

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи

Каримов Суннат Бахтиярович



**Моделирование нелинейно-упругих композиционных материалов с
конечными деформациями методом асимптотического осреднения**

ДИССЕРТАЦИЯ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор
Димитриенко Ю.И.

Москва, 2026 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 5 |
| Глава 1. Применение метода асимптотического осреднения для задачи нелинейной теории упругости периодических сред с конечными деформациями | 12 |
| 1.1 Постановка исходной задачи | 12 |
| 1.1.1 Общая система уравнений нелинейной теории упругости периодических сред с конечными деформациями | 12 |
| 1.1.2 Модели \mathcal{A}_n нелинейно-упругих сред с конечными деформациями | 16 |
| 1.2 Определение ячейки периодичности для случая конечных деформаций | 17 |
| 1.3 Построение асимптотических разложений для задачи нелинейной теории упругости с конечными деформациями | 21 |
| 1.4 Формулировка локальных задач | 28 |
| 1.5 Формулировка осреднённой задачи | 30 |
| 1.6 Методика решения локальных задач нелинейной теории упругости с конечными деформациями на полной ЯП | 32 |
| 1.6.1 Вариационный принцип для исходной задачи и локальной задачи на ЯП | 32 |
| 1.6.2 Линеаризация вариационного принципа | 34 |
| 1.6.3 Конечно-элементная формулировка задачи | 38 |
| 1.6.4 Учёт условий периодичности | 43 |
| 1.6.5 Учёт условия нормировки | 45 |
| 1.6.6 Итерационная процедура решения нелинейной задачи | 46 |
| 1.7 Полулинейные модели \mathcal{A}_n для компонентов композита | 48 |
| 1.8 Примеры решения локальных задач | 52 |
| 1.8.1 Одноосное растяжение тканевого КМ вдоль направления нити | 55 |

| | |
|---|-----|
| 1.8.2 Одноосное растяжение тканевого КМ перпендикулярно плоскости плетения..... | 62 |
| 1.8.3 Чистый сдвиг в плоскости плетения | 68 |
| 1.8.4 Сдвиг в поперечной плоскости..... | 73 |
| 1.8.5 Одноосное растяжение дисперсно-армированного композита..... | 78 |
| 1.8.6 Чистый сдвиг дисперсно-армированного композита | 82 |
| Глава 2. Методика построения аналитических эффективных определяющих соотношений для нелинейно-упругих сред с периодической структурой | 87 |
| 2.1 Изотропные полулинейные упругие среды A_n | 87 |
| 2.2 Ортоотропные полулинейные упругие среды A_n | 90 |
| 2.3 Методика определения констант модели на основе аппроксимации диаграмм деформирования, полученных с помощью решения локальных задач.. | 92 |
| 2.3.1 Одноосное растяжение ортоотропного материала вдоль оси анизотропии | 93 |
| 2.3.2 Чистый сдвиг упругого ортоотропного материала..... | 97 |
| 2.3.3 Одноосное растяжение изотропного материала | 101 |
| 2.3.4 Чистый сдвиг упругого изотропного материала..... | 103 |
| 2.3.5 Численная методика определения констант осреднённого материала на основе аппроксимации диаграмм деформирования, полученных с помощью решения локальных задач..... | 104 |
| 2.3.6 Определение упругих констант изотропного материала на основе диаграмм деформирования..... | 110 |
| 2.4 Примеры построения аналитических эффективных определяющих соотношений для нелинейно-упругих сред..... | 113 |
| 2.4.1 Ортоотропная модель осредненного материала КМ1 | 113 |
| 2.4.2 Изотропная модель осреднённого материала для КМ2 | 115 |

| | |
|---|-----|
| Глава 3. Методика решения многомасштабных задач нелинейной упругости для периодических сред..... | 118 |
| 3.1 Постановка многомасштабной задачи нелинейной упругости для периодических сред | 118 |
| 3.2 Решение многомасштабной задачи нагружения амортизатора из дисперсно-армированного КМ..... | 119 |
| 3.3 Решение задачи деформирования шины из композиционного материала в составе колеса под действием внешней нагрузки | 130 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ..... | 146 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 147 |

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в широком спектре областей науки и техники находят применение многокомпонентные материалы – композиционные материалы (композиты), состоящие из фаз с существенно различающимися физическими свойствами. Такие материалы часто демонстрируют свойства, принципиально отличающиеся как от характеристик отдельных компонентов, так и от простой суперпозиции их параметров, что обусловлено, в первую очередь, наличием границ раздела между объемами компонентов на микроуровне [2, 6, 7, 10, 13, 20, 58, 87]. Уникальные сочетания свойств, например, сочетание высокой прочности с малой плотностью, обусловили широкое применение композитов в промышленности, авиации, медицине и других сферах. Особое внимание требует изучение поведения материалов, способных выдерживать экстремальные деформации, такие как композиты на основе резиноподобных и эластомерных матриц, которые могут испытывать деформации, достигающие сотен процентов (до 800–900%), без потери целостности. Это делает их особенно востребованными в разработке упругих элементов, амортизаторов, биомедицинских имплантатов и других систем, где критически важна способность материалов адаптироваться к динамическим нагрузкам. Исследование процессов, лежащих в основе их поведения при больших деформациях, не только расширяет понимание фундаментальных механизмов взаимодействия фаз в композитах, но и открывает новые горизонты для проектирования материалов с заданными свойствами.

Существует много работ, посвященных механике композиционных материалов [2, 5-7, 9-11, 21-25, 34, 39, 42, 43, 55, 56, 58-63, 69-71, 73, 74, 76-79, 81, 84, 85, 87-91]. В этих исследованиях осуществляется переход от неоднородных задач к однородным, в которых материал рассматривается как анизотропная среда. Такой подход позволяет описать поведение композита при помощи эффективных макроскопических модулей упругости, которые определяют связь между напряжениями и деформациями в осреднённом смысле. Поэтому при рассмотрении композитов первостепенную важность обретает задача определения эффективных

упругих характеристик композита на основе его микроструктуры и известных характеристик фаз, входящих в него [3-6, 8, 13, 14, 17, 21, 23-25, 34, 39, 54, 56, 61, 63, 66-69, 81-85, 89, 91]. Методов решения такой задачи существует довольно много: от классических подходов, предполагающих определённый характер распределения полей напряжений и деформаций в компонентах композита (оценка Фойгта, оценка Рейсса, оценка Хилла), до современных численных и аналитических подходов, включая методы конечных элементов, теорию осреднения и статистические модели [1-3, 6, 8, 14, 15, 18-20, 22-24, 28, 30-33, 39-58]. Однако, несмотря на широкое применение указанных методов, их эффективность при анализе композитов с большими деформациями остаётся предметом дискуссии, поскольку многие из них предполагают линейную упругость и малые деформации, что ограничивает их применимость в задачах с физическими и геометрическими нелинейными эффектами [12-15, 18-20, 24, 38, 39, 43, 53, 57, 59-73]. Одной из методик, позволяющей решить такую задачу является построение эффективных диаграмм деформирования композита и нахождение на основе полученных диаграмм его характеристик соответствующей этому материалу осреднённой модели.

Проблема формулировки уравнений состояния при конечных деформациях, в том числе и для высокоэластичных материалов, является объектом интенсивных исследований [15, 21-24, 32, 38, 40, 47, 53, 58, 65, 69, 70, 73-75, 79, 80, 86-90]. Результаты этих исследований приведены в монографиях Гольденблатта И. И. [12], Грина и Адкинса [15], Гузя А. Н. [16], Димитриенко Ю. И. [19], Дзя А. [29], Ильюшина А. А. [33], Карнаухова В. Г. [35], Кристенсена Р. [37], Левина В. А., Калинина В. В., Зингермана К. М., Вершинина А. В. [40], Лурье А. И. [41], Новожилова В. В. [44], Работнова Ю. Н. [48], Трусделла К. [50], Черных К. Ф. [53] и др.

В контексте моделирования конечных деформаций, ключевую роль играют подходы, основанные на концепциях гиперупругости и гипоупругости. Гиперупругость, как наиболее общая модель, описывает поведение материалов с помощью упругого потенциала — скалярной функции, зависящей от деформации

и определяющей напряжения, как её производные. Этот подход позволяет учитывать нелинейные эффекты, связанные с большими деформациями, и обеспечивает физическую корректность модели, поскольку потенциал может быть построен на основе экспериментальных данных или теоретических предположений (например, модели Огдена, Муни-Ривлина, Неогуковская и др.).

В отличие от гиперупругости, модель гипоупругости использует линейные уравнения состояния с нелинейными модулями, что ограничивает её применимость в задачах с сильной нелинейностью. Модели гипоупругости, широко применяются в геомеханике для описания поведения геоматериалов, таких как грунты, горные породы и бетон. Однако использование таких упрощённых подходов может привести к неконсервативной упругой реакции, связанной с нарушением физических принципов сохранения энергии. В частности, в некоторых циклах нагрузки, даже при отсутствии пластических деформаций, гипоупругие модели могут искусственно генерировать или рассеивать энергию, что противоречит фундаментальным законам термодинамики. Таким образом, выбор подхода зависит от характера задачи, но в исследованиях, связанных с большими деформациями, особое внимание уделяется методам, основанным на упругом потенциале, поскольку они обеспечивают более точное и универсальное описание поведения материалов.

Для решения задач расчета эффективных свойств неоднородных сред наиболее перспективным является метод асимптотического осреднения, который был предложен Н. С. Бахваловым и Г. П. Панасенко [3-6], а также Bensousson A. , Lions J.L., Papanicolaou G. [64] и Э. Санчес-Паленсией [49]. Метод асимптотического осреднения достаточно хорошо развит в настоящее время и успешно численно реализован для различных задач механики, но, главным образом, для линейных задач.

В работах под руководством проф. Ю.И. Димитриенко этот метод был применен для конечно-элементного расчета эффективных свойств различных композитов и для моделирования конструкций из них [17, 21-25, 87, 88], при этом существенно использовалось допущение о наличии симметрии у ячейке

периодичности относительно 3-х координатных осей. Это допущение позволяет свести задачи на ячейках периодичности к серии краевых задач, что упрощает конечно-элементное решение таких задач. Однако не все периодические структуры обладают симметрией ячеек периодичности относительно координатных плоскостей, для таких случаев предложенный в указанных работах численный метод решения задачи на ячейке периодичности неприменим.

В данной диссертационной работе предложена методика численного решения задач теории упругости с конечными деформациями на полных ячейках периодичности (с явным использованием условий периодичности) и расчета диаграмм деформирования композитов со сложными структурами трехмерными армирования на основе асимптотической теории осреднения нелинейно-упругих композитов с периодической структурой и конечными деформациями.

Актуальность темы обоснована широким применением конструкций из композиционных материалов, подверженных большим деформациям, – резинокордов и дисперсно-армированных эластомеров, в различных областях, в первую очередь в машиностроении, судостроении, атомной технике; в том числе из таких композиционных материалов изготавливают амортизаторы и покрышки. Для них актуальны задачи точного расчета этих конструкций, когда важную роль играют эффекты геометрической нелинейности, а также нелинейность определяющих соотношений при больших деформациях.

Объектом исследования композиционные материалы со сложными трехмерными структурами армирования (тканевые и дисперсно-армированные) с конечными деформациями, рассматриваемые, как неоднородные нелинейно-упругие среды с периодической структурой без наличия дополнительного требования о наличии симметрий ячеек периодичности относительно координатных плоскостей.

Цель диссертационной работы состоит в разработке методики построения эффективных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных КМ с конечными деформациями с использованием универсальных полулинейных моделей упругих сред и варианта метода асимптотического осреднения, а также

методики многомасштабного моделирования конструкций, изготовленных с использованием композиционных материалов данного класса.

Задачами настоящей работы являются:

– разработка варианта метода асимптотического осреднения КМ со сложными трехмерными структурами армирования при конечных деформациях с использованием универсальных полулинейных моделей упругих сред;

– разработка численной конечно-элементной методики решения нелинейной задачи упругости с конечными деформациями на полных ячейках периодичности (ЯП), без использования дополнительных предположений относительно геометрической симметрии ЯП относительно координатных плоскостей;

– разработка методики построения аналитических эффективных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных нелинейно-упругих КМ на основе аппроксимации диаграмм деформирования, полученных в результате численного решения серии локальных задач на ячейке периодичности ;

– решение двух задач многомасштабного расчета напряженно-деформированного состояния конструкций с применением нелинейно-упругих КМ с конечными деформациями на макроуровне и на микроуровне.

Методы исследования. В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

- метод асимптотического осреднения;
- метод конечных элементов;
- методы оптимизации.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

– разработка варианта метода асимптотического осреднения КМ со сложными трехмерными структурами армирования при конечных деформациях с использованием универсальных полулинейных моделей упругих сред;

– разработка итерационного метода решения задачи нелинейной упругости с конечными деформациями на полной ячейке периодичности без использования дополнительных предположений относительно симметрии ЯП, на основе вариационной формулировки в скоростях;

– разработка методики построения аналитических эффективных определяющих соотношений для нелинейно-упругих сред с периодической структурой, с использованием решений задач на полной ячейке периодичности.

– разработка методики решения многомасштабных задач нелинейной упругости с конечными деформациями для периодических сред.

Практическая значимость диссертационной работы.

Метод получения эффективных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных нелинейно-упругих КМ может быть использован для проектирования КМ с заданными свойствами и многомасштабного анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций из таких материалов с решением задач как на микро-, так и на макроуровне.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на:

Всероссийской студенческой конференции «СТУДЕНЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ ВЕСНА - 2017», посвящённой 170-летию со дня рождения Н.Е. Жуковского, Москва 2017 г,

Всероссийской студенческой конференции «СТУДЕНЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ ВЕСНА», посвящённой 165-летию со дня рождения В.Г. Шухова», Москва 2018 г.

Международной конференции «International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences», August 27-31, 2018, Moscow, Russia;

Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 5-8 декабря 2018;

2-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 20-21 ноября 2019;

Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2019), 10-12 декабря, МГТУ им Баумана

3-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2020;

4-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 1-3 декабря 2021;

5-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2022;

научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (Москва, 2018-2024 гг.).

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы 12 публикаций, в том числе 4 в изданиях из списка ВАК РФ (белый список).

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, 3 разделов, выводов и списка литературы из 91 наименования. Работа изложена на 155 листах, содержит 106 рисунков и 3 таблицы.

Глава 1. Применение метода асимптотического осреднения для задачи нелинейной теории упругости периодических сред с конечными деформациями

1.1 Постановка исходной задачи

1.1.1 Общая система уравнений нелинейной теории упругости периодических сред с конечными деформациями

Рассмотрим неоднородную твердую упругую среду, которой в начальный момент времени $t = 0$ ставится во взаимно-однозначное соответствие некоторая замкнутая область $\overset{\circ}{V}$ евклидова пространства в некоторой фиксированной системе декартовых координат $Oe_1e_2e_3$, которую будем называть *отсчетной конфигурацией* $\overset{\circ}{K}$. В момент времени $t > 0$ - этой среде ставится в соответствие замкнутая область \bar{V} с той же системой координат, которую называется *актуальной конфигурацией* K .

Для каждой материальной точки будем рассматривать *эйлеровы (пространственные) координаты* в актуальной конфигурации, которые обозначим как x^k . Радиус-вектор этой точки будем обозначать \mathbf{x} . Аналогичным образом в отсчётной конфигурации рассмотрим координаты $\overset{\circ}{x}^k$, и радиус-вектор этой же точки $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$. Рассмотрим также *лагранжевы (материальные) координаты* этой точки и обозначим их как X^i . Лагранжевы координаты будем полагать совпадающими с эйлеровыми в отсчётной конфигурации, то есть

$$X^i = \overset{\circ}{x}^i. \quad (1.1)$$

В связи с этим в дальнейшем под символом \mathbf{X} будем подразумевать вектор $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$, если это не вызывает неоднозначности.

Из (1.1) следует, что векторы локального базиса в отсчетной конфигурации будут совпадать с декартовым базисом:

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{x}}}{\partial X^i} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}^k}{\partial X^i} \mathbf{e}_k = \frac{\partial X^k}{\partial X^i} \mathbf{e}_k = \delta_i^k \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

В силу того, что локальный базис в отсчетной конфигурации является ортонормированным, он совпадает со взаимным локальным базисом в отсчетной конфигурации:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{g}_{ij} &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \delta_{ij}, & \overset{\circ}{g}^{ij} &= \delta^{ij}, \\ \overset{\circ}{\mathbf{r}}^\alpha &= \overset{\circ}{g}^{\alpha j} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \delta^{\alpha j} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому ковариантные и контравариантные компоненты тензоров в отсчетной конфигурации совпадают. В дальнейшем, если не сказано иного, компоненты векторов и тензоров будем считать определенными в локальном базисе отсчетной конфигурации, то есть в декартовом базисе.

Будем считать, что среда состоит из N однородных твёрдых нелинейно-упругих компонент $\overset{\circ}{V}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, N$. Если между двумя компонентами с номерами α и β ($\alpha \neq \beta$) проходит граница раздела сред, то будем обозначать её $\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}$.

Внешнюю поверхность среды обозначим $\overset{\circ}{\Sigma}$, а множество внутренних точек среды - $\overset{\circ}{V}$. Множество внутренних точек среды без поверхностей раздела обозначим $\overset{\circ}{\Omega}$, а внешнюю поверхность без точек лежащих на поверхностях раздела - $\overset{\circ}{\Gamma}$.

Для данной неоднородной среды рассмотрим задачу нелинейной теории упругости в лагранжевом описании в общей формулировке с использованием «универсальных» моделей – моделей \mathcal{A}_n , предложенных Ю. И. Димитриенко для упругих сред с конечными деформациями [85], которая состоит из следующих уравнений:

1. уравнений равновесия в отсчетной конфигурации:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Omega}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{P} - тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа, ρ - плотность среды, \mathbf{f} - вектор плотности массовых сил;

2. определяющих соотношений:

$$\mathbf{P} = \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Omega} \cup \overset{\circ}{\Gamma}, \quad (1.4)$$

описывающих зависимость тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа от тензора градиента деформаций \mathbf{F} и свойств материала, и поэтому зависящие от радиус-вектора точек \mathbf{X} (конкретизация этих соотношений будет осуществлена далее);

3. формулы Коши:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \left(\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u} \right)^T, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Omega} \cup \overset{\circ}{\Gamma}, \quad (1.5)$$

определяющей связь тензора градиента деформаций \mathbf{F} и вектора перемещений \mathbf{u} , здесь $\overset{\circ}{\nabla}$ - набла-оператор в отсчетной конфигурации, а $\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u}$ - градиент вектора в отсчетной конфигурации

$$\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u} = \frac{\partial u^j}{\partial X^i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j; \quad (1.6)$$

4. условия идеального контакта на границе раздела компонентов КМ:

$$\mathring{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (1.7)$$

где $\mathring{\mathbf{n}}$ - вектор нормали к поверхности раздела сред $\mathring{\Sigma}_{\alpha\beta}$ в отсчётной конфигурации, а символом $[\bullet]$ обозначен скачок функции на при переходе через границу раздела компонентов композита, который определяется как:

$$[\mathbf{u}]|_{\mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_{\alpha\beta}} = \mathbf{u}^{(\alpha)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(\beta)}(\mathbf{X}), \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$\mathbf{u}^{(\alpha)}(\mathbf{X}) = \lim_{\tilde{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbf{X}} \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{X}}), \quad \tilde{\mathbf{X}} \in \mathring{V}_\alpha, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_{\alpha\beta};$$

5. граничных условий:

$$\mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{t}_{ne}, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_1, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_2, \quad (1.9)$$

где \mathbf{t}_{ne} – вектор поверхностных усилий, заданных на поверхности $\mathring{\Sigma}_1$, \mathbf{u}_e – вектор фиксированных перемещений, заданных на поверхности $\mathring{\Sigma}_2$, причём $\mathring{\Sigma}_1 \cup \mathring{\Sigma}_2 = \mathring{\Sigma}$.

В индексной форме в декартовом базисе \mathbf{e}_i и с учётом (1.6) эта система имеет следующий вид:

$$\frac{\partial P^{ij}}{\partial X^i} + \mathring{\rho} f^j = 0, \quad \mathbf{X} \in \mathring{V}, \quad (1.10)$$

$$P^{ij} = \mathcal{P}^{ij}(F^{kl}, X^m), \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Omega} \cup \mathring{\Gamma}, \quad (1.11)$$

$$F^k{}_l = \delta_l^k + \frac{\partial u^k}{\partial X^l}, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Omega} \cup \mathring{\Gamma}, \quad (1.12)$$

$$\mathring{n}_i [P^{ij}] = 0, \quad [u^i] = 0, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.13)$$

$$\mathring{n}_i P^{ij} = t_e^j, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_1, \quad (1.14)$$

$$u^i = u_e^i, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_2, \quad (1.15)$$

где в качестве неизвестного выступает поле перемещений u^i .

1.1.2 Модели \mathcal{A}_n нелинейно-упругих сред с конечными деформациями

Рассмотрим для компонентов композита модели \mathcal{A}_n , предложенные в [19]. В этих моделях упругий потенциал, как и тензор определяющих соотношений выражается через один из тензоров $\overset{(n)}{C}$ (n – номер соответствующего тензора, $n=1,2,\dots,5$), которые называются тензорами энергетических деформаций [19]. Они в свою очередь являются функциями градиента деформаций. Поэтому для таких моделей определяющие соотношения записываются формулой

$$\overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij}(F^k_l, X^m) = \overset{\circ}{\rho}(X^m) \overset{(n)}{E}^{0ijst}(F^k_l) \overset{(n)}{\Psi}_{st}(C^{pq}, X^m), \quad (1.16)$$

В этих моделях используются $\overset{(n)}{C}^{pq}$ – компоненты одного из 5 симметричных тензоров энергетических деформаций

$$\overset{(n)}{C}^{pq} = \frac{1}{n-3} \left(\sum_{\gamma=1}^3 \lambda_{\gamma}^{n-3} \overset{\circ}{p}_{\gamma}^p \overset{\circ}{p}_{\gamma}^q - \delta^{pq} \right), \quad n=1,2,4,5,$$

$$\overset{(3)}{C}^{pq} = \sum_{\gamma=1}^3 \ln \lambda_{\gamma} \overset{\circ}{p}_{\gamma}^p \overset{\circ}{p}_{\gamma}^q, \quad n=3,$$

где λ_{γ} – собственные значения левого и правого тензоров искажений, которые являются функциями от F^k_l .

Поскольку свойства компонентов КМ различаются, вид потенциала $\overset{(n)}{\Psi}_{st}(C^{pq}, X^m)$ (как и значение плотности $\overset{\circ}{\rho}$) будет разным, в зависимости от того, какому компоненту композита соответствует точка с координатами X^m . Поэтому

функция ψ зависит явно от X^m разрывным образом при переходе через поверхность раздела компонентов композита.

В соотношениях (1.16) обозначены $E^{(n)ijst}(F^k_l)$ – компоненты тензора энергетической эквивалентности [20], который связывает тензоры энергетических напряжений с тензором напряжений Пиолы—Кирхгофа [19]:

$$E^{(n)ijst}(F^k_l) = \sum_{\gamma, \omega=1}^3 E_{\gamma\omega}^0 \overset{\circ}{p}_{\gamma}^i p_{\omega}^j \overset{\circ}{p}_{\omega}^s \overset{\circ}{p}_{\gamma}^t,$$

Здесь $\overset{\circ}{p}_{\gamma}^i = \overset{\circ}{p}_{\gamma}^i(F^k_l)$ и $p_{\omega}^j = p_{\omega}^j(F^k_l)$ – матрицы компонент собственных векторов левого и правого тензоров искажений, которые являются неявными функциями только от компонент градиента деформации F^k_l .

Также в (1.16) введены обозначения для тензорной производной от скалярной функции

$$\Psi_{st} = \frac{\partial}{\partial C^{st}} \Psi(C^{pq}, X^m) \quad (1.17)$$

где $\Psi(C^{pq}, X^m)$ – упругий потенциал.

1.2 Определение ячейки периодичности для случая конечных деформаций

Идея асимптотического метода осреднения основывается на комбинировании решения локальных задач, определенных на уровне структурной неоднородности материала, с решением глобальной задачи (макроуровень) для эквивалентной однородной среды.

Положим, что в отсчетной конфигурации \mathcal{K} среда обладает периодической структурой, и для неё можно выделить повторяющийся элемент – ячейку периодичности (ЯП), которую мы будем обозначать $\overset{\circ}{V}_\xi$, и которая имеет размеры l_1, l_2, l_3 . Такая структура в виде периодической прямоугольной сетки является наиболее универсальной и позволяет описать реальные микроструктуры композиционных материалов.

Периодичность среды означает следующее. Если две точки среды $\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B$, не лежащие на границе раздела сред, отделены друг от друга на целое число размеров ячейки по соответствующим координатам:

$$X_A^\alpha - X_B^\alpha = m_\alpha l_\alpha, \quad \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B \in \overset{\circ}{\Omega} \cup \overset{\circ}{\Gamma}, \quad m_\alpha \in \mathbb{Z},$$

то в этих точках совпадают свойства материала: плотность и определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}_A) &= \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}_B), \\ \overset{\circ}{\rho}(\mathbf{X}_A) &= \overset{\circ}{\rho}(\mathbf{X}_B). \end{aligned}$$

Использование асимптотического метода предполагает построение асимптотических разложений функций, входящих в задачу, по малому параметру, равному отношению характерного размера ячейки периодичности к характерному размеру конструкции из композиционного материала.

Далее введём *малый параметр*

$$\varkappa = \ell / L \ll 1 \tag{1.18}$$

как отношение характерного размера ℓ ЯП к характерному размеру L всего композита (размеры определены для $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$), а также вводим *локальные* лагранжевы координаты $\overset{\circ}{\xi}^i$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, которые связаны с X^i следующими соотношениями:

$$\xi^i = \frac{X^i}{\ell} = \frac{\bar{X}^i}{\varkappa}, \quad \bar{X}^i = \frac{X^i}{L}. \quad (1.19)$$

Обозначим также размеры ЯП в локальной системе координат:

$$h_j = \frac{l_j}{\ell}$$

Далее мы разделяем зависимость всех полей от координат на зависимость от глобальных координат, которая уже не является быстроосцилирующей функцией, и на зависимость от локальных координат, которая уже описывает быстроосцилирующие зависимости, и, учтя изначальную связь координат при дифференцировании, полагаем для дальнейшего анализа эти координаты независимыми [6]. Будем обозначать символом ξ радиус-вектор точки в локальной системе координат. В силу периодичности структуры композита его плотность ρ и тензор определяющих соотношений \mathcal{P}^{ij} можно теперь рассматривать как h -периодические функции локальных координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(n)}(F^k, X^i, \xi^j) &= \mathcal{P}^{(n)}(F^k, X^i, \xi^j + a^j), \\ \rho(X^i, \xi^j) &= \rho(X^i, \xi^j + a^j), \\ a^\alpha &= h_\alpha n_\alpha, \quad n_\alpha \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

В силу периодичности, а также независимости локальных и глобальных координат, можно отождествить все ячейки периодичности и рассматривать задачу относительно локальных координат только в пределах области $\overset{\circ}{V}_\xi$ одной выделенной ЯП, причем

$$\overset{\circ}{V}_\xi = \left\{ \xi^i \mathbf{e}_i \mid -\frac{h^j}{2} < \xi^j < \frac{h^j}{2} \right\}. \quad (1.20)$$

Также, неоднородность материала оставим только в локальной системе координат, а с точки зрения глобальных материал будем считать однородным. Решение задачи относительно вектора перемещений ищется в виде периодической функции локальных лагранжевых координат и зависящей от глобальных лагранжевых координат – квазипериодической функции:

$$u^k = u^k(X^i, \xi^j), \quad u^k(X^i, \xi^j) = u^k(X^i, \xi^j + a^j), \quad a^\alpha = h_\alpha n_\alpha, \quad n_\alpha \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим некоторую квазипериодическую функцию $w(X^i, \xi^j)$. Её производная по координатам находится по формальным правилам дифференцирования сложной функции и тогда, с учетом связи локальных и глобальных координат (1.19), имеем следующее соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^i} w(X^j, \xi^k) &= \left(\frac{\partial w(\tilde{X}^j, \tilde{\xi}^k)}{\partial \tilde{X}^n} \frac{\partial \tilde{X}^n}{\partial X^i} + \frac{\partial w(\tilde{X}^j, \tilde{\xi}^k)}{\partial \tilde{\xi}^n} \frac{\partial \tilde{\xi}^n}{\partial X^i} \right) \Bigg|_{\substack{\tilde{X}^j = X^j \\ \tilde{\xi}^k = X^k / \varkappa}} = \\ &= w_{,n} \delta_n^i + w_{/n} \frac{\delta_n^i}{\varkappa} = w_{,i} + \frac{1}{\varkappa} w_{/i} \end{aligned} \quad (1.21)$$

В формуле (1.21) использованы обозначения для производной по глобальным координатам $w_{,i}$ и для производной по локальным координатам $w_{/i}$:

$$w_{,i}(X^j, \xi^k) = \frac{\partial w}{\partial X^i}(X^j, \xi^k), \quad w_{/i}(X^j, \xi^k) = \frac{\partial w}{\partial \xi^i}(X^j, \xi^k). \quad (1.22)$$

где X^j и ξ^k считаются независимыми координатами.

Пользуясь формулой дифференцирования (1.21) и только что введёнными обозначениями (1.22), перепишем систему уравнений (1.10)–(1.15).

$$P^{ij}_{,i} + \frac{1}{\varkappa} P^{ij}_{/i} + \overset{\circ}{\rho} f^j = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V}, \xi \in \overset{\circ}{\Omega}_\xi \cup \overset{\circ}{\Gamma}_\xi \quad (1.23)$$

$$F^k_{/i} = \delta_i^k + u^k_{,i} + \frac{1}{\varkappa} u^k_{//i}, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \xi \in \overset{\circ}{\Omega}_\xi \cup \overset{\circ}{\Gamma}_\xi, \quad (1.24)$$

$$P^{ij} = \mathcal{P}^{ij(n)}(F^{kl}, \xi^m), \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \xi \in \overset{\circ}{\Omega}_\xi \cup \overset{\circ}{\Gamma}_\xi, \quad (1.25)$$

$$\overset{\circ}{n}_i[P^{ij}] = 0, \quad [u^i] = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V}, \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.26)$$

$$\overset{\circ}{n}_i P^{ij} = t_{ne}^j, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad (1.27)$$

$$u^i = u_e^i, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_2. \quad (1.28)$$

1.3 Построение асимптотических разложений для задачи нелинейной теории упругости с конечными деформациями

Будем искать решения этих задач (1.23)–(1.28), следуя общей идее метода асимптотических разложений (АР) [6], в виде следующих асимптотических разложений по малому параметру:

$$u_i = u_i(X^i, \xi^j) = \sum_{n=0}^M \varkappa^n u_i^{(n)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}), \quad (1.29)$$

$$P^{ij} = P^{ij}(X^i, \xi^j) = \sum_{n=0}^M \varkappa^n P^{ij(n)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}), \quad (1.30)$$

$$F^k{}_l = F^k{}_l(X^i, \xi^j) = \sum_{n=0}^M \varkappa^n F^k{}_l^{(n)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}). \quad (1.31)$$

Распишем уравнение равновесия (1.23) в виде АР, подставив туда разложение для компонент тензора Пиолы–Кирхгофа (1.30):

$$\begin{aligned} P^{ij}{}_{,i} + \frac{1}{\varkappa} P^{ij}{}_{/i} + \overset{\circ}{\rho} f^j = & \left(\sum_{n=0}^M \varkappa^n P^{ij(n)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}) \right)_{,i} + \\ & + (\varkappa^{-1}) \left(\sum_{n=0}^M \varkappa^n P^{ij(n)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}) \right)_{/i} + (\varkappa^0) \overset{\circ}{\rho} f^j = 0 \end{aligned}$$

Внеся операторы дифференцирования под знак суммы и сгруппировав слагаемые с одинаковой степенью малого параметра \varkappa , получим запись уравнений равновесия в виде АР

$$\begin{aligned} & (\varkappa^{-1})P_{/i}^{ij(0)}(X^i, \xi^j) + \\ & (\varkappa^0)(P_{/i}^{ij(1)}(X^i, \xi^j) + P_{/i}^{ij(0)}(X^i, \xi^j) + \rho f^j) + \\ & \sum_{n=1}^{M-1} \varkappa^n (P_{/i}^{ij(n+1)}(X^i, \xi^j) + P_{/i}^{ij(n)}(X^i, \xi^j)) + O(\varkappa^M) = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Аналогично, воспользовавшись разложениями (1.30) и (1.31) для соотношений Коши (1.24), получим их АР:

$$\begin{aligned} & F_l^k - \left(\delta_l^k + u_{/l}^k + \frac{1}{\varkappa} u_{//l}^k \right) = \\ & = \sum_{n=0}^M \varkappa^n F_l^{k(n)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}) - \delta_l^k - \\ & \sum_{n=0}^M \varkappa^n u_{/l}^{k(n)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}) - \sum_{n=0}^M \varkappa^{n-1} u_{//l}^{k(n)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^M) = \\ & = (\varkappa^{-1})u_{//l}^{k(0)}(X^i, \xi^j) + \\ & (\varkappa^0)(F_l^{k(0)}(X^i, \xi^j) - (\delta_l^k + u_{/l}^{k(0)}(X^i, \xi^j) + u_{//l}^{k(1)}(X^i, \xi^j))) + \\ & \sum_{n=1}^{M-1} \varkappa^n (F_l^{k(n)}(X^i, \xi^j) - (u_{/l}^{k(n)}(X^i, \xi^j) + u_{//l}^{k(n+1)}(X^i, \xi^j))) + O(\varkappa^M) = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Запишем теперь определяющие соотношения (1.25), которые в пределах одного материала являются непрерывными функциями градиента деформаций:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^{ij(n)} \left(\sum_{m=0}^M \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}), \xi^p \right) = \\ & \mathcal{P}^{ij(n)} \left(\sum_{m=0}^M \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j), \xi^m \right) + O(\varkappa^{M+1}) \end{aligned}$$

Выделим последнее слагаемое в сумме:

$$\sum_{m=0}^M \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j) = \sum_{m=0}^{M-1} \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j) + \varkappa^M F_l^{k(M)}(X^i, \xi^j).$$

Далее, полагая определяющие соотношения (1.16) аналитическими функциям по градиенту деформации, воспользуемся формулой Тейлора, обобщенной на случай функций от тензорного аргумента

$$\mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}(F_l^{*k} + \Delta F_l^k, \xi^m) = \mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}(F_l^{*k}, \xi^m) + \frac{\mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}}{\partial F_t^s} (F_l^{*k}, \xi^m) \Delta F_t^s + O(\|\Delta F\|^2) \quad (1.34)$$

где

$$F_l^{*k} = \sum_{m=0}^{M-1} \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j), \quad \Delta F_t^s = \varkappa^M F_t^{s(M)}(X^i, \xi^j) \quad (1.35)$$

а $\|\Delta F\|$ – норма матрицы компонент тензора.

Подставив (1.35) в (1.34), получим следующую формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}\left(\sum_{m=0}^M \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j), \xi^m\right) &= \mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}\left(\sum_{m=0}^{M-1} \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j), \xi^m\right) + \\ &\frac{\partial \mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}}{\partial F_t^s}\left(\sum_{m=0}^{M-1} \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j), \xi^m\right) F_t^{s(M)}(X^i, \xi^j) \varkappa^M + O(\varkappa^{M+1}) \end{aligned}$$

Повторяя вынос последнего слагаемого M раз, получим AP для определяющих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}\left(\sum_{m=0}^M \varkappa^m F_l^{k(m)}(X^i, \xi^j) + O(\varkappa^{M+1}), \xi^p\right) &= \\ &\mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}(F_l^{k(0)}(X^i, \xi^j), \xi^p) + \\ &\sum_{q=1}^M \varkappa^q \sum_{p=1}^q \frac{\partial^p \mathcal{P}^{ij}{}^{(n)}}{\partial F_{t_1}^{s_1} \partial F_{t_2}^{s_2} \dots \partial F_{t_p}^{s_p}} (F_l^{k(0)}(X^i, \xi^j), \xi^m) \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_p=q \\ m_j \geq 1}} F_{t_1}^{s_1(m_1)} F_{t_2}^{s_2(m_2)} \dots F_{t_p}^{s_p(m_p)} + O(\varkappa^{M+1}). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Условия идеального контакта (1.26) записываются в виде АР следующим образом:

$$\sum_{n=0}^M \varkappa^n [u^{i(n)}] + O(\varkappa^{M+1}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V}, \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.37)$$

$$\sum_{n=0}^M \varkappa^n \overset{\circ}{n}_i [P^{ij(n)}] + O(\varkappa^{M+1}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V}, \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.38)$$

$$\overset{\circ}{n}_i \left(\sum_{n=0}^M \varkappa^n P^{ij(n)} + O(\varkappa^{M+1}) \right) = (\varkappa)^0 t_e^j, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad (1.39)$$

$$\sum_{n=0}^M \varkappa^n u^{i(n)} + O(\varkappa^{M+1}) = (\varkappa)^0 u_e^i, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_2, \quad (1.40)$$

Приравнивая в АР (1.37)–(1.40) члены при одинаковых степенях малого параметра, приходим к последовательности следующих соотношений:

$$[u^{i(n)}] = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V}, \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad (1.41)$$

$$\overset{\circ}{n}_i [P^{ij(n)}] = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V}, \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad (1.42)$$

$$\overset{\circ}{n}_i P^{ij(0)} = t_{ne}^j, \quad \overset{\circ}{n}_i P^{ij(n)} = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad n = 1, 2, \dots, M, \quad (1.43)$$

$$u^{i(0)} = u_e^i, \quad u^{i(n)} = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_2, \quad n = 1, 2, \dots, M, \quad (1.44)$$

Для дальнейшего анализа задачи определим для квазипериодической функции $w(X^i, \xi^j)$ операцию осреднения $\langle \bullet \rangle$ следующим образом:

$$\langle w(X^i, \xi^j) \rangle = \frac{\int_{V_\xi} w(X^i, \xi^j) dV}{|V_\xi|}. \quad (1.45)$$

Из определения области ЯП (1.20) следует значение её объема в локальных координатах:

$$|V_\xi| = h_1 h_2 h_3.$$

Подставляя это равенство в формулу для осреднения (1.45), получим

$$\langle w(X^i, \xi^j) \rangle = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \int_{V_\xi} w(X^i, \xi^j) dV.$$

Заметим, что при осреднении производной $u^i_{/j}$, в силу непрерывности перемещений (1.26), а также условий периодичности, имеем :

$$\begin{aligned} \langle u^i_{/j}(X^k, \xi^l) \rangle &= \frac{1}{|V_\xi|} \int_{V_\xi} u^i_{/j}(X^k, \xi^l) dV = \\ &= \frac{1}{|V_\xi|} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} \int_{-h_\beta/2}^{h_\beta/2} \left(\int_{-h_\alpha/2}^{h_\alpha/2} \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j}(X^k, \xi^l) d\xi^\alpha \right) d\xi^\beta d\xi^\gamma = [u^i] = 0 \\ &= \frac{1}{|V_\xi|} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} \int_{-h_\beta/2}^{h_\beta/2} \left(u^i(X^k, \xi^l) \Big|_{\xi^\alpha=-h_\alpha/2}^{\xi^\alpha=h_\alpha/2} \right) d\xi^\beta d\xi^\gamma = \frac{1}{|V_\xi|} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} \int_{-h_\beta/2}^{h_\beta/2} 0 d\xi^\beta d\xi^\gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Аналогично, для членов асимптотического разложения $u^i_{/j}{}^{(n)}$ в силу (1.41) при осреднении тоже получим 0:

$$\langle u^i_{/j}{}^{(n)}(X^k, \xi^l) \rangle = 0, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (1.47)$$

Теперь рассмотрим, как ведут себя при осреднении величины $P^ij_{/i}$ и $P^ij{}^{(n)}_{/i}$:

$$\begin{aligned} \langle P^ij_{/i} \rangle &= \int_{V_\xi} P^ij_{/i} dV = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\xi^\alpha}} P^ij_{/i} dV = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\partial V_{\xi^\alpha}} n_i P^ij d\Sigma_\xi = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \int_{\Sigma_{\alpha\beta}} n_i P^ij d\Sigma_\xi + \int_{\partial V_\xi} n_i P^ij d\Sigma_\xi = \\ &= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \int_{\Sigma_{\alpha\beta}} \underbrace{n_i [P^ij]}_0 d\Sigma_\xi + \sum_{\gamma=1}^3 \int_{\xi^\gamma=-h_\gamma/2}^{\xi^\gamma=h_\gamma/2} \underbrace{n_i P^ij(X^k, \xi^l)}_0 \Big|_{\xi^\gamma=-h_\gamma/2}^{\xi^\gamma=h_\gamma/2} d\Sigma_\xi = 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\langle P^ij{}^{(n)}_{/i} \rangle = 0, \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (1.49)$$

Применим операцию осреднения к уравнениям (1.32), (1.33), (1.36), (1.39), (1.40), пользуясь только что выведенными соотношениями (1.46), (1.47), (1.48), (1.49), в результате чего получим:

$$(\mathcal{X}^0) \left(\langle P_{,i}^{ij(0)}(X^i, \xi^j) \rangle + \langle \overset{\circ}{\rho} \rangle f^j \right) + \sum_{n=1}^{M-1} \mathcal{X}^n \langle P_{,i}^{ij(n)}(X^i, \xi^j) \rangle + O(\mathcal{X}^M) = 0. \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{X}^0) \left(\langle F_{,l}^k(0)(X^i, \xi^j) \rangle - \left(\delta_l^k + \langle u_{,l}^k(0)(X^i, \xi^j) \rangle \right) \right) + \\ & \sum_{n=1}^{M-1} \mathcal{X}^n \left(\langle F_{,l}^k(n)(X^i, \xi^j) \rangle - \langle u_{,l}^k(n)(X^i, \xi^j) \rangle \right) + O(\mathcal{X}^M) = 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij} \left(F_{,l}^k(0)(X^i, \xi^j), \xi^p \right) \right\rangle + \\ & \sum_{p=1}^M \mathcal{X}^p \left\langle \frac{\partial \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij}}{\partial F_{,t}^s} \left(\sum_{m=0}^{p-1} \mathcal{X}^m F_{,l}^k(m)(X^i, \xi^j), \xi^m \right) F_{,t}^s(p)(X^i, \xi^j) \right\rangle + O(\mathcal{X}^{M+1}). \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\overset{\circ}{n}_i \left(\sum_{n=0}^M \mathcal{X}^n \langle P^{ij(n)} \rangle + O(\mathcal{X}^{M+1}) \right) = t_e^j, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad (1.53)$$

$$\sum_{n=0}^M \mathcal{X}^n \langle u^{i(n)} \rangle + O(\mathcal{X}^{M+1}) = u_e^i, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_2, \quad (1.54)$$

Обозначим осредненные поля:

$$\bar{u}^i = \sum_{m=0}^M \mathcal{X}^m \langle u^{i(m)} \rangle + O(\mathcal{X}^{M+1}),$$

$$\bar{F}_{,l}^k = \sum_{m=0}^M \mathcal{X}^m \langle F_{,l}^k(m) \rangle + O(\mathcal{X}^{M+1}),$$

$$\bar{P}_{,l}^k = \sum_{m=0}^M \mathcal{X}^m \langle P_{,l}^k(m) \rangle + O(\mathcal{X}^{M+1}).$$

$$\overset{(n)}{\bar{\mathcal{P}}}^{ij(0)} = \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij(0)} \left(F_{,l}^k(0)(X^i, \xi^j), \xi^m \right) \right\rangle,$$

$$\overset{(n)}{\bar{\mathcal{P}}}^{ij(p)} = \left\langle \frac{\partial \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij}}{\partial F_{,t}^s} \left(\sum_{m=0}^{p-1} \mathcal{X}^m F_{,l}^k(m)(X^i, \xi^j), \xi^m \right) F_{,t}^s(p)(X^i, \xi^j) \right\rangle.$$

Рассмотрим отдельно условие

$$u_{,l}^k(0)(X^i, \xi^j) = 0.$$

Интегрируя это уравнение с учётом (1.41), получим

$$u^{k(0)} = u^{k(0)}(X^i),$$

то есть, перемещения нулевого порядка не зависят от локальных координат.

Введем дополнительное условие нормировки для перемещений

$$\langle u^{i(n)} \rangle = 0, \quad n \geq 1. \quad (1.55)$$

Тогда осредненное перемещение, в силу (1.53), совпадает с перемещением нулевого приближения

$$\bar{u}^i = u^{i(0)}.$$

Из условий (1.45) и (1.53) следует, что

$$\begin{aligned} \langle F_{,l}^{k(n)} \rangle &= \langle u_{,l}^{k(n)} + u_{,ll}^{k(n+1)} \rangle = \langle u_{,ll}^{k(n+1)} \rangle + \langle u^{k(n)} \rangle_{,l} = 0, \quad n \geq 1, \\ \bar{F}_{,l}^k &= \langle F_{,l}^{k(0)} \rangle = \delta_l^k + \bar{u}_{,l}^k. \end{aligned}$$

Далее, если считать, что поля \bar{u}^k , а значит и $\bar{F}_{,l}^k$, известными (для их вычисления далее формулируется осредненная задача), то можно сформулировать задачу по определению поля $u^{i(1)}$ в терминах $\bar{F}_{,l}^k$, сгруппировав первые неизвестные члены асимптотических разложений:

$$P_{,li}^{ij(0)}(X^i, \xi^j) = 0, \quad (1.56)$$

$$F_{,l}^{k(0)}(X^i, \xi^j) = \bar{F}_{,l}^k + u_{,ll}^{k(1)}(X^i, \xi^j), \quad (1.57)$$

$$P^{ij(0)} = \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij(0)}(F_{,l}^{k(0)}(X^i, \xi^j), \xi^m), \quad (1.58)$$

$$\overset{\circ}{n}_i[P^{ij(0)}] = 0, \quad [u^{i(1)}] = 0, \quad \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}. \quad (1.59)$$

Решение этой задачи ищется в виде квазипериодической функции, удовлетворяющих условию (1.55).

1.4 Формулировка локальных задач

Последнее условие, накладывающее ограничение на класс функций, среди которых ищется решение уравнений (1.56)-(1.59), можно выразить явным образом. Во-первых, свойство периодичности по локальным координатам можно записать как:

$$\llbracket u^{i(1)} \rrbracket_{\alpha} = 0, \quad (1.60)$$

где символом $\llbracket \bullet \rrbracket$ обозначена величина:

$$\llbracket u^{i(1)} \rrbracket_{\alpha} = \lim_{\xi^{\alpha} \rightarrow 1/2} u^{i(1)} - \lim_{\xi^{\alpha} \rightarrow -1/2} u^{i(1)}.$$

Во-вторых, присоединим в качестве условия равенство (1.55) при $n = 1$.

$$\langle u^{i(1)} \rangle = 0. \quad (1.61)$$

Заметим также, что в уравнениях нет явной зависимости от глобальных координат, кроме $\bar{F}^k_l = \bar{F}^k_l(X^m)$. Значит, можно рассмотреть связанную задачу (1.56)–(1.59) с присоединёнными условиями (1.60) и (1.61) на ячейке периодичности относительно неизвестного поля перемещений $u^{i(1)} = u^{i(1)}(\xi^j)$, где \bar{F}^k_l будут выступать в качестве входных данных задачи.

$$P^{ij}_{/i}{}^{(0)} = 0, \quad (1.62)$$

$$F^k_l{}^{(0)} = \bar{F}^k_l + u^k_{/l}{}^{(1)}, \quad (1.63)$$

$$P^{ij(0)} = \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij(0)}(F^k_l{}^{(0)}, \xi^m), \quad (1.64)$$

$$\overset{\circ}{n}_i [P^{ij(0)}] = 0, \quad [u^{i(1)}] = 0, \quad \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.65)$$

$$\llbracket u^{i(1)} \rrbracket_{\alpha} = 0, \quad (1.66)$$

$$\langle u^{i(1)} \rangle = 0. \quad (1.67)$$

Полученная интегро-дифференциальная система уравнений обозначим как \mathcal{L}_1 . Эта система является первой в цепочке так называемых *локальных задач*, решая которые мы будем определять члены асимптотического разложения всё более высоких порядков.

Вторая локальная задача \mathcal{L}_2 получается путём применения аналогичных шагов для слагаемых асимптотических разложений следующего порядка:

$$\begin{aligned} P_{/i}^{ij(1)} + P_{,i}^{ij(0)} + \rho f^j &= 0, \\ F_l^{k(1)} &= u_{,l}^{k(1)} + u_{/l}^{k(2)}, \\ P^{ij(1)} = \mathcal{P}^{ij(1)} &= \frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial F_t^s} \left(F_l^{k(0)}(X^i, \xi^j), \xi^m \right) F_t^{s(1)}(X^i, \xi^j), \\ \overset{\circ}{n}_i [P^{ij(1)}] &= 0, \quad [u^{i(2)}] = 0, \quad \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \\ \llbracket u^{i(2)} \rrbracket_\alpha &= 0, \\ \langle u^{i(2)} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Для $p \geq 3$ может быть получена следующая рекуррентная последовательность локальных задач \mathcal{L}_p , в каждой из которых неизвестным является поле перемещений $u^{i(p)}$, а найденные в предыдущих задачах поля являются входными данными:

$$\begin{aligned} P_{/i}^{ij(p-1)} + P_{,i}^{ij(p-2)} &= 0, \\ F_l^{k(p-1)} &= u_{,l}^{k(p-1)} + u_{/l}^{k(p)}, \\ P^{ij(p-1)} = \mathcal{P}^{ij(p-1)} &= \frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial F_t^s} \left(F_l^{k(0)}, \xi^m \right) F_t^{s(p-1)} + \\ &+ \sum_{q=2}^{p-1} \frac{\partial^q \mathcal{P}^{ij}}{\partial F_{t_1}^{s_1} \partial F_{t_2}^{s_2} \dots \partial F_{t_q}^{s_q}} \left(F_l^{k(0)}, \xi^m \right) \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_q=p-1 \\ m_j \geq 1}} F_{t_1}^{s_1(m_1)} F_{t_2}^{s_2(m_2)} \dots F_{t_q}^{s_q(m_q)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_i [P^{ij(p-1)}] &= 0, \quad [u^{i(p)}] = 0, \quad \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \\ \llbracket u^{i(p)} \rrbracket_\alpha &= 0, \\ \langle u^{i(p)} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

1.5 Формулировка осреднённой задачи

Запишем теперь осредненную постановку для макрозадачи (1.23)–(1.28)

$$\bar{P}^j_{,i} + \bar{\rho} f^j = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V} \quad (1.68)$$

$$\bar{F}^k_{,i} = \delta_i^k + \bar{u}^k_{,i}, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma} \quad (1.69)$$

$$\bar{P}^{ij} = \overset{(n)}{\bar{P}}^{ij(0)}(\bar{F}^k_{,i}), \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \quad (1.70)$$

$$n_i \bar{P}^{ij} = t^j_{ne}, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad (1.71)$$

$$\bar{u}^i = u^i_e, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_2, \quad (1.72)$$

Здесь осредненные определяющие соотношения зависят только от $\bar{F}^k_{,i}$, так как:

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{\bar{P}}^{ij(0)}(\bar{F}^k_{,i}) &= \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij} \left(F^k_{,i(0)}(X^i, \xi^j), \xi^m \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij} \left(\bar{F}^k_{,i} + u^k_{,i(1)}, \xi^m \right) \right\rangle = \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{P}}^{ij} \left(\bar{F}^k_{,i} + \mathcal{U}^k_{,i(1)}(\bar{F}^s_{,i}, \xi^j), \xi^m \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (1.73)$$

а $\mathcal{U}^{k(1)}(\bar{F}^s_{,i}, \xi^j)$ - это функция, которая является решением локальной задачи \mathcal{L}_1 , и, следовательно зависит от входных данных этой задачи – от осредненного градиента $\bar{F}^s_{,i}$, а также от локальных координат $\xi \in V_\xi$.

Осреднённая и локальные задачи являются связанными, поскольку решение каждой \mathcal{L}_p -задачи зависит от производных $P^{ij(p-2)}$ и $u^{k(p-1)}$, определяемых из макрозадачи, а решение макрозадачи, зависит от осреднённых определяющих соотношений, вычисляемых на основе решения локальных задач \mathcal{L}_p . Однако, можно заметить, что, поскольку, начиная от локальной задачи \mathcal{L}_1 и далее (рекуррентно), решения задач зависят от глобальных координат только опосредованно через $\bar{F}^k_l(X^i)$, можно для некоторой функции с указанной зависимостью от глобальных координат $w = w(X^i, \xi^j) = \tilde{w}(\bar{F}^k_l(X^i), \xi^j)$ переписать производные по глобальным координатам как

$$\frac{\partial w}{\partial X^i} = \frac{\partial w}{\partial \bar{F}^k_l} \frac{\partial \bar{F}^k_l}{\partial X^i}.$$

Таким образом, начиная со второй локальной задачи достаточно выяснить зависимость $P^{ij(p)}$ и $u^{k(p)}$ от \bar{F}^k_l и вычислить производные $\bar{F}^k_{l,i}$, которые выступают в качестве дополнительных входных данных. В результате можно развязать зависимость и решать задачи независимо. Тем не менее, для $P^{ij(p-1)}$ и $u^{k(p)}$ при $p \geq 2$ существует неявная зависимость от производных тензора градиента деформаций $\bar{F}^k_{l,i}$.

Далее исходя из структуры определяющих соотношений, мы можем утверждать, что для упругой среды зависимость тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа от градиента деформаций является обычной тензорной функцией [19], поэтому зависимостью от $\bar{F}^k_{l,i}$ можно пренебречь при расчёте осреднённых определяющих соотношений.

Для напряжений ограничимся удержанием только главных членов в этом выражении

$$\bar{P}^{ij} = \langle P^{ij(0)} \rangle,$$

так как члены более высокого порядка оказывают малое влияние на результирующие напряжения.

1.6 Методика решения локальных задач нелинейной теории упругости с конечными деформациями на полной ЯП

1.6.1 Вариационный принцип для исходной задачи и локальной задачи на ЯП

Наиболее широко используемым подходом при численном решении задач деформирования твердого тела является метод конечных элементов. Связано это с преимуществами этого метода, такими как:

- способность аппроксимировать практически любые геометрические формы;
- сведение решения задачи к решению СЛАУ;
- простота формализации составления упомянутых СЛАУ;
- хорошо развитые методы решения больших разреженных СЛАУ;
- простота формализации учета широкого спектра граничных условий;
- теоретически обоснованная корректность для большого круга задач.

Недостатки в основном связывают со сложностью разбиения на конечные элементы (генерации сеток), прямая зависимость качества аппроксимации получающегося решения от качества конечных элементов, а также высокая вычислительная сложность решения СЛАУ. Однако эти недостатки нивелируются широким распространением и высокой доступностью вычислительной техники, производительность которой не только непрерывно росла последние десятилетия,

но и продолжает расти высокими темпами, причем не только по отношению к времени вычислений, но и по отношению к энергозатратам и к стоимости самой вычислительной техники. Кроме того, задачи, возникающие при использовании МКЭ, оказались пригодными для распараллеливания – одновременного решения частей задачи несколькими вычислительными устройствами.

Одной из сложностей применения МКЭ также является невозможность напрямую использовать постановки задач в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных. Предварительно надо составить для задачи соответствующую так называемую вариационную постановку, которая формулируется как условие стационарности некоторого функционала. Для большинства задач механики сплошных сред такие формулировки были выведены, а для некоторых классов систем уравнений в частных производных вариационная формулировка может быть выведена напрямую.

Для квазистатической задачи (1.3)–(1.9) в материальном описании можем записать вариационный принцип в следующем виде [20, 85]:

$$\delta W[\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}] = \int_{V^\circ} \delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P} dV - \int_{\Sigma^\circ} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_{ne} d\Sigma - \int_{V^\circ} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV = 0, \quad (1.74)$$

где $\delta \mathbf{v}$ - поле допустимых скоростей, независимых от \mathbf{u} , а $\delta \dot{\mathbf{F}}$ - скорость градиента деформаций:

$$\delta \dot{\mathbf{F}} = (\nabla \otimes \delta \mathbf{v})^T. \quad (1.75)$$

Заметим, что на поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}_2$, где заданы перемещения, допустимые скорости равны 0:

$$\delta \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_2. \quad (1.76)$$

Применительно к локальной задаче \mathcal{L}_1 (1.62) вариационный принцип будет выглядеть следующим образом:

$$\delta W^{(0)}[\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v}] = \int_{V_{\xi}^{\circ}} \delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}^{(0)} dV_{\xi}^{\circ} = 0. \quad (1.77)$$

Допустимые скорости будут подчиняться соотношениям, связанным с периодичностью и нормировкой:

$$[[\delta \mathbf{v}]]_{\alpha} = 0, \quad \langle \delta \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (1.78)$$

1.6.2 Линеаризация вариационного принципа

Заметим, что записанный выше принцип является нелинейным уравнением как геометрически, так и с точки зрения определяющих соотношений. И хотя решение этого уравнения даст неизвестное поле перемещений, непосредственное применение МКЭ к нему приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений. Однако, полученную нелинейную вариационную формулировку можно линеаризовать, получив таким образом приближённую линейную систему уравнений, для решения которых существуют развитые и эффективные методы.

Осуществлять линеаризацию будем относительно неизвестных перемещений. Для этого воспользуемся производной по направлению, или производной Гато [65].

Рассмотрим обобщенную систему нелинейных уравнений, заданную как

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.79)$$

где \mathcal{F} может представлять собой некоторый оператор, например, систему алгебраических уравнений или систему интегро-дифференциальных уравнений, а \mathbf{x} – это набор неизвестных функций.

Рассмотрим начальное приближение \mathbf{u}_0 и некоторое произвольное приращение $\Delta \mathbf{u}$, которое предположительно должно дать лучшее приближение

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}$. Введем вспомогательный параметр α , который позволит перейти к одномерной задаче:

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\mathbf{u}_0 + \alpha \Delta \mathbf{u}) \quad (1.80)$$

Далее предположим, что функция \mathbf{F} представима в окрестности нуля в виде ряда Тейлора:

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{F}(0) + \mathbf{F}'(0)\alpha + \mathbf{F}''(0)\frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2). \quad (1.81)$$

Вернувшись к представлению (1.80) и отбросив все слагаемые порядка выше линейного, получим:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_0 + \alpha \Delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{d}{d\alpha} \mathcal{F}(\mathbf{u}_0 + \alpha \Delta \mathbf{u}) \right) \Big|_{\alpha=0} \alpha \quad (1.82)$$

Далее избавляемся от искусственного параметра α , зафиксировав его значение $\alpha = 1$.

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}_0) + \left(\frac{d}{d\alpha} \mathcal{F}(\mathbf{u}_0 + \alpha \mathbf{u}) \right) \Big|_{\alpha=0} \quad (1.83)$$

Введем обозначение производной по направлению [65]:

$$\mathcal{DF}(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u}] = \left(\frac{d}{d\alpha} \mathcal{F}(\mathbf{u}_0 + \alpha \Delta \mathbf{u}) \right) \Big|_{\alpha=0} \quad (1.84)$$

Теперь мы можем записать линеаризованную задачу (1.79) в виде

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_0) + \mathcal{DF}(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u}] = 0. \quad (1.85)$$

Решением этой задачи будет приращение $\Delta \mathbf{u}$. Поскольку при построении уравнения были отброшены слагаемые порядка выше линейного, то $\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}$ не

будет являться точным решением (1.79), а только приближённым. Приняв решение $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}$ за новое приближение, можно найти следующее приращение $\Delta \mathbf{u}_1$. Общий вид итерационного метода Ньютона–Рафсона будет следующим:

$$\mathcal{D}\mathcal{F}(\mathbf{u}_k)[\Delta \mathbf{u}_k] = -\mathcal{F}(\mathbf{u}_k), \quad \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k. \quad (1.86)$$

Отметим, что, во-первых, производная по направлению линейна относительно этого направления в том смысле, что

$$\mathcal{D}\mathcal{F}(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}'] = \mathcal{D}\mathcal{F}(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u}] + \mathcal{D}\mathcal{F}(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u}'], \quad (1.87)$$

а во-вторых, базовые свойства производной по направлению, соответствуют свойствам обычной производной:

- линейность:

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u}] = \mathcal{D}\mathcal{F}_1(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u}] + \mathcal{D}\mathcal{F}_2(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u}], \quad (1.88)$$

- правило для производной от произведения:

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_1(\mathbf{u}_0)\mathcal{F}_2(\mathbf{u}_0))[\Delta \mathbf{u}] = \mathcal{D}(\mathcal{F}_1(\mathbf{u}_0))[\Delta \mathbf{u}]\mathcal{F}_2(\mathbf{u}_0) + \mathcal{F}_1(\mathbf{u}_0)\mathcal{D}(\mathcal{F}_2(\mathbf{u}_0))[\Delta \mathbf{u}] \quad (1.89)$$

- производная от сложной функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{F} \circ \mathcal{H}(\mathbf{u}_0))[\Delta \mathbf{u}] &= \mathcal{D}\mathcal{F}(\mathbf{H}_0)[\Delta \mathbf{h}_0], \\ \mathbf{H}_0 &= \mathcal{H}(\mathbf{u}_0), \quad \Delta \mathbf{h}_0 = \mathcal{D}\mathcal{H}(\mathbf{u}_0)[\Delta \mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Воспользуемся описанным методом и линеаризуем уравнение (1.77):

$$\begin{aligned} \delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)} + \Delta \mathbf{u}^{(1)}) &\approx \delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}) + \mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}^{(1)}] = 0, \\ \mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}^{(1)}] &= -\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Рассмотрим отдельно $\mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}^{(1)}]$. Внесём производную под интеграл (по постоянному объёму):

$$\mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}^{(1)}] = \mathcal{D} \left(\int_{\overset{\circ}{V}_\xi} \delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}^{(0)} d\overset{\circ}{V}_\xi \right) [\Delta \mathbf{u}^{(1)}] = \int_{\overset{\circ}{V}_\xi} \delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathcal{D}\mathbf{P}^{(0)}[\Delta \mathbf{u}^{(1)}] d\overset{\circ}{V}_\xi.$$

Берём как производную сложной функции (от \mathbf{F}):

$$\mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}^{(1)}] = \int_{\overset{\circ}{V}_\xi} \delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}^{(0)}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \nabla \otimes \Delta \mathbf{u}^{(1)} d\overset{\circ}{V}_\xi.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}^{(1)}] &= \int_{\overset{\circ}{V}_\xi} \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}^{(0)}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \Delta \mathbf{u}^{(1)} d\overset{\circ}{V}_\xi \\ \delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v}) &= \int_{\overset{\circ}{V}_\xi} \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}^{(0)} d\overset{\circ}{V}_\xi \end{aligned}$$

Перепишем формулы в компонентном виде в декартовой системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. В ней ковариантные и контравариантные компоненты тензоров совпадают поэтому используем суммирование по любым парам повторяющихся индексов – необязательно парам ковариантных и контравариантных индексов:

$$\mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}^{(1)}] = \int_{\overset{\circ}{V}_\xi} \frac{\partial(\delta v_j)}{\partial \xi^i} \frac{\partial(P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} \frac{\partial(\Delta u^{(1)}_k)}{\partial \xi^l} d\overset{\circ}{V}_\xi, \quad (1.92)$$

$$\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v}) = \int_{\overset{\circ}{V}_\xi} \frac{\partial(\delta v_j)}{\partial \xi^i} P^{(0)}_{ij} d\overset{\circ}{V}_\xi. \quad (1.93)$$

Подставим эти формулы в уравнение (1.91):

$$\int_{V_\xi^\circ} \frac{\partial(\delta v_j)}{\partial \xi^i} \frac{\partial(P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} \frac{\partial(\Delta u^{(1)}_k)}{\partial \xi^l} dV_\xi^\circ = - \int_{V_\xi^\circ} \frac{\partial(\delta v_j)}{\partial \xi^i} P^{(0)}_{ij} dV_\xi^\circ. \quad (1.94)$$

Сформулированную таким образом задачу \mathcal{L}_1 теперь возможно использовать для применения метода конечных элементов, подставляя вместо полей δv_j , $P^{(0)}_{ij}$ и $\Delta u^{(1)}_k$ их конечно-элементные аппроксимации. В разделах 1.6.4 и 1.6.5 показан способ учета условий периодичности (1.66) и нормировки (1.67) в сформулированной задаче \mathcal{L}_1 при ее численном решении.

1.6.3 Конечно-элементная формулировка задачи

Для получения КЭ-формулировки задачи \mathcal{L}_1 (1.62)–(1.67) рассмотрим КЭ-разбиение области ЯП:

$$V_\xi^\circ = \bigcup_{e=1}^E V_\xi^e$$

В КЭ под номером e – V_ξ^e неизвестное поле u аппроксимируется функцией $u_{\{e\}}$ при помощи набора M функций формы $N_{em}(\xi^j)$ ($m = \overline{1, M}$) и соответствующих им параметров аппроксимации $u_{[m|e]}$ ($m = \overline{1, M}$):

$$u_{\{e\}} = \sum_{m=1}^M u_{[m|e]} N_{em}(\xi^j), \quad \xi^j \in V_\xi^e, \quad e = \overline{1, E}.$$

Параметры аппроксимации $u_{[m|e]}$ ассоциированы с узловыми (вычисленными в узлах КЭ $\xi^j_{[m|e]} \in V_\xi^e$) значениями аппроксимируемой функции, при этом параметры в общих узловых точках двух соседних КЭ отождествляются:

$$\xi_{[m|e]}^j = \xi_{[n|f]}^j \Rightarrow u_{[m|e]} = u_{[n|f]}, \quad \xi_{[m|e]}^j \in \overset{\circ}{V}_{\xi}^e, \xi_{[n|f]}^j \in \overset{\circ}{V}_{\xi}^f, \quad e, f = \overline{1, E}, \quad m, n = \overline{1, M}.$$

Это приводит к двум способам нумерации узлов и узловых параметров: локальной и глобальной нумерации:

$$u_{[m|e]} = u_{[g]}.$$

Здесь g – это номер глобальной нумерации узлов, соответствующий локальному номеру узла m элемента под номером e . Обозначать этот факт будем формулой: $[m|e]=[g]$.

Можно также ввести глобальные функции формы, которые определяются как объединение функций форм, ассоциированных с одной степенью свободы:

$$N_{[g]}(\xi^j) = N_{me}(\xi^j), \quad \xi^j \in \overset{\circ}{V}_{\xi}^e, \quad [m|e]=[g], \quad e = \overline{1, E}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Таким образом, интеграл по объему $\overset{\circ}{V}_{\xi}$ от некоторого выражения $L[u]$, которое зависит от u записывается через сумму интегралов по КЭ:

$$\int_{\overset{\circ}{V}_{\xi}} L[u] d\xi = \sum_{e=1}^E \int_{\overset{\circ}{V}_{\xi}^e} L[u] d\xi = \sum_{e=1}^E \int_{\overset{\circ}{V}_{\xi}^e} L[u_{\{e\}}] d\xi.$$

Подставим в вариационную постановку задачи \mathcal{L}_1 (1.91)–(1.94) вместо полей $\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{u}^{(1)}$ их конечно-элементные аппроксимации. Опустим индексы с номером члена асимптотического разложения в $\mathbf{u}^{(1)}, \Delta \mathbf{u}^{(1)}$ для уменьшения громоздкости формул, подразумевая при этом:

$$u_i = u_{i\{e\}} = \sum_{m=1}^M u_{i[m|e]} N_{em}(\xi^j), \quad \xi^j \in \overset{\circ}{V}_{\xi}^e, \quad e = \overline{1, E} \quad (1.95)$$

$$\delta v_i = \delta v_{i\{e\}} = \sum_{m=1}^M \delta v_{i[m|e]} N_{em}(\xi^j), \quad \xi^j \in \overset{\circ}{V}_{\xi}^e, \quad e = \overline{1, E} \quad (1.96)$$

$$\Delta u_i = \Delta u_{i\{e\}} = \sum_{m=1}^M \Delta u_{i[m|e]} N_{em}(\xi^j), \quad \xi^j \in \overset{\circ}{V}_{\xi}^e, \quad e = \overline{1, E} \quad (1.97)$$

Распишем $\delta W^{(0)}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})$ и $\mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}]$:

$$\delta W^{(0)}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = \int_{V_\xi^\circ} \frac{\partial(\delta v_j)}{\partial \xi^i} P^{(0)}_{ij} dV_\xi^\circ = \sum_{e=1}^E \int_{V_\xi^e} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \delta v_{j\{e\}} P^{(0)}_{ij} dV_\xi^\circ, \quad (1.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\delta W^{(0)}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}] &= \int_{V_\xi^\circ} \frac{\partial(\delta v_j)}{\partial \xi^i} \frac{\partial(P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial \xi^l} dV_\xi^\circ = \\ &= \sum_{e=1}^E \int_{V_\xi^e} \frac{\partial(\delta v_{j\{e\}})}{\partial \xi^i} \frac{\partial(P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} \frac{\partial(\Delta u_{k\{e\}})}{\partial \xi^l} dV_\xi^\circ. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Значения $P^{(0)}_{ij}$ и $\frac{\partial(P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}}$ вычисляются согласно определяющим соотношениям модели конечных деформаций:

$$\begin{aligned} P^{(0)}_{ij} &= \mathcal{P}_{ij}(\bar{F}_{kl} + u^{(1)}_{k/l}, \xi^m), \\ \frac{\partial(P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} &= \left. \frac{\partial(\mathcal{P}_{ij}(F_{kl}, \xi^m))}{\partial F_{kl}} \right|_{F_{kl} = \bar{F}_{kl} + u^{(1)}_{k/l}}, \end{aligned}$$

в которые в качестве поля перемещений $u^{(1)}_i$ подставляются известные КЭ-аппроксимации. Формулы для вычисления \mathcal{P}_{ij} приведены в разделе 1.7, поэтому далее в подынтегральных выражениях $P^{(0)}_{ij}$ и $\frac{\partial(P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}}$ будем считать известными функциями.

Введём обозначения:

$$\delta W^{(0)}_{\{e\}} = \int_{V_\xi^e} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \delta v_{j\{e\}} P^{(0)}_{ij} dV_\xi^\circ, \quad (1.100)$$

$$\mathcal{D}_u \delta W^{(0)}_{\{e\}} = \int_{V_\xi^e} \frac{\partial(\delta v_{j\{e\}})}{\partial \xi^i} \frac{\partial(P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} \frac{\partial(\Delta u_{k\{e\}})}{\partial \xi^l} dV_\xi^\circ, \quad (1.101)$$

позволяющие записать формулы (1.98) и (1.99) в виде

$$\delta W^{(0)}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = \sum_{e=1}^E \delta W^{(0)}_{\{e\}}, \quad \mathcal{D} \delta W^{(0)}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}] = \sum_{e=1}^E \mathcal{D}_u \delta W^{(0)}_{\{e\}}. \quad (1.102)$$

Подставив в формулы (1.100) и (1.101) КЭ-аппроксимации аппроксимации допустимых скоростей δv_i (1.96) и приращений $\Delta u_i^{(0)}$ (1.97), перепишем их через параметры аппроксимации:

$$\begin{aligned} \delta W^{(0)}_{\{e\}} &= \int_{V_\xi^e} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\sum_{m=1}^M \delta v_{i[m|e]} N_{em}(\xi^j) \right) P^{(0)}_{ij} dV_\xi^\circ = \\ &= \sum_{m=1}^M \delta v_{i[m|e]} \int_{V_\xi^e} N_{em/i}(\xi^j) P^{(0)}_{ij} dV_\xi^\circ \\ \mathcal{D}_u \delta W^{(0)}_{\{e\}} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \delta v_{j[m|e]} \left(\int_{V_\xi^e} \frac{\partial}{\partial \xi^i} N_{em/i}(\xi^k) \frac{\partial (P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} N_{en/l}(\xi^k) dV_\xi^\circ \right) \Delta u_{k[n|e]} \\ \mathcal{D}_u \delta W^{(0)}_{\{e\}} &= \int_{V_\xi^e} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sum_{m=1}^M \delta v_{j[m|e]} N_{em}(\xi^k) \frac{\partial (P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \sum_{m=1}^M \Delta u_{k[m|e]} N_{em}(\xi^k) dV_\xi^\circ = \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \delta v_{j[m|e]} \left(\int_{V_\xi^e} \frac{\partial}{\partial \xi^i} N_{em/i}(\xi^k) \frac{\partial (P^{(0)}_{ij})}{\partial F_{kl}} N_{en/l}(\xi^k) dV_\xi^\circ \right) \Delta u_{k[n|e]} \end{aligned}$$

Для дальнейшего упрощения формул заменим индексы суммирования в последних формулах:

$$\delta W^{(0)}_{\{e\}} = \sum_{s=1}^M \delta v_{i[s|e]} \left(\int_{V_\xi^e} N_{es/k}(\xi^m) P^{(0)}_{ki} dV_\xi^\circ \right) \quad (1.103)$$

$$\mathcal{D}_u \delta W^{(0)}_{\{e\}} = \sum_{s=1}^M \delta v_{i[s|e]} \sum_{t=1}^M \left(\int_{V_\xi^e} N_{es/k}(\xi^m) \frac{\partial (P^{(0)}_{ki})}{\partial F_{jl}} N_{et/l}(\xi^m) dV_\xi^\circ \right) \Delta u_{j[t|e]}. \quad (1.104)$$

Обозначим интегралы в этих выражениях:

$$b_{i[s|e]} = - \int_{V_{\xi}^e} N_{es/k}(\xi^m) P_{ki}^{(0)} dV_{\xi}^{\circ},$$

$$K_{ij[st|e]} = \int_{V_{\xi}^e} N_{es/k}(\xi^m) \frac{\partial (P_{ki}^{(0)})}{\partial F_{jl}} N_{et/l}(\xi^m) dV_{\xi}^{\circ},$$

- компоненты локального столбца правой части $\{b^e\}$ и локальной матрицы жёсткости $[K^e]$ для конечного элемента под номером e .

С этими обозначениями формулы (1.103) и (1.104) для примут следующий вид:

$$\delta W^{(0)}_{\{e\}} = - \sum_{s=1}^M \delta v_{i[s|e]} b_{i[s|e]}, \quad \mathcal{D}_u \delta W^{(0)}_{\{e\}} = \sum_{s=1}^M \delta v_{i[s|e]} \sum_{t=1}^M K_{ij[st|e]} \Delta u_{j[t|e]}$$

Подставим эти формулы в (1.102):

$$\begin{aligned} \delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(0)}, \delta \mathbf{v}) &= \sum_{e=1}^E \delta W^{(0)}_{\{e\}} = - \sum_{e=1}^E \sum_{s=1}^M \delta v_{i[s|e]} b_{i[s|e]} = \\ |\delta v_{i[g]} = \delta v_{i[s|e]}| &= - \sum_{e=1}^E \sum_{s=1}^M \delta v_{i[g]} b_{i[s|e]} = - \sum_{g=1}^G \delta v_{i[g]} \sum_{e=1}^E \sum_{\substack{s \\ [s|e]=[g]}} b_{i[s|e]} \\ \mathcal{D} \delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(0)}, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}^{(0)}] &= \sum_{e=1}^E \mathcal{D}_u \delta W^{(0)}_{\{e\}} \\ &= \sum_{e=1}^E \sum_{s=1}^M \delta v_{i[s|e]} \sum_{t=1}^M K_{ij[st|e]} \Delta u_{j[t|e]} = \left| \begin{array}{l} \delta v_{i[g]} = \delta v_{i[s|e]} \\ \Delta u_{j[h]} = \Delta u_{j[t|e]} \end{array} \right| = \sum_{e=1}^E \sum_{s=1}^M \delta v_{i[g]} \sum_{t=1}^M K_{ij[st|e]} \Delta u_{j[h]} = \\ &= \sum_{g=1}^G \delta v_{i[g]} \sum_{h=1}^G \Delta u_{j[h]} \sum_{e=1}^E \sum_{\substack{s,t \\ [e|s]=[g] \\ [e|t]=[h]}} K_{ij[st|e]} \end{aligned}$$

Обозначим глобальные компоненты матрицы жёсткости и столбца правой части:

$$b_{i[g]} = \sum_{e=1}^E \sum_{\substack{s \\ [s|e]=[g]}} b_{i[s|e]}, \quad K_{ij[gh]} = \sum_{e=1}^E \sum_{\substack{s,f \\ [s|e]=[g] \\ [f|e]=[h]}} K_{ij[s|e]f}$$

Вернувшись к линеаризованному уравнению, и подставив в него последние формулы, получим

$$\sum_{g=1}^G \delta v_{i[g]} \sum_{h=1}^G \Delta u_{j[h]} K_{ij[gh]} - \sum_{g=1}^G \delta v_{i[g]} b_{i[g]} = 0$$

Вынесем за скобки компоненты, связанные с полем допустимых скоростей:

$$\sum_{g=1}^G \delta v_{i[g]} \left(\sum_{h=1}^G K_{ij[gh]} \Delta u_{j[h]} - b_{i[g]} \right) = 0$$

Поскольку равенство выполняется для произвольного допустимого поля скоростей, то можем перейти к системе из $3G$ уравнений. Индексы i, j пробегают значения от 1 до 3, а по j неявно идёт суммирование:

$$\sum_{h=1}^G K_{ij[gh]} \Delta u_{j[h]} = b_{i[g]}, \quad g = \overline{1, G}.$$

Предложенный алгоритм применим для различных базисных функций и типов КЭ. При решении конкретных задач были рассмотрены тетраэдральные КЭ с линейными базисными функциями.

Для завершения формирования матрицы СЛАУ необходимо также учесть условия периодичности и условия нормировки.

1.6.4 Учёт условий периодичности

Условия периодичности для задачи \mathcal{L}_1 заданы в виде:

$$\llbracket u^{(1)}_i \rrbracket_\alpha = 0.$$

Это означает, что поле перемещений должно совпадать в точках на противоположных гранях ЯП по оси ξ_α :

$$\Sigma_{\alpha\pm} = \left\{ \xi \mid \xi_\alpha = \pm \frac{h_\alpha}{2}, -\frac{h_\beta}{2} \leq \xi_\beta \leq \frac{h_\beta}{2}, -\frac{h_\gamma}{2} \leq \xi_\gamma \leq \frac{h_\gamma}{2} \right\},$$

если у этих точек совпадают координаты ξ^β, ξ^γ .

Это означает, что часть степеней свободы в конечно-элементной формулировке задачи являются связанными. Среди шести граней ЯП выберем три перпендикулярных друг другу, и назовём их *ведущими*, а три оставшихся – *подчинёнными*.

Пусть на подчинённой грани узлу под номером q с координатами $\xi_{[q]}^m$ соответствует узел p . В силу периодичности, поле в узле q соответствует полю в узле p .

$$\begin{aligned} u_{i[q]} &= u_i(\xi_{[q]}^k) = u_i(\xi_{[p]}^k) = u_{i[q]}, \\ \Delta u_{i[q]} &= \Delta u_i(\xi_{[q]}^k) = \Delta u_i(\xi_{[p]}^k) = \Delta u_{i[q]}. \end{aligned}$$

Обобщённо можно записать для каждого такого узла:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^G \alpha_{[h]} \Delta u_{j[h]} &= 0, \quad j=1,2,3 \\ \alpha_{[h]} &= \begin{cases} 1, & h=q \\ -1, & h=p \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.105)$$

Таким образом, при сборке СЛАУ, ведущие узлы отождествляются с подчинёнными, а для подчинённых узлов записывается их зависимость (1.105) от ведущих.

1.6.5 Учёт условия нормировки

После учёта условий периодичности, система остаётся недоопределённой, и решение $\Delta \mathbf{u}$ находится с точностью до аддитивной константы \mathbf{y} :

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^* + \mathbf{y},$$

где $\Delta \mathbf{u}^*$ – некоторое частное решение СЛАУ.

Воспользуемся условием нормировки (1.67). Оно позволяет найти неизвестную константу следующим образом. Предположим, что нам известно некоторое решение $\Delta \mathbf{u}^*$. Тогда

$$\langle \Delta \mathbf{u} \rangle = \langle \Delta \mathbf{u}^* + \mathbf{y} \rangle = \langle \Delta \mathbf{u}^* \rangle + \langle \mathbf{y} \rangle = \langle \Delta \mathbf{u}^* \rangle + \mathbf{y} = 0.$$

Отсюда получаем формулу для \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = -\langle \Delta \mathbf{u}^* \rangle.$$

То есть решение, которое удовлетворяет условию нормировки, может быть выражено через любое частное решение $\Delta \mathbf{u}^*$ следующим образом:

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^* - \langle \Delta \mathbf{u}^* \rangle. \quad (1.106)$$

Следовательно, необходимо найти хотя бы одно решение задачи, которое удовлетворяет условию периодичности. Для этого мы можем зафиксировать перемещения в некотором произвольном узле p , задав их, например, нулевыми:

$$\Delta u_{i[p]} = 0.$$

Это условие первого рода в узле. Учёт его в матрице осуществляется следующим образом: соответствующие узлу строки и столбцы матрицы обнуляются, на диагонали выставляется 1, а в столбце правой части – 0. Решив

полученную систему, получим частное решение $\Delta \mathbf{u}^*$. Затем нормализуем его при помощи формулы (1.106). В результате получим КЭ-аппроксимацию решения – приращения перемещений $\Delta \mathbf{u}$.

1.6.6 Итерационная процедура решения нелинейной задачи

Мы исходили из предположения, что нам задано начальное приближение $\mathbf{u}^{(1)}$ задачи и дополнительные входные параметры – осреднённый градиент деформаций. После решения линеаризованной задачи мы получаем приращение (коррекцию) $\Delta \mathbf{u}^{(1)}$. Прибавив его к начальному приближению, получим решение более близкое к точному. Используя новое решение в качестве нового начального приближения, мы можем повторить процедуру, получив новую коррекцию. Эту процедуру можно повторять до тех пор, пока мы не получим достаточно точное решение согласно какому-то критерию. В результате чего получаем итерационную процедуру решения нелинейной задачи:

1. входные данные: начальное приближение $u_{(0)i}^{(1)}$, осреднённый градиент деформаций \bar{F}_{ij} , модели материалов и их параметры;
2. задание $\{u\} := \{u_{(0)}^{(1)}\}$;
3. вычисление критерия сходимости;
4. пока не достигнут критерий сходимости:
 1. формирование столбца правой части $\{b\}$;
 2. формирование матрицы жёсткости $[K]$;
 3. решение СЛАУ

$$[K]\{\Delta u\} = \{b\}.$$

4. обновление текущих перемещений:

$$\{u\} := \{u\} + \{\Delta u\}.$$

5. обновление критерия сходимости.

На практике этот алгоритм может столкнуться с проблемами сходимости. Более эффективным с практической точки зрения показал себя подход, когда нагрузка увеличивается постепенно. В рассматриваемой задаче роль нагрузки играет осреднённый градиент деформаций. В связи с этим будем увеличивать его постепенно: переходя от метрического тензора (недеформированное состояние) к заданному за N шагов:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{ij(0)} &= \delta_{ij} \\ \bar{F}_{ij(k)} &= \delta_{ij} + \sum_{l=1}^k \Delta \bar{F}_{ij(l)}, \quad 1 \leq k \leq N \\ \bar{F}_{ij(N)} &= \bar{F}_{ij}\end{aligned}$$

В процессе итераций промежуточный градиент деформаций должен оставаться корректным: его определитель должен быть положительным $\det \bar{\mathbf{F}}_{(k)} > 0$, а приращения должны быть небольшими:

$$\|\Delta \bar{\mathbf{F}}_{(l)}\| < \varepsilon \|\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{E}\|, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

В итоге, получим следующую процедуру:

1. Входные данные: осреднённый градиент деформаций \bar{F}_{ij} , число приращений, модели материалов и их параметры.
2. Задание $\{u\} := 0$, $\bar{F}_{ij(0)} = \delta_{ij}$.
3. Для k от 1 до N :
 1. Вычисляем новый осреднённый градиент деформаций \bar{F}_{ij} :

$$\bar{F}_{ij(k)} := \bar{F}_{ij(k-1)} + \Delta \bar{F}_{ij(k)}.$$
 2. Вычисление критерия сходимости
 3. Пока не достигнут критерий сходимости:
 1. Формирование столбца правой части $\{b\}$.

2. Формирование матрицы жёсткости $[K]$.
3. Решение СЛАУ

$$[K]\{\Delta u\} = \{b\}.$$

4. Обновление текущих перемещений:

$$\{u\} := \{u\} + \{\Delta u\}.$$

5. Обновление критерия сходимости.

1.7 Полулинейные модели \mathcal{A}_n для компонентов композита

В рассматриваемых задачах, компоненты композиционного материала будем считать однородными изотропными нелинейно-упругими материалами, соответствующими полулинейным моделям \mathcal{A}_n [20]. Определяющие соотношения для таких моделей задаются в виде связи между тензором энергетических напряжений и тензором энергетических деформаций и имеют вид [20]:

$$\mathbf{T} = J \left(l_1 I_1(\mathbf{C}) \mathbf{E} + 2l_2 \mathbf{C} \right). \quad (1.107)$$

Здесь J – изменение плотности:

$$J = (\det \mathbf{F})^{-1} = \rho / \rho, \quad (1.108)$$

\mathbf{C} – тензор энергетических деформаций, $I_1(\mathbf{C})$ – первый инвариант тензора энергетических деформаций.

Тензор энергетических деформаций определяется для каждого номера модели n согласно формулам формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(n)} &= \frac{1}{n-3} (\mathbf{U}^{n-3} - \mathbf{E}), \quad n \neq 3 \\ \mathbf{C}^{(3)} \Big|_{t=0} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{C}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{U} \right) \end{aligned} \quad (1.109)$$

Если известно разложение градиента деформации, вытекающее из его полярного разложения [18],

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{p}}_{\alpha}, \quad (1.110)$$

тогда можно записать $\mathbf{C}^{(n)}$ в виде:

$$\mathbf{C}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^3 c_{\alpha}^{(n)} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{p}}_{\alpha}, \quad (1.111)$$

где диагональные компоненты $c_{\alpha}^{(n)}$ равны

$$c_{\alpha}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n-3} (\lambda_{\alpha}^{n-3} - 1), & n \neq 3 \\ \ln \lambda_{\alpha}, & n = 3 \end{cases} \quad (1.112)$$

Значение первого инварианта тогда может быть вычислено по формуле:

$$I_1(\mathbf{C}) = \sum_{\alpha=1}^3 c_{\alpha}^{(n)} \quad (1.113)$$

$$I_1(\mathbf{C}) = \frac{1}{n-3} \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha}^{n-3} - 1), \quad n \neq 3 \quad (1.114)$$

$$I_1(\mathbf{C}) = \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3 = \ln \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\ln J. \quad (1.115)$$

К тензору \mathbf{T} можно перейти воспользовавшись тензором энергетической эквивалентности:

$${}^4\mathbf{E}^{(n)} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 E_{\alpha\beta}^{(n)} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\beta} \otimes \mathring{\mathbf{p}}_{\beta} \otimes \mathring{\mathbf{p}}_{\alpha}, \quad (1.116)$$

Компоненты $E_{\alpha\beta}^{(n)}$ симметричны и задаются одной из эквивалентных формул:

$$E_{\alpha\beta}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_\alpha \lambda_\beta}, & n=1 \\ \frac{2}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, & n=2 \\ 1, & n=3 \\ \frac{2\lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, & n=4 \\ \lambda_\alpha \lambda_\beta, & n=5 \end{cases} \quad (1.117)$$

$$E_{\alpha\beta}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n=3 \\ \lambda_\alpha^{n-3} (= \lambda_\beta^{n-3}), & \lambda_\alpha = \lambda_\beta, n \neq 3 \\ \frac{2\lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} \cdot \frac{\lambda_\alpha^{n-3} - \lambda_\beta^{n-3}}{(n-3)(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}, & \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta, n \neq 3 \end{cases} \quad (1.118)$$

Тензор напряжений Коши можно выразить, таким образом, при помощи следующей формулы:

$$\mathbf{T} = {}^4\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 E_{\alpha\beta}^{(n)} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{T} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 E_{\alpha\beta}^{(n)} T_{\alpha\beta}^{(p^\circ)} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \quad (1.119)$$

где $T_{\alpha\beta}^{(p^\circ)}$ – это компоненты тензора энергетических напряжений в базисе \mathbf{p}_α .

$$T_{\alpha\beta}^{(p^\circ)} = \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_\beta \quad (1.120)$$

$$T_{\alpha\beta}^{(p^\circ)} = p_{\alpha i} T_{ij} p_{\beta j} \quad (1.121)$$

Вычислим эти компоненты для выбранной модели:

$$T_{\alpha\beta}^{(p^\circ)} = \mathbf{p}_\alpha \cdot J \left(l_1 I_1(\mathbf{C}) \mathbf{E} + 2l_2 \mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{p}_\beta = J \left(l_1 I_1 + 2l_2 c_\alpha \right) \delta_{\alpha\beta} \quad (1.122)$$

То есть в базисе \mathbf{p}_α компоненты тензора энергетических напряжений имеют диагональный вид:

$$T_{\alpha\alpha}^{(p^\circ)} = J \left(l_1 I_1 + 2l_2 c_\alpha \right). \quad (1.123)$$

Подставляя (1.123) в (1.119), видим, что тензор истинных напряжений Коши имеет в базисе \mathbf{p}_α диагональный вид:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=3}^3 E_{\alpha\alpha}^{(n)} T_{\alpha\alpha}^{(p^\circ)} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \quad (1.124)$$

или в компонентном виде

$$T_{ij} = \sum_{\alpha=3}^3 E_{\alpha\alpha}^{(n)} T_{\alpha\alpha}^{(p^\circ)} p_{\alpha i} p_{\alpha j}. \quad (1.125)$$

Для получения тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа воспользуемся формулой [19]:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}.$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\lambda_\gamma^{-1}}{J} \mathbf{p}_\gamma \otimes \mathbf{p}_\gamma \cdot \sum_{\alpha,\beta=1}^3 E_{\alpha\beta}^{(n)} T_{\alpha\beta}^{(p^\circ)} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \frac{E_{\alpha\beta}^{(n)} T_{\alpha\beta}^{(p^\circ)}}{\lambda_\alpha} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta, \quad (1.126)$$

либо в компонентном виде

$$P_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{E_{\alpha\alpha}^{(n)} T_{\alpha\alpha}^{(p^\circ)}}{\lambda_\alpha} p_{\alpha i} p_{\alpha j} \quad (1.127)$$

В формулах (1.126), (1.127) можно обойтись без деления, сразу подставляя

$$T_{\alpha\beta}^{(p^\circ)} / J = l_1 I_1 \delta_{\alpha\beta} + 2l_2 c_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.128)$$

Таким образом, для заданного изотропного упругого полулинейного материала модели \mathcal{A}_n представлен способ вычисления тензоров напряжений: Коши и Пиолы–Кирхгофа – по заданному тензору \mathbf{F} и его разложению (1.110).

1.8 Примеры решения локальных задач

Для решения локальных задач был реализован специальный программный модуль на языке C++ в составе САЕ-комплекса Manipula/SMCM [22]. Был написан решатель, реализующий алгоритм, описанный в разделе 1.6 для решения локальных задач и построения диаграмм деформирования ЯП композита. Были также реализованы полулинейные модели материалов \mathcal{A}_n из раздела для вычисления напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа по заданным константам материала и тензору градиента деформаций.

Были сформулированы задачи деформирования для ЯП композитов со следующей микроструктурой:

- композиционный материал КМ1 представляет собой тканевый КМ (рис 1.1, 1.2) с полотняным плетением, с волокнами шириной 8 условных единиц, толщиной 1.15 единиц и расстоянием между волокнами 0.5 единиц; концентрация волокон составляет 0.371046; материалы компонент заданы изотропными моделями \mathcal{A}_3 со следующими характеристиками:
 - матрица: $l_1 = 2.6$ ГПа, $l_2 = 1.1$ ГПа .
 - нити: $l_1 = 30$ ГПа, $l_2 = 30$ ГПа ;
- композиционный материал КМ2 представляет собой дисперсно-армированный КМ, армированный сферами (рис 1.3, 1.4);

Для обоих КМ в качестве компонент выбраны однородные изотропные упругие материалы полулинейных моделей \mathcal{A}_n . В частности была выбрана модель \mathcal{A}_3

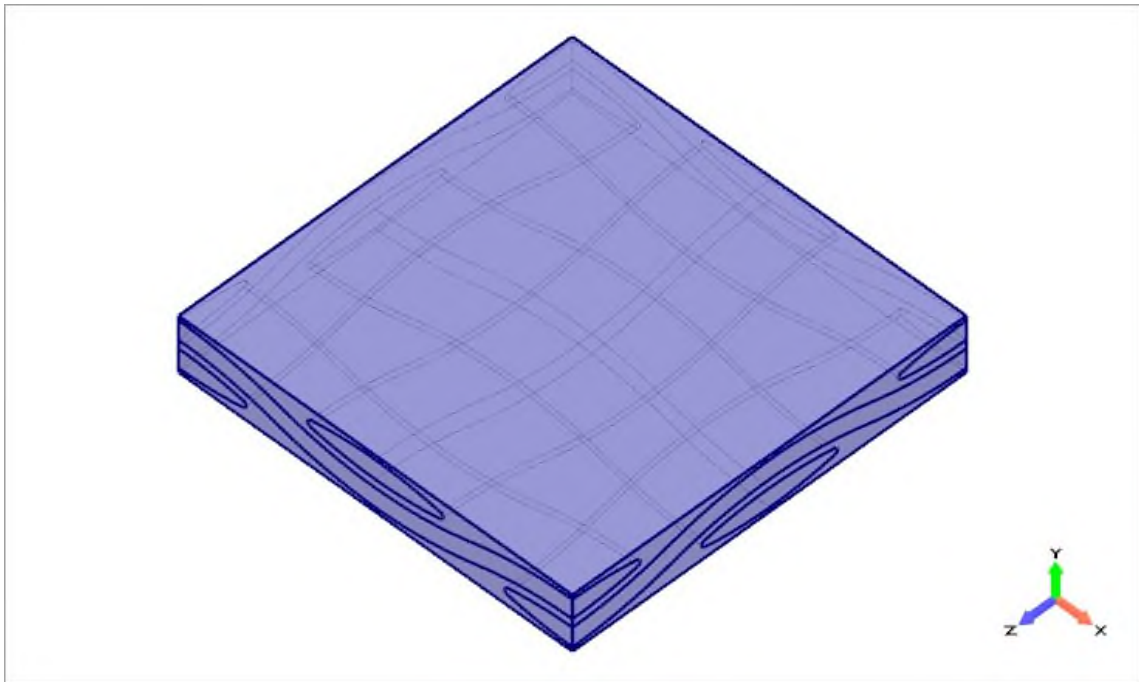


Рисунок 1.1. – ЯП тканевого КМ.

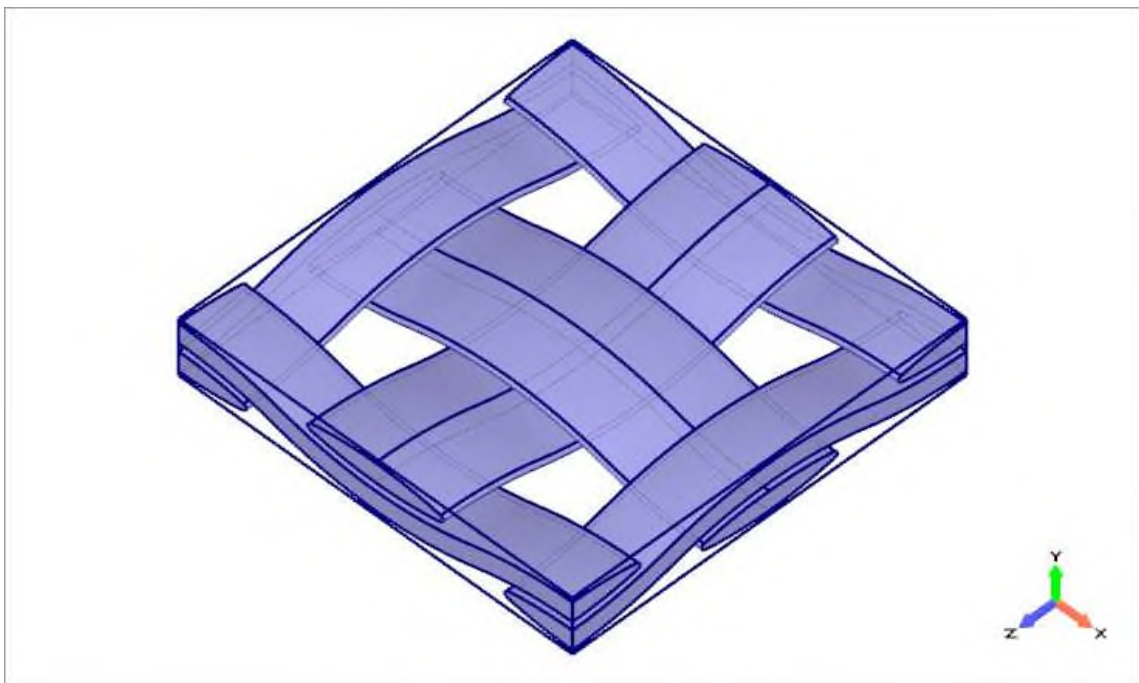


Рисунок 1.2. – Расположение нитей в ЯП тканевого КМ.

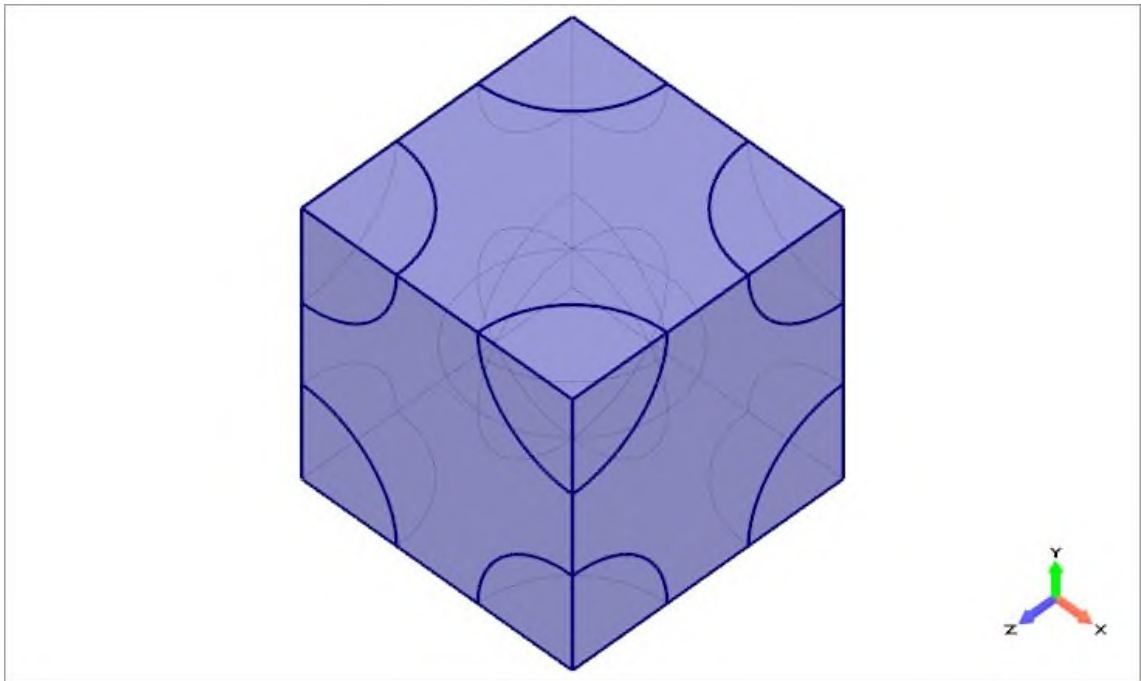


Рисунок 1.3. – ЯП армированного сферами КМ

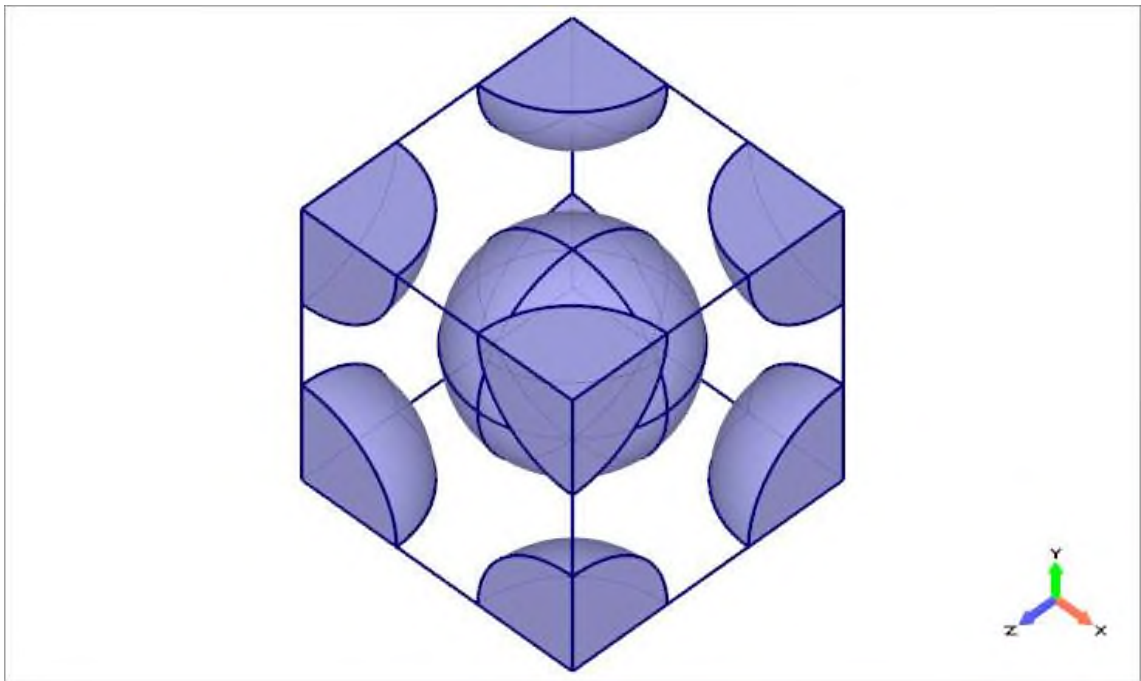


Рисунок 1.4. – Расположение армирующих сфер в ЯП армированного сферами КМ

1.8.1 Одноосное растяжение тканевого КМ вдоль направления нити

Рассмотрим задачу одноосного растяжения КМ1 вдоль оси Ox с осреднённым тензором градиента деформаций

$$\bar{\mathbf{F}} = k_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (1.129)$$

В результате решения этой задачи были получены следующие поля: перемещений, градиента деформаций, тензора напряжений Коши и тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа.

Поля перемещений \mathbf{u} представлены на рисунках 1.5 и 1.6.

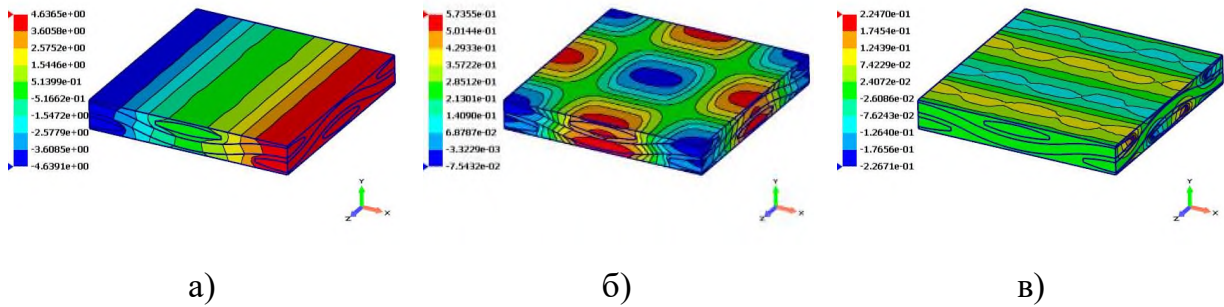


Рисунок 1.5. – Поле перемещений (безразмерных) на ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$):

а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .

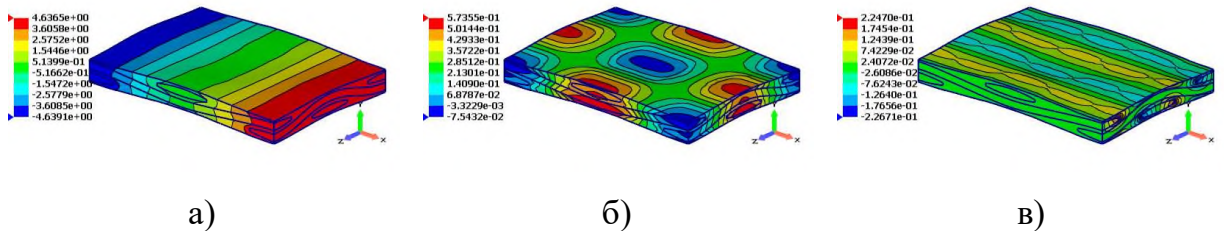


Рисунок 1.6. – Поле перемещений (безразмерных) на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$):

а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .

На рисунке (рис 1.7) представлены поля перемещений для нитей.

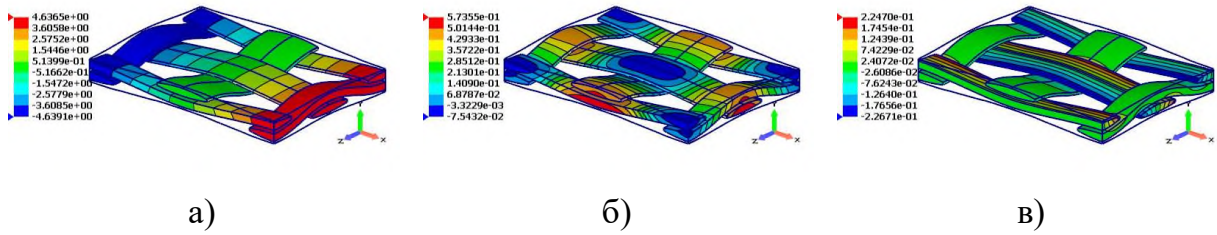
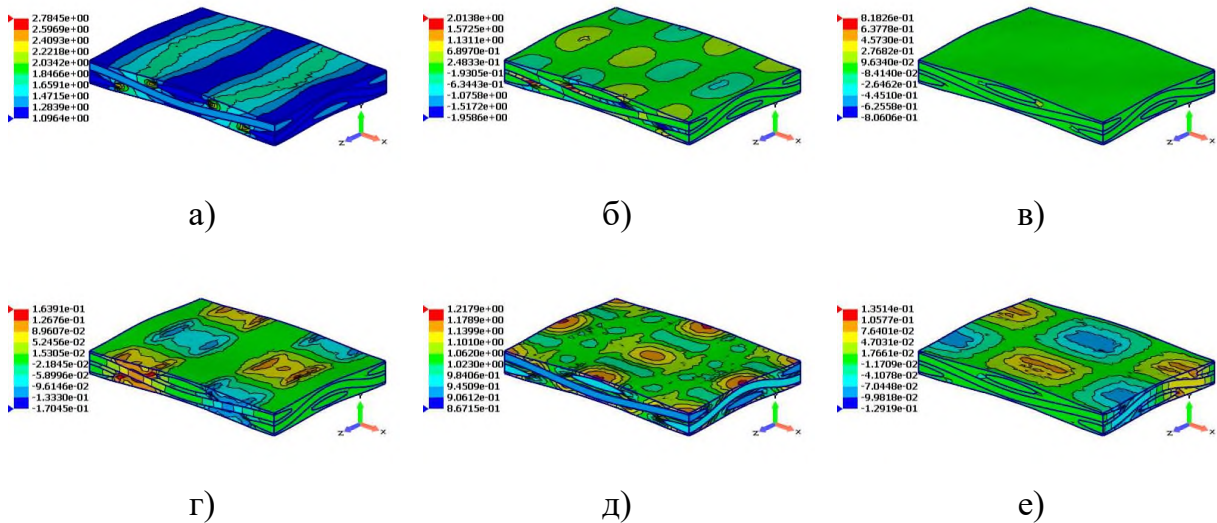


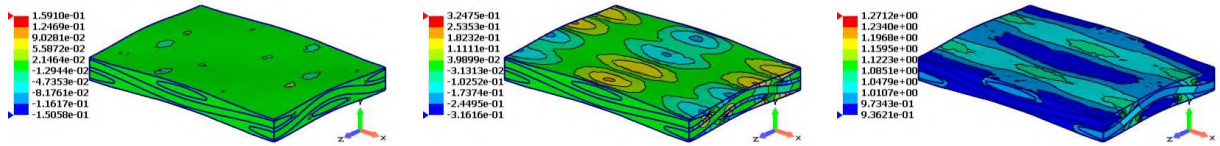
Рисунок 1.7. – Поле перемещений (безразмерных)
на нитях деформированной ЯП КМ1
при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$):
а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .

На представленных рисунках видно, что поле перемещений действительно является непрерывным, как и требовалось в постановке. Заметно, что в направлении OY части нитей опускаются и поднимаются, а в направлении OZ происходит Пуассоновское сжатие волокон, хотя в среднем КМ не сжимается в поперечных направлениях согласно постановке. Кроме того, из рисунков (рис 1.6б, 1.7б) видно, что при растяжении происходит небольшое спрямление нитей в направлении растяжения.

Далее будем изображать поля на деформированных ЯП.

Поле тензора градиента деформаций представлено в виде компонент на следующих рисунках (рис 1.8, 1.9).





ж)

з)

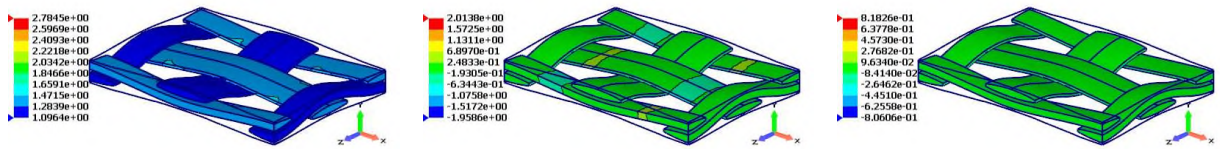
и)

Рисунок 1.8. – Поле градиента деформаций на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$):

а) компонента F_{11} ; б) компонента F_{12} ; в) компонента F_{13} ;

г) компонента F_{21} ; д) компонента F_{22} ; е) компонента F_{23} ;

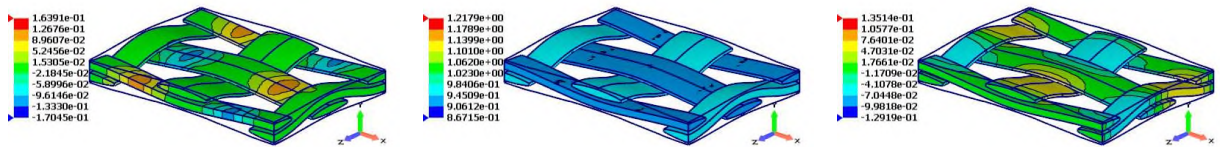
ж) компонента F_{31} ; з) компонента F_{32} ; и) компонента F_{33} ;



а)

б)

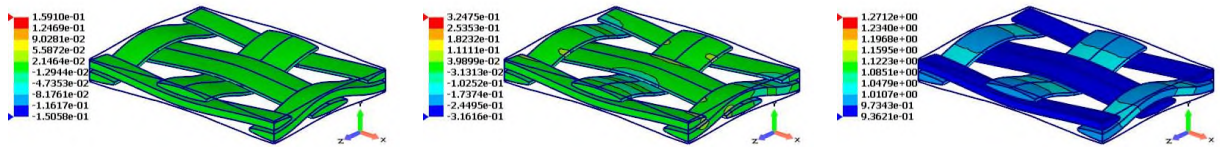
в)



г)

д)

е)



ж)

з)

и)

Рисунок 1.9. – Поле градиента деформаций на нитях деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$):

а) компонента F_{11} ; б) компонента F_{12} ; в) компонента F_{13} ;

г) компонента F_{21} ; д) компонента F_{22} ; е) компонента F_{23} ;

ж) компонента F_{31} ; з) компонента F_{32} ; и) компонента F_{33} ;

г)

д)

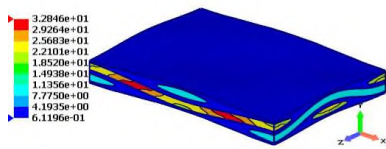
е)

Рисунок 1.11. – Поле тензора напряжений Коши на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$):

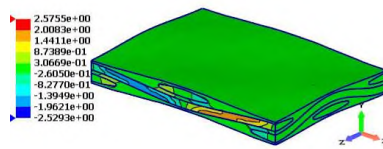
а) компонента T_{11} (ГПа); б) компонента T_{22} (ГПа); в) компонента T_{33} (ГПа);
 г) компонента T_{12} (ГПа); д) компонента T_{13} (ГПа); е) компонента T_{23} (ГПа).

Из рисунков (рис 1.9, 1.10) можно заметить, что при рассматриваемой нагрузке большая часть напряжений концентрируется в нитях.

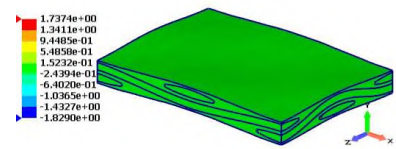
Кроме тензора напряжений Коши поле напряжений может быть также представлено полем тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа. Этот тензор в отличие от тензора напряжений Коши, уже не является симметричным, поэтому на рисунках (рис 1.12, 1.13) изображены все 9 компонент этого тензора.



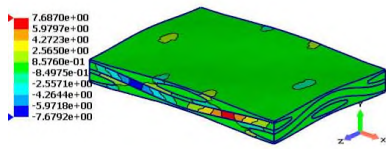
а)



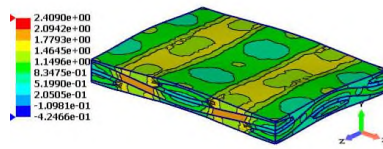
б)



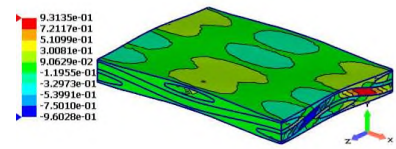
в)



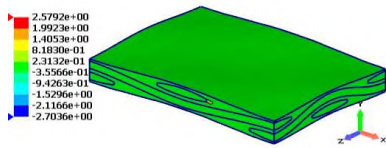
г)



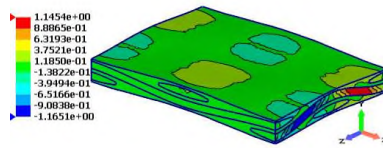
д)



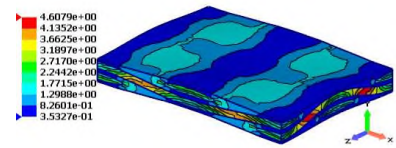
е)



ж)



з)

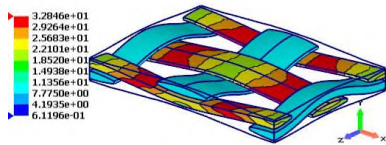


и)

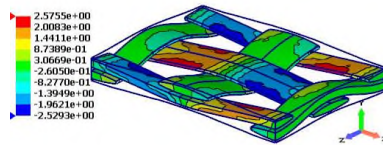
Рисунок 1.12. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на деформированной ЯП КМ1

при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$):

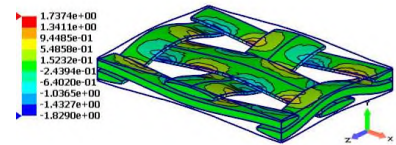
- а) компонента P_{11} (ГПа); б) компонента P_{12} (ГПа); в) компонента P_{13} (ГПа);
 г) компонента P_{21} (ГПа); д) компонента P_{22} (ГПа); е) компонента P_{23} (ГПа);
 ж) компонента P_{31} (ГПа); з) компонента P_{32} (ГПа); и) компонента P_{33} (ГПа);



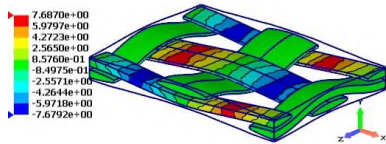
а)



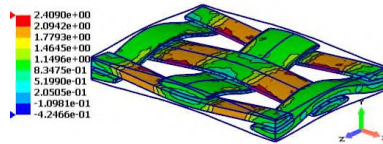
б)



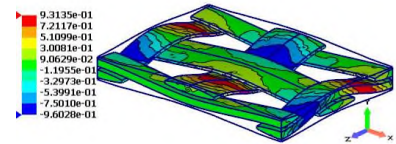
в)



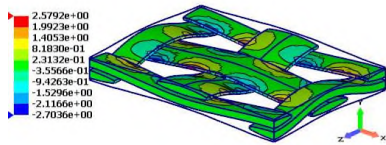
г)



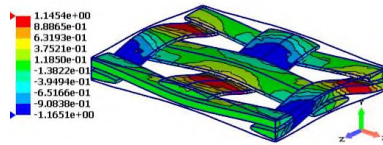
д)



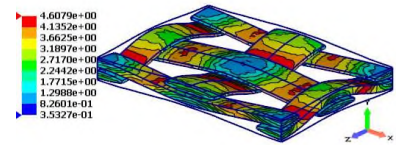
е)



ж)



з)



и)

Рисунок 1.13. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на нитях деформированной ЯП КМ1

при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$):

- а) компонента P_{11} (ГПа); б) компонента P_{12} (ГПа); в) компонента P_{13} (ГПа);
 г) компонента P_{21} (ГПа); д) компонента P_{22} (ГПа); е) компонента P_{23} (ГПа);
 ж) компонента P_{31} (ГПа); з) компонента P_{32} (ГПа); и) компонента P_{33} (ГПа);

Анализируя поля напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа, можно заметить, что эти поля, хотя и похожи, имеют ряд отличий, как в количественном плане, так и в плане наблюдаемых картин распределения этих полей. Напомним, что в теории малых деформаций, эти тензоры являются эквивалентными, чего мы не наблюдаем в рассматриваемой задаче.

Кроме распределения полей, были также получены диаграммы деформирования этого КМ при одноосном растяжении вдоль оси ОХ – зависимость компонент осреднённых тензоров напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа, представленные на рисунках (рис 1.14, 1.15).

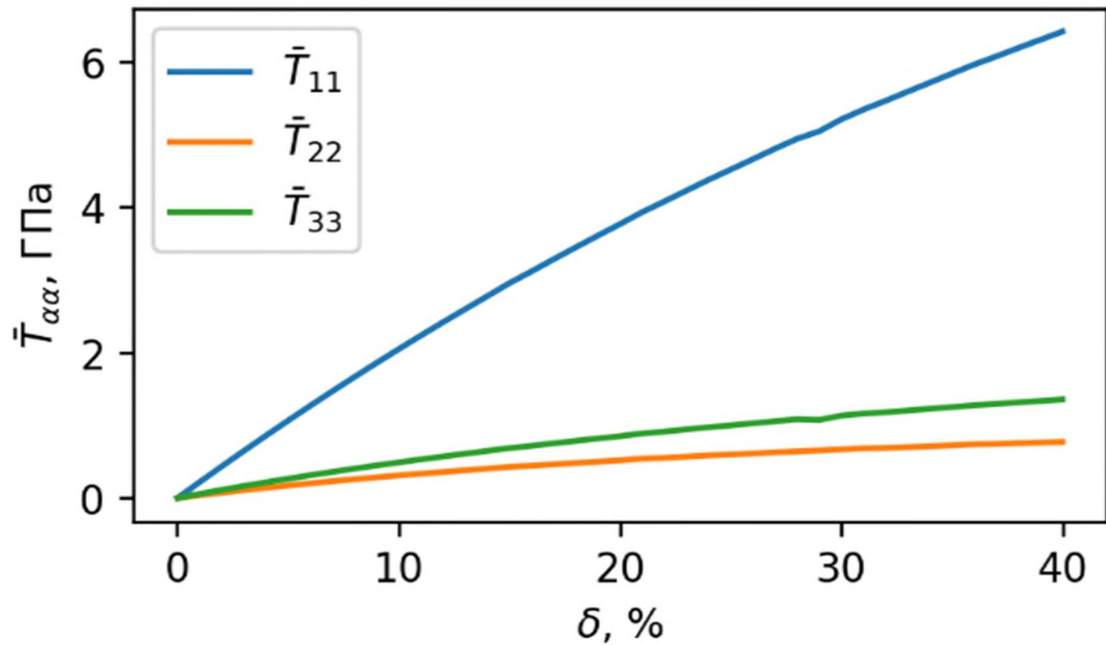


Рисунок 1.14. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Коши при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением от 0% до 40% ($1 \leq k_1 \leq 1.4$)

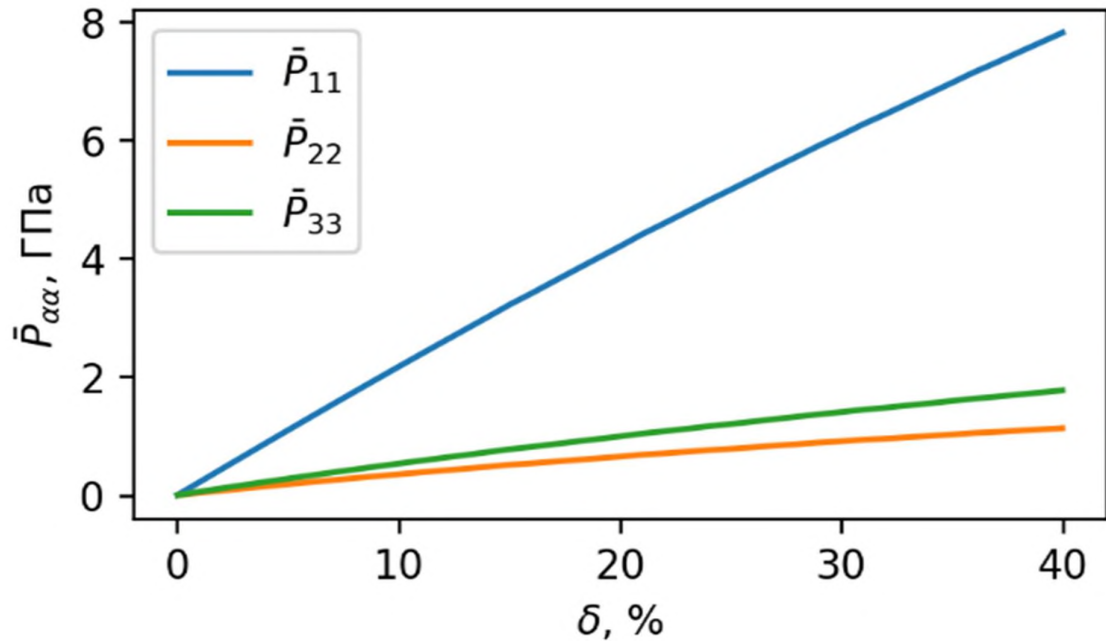


Рисунок 1.15. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_1 с удлинением от 0% до 40% ($1 \leq k_1 \leq 1.4$)

В силу симметрии ЯП, можно утверждать, что при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_3 поля и осреднённые значения напряжений будут аналогичными, с обменом индексов $1 \leftrightarrow 3$. Поэтому не будем решать эту задачу отдельно.

1.8.2 Одноосное растяжение тканевого КМ перпендикулярно плоскости плетения

Рассмотрим теперь КМ1 под действием одноосного растяжения вдоль оси \mathbf{e}_2 с осреднённым тензором градиента деформаций

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Результирующие поля, а также диаграммы деформирования представлены на рисунках (рис 1.16-1.25).

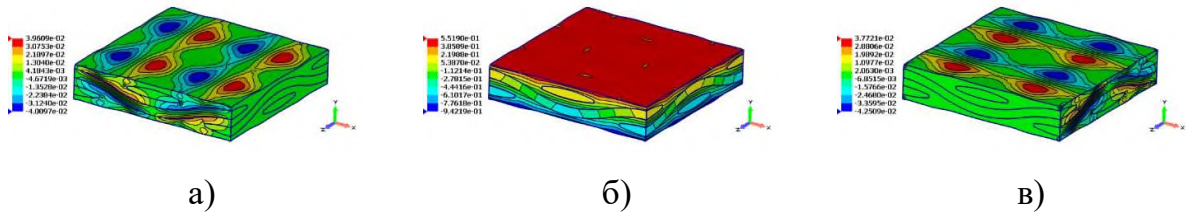


Рисунок 1.16. – Поле перемещений на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$):

а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .

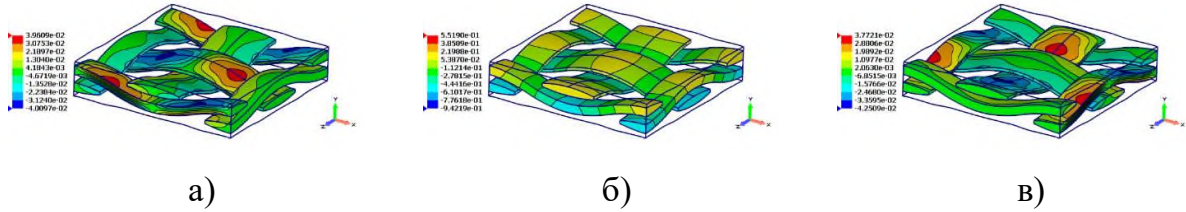


Рисунок 1.17. – Поле перемещений на нитях деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$):

а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .

Видим, что при растяжении в выбранном направлении толщина волокон практически не меняется, и перемещения увеличиваются в основном благодаря матрице.

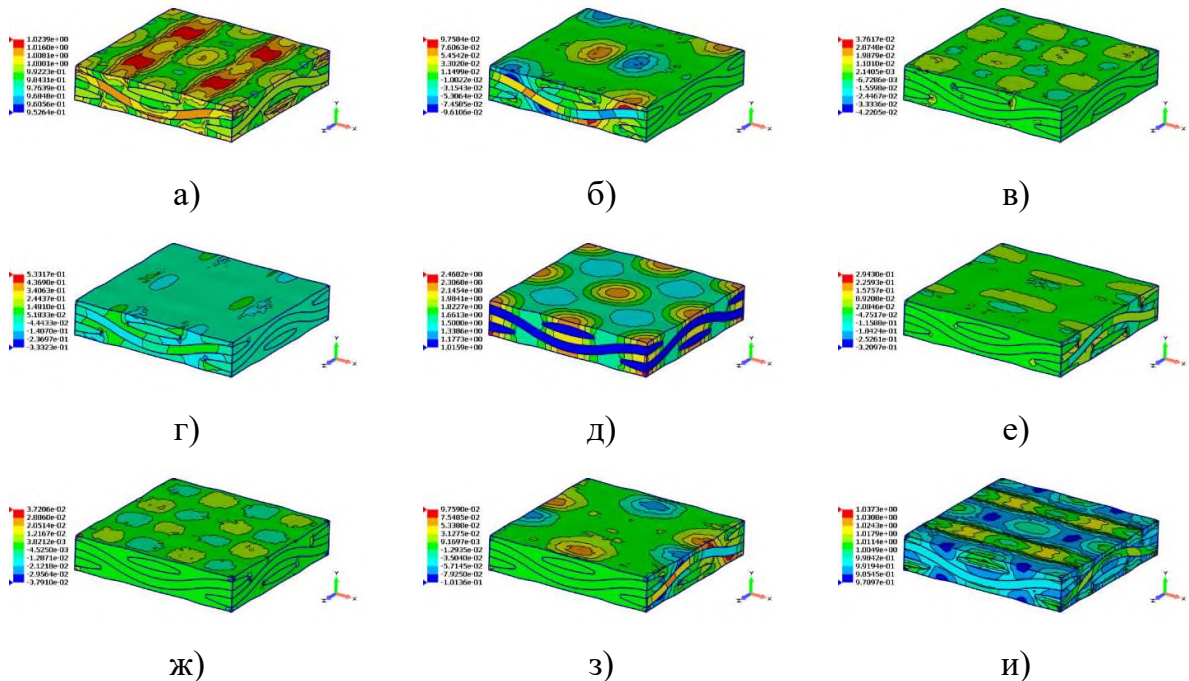


Рисунок 1.18. – Поле градиента деформаций на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$):

- а) компонента F_{11} ; б) компонента F_{12} ; в) компонента F_{13} ;
 г) компонента F_{21} ; д) компонента F_{22} ; е) компонента F_{23} ;
 ж) компонента F_{31} ; з) компонента F_{32} ; и) компонента F_{33} ;

Здесь мы видим подтверждение предыдущего утверждения. Деформации в направлении OY сконцентрированы в матрице.

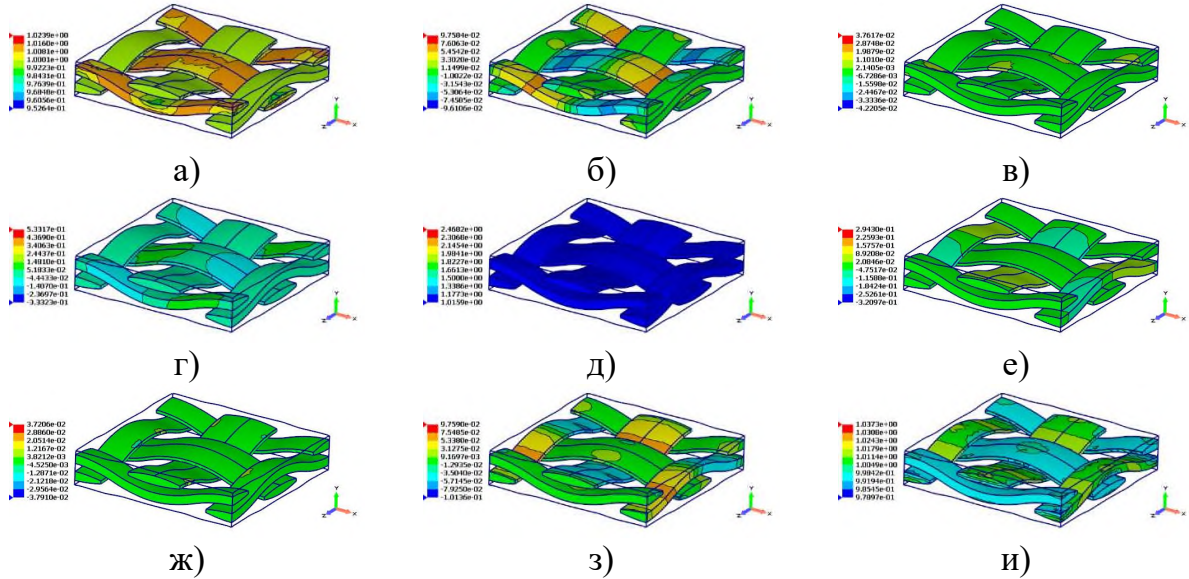


Рисунок 1.19. – Поле градиента деформаций на нитях деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$):

- а) компонента F_{11} ; б) компонента F_{12} ; в) компонента F_{13} ;
 г) компонента F_{21} ; д) компонента F_{22} ; е) компонента F_{23} ;
 ж) компонента F_{31} ; з) компонента F_{32} ; и) компонента F_{33} ;

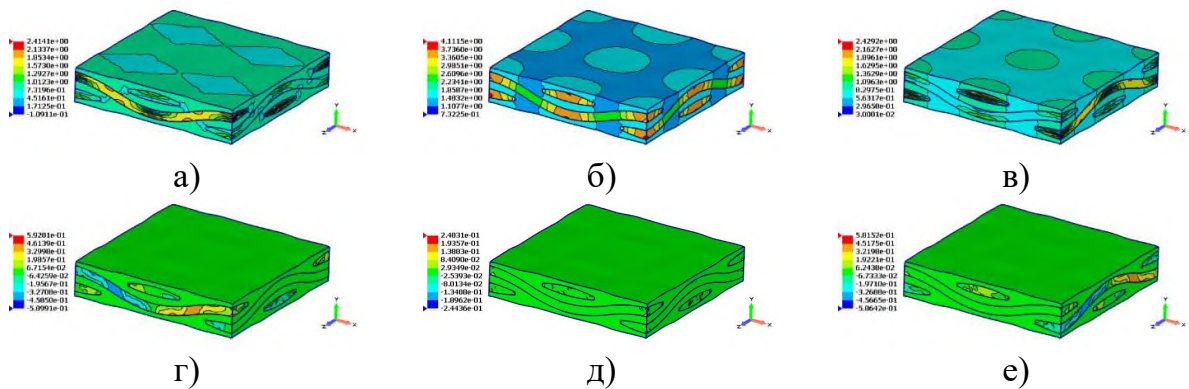


Рисунок 1.20. – Поле тензора напряжений Коши на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$):

- а) компонента T_{11} (ГПа); б) компонента T_{22} (ГПа); в) компонента T_{33} (ГПа);
г) компонента T_{12} (ГПа); д) компонента T_{13} (ГПа); е) компонента T_{23} (ГПа).

Напряжения концентрируются в основном в нитях. Сравнительно небольшие сдвиговые напряжения вызваны искривлением волокон, связанное с деформацией.

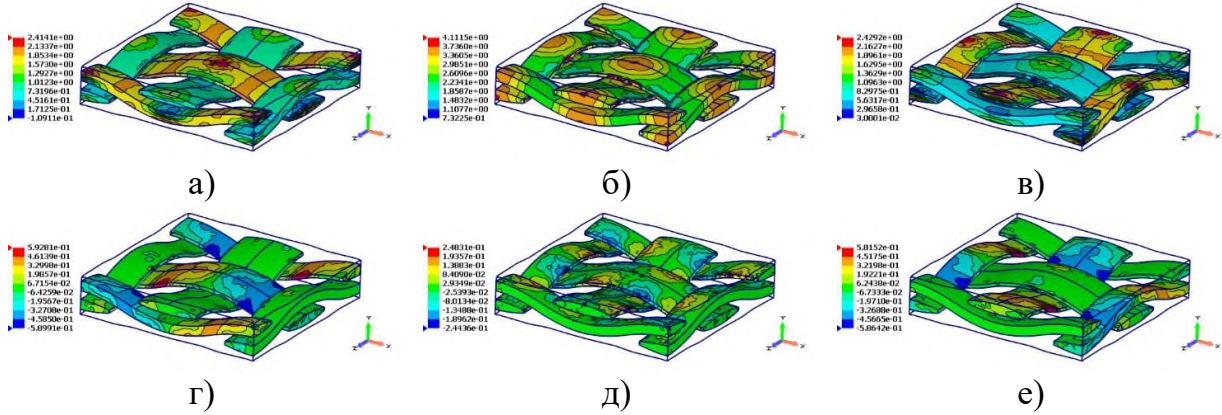


Рисунок 1.21. – Поле тензора напряжений Коши на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль e_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$):

- а) компонента T_{11} (ГПа); б) компонента T_{22} (ГПа); в) компонента T_{33} (ГПа);
г) компонента T_{12} (ГПа); д) компонента T_{13} (ГПа); е) компонента T_{23} (ГПа).

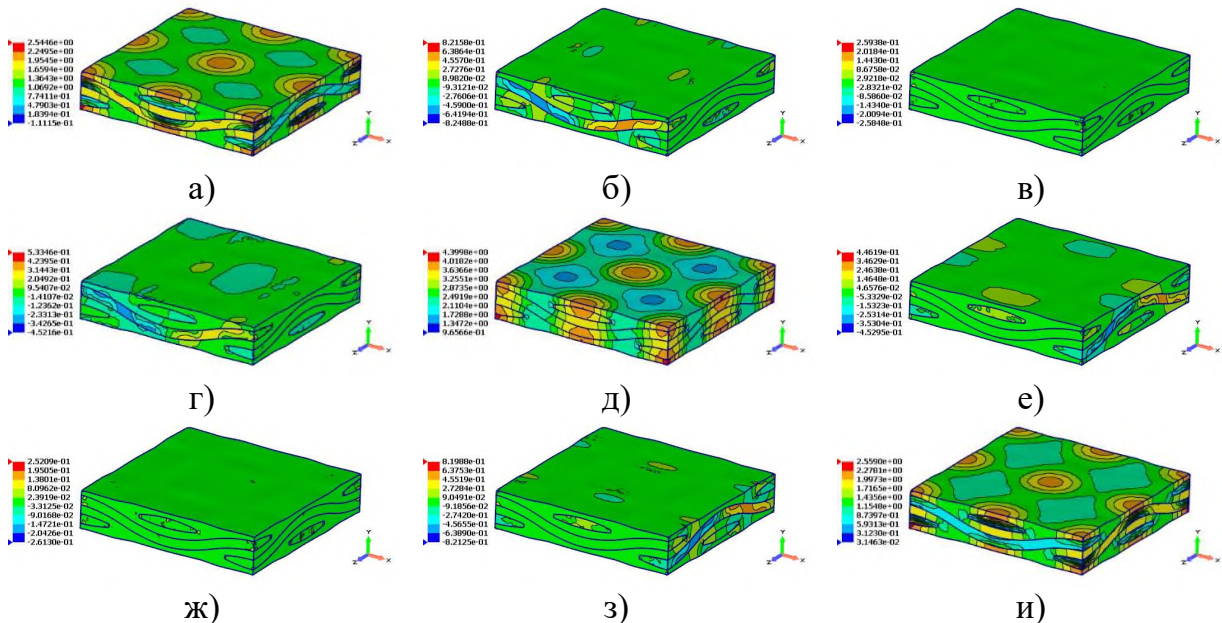


Рисунок 1.22. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на деформированной ЯП КМ1

при одноосном растяжении вдоль e_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$):

- а) компонента P_{11} (ГПа); б) компонента P_{12} (ГПа); в) компонента P_{13} (ГПа);
 г) компонента P_{21} (ГПа); д) компонента P_{22} (ГПа); е) компонента P_{23} (ГПа);
 ж) компонента P_{31} (ГПа); з) компонента P_{32} (ГПа); и) компонента P_{33} (ГПа);

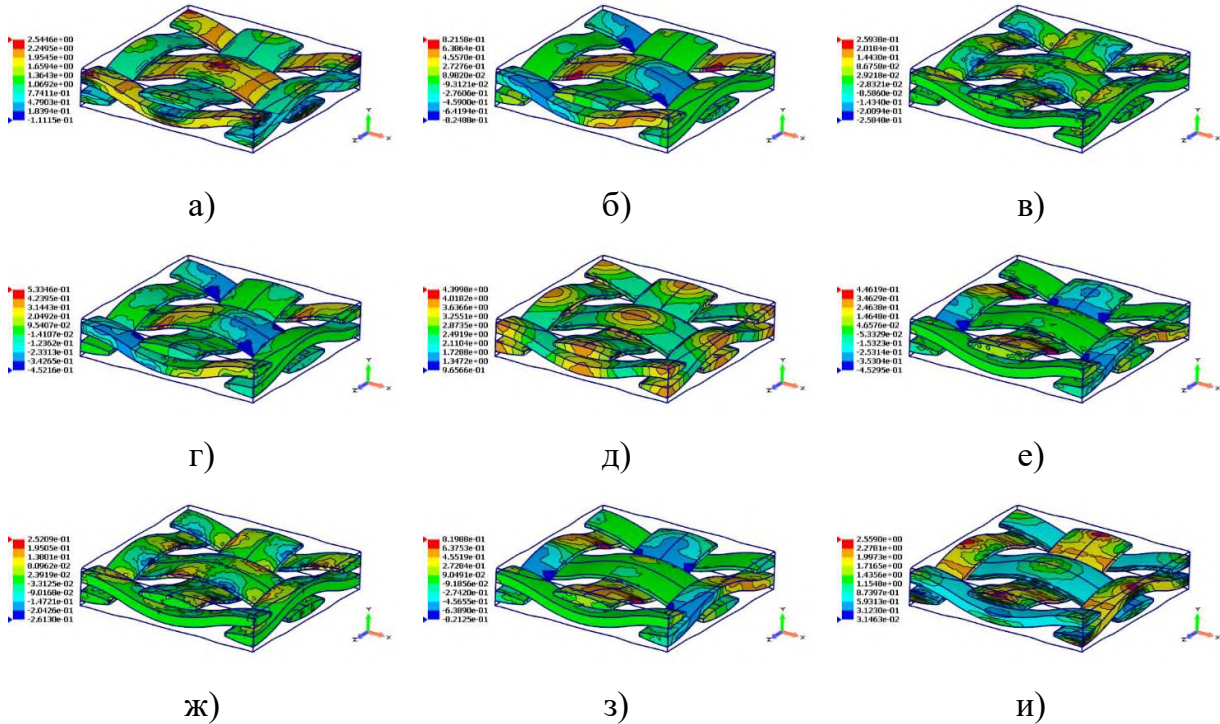


Рисунок 1.23. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на нитях деформированной ЯП КМ1

при одноосном растяжении вдоль e_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$):

- а) компонента P_{11} (ГПа); б) компонента P_{12} (ГПа); в) компонента P_{13} (ГПа);
 г) компонента P_{21} (ГПа); д) компонента P_{22} (ГПа); е) компонента P_{23} (ГПа);
 ж) компонента P_{31} (ГПа); з) компонента P_{32} (ГПа); и) компонента P_{33} (ГПа);

Напряжения тензора Пиолы-Кирхгофа подтверждают наблюдение о концентрации напряжений в волокнах.

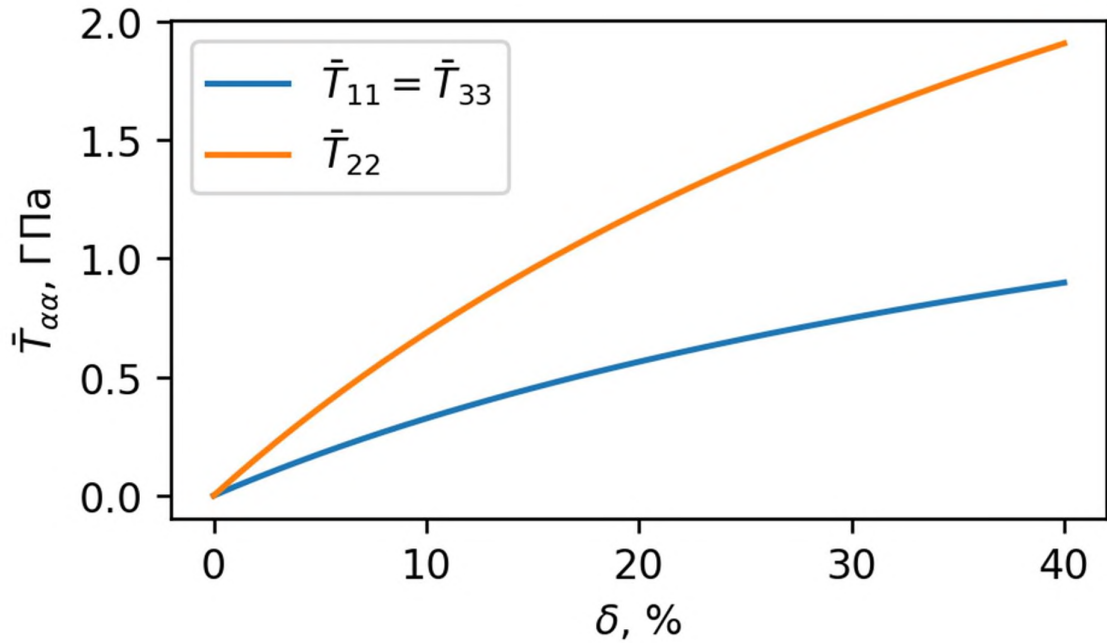


Рисунок 1.24. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Коши при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$)

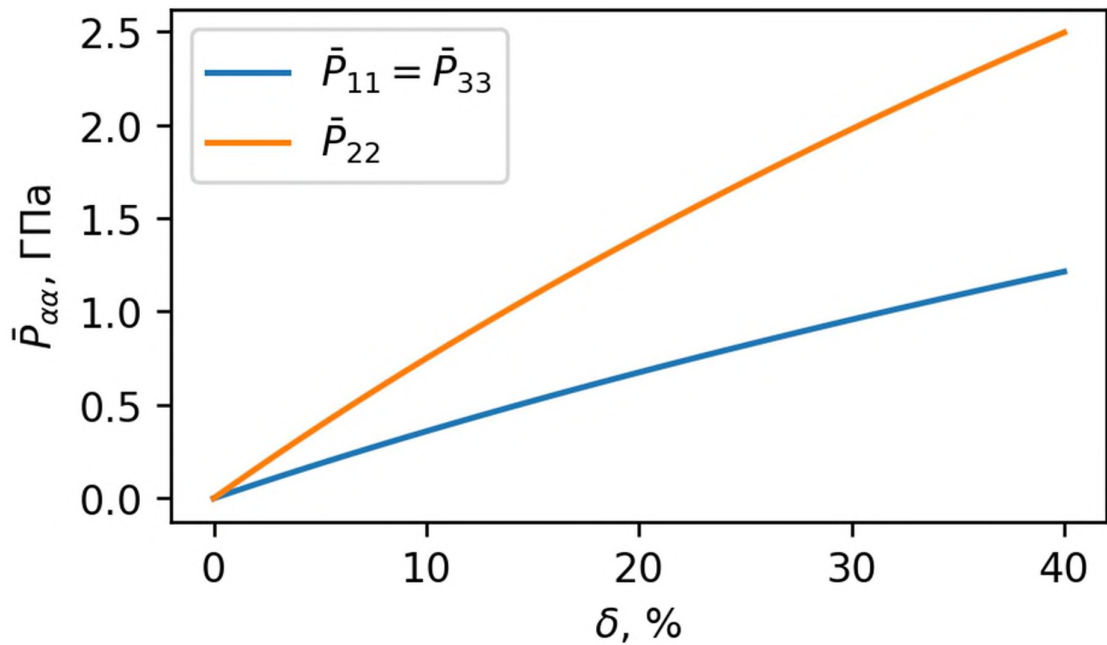


Рисунок 1.25. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_2 с удлинением 40% ($k_2 = 1.4$)

Можно заметить, что в силу симметрии ЯП графики напряжений в направлениях OX и OZ совпадают.

1.8.3 Чистый сдвиг в плоскости плетения

Была также решена задача о чистом сдвиге с осреднённым тензором градиента деформаций равным:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{E} + a_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3,$$

где $a_{13} = \operatorname{tg} \theta$ – параметр сдвига, а угол θ – угол сдвига.

Результирующие поля, а также диаграммы деформирования представлены на рисунках (рис 1.26-1.35).

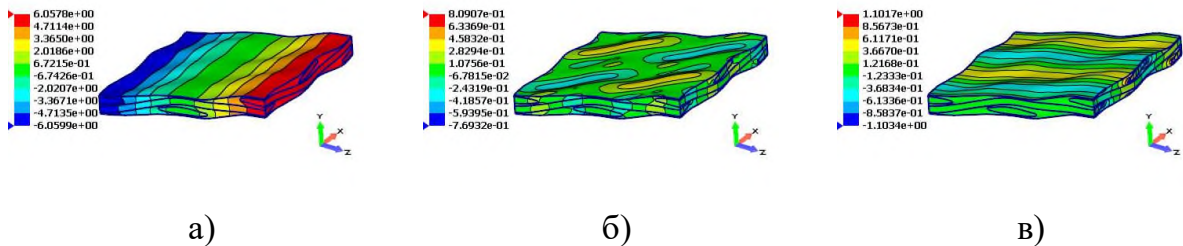


Рисунок 1.26. – Поле перемещений на деформированной ЯП КМ1 при сдвиге в плоскости XZ с параметром сдвига $a_{13} = 0.5$ ($\theta \approx 26.565^\circ$):

а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .

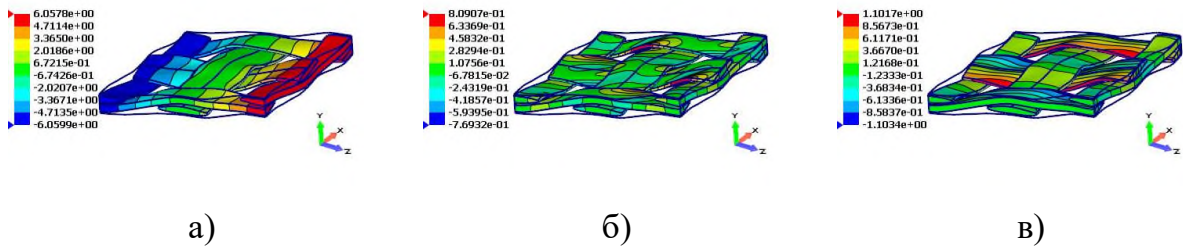


Рисунок 1.27. – Поле перемещений на нитях деформированной ЯП КМ1 при сдвиге в плоскости XZ с параметром сдвига $a_{13} = 0.5$ ($\theta \approx 26.565^\circ$):

а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .

Можно заметить, что при сдвиге геометрия ЯП искажается довольно сильно. Можно увидеть подъем и нити, и матрицы в пространстве рядом с нитью, вызванное «наездом» нитей одного направления на неровности нити другого направления (основа и уток).

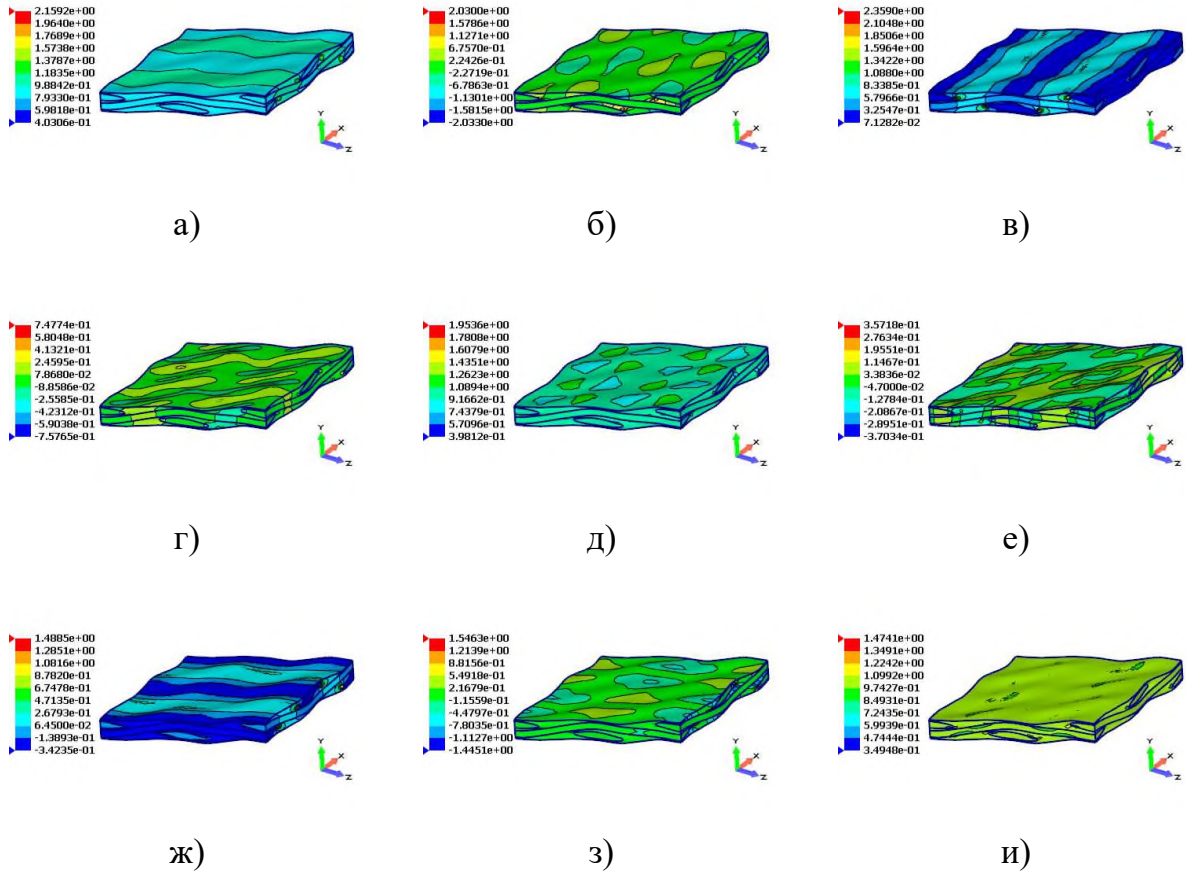
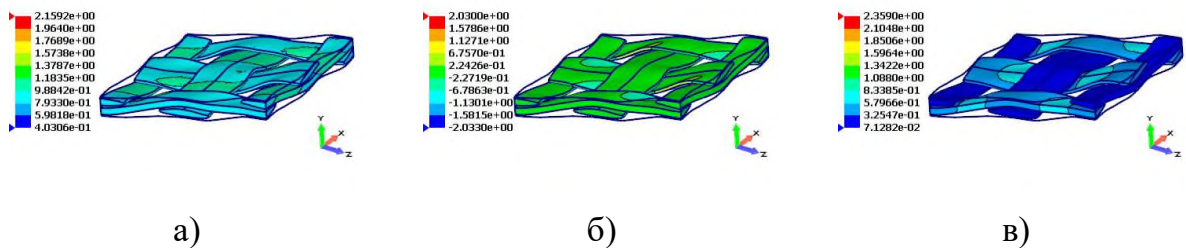


Рисунок 1.28. – Поле градиента деформаций на деформированной ЯП КМ1 при сдвиге в плоскости XZ с параметром сдвига $a_{13} = 0.5$ ($\theta \approx 26.565^\circ$):

- а) компонента F_{11} ; б) компонента F_{12} ; в) компонента F_{13} ;
 г) компонента F_{21} ; д) компонента F_{22} ; е) компонента F_{23} ;
 ж) компонента F_{31} ; з) компонента F_{32} ; и) компонента F_{33} ;



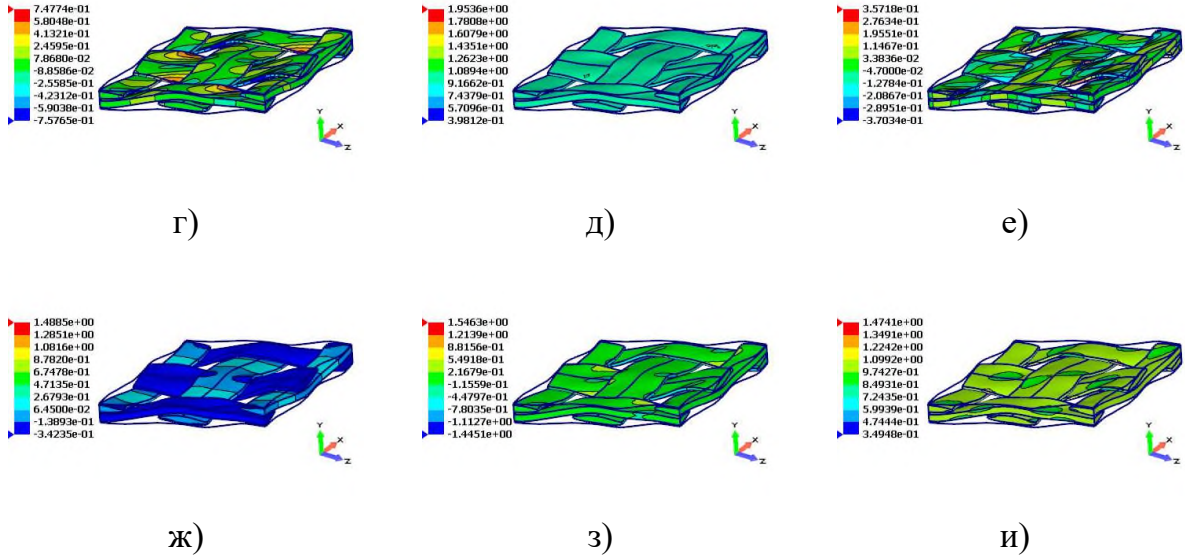
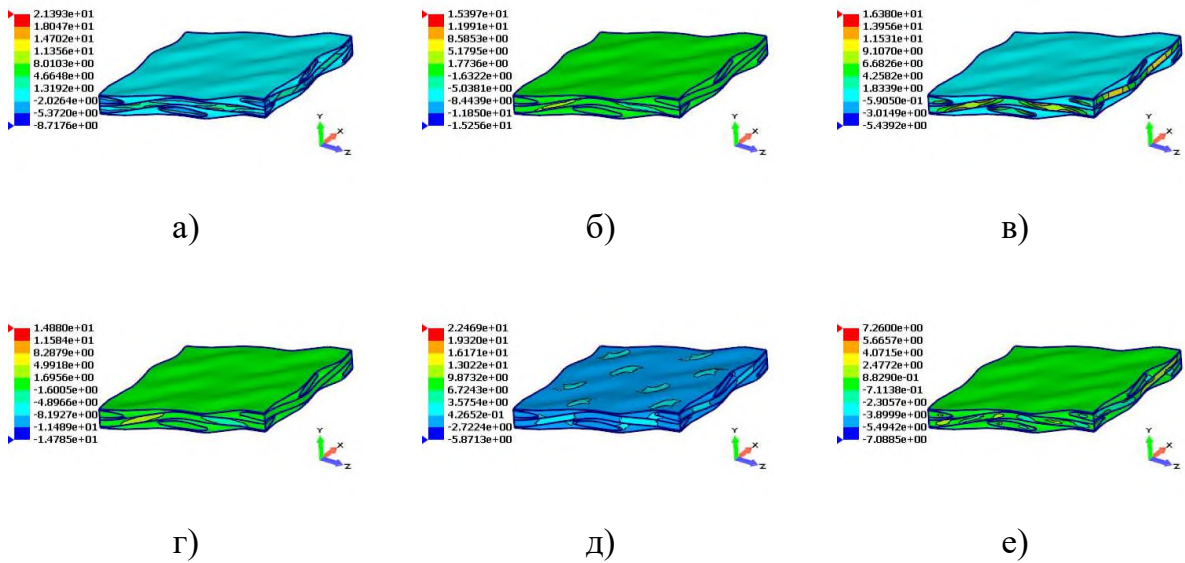
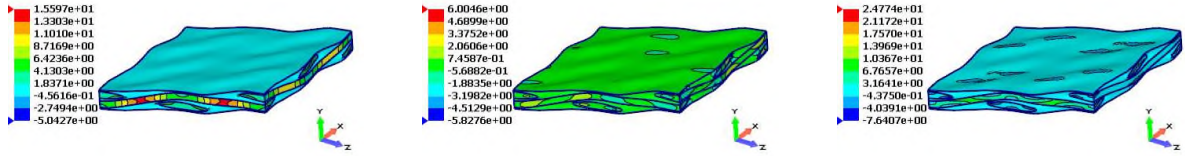


Рисунок 1.29. – Поле градиента деформаций на нитях деформированной ЯП КМ1 при сдвиге в плоскости XZ с параметром сдвига $a_{13} = 0.5$ ($\theta \approx 26.565^\circ$):

- а) компонента F_{11} ; б) компонента F_{12} ; в) компонента F_{13} ;
 г) компонента F_{21} ; д) компонента F_{22} ; е) компонента F_{23} ;
 ж) компонента F_{31} ; з) компонента F_{32} ; и) компонента F_{33} ;

Из рисунков видно, что деформации концентрируются в матрице и в боковых частях нитей, которые находятся вблизи нитей другого направления.





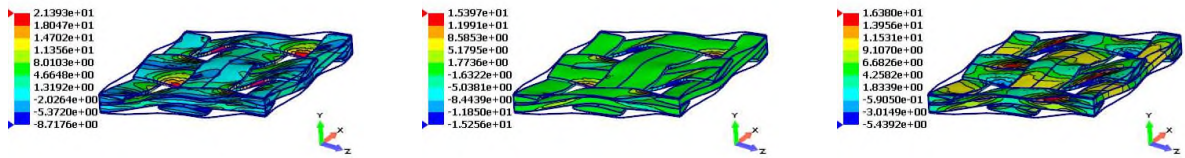
ж)

з)

и)

Рисунок 1.30. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на деформированной ЯП КМ1

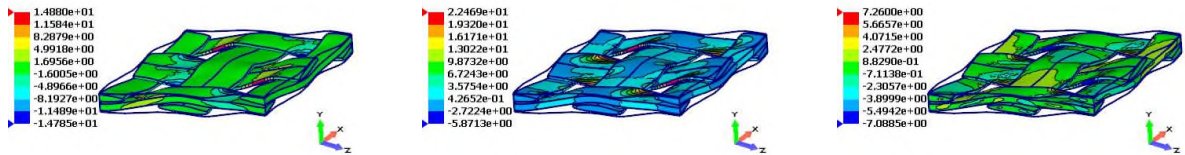
при сдвиге в плоскости XZ с параметром сдвига $a_{13} = 0.5$ ($\theta \approx 26.565^\circ$):
 а) компонента P_{11} (ГПа); б) компонента P_{12} (ГПа); в) компонента P_{13} (ГПа);
 г) компонента P_{21} (ГПа); д) компонента P_{22} (ГПа); е) компонента P_{23} (ГПа);
 ж) компонента P_{31} (ГПа); з) компонента P_{32} (ГПа); и) компонента P_{33} (ГПа);



а)

б)

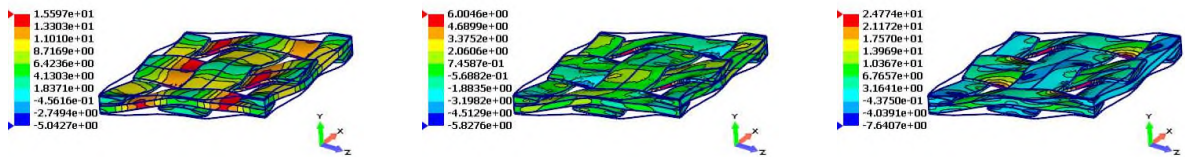
в)



г)

д)

е)



ж)

з)

и)

Рисунок 1.31. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на нитях деформированной ЯП КМ1

при сдвиге в плоскости XZ с параметром сдвига $a_{13} = 0.5$ ($\theta \approx 26.565^\circ$):
 а) компонента P_{11} (ГПа); б) компонента P_{12} (ГПа); в) компонента P_{13} (ГПа);
 г) компонента P_{21} (ГПа); д) компонента P_{22} (ГПа); е) компонента P_{23} (ГПа);
 ж) компонента P_{31} (ГПа); з) компонента P_{32} (ГПа); и) компонента P_{33} (ГПа);

Напряжения концентрируются вблизи поверхностей раздела сред и достигают наибольших значений в волокнах.

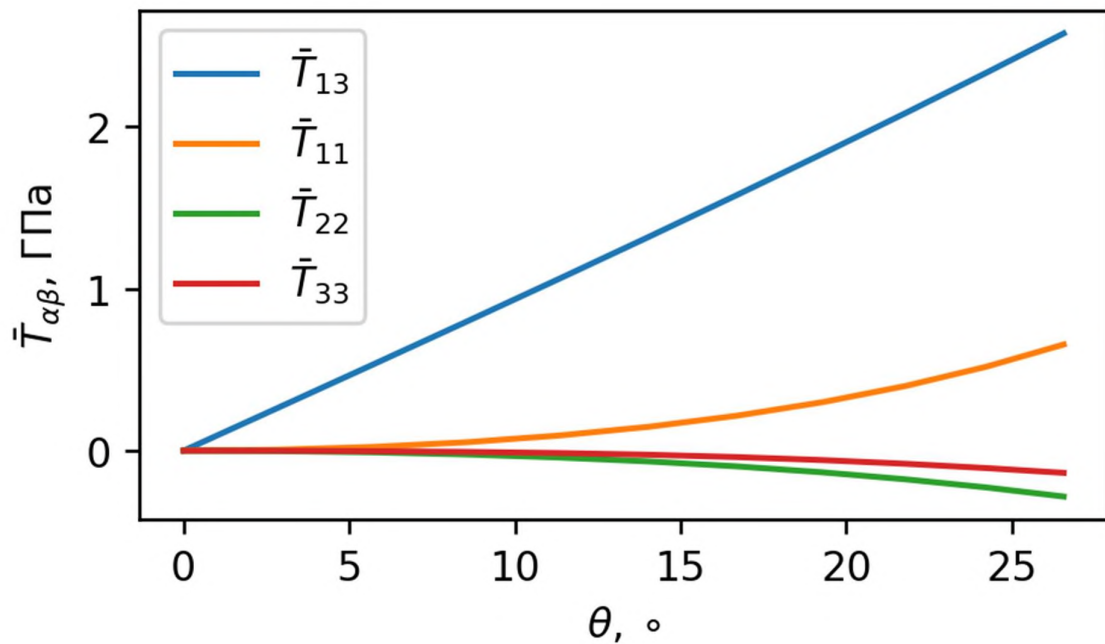


Рисунок 1.32. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Коши при сдвиге в плоскости XZ с параметром сдвига $0 \leq a_{13} \leq 0.5$ ($0^\circ < \theta < 26.565^\circ$)

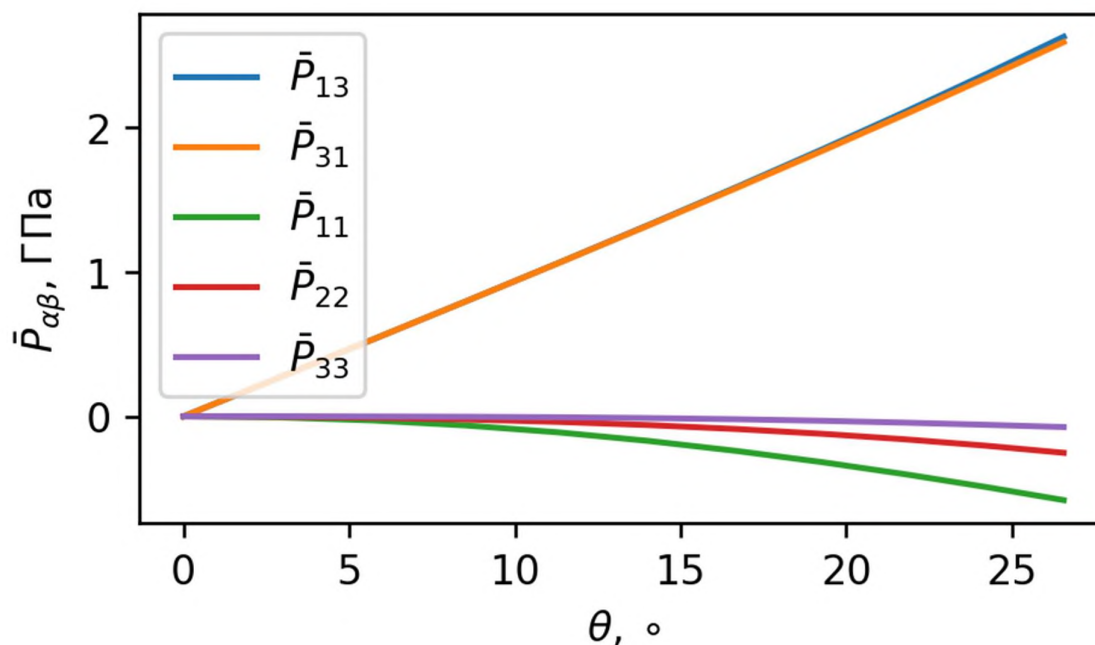


Рисунок 1.33. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Пiola-Кирхгофа при сдвиге в плоскости XZ с параметром сдвига $0 \leq a_{13} \leq 0.5$ ($0^\circ < \theta < 26.565^\circ$)

1.8.4 Сдвиг в поперечной плоскости

Была также решена задача о чистом сдвиге с осреднённым тензором градиента деформаций равным:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{E} + a_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2,$$

где $a_{13} = \operatorname{tg} \theta$ – параметр сдвига, а угол θ – угол сдвига.

Результирующие поля, а также диаграммы деформирования представлены на рисунках (рис 1.34-1.42).

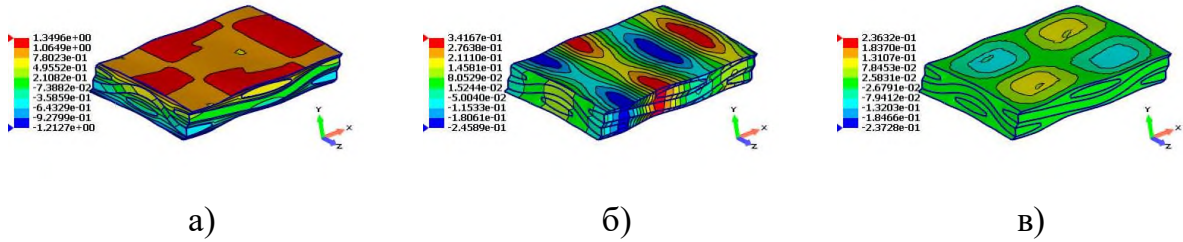


Рисунок 1.34. – Поле перемещений на деформированной ЯП КМ1 при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $a_{12} = 0.6$ ($\theta \approx 30.964^\circ$):

а) Компонента u_1 ; б) Компонента u_2 ; в) Компонента u_3 .

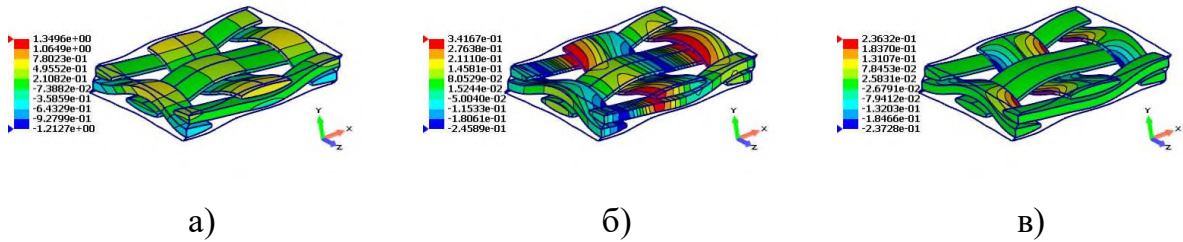
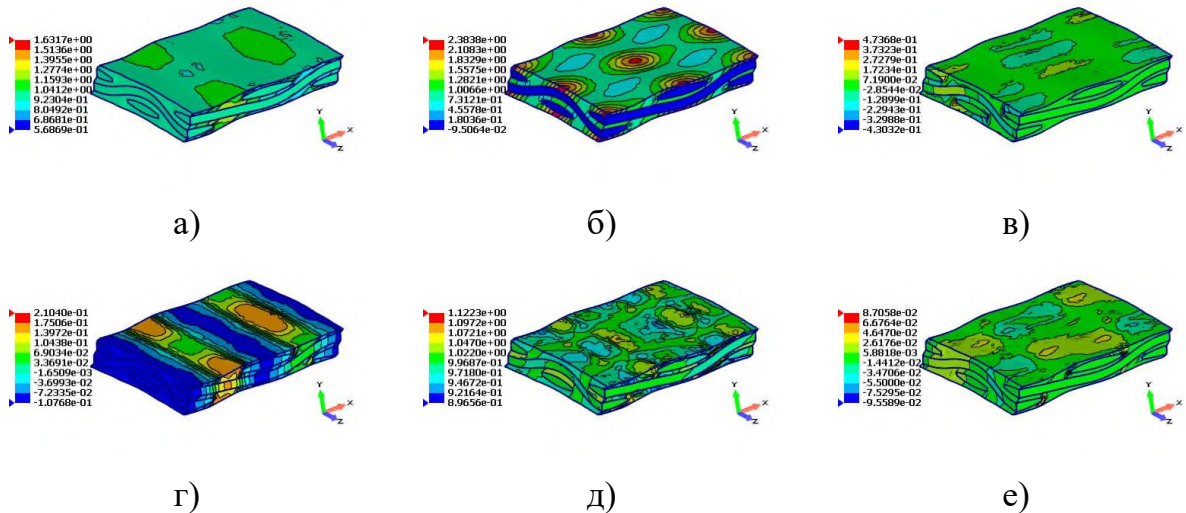


Рисунок 1.35. – Поле перемещений на нитях деформированной ЯП КМ1 при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $a_{12} = 0.6$ ($\theta \approx 30.964^\circ$):

а) Компонента u_1 ; б) Компонента u_2 ; в) Компонента u_3 .

Из рисунков видно, как нити, уложенные в плоскости сдвига, приобретают несимметричную форму, а нити, расположенные перпендикулярно плоскости сдвига, поворачиваются в матрице вслед за сдвигом ЯП.



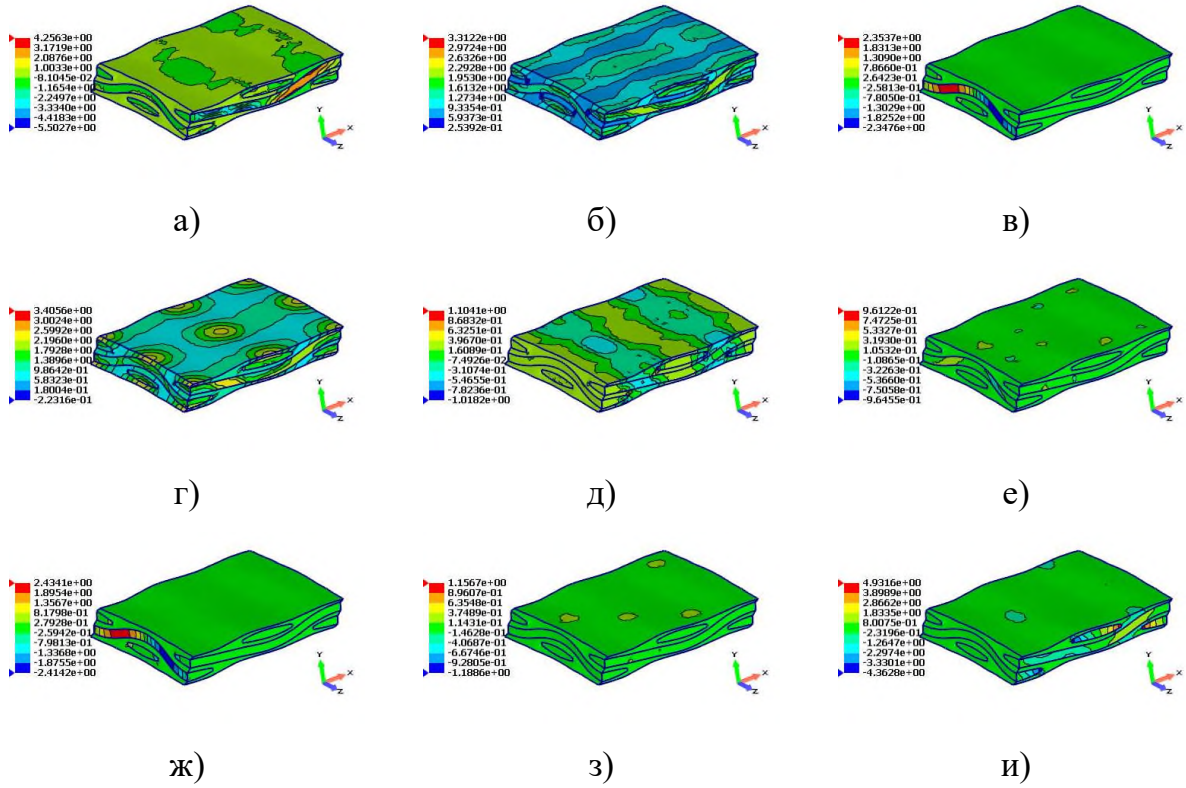
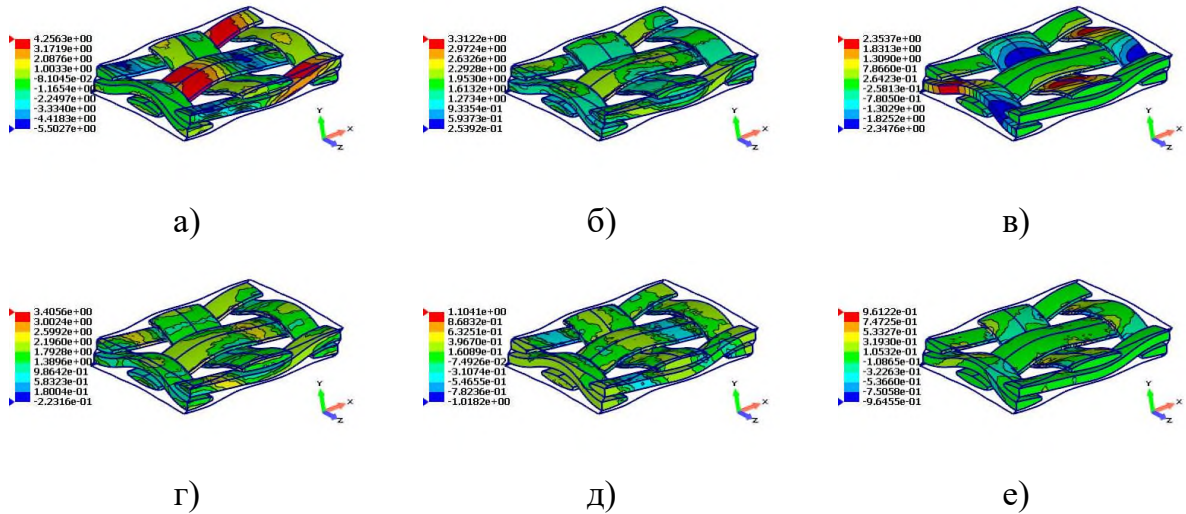
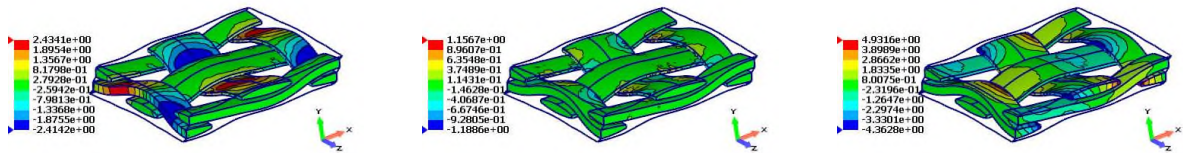


Рисунок 1.38. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на деформированной ЯП КМ1

при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $a_{12} = 0.6$ ($\theta \approx 30.964^\circ$):

- а) Компонента P_{11} (ГПа); б) Компонента P_{12} (ГПа); в) Компонента P_{13} (ГПа);
 г) Компонента P_{21} (ГПа); д) Компонента P_{22} (ГПа); е) Компонента P_{23} (ГПа);
 ж) Компонента P_{31} (ГПа); з) Компонента P_{32} (ГПа); и) Компонента P_{33} (ГПа);





ж)

з)

и)

Рисунок 1.39. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на нитях деформированной ЯП КМ1

при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $a_{12} = 0.6$ ($\theta \approx 30.964^\circ$):

- а) Компонента F_{11} ; б) Компонента F_{12} ; в) Компонента F_{13} ;
 г) Компонента F_{21} ; д) Компонента F_{22} ; е) Компонента F_{23} ;
 ж) Компонента F_{31} ; з) Компонента F_{32} ; и) Компонента F_{33} ;

Напряжения концентрируются в основном в нитях, достигая наибольших значений в областях перегиба этих нитей.

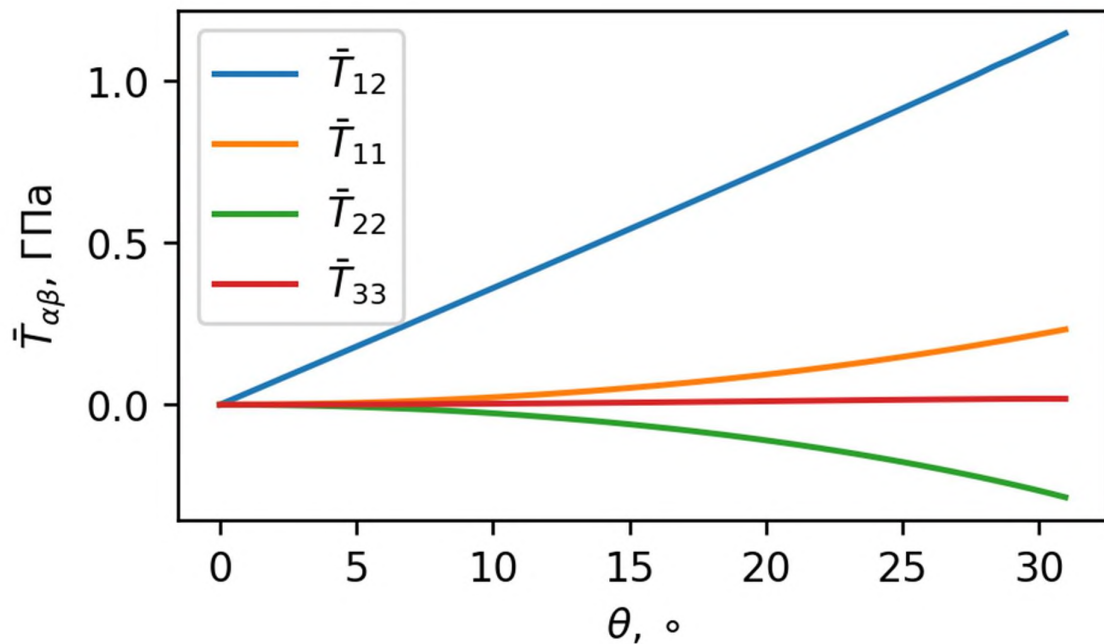


Рисунок 1.40. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Коши при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $0 \leq a_{12} \leq 0.6$ ($0^\circ < \theta < 31.964^\circ$)

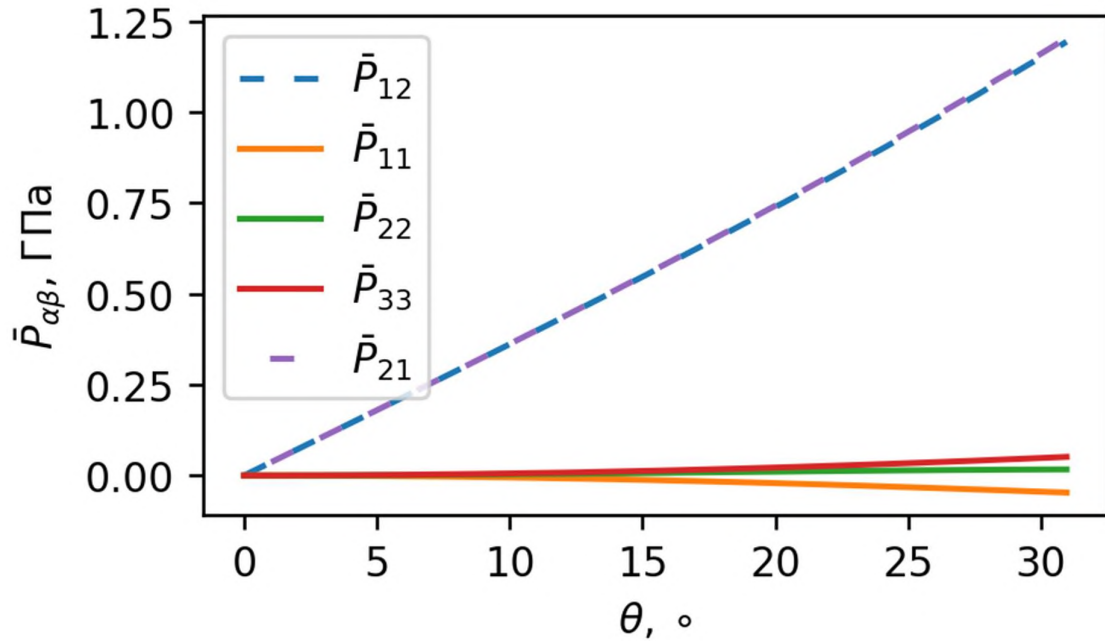


Рисунок 1.41. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $0 \leq a_{12} \leq 0.6$ ($0^\circ < \theta < 31.964^\circ$)

Из графиков видно, что осреднённые нормальные напряжения $\bar{P}_{22}, \bar{T}_{33}$, при чистом сдвиге остаются нулевыми.

1.8.5 Одноосное растяжение дисперсно-армированного композита

Рассмотрим задачу одноосного растяжения КМ1 вдоль оси OX с осреднённым тензором градиента деформаций

$$\bar{\mathbf{F}} = k_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (1.130)$$

В результате решения этой задачи были получены следующие поля: перемещений, градиента деформаций, тензора напряжений Коши и тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа.

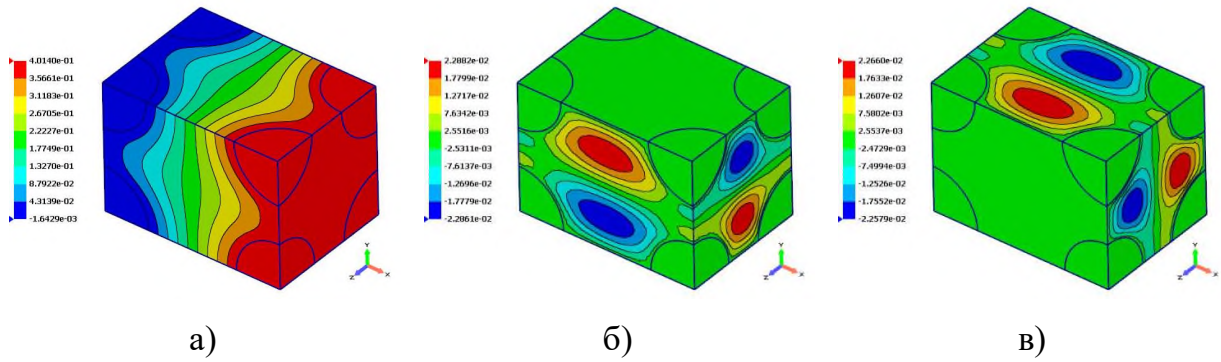


Рисунок 1.42. – Поле перемещений на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении с удлинением 40%:

а) Компонента u_1 ; б) Компонента u_2 ; в) Компонента u_3 .

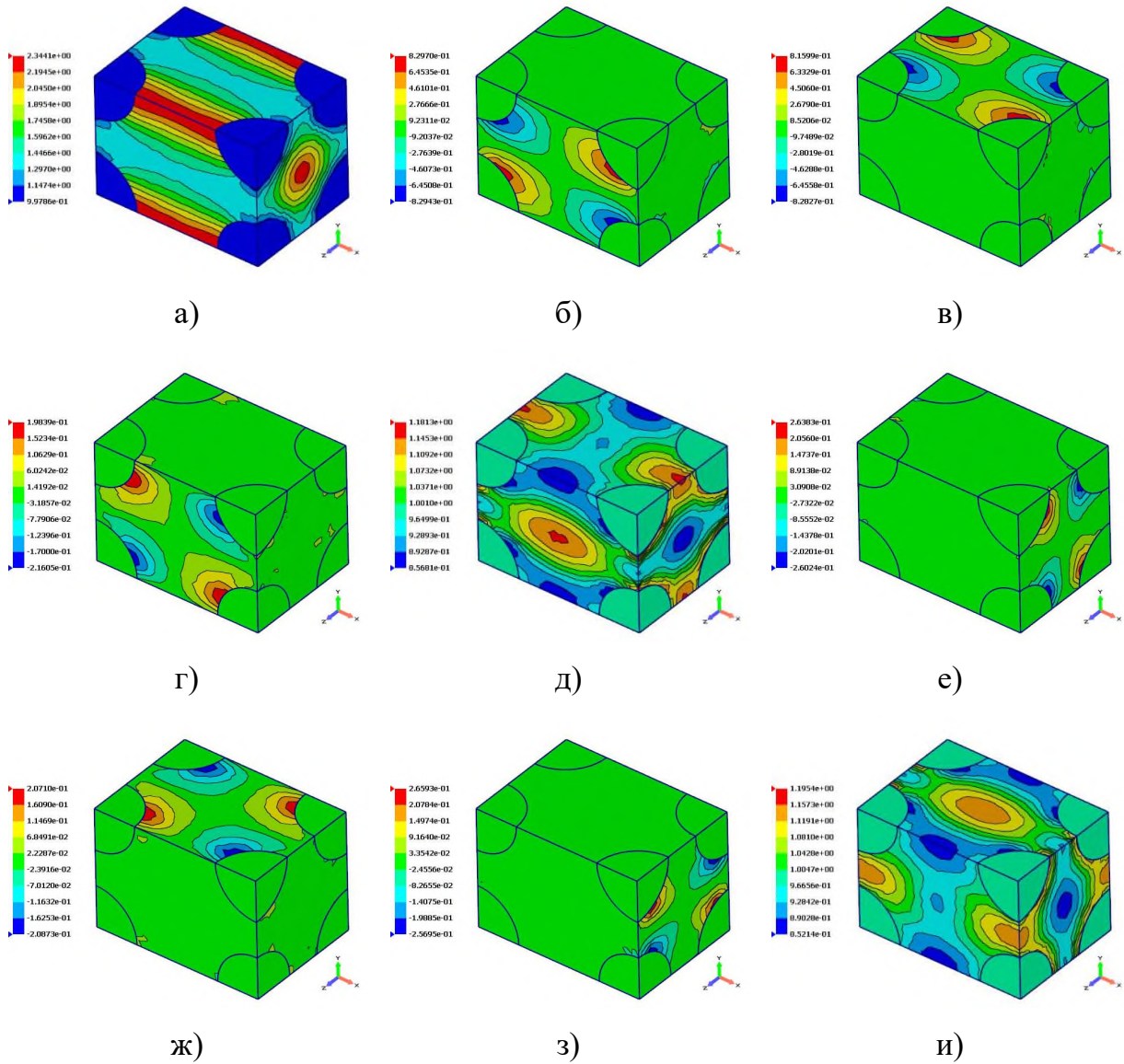


Рисунок 1.43. – Поле градиента деформаций на деформированной ЯП КМ1 при одноосном растяжении с удлинением 40%

- а) Компонента F_{11} ; б) Компонента F_{12} ; в) Компонента F_{13} ;
 г) Компонента F_{21} ; д) Компонента F_{22} ; е) Компонента F_{23} ;
 ж) Компонента F_{31} ; з) Компонента F_{32} ; и) Компонента F_{33} ;

Из рисунков видно, что наибольшей величины деформации достигают в матрице в пространстве между частицами.

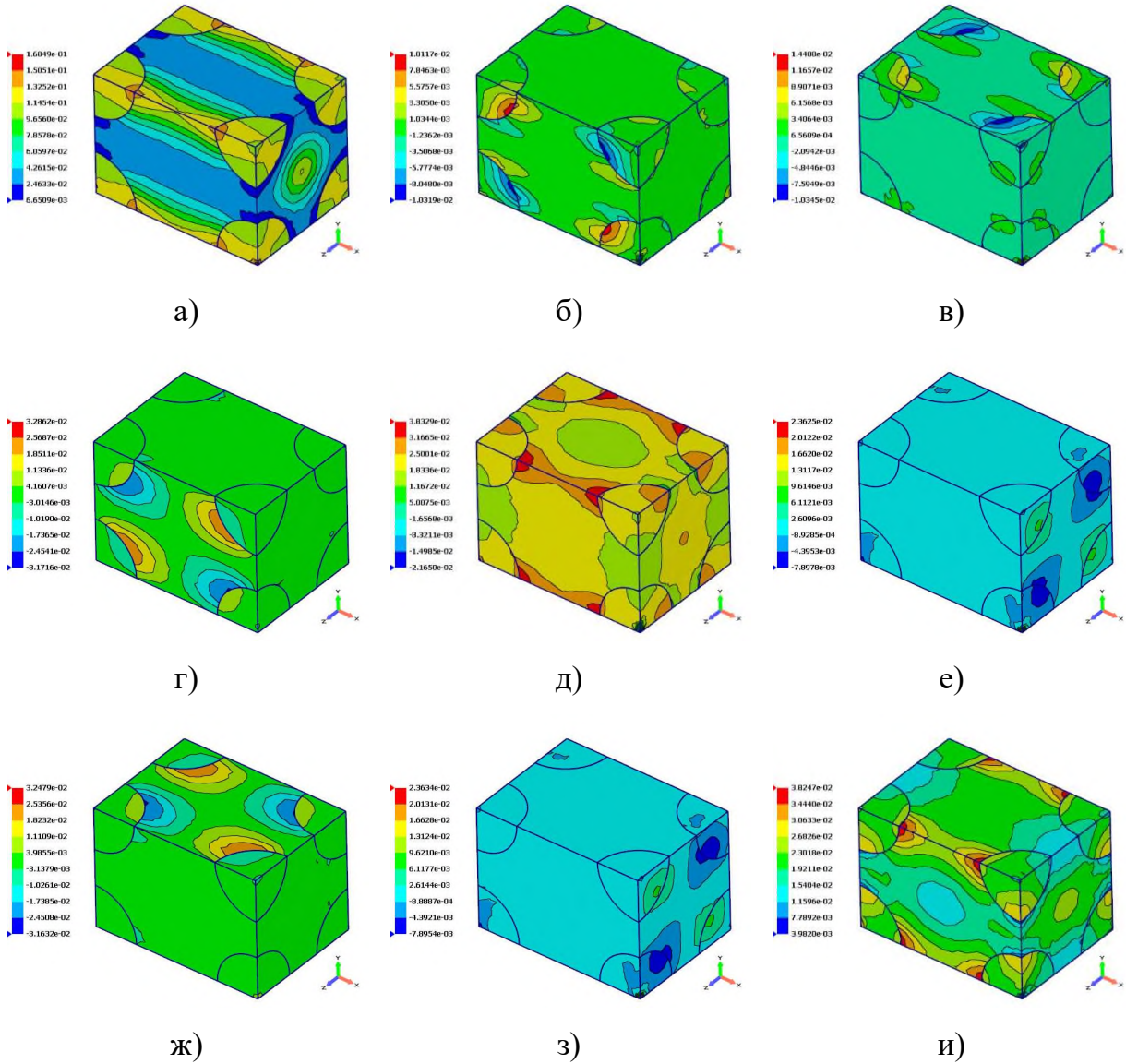


Рисунок 1.44. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа на деформированной ЯП КМ1

при одноосном растяжении с удлинением 40%:

- а) Компонента P_{11} (ГПа); б) Компонента P_{12} (ГПа); в) Компонента P_{13} (ГПа);
 г) Компонента P_{21} (ГПа); д) Компонента P_{22} (ГПа); е) Компонента P_{23} (ГПа);
 ж) Компонента P_{31} (ГПа); з) Компонента P_{32} (ГПа); и) Компонента P_{33} (ГПа);

Напряжения концентрируются в основном на поверхностях контакта, частиц с матрицей.

Осредняя поля напряжений в разные моменты времени (при разных значениях растяжения), получим диаграммы деформирования (рис 1.45, 1.46).

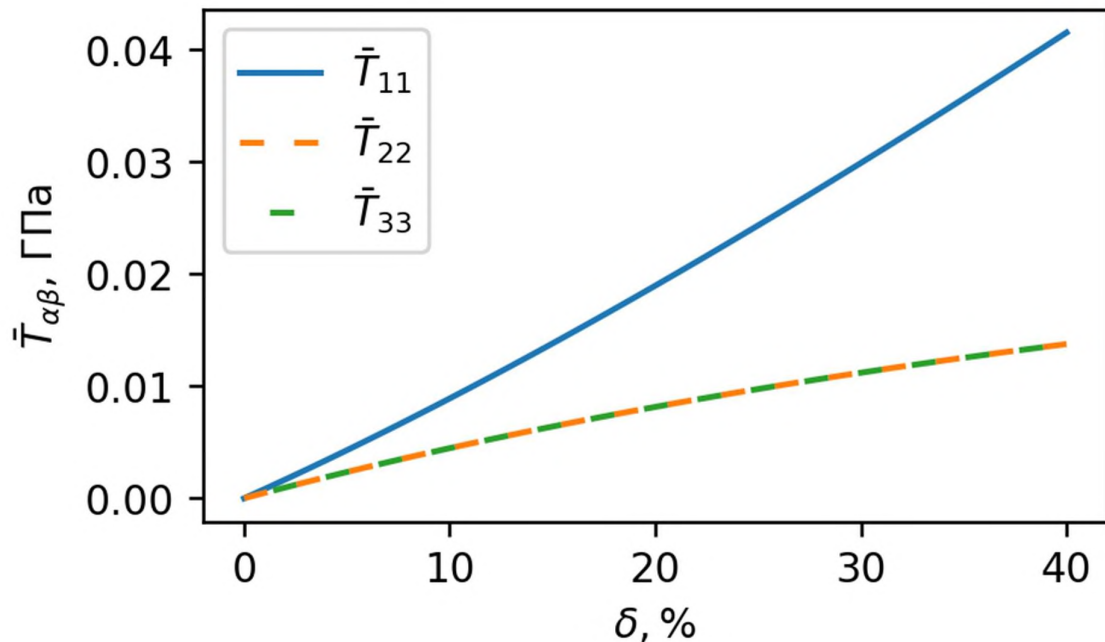


Рисунок 1.45. – Графики деформирования КМ2, значение нормальных компонент тензора напряжений Коши при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$)

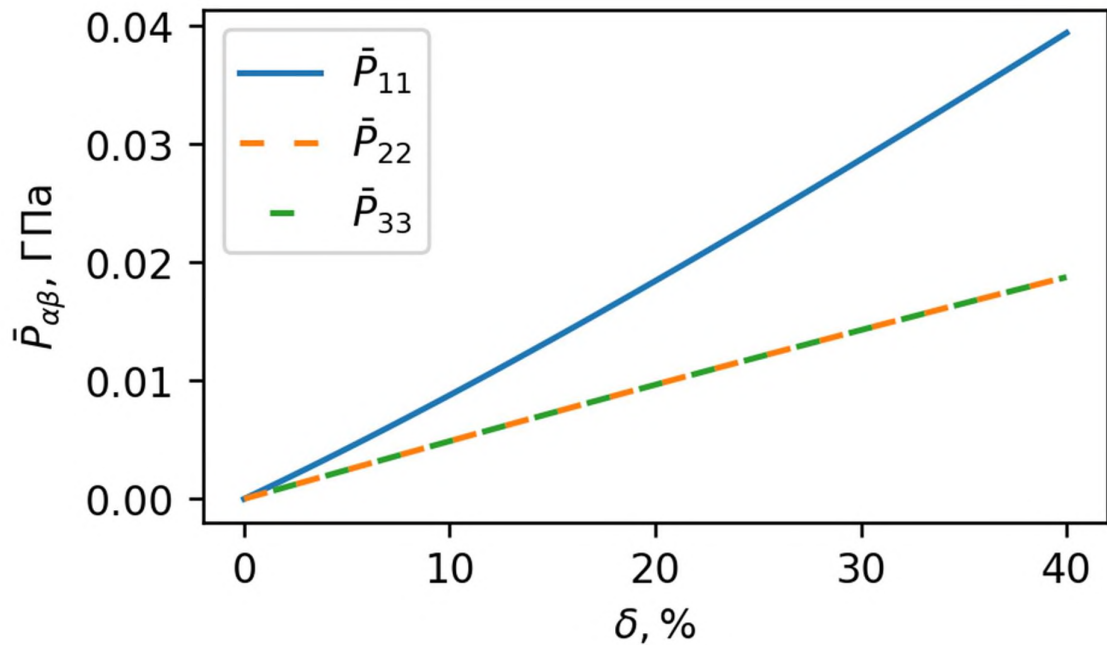


Рисунок 1.46. – Графики деформирования КМ2, значение нормальных компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$)

Можно заметить, что в силу симметрии ЯП графики напряжений в направлениях OX и OZ совпадают.

1.8.6 Чистый сдвиг дисперсно-армированного композита

Для КМ2 решим также задачу о чистом сдвиге. с осреднённым тензором градиента деформаций равным:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{E} + a_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2,$$

где $a_{12} = \operatorname{tg} \theta$ – параметр сдвига, а угол θ – угол сдвига.

Результирующие поля представлены на рисунках 1.47–1.49, а диаграммы деформирования – на рисунках 1.50 и 1.51.

Рисунок 1.48. – Поле градиента деформаций на деформированной ЯП КМ1 при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $a_{12} = 0.5$ ($\theta \approx 26.5^\circ$):

- а) Компонента F_{11} ; б) Компонента F_{12} ; в) Компонента F_{13} ;
 г) Компонента F_{21} ; д) Компонента F_{22} ; е) Компонента F_{23} ;
 ж) Компонента F_{31} ; з) Компонента F_{32} ; и) Компонента F_{33} ;

Наибольшие значения мы наблюдаем для компонент F_{12}, F_{21} , которые соответствуют плоскости сдвига. Деформации концентрируются в основном между частицами в матрице.

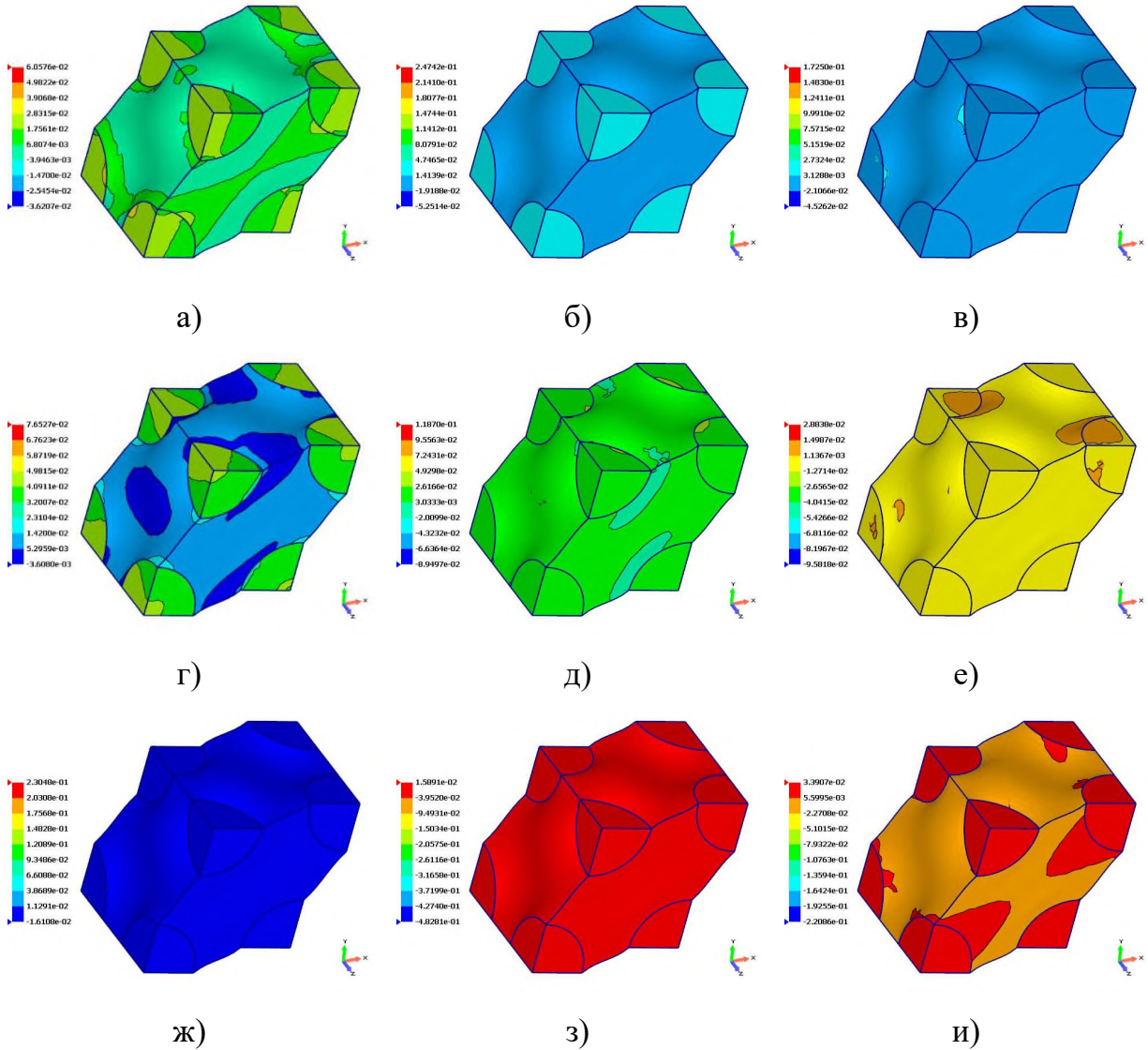


Рисунок 1.49. – Поле тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа
на деформированной ЯП КМ1

при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $a_{12} = 0.5$ ($\theta \approx 26.5^\circ$):

- а) Компонента P_{11} (ГПа); б) Компонента P_{12} (ГПа); в) Компонента P_{13} (ГПа);
 г) Компонента P_{21} (ГПа); д) Компонента P_{22} (ГПа); е) Компонента P_{23} (ГПа);
 ж) Компонента P_{31} (ГПа); з) Компонента P_{32} (ГПа); и) Компонента P_{33} (ГПа);

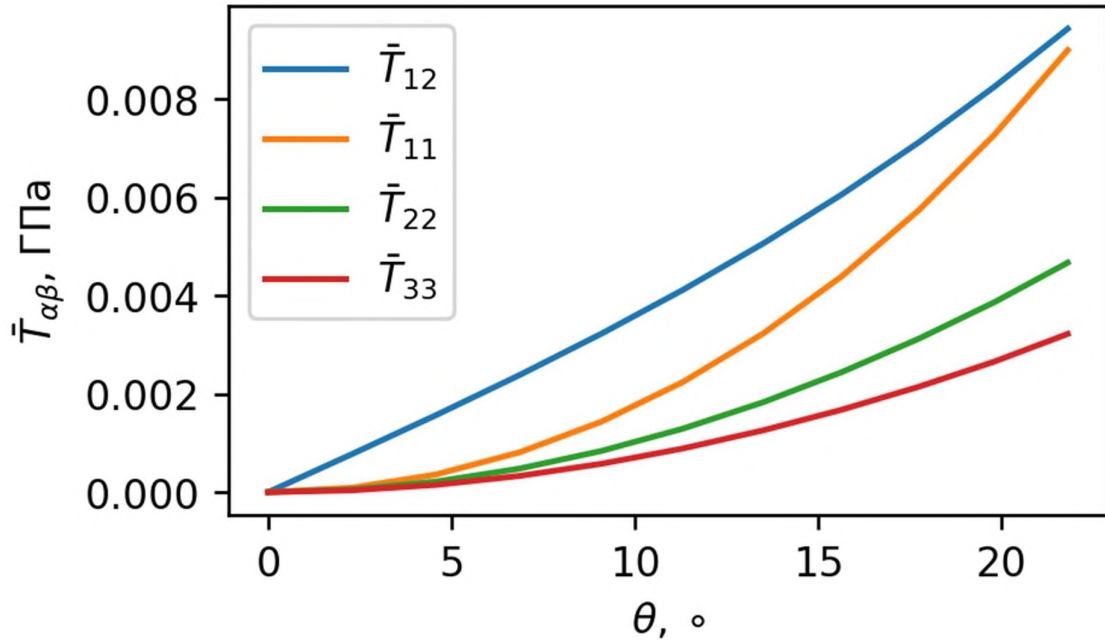


Рисунок 1.50. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент
тензора напряжений Коши
при сдвиге в плоскости XU с параметром сдвига $0 \leq a_{12} \leq 0.5$ ($0^\circ < \theta < 26.5^\circ$)

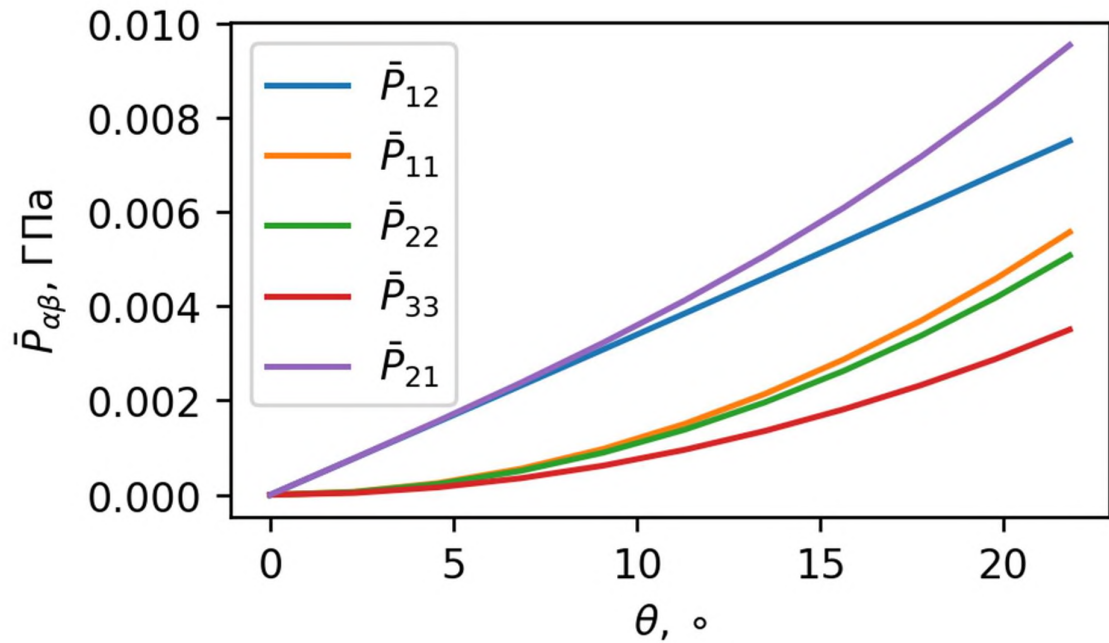


Рисунок 1.51. – Графики деформирования КМ1, значение нормальных компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа при сдвиге в плоскости $X\bar{Y}$ с параметром сдвига $0 \leq a_{12} \leq 0.5$ ($0^\circ < \theta < 26.5^\circ$)

Таким образом, был решён ряд локальных задач на ЯП композиционных материалов КМ1 и КМ2, получены распределения напряжений и деформаций. После осреднения полей напряжения, получены зависимости различных компонент тензоров напряжений Пиолы–Кирхгофа и Коши от параметров деформирования: относительного удлинения для одноосных растяжений и от угла сдвига для простого сдвига.

Глава 2. Методика построения аналитических эффективных определяющих соотношений для нелинейно-упругих сред с периодической структурой

В задаче (1.68)-(1.72) осреднённые определяющие соотношения задаются неявным образом и могут быть посчитаны только посредством решения локальных задач и осреднения результирующих напряжений. В настоящей главе предложен метод аппроксимации осреднённых определяющих соотношений посредством моделей, в которых напряжения могут быть вычислены аналитически по заданному тензору градиента деформаций.

$$\bar{P}^{ij} = \bar{P}_{\text{Аппрокс}}^{ij}(\bar{F}_k^l). \quad (2.1)$$

2.1 Изотропные полулинейные упругие среды \mathcal{A}_n

Рассмотрим в качестве первого варианта модели осреднённой среды полулинейную изотропную модель \mathcal{A}_n упругой среды, рассмотренную ранее в разделе 1.7. Только теперь определяющие соотношения выражают связь осреднённых напряжений (например, тензора Пиолы–Кирхгофа $\bar{\mathbf{P}}$) неоднородной среды с осреднённым тензором градиента деформаций $\bar{\mathbf{F}}$.

Повторяя вывод раздела 1.7 получим средний энергетический тензор напряжений:

$$\bar{\mathbf{T}}^{(n)} = \bar{J} \left(l_1 I_1(\bar{\mathbf{C}}) \mathbf{E} + 2l_2 \bar{\mathbf{C}} \right) \quad (2.2)$$

\bar{J} – изменение средней плотности:

$$\bar{J} = (\det \bar{\mathbf{F}})^{-1} = \bar{\rho} / \overset{\circ}{\rho}. \quad (2.3)$$

$\overset{(n)}{\bar{\mathbf{C}}}$ – средний тензор энергетических деформаций:

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{\bar{\mathbf{C}}} &= \frac{1}{n-3} (\bar{\mathbf{U}}^{n-3} - \mathbf{E}), \quad n \neq III \\ \frac{d}{dt} \overset{(n)}{\bar{\mathbf{C}}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{U}} \cdot \bar{\mathbf{U}}^{-1} + \bar{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{U}} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$I_1(\overset{(n)}{\bar{\mathbf{C}}})$ – первый инвариант тензора энергетических деформаций.

$\bar{\mathbf{U}}$ – правый тензор искажений, задаваемый неявно формулой

$$\bar{\mathbf{U}}^2 = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}. \quad (2.5)$$

Используя сингулярное разложение:

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha}, \quad (2.6)$$

можем записать определяющие соотношения в явном аналитическом виде.

Можно записать $\overset{(n)}{\bar{\mathbf{C}}}$ в виде:

$$\overset{(n)}{\bar{\mathbf{C}}} = \sum_{\alpha=1}^3 c_{\alpha} \overset{(n)}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha}, \quad (2.7)$$

где диагональные компоненты $c_{\alpha}^{(n)}$ равны

$$c_{\alpha}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n-3} (\lambda_{\alpha}^{n-3} - 1), & n \neq 3 \\ \ln \lambda_{\alpha}, & n = 3 \end{cases} \quad (2.8)$$

Значение первого инварианта тогда будет равно

$$I_1(\bar{\mathbf{C}}) = \sum_{\alpha=1}^3 c_{\alpha}^{(n)} \quad (2.9)$$

$$I_1(\bar{\mathbf{C}}) = \frac{1}{n-3} \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha}^{n-3} - 1), \quad n \neq 3 \quad (2.10)$$

$$I_1(\bar{\mathbf{C}}) = \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3 = \ln \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\ln \bar{J}. \quad (2.11)$$

К тензору \mathbf{T} можно перейти воспользовавшись тензором энергетической эквивалентности (1.116), вычисленным по среднему градиенту деформаций. Тензор напряжений Коши можно выразить при помощи следующей формулы:

$$\bar{\mathbf{T}} = {}^4\mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 E_{\alpha\beta}^{(n)} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\beta} \otimes \mathbf{p}_{\beta} \otimes \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 E_{\alpha\beta}^{(n)} \bar{T}_{\alpha\beta}^{(p^{\circ})} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\beta} \quad (2.12)$$

где $\bar{T}_{\alpha\beta}^{(p^{\circ})}$ – это компоненты осреднённого тензора энергетических напряжений в базисе \mathbf{p}_{α} , причём, отличны от нуля только диагональные:

$$\bar{T}_{\alpha\alpha}^{(p^{\circ})} = \bar{J} \left(l_1 I_1 + 2l_2 c_{\alpha}^{(n)} \right) \quad (2.13)$$

Осреднённый тензор напряжений Коши тогда будет вычисляться по формуле

$$\bar{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^3 E_{\alpha\alpha}^{(n)} \bar{T}_{\alpha\alpha}^{(p^{\circ})} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\alpha}. \quad (2.14)$$

или в компонентном виде

$$\bar{T}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 E_{\alpha\alpha}^{(n)} \bar{T}_{\alpha\alpha}^{(p^{\circ})} p_{\alpha i} p_{\alpha j}, \quad (2.15)$$

а осреднённый тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа

$$\bar{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\lambda_{\alpha}^{(n)}} \frac{\bar{T}_{\alpha\beta}^{(p^{\circ})}}{\bar{J}} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\beta}, \quad (2.16)$$

либо в компонентном виде

$$\bar{P}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{E_{\alpha\alpha}^{(n)}}{\lambda_{\alpha}} \frac{T_{\alpha\alpha}^{(n)}(p^{\circ})}{\bar{J}} p_{\alpha i} p_{\beta j} \quad (2.17)$$

Таким образом, мы описали способ вычисления определяющих соотношений осреднённого изотропного упругого полулинейного материала модели \mathcal{A}_n по заданному среднему тензору градиента деформаций $\bar{\mathbf{F}}$ и его разложению.

2.2 Ортоотропные полулинейные упругие среды \mathcal{A}_n

Рассмотрим полулинейную ортоотропную модель \mathcal{A}_n упругой среды. Определяющие соотношения для такой модели задаются в виде связи между тензором энергетических напряжений и тензором энергетических деформаций и имеют вид [20]:

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{J} \left(\sum_{\gamma, \beta=1}^3 l_{\gamma\beta} I_{\beta}^{(O)} \left(\bar{\mathbf{C}} \right) \hat{\mathbf{c}}_{\gamma} \otimes \hat{\mathbf{c}}_{\gamma} + \sum_{\gamma=1}^3 l_{3+\gamma, 3+\gamma} \mathbf{O}_{\gamma} \left(\mathbf{O}_{\gamma} \cdot \bar{\mathbf{C}} \right) \right). \quad (2.18)$$

В этой формуле для КМ введены следующие обозначения:
 эффективные упругие константы $l_{11}, l_{22}, l_{33}, l_{12}, l_{13}, l_{23}, l_{44}, l_{55}, l_{66}$,
 тензорный базис

$$\mathbf{O}_{\gamma} = \hat{\mathbf{c}}_{\alpha} \otimes \hat{\mathbf{c}}_{\beta} + \hat{\mathbf{c}}_{\beta} \otimes \hat{\mathbf{c}}_{\alpha}, \quad (2.19)$$

где $\hat{\mathbf{c}}_{\alpha}$ – главный базис анизотропии, в котором соотношение (2.18) инвариантно относительно преобразований группы ортоотропии,

$I_{\beta}^{(O)}$ – инварианты тензора $\bar{\mathbf{C}}$ относительно группы ортоотропии.

Формулы (2.3)–(2.12), полученные в разделе с изотропными средами, остаются справедливыми и для ортоотропных.

В целях упрощения выражений, будем считать, что базис \hat{e}_α совпадает с базисом e_α . Тогда формулу для компонент тензора энергетических напряжений можем записать в явном компонентном виде:

$$\bar{T}_{\alpha\alpha}^{(n)} = J \sum_{\beta=1}^3 l_{\alpha\beta} \bar{C}_{\beta\beta}^{(n)}, \quad \bar{T}_{\alpha\beta}^{(n)} = 2J l_{3+\gamma, 3+\gamma} \bar{C}_{\alpha\beta}^{(n)}. \quad (2.20)$$

Либо ещё более явно:

$$\bar{T}_{11}^{(n)} = \bar{J} (l_{11} \bar{C}_{11}^{(n)} + l_{12} \bar{C}_{22}^{(n)} + l_{13} \bar{C}_{33}^{(n)}), \quad (2.21)$$

$$\bar{T}_{22}^{(n)} = \bar{J} (l_{12} \bar{C}_{11}^{(n)} + l_{22} \bar{C}_{22}^{(n)} + l_{23} \bar{C}_{33}^{(n)}), \quad (2.22)$$

$$\bar{T}_{33}^{(n)} = \bar{J} (l_{13} \bar{C}_{11}^{(n)} + l_{23} \bar{C}_{22}^{(n)} + l_{33} \bar{C}_{33}^{(n)}), \quad (2.23)$$

$$\bar{T}_{23}^{(n)} = 2\bar{J} l_{44} \bar{C}_{23}^{(n)}, \quad (2.24)$$

$$\bar{T}_{13}^{(n)} = 2\bar{J} l_{55} \bar{C}_{13}^{(n)}, \quad (2.25)$$

$$\bar{T}_{12}^{(n)} = 2\bar{J} l_{66} \bar{C}_{12}^{(n)}. \quad (2.26)$$

Тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа тогда может быть вычислен по формулам аналогичным (2.16), (2.17). При этом компоненты $\bar{T}_{\alpha\beta}^{(p^2)}/J$ могут быть посчитаны напрямую (без деления):

$$\bar{T}_{11}^{(n)}/\bar{J} = l_{11} \bar{C}_{11}^{(n)} + l_{12} \bar{C}_{22}^{(n)} + l_{13} \bar{C}_{33}^{(n)}, \quad (2.27)$$

$$\bar{T}_{22}^{(n)}/\bar{J} = l_{12} \bar{C}_{11}^{(n)} + l_{22} \bar{C}_{22}^{(n)} + l_{23} \bar{C}_{33}^{(n)}, \quad (2.28)$$

$$\bar{T}_{33}^{(n)}/\bar{J} = l_{13} \bar{C}_{11}^{(n)} + l_{23} \bar{C}_{22}^{(n)} + l_{33} \bar{C}_{33}^{(n)}, \quad (2.29)$$

$$\bar{T}_{23}^{(n)}/\bar{J} = 2l_{44} \bar{C}_{23}^{(n)}, \quad (2.30)$$

$$\bar{T}_{13}^{(n)}/\bar{J} = 2l_{55} \bar{C}_{13}^{(n)}, \quad (2.31)$$

$$\frac{{}^{(n)}T_{12}}{\bar{J}} = 2l_{66} \frac{{}^{(n)}C_{12}}{\bar{C}}. \quad (2.32)$$

2.3 Методика определения констант модели на основе аппроксимации диаграмм деформирования, полученных с помощью решения локальных задач

Рассмотрим тканевый КМ с ячейкой, изображённой на рисунке (рис 1.1).

Наиболее часто тканевые КМ с перпендикулярными нитями считают ортотропными материалами: две оси главного базиса анизотропии направлены вдоль нитей, а третья – перпендикулярно им. Как можно заметить, выбранная ЯП ориентирована именно таким способом. Следовательно, предположение о равенстве векторов главного базиса анизотропии глобальному декартовому базису здесь справедливо.

Распространённый подход к определению констант модели осреднённого материала состоит в следующем. Сначала рассчитываются осреднённые поля напряжений, возникающие в ЯП при заданных деформациях. В результате получают некоторый набор диаграмм деформирования. После этого набор констант модели находится решением некоторой оптимизационной задачи так, чтобы осреднённая модель описывала поведение наблюдаемых значений полей как можно более точно. Другими словами, ищутся константы модели некоторого однородного материала, который ведёт себя под действием нагрузки похожим на ЯП образом в осреднённом смысле.

Для однозначного определения неизвестных констант эквивалентной осреднённой модели необходимо составить список программ нагружения. Классический набор экспериментов, которые проводятся для определения констант ортотропного материала, следующий:

1. Одноосное растяжение вдоль каждой оси главного базиса анизотропии;

2. Сдвиг в плоскостях, образованными осями главного базиса анизотропии.

2.3.1 Одноосное растяжение ортотропного материала вдоль оси анизотропии

Рассмотрим однородное растяжение материала вдоль оси анизотропии. Если провести реальный эксперимент, то можно заметить, что при растяжении образца его грани, параллельные оси растяжения, остаются свободными, в результате чего происходит поперечное сжатие образца. Если же мы рассмотрим численное моделирование растяжения ЯП, то в ней как правило стремятся сохранить простым вид осреднённого градиента деформаций, задаваемого в качестве входных данных. Обобщённо можно записать закон движения однородной упругой среды как:

$$x_{\alpha} = k_{\alpha}(t) x_{\alpha}^{\circ} \quad (2.33)$$

Где $k_{\alpha}(t)$ – коэффициент растяжения-сжатия вдоль направления e_{α} .

В случае численного расчёта на ЯП из трех функций одна ($k_{\alpha}(t)$) изменяется, две другие ($k_{\beta}(t), k_{\gamma}(t)$) остаются равными 1. В случае моделирования эксперимента две другие зависят от первой и находятся из условия равенства нулю компонент тензора напряжений

$$\bar{T}_{\beta\beta} = 0, \quad \bar{T}_{\gamma\gamma} = 0. \quad (2.34)$$

В каждой точке среды компоненты тензора градиента деформаций будут равны:

$$[F_{ij}] = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Базисы \mathbf{p}_α и \mathbf{p}_α° можно выбрать совпадающими с декартовым:

$$\mathbf{p}_\alpha^\circ = \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \quad (2.36)$$

Собственные значения λ_α равны диагональным компонентам тензора \mathbf{F} :

$$\lambda_\alpha = k_\alpha. \quad (2.37)$$

Тензор левых искажений $\bar{\mathbf{U}}$ будет совпадать с тензором левых искажений и с тензором градиента деформаций, а тензор поворота будет единичным:

$$[U] = [V] = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$[O] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Изменение плотности J будет равно

$$J = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}. \quad (2.40)$$

Тензор энергетических деформаций будет иметь компоненты:

$${}^{(n)}[\bar{C}] = \begin{pmatrix} \frac{k_1^{n-3} - 1}{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2^{n-3} - 1}{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2^{n-3} - 1}{n-3} \end{pmatrix}, \quad n \neq 3, \quad (2.41)$$

$${}^{(3)}[\bar{C}] = \begin{pmatrix} \ln k_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln k_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln k_3 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Тогда компоненты тензора энергетических напряжений могут быть найдены по формулам:

$${}^{(n)}[T] = \bar{J} \left({}^{(n)}\bar{C}_{11} \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{12} & 0 \\ 0 & 0 & l_{13} \end{pmatrix} + {}^{(n)}\bar{C}_{22} \begin{pmatrix} l_{12} & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{23} \end{pmatrix} + {}^{(n)}\bar{C}_{33} \begin{pmatrix} l_{13} & 0 & 0 \\ 0 & l_{23} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \right), \quad (2.43)$$

$${}^{(n)}[T] = \bar{J} \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^3 {}^{(n)}\bar{C}_{\alpha\alpha} l_{\alpha 1} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{\alpha=1}^3 {}^{(n)}\bar{C}_{\alpha\alpha} l_{\alpha 2} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{\alpha=1}^3 {}^{(n)}\bar{C}_{\alpha\alpha} l_{\alpha 3} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Где

$${}^{(n)}\bar{C}_{\alpha\alpha} = \begin{cases} \frac{k_\alpha^{n-3} - 1}{n-3}, & n \neq 3 \\ \ln k_\alpha, & n = 3 \end{cases} \quad (2.45)$$

Для нахождения компонент тензора напряжений Коши воспользуемся тензором энергетической эквивалентности:

$${}^4\mathbf{E} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 {}^{(n)}E_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\alpha \quad (2.46)$$

Для дальнейших вычислений, будут необходимы только «диагональные» значения $E_{\alpha\beta}^{(n)}$:

$$E_{\alpha\alpha}^{(n)} = k_{\alpha}^{n-3}, \quad (2.47)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = {}^4\mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 E_{\alpha\beta}^{(n)} \bar{T}_{\alpha\beta}^{(n)} \mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta}. \quad (2.48)$$

Поскольку $\bar{\mathbf{T}}$ имеет диагональный вид в базисе \mathbf{e}_{α} , то и тензор напряжений Коши \mathbf{T} тоже будет иметь диагональный вид:

$$[\bar{\mathbf{T}}] = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \begin{pmatrix} E_{11}^{(n)} \sum_{\alpha=1}^3 \bar{C}_{\alpha\alpha}^{(n)} l_{\alpha 1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{22}^{(n)} \sum_{\alpha=1}^3 \bar{C}_{\alpha\alpha}^{(n)} l_{\alpha 2} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33}^{(n)} \sum_{\alpha=1}^3 \bar{C}_{\alpha\alpha}^{(n)} l_{\alpha 3} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Если мы проводим численный эксперимент по растяжению ЯП вдоль направления \mathbf{e}_1 , то

1. Только один из коэффициентов растяжения отличен от единицы:

$$k_1 = k_1(t), \quad k_2 = k_3 = 1$$

2. Тензор энергетических деформаций имеет только одну ненулевую компоненту

$$C_{11}^{(n)} = \begin{cases} \frac{k_1^{n-3} - 1}{n-3}, & n \neq 3 \\ \ln k_1, & n = 3 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$C_{22}^{(n)} = C_{33}^{(n)} = 0 \quad (2.51)$$

3. Тензор энергетических напряжений будет иметь более простую форму

$$[T] = J C_{11}^{(n)} \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{12} & 0 \\ 0 & 0 & l_{13} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

4. Тензор энергетической эквивалентности будет иметь компоненты:

$$E_{11}^{(n)} = k_1^{n-3}, \quad E_{22}^{(n)} = E_{33}^{(n)} = 1 \quad (2.53)$$

5. Тензор напряжений Коши будет определяться формулой

$$[T] = \frac{1}{k_1} C_{11}^{(n)} \begin{pmatrix} k_1^{n-3} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{12} & 0 \\ 0 & 0 & l_{13} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Таким образом, после обработки этого эксперимента мы можем получить информацию о константах l_{11}, l_{12}, l_{13} .

Если же мы обработаем данные трех экспериментов: растяжение по направлениям $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, мы получим информацию о константах

$$l_{11}, l_{22}, l_{33}, l_{12}, l_{13}, l_{23}.$$

Для нахождения оставшихся 3-х констант l_{44}, l_{55}, l_{66} необходимы эксперименты по сдвигу.

2.3.2 Чистый сдвиг упругого ортотропного материала

Рассмотрим чистый сдвиг ортотропного материала в плоскости, задаваемой осями главного базиса анизотропии $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$. Тензор градиента деформаций будет иметь вид

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{E} + a \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \quad (2.55)$$

Или в компонентном виде

$$\bar{F}_{ij} = \delta_{ij} + a \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}. \quad (2.56)$$

В приведенных формулах a – параметр сдвига.

Для удобства примем

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

Тогда матрица компонент тензора \mathbf{F} примет вид

$$[\bar{F}] = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Для дальнейшего вывода нам понадобится разложение:

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha. \quad (2.58)$$

Для его нахождения для начала вычислим тензор $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$:

$$[\bar{U}^2] = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Поскольку $\bar{\mathbf{U}}^2$ – симметричный тензор

$$\bar{\mathbf{U}}^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \quad (2.60)$$

Мы можем воспользоваться методом вращений Якоби применительно к матрице (2.59) для нахождения как собственных значений тензора \bar{U}^2 , так и координат собственных векторов

$$p_{\alpha i} = \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (2.61)$$

Которые будут записаны в матрице поворота. Кроме того, поскольку в матрице (2.59) есть только 1 недиагональный элемент (не считая симметричного к нему), то метод вращений Якоби даст точный результат за 1 поворот.

В методе Якоби матрица умножается слева (с транспонированием) и справа на матрицу поворота так, чтобы в результирующей матрице получился ноль на выбранном недиагональном элементе (и симметричном к нему):

$$[Q] = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta,$$

$$[Q]^T [\bar{U}^2] [Q] = [D].$$

Можно показать, что

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2[U^2]_{12}}{[U^2]_{11} - [U^2]_{22}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{a} \quad (2.63)$$

Матрица D , как уже было отмечено, получится диагональной, причём

$$\begin{aligned} D_{11} &= c^2[U^2]_{11} + 2sc[U^2]_{12} + s^2[U^2]_{22} = \lambda_1^2 \\ D_{22} &= c^2[U^2]_{22} - 2sc[U^2]_{12} + s^2[U^2]_{11} = \lambda_2^2 \\ D_{33} &= [U^2]_{33} = 1 = \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Отсюда формула для вычисления λ_{α} :

$$\lambda_{\alpha} = \sqrt{D_{\alpha\alpha}} \quad (2.65)$$

Кроме того, матрица Q содержит компоненты собственных векторов

$$p_{\alpha i} = Q_{i\alpha} \quad (2.66)$$

$$[p] = [Q]^T = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Если же вычислить матрицу поворота Q' на угол $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, то получим компоненты векторов \mathbf{p}_α :

$$p_{\alpha i} = Q'_{i\alpha} \quad (2.68)$$

$$[p] = [Q']^T = \begin{pmatrix} s & c & 0 \\ -c & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Для вычисления $\overset{(n)}{C}$ воспользуемся формулой

$$\overset{(n)}{C} = \sum_{\alpha=1}^3 c_{\alpha} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha}. \quad (2.70)$$

$$\overset{(n)}{C}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 c_{\alpha} p_{\alpha i} p_{\alpha j} \quad (2.71)$$

Заметим, что

$$\overset{(n)}{C}_{i3} = \overset{(n)}{C}_{3i} = 0. \quad (2.72)$$

Воспользовавшись формулами (2.21)-(2.26), получим

$$\overset{(n)}{T}_{11} = \bar{J}(l_{11} \overset{(n)}{C}_{11} + l_{12} \overset{(n)}{C}_{22}) \quad (2.73)$$

$$\overset{(n)}{T}_{22} = \bar{J}(l_{12} \overset{(n)}{C}_{11} + l_{22} \overset{(n)}{C}_{22}) \quad (2.74)$$

$$\bar{T}_{33}^{(n)} = \bar{J} (l_{13} \bar{C}_{11}^{(n)} + l_{23} \bar{C}_{22}^{(n)}) \quad (2.75)$$

$$\bar{T}_{12}^{(n)} = 2\bar{J} l_{66} \bar{C}_{12}^{(n)} \quad (2.76)$$

$$\bar{T}_{23}^{(n)} = \bar{T}_{13}^{(n)} = 0 \quad (2.77)$$

Отсюда можно получить компоненты тензоров напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа, воспользовавшись формулами (2.12) и (2.16). Таким образом мы получим информацию о константе l_{66} .

Проделав аналогичный вывод для других индексов α и β , получим формулы для вычисления напряжений при сдвиге и в других плоскостях, которые могут быть использованы для получения констант l_{55} и l_{44} .

2.3.3 Одноосное растяжение изотропного материала

Рассмотрим КМ, рассматриваемый как изотропный в осреднённом смысле. Для изотропного материала ось растяжения можно выбрать произвольно. Для определённости выберем направление \mathbf{e}_1 . Тогда осреднённый тензор градиента деформаций будет иметь следующий вид

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично ортотропному случаю будут иметь место соотношения:

$$\bar{U} = \bar{V} = \bar{F},$$

$$\bar{O} = \bar{P} = \bar{P}^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Энергетический тензор деформаций равен

$${}^{(n)}[C] = \begin{pmatrix} \frac{k^{n-3} - 1}{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \neq 3,$$

$${}^3[C] = \begin{pmatrix} \ln k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим энергетический тензор напряжений и тензор напряжений Коши:

$${}^{(n)}[T] = \frac{1}{k} {}^{(n)}C_{11} \begin{pmatrix} l_1 + 2l_2 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 \end{pmatrix},$$

$${}^{(n)}[\bar{T}] = \frac{1}{k} {}^{(n)}C_{11} \begin{pmatrix} k^{n-3}(l_1 + 2l_2) & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица компонент тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа в данном случае имеет следующий вид:

$${}^{(n)}[\bar{P}] = {}^{(n)}C_{11} \begin{pmatrix} k^{n-4}(l_1 + 2l_2) & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 \end{pmatrix}.$$

2.3.4 Чистый сдвиг упругого изотропного материала

Рассмотрим КМ, рассматриваемый как изотропный в осреднённом смысле. Для изотропного материала плоскость сдвига можно выбрать произвольно. Для определённости выберем плоскость, задаваемую векторами \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 . Тогда осреднённый тензор градиента деформаций будет иметь следующий вид

$$[\bar{F}] = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Геометрические соотношения будут аналогичны ортотропному случаю:

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{a}, \quad c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta,$$

$$[p] = \begin{pmatrix} s & -c & 0 \\ c & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\dot{p}] = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{c^2(1+a^2) + 2sca + s^2}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{c^2 - 2sca + s^2(1+a^2)} = \lambda_1^{-1}$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$\bar{J} = 1$$

$$\bar{C}_{ij}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^3 c_{\alpha}^{(n)} p_{\alpha i} p_{\alpha j}, \quad [\bar{C}] = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11}^{(n)} & \bar{C}_{12}^{(n)} & 0 \\ \bar{C}_{12}^{(n)} & \bar{C}_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Энергетический тензор напряжений тогда будет иметь следующий вид.

$$[T]^{(n)} = \begin{pmatrix} (l_1 + 2l_2)\overline{C}_{11}^{(n)} + l_1\overline{C}_{22}^{(n)} & 2l_2\overline{C}_{12}^{(n)} & 0 \\ 2l_2\overline{C}_{12}^{(n)} & l_1\overline{C}_{11}^{(n)} + (l_1 + 2l_2)\overline{C}_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & l_1\overline{C}_{11}^{(n)} + l_1\overline{C}_{22}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно получить компоненты тензоров напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа, воспользовавшись формулами (2.12) и (2.16).

2.3.5 Численная методика определения констант осреднённого материала на основе аппроксимации диаграмм деформирования, полученных с помощью решения локальных задач

В предыдущих подразделах была предложена методика вычисления зависимости компонент тензоров напряжений ортотропного материала от параметров деформирования: для одноосного растяжения параметром является удлинение k_α образца вдоль направления \mathbf{e}_α , а для сдвига – параметр сдвига $a_{\alpha\beta}$ в плоскости $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta$.

Пусть экспериментальные данные имеют вид

$$D^{(k)} = \{(s_i^{(k)}, t_i^{(k)})\}_{i=1}^{N_k}$$

$D^{(k)}$ – k -ый экспериментальный ряд,

$s_i^{(k)}$ – измеренный параметр деформирования в k -ом экспериментальном ряду

$t_i^{(k)}$ – измеренное напряжение в k -ом экспериментальном ряду

К примеру, экспериментальный ряд из 10 точек, где параметр деформирования – удлинение при одноосном растяжении, а напряжение –

соответствующее этому удлинению измеренная компонента 11 тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа:

$$D^{(1)} = \{(k_{1i}^{\text{exp}}, P_{11i}^{\text{exp}})\}_{i=1}^{10}.$$

Для нахождения констант модели, которые лучше всего соответствуют экспериментальным данным, сформулируем задачу оптимизации:

$$R = \sum_{k=1}^K w_k \sum_{i=1}^{N_k} \mu_{ki} \left(T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)}) - t_i^{(k)} \right)^2 \rightarrow \min_{\vec{l}} \quad (2.78)$$

R – целевая функция, характеризующая степень отклонения модели от эксперимента.

w_k – вес эксперимента, выбранная заранее константа; μ_{ki} – вес i -ой точки внутри k -го ряда, выбранная заранее константа. Чем выше значение весового параметра, тем сильнее влияние соответствующих данных на целевую функцию, а значит, и на решение оптимизационной задачи. Будем считать, что все весовые коэффициенты не равны нулю, иначе, можно было бы вычеркнуть из суммы соответствующие этим весам слагаемые, получив сумму без нулевых коэффициентов. Кроме того, будем считать, что все веса положительные:

$$w_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\mu_{ki} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_k, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

$T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)})$ – напряжение эквивалентного однородного материала, соответствующее измеряемым напряжениям в эксперименте при упругих константах \vec{l} и параметре деформирования $s_i^{(k)}$.

Далее с целью упрощения выражений будем считать, что для ортотропного КМ

$$\vec{l} = \{l_{11}, l_{22}, l_{33}, l_{12}, l_{13}, l_{23}, l_{44}, l_{55}, l_{66}\}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= l_{11} & l_2 &= l_{22} & l_3 &= l_{33} \\ l_4 &= l_{23} & l_5 &= l_{13} & l_6 &= l_{12}, \\ l_7 &= l_{44} & l_8 &= l_{55} & l_9 &= l_{66} \end{aligned}$$

а для изотропного КМ

$$\vec{l} = \{l_1, l_2\}.$$

Для решения оптимизационной задачи (2.78) можем воспользоваться методом Ньютона, итерационный шаг в котором выглядит для нашей задачи следующим образом

$$\vec{l}_{i+1} = \vec{l}_i - H_i^{-1} \text{grad}_l R(\vec{l}_i). \quad (2.79)$$

Здесь \vec{l}_i – значение параметров материала на i -ой итерации, $H_i, \text{grad}_l R(\vec{l}_i)$ – соответственно гессиан и градиент функции R в точке \vec{l}_i .

Основная трудность при его использовании – большие потребности в памяти для хранения Гессиана и сложность решения СЛАУ большой размерности с плотной матрицей. Однако размерность пространства поиска – 9 неизвестных констант материала для ортотропного КМ или 2 для изотропного КМ – не очень велика, что позволяет использовать метод Ньютона.

Для того, чтобы воспользоваться методом Ньютона, вычислим градиент целевой функции, а также её Гессиан. Для краткости будем писать $T_i^{(k)}$ вместо $T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)})$, но подразумевая второе.

$$\frac{\partial R}{\partial l_\alpha} = 2 \sum_{k=1}^K w_k \sum_{i=1}^{N_k} \mu_{ki} \frac{\partial T_i^{(k)}}{\partial l_\alpha} (T_i^{(k)} - t_i^{(k)}) \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} = 2 \sum_{k=1}^K w_k \sum_{i=1}^{N_k} \mu_{ki} \left[\frac{\partial^2 T_i^{(k)}}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} (T_i^{(k)} - t_i^{(k)}) + \frac{\partial T_i^{(k)}}{\partial l_\alpha} \frac{\partial T_i^{(k)}}{\partial l_\beta} \right] \quad (2.81)$$

Заметим, что в экспериментах, где зависимость тензора градиента деформаций от параметра деформирования носит простой характер, то есть не зависит от констант модели, напряжения от упругих констант зависят линейно.

Поэтому слагаемое с множителем $\frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial l_\alpha \partial l_\beta}$ в таких задачах можно отбросить как

нулевое. Особый случай, когда градиент деформаций зависит от констант – это одноосное растяжение со свободной боковой поверхностью. В этом случае, помимо растяжения вдоль выбранной оси, вследствие эффекта Пуассона происходит сжатие в поперечных направлениях. Величина этого сжатия зависит не только от растяжения, но и от коэффициента Пуассона, который, в свою очередь, зависит от констант l_α нелинейным образом. При обработке такого рода экспериментальных данных, хотя и можно по-прежнему пренебрегать в Гессiane

членом с $\frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial l_\alpha \partial l_\beta}$, однако это может замедлить сходимость или вообще привести к

расходимости. Тем не менее существуют методы, которые пренебрегают этим членом, например, метод Гаусса–Ньютона.

В простейшем виде метод Гаусса–Ньютона выглядит следующим образом:

1. Выбирается начальное приближение \vec{l}_0 , числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, предельное число итераций M , а также весовые множители $w_k, \mu_{ki} > 0$.

2. Для итерации k , пробегающей значения от 0 до M выполняются шаги:

1. Если $k = M$, цикл прерывается. Иначе – переход к следующему шагу

2. Вычисляется целевая функция $R_k = R(\vec{l}_k)$.

3. Вычисляется антиградиент целевой функции $\vec{b}_k = -\text{grad} R(\vec{l}_k)$.

Если $|\vec{b}_k| \leq \varepsilon_1$, цикл прерывается. Иначе – переход к следующему шагу

4. Вычисляется Гессиан H_k согласно формуле (2.81). Если используется вариант Гаусса–Ньютона, то слагаемые со вторыми производными отбрасываются.

5. Вычисляется приращение $\Delta \vec{l}_k$, путем решения системы $H_k \Delta \vec{l}_k = b_k$.
 6. Вычисляется новое приближение $\vec{l}_{k+1} = \vec{l}_k + \Delta \vec{l}_k$.
 7. Если $|\Delta \vec{l}_k| \leq \varepsilon_2$, цикл прерывается.
3. Если $k = M$, значит итерации исчерпаны, а решение не найдено. Возвращается ошибка.
4. Возвращается результат $\vec{l}^* = \vec{l}_M$

Выбор в качестве значения одной из констант $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ нуля приводит на практике к игнорированию соответствующего критерия в цикле, поскольку в машинной арифметике $|b_k|$ и $|\Delta l_k|$ почти никогда не равны нулю, за исключением специально сконструированных случаев. Если же выставить обе константы в ноль, то цикл будет пробегать все итерации, что всегда будет приводить к ошибке.

Выбирая особым образом константы μ_{ki} , можно получить качественно отличающиеся целевые функции. Например, можно получить как целевую функцию, оценивающую абсолютное отклонение от точек диаграммы:

$$\mu_{ki}^{\text{abs}} = \bar{\mu}_k,$$

$$R^{\text{abs}} = \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k w_k \sum_{i=1}^{N_k} \left(T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)}) - t_i^{(k)} \right)^2 \rightarrow \min_{\vec{l}} \quad (2.82)$$

так и относительное:

$$\mu_{ki}^{\text{rel}} = \bar{\mu}_k \frac{1}{(t_i^{(k)})^2},$$

$$R^{\text{rel}} = \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k w_k \sum_{i=1}^{N_k} \left(\frac{T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)})}{t_i^{(k)}} - 1 \right)^2 \rightarrow \min_{\vec{l}} \quad (2.83)$$

Здесь $\bar{\mu}_k > 0$ – некоторый общий множитель, который выбирается либо равным одной константе $\bar{\mu} > 0$ для всех k :

$$\bar{\mu}_k = \bar{\mu}, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$R^{\text{abs}} = \bar{\mu} \sum_{k=1}^K w_k \sum_{i=1}^{N_k} \left(T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)}) - t_i^{(k)} \right)^2 \rightarrow \min_{\vec{l}} \quad (2.84)$$

$$R^{\text{rel}} = \bar{\mu} \sum_{k=1}^K w_k \sum_{i=1}^{N_k} \left(\frac{T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)})}{t_i^{(k)}} - 1 \right)^2 \rightarrow \min_{\vec{l}}. \quad (2.85)$$

Либо обратно пропорционально количеству точек в диаграмме:

$$\bar{\mu}_k = \frac{\bar{\mu}}{N_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

$$R^{\text{abs}} = \bar{\mu} \sum_{k=1}^K w_k \left[\frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left(T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)}) - t_i^{(k)} \right)^2 \right] \rightarrow \min_{\vec{l}} \quad (2.86)$$

$$R^{\text{rel}} = \bar{\mu} \sum_{k=1}^K w_k \left[\frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left(\frac{T^{(k)}(\vec{l}, s_i^{(k)})}{t_i^{(k)}} - 1 \right)^2 \right] \rightarrow \min_{\vec{l}} \quad (2.87)$$

В первом случае, каждая из точек диаграммы будет вносить вклад пропорциональный весу диаграммы w_k , а во втором – вклад каждой точки усредняется, и чем больше точек в диаграмме, тем меньше вклад отдельной точки.

Можно заметить, что выбор константы $\bar{\mu} > 0$ не влияет ни на точку минимума, ни на алгоритм оптимизации. Поэтому можно выбрать в качестве значения этой константы единицу

$$\bar{\mu} = 1.$$

Выбор констант w_k осуществляется исследователем, и зависит от целей аппроксимации.

Если выбирать μ_{ki} большими для малых деформаций, то вклад точек диаграммы при малых деформациях будет большим, чем для больших деформаций, и можно таким образом получить константы модели, которая будет хорошо описывать поведение материала в области малых деформаций.

Приведённые примеры демонстрируют гибкость подхода с весовыми коэффициентами, позволяя использовать целевую функцию одной и той же формы, а значит одну и ту же процедуру поиска, для решения разных задач.

2.3.6 Определение упругих констант изотропного материала на основе диаграмм деформирования

Были рассмотрены экспериментальные диаграммы деформирования натуральной резины (NR60), резины марок EPDM60, NEO60, а также полиэфира холодного литья (ССР60) [72]. Коэффициент Пуассона материалов был принят равным $\nu = 0.49$. По этим диаграммам были найдены константы l_1, l_2 моделей A_n описанным в этой главе методом. Диаграммы деформирования по соответствующим моделям и экспериментальные диаграммы указаны на рисунках 2.1–2.4.

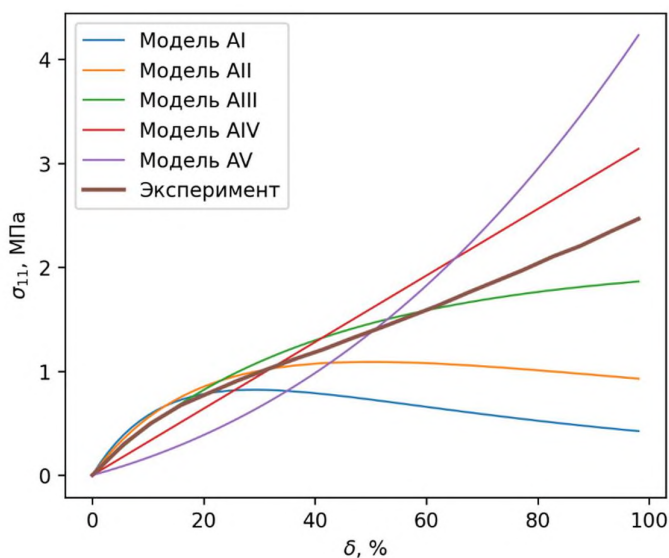


Рисунок 2.1 – Экспериментальная диаграмма деформирования NR60 и ее аппроксимация моделями A_n

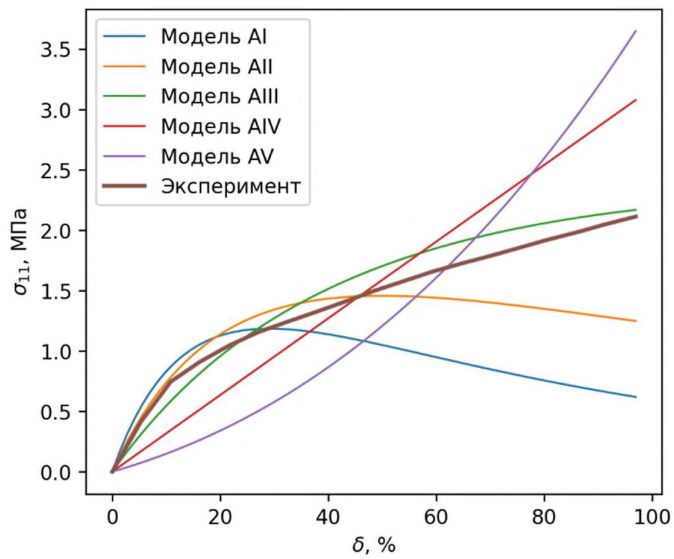


Рисунок 2.2 – Экспериментальная диаграмма деформирования EPDM60 и ее аппроксимация моделями \mathcal{A}_n

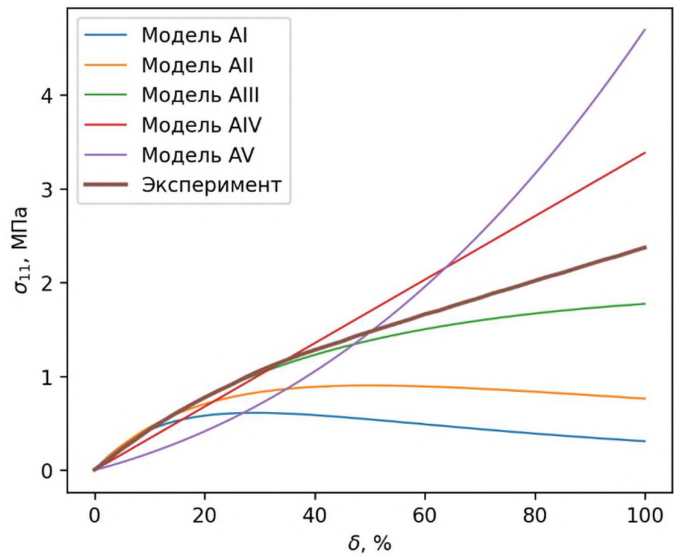


Рисунок 2.3 – Экспериментальная диаграмма деформирования NEO60 и ее аппроксимация моделями \mathcal{A}_n

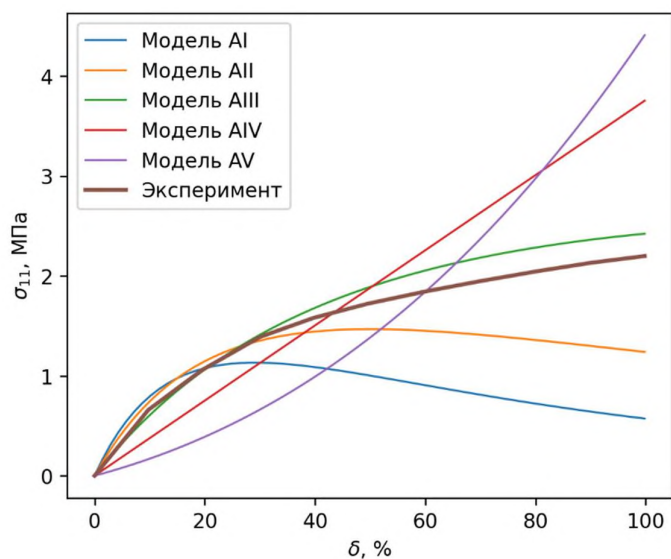


Рисунок 2.4 – Экспериментальная диаграмма деформирования ССР60 и ее аппроксимация моделями A_n

Из диаграмм видно, что наилучшая в целом аппроксимация получается при использовании модели A_3 , между тем в режиме умеренных деформаций – 15–20% – модели A_1, A_2 также хорошо приближают диаграммы.

Таблица 2.1 – Значения констант для материалов NR60, EPDM60, NEO60, ССР60 в различных моделях

| | | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | A_5 |
|--------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| NR60 | l_1 , МПа | 145 | 121 | 88.7 | 52.6 | 24.1 |
| | l_2 , МПа | 2.96 | 2.46 | 1.81 | 1.07 | 0.490 |
| EPDM60 | l_1 , МПа | 209 | 161 | 103 | 52.2 | 21.2 |
| | l_2 , МПа | 4.28 | 3.30 | 2.11 | 1.07 | 0.432 |
| NEO60 | l_1 , МПа | 108 | 100 | 84.1 | 55.6 | 25.8 |
| | l_2 , МПа | 2.20 | 2.04 | 1.72 | 1.14 | 0.526 |
| ССР60 | l_1 , МПа | 227 | 174 | 111 | 53.6 | 20.4 |
| | l_2 , МПа | 4.63 | 3.56 | 2.26 | 1.09 | 0.417 |

2.4 Примеры построения аналитических эффективных определяющих соотношений для нелинейно-упругих сред

2.4.1 Ортоотропная модель осредненного материала КМ1

Был рассмотрен КМ1 из раздела 1.7. Были проведены расчёты: два по одноосному растяжению вдоль каждой оси и два по сдвигу в каждой из двух координатных плоскостей.

Были получены следующие диаграммы деформирования (рис 2.5 – 2.8):

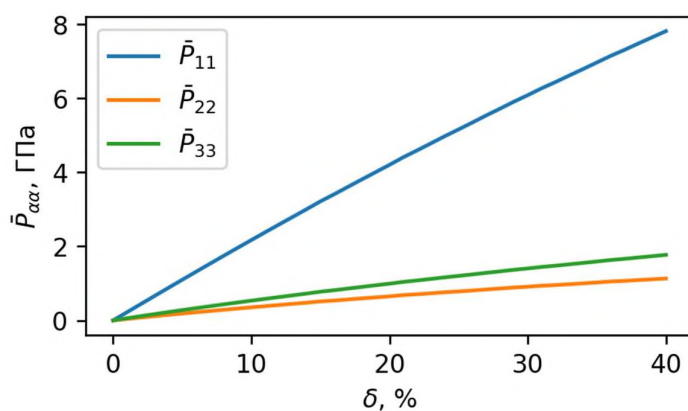


Рисунок 2.5 – Диаграммы деформирования КМ1 при одноосном растяжении вдоль OX

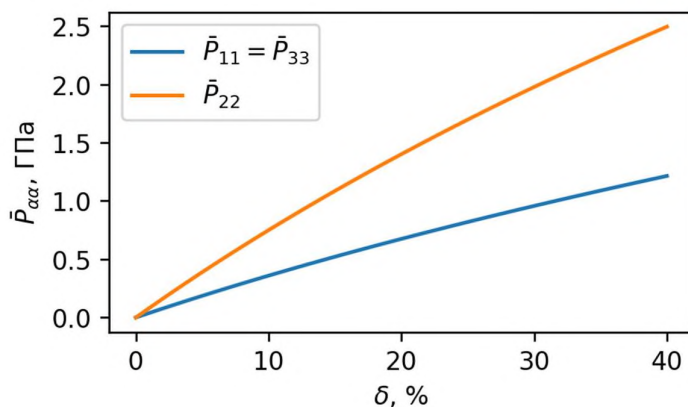


Рисунок 2.6 – Диаграммы деформирования КМ1 при одноосном растяжении вдоль OY

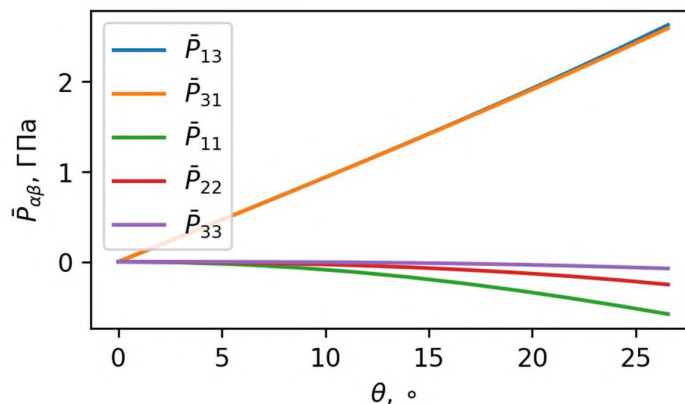


Рисунок 2.7 – Диаграммы деформирования КМ1 при сдвиге в плоскости OXZ

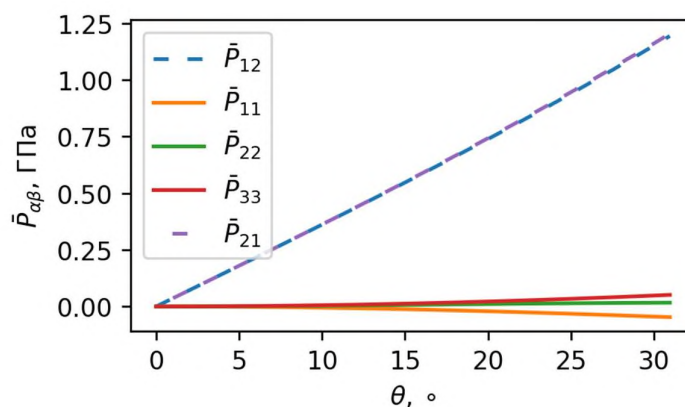


Рисунок 2.8 – Диаграммы деформирования КМ1 при одноосном сдвиге в плоскости OXY

К этим данным был применён метод поиска эффективных упругих констант эквивалентной однородной ортотропной упругой среды полулинейных моделей \mathcal{A}_n . Целевая функция была сконструирована одинаково для каждой модели. В результате были получены следующие наборы констант, приведенные в таблице 2.1.

Таблица 2.2 – Эффективные константы КМ1 в различных моделях \mathcal{A}_n

| Константа | Модель | | | | |
|----------------|-----------------|--------------------|---------------------|--------------------|-----------------|
| | \mathcal{A}_I | \mathcal{A}_{II} | \mathcal{A}_{III} | \mathcal{A}_{IV} | \mathcal{A}_V |
| l_{11} , ГПа | 50.0 | 36.5 | 19.9 | 17.3 | 11.4 |
| l_{22} , ГПа | 15.5 | 11.3 | 7.89 | 5.33 | 3.48 |
| l_{33} , ГПа | 50.0 | 36.5 | 19.9 | 17.3 | 11.4 |
| l_{12} , ГПа | 4.21 | 3.76 | 3.33 | 2.92 | 2.54 |
| l_{23} , ГПа | 4.21 | 3.76 | 3.33 | 2.92 | 2.54 |
| l_{13} , ГПа | 7.09 | 6.34 | 5.62 | 4.93 | 4.29 |
| l_{44} , ГПа | 3.82 | 3.99 | 4.04 | 3.99 | 3.82 |
| l_{55} , ГПа | 3.82 | 3.99 | 4.04 | 3.99 | 3.82 |
| l_{66} , ГПа | 10.3 | 10.6 | 10.7 | 10.6 | 10.3 |

2.4.2 Изотропная модель осреднённого материала для КМ2

Теперь рассмотрим КМ2, модели матрицы и сфер будем считать заданными как \mathcal{A}_{III} и \mathcal{A}_{IV} соответственно. Поскольку материал изотропный, то достаточно рассчитать только 2 диаграммы: растяжение и сдвиг. Полученные диаграммы деформирования изображены на рисунках (рис 2.9, рис 2.10).

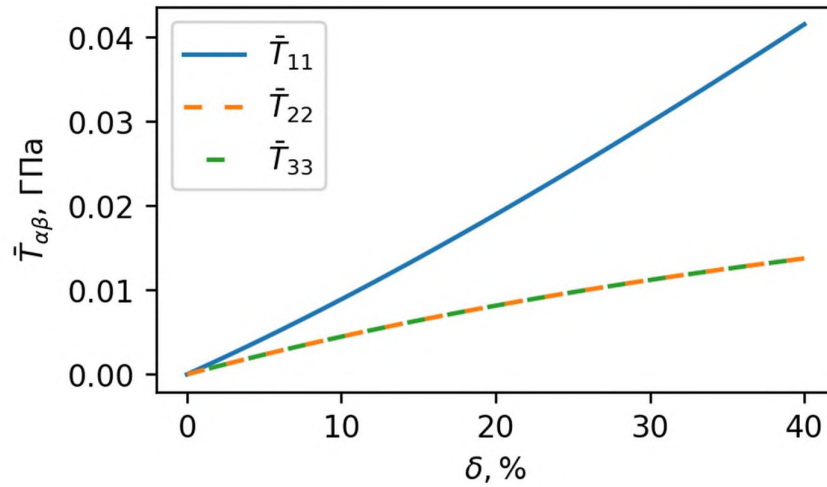


Рисунок 2.9 – Графики деформирования КМ2, значение нормальных компонент тензора напряжений Коши при одноосном растяжении вдоль e_1 с удлинением 40% ($k_1 = 1.4$)

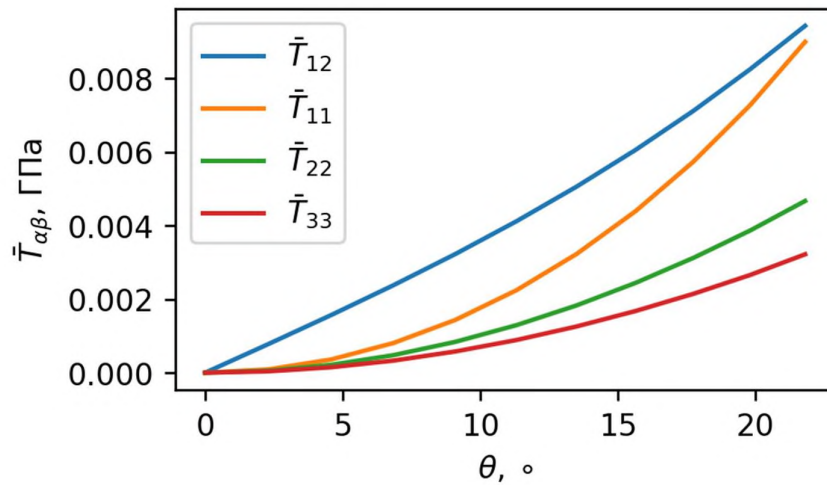


Рисунок 2.10 – Графики деформирования КМ2, значение нормальных и сдвиговых компонент тензора напряжений Коши при сдвиге в плоскости XY.

К этим данным был применён метод поиска эффективных упругих констант эквивалентной однородной изотропной упругой среды полулинейных моделей \mathcal{A}_n . Целевая функция была сконструирована одинаково для каждой модели. В результате были получены следующие наборы констант.

Таблица 2.3 – Эффективные константы КМ2 в различных моделях \mathcal{A}_n

| Константа | Модель | | | | |
|-------------|-----------------|--------------------|---------------------|--------------------|-----------------|
| | \mathcal{A}_I | \mathcal{A}_{II} | \mathcal{A}_{III} | \mathcal{A}_{IV} | \mathcal{A}_V |
| l_1 , ГПа | 0.1155 | 0.0948 | 0.0736 | 0.0527 | 0.0326 |
| l_2 , ГПа | 0.0168 | 0.0201 | 0.0211 | 0.0204 | 0.0189 |
| Δ | 32.2% | 24.7% | 15.4% | 5.44% | 5.99% |

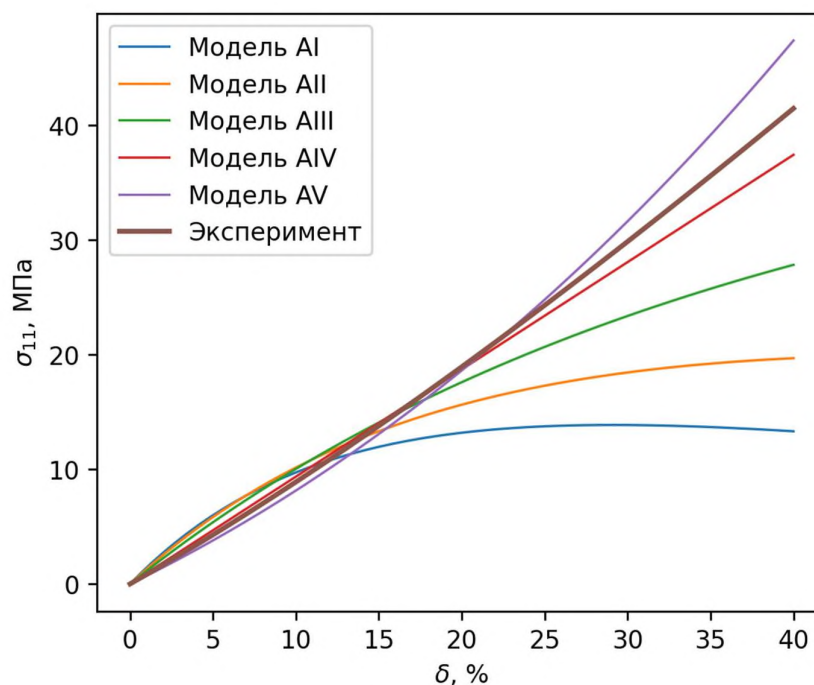


Рисунок 2.11 – Сравнение диаграмм деформирования при растяжении: КМ2 и аналитических моделей с константами, задающими наилучшее приближение.

Результаты расчетов показывают, что хотя компоненты композита были заданы в моделях \mathcal{A}_3 и \mathcal{A}_4 , композит в осреднённом смысле наиболее хорошо описывается моделями \mathcal{A}_4 и \mathcal{A}_5 – среднее отклонение для диаграммы одноосного растяжения

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{T_{11}(l_1, l_2, \delta_i)}{\bar{T}_{11}^{\text{расч}, i}} - 1 \right)^2}$$

не превышает 6%.

Глава 3. Методика решения многомасштабных задач нелинейной упругости для периодических сред

3.1 Постановка многомасштабной задачи нелинейной упругости для периодических сред

В главе 1 была получена следующая осреднённая задача (1.68)–(1.72):

$$\begin{aligned} \bar{P}_{,i}^{ij} + \bar{\rho} f^j &= 0, \quad \mathbf{X} \in \mathring{V} \\ \bar{F}_{,l}^k &= \delta_l^k + \bar{u}_{,l}^k, \quad \mathbf{X} \in \mathring{V} \cup \mathring{\Sigma} \\ \bar{P}^{ij} &= \bar{\mathcal{P}}^{ij(0)}(\bar{F}_{,l}^k), \quad \mathbf{X} \in \mathring{V} \cup \mathring{\Sigma}, \\ n_i \bar{P}^{ij} &= t_{ne}^j, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_1, \\ \bar{u}^i &= u_e^i, \quad \mathbf{X} \in \mathring{\Sigma}_2. \end{aligned}$$

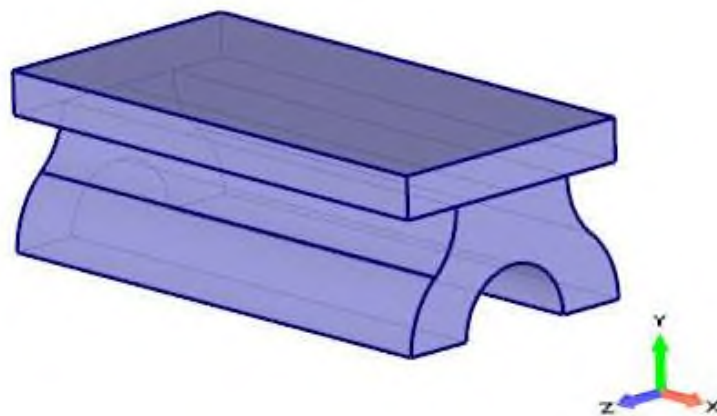
В такой постановке, для каждой точки конструкции нам необходимо решать локальные задачи для определения $\bar{\mathcal{P}}^{ij(0)}(\bar{F}_{,l}^k)$ по формуле (1.73), что является с вычислительной точки зрения очень сложной задачей. Вместо этого предлагается использовать разработанный в главе 2 метод построения эффективных определяющих соотношений на основе феноменологического подхода, константы моделей в котором определяются из условия наилучшей аппроксимации базовых диаграмм деформирования, полученных с помощью прямого решения локальных задач. Эти соотношения могут быть записаны в явном аналитическом виде: для изотропных композитов это соотношение (2.15), а для ортотропных – (2.27)–(2.32). Такой подход, предложенный в диссертации, позволяет развязать задачи на макроуровне и микроуровне и решать их независимо.

После решения макрозадачи осуществляется возвратный переход к микрозадаче для нахождения микронапряжений в компонентах композита. Для этого решается микрозадача (1.62) в которой в качестве осреднённого градиента деформации подставляется значение градиента, полученное в ходе решения макрозадачи для конкретной точки композитной конструкции.

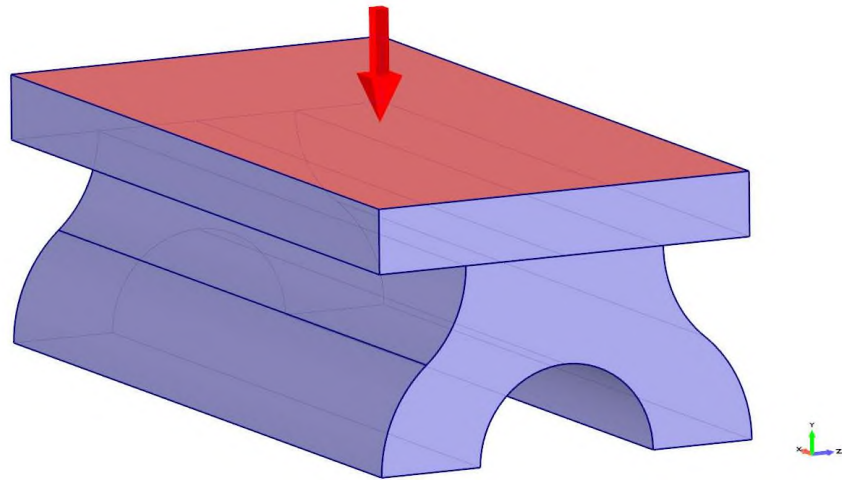
Далее рассмотрены примеры многомасштабного решения задачи с помощью предложенного алгоритма.

3.2 Решение многомасштабной задачи нагружения амортизатора из дисперсно-армированного КМ

Рассмотрим задачу о нагружении амортизатора, представленного на рисунке (рис 3.1), равномерной сжимающей нагрузкой 200 кН, приложенной к верхней плите. Нижнее основание амортизатора считаем жестко закреплённым.



a)



б)

Рисунок 3.1 – Амортизатор

а) общий вид геометрии

б) приложенные нагрузки

Верхняя плита изготовлена из стали, а нижняя из материала КМ2, описанного в главе 2.

Для стали использовалась модель \mathcal{A}_3 с константами, пересчитанными из упругих констант модели малых деформаций:

$$E = 218 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.3,$$
$$l_1 = 125.7 \text{ ГПа}, \quad l_2 = 83.9 \text{ ГПа}$$

В главе 2 были вычислены упругие константы для материала КМ2, и в этой задаче был использован осреднённый материал КМ2 модели \mathcal{A}_r .

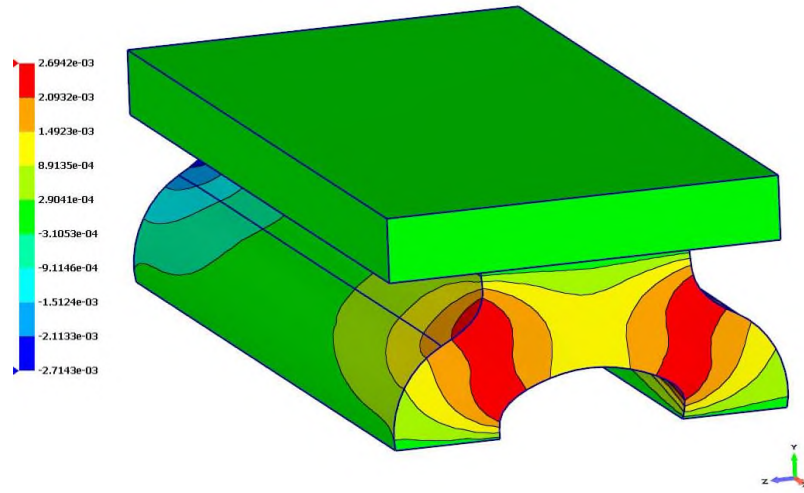


Рисунок 3.2 – Поле перемещений u_1 (м).

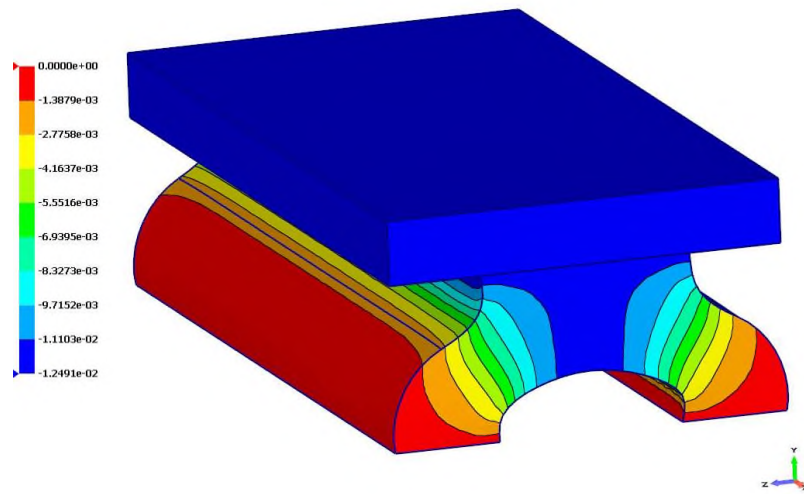


Рисунок 3.3 – Поле перемещений u_2 (м).

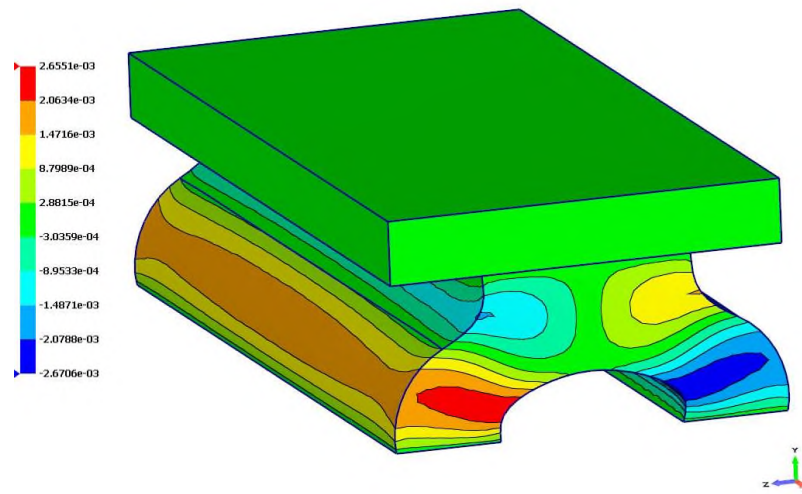


Рисунок 3.4 – Поле перемещений u_3 (м)

Распределение напряжений (тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа) представлено на рисунках 3.5–3.13.

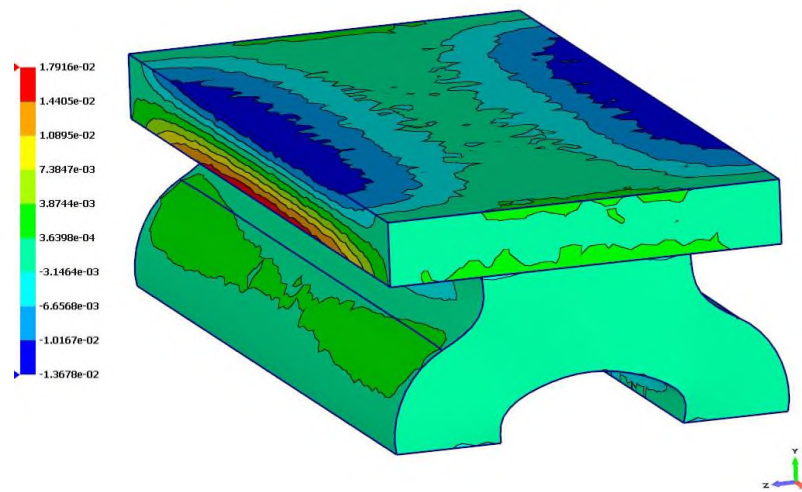


Рисунок 3.5 – Поле напряжений P_{11} (ГПа) в макрозадаче.

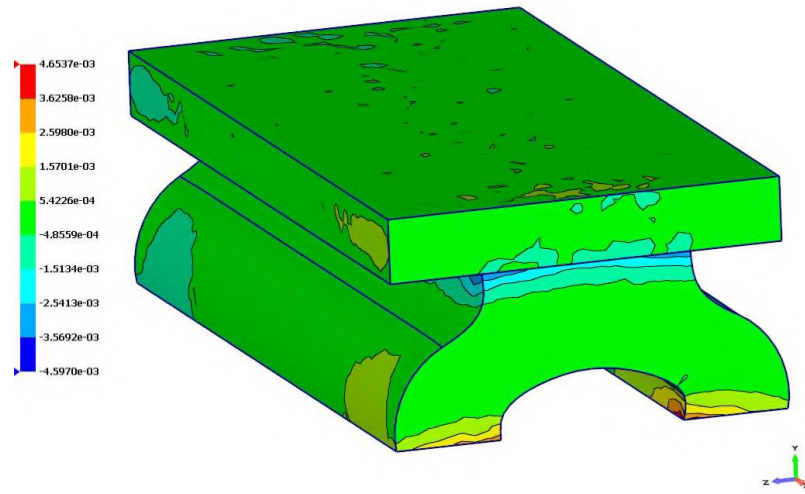


Рисунок 3.6 – Поле напряжений P_{12} (ГПа) в макрозадаче.

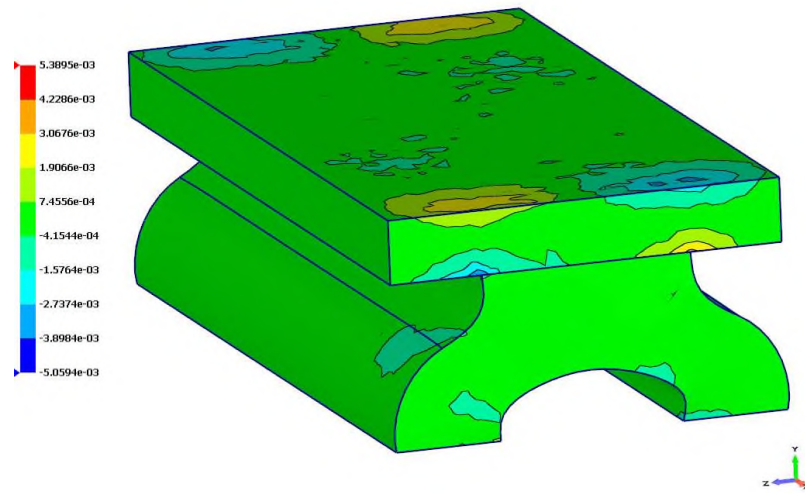


Рисунок 3.7 – Поле напряжений P_{13} (ГПа) в макрозадаче.

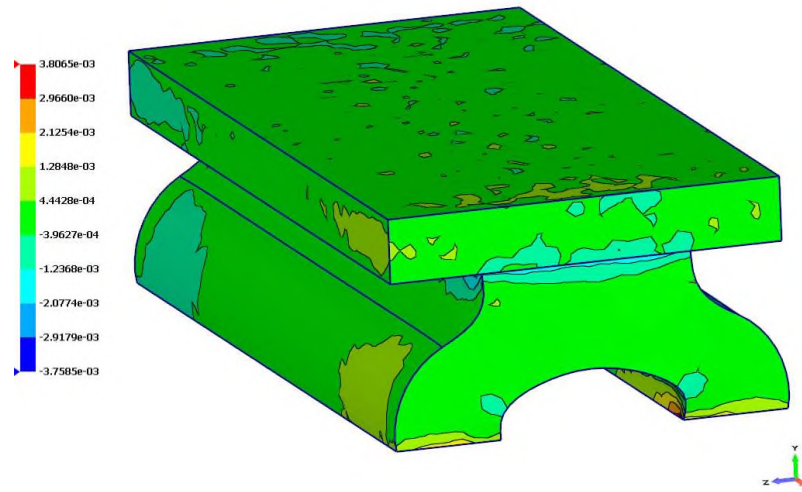


Рисунок 3.8 – Поле напряжений P_{21} (ГПа) в макрозадаче.

Напряжения P_{12}, P_{21} сравнительно малы и концентрируются в основном в торцах нижней части амортизатора.

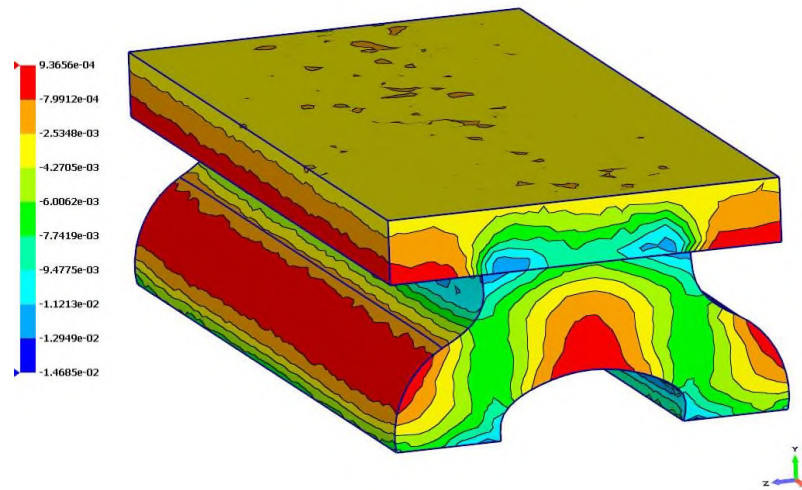


Рисунок 3.9 – Поле напряжений P_{22} (ГПа) в макрозадаче.

Значения P_{22} почти исключительно отрицательное и достигает наибольших по модулю величин в местах контакта КМ2 с плитой и с нижним основанием, и распределены достаточно равномерно вдоль OX .

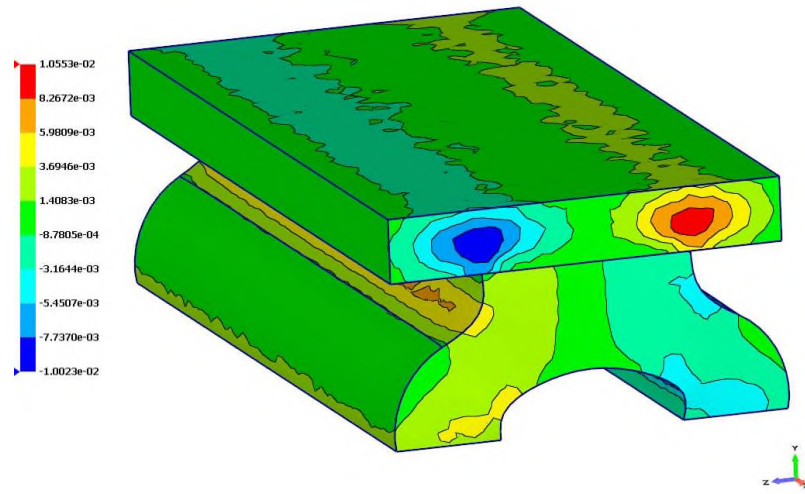


Рисунок 3.10 – Поле напряжений P_{23} (ГПа) в макрозадаче.

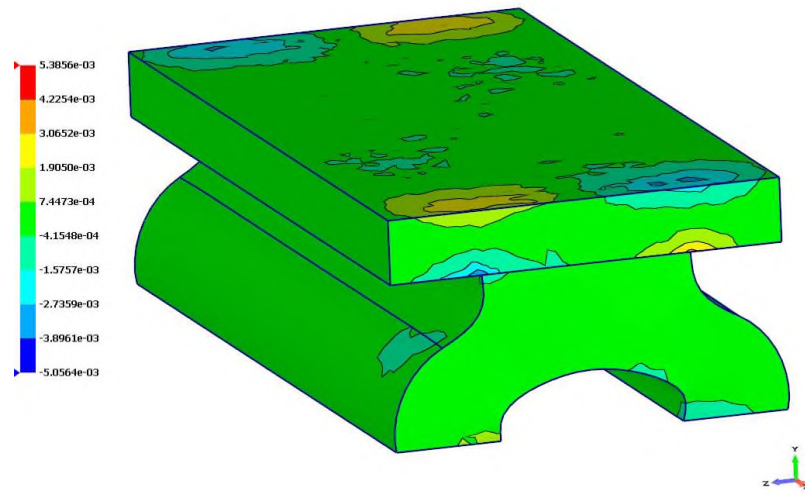


Рисунок 3.11 – Поле напряжений P_{31} (ГПа) в макрозадаче.

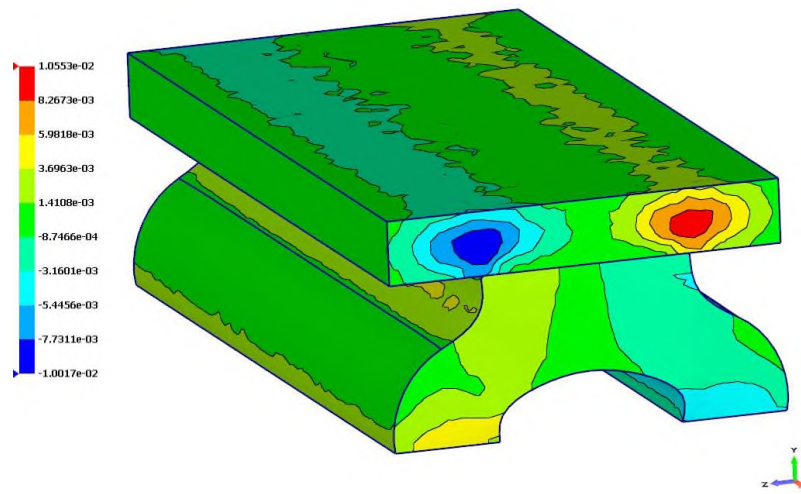


Рисунок 3.12 – Поле напряжений P_{32}

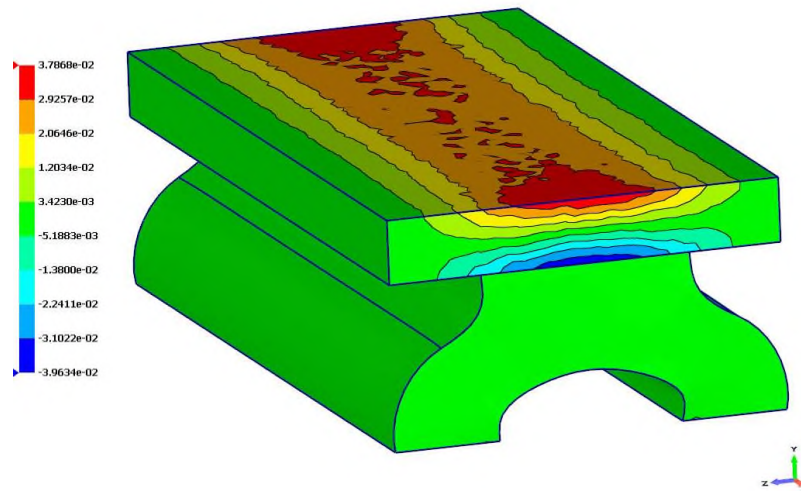


Рисунок 3.13 – Поле напряжений P_{33}

Компоненты P_{11} и P_{33} также достигают больших величин, но сосредоточены они главным образом в верхней плите и вызваны её изгибом под действием приложенной нагрузки.

Рассмотрим отдельную точку в материале амортизатора (рис 3.14)

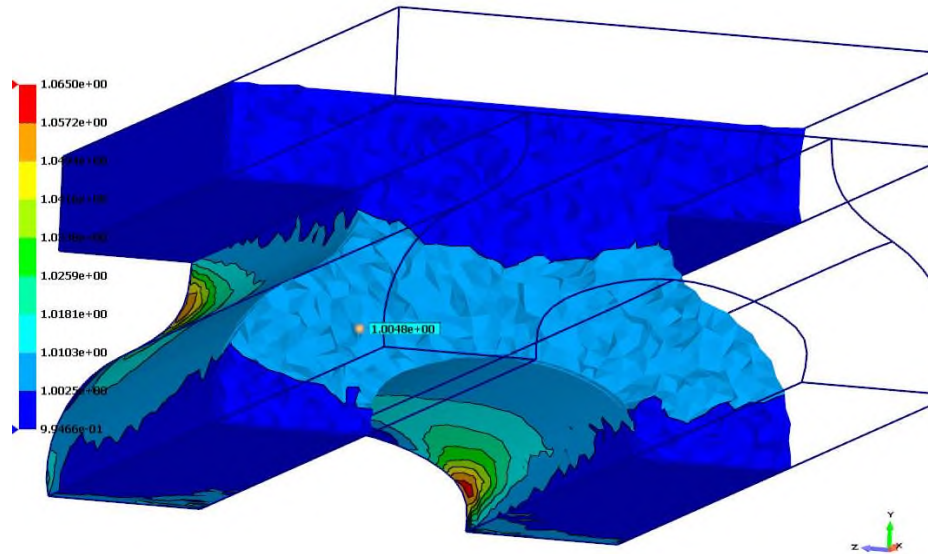


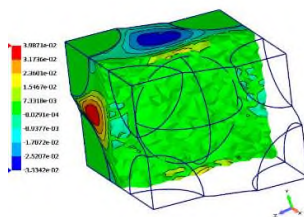
Рисунок 3.14 – Тензор градиента деформаций F_{11}

Было вычислено значение компонент среднего тензора градиента деформаций в этой точке:

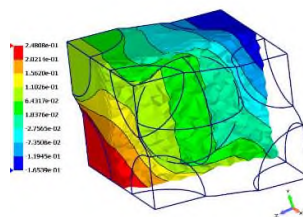
$$[\bar{F}] = \begin{pmatrix} 1.0048 & 0.000125 & 0.00000441 \\ 0.000964 & 0.834 & 0.247 \\ -0.000511 & -0.102667 & 1.031566 \end{pmatrix}$$

Видим, что деформация в этой точке характеризуется сдвигом в плоскости OYZ и сжатием по оси OY .

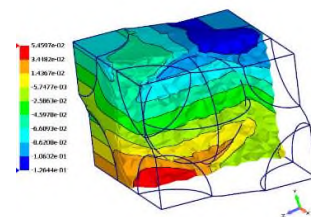
Эти значения затем были переданы в микрозадачу, в результате чего были вычислены поля перемещений, деформаций и напряжений в этой ЯП (рис 3.15-3.17).



а)



б)



в)

Рисунок 3.15. – Поле перемещений на деформированной ЯП КМ2, рассчитанное в выделенной точке макрозадачи:

а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .

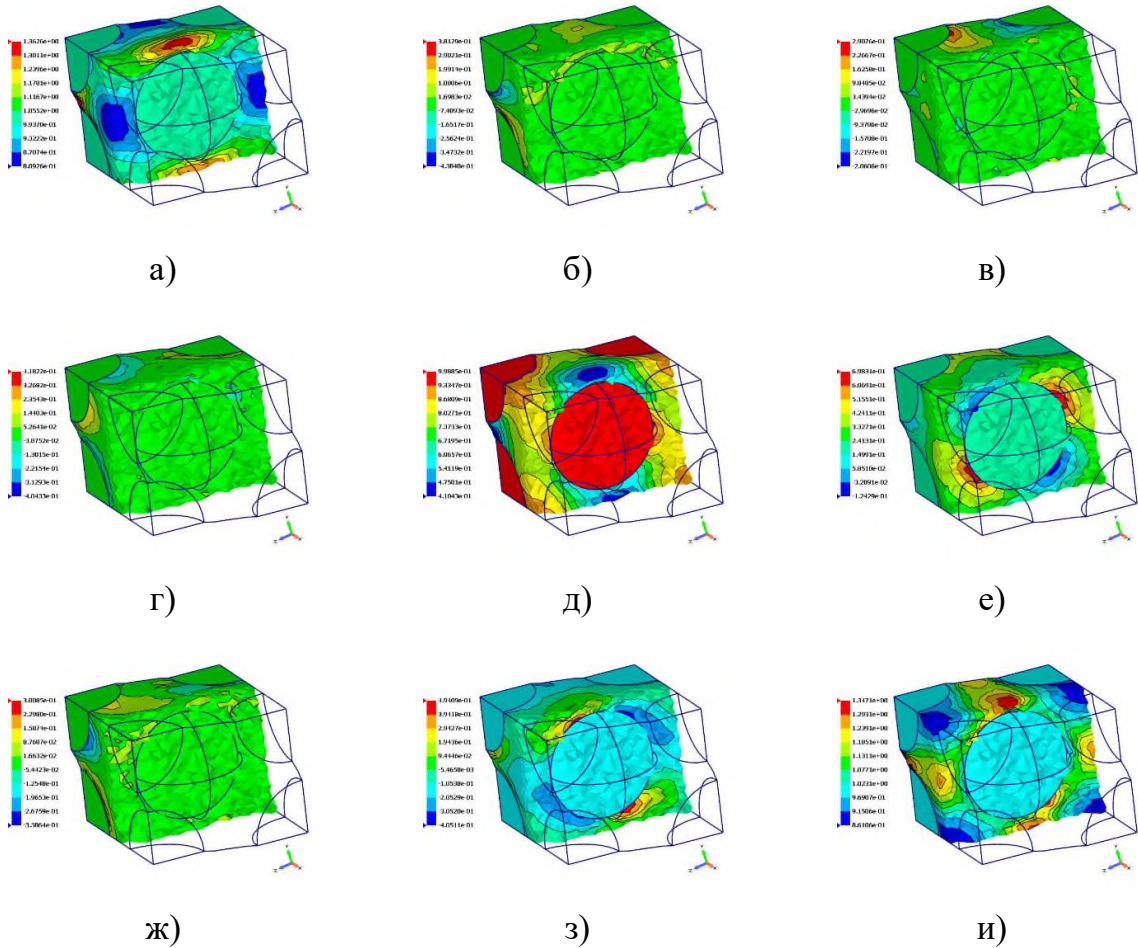
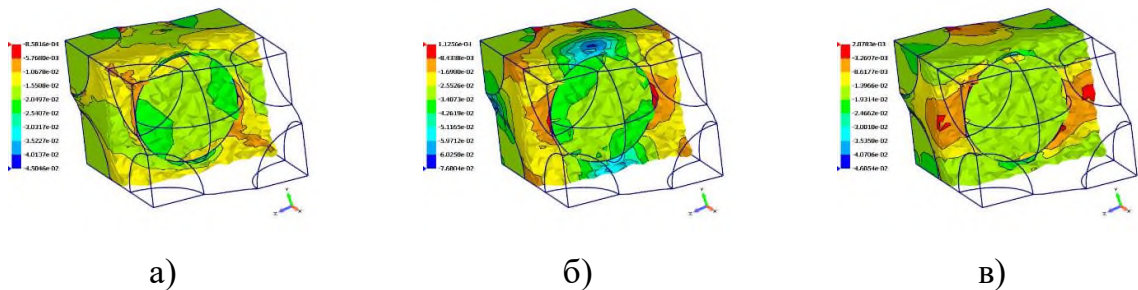


Рисунок 3.16. – Поле градиента деформаций на деформированной ЯП КМ2 рассчитанное в выделенной точке макрозадачи:

а) компонента F_{11} ; б) компонента F_{12} ; в) компонента F_{13} ;
 г) компонента F_{21} ; д) компонента F_{22} ; е) компонента F_{23} ;
 ж) компонента F_{31} ; з) компонента F_{32} ; и) компонента F_{33} .



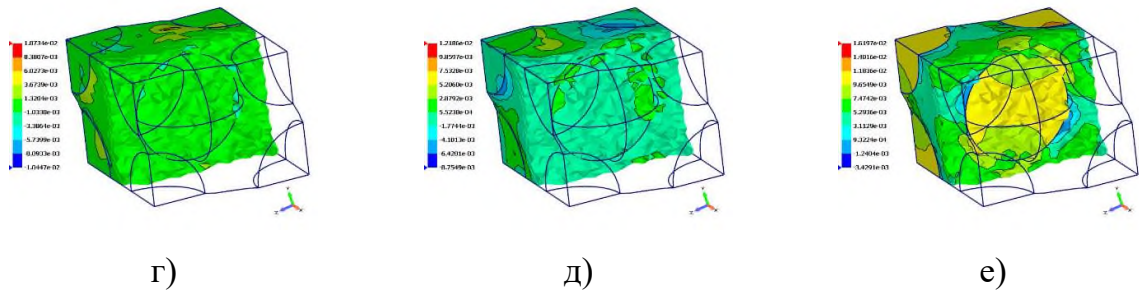


Рисунок 3.17. – Поле тензора напряжений Коши на деформированной ЯП КМ1 рассчитанное в выделенной точке макрозадачи:

- а) компонента T_{11} (ГПа); б) компонента T_{22} (ГПа); в) компонента T_{33} (ГПа);
 г) компонента T_{12} (ГПа); д) компонента T_{13} (ГПа); е) компонента T_{23} (ГПа).

Видим, что напряжения концентрируются главным образом в матрице в пространстве между частицами.

Таким образом, с помощью приведенного примера показано, что разработанная методика обеспечивает возможность расчета как макро-, так и микронапряжений и деформаций, что особенно важно для анализа прочности конструкций и материалов, а также при проектировании новых материалов.

3.3 Решение задачи деформирования шины из композиционного материала в составе колеса под действием внешней нагрузки

Рассмотрим колесо, состоящее из шины и диска, расположенное на упругом основании (рис 3.18), которое находится под действием внешней нагрузки.

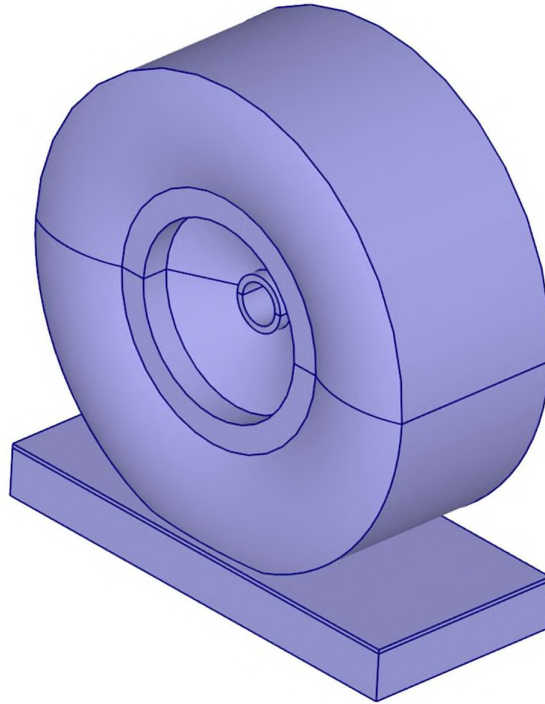


Рисунок 3.18 – Общий вид геометрии колеса и основания

Основание – изотропный материал с характеристиками, приблизительно соответствующими бетону: $E = 20 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.18$. Шина изготовлена из КМ2, чьи характеристики указаны в главе 2. Материал диска и обода – сталь: $E = 218 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$.

Диаметр колеса составляет 0,34 м, а диаметр диска – 0,18 м.

Нижнее основание бетонной плиты жёстко закреплено (рис 3.19а), для торца оси оставлена вертикальная степень свободы (рис 3.19б). К внутренней поверхности шины приложено давление $p = 200 \text{ кПа}$ (рис 3.19в), а к поверхности центрального отверстия (рис 3.19г) приложена равномерно распределённая нагрузка $F = 250 \text{ кН}$, действующая в сторону бетонной плиты

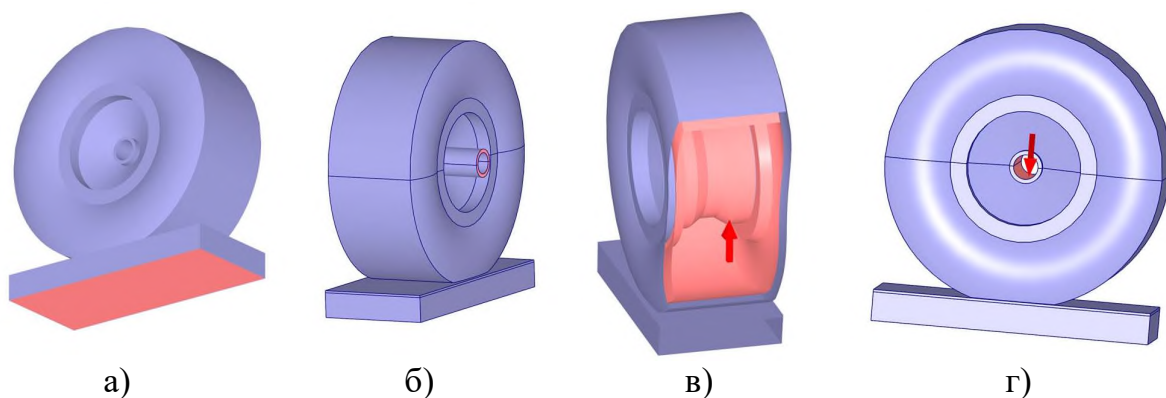


Рисунок 3.19 – Граничные условия в задаче о нагружении колеса: а) жёсткое закрепление; б) закрепление горизонтальных степеней свободы; в) давление; г) нагрузка

В результате решения описанной задачи получены поля перемещений, деформаций и напряжений. Поле перемещений изображено на рисунках 3.20–3.22.

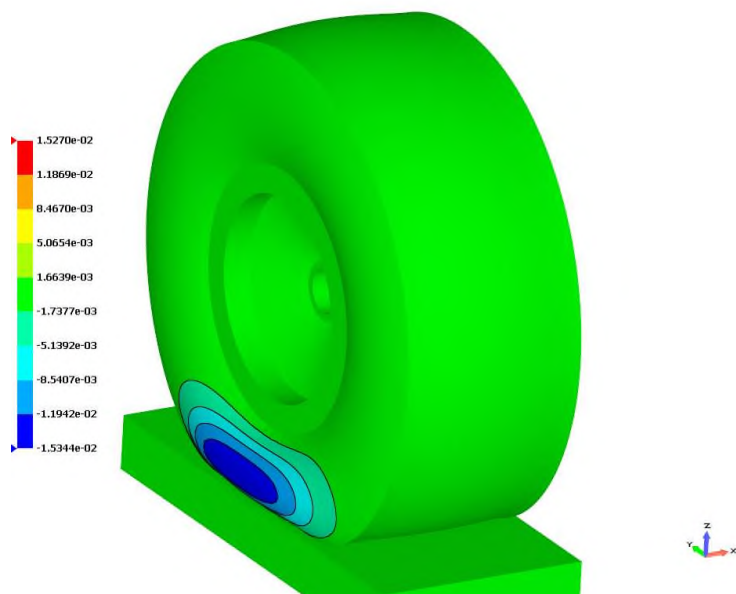


Рисунок 3.20 – Поле перемещений u_1 (м).

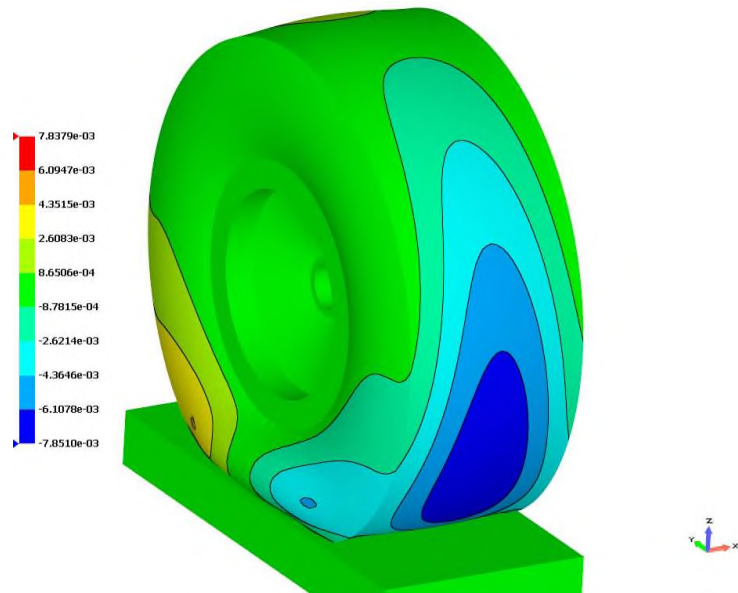


Рисунок 3.21 – Поле перемещений u_2 (м).

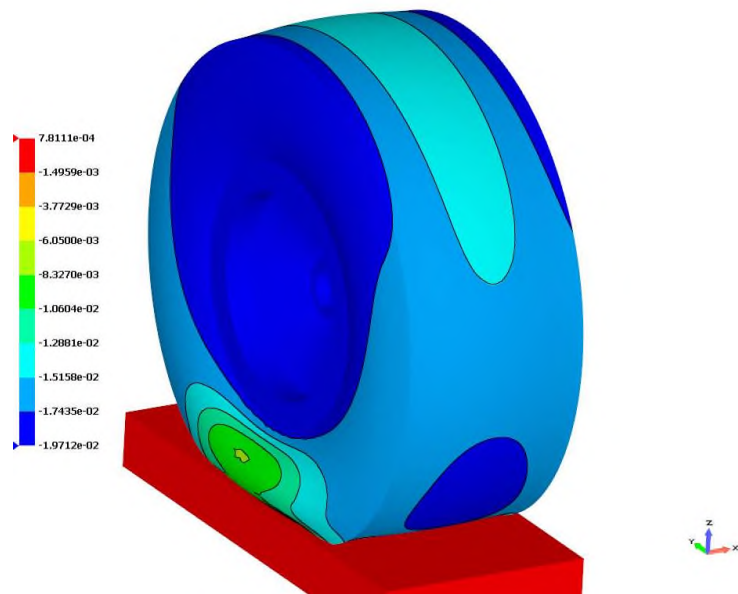


Рисунок 3.22 – Поле перемещений u_3 (м)

Из рисунков видно, что нижняя часть боковины покрышки значительно деформируется под действием нагрузки. Протектор также перемещается в радиальном направлении вследствие внутреннего давления в шине. На рисунках 3.23–3.25 изображено сечение колеса, и также поля перемещений.

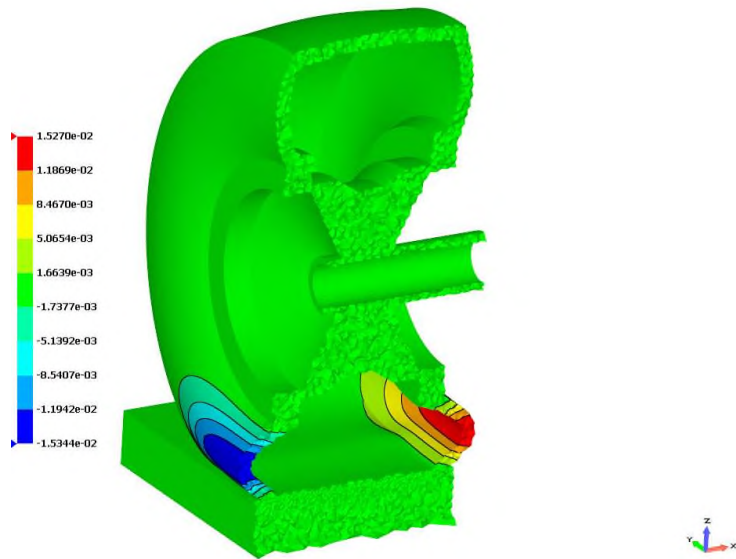


Рисунок 3.23 – Поле перемещений u_1 (м).

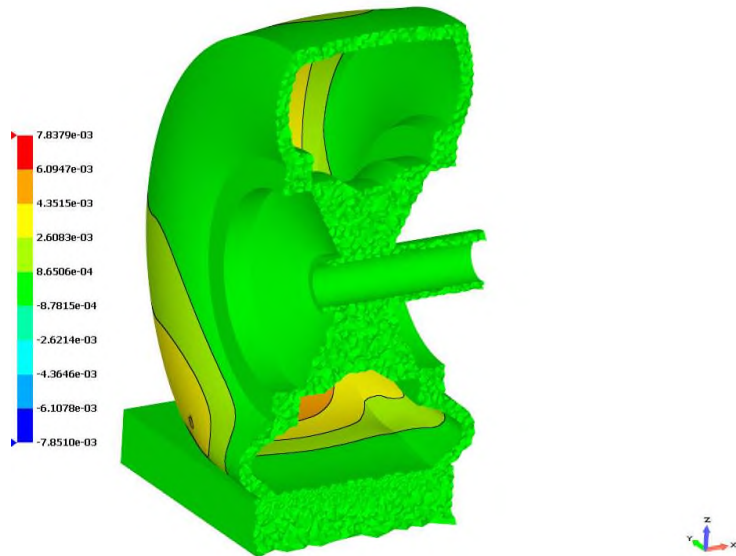


Рисунок 3.24 – Поле перемещений u_2 (м).

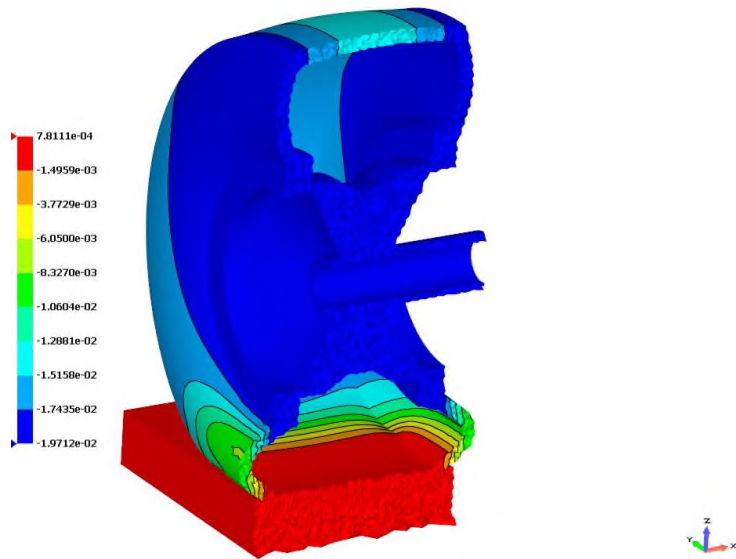


Рисунок 3.25 – Поле перемещений u_3 (м)

Поле компонент тензора градиента деформаций изображено на рисунках 3.26–3.34.

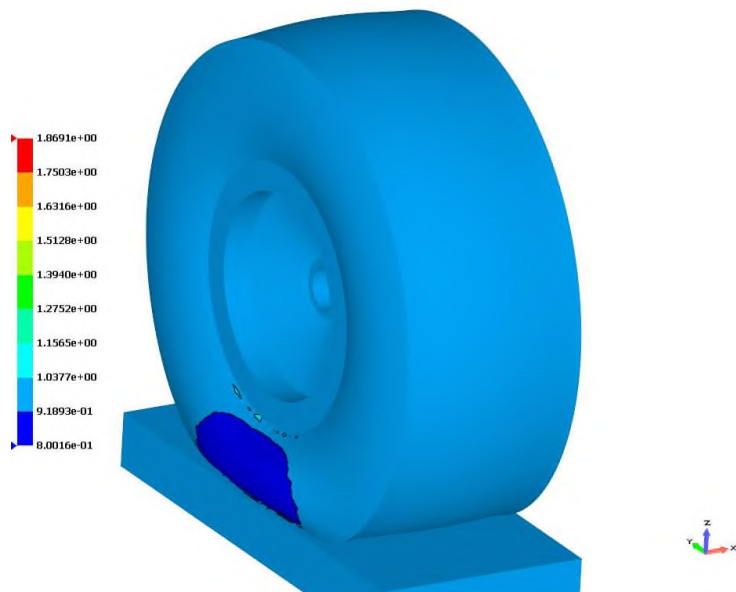


Рисунок 3.26 – Поле тензора градиента деформаций F_{11} в макрозадаче

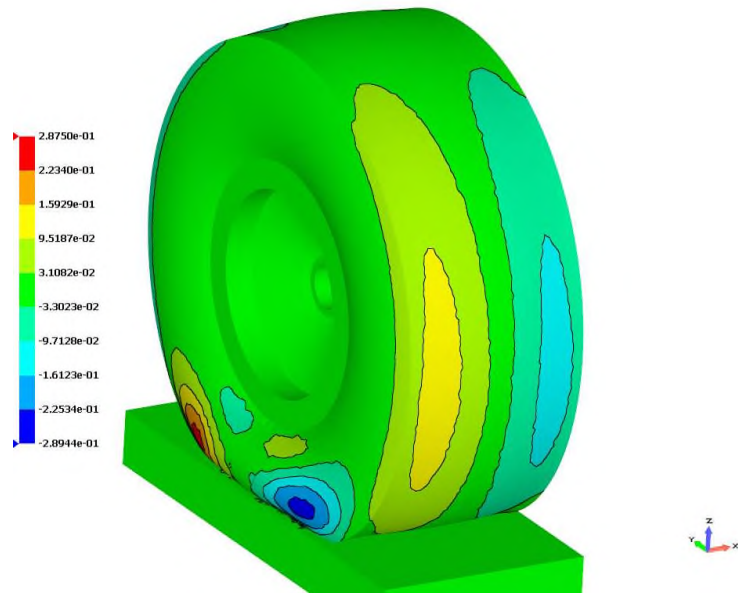


Рисунок 3.27 – Поле тензора градиента деформаций F_{12} в макрозадаче

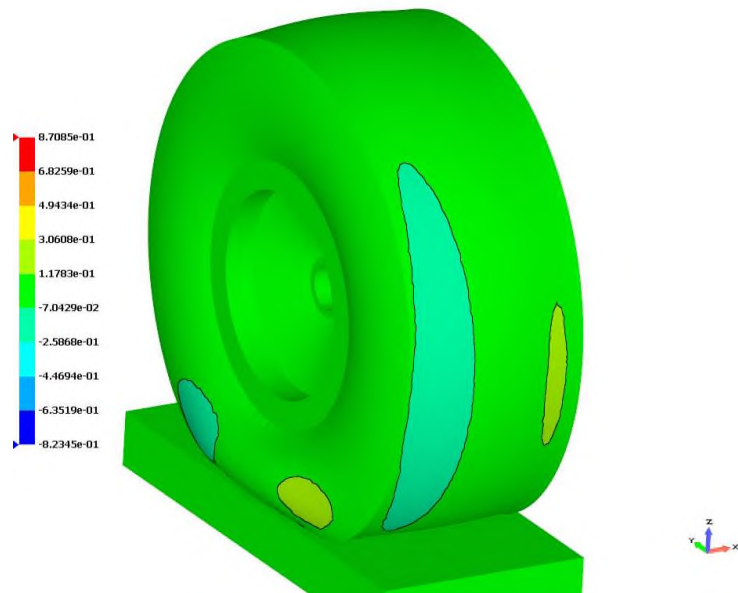


Рисунок 3.28 – Поле тензора градиента деформаций F_{21} в макрозадаче

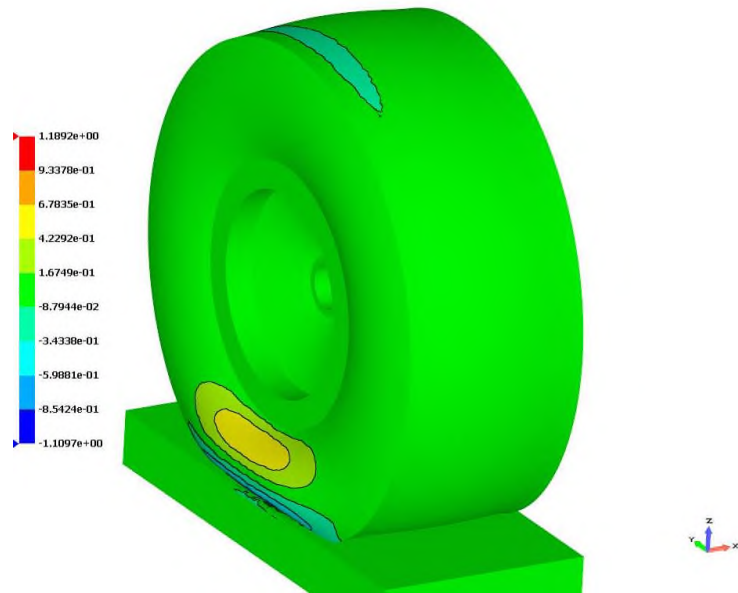


Рисунок 3.29 – Поле тензора градиента деформаций F_{13} в макрозадаче

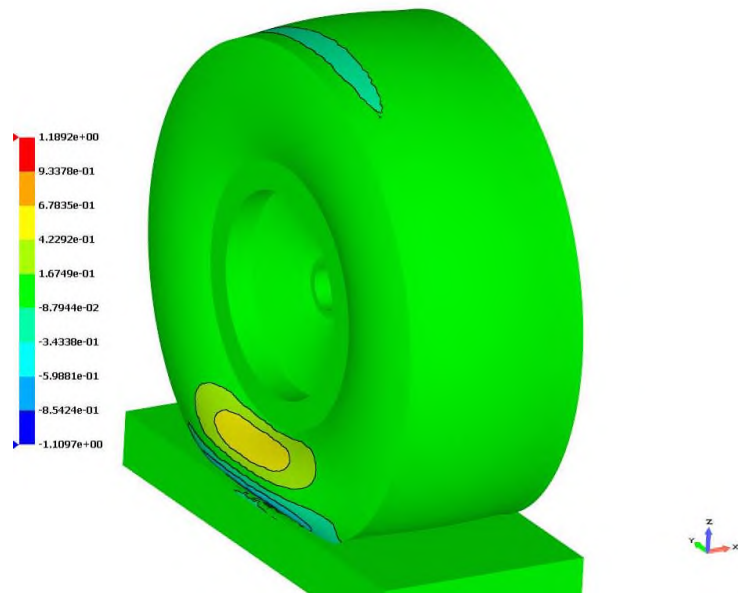


Рисунок 3.30 – Поле тензора градиента деформаций F_{31} в макрозадаче

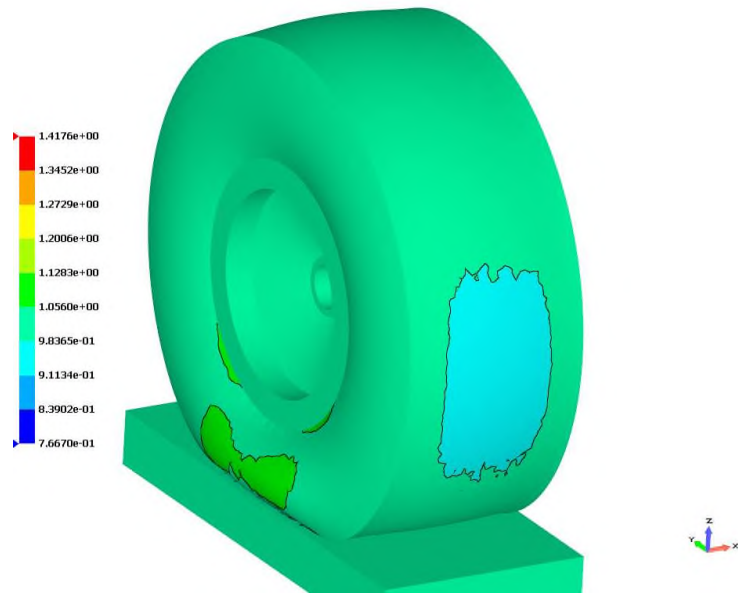


Рисунок 3.31 – Поле тензора градиента деформаций F_{22} в макрозадаче

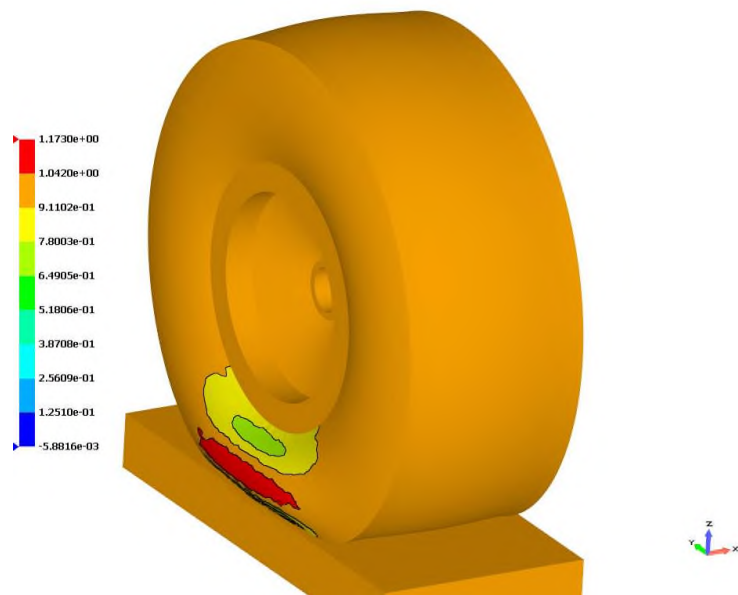


Рисунок 3.32 – Поле тензора градиента деформаций F_{33} в макрозадаче

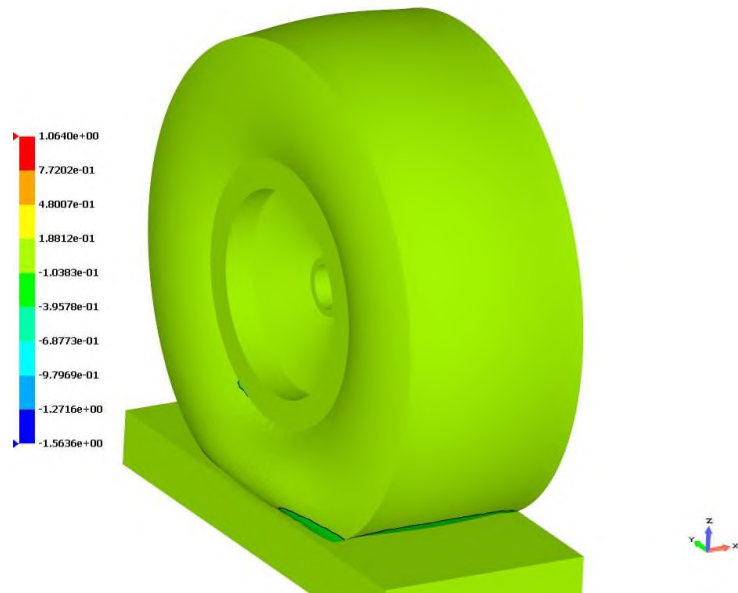


Рисунок 3.33 – Поле тензора градиента деформаций F_{23} в макрозадаче

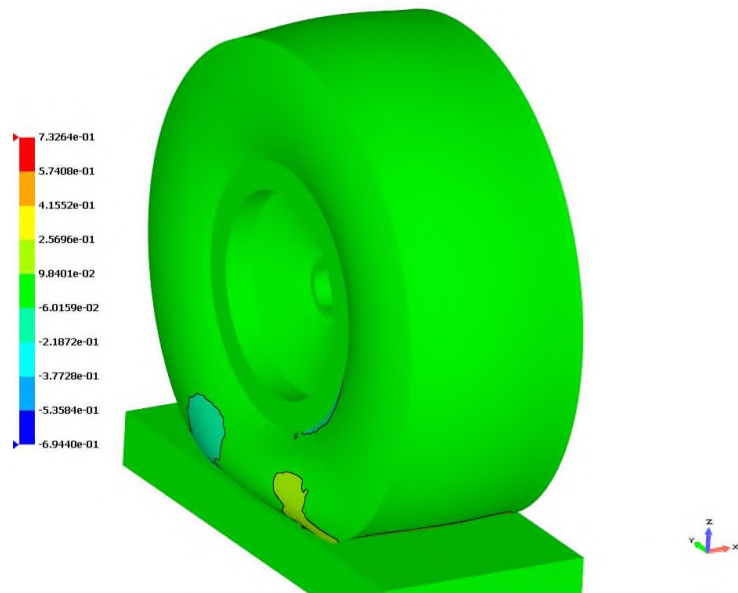


Рисунок 3.34 – Поле тензора градиента деформаций F_{32} в макрозадаче

Видим, что наибольшее отклонение от недеформированного состояния среди нормальных компонент демонстрирует F_{33} , а среди сдвиговых – F_{13} и F_{31} , что соответствует характеру нагружения.

На рисунках 3.35–3.40 представлены компоненты тензора напряжений Коши.

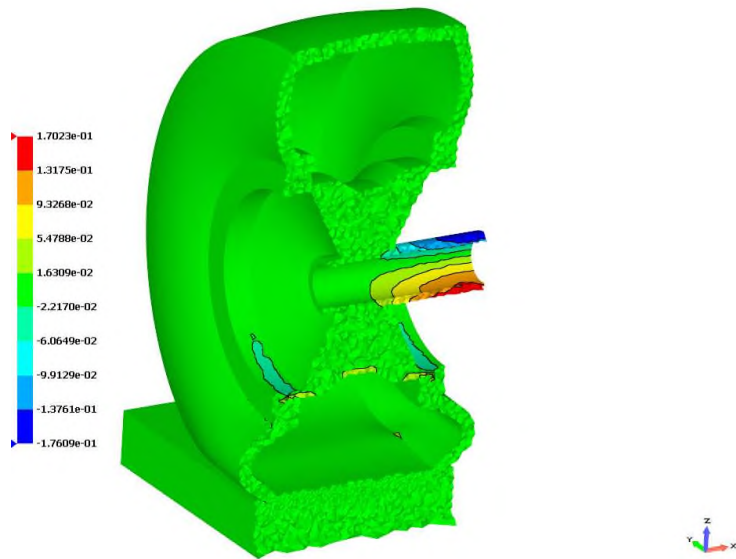


Рисунок 3.35 – Поле компоненты тензора напряжений Коши T_{11} (ГПа) в макрозадаче

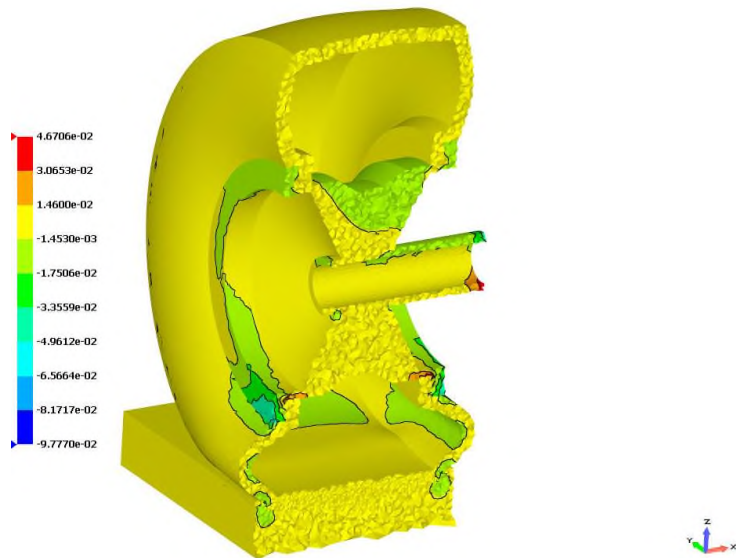


Рисунок 3.36 – Поле компоненты тензора напряжений Коши T_{22} (ГПа) в макрозадаче

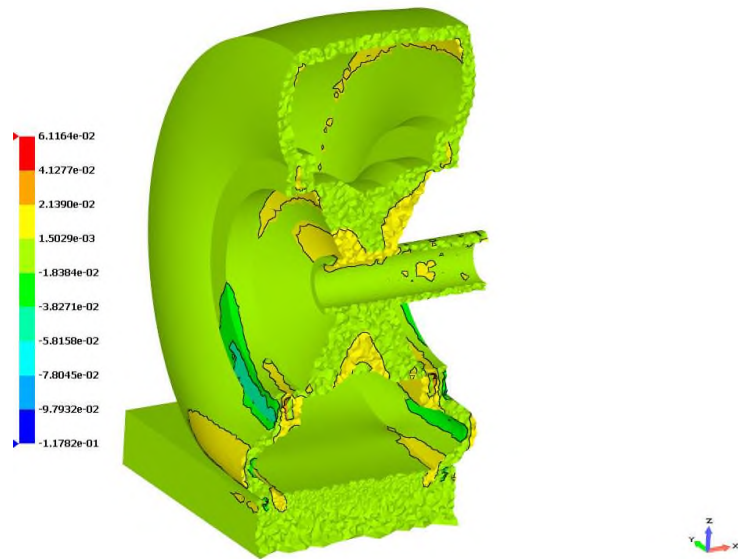


Рисунок 3.37 – Поле компоненты тензора напряжений Коши T_{33} (ГПа) в макрозадаче

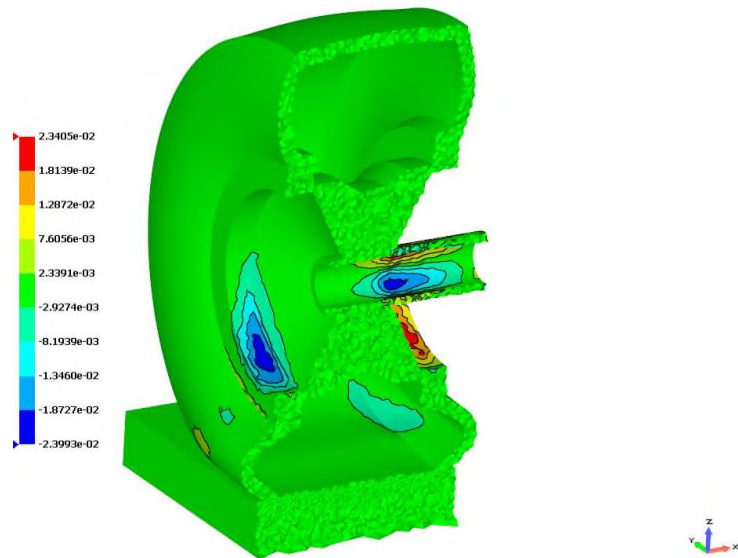


Рисунок 3.38 – Поле компоненты тензора напряжений Коши T_{12} (ГПа) в макрозадаче

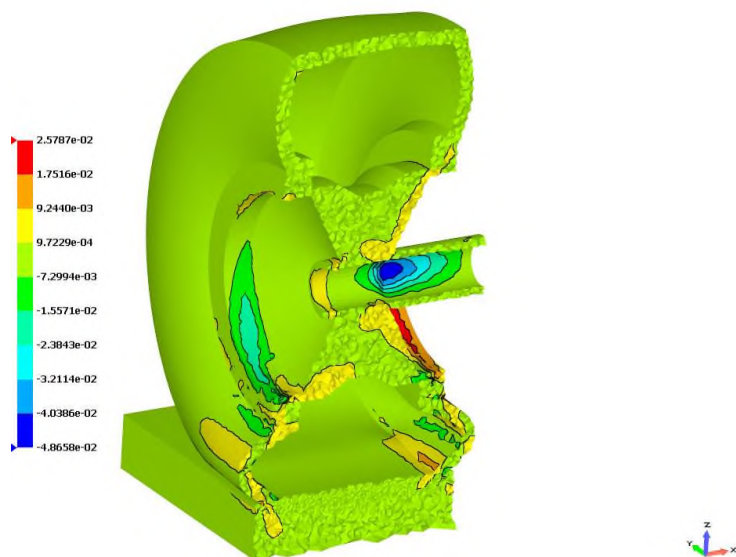


Рисунок 3.39 – Поле компоненты тензора напряжений Коши T_{13} (ГПа) в макрозадаче

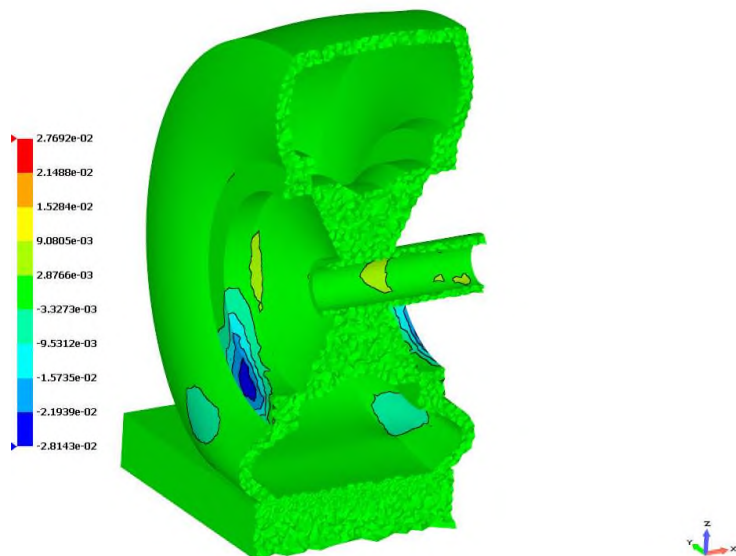


Рисунок 3.40 – Поле компоненты тензора напряжений Коши T_{23} (ГПа) в макрозадаче

Заметим, что наибольших значений напряжения достигают в стальном диске: в месте контакта с крышкой и вблизи поверхности приложения силы. Напряжения же в крышке остаются умеренными.

Рассмотрим точку, находящуюся под воздействием больших сдвиговых деформаций (рис 3.41).

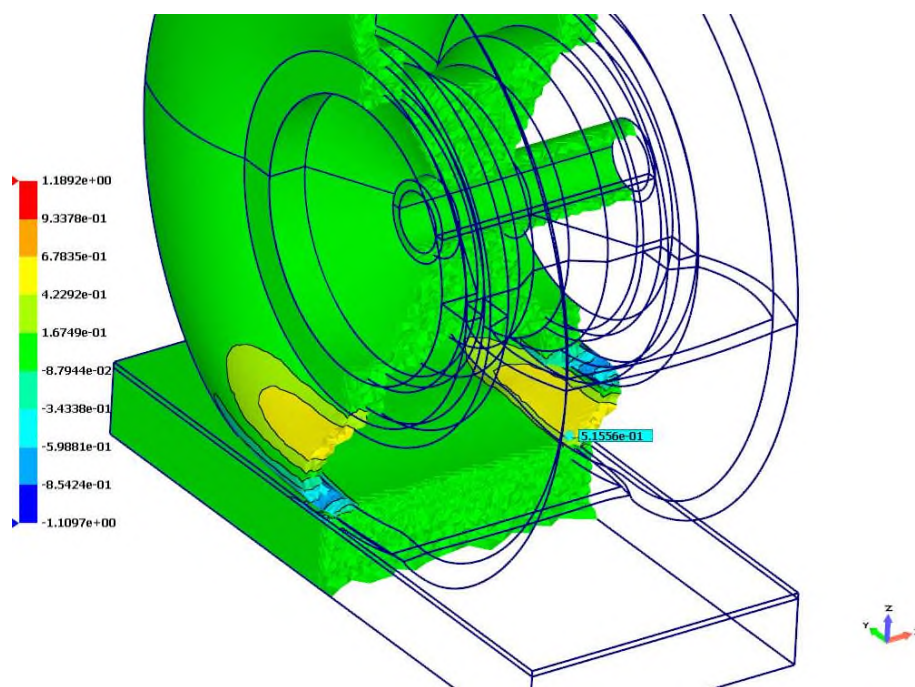


Рисунок 3.41 – Тензор градиента деформаций F_{13} и выбранная точка

Матрица компонент тензора градиента деформаций имеет в выбранной точке следующее значение.

$$[\bar{F}] = \begin{pmatrix} 0.952426 & 0.00729914 & 0.515559 \\ -0.00321261 & 0.996277 & -0.00018474 \\ -0.148098 & -0.00273152 & 1.04018 \end{pmatrix}$$

Решим задачу на ЯП КМ2 с значением осреднённого тензора градиента деформаций в выбранной точке. На рисунке 3.42 изображено решение этой микрозадачи в виде полей перемещений на ячейке. На рисунке 3.43 изображены соответствующие поля тензора градиента деформаций, а на рисунке 3.44 – тензора напряжений Коши.

Из рисунков 3.42-3.44 видим, что деформируется в основном мягкая матрица. Сферы же испытывают поворот в толще матрицы и практически не деформируются.

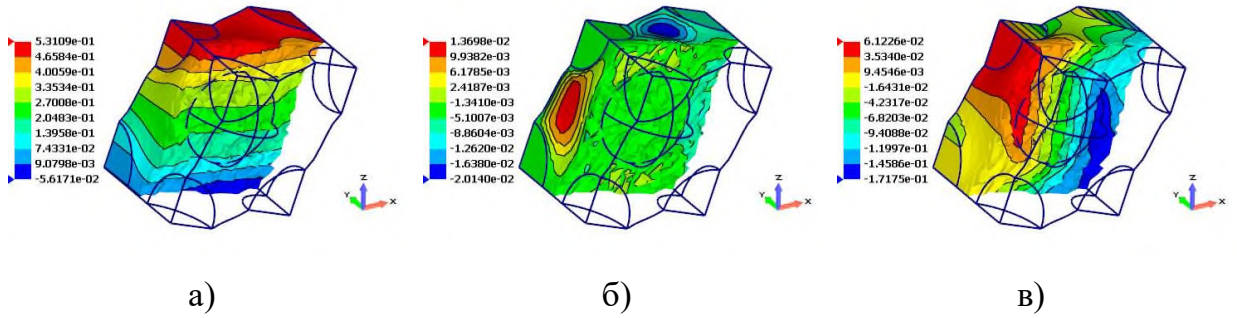
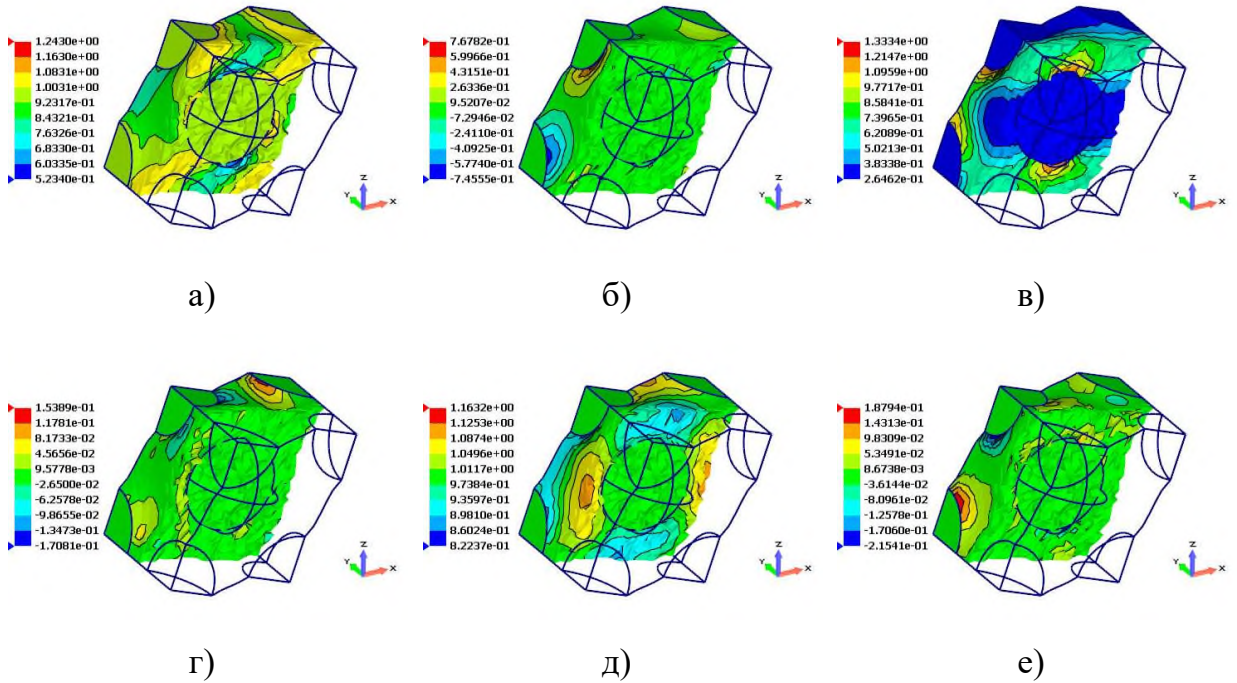


Рисунок 3.42. – Поле перемещений на деформированной ЯП КМ2, рассчитанное в выделенной точке макрозадачи:

а) компонента u_1 ; б) компонента u_2 ; в) компонента u_3 .



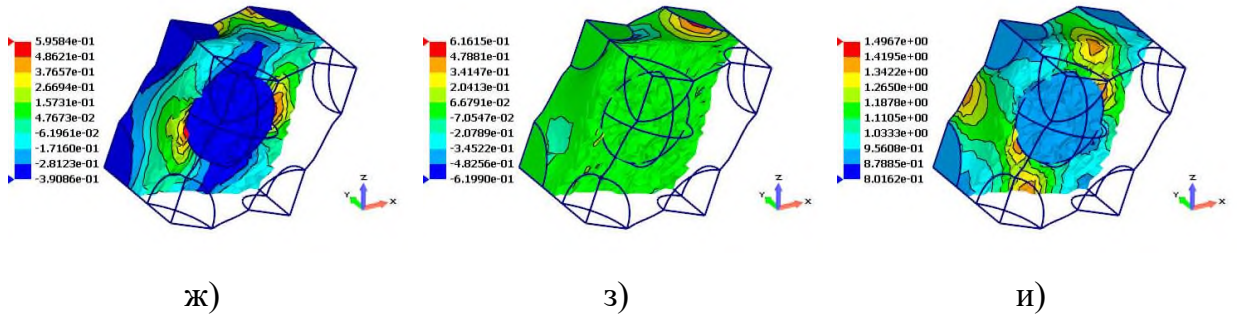


Рисунок 3.43. – Поле градиента деформаций на деформированной ЯП КМ2 рассчитанное в выделенной точке макрозадачи:

- а) компонента F_{11} ; б) компонента F_{12} ; в) компонента F_{13} ;
 г) компонента F_{21} ; д) компонента F_{22} ; е) компонента F_{23} ;
 ж) компонента F_{31} ; з) компонента F_{32} ; и) компонента F_{33} .

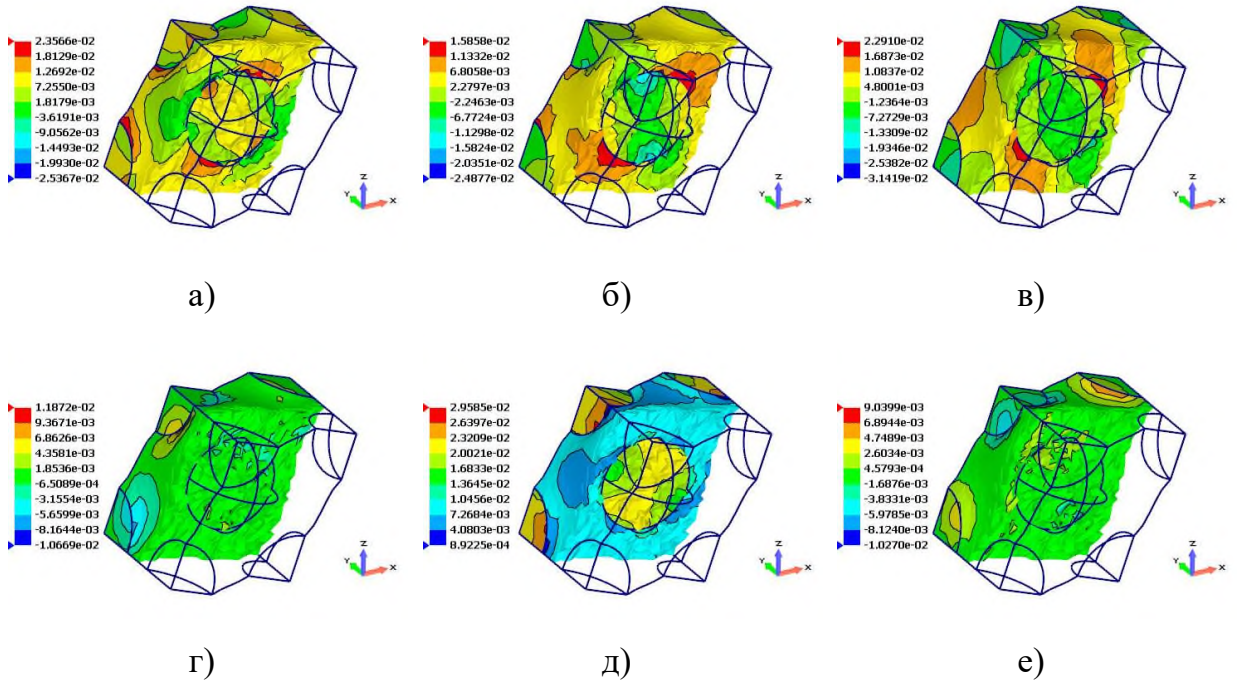


Рисунок 3.44. – Поле тензора напряжений Коши на деформированной ЯП КМ2 рассчитанное в выделенной точке макрозадачи:

- а) компонента T_{11} (ГПа); б) компонента T_{22} (ГПа); в) компонента T_{33} (ГПа);
 г) компонента T_{12} (ГПа); д) компонента T_{13} (ГПа); е) компонента T_{23} (ГПа).

Нормальные напряжения достигают максимальных значений в областях контакта сфер с матрицей. Сдвиговые же напряжения T_{13} достигают экстремальных значений в наполнителе.

Таким образом решена задача демпфирования шины в составе колеса, как на макроуровне, с получением значения осредненных полей перемещений, деформаций и напряжений в конструкции в целом, так и на микроуровне – с получением перемещений, деформаций и напряжений в ЯП в выбранной точке конструкции.

Продемонстрировано, что комплекс разработанных методик (решение локальных задач, вычисление осредненных характеристик КМ и решение многомасштабных задач) может быть успешно применен для решения многомасштабных задач нелинейного деформирования конструкций из композиционных материалов с конечными деформациями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

1) Разработан вариант метода асимптотического осреднения КМ со сложными трехмерными структурами армирования при конечных деформациях с использованием универсальных полулинейных моделей упругих сред;

2) Разработана численная конечно-элементная методика решения нелинейной задачи упругости с конечными деформациями на полных ячейках периодичности (ЯП), без использования дополнительных предположений относительно геометрической симметрии ЯП относительно координатных плоскостей;

3) Разработана методика построения аналитических эффективных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных нелинейно-упругих КМ на основе аппроксимации диаграмм деформирования, полученных в результате численного решения серии локальных задач на ячейке периодичности;

4) Решены две задачи многомасштабного расчета напряженно-деформированного состояния конструкций с применением нелинейно-упругих КМ с конечными деформациями на макроуровне и на микроуровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамов А. А. Описание вязкоупругого поведения несжимаемых и слабо-сжимаемых материалов при конечных деформациях. // Автореф. дис. канд. физ. мат. наук. - М.: 1979. - 21 с.
2. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Эдиториал УРСС, 2003.
3. Бахвалов Н. С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Доклады АН СССР. — 1975. — Т. 221, №3. — С. 516-519.
4. Бахвалов Н. С. Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1975. 225, № 2. 249–252.
5. Бахвалов Н. С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. 218, № 5. 1046–1048.
6. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах: математические задачи механики композиционных материалов. — Москва : Наука, 1984. — 352 с.
7. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Эффективные модули композитов, армированных системой пластин и стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 38, № 5, 1998, 813 с.
8. Бердичевский В. Л. Пространственное осреднение периодических структур // Доклады АН СССР. — 1975. - Т. 222, №3. - С. 565-567.
9. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. — Днепропетровск: Пороги, 2008. — 197 с.
10. Браутман Л., Крок Р. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов / под ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – 568 с.

11. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. — Москва: Наука. Физматлит., 1997. — 288 с.
12. Гольденблатт И. И. Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1965. — 336 с.
13. Горбачёв В. И., Метод осреднения Бахвалова–Победри в механике композитов, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2016, номер 6, 41–46
14. Григорян С. С. Об осреднении физических величин // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 254, №4. — С. 1081-1085.
15. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. - 455 с.
16. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. - 270 с.
17. Димитриенко Ю. И. Кашкаров А. И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечного элемента// Вестник МГТУ им.Н. Э. Баумана. Естественные науки. – №2.-2002. – С. 95-108.
18. Димитриенко Ю. И. Механика сплошной среды, т.1. Тензорный анализ. – М.:Изд-во МГТУ им.Н. Э. Баумана. – 2011. – 367 с.
19. Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. – М.: Физматлит. – 2009. – 610с. ISBN 978-5-9221-1110-2.
20. Димитриенко Ю. И. Основы механики твердого тела/ Механика сплошной среды. Т. 4. – Изд-во МГТУ им.Н. Э. Баумана. – 2013. – 580 с.
21. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Каримов С. Б., Кольжанова Д. Ю. Моделирование эффективных характеристик трансверсально изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 4, выпуск 20, с. 16–34
22. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упруго-пластических композиционных материалов. М.: Издательство МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2024, 228 с.

23. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Кольжанова Д. Ю., Каримов С. Б., Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения. Математическое моделирование и численные методы, 2017, выпуск 13, с. 32–54
24. Димитриенко Ю. И., Каримов С. Б., Кольжанова Д. Ю. Моделирование эффективных упругих характеристик для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями. Ключевые тренды в композитах: наука и технологии. Сборник материалов Международной научно-практической конференции. 2019. С. 183-192.
25. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. И., Макашов А. А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. — 2007. — №1. — С. 26-46.
26. Дунаев И. М. Об одном варианте нелинейной теории термовязкоупругости эластомеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1985. - Т. 1.-С. 110-117.
27. Дунаев И. М. Об одном варианте нелинейной теории термовязкоупругости эластомеров. В кн.: Пятый всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Тез докл. - Алма-Ата, Изд-во науки Казахской ССР, 1981, с. 142-143.
28. Дунаев И. М. Определяющие соотношения нелинейной теории термовязкоупругости эластомеров и термоэластопластов. В кн.: VII Всесоюзная конференция по прочности и пластичности. Тез. докл. - Горький, 1978, с. 50-51.
29. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. - 190 с.
30. Жилин П. А. Актуальные проблемы механики. Сборник статей по материалам докладов на ежегодной международной летней школе-конференции “Актуальные проблемы механики”. Том 1. – СПб.: Издание Института проблем машиноведения Российской Академии наук. 2006. 306 с.
31. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред : учебное пособие / П. А. Жилин ; М-во образования и науки Российской Федерации, Санкт-Петербургский гос. политехнический ун-т. – Санкт-Петербург : Изд-во Политехнического ун-та, 2012. – 584 с. – ISBN 978-5-7422-3248-3.

32. Зингерман К. М. Аналитическое решение задачи Ламе для полой сферы для некоторых классов материалов при больших упругих и пластических деформациях / К. М. Зингерман // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике : Сборник тезисов докладов. В 4-х томах, Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2023. – С. 787-788.
33. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. - 287 с.
34. Каламкарров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. - 1987. - Т. 19. - С. 78-147.
35. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наукова думка. 1982, 262 с.
36. Колтунов М. А. Постановка задачи геометрической нелинейности теории вязкоупругости // Механика полимеров. 1975. №2. С. 234-240.
37. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. - 340 с.
38. Левин В. А., Зингерман К. М., Белкин А. Э.. Точное решение одной задачи о равновесии составной плиты с предварительно нагруженными частями из несжимаемых упругих материалов при наложении больших деформаций // Чебышевский сборник. – 2022. – Т. 23, № 4(85). – С. 251-261. – DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-251-261.
39. Левин В. А., Зингерман К. М., Яковлев М. Я. [и др.]. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, № 2(70). – С. 528-541. – DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-528-541.
40. Левин В. А., Калинин В. В., Зингерман К. М., Вершинин А. В. Развитие дефектов при конечных деформациях, Компьютерное и физическое моделирование, М. Физматлит. 2007, 392 с.
41. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. - 640 с.

42. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. — Киев : Вища школа, 1991. — 131 с.
43. Муравлева Л. В., Шешенин С. В. Эффективные свойства железобетонных плит при упругопластических деформациях // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2004. — №3. — С. 62-65.
44. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. - 370 с.
45. Панасенко Т. П., Резцов М. В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Доклады Академии Наук СССР. — 1987. — Т. 294, №5. — С. 1061-1065.
46. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. — Москва : Издательство Московского университета, 1984. — 336 с.
47. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. — М.: Наука, 1986 — 232 с.
48. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.-384 с.
49. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 472 с.
50. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.- М.: Мир, 1975. — 592 с.
51. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 192 с. ISBN 5-02-013807-X.
52. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. — Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние. — 1986. — 336с.
53. Черных К. Ф. Теория больших упругих деформаций / К. Ф. Черных, З. Н. Литвиненкова. Л: Изд. ЛГУ, 1988. 253 с.
54. Шешенин С. В., Демидович П. Н. Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А. А. Ильюшина // Применение метода осреднения для построения слоистого конечного элемента. — Москва : Едиториал УРСС, 2006. — С. 432-437.

55. Шешенин С. В., Икунь Д., Чистяков П. В., Артамонова Н. Б. Моделирование резинокордных слоев при квазистатическом нагружении. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 4. – С. 49-59. – DOI 10.15593/perm.mech/2021.4.06.
56. Шешенин С. В. Осреднение нелинейных задач в механике композитов / С. В. Шешенин, М. И. Савенкова // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2012. – № 5. – С. 58-62. – EDN PJKTB.
57. Шешенин С. В. Трехмерное моделирование шины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2007. – № 3. – С. 13-21.
58. Aboudi J. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. // Int. J. Multiscale Comput. – 2008. – vol. 6 (2008). – PP. 411–434.
59. Andrianov I. V., Danishevs'kiy V. V., Kalamkarov A. L. Asymptotic justification of the three-phase composite model// Composite Structures. — 2007. — Vol. 77, №3. — P. 395.
60. Andrianov I. V., Danishevs'kiy V. V., Kalamkarov A. L. Micromechanical analysis of fiber-reinforced composites on account of influence of fiber coatings I I Composites Part B: Engineering. — 2008. — Vol. 39, №5. — P. 874881.
61. Andrianov I. V., Danishevs'kiy V. V., Weichert D. Asymptotic determination of effective elastic properties of composite materials with fibrous square-shaped inclusions // European Journal of Mechanics-A/Solids. — 2002. — Vol. 21, №6. — P. 1019-1036.
62. Andrianov I. V., Danishevs'kiy V. V., Weichert D. Asymptotic Study of Imperfect Interfacial Bonding in Periodic Composite Materials // Mechanics of the 21st Century. Proceedings of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. — Warsaw, Poland, 2004. — P. 15-21.
63. Andrianov I.V., Bolshakov V. I., Danishevs'kiy V. V., Weichert D. Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials // Proceedings of the Royal Society A. — 2008. — Vol. 464, №2093. - P. 1181-1201.
64. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam : North-Holland, 1978.

65. Bonet J., Wood R. D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. — Cambridge, USA, 1997.
66. Bourgat J. F. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients.— Rapport de Recherche, 1978, № 277, I. R. I. A. Rocquencourt, France.
67. Boutin C. Study of permeability by periodic and self-consistent homogenisation I I European Journal of Mechanics-A/Solids. - 2000. - Vol. 19, №4. - P. 603-632.
68. Boutin C., Hans S. Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures // Computers and Geotechnics. — 2003. — Vol. 30, №4. — P. 303-320.
69. Doghri, I., El Ghezal, M. I., Adam, L. Finite strain mean-field homogenization of composite materials with hyperelastic-plastic constituents // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol. 81. – PP. 40-62. – DOI: 10.1016/j.ijplas.2016.01.009.
70. Gerhard A. Holzapfel, Thomas C. Gasser. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2001. - Vol. 190, №34. - P. 4379-4403.
71. Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Rodríguez-Ramos R., Sabina F. J. Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I. Elastic and square symmetry I/ Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2001. — Vol. 49, №7. — P. 1445-1462.
72. Hatami, M., Kent, N., Whyte, T., & Bilston, L. (2025). Mechanical test on different elastomer materials based on the ASTM D412-16 standard // Zenodo. — 2025.
73. Hui Yang, Yunpeng Jiang, Puhui Chen, Hualin Fan. Micromechanics models of particulate filled elastomer at finite strain deformation // Composites: Part B. – 2013. – Vol 45. – PP. 881-887.
74. J. Moraleda, J. Segurado, J. Llorca Finite deformation of porous elastomers: a computational micromechanics approach. Philosophical Magazine, Vol. 87, No. 35, 11 December 2007, 5607–5627

75. John F. On finite deformation of elastic isotropic material // Inst. Math. Sci. New-York Univ. Report IMM-NYU. 1958. № 250.
76. Kalamkarov A. L. Composite and reinforced elements of construction. — Chichester: John Wiley & Sons, 1992. - 286 p.
77. Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G. A new asymptotic model for a composite piezoelastic plate // International Journal of Solids and Structures. — 2001. — Vol. 38, №34. — P. 6027-6044.
78. Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G. Analysis, design and optimization of composite structures. — New York : J. Wiley & Sons, 1997.
79. Kaliske M. A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2000. - Vol. 185 №2–4. - P. 225-243.
80. Lockett F. J. Nonlinear viscoelastic solids. London - New-York: Acad. Press, 1972. - 196 p.
81. M. Brun, O. Lopez-Pamies, P. Ponte Castañeda. Homogenization estimates for fiber-reinforced elastomers with periodic microstructures // International Journal of Solids and Structures. - 2007. - Vol. 44., №№18–19. - P. 5953-5979.
82. Marcellini P. Periodic solutions and homogenization of non linear variational problems.— Annali di Matematica, 1978, № 117.
83. Marcellini P., Sbordone C. Sur quelques de G-Convergence et d'homogenisation non-lineaires.— C R. Acad. sci. Paris, 1977, 284.
84. Meguid S. A., Kalamkarov A. L. Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure // International Journal of Solids and Structures. — 1994. — Vol. 31, №3. — P. 303-316.
85. Miehe C., Schröder J., Bayreuther C. On the homogenization analysis of composite materials based on discretized fluctuations on the micro-structure // Acta Mechanica. — 2002. — Vol. 155, №1-2. — P. 1-16.
86. Ogden R. W. Large Deformation Isotropic Elasticity – On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids, Proceedings of the Royal

Society of London/R. W. Ogden//Series A, Mathematical and Physical Sciences. – Vol. 326. – No. 1567 (1 February 1972). – pp. 565-584.

87. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, S B Karimov and D Yu Kolzhanova Universal models of the constitutive relations for transversely isotropic compressible composites with finite strains IOP Conference Series: Material Science and Engineering, 2020. volume 934 (2020) 012012 doi:10.1088/1757-899X/934/1/012012 pp.1-6.

88. Yu I Dimitrienko, S B Karimov, D Yu Kolzhanova Modeling of the effective universal constitutive relations for elastic laminated composites with finite strains IOP Journal of Physics: Material Science and Engineering, 2019. volume 683 № 012006 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012006 pp.1-6.

89. Zdeněk P. Bažant, Alessandro Beghini. Stability and finite strain of homogenized structures soft in shear: Sandwich or fiber composites, and layered bodies // International Journal of Solids and Structures. - 2006. - №43. - P. 1571-1593.

90. Zeleniakienė D., Griškevičius P. The Influence of Pores Distribution Mode on the Stress of Porous Elastomeric Materials in the Case of Large Deformations. Materials science (medžiagotyra). Vol. 11, No. 3. 2005.

91. Zohdi T. I. Homogenization methods and multiscale modeling // Encyclopedia of Computational Mechanics. — John Wiley & Sons, 2004.