

На правах рукописи



**Сборщиков Сергей Васильевич**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГО-  
ПЛАСТИЧЕСКИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ  
МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ**

Специальность

1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Научный руководитель:** **Димитриенко Юрий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Официальные оппоненты:** **Горбачев Владимир Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика композитов» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (МГУ им. М.В. Ломоносова)

**Ченцов Александр Викторович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского» РАН

**Ведущая организация:** **Акционерное общество «Композит»**

Защита диссертации состоится «27» сентября 2023 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте:

[https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=172803](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=172803)

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.327.07



Сердюк Дмитрий Олегович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы** диссертационной работы обоснована перспективностью применения в технике композиционных материалов на металлической матрице, проявляющих упруго-пластические свойства, а также отсутствием в настоящее время методов моделирования эффективных свойств упруго-пластических анизотропных композитов при циклическом нагружении на основе структурных моделей, допускающих аналитическое представление, без решения связанных задач микро-макро-пластичности композитных конструкций.

Теоретические основы теории изотропной пластичности были заложены А.Э. Треска, А.Ж.К. Сен-Венаном, Р.Э. Мизесом, М.Т. Губером, Г. Генки, А.Л. Надаи, Л.Прандтлем, Д.Р. Рейссом, Д. Драккером, А.А. Ильюшиным, В.С. Ленским, В.В. Москвитиным, Н.Н. Малининым, В.С. Бондарем, Д.Д. Ивлевым, В. Прагером, Ф.Г. Ходжем, А.Ю. Ишлинским, В.В. Новожиловым, Ю.И. Кадашевичем, А.Г. Зубчаниновым, Ю.М. Темисом и многими другими. Деформационная теория пластичности изотропных сред при циклических нагружениях была развита В.В. Москвитиным, В.С. Бондарем, В.В. Даншиным, А.П. Гусенковым и другими.

В работах Б.Е. Победри, Н.С. Бахвалова, В.И. Горбачева, Ю.И. Димитриенко, С.В. Шешенина, М.Э. Эглит, В.Л. Бердичевского, В.И. Большакова, И.В. Андрианова, В.В. Данишевского, Л.В. Муравлевой, А.И. Кашкарова, Manevitch L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G., Y.K. Khdir, T. Kanit, F. Zaïri, M. Naït-Abdelaziz, Marcellini P., A. Mbiakor, A. Constantinescu, K. Danas, Nouailhas, D., Chaboche, J.L., Savalle, S., Cailletaud, G. и других, для моделирования упруго-пластических свойств композитов используется один из наиболее эффективных современных математических методов моделирования структурно-неоднородных сред – метод асимптотического осреднения. Ввиду значительной сложности численной реализации этого метода, как правило, результаты моделирования с его помощью сводятся к построению диаграмм деформирования при простых видах нагружения, и, как правило, не допускают явного аналитического представления эффективных определяющих соотношений. Тем самым, задачи микро- и макро-анализа в рамках такого подхода оказываются связанными, что значительно усложняет процедуру их решения.

Кроме того, структурные модели теории пластичности для композитов, применимые для циклических нагружений, в настоящее время еще относительно мало исследованы.

Таким образом, проблема построения определяющих соотношений для упруго-пластических композитов, основанных на структурных моделях, допускающих аналитические представления, которые избавляют от необходимости решения связанных задач микро- и макро-пластичности, является **актуальной задачей**.

**Цель проведенных исследований** состоит в разработке методики построения определяющих соотношений анизотропных упруго-пластических композиционных материалов при циклическом нагружении, допускающих аналитическое представление, с использованием метода асимптотического осреднения периодических структур, численных конечно-элементных алгоритмов решения задач на ячейке периодичности, в рамках деформационной теории пластичности.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач**:

разработка варианта метода асимптотического осреднения упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях на основе деформационной теории пластичности А.А.Ильюшина – В.В. Москвитина;

разработка методики построения микро-структурных эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях, допускающих аналитическое представление, для композитов с произвольной периодической микроструктурой на основе численного конечно-элементного решения серии локальных задач на ячейках периодичности;

построение микроструктурных определяющих соотношений деформационной теории пластичности при циклических нагружениях для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов;

разработка методики определения материальных констант предложенных микро-структурных моделей анизотропной деформационной теории пластичности;

разработка численного конечно-элементного алгоритма решения задач на ячейке периодичности для упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях;

проведение численного решения задач теории пластичности на ячейках периодичности при циклическом нагружении для 2-х типов композитов (однонаправленно-армированных и тканевых) и определение типовых материальных констант для упруго-пластических моделей данных типов композитов;

разработка методики решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для конструкций из композитов при циклическом нагружении и численное решение трехмерных задач о циклическом изгибном нагружении балки из композиционных материалов разных типов, с использованием разработанной методики.

**Методы исследования.** В работе использованы:

- метод асимптотического осреднения;
- метод конечных элементов;
- численные методы интегрирования.

**Достоверность и обоснованность научных результатов** гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с результатами решения с использованием сторонних программных комплексов для вариантов решений, доступных для сравнения.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

разработан вариант метода асимптотического осреднения упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях на основе деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина – В.В. Москвитина;

разработана методика построения микро-структурных эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях для композитов с произвольной периодической микро-структурой, на основе численного решения серии локальных задач на ячейках

периодичности; с помощью данной методики построены новые определяющие соотношения для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов.

**Практическая значимость.** Методика построения эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях, а также сами новые определяющие соотношения для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов могут быть использованы при расчете и оптимизации конструкций из упруго-пластических композиционных материалов в элементах конструкций перспективных двигателей, энергетических высоконагруженных конструкций, летательных аппаратов и других конструкций.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на научных конференциях, в том числе на:

XII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 3-5 октября 2011 г;

XXXII Всероссийской конференции по проблемам науки и технологии-Миасс.МСНТ. 2012;

IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), - Алушта, Московский Авиационный Институт, май 2012;

XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМП-СППС'2013) 22-31 мая 2013 г;

Третьей международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014;

Международной научной конференция "Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech - 2014), посвященной 50-летию Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э.Баумана 17-19 ноября 2014 года;

XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Казань. Казанский (Приволжский) федеральный университет. 20-24 августа 2015 года;

Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Федосьева, Москва, 17-19 мая 2016;

Mathematical and Information Technologies. Conference Information. 28.08 – 31.08.2016 Vrnjacka Banja, Serbia, 01.09. -05.09. 2016. Budva, Montenegro.

Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 5-8 декабря 2018;

2-ом, 3-ем, 4-ом и 5-ом Международных научных форумах: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2019, 2020, 2021 и 2022 гг;

научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (Москва, 2015-2022 гг.).

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы 69 публикаций (полный их список приведен в диссертации), в том числе: 33 публикации в изданиях из списка ВАК [1-33], 12 публикаций в изданиях из списка ВАК по научной специальности 1.1.8 (физико-математические науки) [4, 6, 9,11,12, 16, 20-25] и 10 публикаций [7,15, 26-33] в журналах, индексируемых в Scopus.

**Личный вклад соискателя** заключается:

– в непосредственном участии в разработке методики построения микроструктурных эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях для композитов с произвольной периодической микроструктурой на основе численного конечно-элементного решения серии локальных задач на ячейках периодичности, написании статей и подготовке тезисов докладов;

– в непосредственном участии в разработке методики определения материальных констант микро-структурных моделей анизотропной деформационной теории пластичности для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов, в подготовке выступлений с докладами;

– в разработке конечно-элементных алгоритмов решения задач на ячейке

периодичности для упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях, разработке алгоритма для конечно-элементного решения осредненных задач анизотропной теории пластичности, разработке программного обеспечения, реализующего эти алгоритмы,

- в проведении серий численного решения задач теории пластичности на ячейках периодичности при циклическом нагружении для 2-х типов композитов (однонаправленно-армированных и тканевых) и определены типовые значения материальных констант для данных типов моделей упруго-пластических композитов;

- в численном решении макроскопических задач о циклическом изгибном нагружении 3-х мерной балки из композиционных материалов разных типов, с использованием разработанных микроструктурных моделей эффективных определяющих соотношений упруго-пластических композитов.

**Структура и объем.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, выводов и списка литературы из 158 наименований. Работа изложена на 158 листах, содержит 58 рисунков.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, отражены цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, перечислены основные положения, выносимые на защиту, представлен обзор литературы по теме работы, описана структура диссертационной работы.

**Первая глава** посвящена развитию метода асимптотического осреднения Бахвалова-Победри для упруго-пластических композитов при циклических нагружениях.

**В разделе 1.1** для исходных компонентов упруго-пластических композитов при циклических процессах применена модель А.А. Ильюшина-В.В. Москвитина, согласно которой процессы нагрузки-разгрузки во всей области  $V$  композитной конструкции происходят согласованно, т.е. имеют место следующие представления



$$\Omega = \Omega^{(n)}(t) = \Delta \tilde{\Omega}^{(n)}(t) + \sum_{n'=1}^{n-1} (-1)^{n'-1} \Delta \Omega^{(n')}(t_{n'}), \quad 0 \leq t \leq t_n \quad (1)$$

где  $\Omega = \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}, u_i\}$ , а  $\Delta \Omega^{(n)}(t)$  - приращения функции  $\Omega(t)$  на промежутке времени  $[t_{n'-1}, t_{n'}]$ , здесь обозначены компоненты: тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и малых деформаций  $\varepsilon_{kl}$ , вектора перемещений  $u_i$  в декартовом базисе  $\bar{e}_i$ , с координатами  $x_i$ . Исходная постановка задачи теории пластичности на каждом  $[t_{n-1}, t_n)$  в  $V$  имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla_i \Delta \sigma_{ij}^{(n)} &= 0, & \Delta \sigma_{ij}^{(n)} &= F_{ij}^{(n)}(\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)}, x_m), & 2\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)} &= \nabla_l \Delta u_k^{(n)} + \nabla_k \Delta u_l^{(n)}, \\ \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \Big|_{\Sigma_\sigma} n_j &= S_i^o \Delta \chi^{(n)}(t), & \Delta u_i^{(n)} \Big|_{\Sigma_u} &= u_i^o \Delta \chi^{(n)}(t), & & \\ \Sigma_s : [\Delta \sigma_{ij}^{(n)}] n_j &= 0, & [\Delta u_i^{(n)}] &= 0. & & \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\nabla_i = \partial / \partial x_i$  - частные производные,  $n_j$  - компоненты вектора нормали,  $S_i(t)$  - компоненты вектора усилий, заданного на части  $\Sigma_\sigma$  поверхности  $\Sigma$  области  $V$ ,  $u_{ei}(t)$  - компоненты вектора перемещений, заданные на части  $\Sigma_u$  поверхности,  $\Sigma_s$  - поверхности раздела компонентов композита с условиями идеального контакта,  $[u_i]$  - скачок функций на поверхности контакта,  $t$  - время. Нелинейная тензорная функция  $F_{ij}^{(n)}$  имеет следующий вид:  $F_{ij}^{(n)}(\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)}, x_s) = C_{ijkl}^{(n)}(\omega, x_s) \Delta \varepsilon_{kl}^{(n)}$ , где обозначены компоненты тензора секущих модулей упругости

$$C_{ijkl}^{(n)}(\omega, x_s) = \left( K - \frac{2}{3} G^{(n)}(\omega, x_s) \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G^{(n)}(\omega, x_s) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3)$$

где  $G^{(n)}(\omega, x_s) = G(x_s) \left( 1 - \omega^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)}, x_k) \right)$ , а  $K(x_k)$  и  $G(x_k)$  - модуль объемного сжатия и модуль сдвига,  $\omega^{(n)}$  - функция пластичности А.А. Ильюшина для компонентов КМ, ее зависимость от номера цикла нагружения выбрана согласно модели Мазинга [17,102]

$$\omega^{(n)} = \alpha^{(n)}(x_k) \omega \left( \frac{\varepsilon_u^{(n)}}{\alpha^{(n)}(x_k)}, x_k \right), \quad \alpha^{(1)}(x_k) = 1, \quad \alpha^{(n)}(x_k) = \alpha_0(x_k) (n-1)^{\gamma(x_k)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

где  $\alpha_0(x_k)$  и  $\gamma(x_k)$  - масштабные коэффициенты, а  $\omega(\varepsilon_u^{(1)}, x_k)$  - функции пластичности компонентов КМ на 1-м цикле нагружения,

**В разделе 1.2**, в силу периодичности структуры композита вводится малый параметр  $\varepsilon = l/L \ll 1$ , безразмерные глобальные  $\bar{x}_i = x_i/L$  и локальные  $\xi_i = x_i/l$  координаты, где  $l$  – характерный размер ячейки периодичности  $V_\varepsilon$  (ЯП) композита,  $L$  – диаметр всей области  $V$ . Для решения линеаризованной задачи (1) применен метод асимптотического осреднения (МАО), ее решение ищется в виде асимптотических разложений по параметру  $\varepsilon$

$$\Delta u_i^{(n)\{m\}} = \Delta u_i^{(n)\{m\}(0)}(\bar{x}_i, t) + \varepsilon \Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}(\bar{x}_i, \xi_j, t) + \varepsilon^2 \Delta u_i^{(n)\{m\}(2)}(\bar{x}_i, \xi_j, t) + \dots \quad (4)$$

где  $m$  – номер итерации. С помощью МАО сформулированы локальные задачи пластичности на ЯП (задачи  $L_{pq}$ ), в частности для нулевого приближения

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} &= 0, \quad \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} = C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)}, \\ 2\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} &= 2\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} + \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(1)} + \Delta u_{l,k}^{(n)\{m\}(1)} \\ \Sigma_s : [\Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)}] n_j &= 0, \quad [\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}] = 0 \\ [[\Delta u_k^{(n)\{m\}(1)}]]_\alpha &= 0, \quad [[\Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)}]]_\alpha = 0, \quad \langle \Delta u_k^{(n)\{m\}(1)} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

где  $u_{l|k} = \partial u_l / \partial \xi_k$ ,  $u_{l,k} = \partial u_l / \partial \bar{x}_k$ ,  $\langle u_k \rangle = \int_{V_\varepsilon} u_k dV_\varepsilon$ ,  $2\bar{\varepsilon}_{kl} = u_{k,l}^{(0)} + u_{l,k}^{(0)}$ , а также осредненная задача теории анизотропной пластичности для  $n$ -го цикла нагружения

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\sigma}_{ij,j}^{(n)\{m\}} &= 0, \quad \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} \rangle = \bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} (\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m-1\}}) \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}, \\ 2\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} &= \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(0)} + \Delta u_{l,k}^{(n)\{m\}(0)}, \\ \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} \Big|_{\Sigma_\sigma} n_j &= S_i^o \Delta \chi^{(n)}(t_m), \quad \Delta u_i^{(n)\{m\}(0)} \Big|_{\Sigma_u} = u_i^o \Delta \chi^{(n)}(t_m) \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} (\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m-1\}})$  – эффективный тензор секущих модулей упругости композита, который вычисляется с помощью решения задач  $L_{pq}$ .

**В разделе 1.3** предложен алгоритм конечно-элементного (КЭ) решения задач  $L_{pq}$ , описан разработанный программный модуль (ПМ) для КЭ решения этих задач и приведены результаты тестовых расчетов задач  $L_{pq}$  для случая линейно-упругих КМ 2-х типов: однонаправленно-армированных композитов (1D КМ) и тканевых композитов (ТКМ).

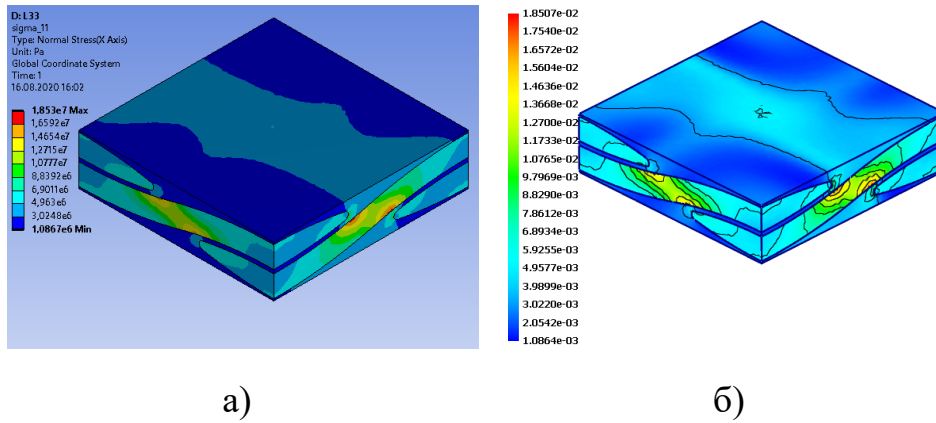


Рис.1 Поля микро-напряжения  $\Delta\sigma_{11}^{(1)}$  (ГПа) в 1/8 ЯП, в задаче  $L_{33}$ , полученные с помощью ПК ANSYS (а) и с помощью разработанного ПМ (б)

Представлены результаты сравнения с расчетами, выполненными с помощью ПК ANSYS (с помощью дополнительных надстроек, отсутствующих в этом комплексе). Некоторые примеры расчетов показаны на рис.1. Показано, что имеет место хорошее совпадение результатов, в том числе – для эффективных констант упругости тканевых композитов, полученных с помощью ПК ANSYS и с помощью разработанного ПМ: относительное отклонение для всех констант не превышает  $2.71e-06$  %.

В разделе 1.4 представлены примеры КЭ-решения задач  $L_{pq}$  для упруго-пластических 1D КМ и ТКМ, некоторые примеры численных расчетов показаны на рис.2. и 3 для КМ на основе Al матрицы и волокон SiC.

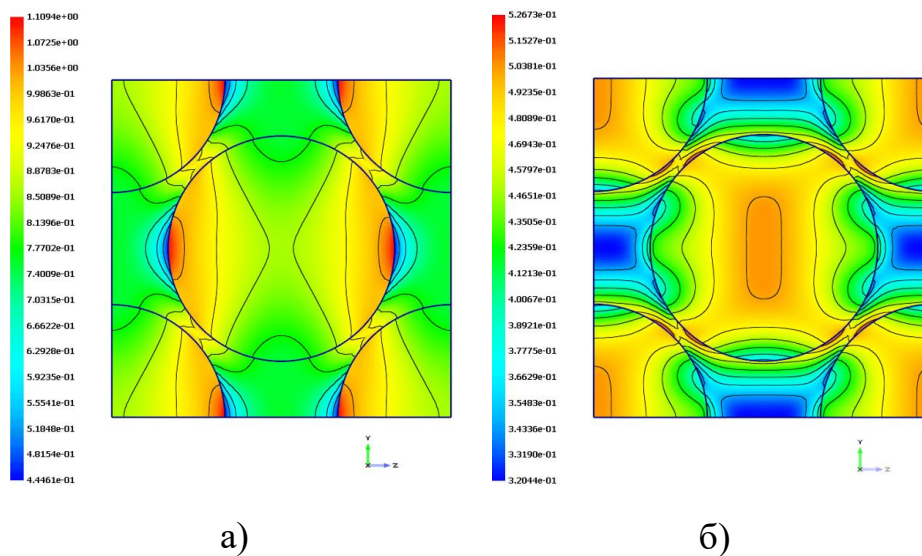


Рис.2 Поля напряжений  $\Delta\sigma_{11}^{(1)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{22}^{(1)}$  (б) (ГПа) в задаче  $L_{11}$  для 1D КМ

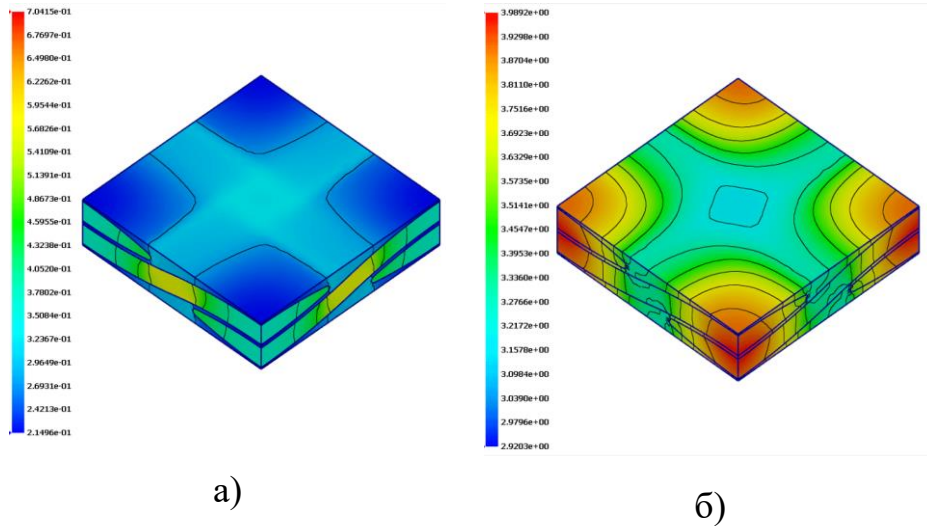


Рис.3 Поля микронапряжений (ГПа)  $\Delta\sigma_{12}^{(1)}$  в задаче  $L_{12}$  (а) и  $\Delta\sigma_{33}^{(1)}$  в задаче  $L_{33}$  (б) для ТКМ

Численным методом построены единые диаграммы циклического деформирования для 1D и ТКМ для задач  $L_{pq}$ , пример такой диаграммы  $\bar{\sigma}_{13} = F_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$  для 1D КМ Al/SiC и ТКМ для случая 4-х циклов одноосного сдвигового деформирования показан на рис.4.

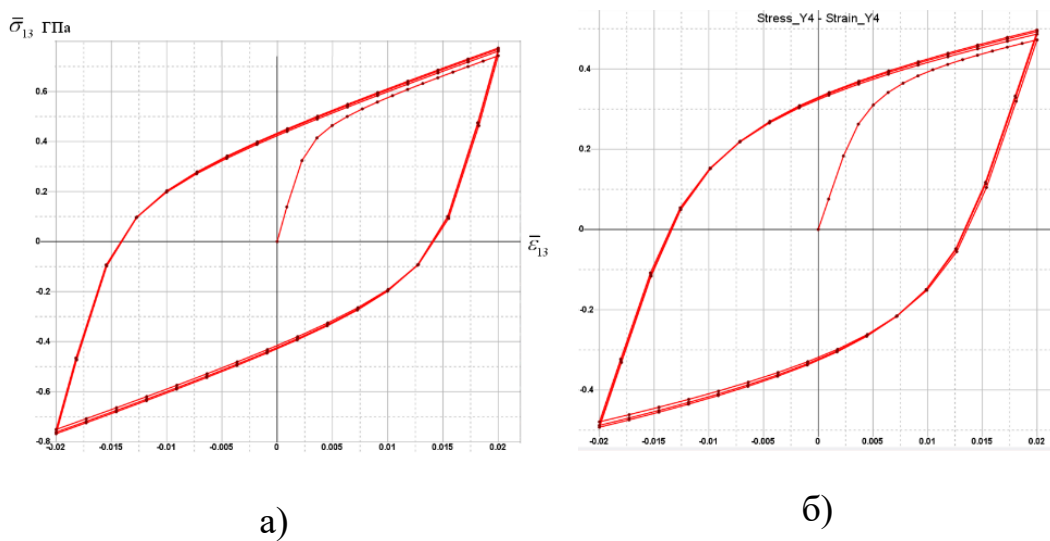


Рис.4 Диаграммы циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = F_{11}(\bar{\varepsilon}_{13})$  1D КМ (а) и ТКМ (б)

**Глава 2** посвящена разработке методики построения микро-структурных аналитических определяющих соотношений деформационной теории пластичности композитов при циклических нагружениях, основанной на методе асимптотического осреднения.

**В разделе 2.1** с использованием спектральных представлений квазилинейных тензорных функций, предложенных Б.Е. Победрей и Ю.И. Димитриенко, сформулированы общие аналитические представления для эффективных определяющих соотношений анизотропных упруго-пластических сред при циклических нагружениях. Предложены так называемые упрощенные модели квазилинейных упруго-пластических анизотропных сред с использованием соотношений между спектральными инвариантами тензоров напряжений и деформаций в цикле. Сформулированы матричные представления моделей.

**В разделе 2.2.** предложена микро-структурная модель для трансверсально-изотропных упруго-пластических сред, в которой эффективные определяющие соотношения с использованием спектральных представлений записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = & (l_{11}^{(n)} Y_1 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) + l_{12}^{(n)} Y_2 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})) \delta_{i3} \delta_{j3} + \frac{1}{\sqrt{2}} (l_{12}^{(n)} Y_1 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) + \\ & + l_{22}^{(n)} Y_2 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})) (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i2} \delta_{j2}) + l_{33}^{(n)} P_{ij}^{(3)} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) + l_{44}^{(n)} P_{ij}^{(4)} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $Y_\alpha (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})$  - спектральные инварианты приращений тензора деформации  $\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}$  в группе трансверсальной изотропии  $T_3$ .

$$Y_1 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta \bar{\varepsilon}_{33}^{(n)}, \quad Y_1 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = (\Delta \bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} + \Delta \bar{\varepsilon}_{22}^{(n)}) / 2, \quad (8)$$

$$Y_3 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{((\Delta \bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} - \Delta \bar{\varepsilon}_{22}^{(n)})^2 + 4(\Delta \bar{\varepsilon}_{12}^{(n)})^2)} / 2, \quad Y_4 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{2(\Delta \bar{\varepsilon}_{13}^{(n)2} + \Delta \bar{\varepsilon}_{23}^{(n)2})}$$

а  $P_{ij}^{(3)} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})$  - обобщенные девиаторы тензора  $\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}$  в группе  $T_3$ . Функции  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$  задаются в виде следующей модели, обобщающей модель А.А. Ильюшина на случай трансверсальной-изотропии

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0 (1 - \omega_\alpha^{(n)}), \quad l_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}^0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0 (1 - \omega_\alpha^{(n)}), \quad \alpha = 3, 4, \quad (9)$$

здесь  $l_{\alpha\beta}^0$  - спектральные упругие константы линейно-упругого трансверсально-изотропного тела, а для 4-х функций пластичности  $\omega_\alpha^{(n)}$  предложены следующие зависимости, обобщающие модель Мазинга

$$\omega_\alpha^{(n)} = \bar{\alpha}_\alpha^{(n)} \omega_\alpha \left( \frac{Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\alpha^{(n)}} \right), \quad \alpha = 1, 2, \quad \omega_\beta^{(n)} = \bar{\alpha}_\beta^{(n)} \omega_\beta \left( \frac{Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\beta^{(n)}}, \frac{Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\beta^{(n)}} \right), \quad \beta = 1, 2, \quad (10)$$

где

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } |Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})| < \varepsilon_{S\alpha} \\ \omega_\alpha^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{S\alpha}}{Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}\right)^{b_\alpha}, & \text{если } |Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})| \geq \varepsilon_{S\alpha} \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (11)$$

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) < \varepsilon_{S\alpha} \\ \omega_\alpha^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{S\alpha}}{\tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}\right)^{b_\alpha}, & \text{если } \tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) \geq \varepsilon_{S\alpha} \end{cases}, \quad \alpha = 3, 4$$

$$\tilde{Y}_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{\left(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2 + a_{S3} \left(Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2}, \quad \tilde{Y}_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{\left(Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2 + a_{S4} \left(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2},$$

$$b_3 = b_{30} + b_{31} \left(Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2 + b_{32} Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad b_4 = b_{40} + b_{41} \left(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2 + b_{42} Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}),$$

Функции  $\bar{\alpha}_\beta^{(n)}$  выбираются в виде

$$\bar{\alpha}_\beta^{(1)} = 1, \quad \bar{\alpha}_\beta^{(n)} = \bar{\alpha}_{\beta 0} (n-1)^{\gamma_\beta}, \quad \beta = 1, \dots, 4, \quad n = 2, 3, \dots \quad (12)$$

Для определения констант, входящих в модель (10)-(12), предложено рассматривать 6 траекторий нагружения: 1) межслоевой сдвиг, 2) сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии, 3) сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии после предварительного межслоевого сдвига, 4) межслоевой сдвиг после предварительного сдвига в плоскости трансверсальной изотропии, 5) растяжение в продольном направлении, 6) растяжение в плоскости трансверсальной изотропии. Для каждой из этих траекторий решаются по 2 задачи: прямого численного решения комбинации соответствующих задач  $L_{pq}$  и осредненной задачи (6) с аналитическими эффективными ОС (7)-(12), и строятся соответствующие диаграммы деформирования композита в виде соотношений между спектральными инвариантами тензоров напряжений и деформации. Из условия минимума относительного отклонения этих диаграмм деформирования определяются константы модели (7)-(12) композита.

На рисунках 5 показаны некоторые из указанных пар диаграмм деформирования для 1D КМ.

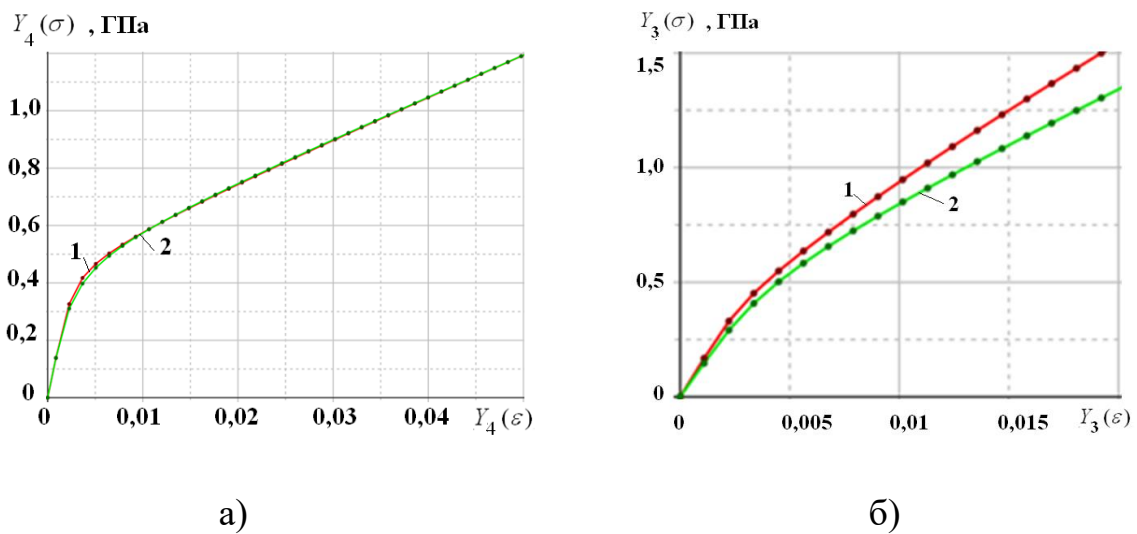


Рис.5 Диаграммы деформирования  $Y_4(\sigma) = F_4(Y_4(\varepsilon))$  и  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon))$  для 1D КМ, полученные для траекторий нагружения 1) (а) и 2) (б) с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и задач (б) (кривые 2)

На рисунке 6 показаны кривые циклического деформирования 1D КМ при межслойном сдвиге, полученные прямым решением задач  $L_{13}$  и с помощью модели (7)-(12) трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Точность аппроксимации достаточно высокая, суммарная относительная ошибка – 1,5%.

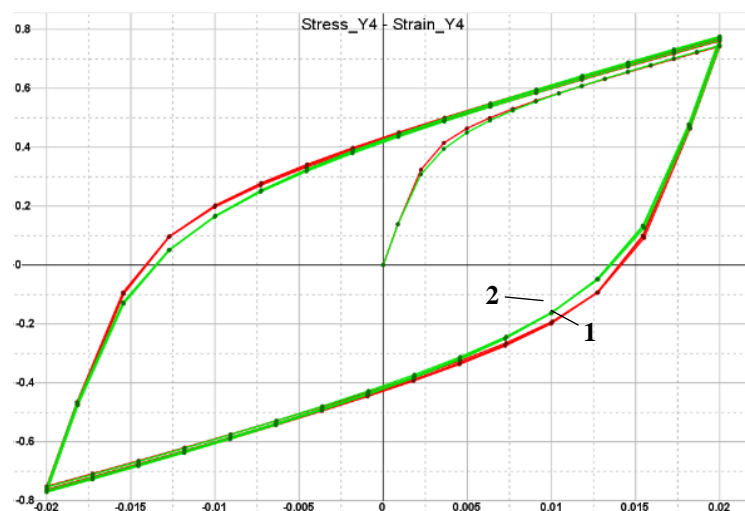


Рис.6 Циклические диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_4^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{13})$  при межслойном сдвиге для 1D КМ, полученные с помощью решения задач  $L_{13}$  (кривая 1) и с помощью модели трансверсально-изотропного КМ (кривая 2)

После определения констант модели проведена верификация модели на траекториях нагружения, не входящих в базу траекторий для определения констант.

**В разделе 2.3** предложена микро-структурная модель для ортотропных упруго-пластических сред, в которой определяющие соотношения с использованием спектральных представлений записываются следующим образом:

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = \sum_{\beta=1}^3 l_{\alpha\beta}^{(n)} Y_{\beta} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} + \sum_{\beta=4}^6 l_{\beta\beta}^{(n)} P_{ij}^{(\beta)} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) \quad (13)$$

Спектральные инварианты  $Y_{\alpha} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})$  в этом случае имеют вид

$$Y_{\alpha} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta \bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha}^{(n)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (14)$$

$$Y_4 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta \bar{\varepsilon}_{12}^{(n)}|, \quad Y_5 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta \bar{\varepsilon}_{13}^{(n)}|, \quad Y_6 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta \bar{\varepsilon}_{23}^{(n)}|$$

а  $P_{ij}^{(\beta)} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})$  - обобщенные девиаторы тензора  $\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}$  в группе ортотропии О. Функции  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$  задаются в виде модели, обобщающей модель А.А. Ильюшина на случай ортотропии

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0 (1 - \omega_{\alpha}^{(n)}), \quad l_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}^0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0 (1 - \omega_{\alpha}^{(n)}), \quad \alpha = 4, 5, 6, \quad (15)$$

Здесь  $l_{\alpha\beta}^0$  - спектральные упругие константы линейно-упругого ортотропного тела, а для б-и функций пластичности  $\omega_{\alpha}^{(n)}$  предложены следующие зависимости, обобщающие модель Мазинга:

$$\omega_{\alpha}^{(n)} = \bar{\alpha}_{\alpha}^{(n)} \omega_{\alpha} \left( \frac{Y_{\alpha} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_{\alpha}^{(n)}} \right), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \omega_{\beta}^{(n)} = \bar{\alpha}_{\beta}^{(n)} \omega_{\beta} \left( \frac{Y_1 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_{\beta}^{(n)}}, \dots, \frac{Y_6 (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_{\beta}^{(n)}} \right) \quad \beta = 4, 5, 6,$$

где

$$\omega_{\alpha} (= \begin{cases} 0, & \text{если } |Y_{\alpha} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})| < \varepsilon_{S\alpha} \\ \omega_{\alpha}^0 \left( 1 - \frac{\varepsilon_{S\alpha}}{Y_{\alpha} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})} \right)^{b_{\alpha}}, & \text{если } |Y_{\alpha} (\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})| \geq \varepsilon_{S\alpha} \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (16)$$



$$\omega_\alpha^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) < \varepsilon_{S\alpha} \\ \omega_\alpha^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{S\alpha}}{\tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}\right)^{b_\alpha}, & \text{если } \tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) \geq \varepsilon_{S\alpha} \end{cases}, \quad \alpha = 4, 5, 6$$

$$\tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{\sum_{\beta=1}^6 a_{S\alpha\beta} \left(|Y_\beta(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})|\right)^{q_{\alpha\beta}}}, \quad a_{S\alpha\alpha} = 1, \quad q_{\alpha\alpha} = 2, \quad \alpha = 4, 5, 6.$$

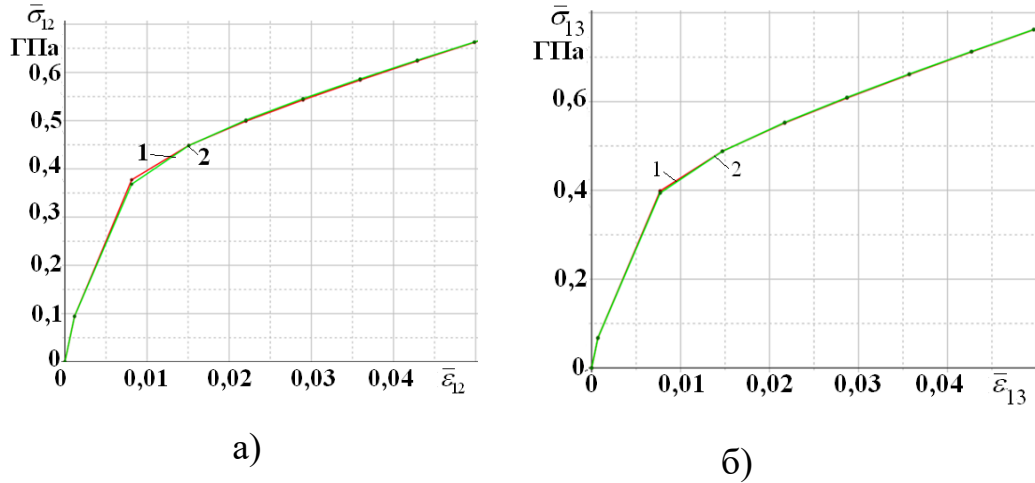


Рис.7 Диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{12})$  и  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_5(\bar{\varepsilon}_{13})$  для ТКМ, полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и задач (6) (кривые 2)

Функции  $\bar{\alpha}_\beta^{(n)}$  выбираются в виде

$$\bar{\alpha}_\beta^{(1)} = 1, \quad \bar{\alpha}_\beta^{(n)} = \bar{\alpha}_{\beta 0} (n-1)^{\gamma_\beta}, \quad \beta = 1, \dots, 6, \quad n = 2, 3, \dots \quad (17)$$

Для определения констант в модели (13)-(17) предложены 15 траекторий деформирования, для каждой которых решаются по 2 задачи: прямого численного решения комбинации соответствующих задач  $L_{pq}$  и осредненной задачи (6) с соотношениями (13)-(17), и строятся соответствующие диаграммы деформирования композита в виде соотношений между спектральными инвариантами тензоров напряжений и деформации. Из условия минимума относительного отклонения этих диаграмм деформирования определяются константы модели (7)-(12) композита.

На рисунках 7 показаны некоторые из указанных пар диаграмм деформирования для ТКМ.

**Третья глава** посвящена разработке методики решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для элементов конструкций из композитов при циклическом нагружении. **В разделе 3.1** Сформулирована постановка

осредненной задачи (6) теории пластичности КМ при циклическом нагружении с учетом разработанных спектральных представлений определяющих соотношений (7) и (13) анизотропной теории пластичности и предложен алгоритм вычисления тензоров концентрации микронапряжений в ЯП, соответствующих различным точкам композитной конструкции с осредненными эффективными свойствами.

Для решения осредненной задачи теории анизотропной пластичности (6), (7) и (6), (13) применяется метод конечного элемента, для этого сформулирована вариационная постановка задачи.

**В разделе 3.2** в качестве примера применения разработанной методики рассмотрена 3-х мерная задача о 4-х точечном изгибе балки из трансверсально-изотропного 1D упруго-пластического композита при циклическом нагружении, а также аналогичная задача для балки из ортотропного тканевого упруго-пластического композита. На рисунке 8 показана циклическая диаграмма деформирования балки  $P \sim w$  (нагрузка – прогиб) из ТКМ при 4-х точечном изгибе для 3-х циклов нагружения.

На рисунках 9 показаны результаты моделирования полей макро-напряжений  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_i)$  в балке из ТКМ в момент времени  $t_1$  максимального нагружения в 1 –м цикле, а также поля микро-напряжений  $\sigma_{11}(t_1, \xi_s, \bar{x}_i)$  в ЯП, соответствующих нескольким характерным точкам балки.

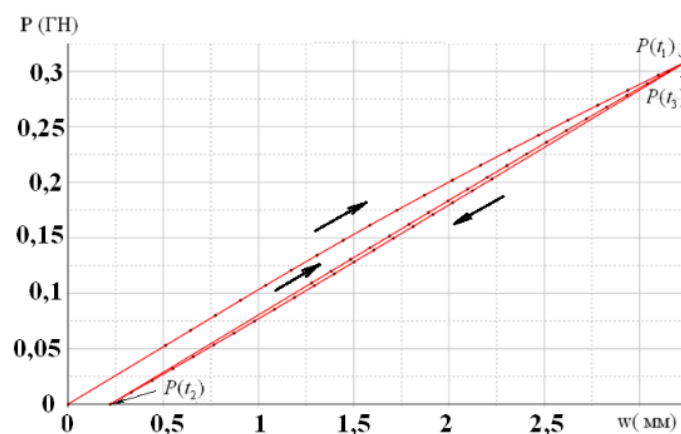


Рис. 8 Циклическая диаграмма деформирования балки из ТКМ при 4-х точечном изгибе (нагрузка  $P$  (ГН)– прогиб  $w$  (мм))

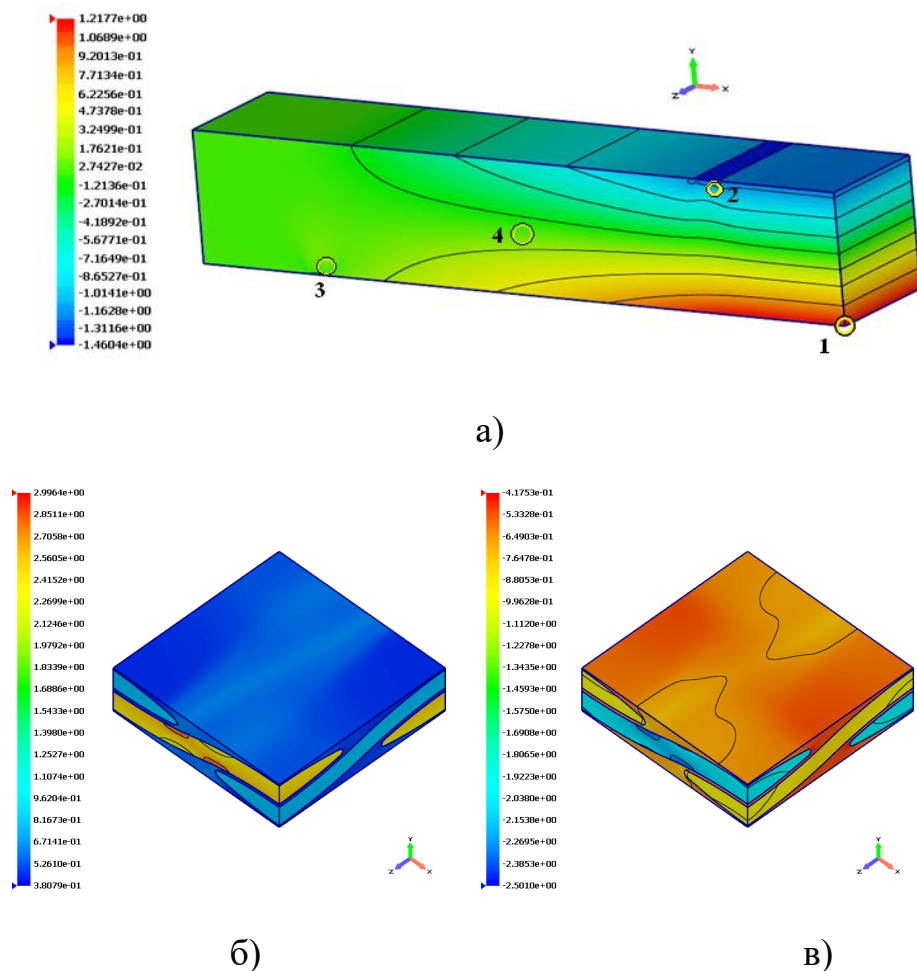


Рис. 9 Поле макронапряжения  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_i)$  (ГПа) в балке (а) и микро-напряжений  $\sigma_{11}(t_1, \xi_s, \bar{x}_i)$  (ГПа) в ЯП для контрольных точек № 1 (б), № 2 (в) при 4-х точечном изгибе балки из ТКМ.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1) предложен вариант метода асимптотического осреднения упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях на основе деформационной теории пластичности А.А.Ильюшина – В.В. Москвитина;

2) разработана методика построения микро-структурных эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях для композитов с произвольной периодической

микроструктурой на основе численного конечно-элементного решения серии локальных задач на ячейках периодичности;

3) предложены микро-структурные модели определяющие соотношения деформационной теории пластичности при циклических нагружениях для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов;

4) разработана методика определения материальных констант предложенных микро-структурных моделей анизотропной деформационной теории пластичности для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов;

5) разработан конечно-элементный алгоритм решения задач на ячейке периодичности для упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях;

6) проведены серии численного решения задач теории пластичности на ячейках периодичности при циклическом нагружении для 2-х типов композитов (однонаправленно-армированных и тканевых) и определены типовые значения материальных констант для данных типов моделей упруго-пластических композитов;

7) разработана методика решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для конструкций из композитов при циклическом нагружении;

8) численно решена макроскопическая задача о циклическом изгибном нагружении 3-х мерной балки из композиционных материалов разных типов, с использованием разработанных микроструктурных моделей эффективных определяющих соотношений упруго-пластических композитов.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В. Моделирование микро-разрушения тканевых композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Спец.выпуск № 3 «Математическое моделирование». 2012. С. 5-19.
2. Численное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков / С.В. Сборщиков [и др.] // Композиты и наноструктуры. 2013. №3. С. 35-51.
3. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П. Численное моделирование микро-разрушения и прочностных характеристик пространственно-армированных композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2013. Т. 19, № 3. С. 365-383.
4. Численное моделирование процессов разрушения тканевых композитов / С.В. Сборщиков [и др.] // Вычислительная механика сплошной среды. 2013. Т. 6, № 4. С. 389-402. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.4
5. Многомасштабное моделирование высокотемпературных упруго-прочностных свойств композиционных материалов на неорганической матрице / С.В. Сборщиков [и др.] // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 11. С. 3-20.
6. Численное моделирование и экспериментальное исследование деформирования упруго-пластических пластин при смятии / С.В. Сборщиков [и др.] // Математическое моделирование и численные методы. 2015. № 1. С. 67-82.
7. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа. / С.В. Сборщиков [и др.] // Математическое моделирование и численные методы. 2015. № 2. С. 3-22.
8. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упруго-пластических композитов с учетом повреждаемости // Математическое моделирование и численные методы. 2016. № 2(10). С. 3-24.

9. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффективных упруго–пластических свойств композитов при циклическом нагружении // Математическое моделирование и численные методы. 2020. № 4. С. 3-26.
10. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квази-изотропных композиционных материалов / С.В. Сборщиков [и др.] // Математическое моделирование и численные методы. 2021. № 4. С. 17–44.
11. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности трансверсально-изотропных композитов / С.В. Сборщиков [и др.] // Математическое моделирование и численные методы. 2022. № 1. С. 15–41.
12. Dimitrienko Yu.I. Sborshchikov S.V., Sokolov A.P. Numerical simulation of microdestruction and strength characteristics of reinforced composites // Composites: Mechanics, Computations, Applications, An International Journal. 2013. V. 4, № 4. P. 345-364, DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v4.i4.50
13. Dimitrienko Yu. I., Dimitrienko I.D, Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9, № 145. ISSN 7211-7220. DOI: 10.12988/ams.2015.510641
14. Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Sborschikov S.V. Multiscale modeling of deformation and damage of elastic-plastic particle reinforced composites // IOP Conference Series: Material Science and Engineering. 2019. V. 683, № 012092. DOI: 10.1088/1757-899X/683/1/012092. P.1-6.