаточное отношение рычажной связи между амплитудами колебаний обобщенных координат [17].

II. Особенности вынужденных колебаний при действии внешних гармонических возмущений

Рассматриваются вынужденные колебания под действием внешнего гармонического возмущения Q_1 , приложенного к массе m_1 , или Q_2 , приложенного к массе m_1 .

1. Обобщенные координаты y_1, y_2 обозначают смещение массо-инерционных элементов m_1, m_2 относительно положения статического положения. Кинетическая энергия T , потенциальная энергия Π и функция «диссипации энергии» (в дальнейшем «диссипации») F имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} L_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} L_0 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{y}_2^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (y_2 - y_1)^2, \quad (2)$$

$$F = \frac{1}{2} b_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} b_0 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{y}_2^2. \quad (3)$$

Для построения математической модели используется система уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1} = Q_1; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_2} = Q_2. \end{cases} \quad (4)$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} (m_1 + L_1 + L_0) \ddot{y}_1 - L_0 \ddot{y}_2 + (b_0 + b_1) \dot{y}_1 - b_0 \dot{y}_2 + (k_0 + k_1) y_1 - k_0 y_2 = Q_1; \\ (m_2 + L_2 + L_0) \ddot{y}_2 - L_0 \ddot{y}_1 + (b_0 + b_2) \dot{y}_2 - b_0 \dot{y}_1 + (k_0 + k_2) y_2 - k_0 y_1 = Q_2. \end{cases} \quad (5)$$

После преобразований Лапласа систему (5) можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (m_1 + L_1 + L_0)p^2 + (b_0 + b_1)p + k_0 + k_1, \\
A_{12} &= -L_0p^2 - b_0p - k_0, A_{21} = -L_0p^2 - b_0p - k_0, \\
A_{22} &= (m_2 + L_2 + L_0)p^2 + (b_0 + b_2)p + k_0 + k_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Представим систему уравнений (6) в виде

$$[(M + L)p^2 + Bp + C]\bar{Y} = \bar{Q}, \tag{8}$$

где M – матрица массо-инерционных коэффициентов, L - матрица коэффициентов устройств преобразования движений, B - матрица коэффициентов вязкого трения, C - матрица коэффициентов жесткости, \bar{Y} - вектор искомых функций, \bar{Q} - вектор правых частей, определенные выражениями:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 + L_0 & -L_0 \\ -L_0 & L_2 + L_0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 & -b_0 \\ -b_0 & b_0 + b_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 + k_2 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix}, \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}. \tag{9'}$$

2. В (8) комплексная переменная Лапласа $p = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$ имеет действительную часть, $\sigma \neq 0$, что отображает, в физическом смысле, влияние сил сопротивления на свободные колебания, которые принимают затухающий характер [5]. При пренебрежимо малых силах сопротивления движению элементов предполагается, что $p = j\omega$ [19]. Далее рассматриваются пренебрежимо малые силы сопротивления.

3. Для оценки динамических особенностей используется частотная энергетическая функция, обладающая рядом особенностей [17]. К примеру, частотная функция в экстремальных значениях достигает собственные частоты

системы, а при $\alpha \rightarrow \infty$ или $\alpha \rightarrow 0$ приближается к значениям частот динамического гашения.

Частотная энергетическая функция может быть получена из условия

$$A_{11} + \alpha (A_{12} + A_{21}) + \alpha^2 A_{22} = 0 \quad (10)$$

в форме:

$$\omega^2(\alpha) = \frac{(k_0 + k_2)\alpha^2 - 2k_0\alpha + k_0 + k_2}{(L_0 + L_2 + m_2)\alpha^2 - 2L_0\alpha + L_0 + L_1 + m_1}. \quad (11)$$

Функция $W^{(-1)}$ обратная к амплитудно-частотной характеристике передаточной функции межпарциальной связи может быть определена из условий

$$A_{21} + \alpha A_{22} = 0, p = j\omega \quad (12)$$

в виде:

$$W^{(-1)} = \frac{(k_0 + k_2)\alpha - k_0}{(L_0 + L_2 + m_2)\alpha - L_0}, \quad (13)$$

где под передаточной функцией межпарциальных связей понимается отношение \bar{y}_2/\bar{y}_1 при условии $\bar{Q}_2=0$:

$$W_{21}(p = j\omega) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = -\frac{A_{21}}{A_{22}}. \quad (14)$$

Таким образом, связь между частотной энергетической функцией ω^2 , отражающей динамические характеристики свободных движений, и режимами вынужденных колебаний может быть отражена путем сравнения с функцией $W^{(-1)}$, обратной к амплитудно-частотной характеристике передаточной функции межпарциальных связей $W_{21}(j\omega)$.

4. Графически связь между функциями $W^{(-1)}$ и ω^2 отражена на рис. 2.

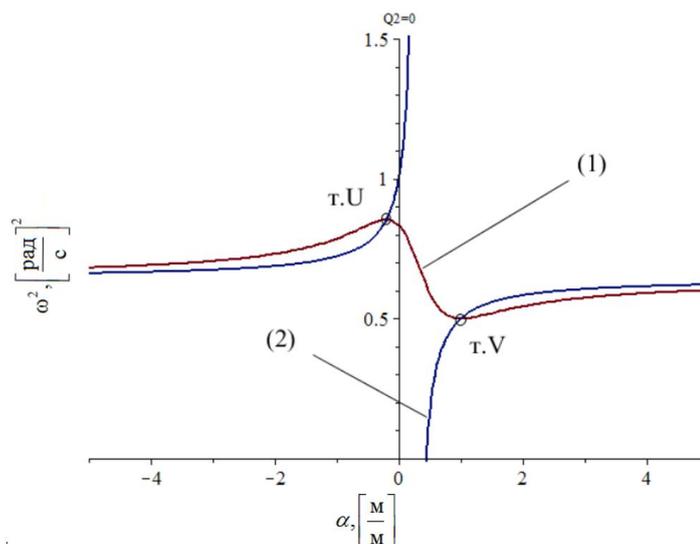


Рис.2. Функциональные характеристики динамических свойств механической колебательной системы. 1 – частотная функция ω^2 , 2 – функция, обратная к передаточной функции межпарциальной связи $W^{(-1)}$.

На рис. 2 представлены характеристики механической колебательной системы с параметрами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 7$ кг, $k_0 = 4$ Н/м, $k_1 = 1$ Н/м, $k_2 = 5$ Н/м, $L_0 = 4$ кг, $L_1 = 1$ кг, $L_2 = 3$ кг. Пересечение графиков функций происходит в тт. U и V, абсциссы которых одновременно равны квадратам собственных частот системы и являются экстремальными значениями для частотной функции ω^2 .

III. Особенности режимов динамического гашения колебаний

В динамике машин большое внимание уделяется вопросам вибрационной защиты и виброизоляции технических объектов. В этом плане интерес вызывают эффекты динамического гашения колебаний [3, 5, 10]. Особенности режимов

динамического гашения колебаний определяются многими факторами, что требуют учета ряда специфических особенностей. В системах с одной степенью свободы режимы динамического гашения реализуется только при введение в структуру системы устройств для преобразования движения (УПД) при кинематическом возмущении. В системах с двумя степенями свободы, в общем случае, когда система имеет два внешних воздействия, возможны проявления режимов динамического гашения колебаний на двух разных частотах, возможны и специфические случаи совместных режимов на совпадающих частотах.

1. Для определения частоты динамического гашения колебаний по координате y_1 внешнее воздействие приложено к массе m_1 ($Q_1 \neq 0, Q_2=0$). Режим динамического гашения колебаний по координате y_1 определяется на основе передаточной функция системы $W_{11}(p)$ из условия:

$$W_{11}(p)|_{Q_2=0} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = 0, \quad (15)$$

где \bar{Q}_1 рассматривается как входной сигнал, а \bar{y}_1 - как выходной сигнал (значок $\bar{}$ над переменной означает её изображение по Лапласу[19]). Движение системы по координате \bar{y}_1 в преобразованиях Лапласа может быть выражено на основе формул Крамера [20]:

$$\bar{y}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{Q}_1 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}}{A(p)}, \quad (16)$$

где $A(p) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$ – характеристический многочлен системы. Соответствующее характеристическое уравнение $A(p)=0$ имеет четыре корня $p_1 - p_4$. В случае отсутствия сил трения ($B=0$) характеристическое уравнение вырождается в биквадратное уравнение $A_1(p^2)=0$, решение которого относительно $p^2=-\omega^2$ позволяет найти квадраты собственных частот системы $(\omega_{01})^2, (\omega_{02})^2$.

Передаточная функция с учетом (16) имеет вид:

$$W_{11}(p)|_{Q_2=0} = \frac{A_{22}}{A(p)} \quad (17)$$

Определение частоты динамического гашения колебаний по координате y_1 при условии её несовпадения с собственной частотой возможно из условия $A_{22}=0$:

$$(m_2 + L_2 + L_0)p^2 + (b_0 + b_2)p + k_0 + k_2 = 0. \quad (18)$$

Обобщенный подход с учетом вязкого трения предполагает определение комплексного параметра $p=\sigma+j\omega$ из условий $A_{22}(p)=0$ в форме системы уравнений:

$$(m_2+L_2+L_0)(\sigma^2-\omega^2)+(b_0+b_2)\sigma+k_0+k_2=0, \quad (19)$$

$$(m_2+L_2+L_0)2\sigma\omega+(b_0+b_2)\omega=0, \quad (20)$$

полученных на основе выражения (18) путем замены $p^2=\sigma^2-\omega^2+j2\sigma\omega$.

При условии пренебрежимо малых сил вязкого трения ($b_0+b_2=0$) выражение (18) принимает вид:

$$-\omega^2(m_2+L_2+L_0) + k_0+k_2=0. \quad (21)$$

В предположении $b_0+b_2=0$ частота динамического гашения ω_{11} по координате y_1 определяется выражением:

$$\omega_{11,\text{dyn}}^2 = \frac{k_0 + k_2}{m_2 + L_2 + L_0} \quad (22)$$

В рамках аналитического выражения (22) частота $\omega_{11,\text{dyn}}$ зависит от параметров m_2, L_2, L_0, k_0, k_2 и, при условии её несовпадения с собственными частотами ω_{01}, ω_{02} системы, обеспечивает динамическое гашение колебаний по координате y_1 , т.е. $\bar{y}_1=0$.

2. Для определения частоты динамического гашения по координате y_2 внешнее воздействие Q_1 приложено к массе m_1 ($\bar{Q}_2=0$) и используется равенство нулю передаточной функция системы:

$$W_{12}(p)|_{Q_2=0} = \frac{\bar{y}_2}{Q_1}, \quad (23)$$

где \bar{Q}_1 – входной сигнал, а y_2 – выходной.

Движение \bar{y}_2 в преобразованиях Лапласа может быть найдено по формуле Крамера [20]:

$$\bar{y}_2 = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & \bar{Q}_1 \\ A_{21} & 0 \end{vmatrix}}{A(p)}. \quad (24)$$

С учетом (24) передаточная функция (23) принимает вид:

$$W_{12}(p)|_{Q_2=0} = \frac{-A_{21}}{A(p)} \quad (25)$$

Частоты динамического гашения колебаний ω_{12} по координате y_2 в предположении, что частота динамического гашения колебаний не совпадает с собственной частотой, т.е. $A(j\omega_{12}) \neq 0$, определяются условия $A_{21}=0$:

$$L_0 p^2 + b_0 p + k_0 = 0. \quad (26)$$

Обобщенный подход с учетом сил трения предполагает определение комплексного параметра $p = \sigma + j\omega$ из условий $A_{21}(p) = 0$ в форме системы уравнений:

$$L_0(\sigma^2 - \omega^2) + b_0\sigma + k_0 = 0 \quad (27)$$

$$L_0 2\sigma\omega + b_0\omega = 0 \quad (28)$$

При пренебрежимо малых силах трения $B = 0$ и $\sigma = 0$ условие (27) принимает вид:

$$-\omega^2 L_0 + k_0 = 0 \quad (29)$$

В предположении $b_0 + b_2 = 0$ частота динамического гашения по координате y_1 :

$$\omega_{12,dyn}^2 = \frac{k_0}{L_0}. \quad (30)$$

Частота $\omega_{12,dyn}$ зависит от параметров L_0 , k_0 и, при условии её несовпадения с собственными частотами ω_{01} , ω_{02} системы, соответствующее внешнее воздействие обеспечивает динамическое гашение колебаний по координате y_2 , т.е. $\bar{y}_2 = 0$.

Таким образом, выражения (22) и (30) определяют две частоты динамического гашения, на каждой из которых выполнены соответствующие условия $\bar{y}_1 = 0$ и $\bar{y}_2 = 0$.

3. Для оценки эффекта сближения частот, определенных условиями $A_{22} = 0$ и $A_{22} = 0$ рассматривается равенство частот динамического гашения по координатам y_1 , y_2 :

$$\omega_{12,dyn} = \omega_{11,dyn}. \quad (31)$$

В зависимости от параметров системы равенство (31) принимает вид:

$$\frac{k_0}{L_0} = \frac{k_0 + k_2}{m_2 + L_2 + L_0}. \quad (32)$$

Выражение (32) позволяет выразить какой-либо критический (т.е. обеспечивающий равенство частот динамического гашения колебаний) параметр системы через остальные, к примеру, массу

$$m_2 = \frac{L_0 k_2 - L_2 k_0}{k_0} \quad (33)$$

Вместе с тем, одновременное совпадение частот динамического гашения $\omega_{12,dyn} = \omega_{11,dyn}$ влечет одновременное выполнение условий $A_{22}=0$ и $A_{21}=0$ на одной частоте, что означает, что характеристический многочлен равен нулю, т.е. $A(j\omega)=0$.

Таким образом, если частоты динамического гашения колебаний совпадают между собой, то они совпадают с частотой собственных колебаний.

При выполнении условий (33) в форме равенства $m_2 k_0 = L_0 k_2 - L_2 k_0$ система уравнений в изображениях Лапласа (6) может быть представлена в виде:

$$\begin{bmatrix} (m_1 + L_1 + L_0)p^2 + k_0 + k_1 & -L_0 p^2 - k_0 \\ -L_0 p^2 - k_0 & \frac{(k_0 + k_2)}{k_0} (L_0 p^2 + k_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Характеристический многочлен системы (34) может быть представлен в виде произведения квадратных многочленов:

$$A(p) = (L_0 p^2 + k_0) \left[((m_1 + L_1 + L_0)p^2 + k_0 + k_1) \frac{(k_0 + k_2)}{k_0} - (L_0 p^2 + k_0) \right]. \quad (35)$$

Передаточные функции (15) и (23) при условии (33) принимают вид:

$$W_{11}(p) \Big|_{Q_2=0} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{A_{22}}{A(p)} = \frac{1}{((m_1 + L_1 + L_0)p^2 + k_0 + k_1) - (L_0 p^2 + k_0) \frac{k_0}{(k_0 + k_2)}}, \quad (36)$$

$$W_{12}(p)|_{Q_2=0} = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \frac{-A_{21}}{A(p)} = \frac{1}{((m_1 + L_1 + L_0)p^2 + k_0 + k_1) \frac{(k_0 + k_2)}{k_0} - (L_0 p^2 + k_0)}. \quad (37)$$

Формы передаточных функций (36) и (37) позволяют оценить эффект совпадения частот динамических гашений. Дополнительно следует отметить, что передаточная функция межпарциальной связи \bar{y}_2/\bar{y}_1 принимает вид:

$$W(p)|_{Q_2=0} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{-A_{21}}{A_{22}} = \frac{k_0}{k_0 + k_2}. \quad (38)$$

Передаточная функция межпарциальной связи (38) не зависит от комплексного параметра p , т.е. соответствующая амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) не зависит от частоты внешнего воздействия, что может быть интерпретировано как потеря системой одной степени свободы.

Таким образом, механическая колебательная система с двумя степенями свободы, соответствующая критическим параметрам, при которых частоты динамического гашения совпадают, редуцируется в систему с одной степенью свободы.

IV. Некоторые результаты вычислительного моделирования

Для демонстрации эффектов совпадения частот динамического гашения рассмотрено семейство систем с фиксированными параметрами: $m_1 = 1$ кг, $k_0 = 4$ Н/м, $L_0 = 4$ кг, $L_2 = 3$ кг и варьируемыми – $k_2 = 1$ Н/м, 5 Н/м, 10 Н/м и $m_2 = \tau m_1$, где $\tau \in (0..10)$ – безразмерный параметр.

1. На рис.3 представлены графики квадратов частот динамического гашения $(\omega_{12,dyn})^2$, $(\omega_{11,dyn})^2$ в зависимости от τ . Линии 4, 1, 3 отображают графики $(\omega_{11,dyn})^2$ для $k_2 = 1$ Н/м, 5 Н/м, 10 Н/м соответственно. Линия 2 представляет график $(\omega_{12,dyn})^2$ от τ . На рис. 3 линии 1 и 3, соответствующие параметрам $\tau = 2$ и 7, пересекаются с линией 2 т.А и В, что означает существование механических колебательных систем, для которых частоты динамического гашения по различным координатам бесконечно близки. В частности, т. А соответствует системе с параметрами $m_2 = 2$ кг и $k_2 = 5$ Н/м, а т. В – системе с параметрами $m_2 = 7$ кг и $k_2 = 10$ Н/м.

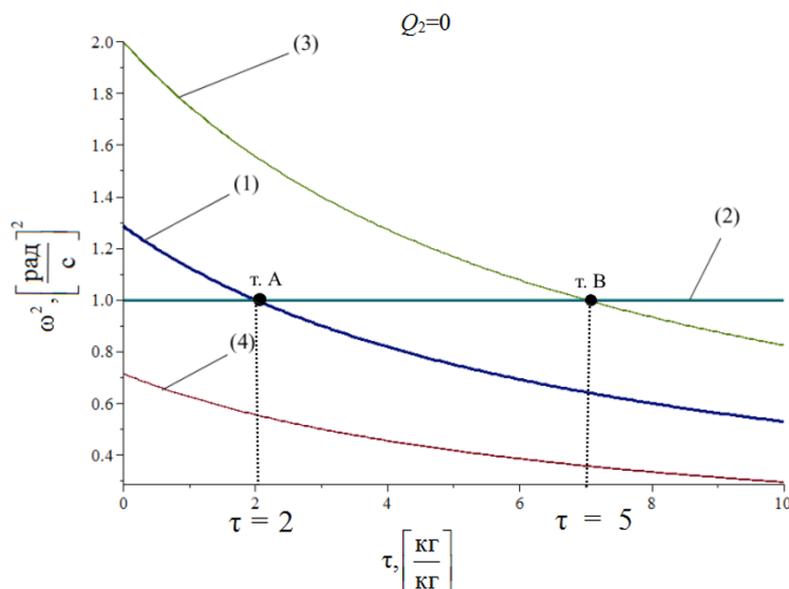


Рис 3. Частоты динамического гашения: $\tau \in (0,10)$. 4 – $(\omega_{11,dyn})^2$ для $k_2 = 1$ Н/м, 1 – $k_2 = 5$ Н/м, 3 – $k_2 = 10$ Н/м и 2 – $(\omega_{12,dyn})^2$.

2. На рис. 4 и 5 представлены АЧХ \bar{y}_1/\bar{Q}_1 и \bar{y}_2/\bar{Q}_1 соответственно. В частности, на рис.4 представлены АЧХ для параметров $\tau = 2$ (линия 2) и $\tau = 5$ (линия 1). В частности, видно, что для критического параметра $\tau = 2$ АЧХ (линия 2) вырождается в функцию, имеющую единственный разрыв второго рода в т. F . Необходимо отметить, что на частоте «одновременного динамического гашения колебаний», которая составляет $\omega_{\text{dyn}}=1$ рад/с, АЧХ принимает ненулевое конечное значение (см. рис. 4, т.С), т.е. на данной частоте не происходит динамического гашения колебаний. Можно сказать, что вместо «гашения колебания» обобщенной координаты происходит «гашение резонанса». Для сравнения на рис.4 представлен график 1 АЧХ \bar{y}_1/\bar{Q}_1 с двумя резонансными частотами, отображенными двумя тт. D и E разрыва второго рода.

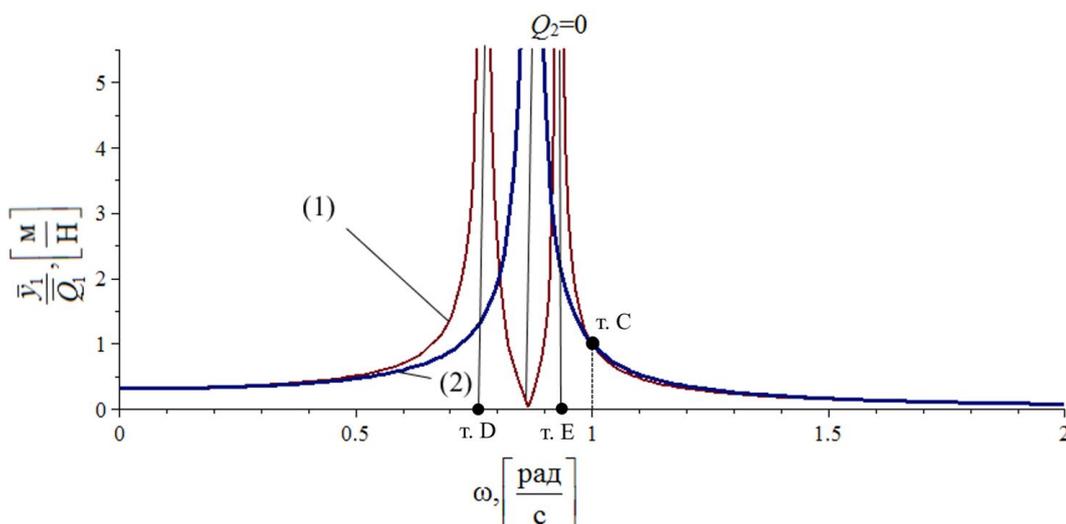


Рис.4. АЧХ \bar{y}_1/\bar{Q}_1 для параметра $k_2 = 5$ Н/м. 1 – $\tau = 5$; 2 – $\tau = 2$.

3. Наравне с АЧХ передаточных функций системы (см. рис.4), на рис. 5 представлены АЧХ передаточных функций межпарциальных связей $W_{21} = \bar{y}_2/\bar{y}_1$.

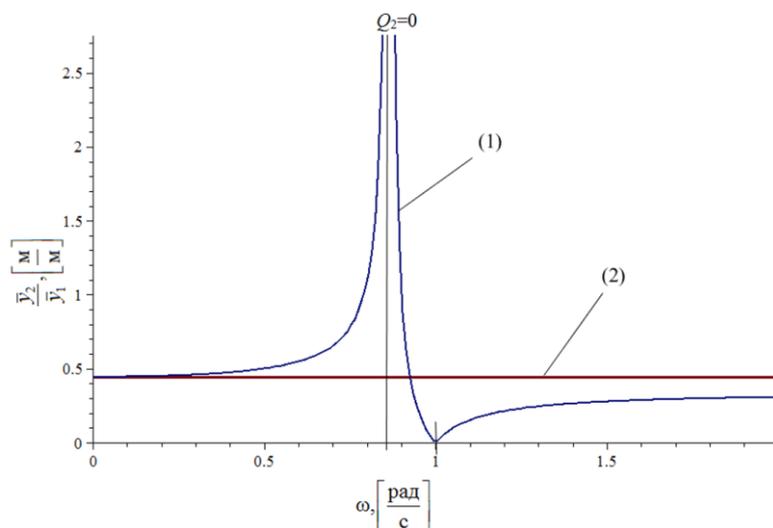


Рис. 5. АЧХ \bar{y}_2/\bar{y}_1 для $k_2 = 5$ Н/м. 1 – $\tau = 5$; 2 – $\tau = 2$.

Для $\tau = 5$ линия 1 представляет график характерной АЧХ межпарциальной связи. Вместе с тем, для $\tau = 2$ горизонтальная линия 2 представляет собой график постоянной функции, что означает пропорциональность обобщенных координат системы. Данный характер межпарциальной связи на любой частоте внешних воздействий может быть интерпретирован как редукция системы с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы, когда параметры принимают значение $k_2 = 5$ Н/м и $\tau = 2$.

Наравне с рассмотренным случаем варьирования параметров, в частности, коэффициента связности масс системы, для сближения частот динамического гашения координат может быть рассмотрен вариант, когда вариационным

параметром служит коэффициент связности внешних силовых воздействий. Таким образом, варьирование параметров системы в широком смысле, т.е. включая коэффициент связности внешних воздействий, позволяет проявить динамические особенности семейства механических систем.

Заключение

Представленные исследования приводят к ряду выводов.

1. В динамике механических колебательных систем, рассматриваемых как расчетные схемы технических объектов транспортного и технологического назначения, можно выделить характерные режимы свободных колебаний, возникающих при ненулевых начальных условиях. Возникающие при этом колебания отображают свойства систем реагировать на внешние воздействия ударного типа, вызывающих движение элементов с определенными соотношениями колебаний амплитуд по различным координатам. Такие соотношения формируются не только параметрами начальных условий (а к ним могут быть приведены различные одиночные воздействия), но и значения параметров элементов системы. При введении понятия о частотных функциях, связанных с детализированным рассмотрением отношений выражений для потенциальной и кинетической энергии, а также функции частот собственных колебаний от структуры энергетических выражений. В частности, экстремальное свойство отношения потенциальной и

кинетической энергии системы связаны со значениями частот собственных колебаний.

2. Вынужденные колебания системы формируются под действием периодических внешних сил в предположении, что собственные колебания обнуляются. В механической колебательной системе с двумя степенями свободы при действии внешнего силового возмущения по одной координате в системе реализуется только один режим динамического гашения колебаний (по той координате, где предложено внешнее воздействие).

3. При одновременном действии двух внешних факторов при наличии функциональной связи между величинами воздействий, (например, при постоянном соотношении) в системе возможна реализация режимов динамического гашения колебаний по каждой из координат.

4. При определенном выборе коэффициента связности внешних воздействий возможно управление распределением режимов динамического гашения колебаний по разным частотам.

5. Реализация динамических режимов одновременного динамического гашения по двум координатам не реализуется, но при этом возникает ряд специфических динамических эффектов; в частности, при определении условий совместного одновременного динамического гашения по двум координатам одна из частот динамического гашения совпадает с частотами собственных колебаний системы.

6. Раскрытие неопределённости одновременного «обнуления» амплитуд колебаний в физическом плане, отображается как преобразование движения системы с двумя степенями в движение на такой частоте как в системе с одной степенью свободы; при этом объект может совершать колебания с определенной амплитудой.

Список источников

1. Clarence W. de Silva. Vibration: Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006, 1064 p.
2. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016, 708 p.
3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, vol. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
4. Доронин С.В., Шокин Ю.И., Лепихин А.М., Москвичев В.В. Моделирование прочности и разрушения несущих конструкций технических систем. - Новосибирск: Наука, 2005. - 249 с.
5. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.

6. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. - Новосибирск, 2021. – 679 с.
7. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, 262 p.
8. Harris S.M., Srede E. Shock and Vibration Handbook, New York, McGraw - Hill Book So, 2009, 1168 p.
9. Iwnicki Simon. Handbook of railway vehicle dynamics, CRC Press Taylor & Francis Group, 2006, 527 p.
10. Большаков Р.С. Особенности вибрационных состояний транспортных и технологических машин. Динамические реакции и формы взаимодействия элементов. - Новосибирск: Наука, 2020. – 411 с.
11. Хохлов А.А. Динамика сложных механических систем. - М.: МИИТ, 2002. - 172 с.
12. Галиев И.И., Нехаев В.А., Николаев В.А. Методы и средства виброзащиты железнодорожных экипажей. - М.: Изд-во Учебно-методический центр по образованию на ж.-д. транспорте, 2010. – 340 с.
13. Бетковский Ю.Я., Сидоренко А.С. Оценка влияния смежных составляющих спектра на резонансные колебания механических систем // Труды МАИ, 2007, № 29.
URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=33978>

Труды МАИ. 2021. Выпуск № 120

Trudy MAI. 2021. Issues no.120

14. Попов И.П. Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел //

Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=119888>. DOI:

[10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)

15. Попов И.П. Расчет колебаний для разветвленных механических систем в поле

комплексных чисел // Труды МАИ. 2021. № 116. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=121007>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-01)

16. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Eliseev S.V., Vuong Q.T. Possibilities for regulation

of distribution of oscillation amplitudes points of working bodies of technological

machines // IOP Conference Series Materials Science and Engineering, 2020.

DOI:[10.1088/1757-899X/843/1/012017](https://doi.org/10.1088/1757-899X/843/1/012017)

17. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Частотная энергетическая функция

в оценке динамических состояний технических объектов // Труды МАИ. 2021. №

118. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=158213>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-04)

18. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of

mechanical systems with additional ties, Publishing Irkutsk State University, 2006, 316 p.

19. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических

приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.

20. Дружинский И.А. Механические цепи. - Л.: Машиностроение, 1977. - 240 с.

References

1. Clarence W. de Silva. *Vibration: Fundamentals and Practice*, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006, 1064 p.
2. Karnovsky I.A., Lebed E. *Theory of Vibration Protection*, Springer International Publishing, Switzerland, 2016, 708 p.
3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. *Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
4. Doronin S.V., Shokin Yu.I., Lepikhin A.M., Moskvichev V.V. *Modelirovanie prochnosti i razrusheniya nesushchikh konstruksii tekhnicheskikh system* (Modeling of strength and fracture of load-bearing structures of technical systems), Novosibirsk, Nauka, 2005, 249 p.
5. Eliseev S.V. *Prikladnoi sistemnyi analiz i strukturnoe matematicheskoe modelirovanie (dinamika transportnykh i tekhnologicheskikh mashin: svyaznost' dvizhenii, vibratsionnye vzaimodeistviya, rychazhnye svyazi): monografiya* (Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections)), Irkutsk, IrGUPS, 2018, 692 p.
6. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bol'shakov R.S., Khomenko A.P. *Metodologiya sistemnogo analiza v zadachakh otsenki, formirovaniya i upravleniya dinamicheskim sostoyaniem tekhnologicheskikh i transportnykh mashin* (Methodology of system analysis in the tasks

Труды МАИ. 2021.Выпуск № 120

Trudy MAI. 2021.Issues no.120

of assessment, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines), Novosibirsk, 2021, 679 p.

7. Banakh L., Kempner M. *Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, 262 p.

8. Harris S.M., Srede E. *Shock and Vibration Handbook*, New York, McGraw - Hill Book So, 2009, 1168 p.

9. Iwnicki Simon. *Handbook of railway vehicle dynamics*, CRC Press Taylor & Francis Group, 2006, 527 p.

10. Bol'shakov R.S. *Osobennosti vibratsionnykh sostoyanii transportnykh i tekhnologicheskikh mashin. Dinamicheskie reaktsii i formy vzaimodeistviya elementov* (Features of vibration states of transport and technological machines. Dynamic reactions and forms of interaction of elements), Novosibirsk, Nauka, 2020, 411 p.

11. Khokhlov A.A. *Dinamika slozhnykh mekhanicheskikh system* (Dynamics of complex mechanical systems), Moscow, MIIT, 2002, 172 p.

12. Galiev I.I., Nekhaev V.A., Nikolaev V.A. *Metody i sredstva vibrozashchity zheleznodorozhnykh ekipazhei* (Methods and means of vibration protection of railway crews), Moscow, Izd-vo Uchebno-metodicheskii tsentr po obrazovaniyu na zh.-d. transporte, 2010, 340 p.

13. Betkovskii Yu.Ya., Sidorenko A.S. *Trudy MAI*, 2007, no. 29. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=33978>

Труды МАИ. 2021. Выпуск № 120

Trudy MAI. 2021. Issues no.120

14. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119888>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)

15. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121007>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-01).

16. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Eliseev S.V., Vuong Q.T. Possibilities for regulation of distribution of oscillation amplitudes points of working bodies of technological machines, *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*, 2020. DOI:[10.1088/1757-899X/843/1/012017](https://doi.org/10.1088/1757-899X/843/1/012017)

17. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Eliseev S.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158213>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-04)

18. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. *Dynamics of mechanical systems with additional ties*, Publishing Irkutsk State University, 2006, 316 p.

19. Lur'e A.I. *Operatsionnoe ischislenie i primenenie v tekhnicheskikh prilozheniyakh* (Operational calculus and its application in technical applications), Moscow, Nauka, 1959, 368 p.

20. Druzhinskii I.A. *Mekhanicheskie tsepi* (Mechanical chains), Leningrad, Mashinostroenie, 1977, 240 p.

Статья поступила в редакцию 07.08.2021; одобрена после рецензирования 20.08.2021; принята к публикации 22.10.2021.

The article was submitted 07.08.2021; approved after reviewing 20.08.2021; accepted for publication 22.10.2021.