

УДК 534.1 (075.8)

Моделирование колебаний гасителя вибрации проводов воздушных систем энергоснабжения*

А.Н. Данилин, К.С. Козлов, Е.Л. Кузнецова, С.С. Тарасов

Аннотация

Моделируются пространственные колебания системы, состоящей из гибкого упругого троса и груза (твёрдого тела), жестко присоединенного к одному из концов троса. Задача решается с полным учётом жесткостных и инерционных характеристик системы. Учитывается диссипация энергии колебаний, которая имеет выраженный гистерезисный тип. Физические соотношения строятся на основе кинематического уравнения, идентификация параметров которого осуществляется с использованием экспериментальных данных о гистерезисных кривых предельного цикла.

Ключевые слова: гаситель вибрации; собственные частоты и формы колебаний; нестационарные колебания; гистерезисное энергорассеяние; кинематический подход

ВВЕДЕНИЕ

Виброзащиту воздушных линий электроснабжения и связи в системах авиационно-ракетных комплексов, так же как и для линий электропередачи гражданского назначения осуществляют различными методами. Основным из них является защита с помощью много-частотных гасителей вибрации, которые конструктивно подобны гасителю Стокбриджа [1-3]. Типовая конструкция гасителя представляет собой два груза, соединенные тросиками (гибкими элементами) с зажимом, который жестко скрепляется с проводом ВЛ при помощи плашки. Грузики располагаются по разные стороны относительно вертикальной оси зажима, в общем случае, на различных расстояниях. Рассеяние энергии колебаний происходит вследствие взаимного трения проволочных спиралей, из которых изготовлен тросик.

Разработка гасителей, обеспечивающих эффективное демпфирование колебаний провода в эксплуатационном диапазоне частот (от 3 до 150 Гц) при минимальном количестве типо-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ «Молодые кандидаты наук» МК-6582.2013.8 и Стипендии Президента РФ молодым ученым и аспирантам СП-417.2012.1

размеров, представляет значительный практический и научный интерес. Экспериментальные исследования и расчёты показывают, что гасители с несимметричными грузами имеют более равномерное распределение энергии рассеивания по диапазону рабочих частот. Также установлено, что использование эксцентричных грузов с различными массами, а также тросиков с различными длинами (плечами) позволяет получить многочастотный гаситель с 4-9 собственными частотами (2 рабочих частоты имеет гаситель Стокбриджа). Это обеспечивает гашение вибрации в широком диапазоне рабочих частот колебаний проводов и тросов и существенно снижает количество типоразмеров гасителей.

Экспериментальные исследования энергорассеяния гасителей вибраций проводов ВЛ в настоящее время занимают ключевую роль в анализе их эффективности. Однако представляют не меньший интерес математические модели колебаний, позволяющие не только рассчитывать динамические характеристики гасителей, но и оптимизировать их конструктивные параметры с целью увеличения диссипации энергии колебаний в наиболее широкой частотной области.

Диссипация энергии происходит в тросике гасителя вследствие упругопластического взаимодействия проволочных спиралей при их взаимном трении. При этом, как показывают эксперименты, зависимости силовых факторов от соответствующих кинематических параметров имеют ярко выраженный гистерезисный характер.

Строгое математическое описание гистерезисных процессов, возникающих из-за трения проволочных спиралей гасителей, вряд ли возможно. Поэтому используют приближенные подходы с использованием экспериментальных данных. Один из способов – подмена гистерезиса упруго-вязким демпфированием с использованием диаграмм растяжения-сжатия упругопластических образцов и логарифмического декремента затухания колебаний. Другой возможный вариант заключается в априорном назначении диаграммы деформирования в виде параллелограмма, повернутого относительно его центра на некоторый угол. Однако использование таких моделей может приводить к серьезным ошибкам в расчётах параметров гасителей, поскольку они не учитывают форму и «размеры» траектории на диаграмме деформирования, определяющей жесткость демпферного узла и его передаточную функцию.

В данной работе предлагается кинематическая модель описания гистерезиса [11,12], согласно которой изгибающие и крутящие моменты и соответствующие им кривизны связываются специальным дифференциальным уравнением первого порядка, коэффициенты которого определяются по экспериментальным значениям для петли предельного цикла. В этом случае одним уравнением удастся описать бесконечное множество подобных траекторий, каждая из которых однозначно определяется положением начальной точки на диаграмме де-

формирования внутри предельного цикла. Подобие этих кривых определяется их асимптотическим приближением к кривой предельного цикла. Такая модель приводит к естественному определению «орбитали» гистерезисного цикла при внешнем нестационарном воздействии на гаситель.

1. ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматриваются пространственные колебания системы, состоящей из тросика и груза – твёрдого тела произвольной пространственной конфигурации. Считается, что один конец тросика консольно заделан, а другой жестко скреплён с грузом. Гравитационная нагрузка на систему не учитывается. В начальном состоянии ось тросика считается прямолинейной.

С грузом связывается локальный триэдр осей $O'x'y'z'$, совершающий колебания вместе с грузом относительно неподвижной координатной системы $Oxyz$. Полус O' совмещается с точкой пересечения оси тросика с поверхностью груза вместе их жесткого скрепления.

Для тросика принимается стержневая модель, считая, что его поперечные сечения смещаются в пространстве как жесткие недеформируемые диски.

Колебания считаются малыми, допускающими запись вектора перемещений точек твёрдого тела в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}', \quad (1)$$

где \mathbf{u}_0 – вектор перемещения полюса O' , $\boldsymbol{\theta}$ – вектор малого поворота, \mathbf{r}' – радиус-вектор произвольной точки тела в подвижной координатной системе, связанной с твёрдым телом.

На основании (1) перемещения точек сечения тросика с координатой x выражаются, соответственно, формулами

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x) + \theta_2(x)z - \theta_3(x)y, \\ v(x, y, z) &= v_0(x) - \theta_1(x)z, \quad w(x, y, z) = w_0(x) + \theta_1(x)y, \end{aligned} \quad (2)$$

где u_0, v_0, w_0 – перемещения полюса сечения; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – углы поворотов сечения относительно осей x, y, z соответственно.

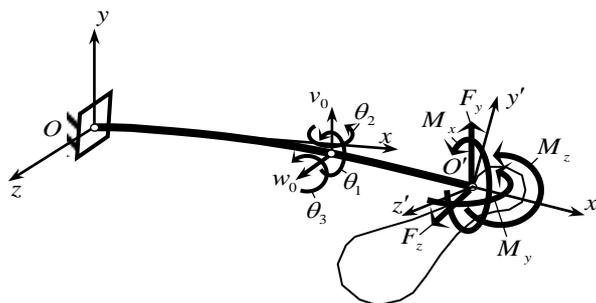


Рис. 1. Координатные оси, кинематические и силовые параметры системы «тросик-груз»

Система «тросик-груз» и связанные с ней координатные оси показаны на рис. 1. Здесь же указаны положительные направления перемещений и углов поворотов произвольного сечения тросика, а также силы и моменты, действующие на тросик со стороны груза в точке их контакта.

Ускорение произвольной точки твердого тела (сечения тросика или груза), определяющее инерциальную нагрузку,

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (3)$$

где $\ddot{\mathbf{u}}_0$ – вектор ускорения полюса, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ – вектор углового ускорения; $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ – центростремительное ускорение.

Положение произвольного сечения тросика определяется координатами его полюса и матрицей A косинусов углов между неподвижными и подвижными осями, связанными с рассматриваемым сечением. Для вектора малого поворота

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектора угловой скорости

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha_{31}\dot{\alpha}_{21} + \alpha_{32}\dot{\alpha}_{22} + \alpha_{33}\dot{\alpha}_{23} = \dot{\theta}_1 - \theta_2\dot{\theta}_3, \\ \omega_2 &= \alpha_{11}\dot{\alpha}_{31} + \alpha_{12}\dot{\alpha}_{32} + \alpha_{13}\dot{\alpha}_{33} = \dot{\theta}_2 - \theta_3\dot{\theta}_1, \\ \omega_3 &= \alpha_{21}\dot{\alpha}_{11} + \alpha_{22}\dot{\alpha}_{12} + \alpha_{23}\dot{\alpha}_{13} = \dot{\theta}_3 - \theta_1\dot{\theta}_2. \end{aligned}$$

Линеаризация правых частей приводит к известным связям:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2, \quad \omega_3 = \dot{\theta}_3 \quad \text{и} \quad \dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1, \quad \dot{\omega}_2 = \ddot{\theta}_2, \quad \dot{\omega}_3 = \ddot{\theta}_3.$$

2. СООТНОШЕНИЯ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Формулы (1) позволяют получить выражения для деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x = u'_0 + \theta'_2(x)z - \theta'_3(x)y, \quad \varepsilon_y = \partial v / \partial y = 0, \quad \varepsilon_z = \partial w / \partial z = 0; \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = -\theta_3 + v'_0 - \theta'_1 z, \quad \gamma_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x = \theta_2 + w'_0 + \theta'_1 y. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее штрихи обозначают производные величин по x , кроме обозначений подвижной координатной системы $O'x'y'z'$.

Связь между напряжениями и деформациями принимается в форме закона Гука с использованием некоторых приведенных модулей упругости E и сдвига G .

Тогда продольное напряжение $\sigma_x = E\varepsilon_x$, определяет продольную силу

$$N = \int_F \sigma_x dF = EF(u_0 - y_c\theta_3 + z_c\theta_2)', \quad (5)$$

и изгибающие моменты

$$\begin{aligned} M_z &= -\int_F y \sigma_x dF = E(-y_C F u_0 + J_z \theta_3 - J_{yz} \theta_2)', \\ M_y &= \int_F z \sigma_x dF = E(z_C F u_0 - J_{yz} \theta_3 + J_y \theta_2)', \end{aligned} \quad (6)$$

где y_C, z_C – координаты центра масс сечения относительно его полюса.

Касательные напряжения $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$ определяют поперечные силы

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_{F_{cy}} \tau_{xy} dF = GF_{cy} [-\theta_3 + (v_0 - z_{жс} \theta_1)'], \\ Q_z &= \int_{F_{cz}} \tau_{xz} dF = GF_{cz} [\theta_2 + (w_0 + y_{жс} \theta_1)'], \end{aligned} \quad (7)$$

а также крутящий момент

$$M_k = \int_{F_{cy}} \tau_{xy} y dF - \int_{F_{cz}} \tau_{xz} z dF = GJ_k \theta_1' + GF_{cz} y_{жс} (\theta_2 + w_0') + GF_{cy} z_{жс} (\theta_3 - v_0'), \quad (8)$$

где $y_{жс}, z_{жс}$ – координаты центра жесткости сечения относительно его полюса; F_{cy}, F_{cz} – эквивалентные площади поперечного сечения, работающие на сдвиг в направлении поперечных сил Q_y и Q_z ; $J_k = \int_{F_{cz}} y^2 dF + \int_{F_{cy}} z^2 dF$.

В дальнейшем оси x, y, z считается для сечений тросика главными и центральными. Тогда (5)-(8) упрощаются:

$$N = EF u_0', \quad (9)$$

$$M_z = EJ_z \theta_3', \quad M_y = EJ_y \theta_2', \quad (10)$$

$$Q_y = GF_{cy} (-\theta_3 + v_0'), \quad Q_z = GF_{cz} (\theta_2 + w_0'), \quad (11)$$

$$M_k = GJ_k \theta_1'. \quad (12)$$

Формулы (9)-(12) принимаются в качестве базовых физических соотношений, где жесткости на растяжение-сжатие EF , изгиб EJ_z, EJ_y , сдвиг GF_{cy}, GF_{cz} и кручение GJ_k могут вычисляться аналитически по формулам, учитывающим внутреннее строение тросика [3-6], или по формулам, полученным опытным путём [7].

3. ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ

Согласно принципу Даламбера-Лагранжа вариация полной энергии системы

$$\delta \mathcal{E} = \delta U - \delta A_p - \delta A_i = 0. \quad (13)$$

Здесь δU – вариация потенциальной энергии деформирования тросика; δA_p , δA_i – вариации работы внешних и инерционных сил:

$$\delta A_p = \int_S \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS, \quad \delta A_i = - \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV, \quad (14)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещений точки тела; \mathbf{p} – поверхностная нагрузка, действующая на поверхность S ; ρ , V – плотность и объем тела. В задачах о собственных колебаниях системы $\delta A_p = 0$.

Скалярное произведение в выражении для δA_i (14) можно представить с учётом (3) в матричном виде:

$$\ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_0^T \left[\ddot{\mathbf{u}}_0 + (\dot{\Omega} + \Omega^2) \mathbf{r}' \right] + \delta \theta^T \left(S \ddot{\mathbf{u}}_0 + \tilde{J} \dot{\omega} + \Omega \tilde{J} \omega \right), \quad (15)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^2 = - \begin{pmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & -\omega_1 \omega_2 & -\omega_1 \omega_3 \\ -\omega_1 \omega_2 & \omega_1^2 + \omega_3^2 & -\omega_2 \omega_3 \\ -\omega_1 \omega_3 & -\omega_2 \omega_3 & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J} = -S^2 = \begin{pmatrix} y'^2 + z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -x'y' & x'^2 + z'^2 & -y'z' \\ -x'z' & -y'z' & x'^2 + y'^2 \end{pmatrix},$$

где x' , y' , z' – как и прежде, локальные координаты; ω_1 , ω_2 , ω_3 – компоненты вектора угловой скорости.

Линеаризация (15) приводит к выражению

$$\ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_0^T \left(\ddot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\Omega} \mathbf{r}' \right) + \delta \theta^T \left(S \ddot{\mathbf{u}}_0 + \tilde{J} \dot{\omega} \right). \quad (16)$$

Потенциальная энергия деформирования тросика длиной l

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[N u_0' + M_y \theta_2' + M_z \theta_3' + M_k \theta_1' + Q_y (-\theta_3 + v_0') + Q_z (\theta_2 + w_0') \right] dx.$$

Тогда вариация

$$\delta U = (N \delta u_0)_0^l + (Q_y \delta v_0)_0^l + (Q_z \delta w_0)_0^l + (M_k \delta \theta_1)_0^l + (M_y \delta \theta_2)_0^l + (M_z \delta \theta_3)_0^l - \int_0^l \left[N' \delta u_0 + Q_y' \delta v_0 + Q_z' \delta w_0 + M_k' \delta \theta_1 + (M_y' - Q_z) \delta \theta_2 + (M_z' + Q_y) \delta \theta_3 \right] dx, \quad (17)$$

где обозначения вида $(f \delta q)_0^l = f(l) \delta q(l) - f(0) \delta q(0)$.

С учётом (14), (16) и (17) выражение (13) принимает вид

$$\delta\mathcal{E} = \delta U - \delta A_i^{(m)} - \delta A_i^{(\varepsilon)} = 0, \quad (18)$$

где вариация потенциальной энергии деформирования консольно закрепленного тросика –

$$\delta U = \delta \mathbf{u}_0^T(l) \begin{pmatrix} N(l) \\ Q_y(l) \\ Q_z(l) \end{pmatrix} + \delta \boldsymbol{\theta}^T(l) \begin{pmatrix} M_k(l) \\ M_y(l) \\ M_z(l) \end{pmatrix} - \int_l \left[\delta \mathbf{u}_0^T \begin{pmatrix} N' \\ Q'_y \\ Q'_z \end{pmatrix} + \delta \boldsymbol{\theta}^T \begin{pmatrix} M'_k \\ M'_y - Q'_z \\ M'_z + Q'_y \end{pmatrix} \right] dx; \quad (19)$$

вариация работы инерционных сил тросика –

$$\delta A_i^{(m)} = - \int_l \left(\delta \mathbf{u}_0^T \cdot m \ddot{\mathbf{u}}_0 + \delta \boldsymbol{\theta}^T \cdot I_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} \right) dx; \quad (20)$$

вариация работы инерционных сил груза –

$$\delta A_i^{(\varepsilon)} = \delta \mathbf{u}_0^T(l) M^{(\varepsilon)} \left[\ddot{\mathbf{u}}_0(l) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(l) \mathbf{r}_C^{(\varepsilon)} \right] + \delta \boldsymbol{\theta}^T(l) \left[M^{(\varepsilon)} S^{(\varepsilon)} \ddot{\mathbf{u}}_0(l) + I^{(\varepsilon)} \dot{\boldsymbol{\omega}}(l) \right]. \quad (21)$$

В выражении (20) $m = \rho F$ – погонная масса тросика с приведенной плотностью ρ и площадью поперечного сечения F ;

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix},$$

где $I_x = \int_F \rho (y^2 + z^2) dF$, $I_y = \int_F \rho x^2 dF$, $I_z = \int_F \rho y^2 dF$ – моменты инерции сечения тросика.

В выражении (21) $M^{(\varepsilon)} = \int_V r^{(\varepsilon)} dV$ – масса груза с плотностью $r^{(\varepsilon)}$ и объемом V ;
 $\mathbf{r}_C^{(\varepsilon)} = (x_C^{(\varepsilon)}, y_C^{(\varepsilon)}, z_C^{(\varepsilon)})^T$ – вектор координат центра массы груза относительно координатных осей $O'x'y'z'$;

$$S^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} 0 & -z_C^{(\varepsilon)} & y_C^{(\varepsilon)} \\ z_C^{(\varepsilon)} & 0 & -x_C^{(\varepsilon)} \\ -y_C^{(\varepsilon)} & x_C^{(\varepsilon)} & 0 \end{pmatrix}; \quad I^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} I_x^{(\varepsilon)} & -I_{xy}^{(\varepsilon)} & -I_{xz}^{(\varepsilon)} \\ -I_{yx}^{(\varepsilon)} & I_y^{(\varepsilon)} & -I_{yz}^{(\varepsilon)} \\ -I_{zx}^{(\varepsilon)} & -I_{zy}^{(\varepsilon)} & I_z^{(\varepsilon)} \end{pmatrix},$$

где моменты инерции груза относительно триэдра осей $O'x'y'z'$:

$$I_x^{(\varepsilon)} = \int_V r^{(\varepsilon)} (y\ddot{y} + z\ddot{z}) dV, \quad I_y^{(\varepsilon)} = \int_V r^{(\varepsilon)} (x\ddot{x} + z\ddot{z}) dV, \quad I_z^{(\varepsilon)} = \int_V r^{(\varepsilon)} (x\ddot{x} + y\ddot{y}) dV,$$

$$I_{xy}^{(\varepsilon)} = I_{yx}^{(\varepsilon)} = \int_V r^{(\varepsilon)} x\ddot{y}\ddot{y} dV, \quad I_{xz}^{(\varepsilon)} = I_{zx}^{(\varepsilon)} = \int_V r^{(\varepsilon)} x\ddot{z}\ddot{z} dV, \quad I_{yz}^{(\varepsilon)} = I_{zy}^{(\varepsilon)} = \int_V r^{(\varepsilon)} y\ddot{z}\ddot{z} dV.$$

Из (18) следуют уравнения движения в форме уравнения Эйлера-Лагранжа в виде уравнений колебаний и естественные граничные условия.

В дальнейшем высокочастотные продольные колебания исключаются из рассмотрения, поскольку рассматриваемый гаситель предназначен для подавления низкочастотных попе-

речных колебаний. Для упрощения задачи сдвигами также будем пренебрегать, используя соотношения $q_2 = -w\ddot{y}$, $q_3 = v\ddot{y}$. Считается также, что изгибные жесткости $EJ_y = EJ_z = EJ$, моменты инерции сечения $I_y = I_z = I$, полярный момент инерции $I_x = I_p$.

В этом случае, уравнения колебаний при исключении из них поперечных сил записываются в виде

$$EJ v_0^{IV} - I\ddot{v}_0'' + m\dot{v}_0 = 0, \quad EJ w_0^{IV} + I\ddot{w}_0'' + m\dot{w}_0 = 0, \quad -GJ_k \theta_1'' + I_p \ddot{\theta}_1 = 0. \quad (22)$$

Граничные условия при $x=l$ принимают форму

$$\begin{aligned} Q_y(l) + M^{(2)} \left[\ddot{v}_0(l) + x_C^{(2)} \ddot{\theta}_3(l) - z_C^{(2)} \ddot{\theta}_1(l) \right] &= 0, \\ Q_z(l) + M^{(2)} \left[\ddot{w}_0(l) - x_C^{(2)} \ddot{\theta}_2(l) + y_C^{(2)} \ddot{\theta}_1(l) \right] &= 0, \\ M_k(l) + M^{(2)} \left[-z_C^{(2)} \ddot{v}_0(l) + y_C^{(2)} \ddot{w}_0(l) \right] + I_x^{(2)} \ddot{\theta}_1 - I_{xy}^{(2)} \ddot{\theta}_2 - I_{xz}^{(2)} \ddot{\theta}_3 &= 0, \\ M_y(l) - M^{(2)} x_C^{(2)} \ddot{w}_0(l) - I_{xy}^{(2)} \ddot{\theta}_1 + I_y^{(2)} \ddot{\theta}_2 - I_{yz}^{(2)} \ddot{\theta}_3 &= 0, \\ M_z(l) + M^{(2)} x_C^{(2)} \ddot{v}_0(l) - I_{xz}^{(2)} \ddot{\theta}_1 - I_{yz}^{(2)} \ddot{\theta}_2 + I_z^{(2)} \ddot{\theta}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Решением (22) являются:

$$\begin{aligned} v_0 &= \sin \omega t (A_1 \sin ax + A_2 \cos ax + A_3 \operatorname{sh} bx + A_4 \operatorname{ch} bx), \\ w_0 &= \sin \omega t (B_1 \sin ax + B_2 \cos ax + B_3 \operatorname{sh} bx + B_4 \operatorname{ch} bx), \\ \theta_1 &= \sin \omega t (D_1 \sin kx + D_2 \cos kx), \end{aligned}$$

где $A_{1,2,3,4}$, $B_{1,2,3,4}$, $D_{1,2}$ – константы интегрирования; $\omega = \omega_i$ ($i=1,2,\dots$) – собственная частота колебаний;

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2EJ} \left(\omega^2 I + \omega \sqrt{\omega^2 I^2 + 4EJm} \right), \quad b^2 = \frac{1}{2EJ} \left(-\omega^2 I + \omega \sqrt{\omega^2 I^2 + 4EJm} \right); \\ k^2 &= \omega^2 \frac{I_p}{GJ_k}. \end{aligned}$$

С учётом консольного закрепления при $x=0$ решение принимает вид

$$v_0 = \sin \omega t (A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2), \quad w_0 = \sin \omega t (B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2), \quad \theta_1 = D \sin \omega t \sin kx. \quad (24)$$

где функции форм колебаний

$$\varphi_1(x) = \operatorname{sh} bx - b/a \cdot \sin ax, \quad \varphi_2(x) = \operatorname{ch} bx - \cos ax. \quad (25)$$

Константы $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ и D определяются из граничных условий (23) при $x=l$. Подстановка (24), (25) в (23) приводит к однородной системе 5 уравнений относительно искомым 5 констант. Условием нетривиальности решения этой системы является равенство нулю её детерминанта:

$$\Delta(\omega) = 0, \quad (26)$$

корнями которого являются частоты собственных колебаний системы $\omega_i, i = 1, 2, \dots$.

Поиск корней трансцендентного уравнения (26) весьма сложной структуры можно вести пошаговым методом, изменяя частоту ω с некоторым малым шагом $\Delta\omega$ от нуля до некоторого выбранного значения. При смене знака детерминанта используется какой-либо численный метод поиска корней, например, метод деления пополам. Однако в данной задаче возникают вычислительные трудности, связанные со значительным изменением величины детерминанта при изменении ω и малыми величинами $\Delta\omega$, которые подбираются в результате трудоемких вычислительных экспериментов.

Эту вычислительную задачу можно значительно упростить, введя новый независимый параметр – длину интегральной кривой решения [8-10]. Для этого уравнений (26) дифференцируется по ω

$$d\Delta/d\omega = f(\omega), \quad (27)$$

где $f(\omega)$ – известная функция как результат дифференцирования определителя Δ , вычисление которой не представляет больших затруднений.

Дальнейшее преобразование связано с введением нового аргумента λ посредством связи

$$d\lambda^2 = d\omega^2 + d\Delta^2,$$

откуда следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}. \quad (28)$$

Из (27) с учётом (28) следует также

$$\frac{d\Delta}{d\lambda} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}. \quad (29)$$

Уравнения (29) и (28) интегрируются совместно. Их форма доставляет наилучшую обусловленность используемых численных схем интегрирования [8-10].

5. ОПИСАНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Установление физических зависимостей основывается, как правило, на опытных данных.

Равновесные (квазистатические) процессы обратимы. К таким идеализированным процессам, в частности, относятся механические процессы без учета диссипации энергии движения. Для обратимых процессов в момент установления нужных связей предыстория про-

межуточных состояний значения не имеет. Обратный процесс («разгрузка») происходит по зависимостям прямого процесса («нагрузки») в обратную сторону. Поэтому обратимые процессы могут быть описаны однозначными функциональными зависимостями, коэффициенты которых получаются из экспериментов в результате минимизации невязки аналитических представлений и опытных данных, например, методом наименьших квадратов.

Однако в случае систем с учётом энергорассеяния моменту установления необходимых связей предшествует некоторый процесс, предыстория которого определяет местоположение текущей точки пространства решения.

Как правило, реальные процессы циклические. Для необратимых процессов каждый цикл начинается с некоторого нового состояния, не тождественного всем предыдущим. В этом случае использовать указанные функциональные зависимости не верно. Их нужно корректировать с учётом местоположения точки «старта» для продолжения процесса (нового цикла). Это сделать сложно, по крайней мере, из-за необходимости проведения рутинной экспериментальной работы, в результате которой получается множество групп экспериментальных данных (каждая группа соответствует одному эксперименту), которые, в свою очередь, нужно согласовать друг с другом: подобрать аналитические представления перехода от одной группы к другой и т.п. [11, 12]. Такая математическая модель часто оказывается не только сложной, но и весьма приближенной и ограниченной для описания реальных процессов.

Эти трудности можно преодолеть, воспользовавшись кинематическим методом описания физических связей, учитывающего энергорассеяние. Метод позволяет одним дифференциальным уравнением описать множество зависимостей, имеющих произвольные точки начала текущего цикла, но «асимптотически подобных» друг другу.

Метод заключается в использовании обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка вида $df(q)/dq = R(f, q)$, устанавливающего зависимость f от q . Правая часть $R(f, q)$ подбирается из класса функций, обеспечивающих асимптотическое приближение решения к предельным кривым, которые строятся по экспериментальным данным для максимально возможных или допустимых интервалов изменения q и f . В этом случае удаётся одним уравнением описать бесконечное множество подобных кривых, имеющих разные точки «старта», но приближающиеся к предельной кривой с ростом или уменьшением аргумента в зависимости от направления процесса.

Для описания гистерезиса $M(\kappa)$ в условиях нестационарных колебаний предлагается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка [13] с правой частью вида

$$\frac{dM}{d\kappa} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} \kappa^{i-1} M^{j-1}, \quad (30)$$

где κ – кривизна изгиба тросика, M – изгибающий момент; коэффициенты C_{ij} определяются методами приближения, минимизируя невязку аналитического представления $dM/d\kappa$ (30) экспериментальным данным, описывающим предельный цикл. Считается, что все возможные гистерезисные траектории – зависимости $M(\kappa)$, лежат внутри предельного цикла, т.е. области, ограниченной кривыми $M(\kappa)$, соответствующими максимальным диапазонам изменения кривизны и момента. Числа k и m подбираются в результате простых численных экспериментов. Значения этих параметров определяют характер (скорость) асимптотического приближения решения с начальной точкой (κ_0, M_0) внутри области к кривым предельного цикла. Величины C_{ij} могут быть вычислены, например, по методу наименьших квадратов.

Пример зависимостей $M(\kappa)$, полученных экспериментально в работе [14], дан на рис. 2.

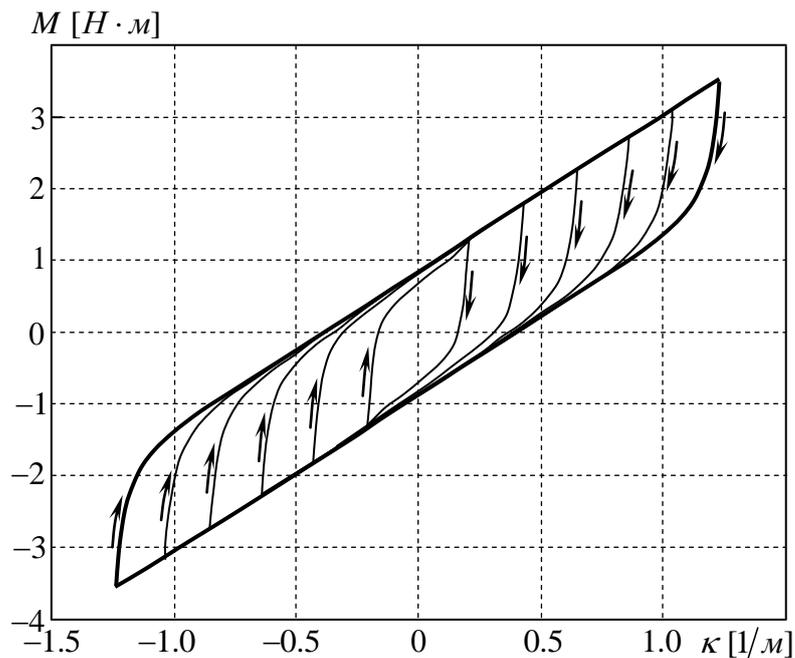


Рис. 2. Гистерезисные траектории. Процессы «нагрузки» отмечены стрелками вверх, «разгрузки» – стрелками вниз. Жирные кривые ограничивают область предельного цикла. Тонкие – определяют возможные траектории промежуточных состояний.

Можно допустить, что жирные линии соответствуют предельному циклу. Тонкие линии – возможным петлеобразным траекториям внутри области предельного цикла. Траектории, для которых с возрастанием момента кривизна возрастает, соответствуют процессу «нагрузки». И наоборот, траектории, для которых с уменьшением момента кривизна уменьшается,

соответствуют процессу «разгрузки». Начало процесса определяется некоторой точкой внутри области предельного цикла.

Вводятся обозначения: $\kappa_y = -w_0''$, $\kappa_z = -v_0''$, $\kappa_k = \theta_1'$.

На основании (30) и введенных обозначений кривизн

$$dM_y/d\kappa_y = \Phi_y, \quad dM_z/d\kappa_z = \Phi_z, \quad dM_k/d\kappa_k = \Psi, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_y &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} \kappa_y^{i-1} M_y^{j-1} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (-1)^{i-1} C_{ij} (w_0'') M_y^{j-1}, \\ \Phi_z &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} \kappa_z^{i-1} M_z^{j-1} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} (v_0'') M_z^{j-1}, \\ \Psi &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m D_{ij} \kappa_k^{i-1} M_k^{j-1} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m D_{ij} (\theta_1')^{i-1} M_k^{j-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (31) следуют уравнения

$$\dot{M}_y = -\dot{w}_0'' \Phi_y, \quad \dot{M}_z = \dot{v}_0'' \Phi_z, \quad \dot{M}_k = \dot{\theta}_1' \Psi, \quad (33)$$

которые необходимо интегрировать совместно с уравнениями вынужденных колебаний в виде:

$$M_z'' - I\ddot{v}_0'' + m\dot{v}_0'' = f_z, \quad -M_y'' + I\dot{w}_0'' + m\dot{w}_0'' = f_y, \quad -M_k' + I_p\ddot{\theta}_1' = f_k. \quad (34)$$

Здесь $f_y(t, x)$, $f_z(t, x)$ и $f_k(t, x)$ – заданная внешняя распределенная нагрузка.

Искомыми неизвестными системы (33), (34) являются v_0 , w_0 , θ_1 , M_y , M_z , M_k .

Решение строится в виде разложений по собственным формам колебаний системы без демпфирования:

$$\begin{aligned} v_0(t, x) &= \sum_{i=0}^r \alpha_i(t) V_i(x), \quad w_0(t, x) = \sum_{i=0}^r \beta_i(t) W_i(x), \quad \theta_1(t, x) = \sum_{i=0}^r \gamma_i(t) \Theta_i(x), \\ M_y(t, x) &= \sum_{i=0}^r \mu_i(t) W_i''(x), \quad M_z(t, x) = \sum_{i=0}^r \nu_i(t) V_i''(x), \quad M_k(t, x) = \sum_{i=0}^r \eta_i(t) \Theta_i'(x), \end{aligned} \quad (35)$$

где формы колебаний

$$V_i(x) = A_{1i} \varphi_{1i}(x) + A_{2i} \varphi_{2i}(x), \quad W_i(x) = B_{1i} \varphi_{1i}(x) + B_{2i} \varphi_{2i}(x), \quad \Theta_i(x) = D_i \sin k_i x \quad (36)$$

определяются из решения задачи о собственных частотах и формах колебаний системы; индекс i – номер собственной частоты колебаний; r – число учитываемых собственных форм колебаний; значение $i = 0$ соответствует единичным формам, определяющим движение сис-

темы как твёрдого тела. Функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\mu_i(t)$, $\nu_i(t)$, $\eta_i(t)$ подлежат определению.

Подстановка (35) с учётом (36) в (33), (34) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r (\dot{\mu}_i W_i'' + \dot{\beta}_i \Phi_y W_i'') = 0, \quad \sum_{i=0}^r (\dot{\nu}_i V_i'' - \dot{\alpha}_i \Phi_z V_i'') = 0, \quad \sum_{i=0}^r (\dot{\eta}_i \Theta_i' - \dot{\gamma}_i \Psi \Theta_i') = 0, \\ \sum_{i=0}^r [\ddot{\alpha}_i (mV_i - IV_i'') + \nu_i V_i^{IV}] = f_y, \quad \sum_{i=0}^r [\ddot{\beta}_i (mW_i - IW_i'') - \mu_i W_i^{IV}] = f_z, \\ \sum_{i=0}^r (\ddot{\gamma}_i I_p \Theta_i - \eta_i \Theta_i'') = f_k. \end{aligned} \quad (37)$$

Последовательное умножение уравнений системы (37) на соответствующие формы колебаний V_m , W_m , Θ_m ($m=1, \dots, r$) и интегрирование по длине тросика приводит к начальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\mu_i(t)$, $\nu_i(t)$, $\eta_i(t)$. Эта система интегрируется численными методами.

Некоторые характерные гистерезисные траектории, полученные в результате решения нестационарных уравнений (37), показаны на рис. 3.

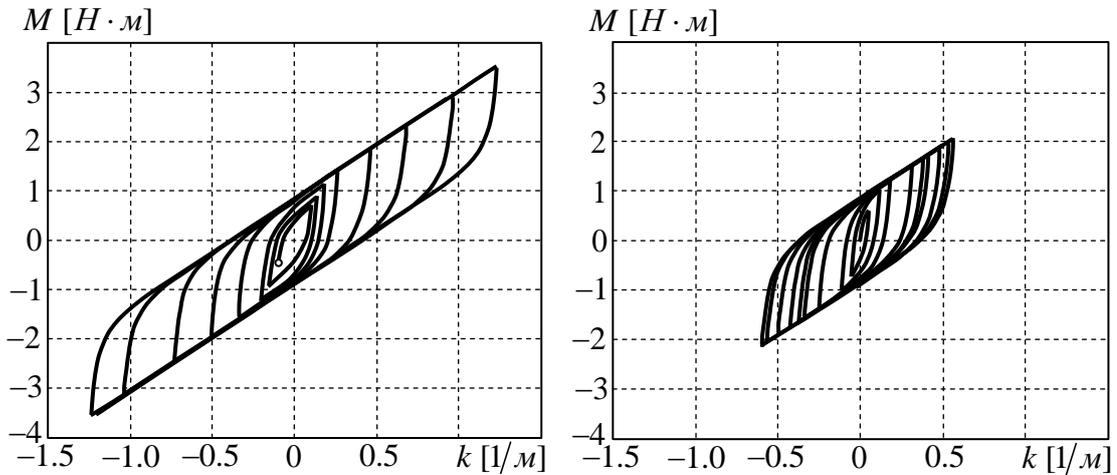


Рис. 3. Характерные гистерезисные петли при различных начальных условиях и внешнем возбуждении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен подход к решению задач о нестационарных колебаниях многочастотных гасителей вибрации проводов ВЛ с учётом диссипации энергии гистерезисного типа. Для учёта энергорассеяния предложен феноменологический метод, основанный на использовании кинематических уравнений, коэффициенты которых определяются из анализа экспериментальных данных для предельных циклов. Этот подход может быть распространён на

задачи о нестационарных колебаниях иных механические объекты с гистерезисным характером рассеяния энергии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Stockbridge G.H. Vibration damper. U.S. Patent 1675391. Filling date: Nov 12, 1925. Issue date: Jul 3, 1928.
2. McCombe J., Haigh F.R. Overhead Line Practice (3rd ed.). Macdonald. 1966. Pp. 216-219.
3. Шкапцов В.А. Методические указания по типовой защите от вибрации и субколебаний проводов и грозозащитных тросов воздушных линий электропередачи напряжением 35-750 кВ. М.: СПО «ОРГРЕС». 1991. 68 с.
4. Шалашилин В.И., Данилин А.Н., Цветков Ю.Л., Рыжов С.В. Модель провода воздушной линии электропередачи// Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т.11. №4. С.564-572.
5. Shalashilin V.I., Danilin A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. Model of overhead line conductor with interaction of layers. Proceedings of Sixth International Symposium on Cable Dynamics. Charleston, South Carolina (U.S.A.). Sept 19-22, 2005. Pp.371-377.
6. Данилин А.Н., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н., Тарасов С.С. Новая модель деформирования проволочных систем спиральной структуры// Нелинейный мир. 2011. Т.9. №10. С.635-645.
7. H. Dubois, J.L. Lilien, F. Dal Maso. A new theory for frequencies computation of overhead lines with bundle conductors// Revue AIM (Belgium). 1991. No 1. Pp.45-62.
8. Данилин А.Н., Шалашилин В.И. О параметризации нелинейных уравнений деформирования твердого тела// Механика твердого тела. 2000. №1. С.82-92.
9. Данилин А.Н., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. О неявных алгоритмах интегрирования задачи Коши для параметризованных уравнений, описывающих динамическое поведение механических систем// Прикладная математика и механика. 2003. Т.67. Вып.6. С.1053-1069.
10. Danilin A.N., Snegovski D.V., Volkov-Bogorodski D.B. On implicit algorithms of continuation method with applications to dynamic systems// J. of Comp. and Appl. Math. 2004. V.164-165. P.207-224.
11. Данилин А.Н., Захаров А.П. Подход к описанию гистерезиса с использованием данных серии типовых экспериментов на примере гасителя пляски проводов// Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т.14. № 14. С.604-622.

12. Данилин А.Н., Шалашилин В.И. Способ идентификации гистерезиса на примере гасителя «пляски проводов»// Прикладная механика. 2010. Т.46. № 5. С.115-124.
13. Danilin A.N., Vinogradov A.A., Lilien J.-L. A Kinematic Model for Hysteretic Dissipation of Vibration Energy for Torsional Damper and Detuner (TDD). Proceedings of Seventh International Symposium on Cable Dynamics, Vienna (Austria), December 10-13, 2007. Pp.247-253.
14. Sauter D., Hagedorn P. On the hysteresis of wire cables in stockbridge dampers// Int. J. of Non-linear Mechanics. 2002. V.37. No 8. Pp.1453-1459.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ СТАТЬИ

Данилин Александр Николаевич, ведущий научный сотрудник Института прикладной механики, д.ф.-м.н.; Москва, Ленинский проспект, 32а;
тел.: +7 916 533-69-82; e-mail: andanilin@yandex.ru

Козлов Кирилл Сергеевич, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета); МАИ, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: +7 953 959-95-66; e-mail: taizk@mail.ru

Кузнецова Елена Львовна, старший преподаватель Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.ф.-м.н.; МАИ, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: +7 926 575-05-08; e-mail: vida_ku@mail.ru

Тарасов Сергей Сергеевич, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета); МАИ, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: +7 926 273-68-78; e-mail: maitarasov@mail.ru