

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



ВО АНЬ ХИЕУ

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ  
УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Фирсанов Валерий Васильевич

Москва – 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ</b> .....	11
1.1. Обзор литературы .....	11
1.2. Постановка задачи.....	20
1.3. Основные уравнения и граничные условия уточненной теории подкрепленных круговых цилиндрических оболочек .....	24
1.4. Методика определения напряженно-деформированного состояния.....	40
1.5. Выводы по первой главе.....	42
<b>ГЛАВА 2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ</b> .....	43
2.1. Основные уравнения теории цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами.....	43
2.2. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов .....	54
2.3. Общее решение однородных систем дифференциальных уравнений.....	59
2.4. Анализ корней характеристического уравнения .....	67
2.5. Частные решения неоднородных систем дифференциальных уравнений, соответствующие внешним нагрузкам .....	67
2.6. Результаты расчетов и параметрического анализа.....	89
2.7. Выводы по второй главе.....	97
<b>ГЛАВА 3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ</b>	

<b>КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ</b> .....	99
3.1. Основные уравнения теории цилиндрических оболочек, подкреплённых продольными ребрами .....	99
3.2. Конструктивно-ортотропная модель деформирования цилиндрических оболочек, подкреплённых продольными ребрами .....	105
3.3. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов .....	108
3.4. Общее решение однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.....	111
3.5. Частные решения неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений .....	114
3.6. Результаты расчетов и параметрического анализа.....	121
3.7. Выводы по третьей главе.....	125
<b>ГЛАВА 4. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ ЗАКРЕПЛЕННОГО КРАЯ</b> .....	127
4.1. Напряженное состояние типа «погранслои».....	127
4.2. Напряженно-деформированное состояние оболочки вблизи упруго закрепленного края .....	133
4.3. Параметрический анализ влияния податливости закрепленного края.....	136
4.3. Выводы по четвертой главе.....	139
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	141
<b>СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ</b> .....	144
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	145

## ВВЕДЕНИЕ

Конструкции современных объектов машиностроения, в том числе авиационно-космической техники, состоят из различных деталей, узлов, и панелей, соединяемых между собой различными способами. Наличие соединений предъявляет к конструкции повышенные требования в отношении ее прочностных свойств, что заставляет разрабатывать более совершенные методы расчета.

В настоящее время инженерные расчеты всех видов соединений, в том числе фланцевых, сварных и клеевых, применяемых для крепления тонкостенных элементов конструкций, как правило, базируются на результатах классической теории пластин и оболочек типа Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера, которая позволила привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. Современная техника выдвинула в теории пластин и оболочек более сложные проблемы, чем те, которые исследуются классической теорией. Один из аспектов этих проблем заключается в построении более достоверных методов определения напряженно-деформированного состояния (НДС) вблизи зон искажения напряженного состояния (области вблизи крепления элементов конструкций, стыков, скачкообразного изменения жесткостных характеристик, в том числе подкрепляющих элементов, действия локальных и быстро изменяющихся нагрузок), а также элементов конструкций, выполненных из неоднородных материалов. Это объясняется тем, что для этих случаев классическая теория не дает удовлетворительного соответствия с практикой в силу существенной трехмерности НДС.

Поэтому для описания объемного НДС необходимо построить уточненную теорию пластин и оболочек, базирующуюся на трехмерных уравнениях теории упругости. Учет трехмерности НДС в элементах конструкций в сочетании с методами механики разрушения дает возможность оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах, более обоснованно выбрать тип конструкционного материала и рациональным образом распределить его вблизи концентраторов

напряжений.

Существующие в настоящее время варианты уточненной теории пластин и оболочек заключаются в построении основного НДС, базирующегося на классической теории, и дополнительного напряженного состояния типа «погранслоя» - самоуравновешенного быстро затухающего при удалении от края НДС. Это дает возможность более достоверно оценить НДС тонкостенных конструкций как во внутренних областях, так и в узких краевых зонах вблизи нерегулярностей типа соединений, разностенных стыков, подкрепляющих элементов и т.п.

При создании летательных аппаратов широкое применение получили тонкостенные конструкции, обеспечивающие сочетание высокой прочности и жесткости при относительно небольшой массе и представляющие собой удлиненные цилиндрические оболочки, подкрепленные продольным (стрингерами) и поперечным (шпангоутами) силовым набором.

Как показывает опыт эксплуатации летательных аппаратов, в зонах скачкообразного изменения жесткостных характеристик наиболее часто происходят разрушения элементов конструкций. Можно предположить, что в зонах наличия подкрепляющих элементов в пластинах и оболочках возникает дополнительные НДС типа «погранслоя», которые могут вносить значительный вклад в общее НДС пластин и оболочек и повлиять на характеристики их прочности и долговечности.

Поэтому целью данной работы является построение математических моделей определения НДС в круговых цилиндрических оболочках, подкрепленных продольным и поперечным наборами.

Построение уточненных теорий и методов определить НДС подкрепленных цилиндрических оболочек позволит решить проблему расчета на прочность и долговечность таких авиационных конструкций как силовые корпуса летательных аппаратов, различные переходные зоны и стыки, а также элементов конструкций в различных отраслях машиностроения и в строительном деле.

Результаты расчета общего и местного НДС подкрепленных цилиндрических оболочек могут быть использованы при обосновании режимов лабораторных статических и динамических испытаний.

Поэтому разработка методов прогнозирования НДС подкрепленных цилиндрических оболочек, уточняющих результаты классической теории и применяемых на этапах проектирования перспективной техники, представляет собой **актуальную проблему**.

**Объект диссертационного исследования** – круговые цилиндрические оболочки, подкрепленные кольцевыми и продольными ребрами.

**Предмет исследования** – математические модели уточненной теории подкрепленных цилиндрических оболочек, позволяющие уточнить результаты классической теории в зонах искажения НДС, а именно: вблизи жестко и упруго закрепленного края, а также подкрепляющих элементов.

**Целью диссертационной работы** является построение математических моделей НДС круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных продольным и поперечным набором на основе уточненной теории; исследование НДС подкрепленных круговых цилиндрических оболочек с различными краевыми условиями при действии нагрузок различной изменчивости.

**Задачи работы**, решаемые для достижения поставленной цели:

1. Построение системы уравнений равновесия подкрепленных цилиндрических оболочек и соответствующих граничных условий на основе трехмерных уравнений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа.

2. Построение системы уравнений равновесия и граничных условий в перемещениях для цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами.

3. Построение системы уравнений равновесия и граничных условий в перемещениях для цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами.

4. Разработка метода решения сформулированной краевой задачи для

цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми и продольными ребрами.

5. Проведение параметрических исследований НДС подкрепленных оболочек при различных видах нагружения, их геометрических параметров и свойств конструкционных материалов.

6. Анализ влияния напряженного состояния типа «погранслоя» на общее НДС оболочки.

7. Разработка методики учета податливости упруго закрепленного края на основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством.

**Методы исследования.** В диссертационной работе основу исследований составляют трехмерные уравнения теории упругости в триортогональной криволинейной системе координат; разложение перемещений оболочки в полиномы по нормальной к срединной поверхности координате на одну степень выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява; вариационный принцип Лагранжа; разложение в тригонометрические ряды; аппарат операционного исчисления и дельта-функции Дирака; задача Фламана-Буссинеска.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечивается корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела, применением для решения краевых задач строгих математических методов, а также сравнениями результатов расчета с данными классической теории, подтверждающими их хорошее согласование для ряда конкретных задач.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:

1. Впервые построены двумерные уравнения и граничные условия для определения НДС подкрепленных цилиндрических оболочек с использованием представления компонентов НДС полиномами по нормальной к срединной поверхности координате и последующим применением вариационного принципа Лагранжа.

2. Для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, получена система дифференциальных уравнений в перемещениях и

сформулированы граничные условия для всех случаев крепления оболочки.

3. Для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами, получена система дифференциальных уравнений в перемещениях и сформулированы граничные условия для всех случаев крепления оболочки.

4. Разработана методика учета податливости упруго закрепленного края на основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством.

#### **Практическая значимость** диссертационной работы составляют

1. Предлагаемые математические модели, методы и алгоритмы расчета, позволяющие существенно уточнить НДС подкрепленных цилиндрических оболочек в зонах искажения напряженного состояния.

2. В проведении качественного и количественного анализа влияния вида нагружения, условий закрепления, геометрических параметров подкрепленной цилиндрической оболочки и упругих свойств материала на ее НДС.

3. В доказательстве наличия НДС типа «погранслои» вблизи подкрепляющих элементов и жестко заземленных краев.

4. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования при оценке прочности и долговечности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

#### **Основные положения** диссертационной работы, выносимые на защиту:

1. Математические модели определения НДС цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми и продольными ребрами, позволяющие существенно уточнить НДС в зонах искажения напряженного состояния.

2. Методика расчета цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми и продольными ребрами, основанная на аппарате операционного исчисления.

3. Доказательство существования быстро затухающих при удалении от зон искажения напряженного состояния поперечных нормальных напряжений, что подтверждается наличием дополнительных корней характеристического



уравнения задачи.

4. Методика учета податливости упруго закрепленного края на основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством.

**Апробация основных результатов работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на

- XXIII-м, XXIV-м, XXV-м международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Ярополец. Московская обл., 2017, 2018, 2019.

- VI-м, VII-м международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, МАИ, 2017, 2018.

- 17-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика». Москва, МАИ, 2019.

- X-ой общегосударственной механической конференции. Ханой, 2017.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах [112 – 120, 138], в том числе в 3 статьях из Перечня ВАК РФ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, список сокращений и условных обозначений, списка литературы. Работа содержит 156 страниц, 32 рисунка, 2 таблицы. Список литературы содержит 138 наименований.

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научных исследований, сформулированы цель и задачи исследования, определена научная новизна и практическая ценность полученных автором результатов, приведены основные положения, выносимые на защиту, дано краткое содержание работы по главам.

**В первой главе** приведен обзор литературы по тематике диссертации; дана постановка задачи исследования; построены математические модели по определению уточненного НДС подкрепленных цилиндрических оболочек.

**Во второй главе** на основе полученных в первой главе математических моделей построены уравнения равновесия и граничные условия для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами. С помощью тригонометрических рядов по окружной координате уравнения в частных производных приведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены аналитические решения сформулированной краевой задачи. Приведены результаты параметрических расчетов НДС по уточненной теории и дано сравнение полученных в диссертации результатов с данными классической теории.

**В третьей главе** на основе полученных в первой главе математических моделей построены уравнения равновесия и граничные условия для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами. С помощью тригонометрических рядов по продольной координате уравнения в частных производных приведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены аналитические решения сформулированной краевой задачи. Приведены результаты параметрических расчетов НДС по уточненной теории и дано сравнение полученных в диссертации результатов с данными классической теории.

**В четвертой главе** проведено исследование НДС подкрепленной цилиндрической оболочки вблизи закрепленного края по уточненной теории. Получены расчетные формулы для компонентов напряженного состояния «погранслоя». Сформулированы модифицированные естественные граничные условия, позволяющие учесть податливость упруго закрепленного края на основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством. Приведен параметрический анализ влияния податливости закрепленного края на НДС оболочки.

# ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В данной главе представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории пластин и оболочек, в частности, подкрепленных. На основе трехмерных уравнений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа построена математическая модель по определению уточненного НДС подкрепленных цилиндрических оболочек.

## 1.1. Обзор литературы

В настоящее время инженерные расчеты напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций типа пластин и оболочек в машиностроении, в том числе в авиационной и ракетно-космической отрасли, базируются на результатах классической теории пластин Кирхгофа и классической теории оболочек типа Лява. В основу этих теорий была положена гипотеза о сохранении нормального элемента, которая позволила привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной.

Теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа – Лява, была построена в конце XIX века. Оформление классической теории оболочек, продолжавшееся около 100 лет, было, в основном, завершено примерно 50 лет назад. Большой вклад в развитие теории оболочек и методов их расчета внесли Н.П. Абовский, А.В. Александров, С.А. Амбарцумян, Н.А. Алумяэ, Н.Н. Векуа, В.Л. Бидерман, В.В. Болотин, В.З. Власов, А.С. Вольмир, Б.Г. Галеркин, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, В.М. Даревский, Н.А. Кильчевский, А.Д. Коваленко, М.А. Колтунов, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, В.В. Новожилов, П.Ф. Папкович, В.В. Петров, Ю.Н. Работнов, К.Ф. Черных, С.П. Тимошенко, И.Я. Штаерман, Г. Рейсснер, Э.

Мейсснер, Ф. Дишингер, В. Флюгге, Л. Доннелл, Э. Рейсснер и др.

Основным теоретическим результатам, полученным в классической теории оболочек, посвящены известные монографии В.З. Власова [25], А.Л. Гольденвейзера [36], А.И. Лурье [73], В.В. Новожилова [78], С.П. Тимошенко [101]. Фундаментальные исследования по нелинейной теории оболочек принадлежат А.С. Вольмиру [26, 27] и Х.М. Муштари, К.З. Галимову [76].

Краткий очерк развития теории оболочек можно найти в работах [5, 26, 28, 66, 77]. По мере развития теории оболочек появились обзорные статьи, либо охватывающие работы за определенный период времени, либо посвященные отдельным ее проблемам. Краткие обзоры исследований по расчету оболочек за различные периоды можно найти в работах [83, 84, 88, 104] и зарубежных ученых в работах [133, 134]. Основные положения классической теории можно найти также в монографиях и учебных пособиях [41, 43, 82, 92, 122, 123].

Теория подкрепленных оболочек, как часть общей теории оболочек, начала развиваться в 40-х годах в работе А.И. Лурье (1948) [72] и В.З. Власова (1949) [24]. В этих работах подкрепленная оболочка рассматривалась как конструкция, состоящая из собственно гладкой оболочки (обшивки) и подкрепляющих ее одномерных упругих элементов. Предполагается, что обшивка и ребра взаимодействуют вдоль линии пересечения осевых сечений ребер и поверхности обшивки, а их соединение обеспечивает равенство соответствующих перемещений на линиях контакта. В.З. Власов учитывал влияние ребер введением в уравнения равновесия обшивки в качестве дополнительных нагрузок их реакций, которые затем исключаются с помощью уравнений равновесия ребер. А.И. Лурье получил уравнения равновесия с помощью принципа возможных перемещений. Большинство авторов следовало одному из указанных двух подходов, например, в работах И.Я. Амиро [9], В.В. Кабанова [56], С.Н. Кана [58], В.В. Карпова и Ю.Е. Квасникова [63], Е.С. Гребени [39], П.А. Жилина [47], В.А. Игнатьева [53] и др.

Попытки построить теорию ребристых оболочек на основе единой для оболочки и ребер гипотезы реализовались в конце 60-х годов прошлого столетия в

работе Жилина [47]. В этой модели, ребристая оболочка рассматривается как оболочка дискретно-переменной толщины. В последнее время разработана теория пологих оболочек ступенчато-переменной толщины, в которой учитывалось дискретное расположение ребер и вырезов, сдвиговая и крутильная жесткость ребер, поперечные сдвиги. Однако, использование данной модели целесообразно только для случаев, когда высота ребер мала по сравнению с шириной и размерами оболочки. Данный подход применялся в работах [55, 62, 98, 46].

В работах [39, 48, 91] используется «скелетный» метод расчета ребристых цилиндрических оболочек. Сначала выполняется расчет ребер на упругом основании, затем рассматриваются отдельные панели из условий их жесткого защемления по линии ребер. Данный метод применяется для оболочек, подкрепленных ребрами одного направления при осесимметричной нагрузке.

В работе А.П. Филина [104] решена задача о собственных колебаниях стрингерной оболочки с бирегулярной системой ребер методом конечных разностей. Для обшивки применяется гипотеза Кирхгофа-Лява, а для ребер – теория Кирхгофа-Клебша.

Другой подход к подкрепленным оболочкам основан на «размазывании» жесткости ребер по всей оболочке (континуальная модель). Метод континуализации основан на том, что система ребер заменяется конструктивно-анизотропными слоями и оболочка рассматривается как многослойная, эквивалентная заданной системе.

Использование континуальной модели позволяет упростить расчет, однако оно приносит недостаточную точность, особенно для оболочек с редким подкреплением и недостаточную достоверность распределения напряжений между обшивкой и подкрепляющими ребрами по сравнению с реальной оболочкой.

Континуальная модель впервые была использована И.Г. Бубновым [13] при расчете балочных систем. Впоследствии эту модель использовали П.Ф. Папкович [86], А.С. Калманок [57], С.П. Тимошенко и С. Войновский-Кригер [101], Х.М. Муштари [75], И.А. Биргер [11], Е.Ф. Бурмистров [14], Э.И. Григолюк [40], Г.И.

Пшеничнов и И.Г. Тагиев [94] и др. Оценка точности и целесообразности применения континуальной модели проводилась в работах [85, 86, 93, 99].

В работе П.А. Жилина [47] и А.П. Варвака [15] при расчете ребристых конструкций используется метод интегральных уравнений. Асимптотический метод для приближенного решения бесконечной системы дифференциальных уравнений разработан П.Ф. Папковичем [86], С.П. Тимошенко [100] и другими.

В работе И.Я. Амиро [9], В.К. Прокопова [91] решение задачи о НДС ребристой оболочки приводится к исследованию неподкрепленной ребрами конструктивно-ортотропной оболочки с использованием итерационных методов.

На основании принципа возможных перемещений Н.П. Абовский получил уравнения равновесия и краевые условия, которые с помощью метода конечных разностей [1] заменяются уравнениями, образованными значениями искомых функций в узлах сетки.

В последнее время проблеме расчета подкрепленных оболочек из композиционных материалов посвящено большое число публикаций. Это работы В.В. Васильева [18, 19], А.В. Лопатина [71], О.А. Грачева и В.И. Игнатьюка [38], В.А. Заруцкого [49, 50], О.В. Игнатьева [54, 55], В.В. Карпова [62, 63], Л.В. Лозы [69], Р.Б. Рикардса [96, 97], Д.С. Филиппова [105] и других.

В работе В.В. Васильева и А.В. Лопатина [19] сформулированы уравнения общей теории подкрепленных композитных оболочек, учитывающей дискретный характер размещения ребер.

Вопросам устойчивости трансверсально-изотропных ребристых оболочек посвящена работа О.А. Грачева и В.И. Игнатьюка [38]. В данной работе, принимая независимость модуля поперечного сдвига от модуля Юнга в срединной поверхности, автоматически учитывается трансверсальная изотропия материала.

В работах В.А. Заруцкого [49, 50], Л.В. Лозы [69, 70], А.В. Лопатина [71], В.В. Карпова [63], О.В. Игнатьева [54, 55] и др. рассмотрены вопросы влияния деформаций поперечного сдвига на устойчивость и на собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек.

До настоящего времени оболочки, подкрепленные ребрами, исследованы, в основном, с использованием классической теории, построенной на гипотезах Кирхгофа-Лява.

Современная техника выдвинула в теории пластинок и оболочек более сложные проблемы, чем те, которые исследуются классической теорией. Один из аспектов этих проблем заключается в построении НДС вблизи мест крепления конструкций, так как в этом случае теория типа Кирхгофа – Лява не дает удовлетворительного соответствия с практикой в силу существенной трехмерности НДС.

Применение в различных отраслях техники композиционных материалов слоистой и волокнистой структуры, а также разработка новых методов расчета оболочечных конструкций из неоднородных материалов [7, 16, 44, 45, 81] показали неправомерность, в той или иной степени, использования классической теории для этих материалов [88]. Поэтому основное внимание исследователей было привлечено к усовершенствованию [22] теорий типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера.

Погрешность классической теории определяется, во-первых, мерой близости абстрактного материала, не допускающего поперечных деформаций, реальному материалу оболочки и, во-вторых, переопределенностью задачи, что потребовало введения обобщенной поперечной силы Кирхгофа. Первая оценка погрешности классической теории рассмотрена В.В. Новожиловым и Р.М. Финкельштейном [79] и основывается на геометрических особенностях оболочки. Х.М. Муштари и К.З. Галимов [76] получили оценку, исходя из физических соображений. Оценка А.Л. Гольденвейзера [36] получена методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости и, в отличие от оценки В.В. Новожилова и Р.М. Финкельштейна [79], учитывает изменчивость НДС в оболочке. Классическая теория пластин и оболочек проверена временем и для ее использования имеется широкое поле практического применения. Однако физическую стройность классической теории нарушает необходимость введения поперечной силы

Кирхгофа.

Для устранения недостатка, связанного с переопределенностью задачи, необходимо было учесть деформации поперечного сдвига. В связи с этим была разработана сдвиговая теория оболочек типа Тимошенко-Рейсснера [101]. К этому направлению развития теории оболочек принадлежат работы С.А. Амбарцумяна [6], Б.Ф. Власова [23], Я.С. Уфлянда [103], М.П. Шереметьева и Б.А. Пелеха [124] и др. Современное изложение сдвиговой теории пластин приведено в статье В.В. Васильева [17]. В сдвиговой теории поперечные деформации растяжения (сжатия) по-прежнему не учитываются, а для учета поперечных деформаций сдвига используются различные приемы [88]. В результате в сдвиговой теории исчезла погрешность, связанная с обобщенной силой Кирхгофа, но осталась погрешность, определяемая физической моделью материала, а также появляется такой недостаток, как невозможность учета самоуравновешенных составляющих краевых сил.

На всем протяжении развития теории оболочек разрабатывались математические направления в теории оболочек. Математические направления развития теории оболочек ведут свое начало в работах выдающихся математиков О. Коши (A. Cauchy) (1928) [125], С. Пуассона (S. Poisson) (1929) [135]. Обзор работ этого направления содержится в статье А.Л. Гольденвейзера и А.И. Лурье [37], в монографии [65], а также в статьях Н.А. Кильчевского [64], И.И. Воровича [29].

Разложение перемещений, деформаций и напряжений в ряды по поперечной координате позволяет понизить размерность уравнений теории упругости на единицу. Но это достигается ценой увеличения числа двумерных уравнений до бесконечности, что имеет свои практические неудобства. Поэтому при построении теории оболочек основное внимание уделяется проблеме редукции бесконечной системы двумерных уравнений к конечной системе. Несколько разных способов такой редукции содержится в монографиях Н.А. Кильчевского [65] и И.Н. Векуа [22]. Характерной особенностью рассматриваемого направления развития теории оболочек является полное удовлетворение закона Гука и геометрии перемещений



сплошной среды. Вследствие этого редукция бесконечной системы уравнений к конечной неизбежно входит в противоречие с локальными уравнениями равновесия. Из теорем теории упругости известно, что локальные уравнения равновесия доставляют минимум потенциальной энергии упругого тела, при котором реализуются истинные перемещения [74]. Отсюда следует, что решения редуцированных уравнений могут оказаться близкими к точным только в тех задачах, где нарушения локальных уравнений равновесия незначительны. В противном случае могут иметь место существенные ошибки.

Свыше шестидесяти лет тому назад для построения теории оболочек стали применять асимптотические методы, приводящие, в конечном итоге, к представлению решения в виде рядов, расположенных по степеням малого параметра  $\varepsilon$  - относительной толщины пластинки или оболочки. Асимптотические методы превратились в основной инструмент преобразования уравнений классической теории оболочек и нашли успешное применение в исследованиях А.Л. Гольденвейзера [33-37], В.В. Болотина [12], К. Фридрихса [129], Э. Рейсснера [137], М. Джонсона и Э. Рейсснера [131], Э. Рейсса [136], А. Грина [130], В. Койтера [132], И.И. Воровича [4], И.М. Рапопорта [95], А.В. Колос [67], П.Е. Товстика [102], Л.А. Агаловяна [2, 3], Ю.Д. Каплунова [59, 60] и других авторов, работы которых можно найти в обзорных докладах [30, 32].

В соответствие с этим методом задача определения НДС пластинок и оболочек приводится к построению итерационных процессов, один из которых определяет основное напряженное состояние, в первом приближении совпадающее с аналогом в классической теории, а другие итерационные процессы позволяют получить быстро затухающие при удалении от края самоуравновешенные напряженные состояния (НДС типа «погранслои») плоской и антиплоской задач со стандартными граничными условиями.

Анализ сформулированных краевых задач для определения НДС типа «погранслои» в прямоугольной ортотропной пластинке [108, 110] и цилиндрической оболочке переменной толщины [111] показал, что их решение

сопряжено с математическими трудностями. По этой причине задача о дополнительном по отношению к классической теории НДС вблизи защемленного края была решена В.В. Фирсановым [110, 111] в вариационной постановке методом Власова-Канторовича с помощью специально построенной полиномиальной аппроксимирующей функции. В [110] при рассмотрении примера расчета прямоугольной ортотропной пластинки установлено, что дополнительное самоуравновешенное НДС вблизи защемленного края, уточняющее классическую теорию, вносит существенный вклад в общее напряженное состояние: например, максимальные изгибные напряжения уточняются на 21%, поперечные касательные напряжения в 5 раз превосходят соответствующие напряжения классической теории и поперечные нормальные напряжения составляют 22,5% от максимальных изгибных напряжений, что необходимо учитывать при оценке прочности связующего в композиционных материалах.

В работах [51, 52] с помощью методов простых итераций и асимптотического интегрирования Е.М. Зверевым и Г.И. Макаровым была решена проблема построения моделей типа Тимошенко для статических и динамических задач теории балок, пластин и оболочек. При этом асимптотические оценки, сопровождающие простые итерации, дают возможность отбросить второстепенные члены по отношению к главным, оценить скорость сходимости итерационного процесса, доказать асимптотическую сходимость и получить простые модели задач.

В начале семидесятых годов прошлого столетия стали разрабатываться новые направления развития теории оболочек, в которых учет поперечных деформаций (ими в классической теории пренебрегают) находится в полном соответствии с локальными уравнениями равновесия и сплошности материала. Одно из них в работах В.В. Васильева и С.А. Лурье [20, 21] называется «энергетически согласованным» направлением; другое в работах В.В. Пикуля [87, 89, 90] – «физически состоятельным» направлением развития теории оболочек, объединенных общей концепцией сплошных сред с внутренними связями.

В энергетически согласованном направлении развития теории оболочек в работе [21] В.В. Васильевым и С.А. Лурье решена задача сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пологих оболочек. Во главу угла ставится выполнение уравнений равновесия и граничных условий, полученных с помощью вариационных принципов. При этом искомые перемещения раскладываются в ряды по нормальной координате и формулируются условия согласованности перемещений, которые связывают между собой количество слагаемых в разложениях перемещений по тангенциальным и поперечному направлениям. В качестве примера рассматривается осесимметричная задача о цилиндрической оболочке, для которой полученное решение хорошо сходится с точным.

Постулируя в физически состоятельном направлении полное удовлетворение уравнений равновесия и геометрии сплошной среды, полученные при этом невязки вносятся в уравнения закона Гука для материала с произвольным распределением упругих свойств по толщине. Далее за счет минимизации этих невязок осуществляется корректировка модели материала оболочки [90].

Ближайшими предшественниками физически состоятельного направления развития теории оболочек можно считать В.З. Власова [25], С.Г. Лехницкого [68] и С.А. Амбарцумяна [6, 7, 8]. В работах С.А. Амбарцумяна, завершившего подходы В.З. Власова и С.Г. Лехницкого к построению классической теории оболочек, вывод всех соотношений теории слоистых анизотропных оболочек производится непосредственно из уравнений теории упругости в криволинейной ортогональной системе координат без привлечения элементов теории поверхностей.

В рамках энергетически согласованного направления в работах [107, 121, 126 - 128,] построены двумерные уравнения для произвольной оболочки на основе минимизации энергетического функционала Лагранжа, в котором компоненты искомого НДС аппроксимируются полиномиальными рядами по нормальной координате. Формулируются условия согласованности разложений для перемещений и минимизации полученных невязок, а также граничные условия.

Показано полное соответствие системы двумерных уравнений для произвольной оболочки законам механики сплошной среды, что приводит к повышению точности и эффективности расчетов.

Следует отметить, что приведенный обзор литературы показывает отсутствие работ, посвященных уточненной теории подкрепленных оболочек.

Для развития данного направления в теории подкрепленных оболочек можно поставить следующие задачи:

- построение уточненной математической модели подкрепленных цилиндрических оболочек;
- разработка методов расчета НДС подкрепленных цилиндрических оболочек;
- количественная оценка результатов расчета в уточненной теории по отношению к классической теории;

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в методиках инженерных расчетов типовых авиационных конструкций и их соединений, а также при проектировании и оценке прочности машиностроительных и строительных конструкций.

Таким образом, несмотря на известные достижения в теории и методах расчета оболочек, имеется еще ряд нерешенных задач для уточненной теории подкрепленных оболочек. Поэтому исследование их НДС по уточненной теории продолжает сохранять свою актуальность. Решению этой проблемы и посвящена диссертация.

## **1.2. Постановка задачи**

Подкрепленная цилиндрическая оболочка из изотропного материала рассматривается как система, состоящая из собственно обшивки и жестко с ней соединенных продольных и кольцевых ребер жесткости. Исследование обшивки и ребер, в свою очередь, базируется на общей теории пластин и оболочек.

Для описания НДС обшивки и ребер используются уравнения трехмерной теории упругости в триортогональной криволинейной системе координат [36].

Цилиндрическая оболочка рассматривается как трехмерное твердое тело, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Координатные оси  $\alpha_1, \alpha_2$  совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось  $\alpha_3$  направлена по наружной нормали к этой поверхности. Введем также систему координат  $(\xi, \theta, z)$ , для которой справедливы равенства

$$\alpha_1 = R\xi, \alpha_2 = R\theta, \alpha_3 = z + R,$$

где  $R$  – радиус оболочки.

Подкрепленная цилиндрическая оболочка в триортогональной криволинейной системе координат  $(\xi, \theta, z)$  изображена на рисунке 1.1.

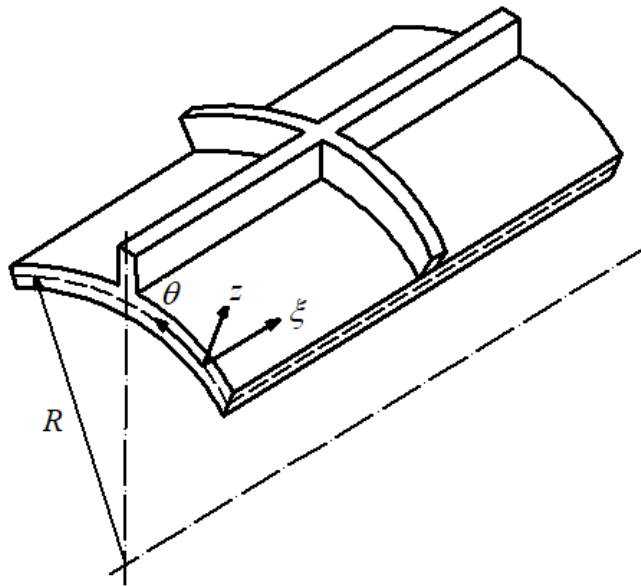


Рисунок 1.1 – Подкрепленная цилиндрическая оболочка

Компоненты деформации произвольной оболочки в перемещениях определяются выражениями

$$\varepsilon_\xi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} v + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} w,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} u + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} w, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{\xi\theta} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial H_1}{\partial \theta} u + \frac{\partial H_2}{\partial \xi} v \right], \\
\gamma_{\xi z} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} u, \\
\gamma_{\theta z} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} v.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где коэффициенты Ламе  $H_k$  ( $k = 1, 2$ ) в уравнениях (1.1) принимают вид

$$H_i = A_i a_i, \quad a_i = 1 + r_i z, \quad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

$A_1, A_2$  и  $r_1, r_2$  – коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Физические уравнения трехмерной теории упругости для изотропного материала имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_\xi &= A_{11} \varepsilon_\xi + A_{12} \varepsilon_\theta + A_{13} \varepsilon_z, \quad \sigma_\theta = A_{21} \varepsilon_\xi + A_{22} \varepsilon_\theta + A_{23} \varepsilon_z, \\
\tau_{\xi\theta} &= A_{44} \gamma_{\xi\theta}, \quad \sigma_z = A_{31} \varepsilon_\xi + A_{32} \varepsilon_\theta + A_{33} \varepsilon_z, \quad \tau_{\xi z} = A_{55} \gamma_{\xi z}, \quad \tau_{\theta z} = A_{66} \gamma_{\theta z}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Коэффициенты  $A_{ij}$  в уравнениях (1.3) представляют собой упругие постоянные материала оболочки.

На лицевых  $z = \pm h$  ( $h$  – полутолщина обшивки) и торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{\xi z}(\pm h) = q_{13}^\pm, \quad \sigma_{\theta z}(\pm h) = q_{23}^\pm, \quad \sigma_z(\pm h) = q_{33}^\pm, \tag{1.4}$$

$$\sigma_\xi = q_{11}, \quad \sigma_{\xi\theta} = q_{12}, \quad \sigma_{\xi z} = q_{13}, \quad \sigma_\theta = q_{22}, \quad \sigma_{\theta\xi} = q_{21}, \quad \sigma_{\theta z} = q_{23}.$$

В соответствии с работами [21, 22, 121] перемещения обшивки и ребер представляются в виде

$$u(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K u_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!},$$

$$v(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K v_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \quad (1.5)$$

$$w(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^{K-1} w_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}.$$

Уравнения равновесия и естественные граничные условия для подкрепленной цилиндрической оболочки находим на основе вариационного принципа Лагранжа

$$\delta E = \delta U + \delta \sum_{i=1}^M U^{li} + \delta \sum_{j=1}^N U^{2j} - \delta A = 0, \quad (1.6)$$

где  $U, U^{li}, U^{2j}, A$  соответственно потенциальная энергия деформации обшивки, продольных и кольцевых ребер, работа внешних сил;  $M, N$  – количество продольных и кольцевых ребер.

Потенциальная энергия упругой деформации обшивки имеет вид

$$\begin{aligned} \delta U = & \iiint (\sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{\xi z} \delta \gamma_{\xi z} + \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} + \tau_{\xi \theta} \delta \gamma_{\xi \theta}) \times \\ & \times (1 + rz) R^2 d\xi d\theta dz. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Выражения потенциальной энергии  $i$ -го продольного и  $j$ -го кольцевого ребер представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta U^{li} = & \iiint (\sigma_\xi^{li} \delta \varepsilon_\xi^{li} + \sigma_\theta^{li} \delta \varepsilon_\theta^{li} + \sigma_z^{li} \delta \varepsilon_z^{li} + \tau_{\xi \theta}^{li} \delta \gamma_{\xi \theta}^{li} + \tau_{\xi z}^{li} \delta \gamma_{\xi z}^{li} + \tau_{\theta z}^{li} \delta \gamma_{\theta z}^{li}) \times \\ & \times (1 + r_i z) R_{li}^2 d\xi d\theta dz, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \delta U^{2j} = & \iiint (\sigma_\xi^{2j} \delta \varepsilon_\xi^{2j} + \sigma_\theta^{2j} \delta \varepsilon_\theta^{2j} + \sigma_z^{2j} \delta \varepsilon_z^{2j} + \tau_{\xi \theta}^{2j} \delta \gamma_{\xi \theta}^{2j} + \tau_{\xi z}^{2j} \delta \gamma_{\xi z}^{2j} + \tau_{\theta z}^{2j} \delta \gamma_{\theta z}^{2j}) \times \\ & \times (1 + r_2 z) R_{2j}^2 d\xi d\theta dz. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Работа внешних нагрузок, действующих на обшивку, принимается в виде

$$\begin{aligned} \delta A = & \iiint (G_1 \delta u + G_2 \delta v + G_3 \delta w) (1 + rz) R^2 d\xi d\theta dz + \\ & + \iint \left\{ -q_{13}^+ [(1 + rz) \delta u]_{z=h} + q_{13}^- [(1 + rz) \delta u]_{z=-h} - q_{23}^+ [(1 + rz) \delta v]_{z=h} + \right. \\ & \left. + q_{23}^- [(1 + rz) \delta v]_{z=-h} - q_{33}^+ [(1 + rz) \delta w]_{z=h} + q_{33}^- [(1 + rz) \delta w]_{z=-h} \right\} \times \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} & \times R^2 d\xi d\theta + \iint (q_{11}\delta u + q_{12}\delta v + q_{13}\delta w)(1 + rz) \Big|_{\xi=\xi_0^{(1)}}^{\xi=\xi_0^{(2)}} Rd\theta dz + \\ & + \iint (q_{21}\delta u + q_{22}\delta v + q_{23}\delta w) \Big|_{\theta=\theta_0^{(1)}}^{\theta=\theta_0^{(2)}} Rd\xi dz, \end{aligned}$$

где  $G_1, G_2, G_3$  – объемные силы.

### 1.3. Основные уравнения и граничные условия уточненной теории подкрепленных круговых цилиндрических оболочек

Будем предполагать в дальнейшем, что для обшивки искомые перемещения  $u, v, w$  допускают асимптотические представления вида

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2}, \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2}, \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z, \end{aligned} \tag{1.11}$$

дающие погрешности в определении перемещений порядка  $h^3$ .

Для получения уравнений равновесия и соответствующих граничных условий преобразуем уравнение (1.6) в перемещениях.

Подставляя разложения (1.11) в формулы (1.1), с учетом того, что для цилиндрической оболочки коэффициенты Ламе определяются соотношениями  $H_1 = R, H_2 = R(1 + rz), r = r_2 = 1/R$ , находим выражения для деформаций обшивки

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + r \frac{\partial u_1}{\partial \xi} z + r \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{z^2}{2}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = w_1, \\ \varepsilon_\theta &= r \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + r \left( -r \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - r w_0 + w_1 \right) z + \\ &+ r \left( 2r^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2r^2 w_0 - 2r w_1 \right) \frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\theta} = & r \left( \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right) + r \left( -r \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right) z + \\ & + r \left( 2r^2 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right) \frac{z^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\gamma_{\xi z} = \left( u_1 + r \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) + \left( u_2 + r \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) z,$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta z} = & \left( -rv_0 + v_1 + r \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) + \left( r^2 v_0 - rv_1 + v_2 - r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + r \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) z + \\ & + r \left( -2r^2 v_0 + 2rv_1 - v_2 + 2r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) \frac{z^2}{2}. \end{aligned}$$

Из соотношений (1.3) и (1.12) получим выражения напряжений обшивки

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} = & \left[ A_{11} r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + A_{12} r \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + A_{13} w_1 \right] + \left[ A_{11} r \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + A_{12} r \left( -r \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - r w_0 + w_1 \right) \right] z + \left[ A_{11} r \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + A_{12} r \left( 2r^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2r^2 w_0 - 2r w_1 \right) \right] \frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & \left[ A_{21} r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + A_{22} r \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + A_{23} w_1 \right] + \left[ A_{21} r \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + A_{22} r \left( -r \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - r w_0 + w_1 \right) \right] z + \left[ A_{21} r \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + A_{22} r \left( 2r^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2r^2 w_0 - 2r w_1 \right) \right] \frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \left[ A_{31} r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + A_{32} r \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + A_{33} w_1 \right] + \left[ A_{31} r \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + A_{32} r \left( -r \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - r w_0 + w_1 \right) \right] z + \left[ A_{31} r \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + A_{32} r \left( 2r^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2r^2 w_0 - 2r w_1 \right) \right] \frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\theta} = & A_{44} r \left( \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right) + A_{44} r \left( -r \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right) z + \\ & + A_{44} r \left( 2r^2 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right) \frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{\xi z} = A_{55} \left( r \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + u_1 \right) + A_{55} \left( r \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + u_2 \right) z, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z} = & A_{66} \left( r \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + v_1 - r v_0 \right) + A_{66} \left( r^2 v_0 - r v_1 + v_2 - r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + r \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) z + \\ & + A_{66} r \left( -2r^2 v_0 + 2r v_1 - v_2 + 2r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) \frac{z^2}{2}. \end{aligned}$$

В формулах (1.13) коэффициенты  $A_{ij}$  принимают следующие значения:

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \frac{E(\mu-1)}{(2\mu-1)(1+\mu)}, \quad A_{44} = A_{55} = A_{66} = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

$$A_{12} = A_{21} = A_{13} = A_{31} = A_{23} = A_{32} = -\frac{E\mu}{(2\mu-1)(1+\mu)},$$

где  $E$  и  $\mu$  соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала обшивки.

Подставляя деформации (1.12) в выражение (1.7) и выполняя некоторые преобразования, получим потенциальную энергию упругой деформации обшивки

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left[ N_{\xi} r \frac{\partial \delta u_0}{\partial \xi} + N_{\xi\theta} r \frac{\partial \delta u_0}{\partial \theta} + M_{\xi}^1 r \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi} + M_{\xi\theta}^1 r \frac{\partial \delta u_1}{\partial \theta} + M_{\xi}^2 r \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi} + \right. \\ & + M_{\xi\theta}^2 r \frac{\partial \delta u_2}{\partial \theta} + r N_{\xi\theta} \frac{\partial \delta v_0}{\partial \xi} + N_{\theta} r \frac{\partial \delta v_0}{\partial \theta} + r M_{\xi\theta}^1 \frac{\partial \delta v_1}{\partial \xi} + M_{\theta}^1 r \frac{\partial \delta v_1}{\partial \theta} + \\ & + r M_{\xi\theta}^2 \frac{\partial \delta v_2}{\partial \xi} + M_{\theta}^2 r \frac{\partial \delta v_2}{\partial \theta} + Q_{\xi z} r \frac{\partial \delta w_0}{\partial \xi} + Q_{\theta z} r \frac{\partial \delta w_0}{\partial \theta} + M_{\xi z} r \frac{\partial \delta w_1}{\partial \xi} + \\ & + M_{\theta z}^1 r \frac{\partial \delta w_1}{\partial \theta} + Q_{\xi z} \delta u_1 + M_{\xi z} \delta u_2 - Q_{\theta z} r \delta v_0 + (Q_{\theta z} - M_{\theta z}^1 r) \delta v_1 + \\ & \left. + (M_{\theta z} - M_{\theta z}^2 r) \delta v_2 + N_{\theta} r \delta w_0 + (M_{\theta}^1 r + Q_z) \delta w_1 \right] R^2 d\xi d\theta, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \theta_0^{(1)}, \theta_0^{(2)}$  – координаты криволинейных и прямолинейных краев оболочки.

Здесь приняты следующие обозначения усилий:

$$\begin{aligned}
(N_\xi, Q_z, Q_{\xi z}, N_{\xi\theta}, Q_{\theta z}) &= \int_{-h}^h (\sigma_\xi, \sigma_z, \tau_{\xi z}, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\theta z}) (1 + rz) dz, \\
(M_\xi^k, M_{\xi\theta}^k) &= \int_{-h}^h (\sigma_\xi, \tau_{\xi\theta}) (1 + rz) \frac{z^k}{k!} dz, \\
(N_\theta, N_{\xi\theta}, Q_{\theta z}) &= \int_{-h}^h (\sigma_\theta, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\theta z}) dz, \\
(M_\theta^k, M_{\xi\theta}^k, M_{\theta z}^k) &= \int_{-h}^h (\sigma_\theta, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\theta z}) \frac{z^k}{k!} dz, \\
(M_{\xi z}^k, M_{\theta z}^k) &= \int_{-h}^h (\tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}) (1 + rz) z dz, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Полагая, что взаимодействие оболочки с ребрами схематизируется линейным контактом, влияние кольцевых ребер на обшивку может быть рассмотрено через две компоненты перемещений ребер по кольцевому и поперечному направлениям, а продольных ребер – по продольному и поперечному направлениям. Принимая для ребер в разложении (1.5)  $K = 1$ , представим их искомые перемещения

$$\begin{aligned}
u^{li}(\xi, z) &= u_0^{li}(\xi) + u_1^{li}(\xi)z, \\
w^{li}(\xi) &= w_0^{li}(\xi), \quad i = \overline{1, M},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
v^{2j}(\theta, z) &= v_0^{2j}(\theta) + v_1^{2j}(\theta)z, \\
w^{2j}(\theta) &= w_0^{2j}(\theta), \quad j = \overline{1, N},
\end{aligned}$$

где  $u^{li}$ ,  $w^{li}$ ,  $v^{2j}$ ,  $w^{2j}$  – перемещения продольных и кольцевых ребер соответственно.

На линии контакта между ребрами и обшивкой их компоненты перемещений одинаковы, поэтому условия сочленения ребер и обшивки принимают вид

$$\begin{aligned}
u^{li}(\xi, z) \Big|_{z=\lambda_{1i}h} &= u(\xi, \theta_i, z) \Big|_{z=\lambda_{1i}h}, \quad w^{li}(\xi) = w(\xi, \theta_i, z) \Big|_{z=\lambda_{1i}h}, \quad i = 1..M, \\
v^{2j}(\theta, z) \Big|_{z=\lambda_{2j}h} &= v(\xi_j, \theta, z) \Big|_{z=\lambda_{2j}h}, \quad w^{2j}(\theta) = w(\xi_j, \theta, z) \Big|_{z=\lambda_{2j}h}, \quad j = 1..N,
\end{aligned} \tag{1.17}$$

где  $\theta_i, \xi_j$  – координаты линий сопряжения продольных и кольцевых ребер с

обшивкой;  $\lambda_{1i} = 1, \lambda_{2j} = 1$  и  $\lambda_{1i} = -1, \lambda_{2j} = -1$ , соответственно, при внешнем и внутреннем расположении ребра.

Формулы (1.16), (1.17) и (1.11) позволяют найти

$$\begin{aligned} u^{1i}(\xi, z) &= u_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h u_1(\xi, \theta_i) + \frac{h^2}{2} u_2(\xi, \theta_i) - \lambda_{1i} h u_1^{1i} + u_1^{1i} z, \\ w^{1i}(\xi) &= w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h w_1(\xi, \theta_i), \quad i = \overline{1, M}, \\ v^{2j}(\theta, z) &= v_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h v_1(\xi_j, \theta) + \frac{h^2}{2} v_2(\xi_j, \theta) - \lambda_{2j} h v_1^{2j} + v_1^{2j} z, \\ w^{2j}(\theta) &= w_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta), \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Коэффициенты Ламе  $H_k$  ( $k = 1, 2$ ) в уравнениях (1.1) для продольных и кольцевых ребер, соответственно, принимают вид

$$\begin{aligned} H_1 &= R_{1i}, \quad H_2 = R_{1i}(1 + r_{1i}z), \quad r_{1i} = 1/\left[R + \lambda_{1i}(h + H_{1i})\right], \\ H_1 &= R_{2j}, \quad H_2 = R_{2j}(1 + r_{2j}z), \quad r_{2j} = 1/\left[R + \lambda_{2j}(h + H_{2j})\right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Из соотношений (1.1), (1.16) и (1.19) находим выражения для деформаций продольных и кольцевых ребер

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{1i} &= 0, \quad \gamma_{\xi\theta}^{1i} = 0, \quad \gamma_{\theta z}^{1i} = 0, \\ \varepsilon_\xi^{1i} &= r_{1i} \frac{\partial u^{1i}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\theta^{1i} = \frac{r_{1i}}{(1 + r_{1i}z)} w^{1i}, \quad \gamma_{\xi z}^{1i} = r_{1i} \frac{\partial w^{1i}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{1i}}{\partial z}, \\ \varepsilon_\xi^{2j} &= 0, \quad \gamma_{\xi\theta}^{2j} = 0, \quad \gamma_{\xi z}^{2j} = 0, \quad \varepsilon_z^{2j} = 0, \\ \varepsilon_\theta^{2j} &= \frac{r_{2j}}{1 + r_{2j}z} \frac{\partial v^{2j}}{\partial \theta} + \frac{r_{2j}}{1 + r_{2j}z} w^{2j}, \quad \gamma_{\theta z}^{2j} = \frac{r_{2j}}{1 + r_{2j}z} \frac{\partial w^{2j}}{\partial \theta} + \frac{\partial v^{2j}}{\partial z} - \frac{r_{2j}}{1 + r_{2j}z} v^{2j}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Подставляя выражение (1.18) в (1.20) получим выражения для деформаций ребер в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{1i} &= 0, \quad \gamma_{\xi\theta}^{1i} = 0, \quad \gamma_{\theta z}^{1i} = 0, \\ \varepsilon_\xi^{1i} &= r_{1i} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ u_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h u_1(\xi, \theta_i) + \frac{h^2}{2} u_2(\xi, \theta_i) - \lambda_{1i} h u_1^{1i} \right] + r_{1i} \frac{\partial u_1^{1i}}{\partial \xi} z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta}^{li} &= r_{li} [w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{li} h w_1(\xi, \theta_i)] - r_{li} [w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{li} h w_1(\xi, \theta_i)] z, \\
\gamma_{\xi z}^{li} &= r_{li} \frac{\partial}{\partial \xi} (w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{li} h w_1(\xi, \theta_i)) + u_1^{li}, \\
\varepsilon_{\xi}^{2j} &= 0, \varepsilon_z^{2j} = 0, \gamma_{\xi z}^{2j} = 0, \gamma_{\xi \theta}^{2j} = 0, \\
\varepsilon_{\theta}^{2j} &= r_{2j} \left[ \frac{\partial v_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial v_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} - \lambda_{2j} h \frac{d v_1^{2j}}{d \theta} + \right. \\
&\quad \left. + w_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta) \right] + r_{2j} \left[ \frac{d v_1^{2j}}{d \theta} - r_{2j} \left( \frac{\partial v_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial v_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} - \lambda_{2j} h \frac{d v_1^{2j}}{d \theta} + w_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta) \right) \right] z, \\
\gamma_{\theta z}^{2j} &= -r_{2j} \left[ v_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h v_1(\xi_j, \theta) + \frac{h^2}{2} v_2(\xi_j, \theta) - \lambda_{2j} h v_1^{2j} \right] + v_1^{2j} + \\
&\quad + r_{2j} \left[ \frac{\partial w_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial w_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} \right] + r_{2j} \left\{ r_{2j} [v_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h v_1(\xi_j, \theta) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h^2}{2} v_2(\xi_j, \theta) - \lambda_{2j} h v_1^{2j}] - r_{2j} \left( \frac{\partial w_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial w_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} \right) - v_1^j \right\} z.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Напряжения продольных ребер определяются из (1.3), (1.21) и представляются как

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi}^{li} &= \left[ A_{11}^{li} r_{li} \left( \frac{\partial u_0(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} + \lambda_{li} h \frac{\partial u_1(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial u_2(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} - \lambda_{li} h \frac{\partial u_1^{li}}{\partial \xi} \right) + \right. \\
&\quad \left. + A_{12}^{li} r_{li} (w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{li} h w_1(\xi, \theta_i)) \right] + \\
&\quad + \left[ A_{11}^{li} r_{li} \frac{\partial u_1^{li}}{\partial \xi} - A_{12}^{li} r_{li} (w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{li} h w_1(\xi, \theta_i)) \right] z, \\
\sigma_{\theta}^{li} &= \left[ A_{21}^{li} r_{li} \left( \frac{\partial u_0(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} + \lambda_{li} h \frac{\partial u_1(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial u_2(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} - \lambda_{li} h \frac{\partial u_1^{li}}{\partial \xi} \right) + \right. \\
&\quad \left. + A_{22}^{li} r_{li} (w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{li} h w_1(\xi, \theta_i)) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ A_{21}^{li} r_{li} \frac{\partial u_1^{li}}{\partial \xi} - A_{22}^{li} r_{li} (w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h w_1(\xi, \theta_i)) \right] z, \\
\sigma_z^{li} = & \left[ A_{31}^{li} r_{li} \left( \frac{\partial u_0(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} + \lambda_{1i} h \frac{\partial u_1(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial u_2(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} - \lambda_{1i} h \frac{\partial u_1^{li}}{\partial \xi} \right) + \right. \\
& + A_{32}^{li} r_{li} (w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h w_1(\xi, \theta_i)) \left. \right] + \\
& + \left[ A_{31}^{li} r_{li} \frac{\partial u_1^{li}}{\partial \xi} - A_{32}^{li} r_{li} (w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h w_1(\xi, \theta_i)) \right] z, \\
\tau_{\xi\theta} = 0, \tau_{\theta z} = 0, \tau_{\xi z}^{li} = & A_{55}^{li} r_{li} \left( \frac{\partial w_0(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} + \lambda_{1i} h \frac{\partial w_1(\xi, \theta_i)}{\partial \xi} \right) + u_1^{li},
\end{aligned} \tag{1.22}$$

а для кольцевых ребер они имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi}^{2j} = & A_{12}^{2j} r_{2j} \left[ \frac{\partial v_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial v_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} - \lambda_{2j} h \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} + w_0(\xi_j, \theta) + \right. \\
& + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta) \left. \right] + A_{12}^{2j} r_{2j} \left[ \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} - r_{2j} \left( \frac{\partial v_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial v_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} - \lambda_{2j} h \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} + w_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta) \right) \right] z, \\
\sigma_{\theta}^{2j} = & A_{22}^{2j} r_{2j} \left[ \frac{\partial v_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial v_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} - \lambda_{2j} h \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} + w_0(\xi_j, \theta) + \right. \\
& + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta) \left. \right] + A_{22}^{2j} r_{2j} \left[ \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} - r_{2j} \left( \frac{\partial v_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial v_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} - \lambda_{2j} h \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} + w_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta) \right) \right] z, \\
\sigma_z^{2j} = & A_{32}^{2j} r_{2j} \left[ \frac{\partial v_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial v_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} - \lambda_{2j} h \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} + w_0(\xi_j, \theta) + \right. \\
& + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta) \left. \right] + A_{32}^{2j} r_{2j} \left[ \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} - r_{2j} \left( \frac{\partial v_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial v_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \right. \right.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} - \lambda_{2j} h \frac{dv_1^{2j}}{d\theta} + w_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h w_1(\xi_j, \theta) \Big] z, \\
\gamma_{\theta z}^{2j} = & A_{66}^{2j} \left\{ -r_{2j} \left[ v_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h v_1(\xi_j, \theta) + \frac{h^2}{2} v_2(\xi_j, \theta) - \lambda_{2j} h v_1^{2j} \right] + v_1^{2j} + \right. \\
& + r_{2j} \left[ \frac{\partial w_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial w_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} \right] \Big\} + A_{66}^{2j} r_{2j} \left\{ r_{2j} \left[ v_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h v_1(\xi_j, \theta) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{h^2}{2} v_2(\xi_j, \theta) - \lambda_{2j} h v_1^{2j} \right] - r_{2j} \left( \frac{\partial w_0(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial w_1(\xi_j, \theta)}{\partial \theta} \right) - v_1^{2j} \right\} z, \\
\tau_{\xi \theta}^{2j} = & 0, \quad \tau_{\xi z}^{2j} = 0.
\end{aligned}$$

В формулах (1.22), (1.23) коэффициенты  $A_{ij}^{mn}$  принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}
A_{11}^{mn} = A_{22}^{mn} = A_{33}^{mn} &= \frac{E_{mn} (\mu_{mn} - 1)}{(2\mu_{mn} - 1)(1 + \mu_{mn})}, \quad A_{44}^{mn} = A_{55}^{mn} = A_{66}^{mn} = \frac{E_{mn}}{2(1 + \mu_{mn})}, \\
A_{12}^{mn} = A_{21}^{mn} = A_{12}^{mn} = A_{31}^{mn} = A_{23}^{mn} = A_{32}^{mn} &= -\frac{E_{mn} \mu_{mn}}{(2\mu_{mn} - 1)(1 + \mu_{mn})},
\end{aligned}$$

где  $m = 1, n = i$  и  $m = 2, n = j$  соответствует случаям продольных и кольцевых ребер,  $E_{mn}$  и  $\mu_{mn}$  соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона материала ребер.

Для нахождения потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го продольного ребра используем зависимости (1.8) и (1.20), в результате получим

$$\begin{aligned}
\delta U^{li} = & \alpha_i k_{li} \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \left[ \left( N_{\xi}^{li} r_{li} \frac{\partial \delta u_0^{li}}{\partial \xi} + M_{\xi}^{li} r_{li} \frac{\partial \delta u_1^{li}}{\partial \xi} \right) + N_{\theta}^{li} r_{li} \delta w_0^{li} + \right. \\
& \left. + Q_{\xi z}^{li} \left( r_{li} \frac{\partial \delta w_0^{li}}{\partial \xi} + \delta u_1^{li} \right) \right] R^2 d\xi,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_i = \frac{a_i}{R}, \quad k_{li} = \frac{R_{li}^2}{R^2}, \quad a_i \text{ — толщина } i\text{-го продольного ребра;}$$

$$(N_{\xi}^{li}, Q_{\xi z}^{li}) = \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i}h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{1i})} (\sigma_{\xi}^{li}, \tau_{\xi z}^{li})(1+r_{1i}z)dz, N_{\theta}^{li} = \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i}h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{1i})} \sigma_{\theta}^{li}dz, \quad (1.24)$$

$$M_{\xi}^{li} = \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i}h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{1i})} \sigma_{\xi}^{li}(1+r_{1i}z)zdz;$$

$H_{1i}$  – высота  $i$ -го продольного ребра.

Используя соотношения (1.16), (1.18), находим

$$\begin{aligned} \delta U^{li} = & \alpha_i k_{1i} \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \left\{ r_{1i} N_{\xi}^{li} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \delta u_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h \delta u_1(\xi, \theta_i) + \frac{h^2}{2} \delta u_2(\xi, \theta_i) \right] - \right. \\ & - r_{1i} \lambda_{1i} h N_{\xi}^{li} \frac{\partial \delta u_1^{li}}{\partial \xi} + r_{1i} M_{\xi}^{li} \frac{\partial \delta u_1^{li}}{\partial \xi} + r_{1i} N_{\theta}^{li} [\delta w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h \delta w_1(\xi, \theta_i)] + \\ & \left. + r_{1i} Q_{\xi z}^{li} \frac{\partial}{\partial \xi} [\delta w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h \delta w_1(\xi, \theta_i)] + Q_{\xi z}^{li} \delta u_1^{li} \right\} R^2 d\xi. \end{aligned}$$

Применяя свойства

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a), & x_1 < a < x_2, \\ f(a)/2, & a = x_1 \text{ или } a = x_2, \\ 0, & a < x_1, a > x_2, \end{cases}$$

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a),$$

где  $\delta(x-a)$  - дельта-функция Дирака, получим выражение для потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го продольного ребра

$$\begin{aligned} \delta U^{li} = & \alpha_i k_{1i} \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ r_{1i} N_{\xi}^{li} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial \xi} + \lambda_{1i} h \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi} \right) + \right. \\ & + \left( -r_{1i} \lambda_{1i} h N_{\xi}^{li} + r_{1i} M_{\xi}^{li} \right) \frac{\partial \delta u_1^{li}}{\partial \xi} + r_{1i} N_{\theta}^{li} (\delta w_0 + \lambda_{1i} h \delta w_1) + \\ & \left. + r_{1i} Q_{\xi z}^{li} \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial \xi} + \lambda_{1i} h \frac{\partial \delta w_1}{\partial \xi} \right) + Q_{\xi z}^{li} \delta u_1^{li} \right\} \delta(\theta - \theta_i) R^2 d\xi d\theta. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из соотношений (1.9) и (1.20) потенциальная энергия  $j$ -го продольного



ребра

Подставляя деформации  $j$ -го кольцевого ребра (1.20) в уравнение (1.9), представим потенциальную энергию  $j$ -го кольцевого ребра в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta U^{2j} = & \beta_j k_{2j} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left[ r_{2j} N_\theta^{2j} \frac{\partial \delta v_0^j}{\partial \theta} + r_{2j} M_\theta^{2j} \frac{\partial \delta v_1^j}{\partial \theta} + r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \frac{\partial \delta w_0^j}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + r_{2j} N_\theta^{2j} \delta w_0^{2j} - r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \delta v_0^{2j} + Q_{\theta z}^{2j} \delta v_1^{2j} \right] R^2 d\theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_j = \frac{b_j}{R}, k_{2j} = \frac{R_{2j}^2}{R^2}, b_j - \text{толщина } j\text{-го кольцевого ребра;} \\ (N_\theta^{2j}, Q_{\theta z}^{2j}) = \lambda_{2j} \int_{\lambda_{2j} h}^{\lambda_{2j}(h+2H_{2j})} (\sigma_\theta^{2j}, \tau_{\theta z}^{2j}) dz, M_\theta^{2j} = \lambda_{2j} \int_{\lambda_{2j} h}^{\lambda_{2j}(h+2H_{2j})} \sigma_\theta^{2j} z dz; \end{aligned} \quad (1.26)$$

$H_{2j}$  – высота  $j$ -го кольцевого ребра.

С учетом соотношений (1.16) и (1.18) определим

$$\begin{aligned} \delta U^{2j} = & \beta_j k_{2j} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ r_{2j} N_\theta^{2j} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \delta v_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h \delta v_1(\xi_j, \theta) + \frac{h^2}{2} \delta v_2(\xi_j, \theta) \right] + \right. \\ & + r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \delta w_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h \delta w_1(\xi_j, \theta) \right] - \\ & - r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \left[ \delta v_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h \delta v_1(\xi_j, \theta) + \frac{h^2}{2} \delta v_2(\xi_j, \theta) \right] + \\ & + r_{2j} N_\theta^{2j} \left[ \delta w_0(\xi_j, \theta) + \lambda_{2j} h \delta w_1(\xi_j, \theta) \right] + \\ & \left. + \left( -r_{2j} \lambda_{2j} h N_\theta^{2j} + r_{2j} M_\theta^{2j} \right) \frac{\partial \delta v_1^j}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} (1 + r_{2j} \lambda_{2j} h) \delta v_1^{2j} \right\} R^2 d\theta. \end{aligned}$$

Используя свойства дельта-функции Дирака, перепишем выражение потенциальной энергии  $j$ -го кольцевого ребра в виде

$$\delta U^{2j} = \beta_j k_{2j} \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ r_{2j} N_\theta^{2j} \left( \frac{\partial \delta v_0}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial \delta v_1}{\partial \theta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \delta v_2}{\partial \theta} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial \delta w_1}{\partial \theta} \right) - r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \left( \delta v_0 + \lambda_{2j} h \delta v_1 + \frac{h^2}{2} \delta v_2 \right) + \\
& + r_{2j} N_{\theta}^{2j} (\delta w_0 + \lambda_{2j} h \delta w_1) + (-r_{2j} \lambda_{2j} h N_{\theta}^{2j} + r_{2j} M_{\theta}^{2j}) \frac{\partial \delta v_1^j}{\partial \theta} + \\
& + Q_{\theta z}^{2j} (1 + r_{2j} \lambda_{2j} h) \delta v_1^{2j} \} \delta(\xi - \xi_j) R^2 d\xi d\theta.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

С помощью разложения (1.11), перепишем работу внешних сил (1.10) в виде

$$\begin{aligned}
\delta A = & \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ \sum_{i=0}^2 [(X_{\xi}^i + p_{\xi}^i) \delta u_i + (X_{\theta}^i + p_{\theta}^i) \delta v_i] + \sum_{i=0}^1 (X_z^i + p_z^i) \delta w_i \right\} R^2 d\xi d\theta + \\
& + \int_{\theta_0^1}^{\theta_0^2} \left[ \bar{N}_{\xi} \delta u_0 + \bar{M}_{\xi}^1 \delta u_1 + \bar{M}_{\xi}^2 \delta u_2 + \bar{N}_{\xi\theta} \delta v_0 + \bar{M}_{\xi\theta}^1 \delta v_1 + \bar{M}_{\xi\theta}^2 \delta v_2 + \bar{Q}_{\xi z} \delta w_0 + \right. \\
& + \left. \bar{M}_{\xi z}^1 \delta w_1 \right]_{\xi=\xi_0^{(1)}}^{\xi=\xi_0^{(2)}} R d\theta + \int_{\xi_0^1}^{\xi_0^2} \left[ \bar{N}_{\theta z} \delta u_0 + \bar{M}_{\theta z}^1 \delta u_1 + \bar{M}_{\theta z}^2 \delta u_2 + \bar{N}_{\theta} \delta v_0 + \bar{M}_{\theta}^1 \delta v_1 + \right. \\
& + \left. \bar{M}_{\theta}^2 \delta v_2 + \bar{Q}_{\theta z} \delta w_0 + \bar{M}_{\theta z}^1 \delta w_1 \right]_{\theta=\theta_0^{(1)}}^{\theta=\theta_0^{(2)}} R d\xi.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
(X_{\xi}^l, X_{\theta}^l, X_z^l) &= \int_{-h}^h (G_1, G_2, G_3) (1 + rz) \frac{z^l}{l!} dz, \\
p_{\xi}^l &= -q_{13}^+ \left[ (1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{13}^- \left[ (1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \\
p_{\theta}^l &= -q_{23}^+ \left[ (1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{23}^- \left[ (1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \\
p_z^l &= -q_{33}^+ \left[ (1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{33}^- \left[ (1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \\
(\bar{N}_{\xi}, \bar{N}_{\xi\theta}, \bar{Q}_{\xi z}) &= \int_{-h}^h (q_{11}, q_{12}, q_{13}) (1 + rz) dz, \\
(\bar{M}_{\xi}^k, \bar{M}_{\xi\theta}^k, \bar{M}_{\xi z}^k) &= \int_{-h}^h (q_{11}, q_{12}, q_{13}) (1 + rz) \frac{z^k}{k!} dz,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\left(\bar{N}_\theta, \bar{N}_{\theta\xi}, \bar{Q}_{\theta z}\right) = \int_{-h}^h (q_{22}, q_{21}, q_{23}) dz,$$

$$\left(\bar{M}_\theta^k, \bar{M}_{\theta\xi}^k, \bar{M}_{\theta z}^k\right) = \int_{-h}^h (q_{22}, q_{21}, q_{23}) \frac{z^k}{k!} dz, k = 1, 2, l = 0, 1, 2.$$

Подставляя выражение потенциальных энергий (1.14), (1.25), (1.27) и работы (1.28) в уравнение Лагранжа (1.6) и интегрируя полученные выражения по частям, преобразуем выражение (1.6) к виду

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ \left[ rN_\xi - r\bar{N}_\xi + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} N_\xi^{li} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta u_0 + \right. \\ & + \left[ rM_\xi^1 - r\bar{M}_\xi^1 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} h r_{1i} N_\xi^{li} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta u_1 + \\ & + \left[ rM_\xi^2 - r\bar{M}_\xi^2 + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} h^2 r_{1i}}{2} N_\xi^{li} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta u_2 + r(N_{\xi\theta} - \bar{N}_{\xi\theta}) \delta v_0 + \\ & + r(M_{\xi\theta}^1 - \bar{M}_{\xi\theta}^1) \delta v_1 + r(M_{\xi\theta}^2 - \bar{M}_{\xi\theta}^2) \delta v_2 + \\ & + \left[ rQ_{\xi z} - r\bar{Q}_{\xi z} + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} Q_{\xi z}^{li} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta w_0 + \left[ \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} h r_{1i} Q_{\xi z}^{li} \delta(\theta - \theta_i) + \right. \\ & \left. + rM_{\xi z}^1 - r\bar{M}_{\xi z}^1 \right] \delta w_1 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \left( -r_{1i} \lambda_{1i} h N_\xi^{li} + r_{1i} M_\xi^{li} \right) \delta(\theta - \theta_i) \delta u_1^{li} \Bigg\} \Bigg|_{\xi=\xi_0^{(1)}}^{\xi=\xi_0^{(2)}} R^2 d\theta + \\ & + \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \left\{ r(N_{\xi\theta} - \bar{N}_{\theta\xi}) \delta u_0 + r(M_{\xi\theta}^1 - \bar{M}_{\theta\xi}^1) \delta u_1 + r(M_{\xi\theta}^2 - \bar{M}_{\theta\xi}^2) \delta u_2 + \right. \\ & + \left[ rN_\theta - r\bar{N}_\theta + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} N_\theta^{2j} \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta v_0 + \\ & + \left[ rM_\theta^1 - r\bar{M}_\theta^1 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j} h N_\theta^{2j} \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta v_1 + \\ & \left. + \left[ rM_\theta^2 - r\bar{M}_\theta^2 + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} h^2}{2} N_\theta^{2j} \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta v_2 + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ rQ_{\theta z} - r\bar{Q}_{\theta z} + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta w_0 + \\
& + \left[ rM_{\theta z}^1 - r\bar{M}_{\theta z}^1 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j} h Q_{\theta z}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta w_1 + \\
& + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \left( -\lambda_{2j} h N_{\theta}^{2j} + M_{\theta}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) \delta v_1^{2j} \Bigg\} \Bigg|_{\theta=\theta_0^{(1)}}^{\theta=\theta_0^{(2)}} R^2 d\xi - \\
& - \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ r \frac{\partial N_{\xi}}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \theta} + X_{\xi}^0 + p_{\xi}^0 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) \right\} \delta u_0 + \\
& + \left[ r \frac{\partial M_{\xi}^1}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi\theta}^1}{\partial \theta} - Q_{\xi z} + X_{\xi}^1 + p_{\xi}^1 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} h r_{1i} \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta u_1 + \\
& + \left[ r \frac{\partial M_{\xi}^2}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi\theta}^2}{\partial \theta} - M_{\xi z} + X_{\xi}^2 + p_{\xi}^2 + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} h^2 r_{1i}}{2} \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta u_2 + \\
& + \left[ r \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + rQ_{\theta z} + X_{\theta}^0 + p_{\theta}^0 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \left( \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta v_0 + \\
& + \left[ r \frac{\partial M_{\xi\theta}^1}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta}^1}{\partial \theta} - Q_{\theta z} + rM_{\theta z}^1 + X_{\theta}^1 + p_{\theta}^1 + \right. \\
& + \left. \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} h \left( \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta v_1 + \\
& + \left[ r \frac{\partial M_{\xi\theta}^2}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta}^2}{\partial \theta} - M_{\theta z}^1 + rM_{\theta z}^2 + X_{\theta}^2 + p_{\theta}^2 + \right. \\
& + \left. \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} h^2}{2} \left( \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta v_2 + \\
& + \left[ r \frac{\partial Q_{\xi z}}{\partial \xi} + r \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - rN_{\theta} + X_z^0 + p_z^0 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \left( \frac{\partial Q_{\xi z}^{1i}}{\partial \xi} - N_{\theta}^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \left( \frac{\partial Q_{\theta z}^{2j}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) \Big] \delta w_0 + \\
& + \left[ r \frac{\partial M_{\xi z}}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta z}^1}{\partial \theta} - r M_{\theta}^1 - Q_z + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} h r_{1i} \left( \frac{\partial Q_{\xi z}^{1i}}{\partial \xi} - N_{\theta}^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) + \right. \\
& + X_z^1 + p_z^1 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} h \left( \frac{\partial Q_{\theta z}^{2j}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) \Big] \delta w_1 - \\
& - \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \left( r_{1i} \lambda_{1i} h \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} - r_{1i} \frac{\partial M_{\xi}^{1i}}{\xi} + Q_{\xi z}^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) \delta u_1^{1i} - \\
& - \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} \left[ h r_{2j} \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} - r_{2j} \frac{\partial M_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + (1 + r_{2j} h) Q_{\theta z}^{2j} \right] \delta(\xi - \xi_j) \delta v_1^{2j} \Big\} R^2 d\xi d\theta = 0.
\end{aligned}$$

В силу независимости и произвольности вариаций искомым обобщенных перемещений, получим систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned}
& r \frac{\partial N_{\xi}}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\xi \theta}}{\partial \theta} + X_{\xi}^0 + p_{\xi}^0 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi}^1}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi \theta}^1}{\partial \theta} - Q_{\xi z} + X_{\xi}^1 + p_{\xi}^1 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} r_{1i} h \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi}^2}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi \theta}^2}{\partial \theta} - M_{\xi z} + X_{\xi}^2 + p_{\xi}^2 + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} r_{1i} h^2}{2} \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
& r \frac{\partial N_{\xi \theta}}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + r Q_{\theta z} + X_{\theta}^0 + p_{\theta}^0 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \left( \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi \theta}^1}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta}^1}{\partial \theta} - Q_{\theta z} + r M_{\theta z}^1 + X_{\theta}^1 + p_{\theta}^1 + \\
& + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j} h \left( \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi \theta}^2}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta}^2}{\partial \theta} - M_{\theta z}^1 + r M_{\theta z}^2 + X_{\theta}^2 + p_{\theta}^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} h^2}{2} \left( \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial Q_{\xi z}}{\partial \xi} + r \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - r N_{\theta} + X_z^0 + p_z^0 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \left( \frac{\partial Q_{\xi z}^{1i}}{\partial \xi} - N_{\theta}^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) + \\
& + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \left( \frac{\partial Q_{\theta z}^{2j}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi z}}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta z}^1}{\partial \theta} - r M_{\theta}^1 - Q_z + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} r_{1i} h \left( \frac{\partial Q_{\xi z}^{1i}}{\partial \xi} - N_{\theta}^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) + \\
& + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j} h \left( \frac{\partial Q_{\theta z}^{2j}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) + X_z^1 + p_z^1 = 0, \\
& r_{1i} \lambda_{1i} h \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} - r_{1i} \frac{\partial M_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} + Q_{\xi z}^{1i} = 0, \\
& r_{2j} \lambda_{2j} h \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} - r_{2j} \frac{\partial M_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + (1 + r_{2j} \lambda_{2j} h) Q_{\theta z}^{2j} = 0, \quad i = 1..M, j = 1..N.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Граничные условия представляются в следующем виде:

на криволинейных краях  $\xi = \xi_0^{(1)}$  и  $\xi = \xi_0^{(2)}$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \bar{u}_0 \quad \text{или} \quad r N_{\xi} - r \bar{N}_{\xi} + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} N_{\xi}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
u_1 &= \bar{u}_1 \quad \text{или} \quad r M_{\xi}^1 - r \bar{M}_{\xi}^1 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} h r_{1i} N_{\xi}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
u_2 &= \bar{u}_2 \quad \text{или} \quad r M_{\xi}^2 - r \bar{M}_{\xi}^2 + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} h^2 r_{1i}}{2} N_{\xi}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
v_0 &= \bar{v}_0 \quad \text{или} \quad N_{\xi \theta} - \bar{N}_{\xi \theta} = 0, \\
v_1 &= \bar{v}_1 \quad \text{или} \quad M_{\xi \theta}^1 - \bar{M}_{\xi \theta}^1 = 0, \\
v_2 &= \bar{v}_2 \quad \text{или} \quad M_{\xi \theta}^2 - \bar{M}_{\xi \theta}^2 = 0, \\
w_0 &= \bar{w}_0 \quad \text{или} \quad r Q_{\xi z} - r \bar{Q}_{\xi z} + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} Q_{\xi z}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) = 0,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$w_1 = \overline{w_1} \text{ или } rM_{\xi z}^1 - r\overline{M}_{\xi z}^1 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} h r_{1i} Q_{\xi z}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) = 0,$$

$$u_1^{li} = \overline{u_1}^{-li} \text{ или } -\lambda_{1i} h N_{\xi}^{1i} + M_{\xi}^{1i} = 0;$$

на прямолинейных краях  $\theta = \theta_0^{(1)}$  и  $\theta = \theta_0^{(2)}$

$$u_0 = \overline{u_0} \text{ или } N_{\xi\theta} - \overline{N}_{\xi\theta} = 0,$$

$$u_1 = \overline{u_1} \text{ или } M_{\xi\theta}^1 - \overline{M}_{\xi\theta}^1 = 0,$$

$$u_2 = \overline{u_2} \text{ или } M_{\xi\theta}^2 - \overline{M}_{\xi\theta}^2 = 0,$$

$$v_0 = \overline{v_0} \text{ или } rN_{\theta} - r\overline{N}_{\theta} + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} N_{\theta}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) = 0,$$

$$v_1 = \overline{v_1} \text{ или } rM_{\theta}^1 - r\overline{M}_{\theta}^1 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j} h N_{\theta}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) = 0, \quad (1.32)$$

$$v_2 = \overline{v_2} \text{ или } rM_{\theta}^2 - r\overline{M}_{\theta}^2 + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} h^2}{2} N_{\theta}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) = 0,$$

$$w_0 = \overline{w_0} \text{ или } rQ_{\theta z} - r\overline{Q}_{\theta z} + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) = 0,$$

$$w_1 = \overline{w_1} \text{ или } rM_{\theta z}^1 - r\overline{M}_{\theta z}^1 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j} h Q_{\theta z}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) = 0,$$

$$v_1^{2j} = \overline{v_1}^{-2j} \text{ или } -\lambda_{2j} h N_{\theta}^{2j} + M_{\theta}^{2j} = 0,$$

где  $\overline{u_k}, \overline{v_k}, \overline{w_l}, \overline{u_1}^{-li}, \overline{v_1}^{-2j}, k = 0..2, l = 0..1, i = 1..M, j = 1..N$  – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

Краевые условия (1.31), (1.32) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления оболочки, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (1.30) уточненной теории.

Сформулируем граничные условия при стандартном закреплении краев оболочки, воспользовавшись стандартными граничными условиями трехмерной теории упругости [78, 8]:

свободный край

$$\xi = \xi_0^{(1)} \text{ и } \xi = \xi_0^{(2)}: \bar{N}_\xi = \bar{N}_{\xi\theta} = \bar{M}_\xi^i = \bar{M}_{\xi\theta}^i = \bar{Q}_{\xi z} = \bar{M}_{\xi z}^j = 0, \quad i = \overline{0,2}, \quad j = 0,1,$$

$$\theta = \theta_0^{(1)} \text{ и } \theta = \theta_0^{(2)}: \bar{N}_\theta = \bar{N}_{\theta\xi} = \bar{M}_\theta^i = \bar{M}_{\theta\xi}^i = \bar{Q}_{\theta z} = \bar{M}_{\theta z}^j = 0, \quad i = \overline{0,2}, \quad j = 0,1;$$

шарнирно опертый край

$$\xi = \xi_0^{(1)} \text{ и } \xi = \xi_0^{(2)}: \bar{N}_\xi = \bar{N}_{\xi\theta} = \bar{M}_\xi^i = \bar{M}_{\xi\theta}^i = w_j = 0 \text{ или}$$

$$\bar{N}_\xi = \bar{M}_\xi^i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad k = \overline{0,2}, \quad l = 0,1,$$

$$\theta = \theta_0^{(1)} \text{ и } \theta = \theta_0^{(2)}: \bar{N}_\theta = \bar{N}_{\theta\xi} = \bar{M}_\theta^i = \bar{M}_{\theta\xi}^i = w_j = 0 \text{ или}$$

$$u_0 = u_i = \bar{N}_\theta = \bar{M}_\theta^i = w_j = 0, \quad i = \overline{0,2}, \quad j = 0,1;$$

жестко защемленный край

$$\xi = \xi_0^{(1)} \text{ и } \xi = \xi_0^{(2)}: u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0 \text{ или}$$

$$u_0 = u_i = \bar{N}_{\xi\theta} = \bar{M}_{\xi\theta}^i = w_j = 0, \quad k = \overline{0,2}, \quad l = 0,1,$$

$$\theta = \theta_0^{(1)} \text{ и } \theta = \theta_0^{(2)}: u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0 \text{ или}$$

$$\bar{N}_{\theta\xi} = \bar{M}_{\theta\xi}^i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad k = \overline{0,2}, \quad l = 0,1.$$

В случае, если оболочка является частично или полностью замкнутой, краевые условия по направлению замкнутых координат заменяются условиями периодичности, обеспечивающими однозначность перемещений в любой точке замкнутой линии координат.

#### 1.4. Методика определения напряженно-деформированного состояния

Подставляя выражения (1.15), (1.24), (1.26), (1.29) с учетом формул (1.13), (1.22), (1.23) в уравнения равновесия (1.30), находим систему дифференциальных уравнений в частных производных порядка  $2[8 + (M + N)]$  относительно  $8 + (M + N)$  обобщенных перемещений  $u_k, v_k, w_l, u_1^{li}, v_1^{2j}$ . Решая сформулированную систему уравнений с учетом граничных условий (1.31), (1.32),



получим искомые обобщенные перемещения.

Деформации обшивки и ребер находятся при подстановке найденных перемещений в соотношения (1.12), (1.21). Тангенциальные напряжения обшивки и ребер получаются из формул (1.13), (1.23).

Поперечные компоненты напряжения оболочки определяются из уравнений равновесия трехмерной теории упругости

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi} (A_2 a_2 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 a_1 \sigma_{12}) + A_1 A_2 \frac{\partial}{\partial z} (a_1 a_2 \sigma_{13}) - \frac{\partial A_2}{\partial \xi} a_1 \sigma_{22} + \\
& + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} a_2 \sigma_{21} + \frac{A_1 A_2}{R_1} a_2 \sigma_{31} + A_1 A_2 a_1 a_2 G_1 = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 a_1 \sigma_{22}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (A_2 a_2 \sigma_{21}) + A_1 A_2 \frac{\partial}{\partial z} (a_1 a_2 \sigma_{23}) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} a_2 \sigma_{11} + \\
& + \frac{\partial A_2}{\partial \xi} a_1 \sigma_{12} + \frac{A_1 A_2}{R_2} a_1 \sigma_{32} + A_1 A_2 a_1 a_2 G_2 = 0, \\
& A_1 A_2 \frac{\partial}{\partial z} (a_1 a_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (A_2 a_2 \sigma_{31}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 a_1 \sigma_{32}) - \frac{A_1 A_2}{R_1} a_2 \sigma_{11} - \\
& - \frac{A_1 A_2}{R_2} a_1 \sigma_{22} + A_1 A_2 a_1 a_2 G_3 = 0,
\end{aligned} \tag{1.33}$$

В уравнениях (1.33) для рассматриваемой системы координат  $(\xi, \theta, z)$  имеют место следующие равенства:  $A_1 = A_2 = R$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1 + rz$ .

Проинтегрировав уравнения (1.33) по толщине оболочки в интервале от  $-h$  до  $z$ , находим выражения, определяющие поперечные напряжения

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi z} &= -\frac{1}{(1+rz)} \int_{-h}^z \left[ \frac{(1+rz)}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi \theta}}{\partial \theta} + (1+rz) G_1 \right] dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}}{(1+rz)} q_{13}^-, \\
\sigma_{\theta z} &= -\frac{1}{(1+rz)^2} \int_{-h}^z \left[ \frac{(1+rz)}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{a_2^2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{\xi \theta}}{\partial \xi} + (1+rz)^2 G_2 \right] dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}^2}{(1+rz)^2} q_{23}^-, \\
\sigma_z &= -\frac{1}{(1+rz)} \int_{-h}^z \left[ \frac{(1+rz)}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \sigma_{\theta} + (1+rz) G_3 \right] dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}}{(1+rz)} q_{33}^-.
\end{aligned}$$

С помощью данного алгоритма напряженно-деформированное состояние

подкрепленных цилиндрических оболочек полностью определяется. При этом удовлетворяются уравнения равновесия трехмерной теории упругости во всех внутренних точках оболочки и выполняются краевые условия на лицевых и торцевых поверхностях.

### **1.5. Выводы по первой главе**

1. Представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории пластин и оболочек, показана актуальность темы диссертации и намечены основные задачи исследования напряженно-деформированного состояния подкрепленных цилиндрических оболочек.

2. На основе трехмерных уравнений теории упругости в ортогональной криволинейной системе координат с помощью вариационного принципа Лагранжа построены двумерные уравнения теории подкрепленных цилиндрических оболочек и сформулированы соответствующие граничные условия.

3. Разработан алгоритм определения НДС подкрепленной цилиндрической оболочки, при котором удовлетворяются уравнения равновесия трехмерной теории упругости во всех внутренних точках оболочки и выполняются граничные условия на лицевых и торцевых поверхностях.

## ГЛАВА 2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ

В данной главе разработана уточненная математическая модель напряженно-деформированного состояния подкрепленной кольцевыми ребрами круговой цилиндрической оболочки, нагруженной статическими нагрузками по внутренней и внешней поверхностям.

Сформулирована краевая задача по определению уточненного НДС рассматриваемых оболочек. Решение краевой задачи осуществляется приведением системы уравнений в перемещениях к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью метода разложения компонентов НДС и нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате.

Определение решений полученной системы уравнений строится аналитическим методом с помощью преобразования Лапласа. Приведены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния оболочек при различных нагрузках.

### 2.1. Основные уравнения теории цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами

Здесь и в дальнейшем отбросим индекс 2 и сохраним только индекс  $j$  при обозначениях для кольцевых ребер.

Подставляя выражения (1.15), (1.26), (1.29) с учетом (1.13), (1.23) в уравнения равновесия (1.30) и отбрасывая обобщенные усилия от продольных ребер, получим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=0}^2 \left( K^{k1n} + K_{11}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_n + \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_n +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} \frac{\partial}{\partial \xi} w_n = K^{kq^+} q_{13}^+ - K^{kq^-} q_{13}^-, k = 1, 2, 3, \\
& \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_n + \sum_{n=0}^2 \left( K^{l2n} + K_{11}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{l3n} \frac{\partial}{\partial \theta} w_n + \\
& + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left[ \sum_{n=0}^2 \left( K^{luj2n} + K_{22}^{luj2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{luj3n} \frac{\partial}{\partial \theta} w_n + \right. \\
& \left. + \left( K^{luj1} + K_{22}^{luj1} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) v_1^j \right] = K^{lq^+} q_{23}^+ - K^{lq^-} q_{23}^-, l = 4, 5, 6, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} \frac{\partial}{\partial \xi} u_n + \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} \frac{\partial}{\partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^1 \left( K^{s3n} + K_{11}^{s3n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{s3n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_n + \\
& + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left[ \sum_{n=0}^2 K_2^{suj2n} \frac{\partial}{\partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^1 \left( K^{suj3n} + K_{22}^{suj3n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_n + K_2^{suj1} \frac{dv_1^j}{d\theta} \right] = \\
& = K^{sq^+} q_{33}^+ - K^{sq^-} q_{33}^-, s = 7, 8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \sum_{n=0}^2 \left( K^{9uj2n} + K_{22}^{9uj2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{9uj3n} \frac{\partial}{\partial \theta} w_n \right]_{\xi=\xi_j} + \\
& + \left( K^{9uj1} + K_{22}^{9uj1} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) v_1^j = 0, \quad j = 1, N.
\end{aligned}$$

В уравнениях (2.1) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
K^{110} &= 0, K_{11}^{110} = 2(1 - \mu), K_{22}^{110} = \frac{1}{3}(3 + r^2 h^2)(1 - 2\mu), K^{111} = 0, \\
K_{11}^{111} &= \frac{2}{3} r h^2 (1 - \mu), K_{22}^{111} = -\frac{1}{3} r h^2 (1 - 2\mu), K^{112} = 0, K_{11}^{112} = \frac{1}{3} h^2 (1 - \mu), \\
K_{22}^{112} &= \frac{1}{6} h^2 (1 - 2\mu), K_{12}^{120} = 1, K_{12}^{121} = 0, K_{12}^{122} = \frac{h^2}{6}, K_1^{130} = 2\mu, K_1^{131} = \frac{2\mu}{r}, \\
K^{1q^+} &= \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 + rh)}{r^2 h E}, K^{1q^-} = -\frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - rh)}{r^2 h E}, \\
K^{210} &= 0, K_{11}^{210} = \frac{2}{3}(1 - \mu), K_{22}^{210} = -\frac{1}{3}(1 - 2\mu), K^{211} = -\frac{1 - 2\mu}{r^3 h^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{11}^{211} &= \frac{2(1-\mu)}{3r}, K_{22}^{211} = \frac{1(1-2\mu)}{3r}, K^{212} = -\frac{1(1-2\mu)}{3r^2}, K_{11}^{212} = \frac{1}{5}h^2(1-\mu), \\
K_{22}^{212} &= 0, K_{12}^{220} = \frac{2r^2h^2\mu}{5}, K_{12}^{221} = \frac{5-6r^2h^2\mu}{15r}, K_{12}^{222} = \frac{h^2\mu}{5}, \\
K_1^{230} &= \frac{2r^4h^4\mu+10\mu-5}{5r^2h^2}, K_1^{231} = -\frac{6r^2h^2\mu-30\mu+5}{15r}, \\
K^{2q^+} &= \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1+rh)}{r^3h^2E}, K^{2q^-} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1-rh)}{r^3h^2E}, \\
K^{310} &= 0, K_{11}^{310} = \frac{1}{3}(1-\mu), K_{22}^{310} = \frac{1}{30}(5+3r^2h^2)(1-2\mu), K^{311} = -\frac{1-2\mu}{3r}, \\
K_{11}^{311} &= \frac{1}{5}rh^2(1-\mu), K_{22}^{311} = -\frac{1}{10}rh^2(1-2\mu), K^{312} = -\frac{1-2\mu}{3r^2}, \\
K_{11}^{312} &= \frac{1}{10}h^2(1-\mu), K_{22}^{312} = \frac{1}{20}h^2(1-2\mu), K_{12}^{320} = \frac{1}{6}, K_{12}^{321} = 0, K_{12}^{322} = \frac{h^2}{20}, \\
K_1^{330} &= -\frac{1-3\mu}{3}, K_1^{331} = -\frac{1-3\mu}{3r}, K^{3q^+} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1+rh)}{2r^2hE}, \\
K^{3q^-} &= -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1-rh)}{2r^2hE}, K_{12}^{410} = 1, K_{12}^{411} = 0, K_{12}^{412} = \frac{h^2}{6}, \\
K^{420} &= -\frac{1}{3}(3+r^2h^2)(1-2\mu), K_{11}^{420} = 1-2\mu, K_{22}^{420} = \frac{2}{3}(3+r^2h^2)(1-\mu), \\
K^{421} &= \frac{(3+r^2h^2)(1-2\mu)}{3r}, K_{11}^{421} = \frac{1}{3}rh^2(1-2\mu), K_{22}^{421} = -\frac{2}{3}rh^2(1-\mu), \\
K^{422} &= -\frac{1}{6}h^2(1-2\mu), K_{11}^{422} = \frac{1}{6}h^2(1-2\mu), K_{22}^{422} = \frac{1}{3}h^2(1-\mu), \\
K_2^{430} &= \frac{1}{3}(3+r^2h^2)(3-4\mu), K_2^{431} = \frac{4r^2h^2\mu-3r^2h^2+6\mu}{3r}, \\
K^{4uj20} &= \frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)}{r^2 h E (1+\mu_j)}, \\
K_{22}^{4uj20} &= -\frac{2E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{r^2 h E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},
\end{aligned} \tag{2.1a}$$

$$\begin{aligned}
K^{4uj21} &= \frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{r^2 E (1 + \mu_j)}, \\
K_{22}^{4uj21} &= -\frac{2E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu_j)}{r^2 E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)}, \\
K^{4uj22} &= \frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 h (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{2r^2 E (1 + \mu_j)}, \\
K_{22}^{4uj22} &= -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 h (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu_j)}{r^2 E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)}, \\
K_2^{4uj30} &= -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(3 - 4\mu_j)}{r^2 h E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)}, \\
K_2^{4uj31} &= -\frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(3 - 4\mu_j)}{r^2 E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)}, \\
K^{4uj1} &= -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j (H_j \lambda_j r_j + h \lambda_j r_j - 1)(1 + \lambda_j h r_j)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{r^2 h E (1 + \mu_j)}, \\
K_{22}^{4uj1} &= -\frac{2E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j h r_j + \lambda_j h^2 r_j + H_j)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu_j)}{r^2 h E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)}, \\
K^{4q^+} &= \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 + rh)}{r^2 h E}, \quad K^{4q^-} = -\frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - rh)}{r^2 h E}, \\
K_{12}^{510} &= \frac{1}{5} r^2 h^2 (1 - 2\mu), \quad K_{12}^{511} = \frac{5 - 3r^2 h^2 + 6r^2 h^2 \mu}{15r}, \quad K_{12}^{512} = \frac{h^2 (1 - 2\mu)}{10}, \\
K^{520} &= \frac{(3 + r^2 h^2)(1 - 2\mu)}{3r^2 h^2}, \quad K_{11}^{520} = \frac{1}{3}(1 - 2\mu), \quad K_{22}^{520} = -\frac{2}{3}(1 - \mu), \\
K^{521} &= -\frac{(3 + r^2 h^2)(1 - 2\mu)}{3r^3 h^2}, \quad K_{11}^{521} = \frac{(1 - 2\mu)}{3r}, \quad K_{22}^{521} = \frac{2(1 - \mu)}{3r}, \quad K^{522} = \frac{(1 - 2\mu)}{6r^2}, \\
K_{11}^{522} &= \frac{1}{10} h^2 (1 - 2\mu), \quad K_{22}^{522} = 0, \quad K_2^{530} = \frac{4r^2 h^2 \mu - 3r^2 h^2 + 6\mu - 3}{3r^2 h^2}, \quad K_2^{531} = \frac{3 - 4\mu}{3r},
\end{aligned}$$

$$K^{5uj20} = \frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{r^3 h^2 E (1 + \mu_j)},$$

$$K_{22}^{5uj20} = -\frac{2E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu_j)}{r^3 h^2 E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)},$$

$$K^{5uj21} = \frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{r^3 h E (1 + \mu_j)},$$

$$K_{22}^{5uj21} = -\frac{2E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu_j)}{r^3 h E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)},$$

$$K^{5uj22} = \frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{2r^3 E (1 + \mu_j)},$$

$$K_{22}^{5uj22} = -\frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu_j)}{r^3 E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)},$$

$$K_2^{5uj30} = -\frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(3 - 4\mu_j)}{r^3 h^2 E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)},$$

$$K_2^{5uj31} = -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(3 - 4\mu_j)}{r^3 h E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)},$$

$$K^{5uj1} = -\frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1 + \lambda_j h r_j)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{r^3 h^2 E (1 + \mu_j)},$$

$$K_{22}^{5uj1} = -\frac{2E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j h r_j + \lambda_j h^2 r_j + H_j)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu_j)}{r^3 h^2 E (1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j)},$$

$$K^{5q^+} = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 + rh)}{r^3 h^2 E}, \quad K^{5q^-} = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - rh)}{r^3 h^2 E},$$

$$K_{12}^{610} = \frac{1}{6}, \quad K_{12}^{611} = 0, \quad K_{12}^{612} = \frac{h^2}{20}, \quad K^{620} = \frac{1}{30}(3r^2 h^2 - 5)(1 - 2\mu), \quad K_{11}^{620} = \frac{1}{6}(1 - 2\mu),$$

$$K_{22}^{620} = \frac{1}{15}(3r^2 h^2 + 5)(1 - \mu), \quad K^{621} = -\frac{(3r^2 h^2 - 5)(1 - 2\mu)}{30r}, \quad K_{11}^{621} = \frac{rh^2(1 - 2\mu)}{10},$$

$$K_{22}^{621} = -\frac{rh^2(1-\mu)}{5}, K^{622} = \frac{(3r^2h^2 - 20)(1-2\mu)}{60r^2}, K_{11}^{622} = \frac{1}{20}h^2(1-2\mu),$$

$$K_{22}^{622} = \frac{h^2(1-\mu)}{10}, K_2^{630} = \frac{3r^2h^2 - 20\mu + 15}{30}, K_2^{631} = -\frac{3r^2h^2 - 30\mu + 10}{30r},$$

$$K^{6uj20} = \frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)}{2r^2 h E (1+\mu_j)},$$

$$K_{22}^{6uj20} = -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{r^2 h E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K^{6uj21} = \frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)}{r^2 E (1+\mu_j)},$$

$$K_{22}^{6uj21} = -\frac{2E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{r^2 E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K^{6uj22} = \frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)}{4r^2 E (1+\mu_j)},$$

$$K_{22}^{6uj22} = -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{2r^2 E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K_2^{6uj30} = -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu_j)}{2r^2 h E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K_2^{6uj31} = -\frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu_j)}{2r^2 E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K^{6uj1} = -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\lambda_j h r_j)(1+\mu)(1-2\mu)}{2r^2 h E (1+\mu_j)},$$

$$K_{22}^{6uj1} = -\frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j h r_j + \lambda_j h^2 r_j + H_j)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{r^2 h E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K^{6q^+} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1+rh)}{2r^2 h E}, K^{6q^-} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1-rh)}{2r^2 h E},$$



$$K_1^{710} = 2\mu, K_1^{711} = -\frac{1-2\mu}{r}, K_1^{712} = -\frac{h^2(1-3\mu)}{3}, K_2^{720} = \frac{(r^2h^2+3)(3-4\mu)}{3},$$

$$K_2^{721} = -\frac{3-6\mu+3r^2h^2-4r^2h^2\mu}{3r}, K_2^{722} = \frac{h^2(3-4\mu)}{6},$$

$$K^{730} = \frac{2(3+r^2h^2)(1-\mu)}{3}, K_{11}^{730} = -(1-2\mu), K_{22}^{730} = -\frac{(3+r^2h^2)(1-\mu)}{3},$$

$$K^{731} = \frac{2(3\mu-r^2h^2+r^2h^2\mu)}{3r}, K_{11}^{731} = -\frac{rh^2(1-2\mu)}{3}, K_{22}^{731} = \frac{rh^2(1-2\mu)}{3},$$

$$K_2^{7uj20} = -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu_j)}{r^2 h E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K_2^{7uj21} = -\frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu_j)}{r^2 E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K_2^{7uj22} = -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 h (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu_j)}{2r^2 E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K^{7uj30} = -\frac{2E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{r^2 h E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K_{22}^{7uj30} = \frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)}{r^2 h E (1+\mu_j)},$$

$$K^{7uj31} = -\frac{2E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{r^2 E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)},$$

$$K_{22}^{7uj31} = \frac{E_j \lambda_j H_j \beta_j k_j r_j^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)}{r^2 E (1+\mu_j)},$$

$$K_2^{7uj1} = -\frac{E_j H_j \beta_j k_j r_j (1+\mu)(1-2\mu)}{r^2 h E (1+\mu_j)(1-2\mu_j)} \times$$

$$\times (4H_j h r_j^2 \mu_j + 4h^2 r_j^2 \mu_j - 3H_j h r_j^2 - 3h^2 r_j^2 + 4\lambda_j H_j r_j \mu_j - 3\lambda_j H_j r_j - 2\mu_j + 1),$$

$$K^{7q^+} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1+rh)}{r^2 h E}, K^{7q^-} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1-rh)}{r^2 h E},$$

$$\begin{aligned}
K_1^{810} &= 2\mu, K_1^{811} = -\frac{rh^2(1-6\mu)}{3}, K_1^{812} = -\frac{h^2(1-3\mu)}{3}, K_2^{821} = \frac{rh^2(3-4\mu)}{3}, \\
K_2^{822} &= -\frac{h^2(1-3\mu)}{3}, K_2^{820} = \frac{4}{3}r^2h^2\mu - r^2h^2 + 2\mu, \\
K^{830} &= \frac{2}{3}r^2h^2\mu - \frac{2}{3}r^2h^2 + 2\mu, K_{11}^{830} = -\frac{r^2h^2(1-2\mu)}{3}, K_{22}^{830} = \frac{r^2h^2(1-2\mu)}{3}, \\
K^{831} &= \frac{2(3+r^2h^2)(1-\mu)}{3r}, K_{11}^{831} = -\frac{rh^2(1-2\mu)}{3}, K_{22}^{831} = -\frac{rh^2(1-2\mu)}{3}, \\
K_2^{8uj20} &= -\frac{E_j\lambda_jH_j\beta_jk_jr_j^2(\lambda_jH_jr_j + \lambda_jhr_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu_j)}{rE(1+\mu_j)(1-2\mu_j)}, \\
K_2^{8uj21} &= -\frac{E_jH_j\beta_jk_jr_j^2h(\lambda_jH_jr_j + \lambda_jhr_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu_j)}{rE(1+\mu_j)(1-2\mu_j)}, \\
K_2^{8uj22} &= -\frac{E_j\lambda_jH_j\beta_jk_jr_j^2h^2(\lambda_jH_jr_j + \lambda_jhr_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu_j)}{2rE(1+\mu_j)(1-2\mu_j)}, \\
K^{8uj30} &= -\frac{2E_j\lambda_jH_j\beta_jk_jr_j^2(\lambda_jH_jr_j + \lambda_jhr_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{rE(1+\mu_j)(1-2\mu_j)}, \\
K_{22}^{8uj30} &= \frac{E_j\lambda_jH_j\beta_jk_jr_j^2(\lambda_jH_jr_j + \lambda_jhr_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)}{rE(1+\mu_j)}, \\
K^{8uj31} &= -\frac{2E_jH_j\beta_jk_jr_j^2h(\lambda_jH_jr_j + \lambda_jhr_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)(1-\mu_j)}{rE(1+\mu_j)(1-2\mu_j)}, \\
K_{22}^{8uj31} &= \frac{E_jH_j\beta_jk_jr_j^2h(\lambda_jH_jr_j + \lambda_jhr_j - 1)(1+\mu)(1-2\mu)}{rE(1+\mu_j)}, \\
K_2^{8uj1} &= -\frac{E_j\lambda_jH_j\beta_jk_jr_j(1+\mu)(1-2\mu)}{rE(1+\mu_j)(1-2\mu_j)} \times \\
&\times (4H_jhr_j^2\mu_j + 4h^2r_j^2\mu_j - 3H_jhr_j^2 - 3h^2r_j^2 + 4\lambda_jH_jr_j\mu_j - 3\lambda_jH_jr_j - 2\mu_j + 1), \\
K^{8q^+} &= \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1+rh)}{rE}, K^{8q^-} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(1-rh)}{rE},
\end{aligned}$$

$$K^{9uj20} = r_j(1-2\mu_j)(1+r_j\lambda_j h)(\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1),$$

$$K^{9uj21} = r_j \lambda_j h(1-2\mu_j)(1+r_j\lambda_j h)(\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1),$$

$$K^{9uj22} = \frac{1}{2} r_j h^2(1-2\mu_j)(1+r_j\lambda_j h)(\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1),$$

$$K_{22}^{9uj20} = \frac{2}{3} \lambda_j H_j r_j^2(1-\mu_j)(4\lambda_j H_j r_j + 3\lambda_j h r_j - 3),$$

$$K_{22}^{9uj21} = \frac{2}{3} H_j r_j^2 h(1-\mu_j)(4\lambda_j H_j r_j + 3\lambda_j h r_j - 3),$$

$$K_{22}^{9uj22} = \frac{1}{3} \lambda_j H_j r_j^2 h^2(1-\mu_j)(4\lambda_j H_j r_j + 3\lambda_j h r_j - 3),$$

$$K_2^{9uj30} = -\frac{1}{3} r_j (8H_j^2 r_j^2 \mu_j - 6h^2 r_j^2 \mu_j - 8H_j^2 r_j^2 - 3H_j h r_j^2 + 3h^2 r_j^2 - \\ -12\lambda_j H_j r_j \mu_j + 9\lambda_j H_j r_j + 6\mu_j - 3),$$

$$K_2^{9uj31} = -\frac{1}{3} r_j \lambda_j h (8H_j^2 r_j^2 \mu_j - 6h^2 r_j^2 \mu_j - 8H_j^2 r_j^2 - 3H_j h r_j^2 + 3h^2 r_j^2 - \\ -12\lambda_j H_j r_j \mu_j + 9\lambda_j H_j r_j + 6\mu_j - 3),$$

$$K^{9uj1} = -(1-2\mu_j)(1+r_j\lambda_j h)^2 (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1),$$

$$K_{22}^{9uj1} = -\frac{2}{3} H_j r_j^2 (1-\mu_j)(4\lambda_j H_j h r_j + 3\lambda_j h^2 r_j + 4H_j).$$

Граничные условия (1.31), (1.32) представляются в виде

- для краев  $\xi = \xi_0^{(1)}$  и  $\xi = \xi_0^{(2)}$ :

$$u_0 = \bar{u}_0 \text{ или } \frac{Eh}{3(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 6r(1-\mu) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 2r^2 h^2 (1-\mu) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 6r\mu \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + rh^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 6r\mu w_0 + 6\mu w_1 \right] = \bar{N}_\xi,$$

$$u_1 = \bar{u}_1 \text{ или}$$

$$\frac{Erh^3}{15(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 10(1-\mu) \left( r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) + 3rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 6r^3 h^2 \mu \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2(5-3r^2h^2)\mu\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+3rh^2\mu\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+6r^3h^2\mu w_0+2\mu(10-3r^2h^2)w_1\Big]=\overline{M}_\xi^1, \\
u_2 = \overline{u}_2 \text{ или } & \frac{Eh^3}{30(1-2\mu)(1+\mu)}\left[10(1-\mu)r\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+6r^2h^2(1-\mu)\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+ \right. \\
& \left. +3rh^2(1-\mu)\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+10r\mu\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+3rh^2\mu\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+10r\mu w_0+10\mu w_1\right]=\overline{M}_\xi^2, \\
v_0 = \overline{v}_0 \text{ или } & \frac{rhE}{6(1+\mu)}\left(6\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+h^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+6\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+2rh^2\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+h^2\frac{\partial v_2}{\partial\xi}\right)=\overline{N}_{\xi\theta}, \quad (2.2) \\
v_1 = \overline{v}_1 \text{ или } & \frac{rh^3E}{30(1+\mu)}\left[6r^3h^2\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+2(5-3r^2h^2)\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+3rh^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+ \right. \\
& \left. +10r\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+10\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+3rh^2\frac{\partial v_2}{\partial\xi}\right]=\overline{M}_{\xi\theta}^1, \\
v_2 = \overline{v}_2 \text{ или } & \frac{rh^3E}{60(1+\mu)}\left(10\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+3h^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+10\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+6rh^2\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+3h^2\frac{\partial v_2}{\partial\xi}\right)=\overline{M}_{\xi\theta}^2, \\
w_0 = \overline{w}_0 \text{ или } & \frac{hE}{3(1+\mu)}\left(3u_1+rh^2u_2+3r\frac{\partial w_0}{\partial\xi}+r^2h^2\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\right)=\overline{Q}_{\xi z}, \\
w_1 = \overline{w}_1 \text{ или } & \frac{h^3E}{3(1+\mu)}\left(ru_1+u_2+r^2\frac{\partial w_0}{\partial\xi}+r\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\right)=\overline{M}_{\xi z}^1;
\end{aligned}$$

- для краев  $\theta = \theta_0^{(1)}$  и  $\theta = \theta_0^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
u_0 = \overline{u}_0 \text{ или } & \\
\frac{rhE}{6(1+\mu)}\left[2(3+r^2h^2)\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-2rh^2\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+h^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+6\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+h^2\frac{\partial v_2}{\partial\xi}\right] & =\overline{N}_{\theta\xi}, \\
u_1 = \overline{u}_1 \text{ или } & \frac{rh^3E}{3(1+\mu)}\left(-r\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\frac{\partial v_1}{\partial\xi}\right)=\overline{M}_{\theta\xi}^1, \\
u_2 = \overline{u}_2 \text{ или } & \\
\frac{rh^3E}{60(1+\mu)}\left[2(5+3r^2h^2)\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-6rh^2\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+3h^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+10\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+3h^2\frac{\partial v_2}{\partial\xi}\right] & =\overline{M}_{\theta\xi}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_0 = \bar{v}_0 \text{ или } & \frac{hE}{3(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ 6r\mu \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 2r(3+r^2h^2)(1-\mu) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \right. \\
& + rh^2\mu \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - 2r^2h^2(1-\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + rh^2(1-\mu) \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2(r^2h^2\mu - r^2h^2 + 3\mu)w_1 \left. \right] - \\
& - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \frac{\beta_j k_j r_j^2 H_j E_j (1-\mu_j)}{(1+\mu_j)(1-2\mu_j)} \left[ 2(\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \lambda_j h \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_0 + \lambda_j h w_1 \right) - 2(H_j h r_j + h^2 r_j + \lambda_j H_j) \frac{\partial v_1^j}{\partial \theta} \right] = \bar{N}_\theta, \\
v_1 = \bar{v}_1 \text{ или } & \frac{2rh^3E}{3(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ -r(1-\mu) \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + (1-\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - r(1-\mu)w_0 + \right. \quad (2.3) \\
& + (1-\mu)w_1 + \mu \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \left. \right] - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \frac{\beta_j k_j r_j^2 \lambda_j h H_j E_j (1-\mu_j)}{(1+\mu_j)(1-2\mu_j)} \left[ 2(\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - \right. \\
& - 1) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \lambda_j h \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_0 + \lambda_j h w_1 \right) - 2(H_j h r_j + h^2 r_j + \lambda_j H_j) \frac{\partial v_1^j}{\partial \theta} \left. \right] = \bar{M}_\theta^1, \\
v_2 = \bar{v}_2 \text{ или } & \frac{h^3E}{30(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ 10r\mu \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 2r(5+3r^2h^2)(1-\mu) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \right. \\
& + 3rh^2\mu \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - 6r^2h^2(1-\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 3rh^2(1-\mu) \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2(3r^2h^2\mu - 3r^2h^2 + 5\mu)w_1 \left. \right] - \\
& - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \frac{\beta_j k_j r_j^2 h^2 H_j E_j (1-\mu_j)}{2(1+\mu_j)(1-2\mu_j)} \left[ 2(\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \lambda_j h \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{h^2}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_0 + \lambda_j h w_1 \right) - 2(H_j h r_j + h^2 r_j + \lambda_j H_j) \frac{\partial v_1^j}{\partial \theta} \right] = \bar{M}_\theta^2, \\
w_0 = \bar{w}_0 \text{ или } & \frac{-hE}{6(1+\mu)} \left[ rh^2v_2 + 2r^2h^2 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + 2(r^2h^2 + 3) \left( rv_0 - v_1 - r \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \beta_j k_j r_j \frac{\beta_j k_j r_j E_j H_j (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)}{2(1+\mu_j)} \left[ -2r_j v_0 - 2r_j \lambda_j h v_1 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r_j h^2 v_2 + 2r_j \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + 2r_j \lambda_j h \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + 2(1 + \lambda_j h r_j) v_1^j \Big] = \bar{Q}_{\theta z}, \\
w_1 = \bar{w}_1 \text{ или } & \frac{-h^3 E}{3(1 + \mu)} \left[ -r^2 v_0 + r v_1 - v_2 + r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - r \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right] - \\
& - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \beta_j k_j r_j \frac{\beta_j k_j r_j E_j H_j \lambda_j h (\lambda_j H_j r_j + \lambda_j h r_j - 1)}{2(1 + \mu_j)} \left[ -2r_j v_0 - 2r_j \lambda_j h v_1 - \right. \\
& \left. - r_j h^2 v_2 + 2r_j \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + 2r_j \lambda_j h \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + 2(1 + \lambda_j h r_j) v_1^j \right] = \bar{M}_{\theta z}^1, \\
v_1^{2j} = \bar{v}_1^{-2j} \text{ или } & \left[ (4r_j \lambda_j H_j + 3r_j \lambda_j h - 3) \left( 2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + 2\lambda_j h \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + h^2 \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2w_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\lambda_j h w_1 \right) - 2(4r_j h H_j + 3r_j h^2 + 4H_j) \frac{\partial v_1^j}{\partial \theta} \right]_{\xi=\xi_j} = 0.
\end{aligned}$$

## 2.2. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов

Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка, подкрепленная кольцевыми ребрами. Для решения системы уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3) приведем их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом разложения нагрузок и искомых перемещений в тригонометрические ряды Фурье по окружной переменной  $\theta$ .

Представим нагрузки  $q_{i3}^{\pm}$ ,  $i = 1, 2, 3$  в виде

$$\begin{aligned}
q_{13}^{\pm}(\xi, \theta) &= q_{130}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ q_{13m}^{(1)\pm}(\xi) \cos m\theta + q_{13m}^{(2)\pm}(\xi) \sin m\theta \right], \\
q_{23}^{\pm}(\xi, \theta) &= q_{230}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ q_{23m}^{(1)\pm}(\xi) \sin m\theta - q_{23m}^{(2)\pm}(\xi) \cos m\theta \right], \\
q_{33}^{\pm}(\xi, \theta) &= q_{330}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ q_{33m}^{(1)\pm}(\xi) \cos m\theta + q_{33m}^{(2)\pm}(\xi) \sin m\theta \right],
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Искомые перемещения разлагаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_k(\xi, \theta) &= u_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ u_{km}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + u_{km}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], k = 0, 1, 2, \\
 v_k(\xi, \theta) &= v_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ v_{km}^{(1)}(\xi) \sin m\theta - v_{km}^{(2)}(\xi) \cos m\theta \right], k = 0, 1, 2, \\
 w_l(\xi, \theta) &= w_{l0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ w_{lm}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + w_{lm}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], l = 0, 1, \\
 v_1^j(\theta) &= B_{j0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( B_{jm}^{(1)} \sin m\theta - B_{jm}^{(2)} \cos m\theta \right), j = 1..N,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где  $B_{j0}, B_{jm}^{(1)}, B_{jm}^{(2)}$  – неизвестные константы.

Очевидно, что при разложениях (2.4) и (2.5) граничные условия (2.3) тождественно удовлетворяются. Подставляя разложения (2.4), (2.5) в уравнения (2.1) и граничные условия (2.2) и сравнивая коэффициенты тригонометрических рядов в левых и правых частях, получим  $(2m+1)$  отдельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Система уравнений для  $u_{k0}, v_{k0}, w_{l0}, B_{j0}, k = 0, 1, 2, l = 0, 1, j = 1..N$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^2 \left( K^{k1n} + K_{11}^{k1n} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_{n0} + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} \frac{d}{d\xi} w_{n0} &= K^{kq^+} q_{130}^+ - K^{kq^-} q_{130}^-, k = 1, 2, 3, \\
 \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} \frac{d}{d\xi} u_{n0} + \sum_{n=0}^1 \left( K^{s3n} + K_{11}^{s3n} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) w_{n0} + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \sum_{n=0}^1 K^{suj3n} w_{n0} &=
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$= K^{sq^+} q_{330}^+ - K^{sq^-} q_{330}^-, s = 7, 8,$$

$$\sum_{n=0}^2 \left( K^{l2n} + K_{11}^{l2n} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) v_{n0} + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left( \sum_{n=0}^2 K^{luj2n} v_{n0} + K^{luj1} B_{j0} \right) =
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$= K^{lq^+} q_{230}^+ - K^{lq^-} q_{230}^-, l = 4, 5, 6,$$

$$\left[ \sum_{n=0}^2 K^{9uj2n} v_{n0} \right]_{\xi=\xi_j} + K^{9uj1} B_{j0} = 0, \quad \overline{j=1, N}. \tag{2.8}$$

Соответствующие граничные условия представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
u_{00} = \overline{u_{00}} \text{ или } \frac{Eh}{3(1-2\mu)(1+\mu)} & \left[ 6r(1-\mu) \frac{\partial u_{00}}{\partial \xi} + 2r^2 h^2 (1-\mu) \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \right. \\
& \left. + rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_{20}}{\partial \xi} + 6r\mu w_{00} + 6\mu w_{10} \right] = \overline{N}_{\xi 0}, \\
u_{10} = \overline{u_{10}} \text{ или } \\
\frac{Erh^3}{15(1-2\mu)(1+\mu)} & \left[ 10(1-\mu) \left( r \frac{\partial u_{00}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right) + 3rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_{20}}{\partial \xi} + 6r^3 h^2 \mu w_{00} + \right. \\
& \left. + 2\mu(10-3r^2 h^2) w_{10} \right] = \overline{M}_{\xi 0}^1, \\
u_{20} = \overline{u_{20}} \text{ или } \frac{Eh^3}{30(1-2\mu)(1+\mu)} & \left[ 10(1-\mu) r \frac{\partial u_{00}}{\partial \xi} + 6r^2 h^2 (1-\mu) \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \right. \\
& \left. + 3rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_{20}}{\partial \xi} + 10r\mu w_{00} + 10\mu w_{10} \right] = \overline{M}_{\xi 0}^2, \\
v_{00} = \overline{v_{00}} \text{ или } \frac{rhE}{6(1+\mu)} & \left( 6 \frac{\partial v_{00}}{\partial \xi} + 2rh^2 \frac{\partial v_{10}}{\partial \xi} + h^2 \frac{\partial v_{20}}{\partial \xi} \right) = \overline{N}_{\xi \theta 0}, \\
v_{10} = \overline{v_{10}} \text{ или } \frac{rh^3 E}{30(1+\mu)} & \left[ 10r \frac{\partial v_{00}}{\partial \xi} + 10 \frac{\partial v_{10}}{\partial \xi} + 3rh^2 \frac{\partial v_{20}}{\partial \xi} \right] = \overline{M}_{\xi \theta 0}^1, \\
v_{20} = \overline{v_{20}} \text{ или } \frac{rh^3 E}{60(1+\mu)} & \left( 10 \frac{\partial v_{00}}{\partial \xi} + 6rh^2 \frac{\partial v_{10}}{\partial \xi} + 3h^2 \frac{\partial v_{20}}{\partial \xi} \right) = \overline{M}_{\xi \theta 0}^2, \\
w_{00} = \overline{w_{00}} \text{ или } \frac{hE}{3(1+\mu)} & \left( 3u_{10} + rh^2 u_{20} + 3r \frac{\partial w_{00}}{\partial \xi} + r^2 h^2 \frac{\partial w_{10}}{\partial \xi} \right) = \overline{Q}_{\xi z 0}, \\
w_{10} = \overline{w_{10}} \text{ или } \frac{h^3 E}{3(1+\mu)} & \left( ru_{10} + u_{20} + r^2 \frac{\partial w_{00}}{\partial \xi} + r \frac{\partial w_{10}}{\partial \xi} \right) = \overline{M}_{\xi z 0}^1.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Для определения функций  $u_{km}^{(t)}$ ,  $v_{km}^{(t)}$ ,  $w_{lm}^{(t)}$ , и неизвестных констант  $B_{jm}^{(t)}$ ,  $k = 0, 1, 2$ ,  $l = 0, 1$ ,  $j = 1..N$ ,  $t = 1, 2$ ,  $m = 1, 2, \dots$  имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений



$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^2 \left( K^{k1n} + K_{11}^{k1n} \frac{d^2}{d\xi^2} - m^2 K_{22}^{k1n} \right) u_{nm}^{(t)} + \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{k2n} \frac{d}{d\xi} v_{nm}^{(t)} + \\
& + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} \frac{d}{d\xi} w_{nm}^{(t)} = K^{kq^+} q_{13m}^{(t)+} - K^{kq^-} q_{13m}^{(t)-}, \quad k = 1, 2, 3, \\
& - \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{l1n} \frac{d}{d\xi} u_{nm}^{(t)} + \sum_{n=0}^2 \left( K^{l2n} + K_{11}^{l2n} \frac{d^2}{d\xi^2} - m^2 K_{22}^{l2n} \right) v_{nm}^{(t)} - \sum_{n=0}^1 m K_2^{l3n} w_{nm}^{(t)} + \\
& + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left[ \sum_{n=0}^2 (K^{luj2n} - m^2 K_{22}^{luj2n}) v_{nmj}^{(t)} - \sum_{n=0}^1 m K_2^{luj3n} w_{nmj}^{(t)} + \right. \\
& \left. + (K^{luj1} - m^2 K_{22}^{luj1}) B_{jm}^{(t)} \right] = K^{lq^+} q_{23m}^{(t)+} - K^{lq^-} q_{23m}^{(t)-}, \quad l = 4, 5, 6, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} \frac{d}{d\xi} u_{nm}^{(t)} + \sum_{n=0}^2 m K_2^{s2n} v_{nm}^{(t)} + \sum_{n=0}^1 \left( K^{s3n} + K_{11}^{s3n} \frac{d^2}{d\xi^2} - m^2 K_{22}^{s3n} \right) w_{nm}^{(t)} + \\
& + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left[ \sum_{n=0}^2 m K_2^{suj2n} v_{nmj}^{(t)} + \sum_{n=0}^1 (K^{suj3n} - m^2 K_{22}^{suj3n}) w_{nmj}^{(t)} + \right. \\
& \left. + m K_2^{suj1} B_{jm}^{(t)} \right] = K^{sq^+} q_{33m}^{(t)+} - K^{sq^-} q_{33m}^{(t)-}, \quad s = 7, 8, \\
& \sum_{n=0}^2 (K^{9uj2n} - m^2 K_{22}^{9uj2n}) v_{nmj}^{(t)} - \sum_{n=0}^1 m K_2^{9uj3n} w_{nmj}^{(t)} + \\
& + (K^{9uj1} - m^2 K_{22}^{9uj1}) B_{jm}^{(t)} = 0, \quad j = 1..N, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

где  $v_{nmj}^{(t)} = v_{nm}^{(t)}(\xi_j)$ ,  $w_{lmj}^{(t)} = w_{lm}^{(t)}(\xi_j)$ ,  $n = 0..2$ ,  $l = 0..1$ .

Граничные условия (2.9) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
u_{0m}^{(t)} = \bar{u}_{0m}^{(t)} \text{ или } \frac{Eh}{3(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ (1-\mu)rh^2 \frac{du_{2m}^{(t)}}{d\xi} + 2(1-\mu)r^2h^2 \frac{du_{1m}^{(t)}}{d\xi} + \right. \\
\left. + 6(1-\mu)r \frac{du_{0m}^{(t)}}{d\xi} + m rh^2 \mu v_{2m}^{(t)} + 6mr \mu v_{0m}^{(t)} + 6\mu w_{1m}^{(t)} + 6r \mu w_{0m}^{(t)} \right] = \bar{N}_{\xi m}^{(t)}, \\
u_{1m}^{(t)} = \bar{u}_{1m}^{(t)} \text{ или } \frac{Erh^3}{15(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 3(1-\mu)rh^2 \frac{du_{2m}^{(t)}}{d\xi} + 10(1-\mu) \frac{du_{1m}^{(t)}}{d\xi} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +10(1-\mu)r \frac{du_{0m}^{(t)}}{d\xi} + 3mrh^2 \mu v_{2m}^{(t)} + 2(5-3r^2h^2)m\mu v_{1m}^{(t)} + 6mr^3h^2 \mu v_{0m}^{(t)} + \\
& +2(10-3r^2h^2)\mu w_{1m}^{(t)} + 6r^3h^2 \mu w_{0m}^{(t)} \Big] = \overline{M}_{\xi m}^{1(t)}, \\
u_{2m}^{(t)} = \overline{u}_{2m}^{(t)} \text{ или } & \frac{Eh^3}{30(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 3(1-\mu)rh^2 \frac{du_{2m}^{(t)}}{d\xi} + 6(1-\mu)r^2h^2 \frac{du_{1m}^{(t)}}{d\xi} + \right. \\
& \left. +10(1-\mu)r \frac{du_{0m}^{(t)}}{d\xi} + 3mrh^2 \mu v_{2m}^{(t)} + 10mr\mu v_{0m}^{(t)} + 10\mu w_{1m}^{(t)} + 10r\mu w_{0m}^{(t)} \right] = \overline{M}_{\xi m}^{2(t)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{0m}^{(t)} = \overline{v}_{0m}^{(t)} \text{ или} \\
-\frac{rhE}{6(1+\mu)} \left[ mh^2 u_{2m}^{(t)} + 6mu_{0m}^{(t)} - h^2 \frac{dv_{2m}^{(t)}}{d\xi} - 2h^2 r \frac{dv_{1m}^{(t)}}{d\xi} - 6 \frac{dv_{0m}^{(t)}}{d\xi} \right] = \overline{N}_{\xi \theta m}^{(t)}, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{1m}^{(t)} = \overline{v}_{1m}^{(t)} \text{ или } & -\frac{rh^3E}{30(1+\mu)} \left[ 6mr^3h^2 u_{0m}^{(t)} + 2(5-3r^2h^2)m u_{1m}^{(t)} + \right. \\
& \left. +3mrh^2 u_{2m}^{(t)} - 10r \frac{dv_{0m}^{(t)}}{d\xi} - 10 \frac{dv_{1m}^{(t)}}{d\xi} - 3rh^2 \frac{dv_{2m}^{(t)}}{d\xi} \right] = \overline{M}_{\xi \theta m}^{1(t)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{2m}^{(t)} = \overline{v}_{2m}^{(t)} \text{ или} \\
-\frac{rh^3E}{60(1+\mu)} \left( 3mh^2 u_{2m}^{(t)} + 10mu_{0m}^{(t)} - 3h^2 \frac{dv_{2m}^{(t)}}{d\xi} - 6rh^2 \frac{dv_{1m}^{(t)}}{d\xi} - 10 \frac{dv_{0m}^{(t)}}{d\xi} \right) = \overline{M}_{\xi \theta m}^{2(t)},
\end{aligned}$$

$$w_{0m}^{(t)} = \overline{w}_{0m}^{(t)} \text{ или } \frac{hE}{3(1+\mu)} \left( r^2h^2 \frac{dw_{1m}^{(t)}}{d\xi} + 3r \frac{dw_{0m}^{(t)}}{d\xi} + rh^2 u_{2m}^{(t)} + 3u_{1m}^{(t)} \right) = \overline{Q}_{\xi z m}^{(t)},$$

$$w_{1m}^{(t)} = \overline{w}_{1m}^{(t)} \text{ или } \frac{h^3E}{3(1+\mu)} \left( r \frac{dw_{1m}^{(t)}}{d\xi} + r^2 \frac{dw_{0m}^{(t)}}{d\xi} + u_{2m}^{(t)} + ru_{1m}^{(t)} \right) = \overline{M}_{\xi z m}^{1(t)}.$$

Зная общее решение однородных дифференциальных уравнений (2.6), (2.7) и (2.10), частное решение неоднородных дифференциальных уравнений находится методом вариации произвольных постоянных. Используя граничные условия (2.9), (2.12), находим произвольные постоянные. Полученные функции  $u_{k0}, v_{k0}, w_{l0}, u_{km}^{(t)}, v_{km}^{(t)}, w_{lm}^{(t)}$  содержат неизвестные постоянные  $v_{kmj}^{(t)}, w_{lmj}^{(t)}, B_{j0}, B_{jm}^{(t)}, j=1..N$ ,

$k = 0, 1, 2, \quad l = 0, 1, \quad t = 1, 2, \quad m = 1, 2, \dots$ , которые определяются из равенств  $v_{kmj}^{(t)} = v_{km}^{(t)}(\xi_j)$ ,  $w_{lmj}^{(t)} = w_{lm}^{(t)}(\xi_j)$  и уравнений (2.8), (2.11). С помощью полученных функций и рядов (2.5) находим искомые упругие перемещения  $u_k(\xi, \theta)$ ,  $v_k(\xi, \theta)$ ,  $w_l(\xi, \theta)$ ,  $v_1^j(\theta)$ ,  $k = 0, 1, 2, \quad l = 0, 1$ .

### 2.3. Общее решение однородных систем дифференциальных уравнений

Однородные дифференциальные уравнения, соответствующие (2.6), (2.7) и (2.10), получаются отбрасыванием слагаемых от внешних нагрузок и реакций ребер.

Рассмотрим систему уравнений (2.6). В матричном виде однородные уравнения, соответствующие (2.6), записываются в виде

$$\mathbf{A}[u_{00}, u_{10}, u_{20}, w_{00}, w_{10}]^T = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрицы размером  $5 \times 5$  коэффициентов уравнений (2.6),  $\mathbf{0}$  – нулевой вектор.

Пусть уравнение

$$\det(\mathbf{A})F_1(\xi) = 0, \quad (2.14)$$

где  $\det(\mathbf{A})$  – определитель матрицы  $\mathbf{A}$ , имеет решение  $F_1(\xi)$ . Тогда решение однородного уравнения (2.13) определяется следующими формулами:

$$u_{00} = \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{1s} F_1, \quad u_{10} = \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{2s} F_1, \quad u_{20} = \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{3s} F_1, \quad (2.15)$$

$$w_{00} = \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{4s} F_1, \quad w_{10} = \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{5s} F_1.$$

Здесь  $\det(\mathbf{A})_{ij}$  – минор определителя  $\det(\mathbf{A})$ , соответствующий элементу  $(i, j)$  матрицы  $\mathbf{A}$ .

Характеристическое уравнение, соответствующие дифференциальному уравнению (2.14), можно представить в виде

$$p^2 \sum_{n=0}^4 (-1)^n K_{2n}^0 p^{2n} = 0. \quad (2.16)$$

В уравнении (2.16) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} K_0^0 &= 225(3 - \varepsilon_0^2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)[3 - 6\mu + 2(1 - \mu)\varepsilon_0^2], \\ K_2^0 &= 45\varepsilon_0^2(1 + \mu)[6(1 - 2\mu)(6 - 11\mu) + (6 + 25\mu - 70\mu^2)\varepsilon_0^2 - \\ &\quad - 3(1 - 2\mu)(4 + \mu)\varepsilon_0^4], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$K_4^0 = 3\varepsilon_0^2(1 - \mu)[25(1 - 2\mu) + (79\mu^2 + 108\mu - 1)\varepsilon_0^4],$$

$$K_6^0 = 3\varepsilon_0^4(1 - \mu)^2[30 + (2 - 50\mu)\varepsilon_0^2 + (31\mu - 2)\varepsilon_0^4],$$

$$K_8^0 = \varepsilon_0^6(1 - \mu)^3(5 - 3\varepsilon_0^2)(3 - \varepsilon_0^2),$$

где  $\varepsilon_0 = h/R$  - относительная толщина обшивки.

Кроме двух нулевых корней, уравнение (2.16) имеет следующие корни:

$$\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2.$$

Для тонких оболочек имеются строгие неравенства  $p_1 \ll p_2, q_1 \ll q_2$  [36], при

этом они определяются выражениями

$$p_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_0^0}{K_4^0} + \frac{K_2^0}{4K_4^0}}, q_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_0^0}{K_4^0} - \frac{K_2^0}{4K_4^0}}, \quad (2.18)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_4^0}{K_8^0} + \frac{K_6^0}{4K_8^0}}, q_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_4^0}{K_8^0} - \frac{K_6^0}{4K_8^0}}.$$

При нулевых решениях уравнения (2.16) выражения (2.15) теряют свой смысл. Поэтому рассмотрим только частное решение уравнения (2.14), соответствующее ненулевым корням (2.16). Такое решение находится в виде

$$\begin{aligned} \overline{F}_1(\xi) &= (C_1 \sin q_1 \xi + C_2 \cos q_1 \xi) e^{-p_1 \xi} + (C_3 \sin q_1 \xi + C_4 \cos q_1 \xi) e^{p_1 \xi} + \\ &\quad + (C_5 \sin q_2 \xi + C_6 \cos q_2 \xi) e^{-p_2 \xi} + (C_7 \sin q_2 \xi + C_8 \cos q_2 \xi) e^{p_2 \xi}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.13) имеет два очевидных решения

$$[u_{00} = C_9, u_{10} = 0, u_{20} = 0, w_{00} = 0, w_{10} = 0],$$

$$[u_{00} = C_{10}\xi, u_{10} = 0, u_{20} = 0, w_{00} = -C_{10}\mu, w_{10} = -C_{10}\mu r].$$

В результате общее решение уравнения (2.13) приводится к виду

$$u_{00} = C_9 + C_{10}\xi + \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{1s} \overline{F}_1(\xi), u_{10} = \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{2s} \overline{F}_1(\xi),$$

$$u_{20} = \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{3s} \overline{F}_1(\xi), w_{00} = -C_{10}\mu + \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{4s} \overline{F}_1(\xi),$$

$$w_{10} = -C_{10}\mu r + \sum_{s=1}^5 \det(\mathbf{A})_{5s} \overline{F}_1(\xi).$$

Аналогичным способом находим общее решение однородных дифференциальных уравнений, соответствующих уравнениям (2.7), в виде

$$v_{00} = C_5 + C_6\xi + \sum_{s=1}^3 \det(\mathbf{B})_{1s} \overline{F}_2(\xi), v_{10} = C_5 r + C_6 r \xi + \sum_{s=1}^3 \det(\mathbf{B})_{2s} \overline{F}_2(\xi),$$

$$v_{20} = \sum_{s=1}^3 \det(\mathbf{B})_{3s} \overline{F}_2(\xi),$$

где  $\mathbf{B}$  – квадратная матрица размером  $3 \times 3$  коэффициентов уравнений (2.7);

$$\overline{F}_2(\xi) = C_1 e^{p_3 \xi} + C_2 e^{-p_3 \xi} + C_3 e^{p_4 \xi} + C_4 e^{-p_4 \xi}.$$

Здесь  $p_3, p_4$  определяются следующими формулами:

$$p_3 = \sqrt{\frac{K_1 - \sqrt{(K_1)^2 - 4K_0K_2}}{2K_2}}, p_4 = \sqrt{\frac{K_1 + \sqrt{(K_1)^2 - 4K_0K_2}}{2K_2}}, \quad (2.19)$$

где

$$K_0 = \frac{(10 + \varepsilon_0^2)(1 + \varepsilon_0^2)}{6\varepsilon_0^2}, K_1 = \frac{(20 - 5\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0^4)}{50}, K_2 = \frac{\varepsilon_0^2(5 - 3\varepsilon_0^2)}{135}.$$

Однородные уравнения, соответствующие (2.10), представляются в матричном виде (далее индекс  $n$  опускаем)

$$\mathbf{M}[u_{0m}, u_{1m}, u_{2m}, v_{0m}, v_{1m}, v_{2m}, w_{0m}, w_{1m}]^T = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

где  $\mathbf{M}$  – квадратная матрица размером  $8 \times 8$  коэффициентов уравнений (2.10).

Пусть уравнение

$$\det(\mathbf{M}) F_3(\xi) = 0, \quad (2.21)$$

где  $\det(\mathbf{M})$  – определитель матрицы  $\mathbf{M}$ , имеет решение  $F_3(\xi)$ . Тогда решение однородного уравнения (2.20) определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_{0m} &= \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{1s} F_3, u_{1m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{2s} F_3, u_{2m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{3s} F_3, \\ v_{0m} &= \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{4s} F_3, v_{1m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{5s} F_3, v_{2m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{6s} F_3, \\ w_{0m} &= \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{7s} F_3, w_{1m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{8s} F_3. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь  $\det(\mathbf{M})_{ij}$  – минор определителя  $\det(\mathbf{M})$ , соответствующий элементу  $(i, j)$  матрицы  $\mathbf{M}$ .

Характеристическое уравнение, соответствующее (2.21), представится в виде

$$\sum_{n=0}^8 K_{2n}^m p^{2n} = 0. \quad (2.23)$$

В уравнении (2.23) введены следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} K_0^m &= 150m^4 \varepsilon_0^2 (1-\mu)(m-1)^2 (m+1)^2 \left[ 90 + (36 - \varepsilon_0^2) \varepsilon_0^2 m^2 + 2\varepsilon_0^4 m^4 \right] \times \\ &\times \left\{ 9(1-2\mu)(10 + \varepsilon_0^2) + (1-\mu) \left[ 12 + (5-2\mu) \varepsilon_0^2 \right] \varepsilon_0^2 m^2 + 2(1-\mu)^2 \varepsilon_0^4 m^4 \right\}, \\ K_2^m &= -30m^2 \varepsilon_0^2 (m-1)(m+1) \left\{ -81000(1-2\mu)(2-2\mu-\mu^2) - 2700(1-2\mu) \times \right. \\ &\times (9-12\mu+7\mu^2) + \left[ 162000(1-2\mu)(1-\mu) - 1350(62-141\mu+\mu^2+98\mu^3) \right] \times \\ &\times \varepsilon_0^2 \left. \right\} m^2 + \left[ 27000(4-7\mu)(1-\mu) - 90(16-361\mu+1137\mu^2-810\mu^3) \varepsilon_0^2 \right] \varepsilon_0^2 m^4 + \\ &+ \left[ 1080(1-\mu)(22-32\mu+5\mu^2) + 3(175+4318\mu-10553\mu^2+6240\mu^3) \varepsilon_0^2 \right] \times \\ &\times \varepsilon_0^4 m^6 + \left[ 840(4-3\mu)(1-\mu)^2 + (1-\mu)(659-355\mu-394\mu^2) \varepsilon_0^2 \right] \varepsilon_0^6 m^8 + \\ &+ 4(40+11\varepsilon_0^2)(1-\mu)^3 \varepsilon_0^8 m^{10} \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4^m &= 10 \left\{ 364500(1+\mu)(1-2\mu)^2 + 12150(1+\mu)(1-2\mu)(43-66\mu)\varepsilon_0^2 + \right. \\
&+ \left[ 48600(1-2\mu)(6-7\mu+12\mu^2) + 810(593-1174\mu-925\mu^2+2042\mu^3)\varepsilon_0^2 \right] \times \\
&\times \varepsilon_0^2 m^2 + \left[ 729000(1-\mu)(1-2\mu) - 1620(333-746\mu+177\mu^2+206\mu^3)\varepsilon_0^2 \right] \times \\
&\times \varepsilon_0^2 m^4 + \left[ 162000(1-\mu)(4-7\mu) - 270(491-2152\mu+4105\mu^2-2538\mu^3)\varepsilon_0^2 \right] \times \\
&\times \varepsilon_0^4 m^6 + \left[ 8100(1-\mu)(22-32\mu+5\mu^2) - 18(1971-13973\mu+24577\mu^2 - \right. \\
&- 12935\mu^3)\varepsilon_0^2 \left. \right] \varepsilon_0^6 m^8 + \left[ 7560(4-3\mu)(1-\mu)^2 + 3(2005+91\mu-2546\mu^2) \times \right. \\
&\times (1-\mu)\varepsilon_0^2 \left. \right] \varepsilon_0^8 m^{10} + 140(12+5\varepsilon_0^2)(1-\mu)^3 \varepsilon_0^{10} m^{12} \left. \right\}, \\
K_6^m &= -60\varepsilon_0^2 \left\{ \left[ 8100(9-17\mu)(1-2\mu)(1+\mu) + 135(1+\mu)(471-1208\mu + \right. \right. \\
&+ 572\mu^2)\varepsilon_0^2 \left. \right] + \left[ 81000(1-2\mu)(1-\mu) + 135(218-851\mu+407\mu^2+646\mu^3) \times \right. \\
&\times \varepsilon_0^2 \left. \right] m^2 + \left[ 27000(1-\mu)(4-7\mu) + 45(-293+1572\mu-3599\mu^2+2494\mu^3)\varepsilon_0^2 \right] \times \\
&\times \varepsilon_0^2 m^4 + \left[ 1800(22-32\mu+5\mu^2)(1-\mu) + 3(-3259+20002\mu-33743\mu^2 + \right. \\
&+ 17540\mu^3)\varepsilon_0^2 \left. \right] \varepsilon_0^4 m^6 + \left[ 2100(4-3\mu)(1-\mu)^2 + 5(254+203\mu-547\mu^2)(1-\mu) \times \right. \\
&\times \varepsilon_0^2 \left. \right] \varepsilon_0^6 m^8 + 14(40+17\varepsilon_0^2)(1-\mu)^3 \varepsilon_0^8 m^{10} \left. \right\}, \tag{2.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_8^m &= 60\varepsilon_0^2 \left\{ \left[ 20250(1-2\mu)(1-\mu) + 135(1-2\mu)(319-295\mu-284\mu^2) \right] + \right. \\
&+ \left[ 13500(4-7\mu)(1-\mu) + 45(17+139\mu-822\mu^2+804\mu^3)\varepsilon_0^2 \right] \varepsilon_0^2 m^2 + \\
&+ \left[ 1350(1-\mu)(22-32\mu+5\mu^2) + 9(-867+4111\mu-6294\mu^2+3170\mu^3)\varepsilon_0^2 \right] \times \\
&\times \varepsilon_0^4 m^4 + \left[ 2100(4-3\mu)(1-\mu)^2 + 15(1-\mu)(3+172\mu-215\mu^2)\varepsilon_0^2 \right] \varepsilon_0^6 m^6 + \\
&+ 70(10+3\varepsilon_0^2)(1-\mu)^3 \varepsilon_0^8 m^8 \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$K_{10}^m = -5\varepsilon_0^4 \left\{ \left[ 32400(4-7\mu)(1-\mu) + 540(49-173\mu+176\mu^2-12\mu^3)\varepsilon_0^2 \right] + \right.$$

$$+ \left[ 6480(1-\mu)(22-32\mu+5\mu^2) + 18(-1953+4774\mu-4241\mu^2+1600\mu^3)\varepsilon_0^2 \right] \times \\ \times \varepsilon_0^2 m^2 + \left[ 15120(4-3\mu)(1-\mu)^2 - 30(481-1253\mu+862\mu^2)(1-\mu)\varepsilon_0^2 \right] \varepsilon_0^4 m^4 + \\ + 280(24+\varepsilon_0^2)(1-\mu)^3 \varepsilon_0^6 m^6 \},$$

$$K_{12}^m = 30\varepsilon_0^6(1-\mu) \left\{ \left[ 180(22-32\mu+5\mu^2) - 6(131+404\mu-625\mu^2)\varepsilon_0^2 \right] + \right. \\ \left. + \left[ 840(1-\mu)(4-3\mu) - (1951-3395\mu+1534\mu^2)\varepsilon_0^2 \right] \varepsilon_0^2 m^2 + \right. \\ \left. + 28(20-7\varepsilon_0^2)(1-\mu)^2 \varepsilon_0^4 m^4 \right\},$$

$$K_{14}^m = -60\varepsilon_0^8(1-\mu)^2 \left\{ \left[ 60(4-3\mu) - (245-113\mu)\varepsilon_0^2 \right] + \right. \\ \left. + \left[ 10(1-\mu)\varepsilon_0^2(8-7\varepsilon_0^2) \right] m^2 \right\},$$

$$K_{16}^m = 8\varepsilon_0^{10}(3-\varepsilon_0^2)(5-3\varepsilon_0^2)^2(1-\mu)^3.$$

В уравнении (2.23) положим  $m=1$ . Тогда характеристическое уравнение (2.23) имеет нулевой корень, кратность которого равна четырем. Поэтому необходимо найти четыре частных решения, соответствующих нулевым корням.

При  $m=1$  дифференциальные уравнения (2.20) имеют следующие частные независимые решения:

$$\left[ u_{01} = 0, u_{11} = 0, u_{21} = 0, v_{01} = C_1, v_{11} = 0, v_{21} = 0, w_{01} = -C_1, w_{11} = 0 \right];$$

$$\left[ u_{01} = C_2, u_{11} = C_2 r, u_{21} = 0, v_{01} = C_2 \xi, v_{11} = 0, v_{21} = 0, w_{01} = -C_2 \xi, w_{11} = 0 \right];$$

$$\left[ u_{01} = 2C_3 \xi, u_{11} = 2C_3 r \xi, u_{21} = 0, v_{01} = C_3 \xi^2, v_{11} = \frac{2S_1 r \mu}{S} C_3, \right.$$

$$\left. v_{21} = \frac{-4S_2 r^2 \mu}{S} C_3, w_{01} = -C_3 \xi^2 + \frac{4S_3 \mu}{S} C_3, w_{11} = \frac{2S_4 r \mu}{S} C_3 \right];$$

$$\left[ u_{01} = 3C_4 \xi^2 + \frac{6S_5 C_4}{(10+4\varepsilon_0^2-\varepsilon_0^4)S}, u_{11} = 3C_4 r \xi^2 + \frac{6S_6 r C_4}{(10+4\varepsilon_0^2-\varepsilon_0^4)S}, \right.$$



$$u_{21} = \frac{12S_7 r^2 C_4}{(10 + 4\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^4)S}, v_{01} = C_4 \xi^3, v_{11} = \frac{6S_1 r \mu C_4}{S} \xi,$$

$$v_{21} = \frac{-12S_2 r^2 \mu C_4}{S} \xi, w_{01} = -C_4 \xi^3 + \frac{12S_3 \mu C_4}{S} \xi, w_{11} = \frac{6S_4 r \mu C_4}{S} \xi \Big].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$S = 90(1 - 2\mu)^2 + 3(1 - 2\mu)(37 - 50\mu + 10\mu^2)\varepsilon_0^2 - 5(1 - \mu)(3 - 10\mu + 4\mu^2)\varepsilon_0^4,$$

$$S_1 = -90(1 - 2\mu)^2 - 3(1 - 2\mu)(37 - 30\mu)\varepsilon_0^2 + (2 - 5\mu)(15 - 14\mu)\varepsilon_0^4,$$

$$S_2 = 45(1 - 2\mu)^2 + 3(1 - 2\mu)(22 - 25\mu)\varepsilon_0^2 + (3 - \mu + 10\mu^2)\varepsilon_0^4,$$

$$S_3 = -45(1 - 2\mu)^2 - 9(1 - 2\mu)(7 - 10\mu)\varepsilon_0^2 - \mu(7 - 10\mu)\varepsilon_0^4,$$

$$S_4 = -90(1 - 2\mu)^2 - 3(1 - 2\mu)(47 - 60\mu)\varepsilon_0^2 - (18 - 45\mu + 30\mu^2)\varepsilon_0^4,$$

$$S_5 = 1800(1 + \mu)(1 - 2\mu)^2 + 60(1 - 2\mu)(49 - 25\mu - 64\mu^2)\varepsilon_0^2 +$$

$$+ (1308 - 3583\mu + 1104\mu^2 + 2220\mu^3)\varepsilon_0^4,$$

$$S_6 = 900\mu(1 - 2\mu)^2 + 60(1 - 2\mu)(30 - 13\mu - 72\mu^2)\varepsilon_0^2 +$$

$$+ (2940 - 7996\mu + 2012\mu^2 + 4600\mu^3)\varepsilon_0^4,$$

$$S_7 = 450\mu(1 - 2\mu)^2 - 15(1 - 2\mu)(60 - 139\mu + 12\mu^2)\varepsilon_0^2 -$$

$$- (1940 - 3925\mu + 2017\mu^2 + 1170\mu^3)\varepsilon_0^4.$$

Кроме двух нулевых корней, уравнение (2.22) имеет также следующие корни:

$$\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4.$$

Для тонких оболочек имеются строгие неравенства  $p_1 \ll p_2, p_3, p_4, q_1 \ll q_2$ ,

при этом  $p_1, q_1$  определяются выражениями

$$p_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_4^m}{K_8^m} + \frac{K_6^m}{4K_8^m}}, q_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_4^m}{K_8^m} - \frac{K_6^m}{4K_8^m}}.$$

Частное решение дифференциального уравнения (2.21), соответствующее ненулевым корням уравнения (2.23), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\overline{F}_3(\xi) = & (C_5 \sin q_1 \xi + C_6 \cos q_1 \xi) e^{p_1 \xi} + (C_7 \sin q_1 \xi + C_8 \cos q_1 \xi) e^{-p_1 \xi} + \\ & + (C_9 \sin q_2 \xi + C_{10} \cos q_2 \xi) e^{p_2 \xi} + (C_{11} \sin q_2 \xi + C_{12} \cos q_2 \xi) e^{-p_2 \xi} + \\ & + C_{13} e^{p_3 \xi} + C_{14} e^{-p_3 \xi} + C_{15} e^{p_4 \xi} + C_{16} e^{-p_4 \xi}.\end{aligned}$$

На основе полученных частных решений находим общее решение уравнения (2.20) при  $m = 1$

$$u_{01} = C_2 + \frac{6S_5 C_4}{(10 + 4\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^4)S} + 2C_3 \xi + 3C_4 \xi^2 + \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{1s} \overline{F}_3,$$

$$u_{11} = C_2 r + \frac{6S_5 r C_4}{(10 + 4\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^4)S} + 2C_3 r \xi + 3C_4 r \xi^2 + \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{2s} \overline{F}_3,$$

$$u_{21} = \frac{12S_7 r^2 C_4}{(10 + 4\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^4)S} + \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{3s} \overline{F}_3,$$

$$v_{01} = C_1 + C_2 \xi + C_3 \xi^2 + C_4 \xi^3 + \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{4s} \overline{F}_3,$$

$$v_{11} = \frac{2S_1 r \mu C_3}{S} + \frac{6S_1 r \mu C_4}{S} \xi + \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{5s} \overline{F}_3,$$

$$v_{21} = \frac{-4S_2 r^2 \mu C_3}{S} - \frac{12S_2 r^2 \mu C_4}{S} \xi + \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{6s} \overline{F}_3,$$

$$w_{01} = -C_1 + \frac{4S_3 \mu C_3}{S} + \left( -C_2 + \frac{12S_3 \mu C_4}{S} \right) \xi - C_3 \xi^2 - C_4 \xi^3 + \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{7s} \overline{F}_3,$$

$$w_{11} = \frac{2S_4 r \mu C_3}{S} + \frac{6S_4 r \mu C_4}{S} \xi + \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{M})_{8s} \overline{F}_3.$$

Рассмотрим случай  $m \geq 2$ , при этом характеристическое уравнение (2.23) имеет следующие корни:  $\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3 \pm iq_3, \pm p_4, \pm p_5$ .

Общее решение уравнения (2.21) представится как

$$\begin{aligned}F_3(\xi) = & (C_1 \sin q_1 \xi + C_2 \cos q_1 \xi) e^{p_1 \xi} + (C_3 \sin q_1 \xi + C_4 \cos q_1 \xi) e^{-p_1 \xi} + (C_5 \sin q_2 \xi + \\ & + C_6 \cos q_2 \xi) e^{p_2 \xi} + (C_7 \sin q_2 \xi + C_8 \cos q_2 \xi) e^{-p_2 \xi} + (C_9 \sin q_3 \xi + C_{10} \cos q_3 \xi) e^{p_3 \xi} + \\ & + (C_{11} \sin q_3 \xi + C_{12} \cos q_3 \xi) e^{-p_3 \xi} + C_{13} e^{p_4 \xi} + C_{14} e^{-p_4 \xi} + C_{15} e^{p_5 \xi} + C_{16} e^{-p_5 \xi}.\end{aligned}$$

Подставляя  $F_3(\xi)$  в формулы (2.22), получим общее решение дифференциального уравнения (2.20).

#### 2.4. Анализ корней характеристического уравнения

В [36, формула (23.3.6)] асимптотическим методом установлено, что при

$$m < \left( \frac{h}{\sqrt{3}R} \right)^{-1/2}$$

корни характеристического уравнения (23.3.6) разделяются на две группы: малые и большие. Малым корням соответствуют основные НДС, а большим – НДС простых краевых эффектов. Для корней характеристического уравнения (2.23) в данной работе выполняются неравенства

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 < p_4 < p_5, q_1 \leq q_2 \leq q_3.$$

Следовательно, корни уравнения (2.23) разделяются на три группы. Асимптотически малым  $\pm p_1 \pm iq_1$  и большим  $\pm p_2 \pm iq_2$  корням соответствуют НДС, которые приближенно определяются по классической теории [36]. К третьей группе относятся сверхбольшие корни. Им соответствуют НДС, которые назовем дополнительными краевыми эффектами.

#### 2.5. Частные решения неоднородных систем дифференциальных уравнений, соответствующие внешним нагрузкам

Частные решения систем дифференциальных уравнений (2.6), (2.7) и (2.10) находятся операционным методом, связанным с преобразованием Лапласа [10, 42].

Рассматривается замкнутая подкрепленная цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием осесимметричной нагрузки.

Параметры осесимметричной нагрузки, внутренних сил и перемещений при осесимметричной деформации находятся из первых рядов (2.4), (2.5) при  $m = 0$ . Следовательно, в качестве исходной принята система дифференциальных

уравнений (2.6), (2.7) с соответствующими граничными условиями (2.9). Для простоты изложения индекс 0 при перемещениях будет опущен.

Обозначим изображения функций  $u_k(\xi), v_k(\xi), w_l(\xi), k = 0, 1, 2, l = 0, 1$  в преобразовании Лапласа через  $U_k(p), V_k(p), W_l(p), k = 0, 1, 2, l = 0, 1$ . По теореме дифференцирования оригинала имеем

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d}{d\xi}u_k(\xi)\right\} &= pU_k(p) - C_{1k0}, L\left\{\frac{d^2}{d\xi^2}u_k(\xi)\right\} = p^2U_k(p) - pC_{1k0} - C_{1k1}, \\ L\left\{\frac{d}{d\xi}v_k(\xi)\right\} &= pV_k(p) - C_{2k0}, L\left\{\frac{d^2}{d\xi^2}v_k(\xi)\right\} = p^2V_k(p) - pC_{2k0} - C_{2k1}, \\ L\left\{\frac{d}{d\xi}w_l(\xi)\right\} &= pW_l(p) - C_{3l0}, L\left\{\frac{d^2}{d\xi^2}w_l(\xi)\right\} = p^2W_l(p) - pC_{3l0} - C_{3l1}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где произвольные постоянные  $C$  с нижними числовыми индексами определяются так

$$\begin{aligned} C_{1k0} &= u_k(0), C_{1k1} = \frac{d}{d\xi}u_k(0), C_{2k0} = v_k(0), C_{2k1} = \frac{d}{d\xi}v_k(0), \\ C_{3l0} &= w_l(0), C_{3l1} = \frac{d}{d\xi}w_l(0), k = 0, 1, 2, l = 0, 1. \end{aligned}$$

Переходя от оригиналов к изображениям, дифференциальные уравнения (2.6), (2.7) преобразуются к алгебраическим уравнениям следующего вида:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^2 (K^{k1n} + p^2 K_{11}^{k1n})U_n + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} pW_n = \\ &= \sum_{n=0}^2 K_{11}^{k1n} (pC_{1n0} + C_{1n1}) + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} C_{3n0} + K^{kq^+} Q_{130}^+ - K^{kq^-} Q_{130}^-, \quad k = 1, 2, 3, \\ &\sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} pU_n + \sum_{n=0}^1 (K^{s3n} + K_{11}^{s3n} p^2)W_n = \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} C_{1n0} + \sum_{n=0}^1 K_{11}^{s3n} (pC_{3n0} + \\ &+ C_{3n1}) - \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^1 K^{suj3n} w_{nj} e^{-\xi_j p} + K^{sq^+} Q_{330}^+ - K^{sq^-} Q_{330}^-, \quad s = 7, 8, j = 1..N, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\sum_{n=0}^2 (K^{l2n} + K_{11}^{l2n} p^2 - m^2 K_{22}^{l2n}) V_n = \sum_{n=0}^2 K_{11}^{l2n} (p C_{2n0} + C_{2n1}) - \sum_{j=1}^N \left( \sum_{n=0}^2 K^{luj2n} v_{nj} - K^{luj1} B_j \right) e^{-\xi_j p} + K^{lq^+} Q_{230}^+ - K^{lq^-} Q_{230}^-, \quad l = 4, 5, 6, \quad (2.27)$$

где  $Q_{i30}^{\pm}(p)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  – изображения нагрузок  $q_{i30}^{\pm}(\xi)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Граничные условия при  $\xi = 0$  имеют следующий вид:

- для жестко заземленного края

$$C_{1k0} = 0, C_{2k0} = 0, C_{3l0} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1;$$

- для шарнирно опертого края

$$C_{1k0} = 0, C_{2k0} = 0, C_{3l0} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1;$$

- для свободного края

$$C_{2k1} = 0, k = \overline{0, 2}, C_{301} = -C_{110} R, C_{311} = -C_{120} R, C_{101} = -\frac{\mu(C_{300} + C_{310} R)}{1 - \mu},$$

$$C_{111} = \frac{\mu(C_{300} - C_{310} R)}{(1 - \mu) R}, C_{121} = -\frac{2\mu(C_{300} - C_{310} R)}{(1 - \mu) R^2}.$$

Частное решение неоднородных систем дифференциальных уравнений (2.6), (2.7), соответствующее внешним нагрузкам, определяется с помощью алгебраических уравнений (2.26) и (2.27), полагая в них реакции ребер равными нулю и  $C_{1ki} = 0, C_{2ki} = 0, C_{3li} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, i = 0, 1$ .

Пусть на оболочку действует только внутренняя радиальная нагрузка  $q_{33}^-$ .

Решая полученные уравнения методом Крамера, получим

$$U_0 = \frac{Q_{330}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^3 f_{(1)0}^n P^{2n}}{p \Delta_0}, U_1 = \frac{Q_{330}^-}{E} \frac{p \sum_{n=0}^2 f_{(1)1}^n P^{2n}}{\Delta_0}, U_2 = \frac{Q_{330}^-}{E} \frac{p \sum_{n=0}^2 f_{(1)2}^n P^{2n}}{\Delta_0},$$

$$V_0 = V_1 = V_2 = 0, \quad (2.28)$$

$$W_0 = \frac{Q_{330}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^3 f_{(3)0}^n P^{2n}}{\Delta_0}, W_1 = \frac{Q_{330}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^3 f_{(3)1}^n P^{2n}}{\Delta_0},$$

где  $f_{(1)k}^n, f_{(3)l}^n$ ,  $k = \overline{0, 2}, l = 0, 1$  – коэффициенты, зависящие от  $h, R, \mu$ , а  $\Delta_0$  – определитель системы (2.26), для которого справедлива формула

$$\Delta_0 = \sum_{n=0}^4 (-1)^n K_{2n}^0 p^{2n}.$$

Здесь коэффициенты  $K_{2n}^0$  определяются соотношениями (2.17).

Уравнение  $\Delta_0 = 0$  имеет корни  $\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2$ , которые приближенно определяются выражениями (2.18).

Для удобства перехода от изображений к оригиналам представим решение (2.28) в виде

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{Q_{330}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{U_0}^{0n} + \kappa_{U_0}^{1n} p + \kappa_{U_0}^{2n} p^2 + \kappa_{U_0}^{3n} p^3}{[(p-p_n)^2 + q_n^2][(p+p_n)^2 + q_n^2]} + \frac{\kappa_{U_0}^{03}}{p} \right\}, \\ U_1 &= \frac{Q_{330}^- p}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{U_1}^{0n} + \kappa_{U_1}^{1n} p + \kappa_{U_1}^{2n} p^2 + \kappa_{U_1}^{3n} p^3}{[(p-p_n)^2 + q_n^2][(p+p_n)^2 + q_n^2]} \right\}, \\ U_2 &= \frac{Q_{330}^- p}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{U_2}^{0n} + \kappa_{U_2}^{1n} p + \kappa_{U_2}^{2n} p^2 + \kappa_{U_2}^{3n} p^3}{[(p-p_n)^2 + q_n^2][(p+p_n)^2 + q_n^2]} \right\}, \\ W_0 &= \frac{Q_{330}^- p}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{W_0}^{0n} + \kappa_{W_0}^{1n} p + \kappa_{W_0}^{2n} p^2 + \kappa_{W_0}^{3n} p^3}{[(p-p_n)^2 + q_n^2][(p+p_n)^2 + q_n^2]} \right\}, \\ W_1 &= \frac{Q_{330}^- p}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{W_1}^{0n} + \kappa_{W_1}^{1n} p + \kappa_{W_1}^{2n} p^2 + \kappa_{W_1}^{3n} p^3}{[(p-p_n)^2 + q_n^2][(p+p_n)^2 + q_n^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Коэффициенты  $\kappa$  с буквенными и числовыми индексами в формулах (2.29) находятся путем сравнения коэффициентов при  $p$  в соответствующих выражениях (2.28).

Переходя в выражениях (2.29) от изображений к оригиналам, определим искомое частное решение, соответствующее внешним нагрузкам.

Далее рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка, подкреплённая внешними кольцевыми ребрами. Полагается, что оболочка находится под действием осесимметричной радиальной нагрузки  $q_{33}^-(\xi)$ , распределённой на части внутренней поверхности по закону (рисунок 2.1)

$$q_{33}^-(\xi) = q_{330}^-(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_{01}; \\ Q_0 & \text{при } \xi_{01} \leq \xi \leq \xi_{02}, Q_0 = \text{const}; \\ 0 & \text{при } \xi_{02} \leq \xi < \xi_0 = L/R. \end{cases} \quad (2.30)$$

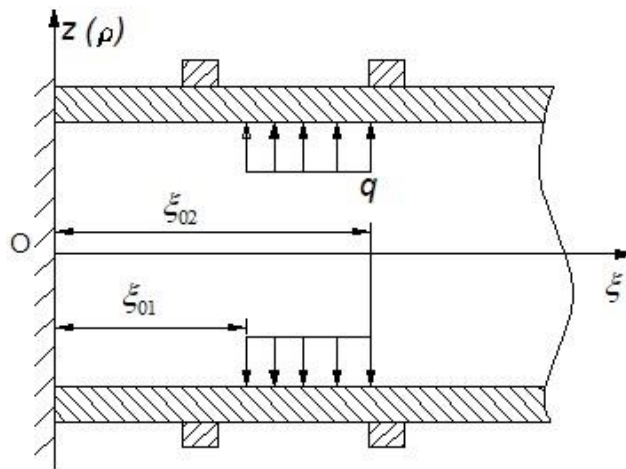


Рисунок 2.1 – Оболочка под действием внутреннего давлением

Изображение нагрузки (2.30) представится в виде

$$Q_{330}^- = Q_0 \frac{e^{-p\xi_{01}} - e^{-p\xi_{02}}}{p}. \quad (2.31)$$

Подставляя (2.31) в (2.29) и переходя от изображений к оригиналам, получим искомое частное решение, соответствующее внешней нагрузке

$$u_0(\xi) = \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left\langle (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_0}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{u_0}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_0}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_0}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \right] + 2\kappa_{U_0}^{03} (\xi - \xi_{0k}) \right\} \right\rangle, \\ u_1(\xi) = \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left\langle (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)} \left[ \mathcal{G}_{u_1}^{1n} Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) + \right. \right. \quad (2.32)$$

$$+ \mathcal{G}_{u_l}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_l}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_l}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \Big] \Big], l = 1, 2,$$

$$w_t(\xi) = \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left\langle (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_t}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{G}_{w_t}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{w_t}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{w_t}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \right] \right\rangle, t = 0, 1,$$

где  $\eta(\xi - \xi_{0k})$  – функция Хевисайда.

В формулах (2.32) применяются следующие обозначения:

$$Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) = \text{ch}[p_n(\xi - \xi_{0k})] \cos[q_n(\xi - \xi_{0k})],$$

$$Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) = \text{ch}[p_n(\xi - \xi_{0k})] \sin[q_n(\xi - \xi_{0k})],$$

$$Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) = \text{sh}[p_n(\xi - \xi_{0k})] \cos[q_n(\xi - \xi_{0k})],$$

$$Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) = \text{sh}[p_n(\xi - \xi_{0k})] \sin[q_n(\xi - \xi_{0k})],$$

$$\mathcal{G}_{u_k}^{1n} = 2\kappa_{U_k}^{3n} p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2, \mathcal{G}_{u_k}^{2n} = p_n \left[ \kappa_{U_k}^{2n} (p_n^2 + q_n^2) + \kappa_{U_k}^{0n} \right], \quad (2.33)$$

$$\mathcal{G}_{u_k}^{3n} = q_n \left[ \kappa_{U_k}^{2n} (p_n^2 + q_n^2) - \kappa_{U_k}^{0n} \right], \mathcal{G}_{u_k}^{4n} = (p_n^2 + q_n^2) \left[ \kappa_{U_k}^{3n} (p_n^2 - q_n^2) + \kappa_{U_k}^{1n} \right],$$

$$\mathcal{G}_{u_0, w_l}^{1n} = -2\kappa_{U_0, W_l}^{0n} p_n q_n, \mathcal{G}_{u_0, w_l}^{2n} = p_n (p_n^2 + q_n^2) \left[ \kappa_{U_0, W_l}^{3n} (p_n^2 + q_n^2) + \kappa_{U_0, W_l}^{1n} \right],$$

$$\mathcal{G}_{u_0, w_l}^{3n} = q_n (p_n^2 + q_n^2) \left[ \kappa_{U_0, W_l}^{3n} (p_n^2 + q_n^2) - \kappa_{U_0, W_l}^{1n} \right],$$

$$\mathcal{G}_{u_0, w_l}^{4n} = \kappa_{U_0, W_l}^{3n} (p_n^2 + q_n^2)^2 + \kappa_{U_0, W_l}^{0n} (p_n^2 - q_n^2), k = 1, 2, n = 0, 1, l = 0, 1.$$

Отметим, что с помощью выражений (2.32) можно получить частное решение для ряда случаев нагружения. Положив в (2.32)  $\xi_{01} = 0, \xi_{02} = \xi_0$ , получим решение для нагрузки, равномерно действующей по всей поверхности оболочки. Полагая, что величина  $(\xi_{02} - \xi_{01})$  бесконечно уменьшается и значение  $Q_0$  увеличивается так, что произведение  $RQ_0(\xi_{02} - \xi_{01})$  становится конечным и равным  $P$ , получим решение для оболочки под действием сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в точке  $\xi = \xi_{01}$ .

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений



(2.6), (2.7), соответствующее действию реакций ребер, определяется с помощью алгебраических уравнений (2.26) и (2.27), полагая в них  $Q_{i30}^{\pm}(p) = 0, i = \overline{1, 3}$  и  $C_{1ki} = 0, C_{2ki} = 0, C_{3li} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, i = 0, 1$ .

Решая полученные уравнения методом Крамера, находим

$$\begin{aligned}
 U_{0j} &= \frac{E_j}{E} (w_{0j} + hw_{1j}) \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^3 g_{(1)0j}^n p^{2n}}{p\Delta_0}, \\
 U_{lj} &= \frac{E_j}{E} (w_{0j} + hw_{1j}) \frac{e^{-\xi_j p} p \sum_{n=0}^2 g_{(1)lj}^n p^{2n}}{\Delta_0}, \quad l = 0, 1, \\
 V_{sj} &= \frac{E_j}{E} \left[ r_j \left( v_{0j} + hv_{1j} + \frac{h^2}{2} v_{2j} \right) - (1 + r_j h) B_{0j} \right] \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^2 g_{(2)sj}^n p^{2n}}{\Delta_{0v}}, \quad s = 0, 1, 2, \\
 W_{tj} &= \frac{E_j}{E} (w_{0j} + hw_{1j}) \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^3 g_{(3)tj}^n p^{2n}}{p\Delta_0}, \quad t = 0, 1,
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

где  $g_{(1)kj}^n, g_{(2)kj}^n, g_{(3)lj}^n$  – коэффициенты, зависящие от  $h, R, \mu, H_j, b_j, \mu_j, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, j = \overline{1, N}$ , а  $\Delta_{0v}$  – определитель системы (2.27).

Уравнение  $\Delta_{0v} = 0$  имеет корни  $\pm p_3, \pm p_4$  где  $p_3, p_4$  определяются соотношениями (2.19). Следовательно, выражение  $\Delta_{0v}$  можно представить в виде

$$\Delta_{0v} = (p^2 - p_3^2)(p^2 - p_4^2).$$

Переходя в выражениях (2.34) от изображений к оригиналам, получим искомое частное решение, соответствующее влиянию реакций  $j$ -го ребра

$$\begin{aligned}
 u_{0j}(\xi) &= \frac{E_j}{2E} (w_{0j} + hw_{1j}) \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_0}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathcal{G}_{u_0}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_0}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_0}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \right] + 2\kappa_{U_0}^{03} (\xi - \xi_j) \right\},
 \end{aligned}$$

$$u_{lj}(\xi) = \frac{E_j}{2E} (w_{0j} + hw_{1j}) \eta(\xi - \xi_j) \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)} \left[ \mathcal{G}_{u_l}^{1n} Z_{1n}(\xi, \xi_j) + \right. \\ \left. + \mathcal{G}_{u_l}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_l}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_l}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \right], l = 1, 2, \quad (2.35)$$

$$v_{sj}(\xi) = \frac{E_j}{2E} \left[ r_j \left( v_{0j} + hv_{1j} + \frac{h^2}{2} v_{2j} \right) - (1 + r_j h) B_{0j} \right] \eta(\xi - \xi_j) \frac{1}{p_3 p_4 (p_3^2 - p_4^2)} \times \\ \times \left\{ p_4 \operatorname{sh} \left[ p_3 (\xi - \xi_j) \right] \mathcal{G}_{v_{sj}}^1 - p_3 \operatorname{sh} \left[ p_4 (\xi - \xi_j) \right] \mathcal{G}_{v_{sj}}^2 \right\}, s = \overline{0, 2},$$

$$w_{ij}(\xi) = \frac{E_j}{2E} (w_{0j} + hw_{1j}) \eta(\xi - \xi_j) \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_i}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \\ \left. + \mathcal{G}_{w_i}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{w_i}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{w_i}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \right], t = 0, 1.$$

В формулах (2.35) применяются следующие обозначения:

$$\mathcal{G}_{v_{sj}}^1 = g_{(2)sj}^0 + g_{(2)sj}^1 p_3^2 + g_{(2)sj}^2 p_3^4, \mathcal{G}_{v_{sj}}^2 = g_{(2)sj}^0 + g_{(2)sj}^1 p_4^2 + g_{(2)sj}^2 p_4^4, s = \overline{0, 2}.$$

Далее рассматривается замкнутая подкрепленная цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием ветровой нагрузки.

Компоненты нагрузки и перемещений в данном случае соответствуют вторым слагаемым рядов (2.4), (2.5) при  $m = 1$ . Следовательно, в качестве исходной принята система дифференциальных уравнений (2.10) с соответствующими граничными условиями (2.12). Для простоты изложения индексы 1 и  $(t)$  при перемещениях будут опущены.

С помощью преобразования Лапласа дифференциальные уравнения (2.10) приводятся к алгебраическим уравнениям следующего вида:

$$\sum_{n=0}^2 (K^{k1n} + p^2 K_{11}^{k1n} - K_{22}^{k1n}) U_n + \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} p V_n + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} p W_n = \\ = \sum_{n=0}^2 K_{11}^{k1n} (p C_{1n0} + C_{1n1}) + \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} C_{2n0} + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} C_{3n0}, k = 1, 2, 3, \\ - \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} p U_n + \sum_{n=0}^2 (K^{l2n} + K_{11}^{l2n} p^2 - K_{22}^{l2n}) V_n - \sum_{n=0}^1 K_2^{l3n} W_n =$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} C_{1n0} + \sum_{n=0}^2 K_{11}^{l2n} (pC_{2n0} + C_{2n1}) - \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{n=0}^2 (K^{luj2n} - m^2 K_{22}^{luj2n}) v_{nj} - \right. \\
&\left. - \sum_{n=0}^1 K_2^{luj3n} w_{nj} + (K^{luj1} - m^2 K_{22}^{luj1}) B_j \right] e^{-\xi_j p}, \quad l = 4, 5, 6, \quad (2.36) \\
&\sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} pU_n + \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} V_n + \sum_{n=0}^1 (K^{s3n} + K_{11}^{s3n} p^2 - K_{22}^{s3n}) W_n = \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} C_{1n0} + \\
&+ \sum_{n=0}^1 K_{11}^{s3n} (pC_{3n0} + C_{3n1}) + K^{sq^-} Q_{331}^- - \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{n=0}^2 K_2^{suj2n} v_{nj} + \right. \\
&\left. + \sum_{n=0}^1 (K^{suj3n} - K_{22}^{suj3n}) w_{nj} + K_2^{suj1} B_j \right] e^{-\xi_j p}, \quad s = 7, 8, j = 1..N,
\end{aligned}$$

где  $Q_{331}^-(p)$  – изображение нагрузки  $q_{331}^-(\xi)$ .

Граничные условия при  $\xi = 0$  имеют следующий вид:

- для жестко заземленного края

$$C_{1k0} = 0, C_{2k0} = 0, C_{3l0} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1;$$

- для шарнирно опертого края

$$C_{1k0} = 0, C_{2k0} = 0, C_{3l0} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1;$$

- для свободного края

$$C_{101} = -\frac{\mu(C_{200} + C_{300} + RC_{310})}{1 - \mu}, C_{211} = -\frac{C_{100}}{R} + C_{110},$$

$$C_{111} = \mu \frac{C_{200} - RC_{210} + C_{300} - RC_{310}}{(1 - \mu)R}, C_{201} = C_{100},$$

$$C_{121} = -\mu \frac{2C_{200} - 2RC_{210} + R^2 C_{220} + 2C_{300} - 2RC_{310}}{(1 - \mu)R^2},$$

$$C_{221} = \frac{2C_{100}}{R^2} + C_{120}, C_{301} = -RC_{110}, C_{311} = -RC_{120}.$$

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.10), соответствующее внешним нагрузкам, определяется с помощью алгебраических уравнений (2.36), полагая в них реакции ребер равными нулю и

$$C_{1ki} = 0, C_{2ki} = 0, C_{3li} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, i = 0, 1.$$

Решая полученные уравнения методом Крамера, получим

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{Q_{331}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^6 f_{(1)0}^n P^{2n}}{p^3 \Delta_1}, U_1 = \frac{Q_{331}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^6 f_{(1)1}^n P^{2n}}{p^3 \Delta_1}, U_2 = \frac{Q_{331}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^5 f_{(1)2}^n P^{2n}}{p \Delta_1}, \\ V_0 &= \frac{Q_{331}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^6 f_{(2)0}^n P^{2n}}{p^4 \Delta_1}, V_1 = \frac{Q_{331}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^5 f_{(2)1}^n P^{2n}}{p^2 \Delta_1}, V_2 = \frac{Q_{331}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^5 f_{(2)2}^n P^{2n}}{p^2 \Delta_1}, \\ W_0 &= \frac{Q_{331}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^7 f_{(3)0}^n P^{2n}}{p^4 \Delta_1}, W_1 = \frac{Q_{331}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^6 f_{(3)1}^n P^{2n}}{p^2 \Delta_1}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где  $f_{(1)k}^n, f_{(2)k}^n, f_{(3)l}^n, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1$  – коэффициенты, зависящие от  $h, R, \mu$ , а  $\Delta_1$  – определитель системы (2.36), для которого справедлива формула

$$\Delta_1 = \sum_{n=0}^6 K_{2n}^1 P^{2n}.$$

Здесь имеют место следующие обозначения:

$$K_0^1 = 10 \left[ 364500(1 + \mu)(1 - 2\mu)^2 + 3(1 - 2\mu)(79 - 55\mu - 114\mu^2) \varepsilon_0^2 \right],$$

$$K_2^1 = -8100\varepsilon_0^2 \left[ 60(1 - 2\mu)(19 - 18\mu - 17\mu^2) + (1489 - 3788\mu + 1171\mu^2 + 1218\mu^3) \varepsilon_0^2 \right],$$

$$K_4^1 = 8100\varepsilon_0^2 \left[ 150(1 - 2\mu)(1 - \mu) + (719 - 2033\mu + 1006\mu^2 + 568\mu^3) \varepsilon_0^2 \right],$$

$$K_6^1 = -2700\varepsilon_0^4 \left[ 60(4 - 7\mu)(1 - \mu) + (313 - 821\mu + 620\mu^2 - 72\mu^3) \varepsilon_0^2 \right],$$

$$K_8^1 = 180\varepsilon_0^6 (1 - \mu) \left[ 30(22 - 32\mu + 5\mu^2) + (429 - 1384\mu + 1045\mu^2) \varepsilon_0^2 \right],$$

$$K_{10}^1 = -180\varepsilon_0^8 (1 - \mu)^2 \left[ 20(4 - 3\mu) - 11(5 - \mu) \varepsilon_0^2 \right],$$

$$K_{12}^1 = 8\varepsilon_0^{10} (3 - \varepsilon_0^2) (5 - 3\varepsilon_0^2)^2 (1 - \mu)^3.$$

В общем случае характеристическое уравнение  $\Delta_1 = 0$  имеет корни

$\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4$ . Следовательно, можно представить  $\Delta_1$  в виде

$$\Delta_1 = K_{12}^1 \left[ (p - p_1)^2 + q_1^2 \right] \left[ (p + p_1)^2 + q_1^2 \right] \left[ (p - p_2)^2 + q_2^2 \right] \times \\ \times \left[ (p + p_2)^2 + q_2^2 \right] (p^2 - p_3^2) (p^2 - p_4^2).$$

С учетом последнего выражения представим решение (2.37) следующим образом

$$U_k = \frac{Q_{331}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{U_k}^{0n} + \kappa_{U_k}^{1n} p + \kappa_{U_k}^{2n} p^2 + \kappa_{U_k}^{3n} p^3}{\left[ (p - p_n)^2 + q_n^2 \right] \left[ (p + p_n)^2 + q_n^2 \right]} + \sum_{n=3}^4 \frac{\kappa_{U_k}^{0n} + \kappa_{U_k}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{U_k}^{05} + \kappa_{U_k}^{15} p + \kappa_{U_k}^{25} p^2}{p^3} \right\}, \quad k = 0, 1, \\ U_2 = \frac{Q_{331}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{U_2}^{0n} + \kappa_{U_2}^{1n} p + \kappa_{U_2}^{2n} p^2 + \kappa_{U_2}^{3n} p^3}{\left[ (p - p_n)^2 + q_n^2 \right] \left[ (p + p_n)^2 + q_n^2 \right]} + \sum_{n=3}^4 \frac{\kappa_{U_2}^{0n} + \kappa_{U_2}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} + \frac{\kappa_{U_2}^{05}}{p} \right\}, \\ V_0 = \frac{Q_{331}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{V_0}^{0n} + \kappa_{V_0}^{1n} p + \kappa_{V_0}^{2n} p^2 + \kappa_{V_0}^{3n} p^3}{\left[ (p - p_n)^2 + q_n^2 \right] \left[ (p + p_n)^2 + q_n^2 \right]} + \sum_{n=3}^4 \frac{\kappa_{V_0}^{0n} + \kappa_{V_0}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{V_0}^{05} + \kappa_{V_0}^{15} p + \kappa_{V_0}^{25} p^2 + \kappa_{V_0}^{35} p^3}{p^4} \right\}, \quad (2.38) \\ V_l = \frac{Q_{331}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{V_l}^{0n} + \kappa_{V_l}^{1n} p + \kappa_{V_l}^{2n} p^2 + \kappa_{V_l}^{3n} p^3}{\left[ (p - p_n)^2 + q_n^2 \right] \left[ (p + p_n)^2 + q_n^2 \right]} + \sum_{n=3}^4 \frac{\kappa_{V_l}^{0n} + \kappa_{V_l}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{V_l}^{05} + \kappa_{V_l}^{15} p}{p^2} \right\}, \quad l = 1, 2, \\ W_0 = \frac{Q_{331}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{W_0}^{0n} + \kappa_{W_0}^{1n} p + \kappa_{W_0}^{2n} p^2 + \kappa_{W_0}^{3n} p^3}{\left[ (p - p_n)^2 + q_n^2 \right] \left[ (p + p_n)^2 + q_n^2 \right]} + \sum_{n=3}^4 \frac{\kappa_{W_0}^{0n} + \kappa_{W_0}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{W_0}^{05} + \kappa_{W_0}^{15} p + \kappa_{W_0}^{25} p^2 + \kappa_{W_0}^{35} p^3}{p^4} \right\},$$

$$W_1 = \frac{Q_{331}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{\kappa_{W_1}^{0n} + \kappa_{W_1}^{1n} p + \kappa_{W_1}^{2n} p^2 + \kappa_{W_1}^{3n} p^3}{[(p-p_n)^2 + q_n^2][(p+p_n)^2 + q_n^2]} + \sum_{n=3}^4 \frac{\kappa_{W_1}^{0n} + \kappa_{W_1}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} + \frac{\kappa_{W_1}^{05} + \kappa_{W_1}^{15} p}{p^2} \right\}.$$

Коэффициенты  $\kappa$  с буквенными и числовыми индексами в формулах (2.38) находятся путем сравнения коэффициентов при  $p$  в соответствующих выражениях (2.37).

Рассмотрим оболочку под действием радиальной нагрузки  $q_{33}^-(\xi, \theta)$ , распределенной на внутренней поверхности по закону

$$q_{33}^-(\xi, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_{01}; \\ Q_0 \cos \theta & \text{при } \xi_{01} \leq \xi \leq \xi_{02}; \\ 0 & \text{при } \xi_{02} \leq \xi < \xi_0 = L/R. \end{cases}$$

Изображение компонента нагрузки  $q_{331}^-$  представится в виде

$$Q_{331}^- = Q_0 \frac{e^{-p\xi_{01}} - e^{-p\xi_{02}}}{p}. \quad (2.39)$$

Подставляя изображение нагрузки (2.39) в (2.38) и переходя от изображений к оригиналам, получим частное решение

$$\begin{aligned} u_l(\xi) = & \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_l}^{1n}(Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{u_l}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_l}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_l}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \right] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{U_l}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \frac{2\kappa_{U_l}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_{0k}) \right] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\xi - \xi_{0k})}{3} \left[ \kappa_{U_l}^{05} (\xi - \xi_{0k})^2 + 3\kappa_{U_l}^{15} (\xi - \xi_{0k}) + 6\kappa_{U_l}^{25} \right] \right\} \right], \quad l = 0, 1, \\ u_2(\xi) = & \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_2}^{1n}(Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{G}_{u_2}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_2}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_2}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \Big] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{U_2}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \\
& \left. \times \text{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \frac{2\kappa_{U_2}^{1n}}{p_n} \text{sh } p_n(\xi - \xi_{0k}) \right] + 2\kappa_{U_2}^{05}(\xi - \xi_{0k}) \Big\} \Big\|, \\
v_0(\xi) &= \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left\| (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{v_0}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\
& + \mathcal{G}_{v_0}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{v_0}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{v_0}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \Big] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{V_0}^{0n}}{p_n^2} \text{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \right. \\
& + \frac{2\kappa_{V_0}^{1n}}{p_n} \text{sh } p_n(\xi - \xi_{0k}) \Big] + \frac{(\xi - \xi_{0k})}{12} \left[ \kappa_{V_0}^{05}(\xi - \xi_{0k})^3 + 4\kappa_{V_0}^{15}(\xi - \xi_{0k})^2 + \right. \\
& \left. \left. \left. + 12\kappa_{V_0}^{25}(\xi - \xi_{0k}) + 24\kappa_{V_0}^{35} \right] \right\} \right\|, \tag{2.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_s(\xi) &= \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left\| (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{v_s}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\
& + \mathcal{G}_{v_s}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{v_s}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{v_s}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \Big] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{V_s}^{0n}}{p_n^2} \text{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{2\kappa_{V_s}^{1n}}{p_n} \text{sh } p_n(\xi - \xi_{0k}) \right] + (\xi - \xi_{0k}) \left[ \kappa_{V_s}^{05}(\xi - \xi_{0k}) + 2\kappa_{V_s}^{15} \right] \right\} \right\|, \quad s = 1, 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_0(\xi) &= \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left\| (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_0}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\
& + \mathcal{G}_{w_0}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{w_0}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{w_0}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \Big] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{W_0}^{0n}}{p_n^2} \text{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{2\kappa_{W_0}^{1n}}{p_n} \text{sh } p_n(\xi - \xi_{0k}) \right] + \frac{(\xi - \xi_{0k})}{12} \left[ \kappa_{W_0}^{05}(\xi - \xi_{0k})^3 + 4\kappa_{W_0}^{15}(\xi - \xi_{0k})^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +12\kappa_{W_0}^{25}(\xi - \xi_{0k}) + 24\kappa_{W_0}^{35} \Big] \Big] \Big], \\
w_1(\xi) = & \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left\| \left[ (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_1}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \right. \\
& + \mathcal{G}_{w_1}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{w_1}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{w_1}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \Big] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{W_1}^{0n}}{p_n^2} \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{2\kappa_{W_1}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_{0k}) \right] + (\xi - \xi_{0k}) \left[ \kappa_{W_1}^{05}(\xi - \xi_{0k}) + 2\kappa_{W_1}^{15} \right] \right\} \right\| \Big].
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $\mathcal{G}$  с буквенными и цифровыми индексами определяются формулами, аналогичными (2.33).

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.10), соответствующее реакциям ребер, определяется с помощью алгебраических уравнений (2.36), полагая в них  $Q_{331}^-(p) = 0$  и  $C_{1ki} = 0, C_{2ki} = 0, C_{3li} = 0, k = \overline{0, 2}, l = \overline{0, 1}, i = \overline{0, 1}$ .

Решая полученные уравнения методом Крамера, находим

$$\begin{aligned}
U_{0j} &= \frac{E_j K_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^5 g_{(1)0j}^n p^{2n}}{p \Delta_1}, U_{1j} = \frac{E_j K_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^5 g_{(1)1j}^n p^{2n}}{p \Delta_1}, \\
U_{2j} &= \frac{E_j K_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} p \sum_{n=0}^4 g_{(1)2j}^n p^{2n}}{\Delta_1}, V_{0j} = \frac{E_j K_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^6 g_{(2)0j}^n p^{2n}}{p^2 \Delta_1}, \\
V_{1j} &= \frac{E_j K_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^5 g_{(2)1j}^n p^{2n}}{\Delta_1}, V_{2j} = \frac{E_j K_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^5 g_{(2)2j}^n p^{2n}}{\Delta_1}, \\
W_{0j} &= \frac{E_j K_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^6 g_{(3)0j}^n p^{2n}}{p^2 \Delta_1}, W_{1j} = \frac{E_j K_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^5 g_{(3)1j}^n p^{2n}}{\Delta_1},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

где  $g_{(1)kj}^n, g_{(2)kj}^n, g_{(3)lj}^n$ , — коэффициенты, зависящие от  $h, R, \mu, H_j, b_j, \mu_j$ ,



$k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, j = \overline{1, N}$ , а коэффициенты  $K_j$  определяются как

$$K_j = K_{j1} \left( v_{0j} + hv_{1j} + \frac{h^2}{2} v_{2j} + w_{0j} + hw_{1j} \right) + K_{j2} B_{1j}.$$

Здесь  $K_{j1}, K_{j2}$  – коэффициенты, зависящие от  $\mu_j, H_j$ .

Переходя в выражениях (2.40) от изображений к оригиналам, получим искомое частное решение, соответствующее влиянию реакций  $j$ -го ребра

$$\begin{aligned} u_{lj}(\xi) = & \frac{E_j K_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_{lj}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\ & + \mathcal{G}_{u_{lj}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_{lj}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_{lj}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{U_{lj}}^{0n}}{p_n^2} \text{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\kappa_{U_{lj}}^{1n}}{p_n} \text{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] + 2\kappa_{U_{lj}}^{05}(\xi - \xi_j) \right\}, \quad l = 0, 1, \\ u_{2j}(\xi) = & \frac{E_j K_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_{2j}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\ & + \mathcal{G}_{u_{2j}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_{2j}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_{2j}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{U_{2j}}^{0n}}{p_n^2} \text{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\kappa_{U_{2j}}^{1n}}{p_n} \text{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] \right\}, \\ v_{0j}(\xi) = & \frac{E_j K_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{v_{0j}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\ & + \mathcal{G}_{v_{0j}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{v_{0j}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{v_{0j}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{V_{0j}}^{0n}}{p_n^2} \text{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\kappa_{V_{0j}}^{1n}}{p_n} \text{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] + (\xi - \xi_j) \left[ \kappa_{V_{0j}}^{05}(\xi - \xi_j) + 2\kappa_{V_{0j}}^{06} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{sj}(\xi) &= \frac{E_j K_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{v_{sj}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\
&+ \mathcal{G}_{v_{sj}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{v_{sj}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{v_{sj}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{v_{sj}}^{0n}}{p_n^2} \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \right. \\
&\left. \left. + \frac{2\kappa_{v_{sj}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] \right\}, \quad s = 1, 2, \\
w_{0j}(\xi) &= \frac{E_j K_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_{0j}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\
&+ \mathcal{G}_{w_{0j}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{w_{0j}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{w_{0j}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{w_{0j}}^{0n}}{p_n^2} \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \right. \\
&\left. \left. + \frac{2\kappa_{w_{0j}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] + (\xi - \xi_j) \left[ \kappa_{w_{0j}}^{05}(\xi - \xi_j) + 2\kappa_{w_{0j}}^{06} \right] \right\}, \\
w_{1j}(\xi) &= \frac{E_j K_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_{1j}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\
&+ \mathcal{G}_{w_{1j}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{w_{1j}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{w_{1j}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=3}^4 \left[ \frac{4\kappa_{w_{1j}}^{0n}}{p_n^2} \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \right. \\
&\left. \left. + \frac{2\kappa_{w_{1j}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $\mathcal{G}$ ,  $\kappa$  с буквенными и цифровыми индексами определяются аналогичным способом, что и в предыдущем параграфе.

Далее рассматривается замкнутая подкрепленная цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием радиальной нагрузки  $q_{33}^-(\xi, \theta)$ , распределенной на внутренней поверхности по закону

$$q_{33}^-(\xi, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_{01}; \\ q_{33m}^-(\xi) \cos m\theta, & m \geq 2 \text{ при } \xi_{01} \leq \xi \leq \xi_{02}; \\ 0 & \text{при } \xi_{02} \leq \xi < \xi_0 = L/R. \end{cases}$$

Компоненты нагрузки и перемещений в данном случае соответствуют вторым слагаемым рядов (2.4), (2.5) при  $m \geq 2$ . Следовательно, в качестве исходной принята система дифференциальных уравнений (2.10) с соответствующими граничными условиями (2.12). Для простоты изложения индексы  $m$  и  $(t)$  при перемещениях будут опущены.

С помощью преобразования Лапласа дифференциальные уравнения (2.10) приводятся к алгебраическим уравнениям следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^2 (K^{k1n} + p^2 K_{11}^{k1n} - m^2 K_{22}^{k1n}) U_n + \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{k2n} p V_n + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} p W_n = \\ & = \sum_{n=0}^2 K_{11}^{k1n} (p C_{1n0} + C_{1n1}) + \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{k2n} C_{2n0} + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} C_{3n0}, \quad k = 1, 2, 3, \\ & - \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{l1n} p U_n + \sum_{n=0}^2 (K^{l2n} + K_{11}^{l2n} p^2 - m^2 K_{22}^{l2n}) V_n - \sum_{n=0}^1 m K_2^{l3n} W_n = \\ & = - \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{l1n} C_{1n0} + \sum_{n=0}^2 K_{11}^{l2n} (p C_{2n0} + C_{2n1}) - \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{n=0}^2 (K^{luj2n} - m^2 K_{22}^{luj2n}) v_{nj} - \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^1 m K_2^{luj3n} w_{nj} + (K^{luj1} - m^2 K_{22}^{luj1}) B_j \right] e^{-\xi_j p}, \quad l = 4, 5, 6, \\ & \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} p U_n + \sum_{n=0}^2 m K_2^{s2n} V_n + \sum_{n=0}^1 (K^{s3n} + K_{11}^{s3n} p^2 - m^2 K_{22}^{s3n}) W_n = \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} C_{1n0} + \\ & + \sum_{n=0}^1 K_{11}^{s3n} (p C_{3n0} + C_{3n1}) + K^{sq-} Q_{33m}^- - \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{n=0}^2 m K_2^{suj2n} v_{nj} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^1 (K^{suj3n} - m^2 K_{22}^{suj3n}) w_{nj} + m K_2^{suj1} B_j \right] e^{-\xi_j p}, \quad s = 7, 8, j = 1..N, \end{aligned} \tag{2.41}$$

где  $Q_{33m}^-(p)$  – изображение нагрузки  $q_{33m}^-(\xi)$ .

Граничные условия при  $\xi = 0$  имеют следующий вид:

- для жестко защемленного края

$$C_{1k0} = 0, C_{2k0} = 0, C_{3l0} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1;$$

- для шарнирно опертого края

$$C_{1k0} = 0, C_{2k0} = 0, C_{3l0} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1;$$

- для свободного края

$$C_{101} = -\frac{\mu(mC_{200} + C_{300} + RC_{310})}{1 - \mu}, C_{211} = -\frac{mC_{100}}{R} + mC_{110},$$

$$C_{111} = \mu \frac{m(C_{200} - RC_{210}) + C_{300} - RC_{310}}{(1 - \mu)R}, C_{201} = mC_{100},$$

$$C_{121} = -\mu \frac{m(2C_{200} - 2RC_{210} + R^2C_{220}) + 2C_{300} - 2RC_{310}}{(1 - \mu)R^2},$$

$$C_{221} = \frac{2mC_{100}}{R^2} + mC_{120}, C_{301} = -RC_{110}, C_{311} = -RC_{120}.$$

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.10), соответствующее внешним нагрузкам, определяется с помощью алгебраических уравнений (2.36), полагая в них реакции ребер равными нулю и  $C_{1ki} = 0, C_{2ki} = 0, C_{3li} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, i = 0, 1$ .

Решая полученные уравнения методом Крамера, находим

$$U_0 = \frac{Q_{33m}^-}{E} \frac{P \left( m^2 f_{(1)0}^0 + \sum_{n=1}^6 f_{(1)0}^n P^{2n} \right)}{\Delta_m},$$

$$U_k = \frac{Q_{33m}^-}{E} \frac{\left( m^4 f_{(1)k}^0 + m^2 f_{(1)k}^1 P^2 + \sum_{n=2}^6 f_{(1)k}^n P^{2n} \right)}{\Delta_m}, k = 1, 2,$$

$$V_l = \frac{mQ_{33m}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^6 f_{(2)l}^n P^{2n}}{\Delta_m}, l = 0, 1, 2,$$

(2.42)

$$W_s = \frac{Q_{33m}^-}{E} \frac{\left( m^4 f_{(3)s}^0 + m^2 f_{(3)s}^1 p^2 + \sum_{n=2}^7 f_{(3)s}^n p^{2n} \right)}{\Delta_m}, \quad s = 1, 2,$$

где  $f_{(1)k}^n, f_{(2)k}^n, f_{(3)l}^n, k = 0, 1, 2, l = 0, 1$  – коэффициенты, зависящие от  $h, R, \mu, m$ , а  $\Delta_m$  – определитель системы (2.41), который находится как

$$\Delta_m = \sum_{n=0}^8 K_{2n}^m p^{2n}.$$

Здесь коэффициенты  $K_{2n}^m, n = \overline{0, 8}$  определяются выражениями (2.24).

Уравнение  $\Delta_m = 0$  имеет корни  $\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3 \pm iq_3, \pm p_4, \pm p_5$ .

Следовательно, можно представить  $\Delta_m$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta_m = & K_{16}^m \left[ (p - p_1)^2 + q_1^2 \right] \left[ (p + p_1)^2 + q_1^2 \right] \left[ (p - p_2)^2 + q_2^2 \right] \left[ (p + p_2)^2 + q_2^2 \right] \times \\ & \times \left[ (p - p_3)^2 + q_3^2 \right] \left[ (p + p_3)^2 + q_3^2 \right] (p^2 - p_4^2)(p^2 - p_5^2). \end{aligned}$$

Последнее выражение позволяет преобразовать изображения (2.42) к виду суммы дробных функций

$$\begin{aligned} U_k = & \frac{Q_{33m}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{\kappa_{U_k}^{0n} + \kappa_{U_k}^{1n} p + \kappa_{U_k}^{2n} p^2 + \kappa_{U_k}^{3n} p^3}{\left[ (p - p_n)^2 + q_n^2 \right] \left[ (p + p_n)^2 + q_n^2 \right]} + \sum_{n=4}^5 \frac{\kappa_{U_k}^{0n} + \kappa_{U_k}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} \right\}, \quad k = \overline{0, 2}, \\ V_l = & \frac{m Q_{33m}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{\kappa_{V_l}^{0n} + \kappa_{V_l}^{1n} p + \kappa_{V_l}^{2n} p^2 + \kappa_{V_l}^{3n} p^3}{\left[ (p - p_n)^2 + q_n^2 \right] \left[ (p + p_n)^2 + q_n^2 \right]} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=4}^5 \frac{\kappa_{V_l}^{0n} + \kappa_{V_l}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} \right\}, \quad l = \overline{0, 2}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$W_s = \frac{Q_{33m}^-}{E} \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{\kappa_{W_s}^{0n} + \kappa_{W_s}^{1n} p + \kappa_{W_s}^{2n} p^2 + \kappa_{W_s}^{3n} p^3}{\left[ (p - p_n)^2 + q_n^2 \right] \left[ (p + p_n)^2 + q_n^2 \right]} + \sum_{n=4}^5 \frac{\kappa_{W_s}^{0n} + \kappa_{W_s}^{1n} p}{p^2 - p_n^2} \right\}, \quad s = 0, 1.$$

Коэффициенты  $\kappa$  с буквенными и числовыми индексами в формулах (2.43) находятся путем сравнения коэффициентов при  $p$  в соответствующих выражениях (2.42).

Переходя в выражениях (2.43) от изображений к оригиналам, получим искомое частное решение, соответствующее внешним нагрузкам.

Рассмотрим случай, когда нагрузка  $q_{33m}^-(\xi)$  распределена на внутренней поверхности по закону

$$q_{33m}^-(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_{01}; \\ Q_0 & \text{при } \xi_{01} \leq \xi \leq \xi_{02}; \\ 0 & \text{при } \xi_{02} \leq \xi < \xi_0 = L/R. \end{cases}$$

Изображение этой нагрузки имеет вид (2.31). Подставляя его в (2.43) и переходя от изображений к оригиналам, получим частное решение

$$\begin{aligned} u_l(\xi) = & \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_l}^{1n}(Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{u_l}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_l}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{u_l}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{U_l}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \frac{2\kappa_{U_l}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_{0k}) \right] \right\} \right], \quad l = 0, 1, 2, \\ v_s(\xi) = & \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{v_s}^{1n}(Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{v_s}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{v_s}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{v_s}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{V_s}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \frac{2\kappa_{V_s}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_{0k}) \right] \right\} \right], \quad s = 0, 1, 2, \\ w_t(\xi) = & \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^{k-1} \eta(\xi - \xi_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_t}^{1n}(Z_{1n}(\xi, \xi_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{G}_{w_t}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{w_t}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_{0k}) + \mathcal{G}_{w_t}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_{0k}) \Big] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{w_t}^{0n}}{P_n^2} \times \right. \\
& \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{P_n(\xi - \xi_{0k})}{2} + \frac{2\kappa_{w_t}^{1n}}{P_n} \operatorname{sh} P_n(\xi - \xi_{0k}) \right] \Bigg], \quad t = 0, 1.
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $\mathcal{G}$  с буквенными и цифровыми индексами определяются формулами, аналогичными (2.33).

Следует отметить, что с помощью выражений (2.44) можно получить частное решение для ряда случаев нагружения. Положив в (2.44)  $\xi_{01} = 0$ ,  $\xi_{02} = \xi_0$ , получим решение для нагрузки, равномерно действующей по всей поверхности оболочки. Полагая, что величина  $(\xi_{02} - \xi_{01})$  бесконечно уменьшается и значение  $Q_0$  увеличивается так, что произведение  $RQ_0(\xi_{02} - \xi_{01})$  становится конечным и равным  $P$ , получим решение для оболочки под действием сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в точке  $\xi = \xi_{01}$ .

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.10), соответствующее реакциям ребер, определяется с помощью алгебраических уравнений (2.36), полагая в них  $Q_{33m}^-(p) = 0$  и  $C_{1ki} = 0, C_{2ki} = 0, C_{3li} = 0$ ,  $k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, i = 0, 1$ . Решая полученные уравнения методом Крамера, находим

$$\begin{aligned}
U_{lj} &= \frac{E_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} p \sum_{n=0}^6 g_{(1)lj}^n P^{2n}}{\Delta_m}, \quad l = 0, 1, 2, \\
V_{sj} &= \frac{E_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^7 g_{(2)sj}^n P^{2n}}{\Delta_m}, \quad s = 0, 1, 2, \\
W_{tj} &= \frac{E_j}{E} \frac{e^{-\xi_j p} \sum_{n=0}^7 g_{(3)tj}^n P^{2n}}{\Delta_m}, \quad t = 0, 1,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

где  $g_{(1)kj}^n, g_{(2)lj}^n, g_{(3)tj}^n$  – коэффициенты, зависящие от  $h, R, \mu, m, H_j, b_j, \mu_j, \nu_{lj}, w_{lj}, B_j$ ,

$$k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, j = \overline{1, N}.$$

После преобразования (2.45) к виду суммы дробных функций, аналогичному (2.43) и перехода от полученных изображений к оригиналам, находим частное решение, соответствующее реакциям ребер

$$\begin{aligned}
 u_{lj}(\xi) = & \frac{E_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_{lj}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\
 & + \mathcal{G}_{u_{lj}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_{lj}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{u_{lj}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{U_{lj}}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \\
 & \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \frac{2\kappa_{U_{lj}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] \right\}, \quad l = 0, 1, 2, \\
 v_{sj}(\xi) = & \frac{E_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{v_{sj}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \quad (2.46) \\
 & + \mathcal{G}_{v_{sj}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{v_{sj}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{v_{sj}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{V_{sj}}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \\
 & \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \frac{2\kappa_{V_{sj}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] \right\}, \quad s = 0, 1, 2, \\
 w_{ij}(\xi) = & \frac{E_j}{2E} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_{ij}}^{1n} (Z_{1n}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\
 & + \mathcal{G}_{w_{ij}}^{2n} Z_{2n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{w_{ij}}^{3n} Z_{3n}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{w_{ij}}^{4n} Z_{4n}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{W_{ij}}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \\
 & \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\xi - \xi_j)}{2} + \frac{2\kappa_{W_{ij}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\xi - \xi_j) \right] \right\}, \quad t = 0, 1.
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $\mathcal{G}$  с буквенными и цифровыми индексами определяются формулами, аналогичными (2.33).



## 2.6. Результаты расчетов и параметрического анализа

В данном параграфе приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС подкрепленных цилиндрических оболочек. Расчет проведен в программном пакете Maple 2018. Пакет аналитических вычислений Maple является мощным инструментом решение различных физико-математических задач. Операции с рациональными числами и корнями позволяют проводить абсолютно точные вычисления.

Расчет НДС оболочек проведен операционным методом, основанным на преобразовании Лапласа. Применение преобразования Лапласа при решении дифференциальных уравнений дает ряд преимуществ по сравнению с другими методами. Одно из них состоит в сокращении в два раза числа постоянных интегрирования с помощью выполнения граничных условий на краю  $\xi = 0$ , что существенно упрощает процесс решения задачи.

Общее решение системы (2.6), (2.7) и (2.10) представим в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_q + \Phi_j,$$

где  $\Phi_0$  – общее решение однородной системы,  $\Phi_q$  – частное решение, соответствующее внешней нагрузке,  $\Phi_j$  – частное решение, соответствующее реакции  $j$ -ого ребра. Общее решение  $\Phi_0$  находится из уравнений (2.26), (2.27) и (2.41), в предположении, что все нагрузки и реакции ребер равны нулю. Частные решения  $\Phi_q, \Phi_j$  приведены в пункте 2.5 этой главы. Общее решение  $\Phi$  содержит неизвестные константы, а именно: произвольные постоянные интегрирования и значения сингулярных функционалов. Произвольные постоянные интегрирования находятся при выполнении граничных условий на краю  $\xi = \xi_0 = L/R$ . Для определения значений сингулярных функционалов на искомом решении формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые получаются из условий на сингулярных линиях. Эта система включает в себя уравнения (2.8), (2.11), а также уравнения, полученные из равенств

$$v_{kmj}^{(t)} = v_{km}^{(t)}(\xi_j), w_{lmj}^{(t)} = w_{lm}^{(t)}(\xi_j), j = 1..N, k = 0, 1, 2, l = 0, 1, t = 1, 2, m = 1, 2, \dots$$

Схема алгоритма решения краевой задачи показана на рисунке 2.2.

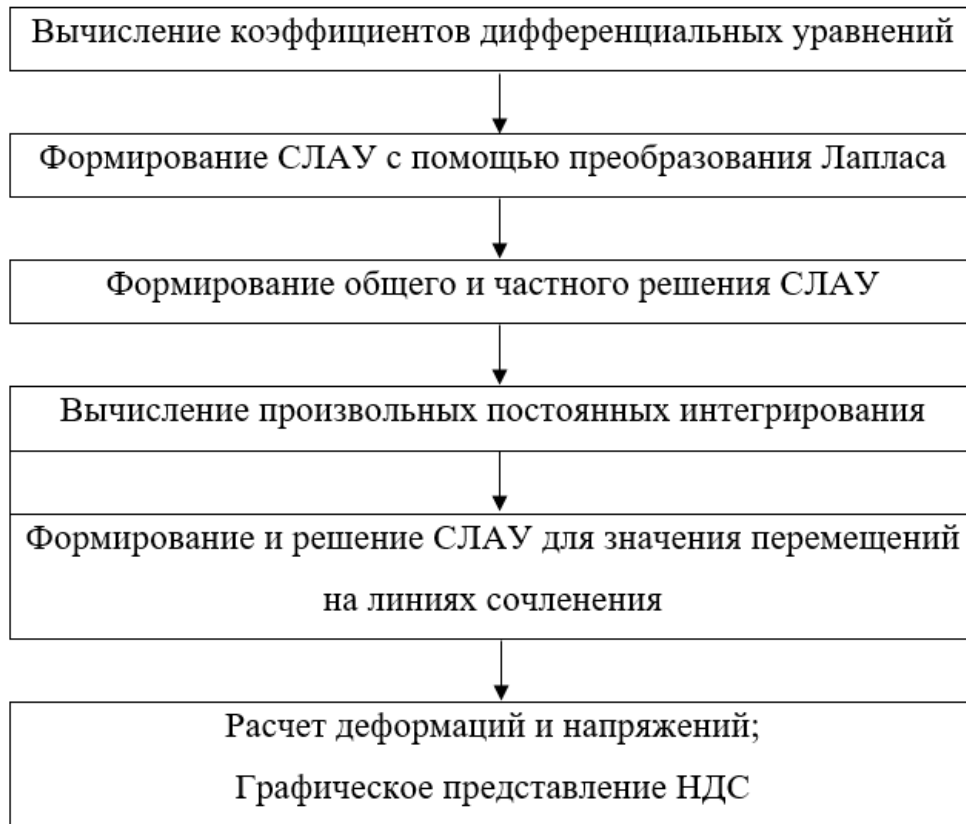


Рисунок 2.2 – Схема алгоритма для решения задач в пакете Maple

В качестве примера рассматривается случай, когда подкрепляющие ребра размещены на равных расстояниях по длине оболочки и их механические характеристики одинаковы. Оболочка, жестко заземленная на двух краях, имеет следующие параметры: радиус обшивки  $R = 0,5 \text{ м}$ ; длина оболочки  $L = 6R = 3 \text{ м}$ ; толщина обшивки  $2h = R/40 = 0,0125 \text{ м}$ ; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ; полувысота ребер  $H_j = 2h$ , толщина ребер  $b_j = h$ .

Для общности представим нагрузку, действующую на оболочку, в следующем виде:

$$q_{33}^-(\xi, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_{01}; \\ q_{33}^-(\xi) \cos m\theta & \text{при } \xi_{01} \leq \xi \leq \xi_{02}; \\ 0 & \text{при } \xi_{02} \leq \xi < \xi_0 = L/R. \end{cases} \quad (2.47)$$

Рассмотрим типичный вид нагрузки – равномерное внутреннее давление, соответствующее значению  $m = 0$  и  $q_{33}^-(\xi) = Q_0$  в выражении (2.47). Ниже на рисунках 2.3 – 2.6 приведены результаты расчета в виде графиков НДС обшивки, подкрепленной двумя ребрами.

На рисунках 2.3 – 2.5 представлены графики НДС обшивки при нагрузке (2.47), действующей на всю внутреннюю поверхность оболочки ( $\xi_{01} = 0, \xi_{02} = \xi_0$ ).

Для оценки влияния размера полосы нагружения на НДС оболочки проведен расчет при  $\xi_{01} = 2,5$  и  $\xi_{02} = 3,5$ . Графики компонентов НДС обшивки приведены на рисунке 2.6.

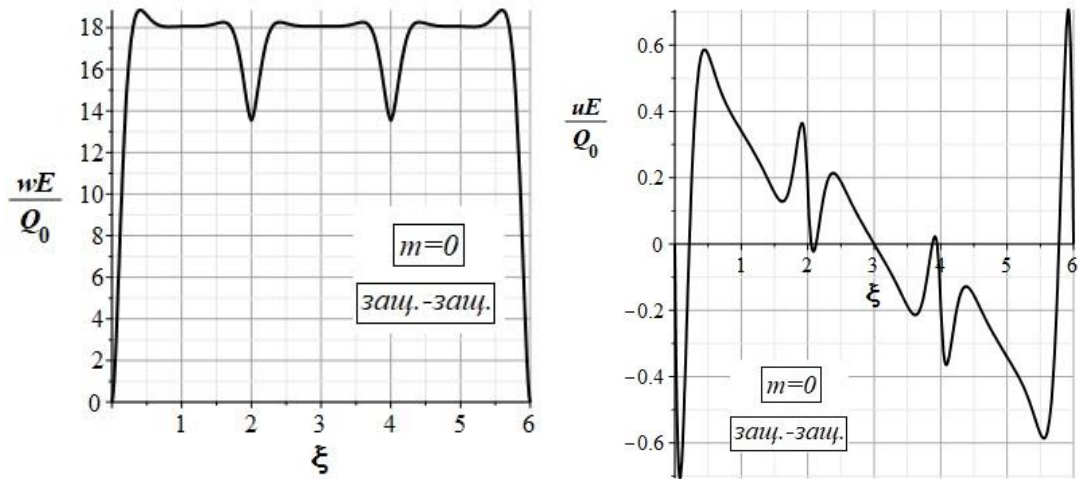


Рисунок 2.3 – Графики перемещений обшивки по длине оболочки

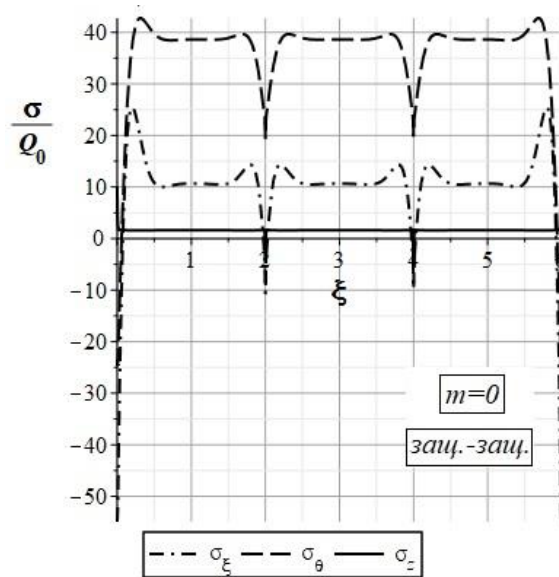


Рисунок 2.4 – Нормальные напряжения при  $z = h$  по длине оболочки

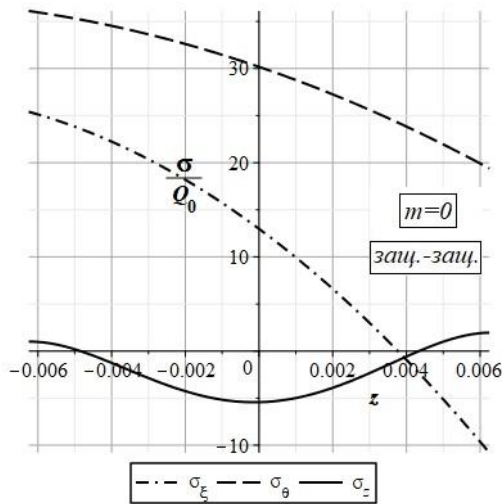


Рисунок 2.5 – Нормальные напряжения по толщине в месте крепления ребер

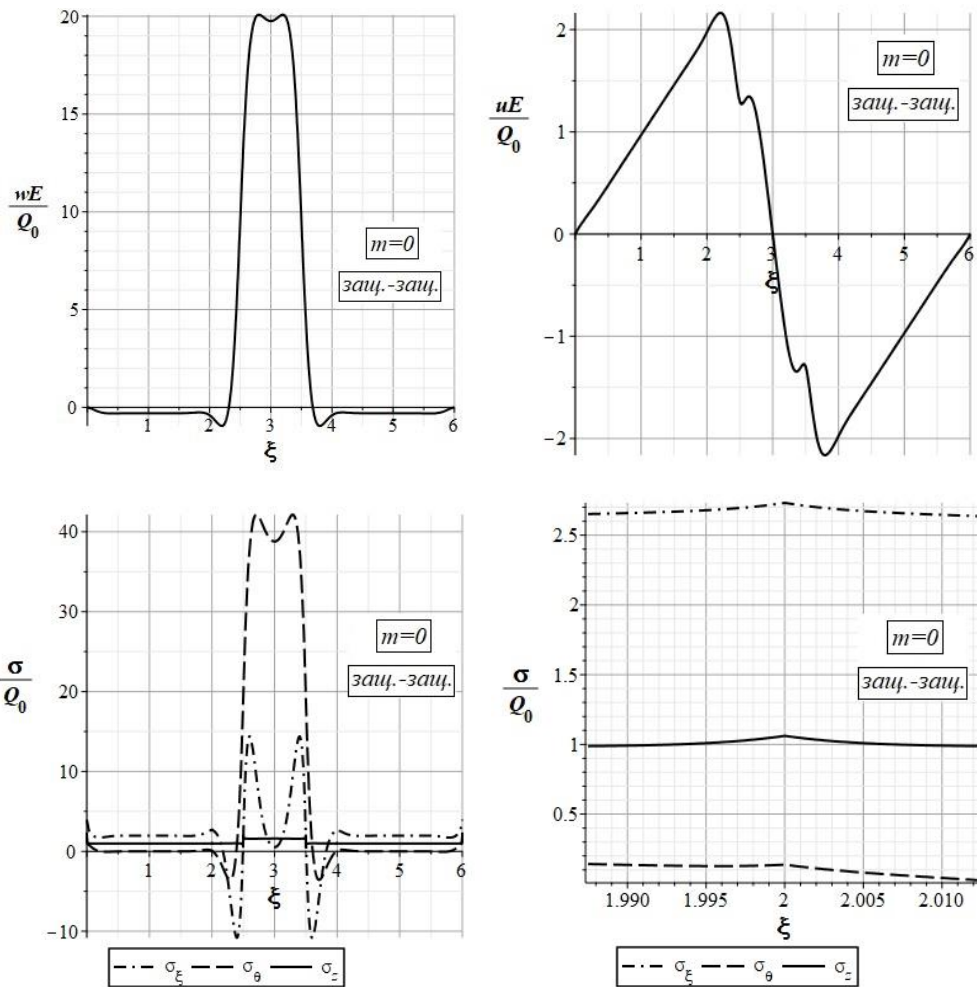


Рисунок 2.6 – НДС обшивки при узкой полосе нагружения

Из рисунков 2.3 – 2.6 следует, что в случае, когда ребра находятся вне зоны нагружения, наличие ребер практически не влияет на НДС обшивки.

При  $m > 0$  картина НДС оболочки выглядит иначе. Рассмотрим вариант

нагрузки (2.47) при  $m = 5, \xi_{01} = 0, \xi_{02} = \xi_0 = 6, q_{33}^-(\xi) = Q_0$ . Результаты расчета прогиба обшивки для различного количества ребер:  $N = 0$  (гладкая оболочка),  $N = 1 (\xi_1 = 3), N = 2 (\xi_1 = 2, \xi_2 = 4)$  представлены на рисунке 2.7.

На рисунке 2.8 показаны графики максимальных нормальных напряжений обшивки, находящейся под нагрузкой (2.47) при  $m = 5, \xi_{01} = 0, \xi_{02} = \xi_0, q_{33}^-(\xi) = Q_0 \xi$ . Расчет проводится для случая  $N = 3 (\xi_1 = 1,5; \xi_2 = 3; \xi_3 = 4,5), H_j = 2h$ .

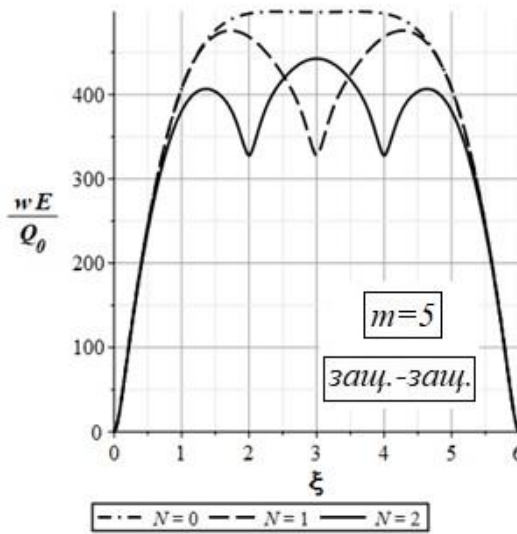


Рисунок 2.7 – Прогиб оболочки по длине

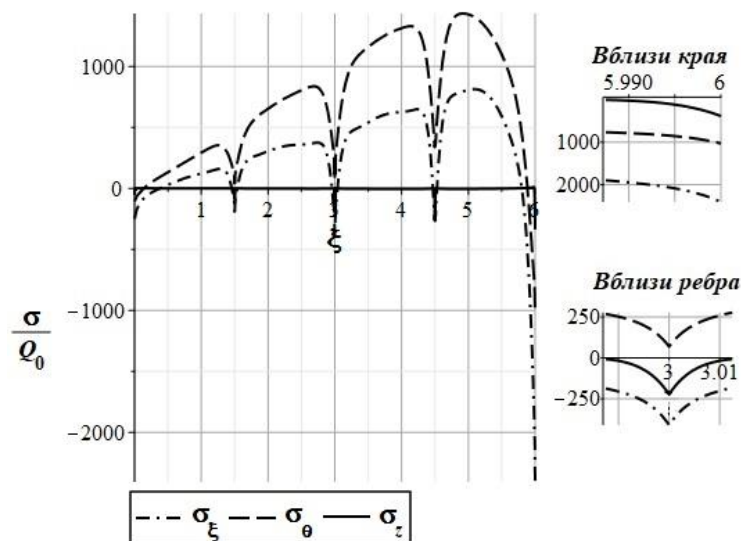


Рисунок 2.8 – Нормальные напряжения по длине оболочки при  $H_j = 2h$

Из рисунка 2.7 следует, что при увеличении числа ребер  $N$ , прогиб обшивки существенно уменьшается, что и следовало ожидать. Например, прогиб обшивки в зоне подкрепления кольцевыми ребрами уменьшается на 34% по сравнению с максимальным прогибом гладкой оболочки.

Графики на рисунке 2.8 показывают, что в зонах защемления оболочки и подкрепления ребрами поперечные нормальные напряжения имеют один порядок с величинами максимальных окружных и продольных напряжений (до 65%). Этот результат доказывает существование в узкой краевой зоне вблизи ребра самоуравновешенного быстро затухающего НДС типа «погранслоя».

Для исследования геометрического влияния ребер на напряжения обшивки приведены результаты расчета при различных значениях высоты ребер. На рисунке 2.9 показаны графики нормальных напряжений при полувысоте ребер  $H_j = 6h$ .

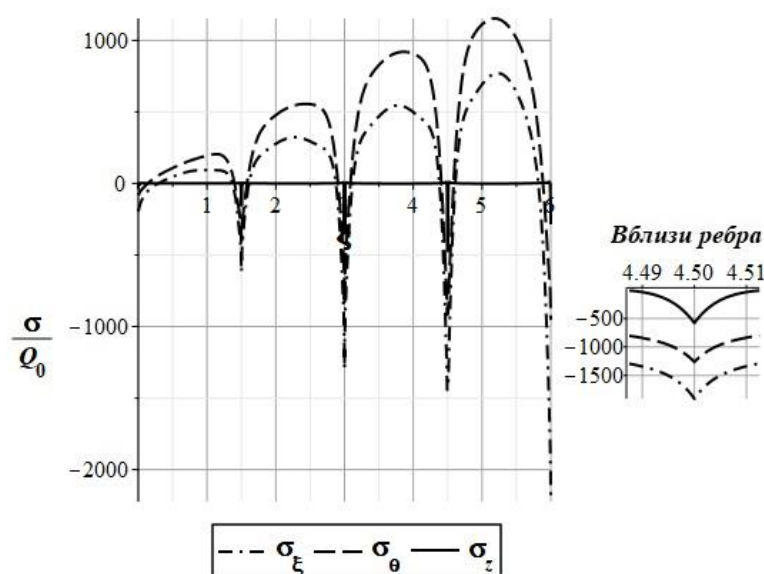


Рисунок 2.9 – Нормальные напряжения по длине оболочки при  $H_j = 6h$

Из рисунков 2.8 – 2.9 следует, что геометрические параметры ребер существенно влияют на локальное напряженное состояние оболочки, в том числе и на поперечные нормальные напряжения.

Для сравнения полученных в данной работе результатов с классической теорией используются данные, приведенные в работах А.Л. Гольденвейзера [36] и В.В. Новожилова [80]. Расчет проведен при  $N = 2$  и  $H_j = 6h$ . Графики нормальных

напряжений в зонах подкрепления ребрами представлены на рисунке 2.10. В таблице 2.1, где аббревиатурами “Cl” обозначены напряжения, определенные по классической и “Noncl” – по уточненной теориям, в процентах приводятся данные погрешности определения напряжений.

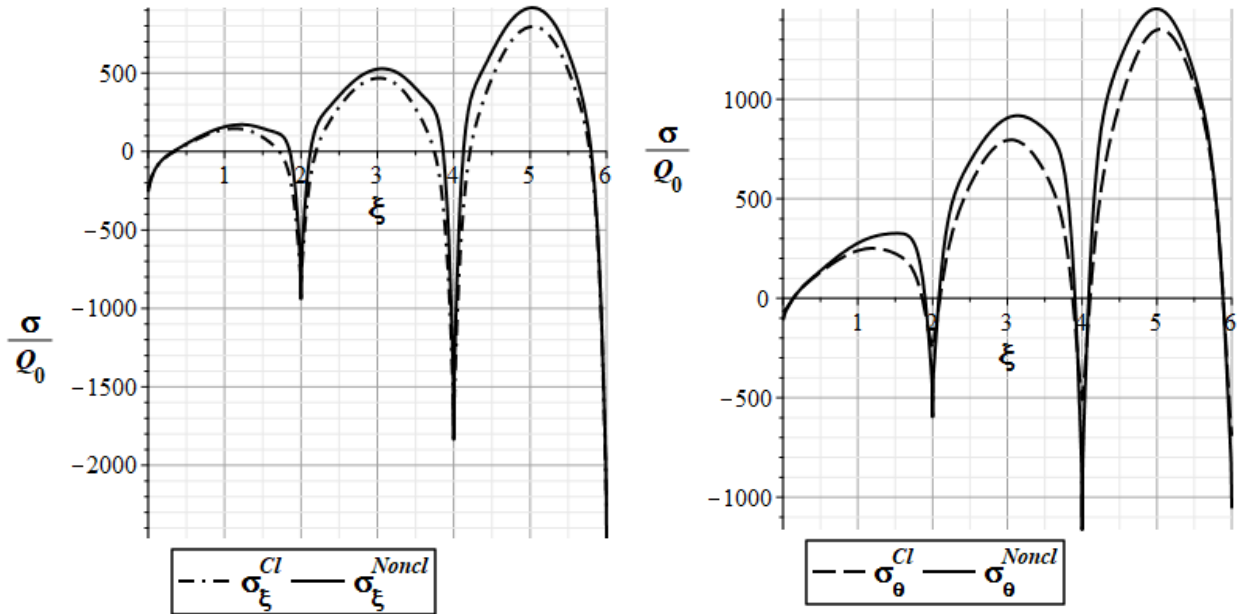


Рисунок 2.10 – Сравнение результатов расчета по уточненной и классической теориям

Таблица 2.1 – Сравнение нормальных напряжений обшивки в зоне крепления ребер и заземленного края по уточненной и классической теориям

—	$\xi = \xi_1$	$\xi = \xi_2$	$\xi = L/R$
$\frac{\sigma_{\xi}^{Noncl} - \sigma_{\xi}^{Cl}}{\sigma_{\xi}^{Noncl}}$	11%	11%	6,5%
$\frac{\sigma_{\theta}^{Noncl} - \sigma_{\theta}^{Cl}}{\sigma_{\theta}^{Noncl}}$	58%	58%	34%
$\frac{\sigma_z^{Noncl}}{\sigma_{\xi}^{Noncl}}$	28%	28%	16%

Рисунок 2.10 показывает, что при удалении от ребра дополнительные напряжения «погранслои» исчезают и результаты расчета НДС по уточненной и

классической теории практически совпадают. Это доказывает достоверность предлагаемой уточненной математической модели расчета НДС цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами (шпангоутами).

Для увеличения прочности оболочки, к ней могут крепиться ребра, жесткость которых отличается от жесткости обшивки. С целью оценки влияния жесткости ребер на НДС обшивки построим некоторые графики в зависимости от величины  $L_1 = E_1/E$ , где  $E_1$  – модуль Юнга материала ребер.

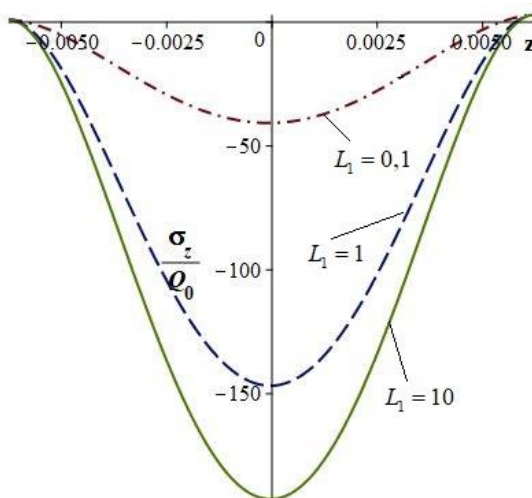


Рисунок 2.11 – Графики влияния жесткости ребра на поперечные нормальные напряжения обшивки в месте сопряжения

На рисунке 2.11 представлены графики поперечных нормальных напряжений обшивки по толщине в месте крепления кольцевого ребра ( $\xi = \xi_j$ ) при различных значениях  $L_1$ . Графики показывают, что при увеличении значения  $E_1$ , напряжение  $\sigma_z$  также увеличивается. Этот результат подтверждает необходимость применения уточненной теории для расчета НДС оболочки, подкрепленной ребрами.

Зависимости нормальных напряжений обшивки от значения  $L_1$  показаны на рисунке 2.12, где кривые 1, 2, 3 представляют собой графики отношений продольного, окружного и поперечного нормальных напряжений для вариантов подкрепленной и гладкой ( $L_1 = 0$ ) оболочек в местах крепления кольцевого ребра ( $\xi = \xi_j$ ).



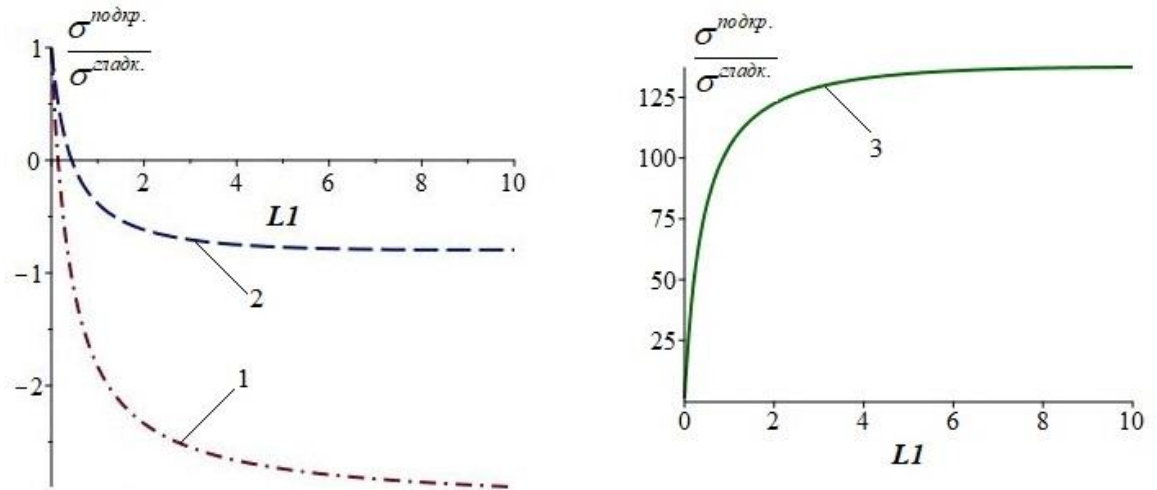


Рисунок 2.12 – Графики влияния жесткости ребра на нормальные напряжения обшивки

Графики на рисунке 2.12 показывают, что при изменении значения  $L_1$  в интервале от нуля до двух, напряженное состояние подкрепленной оболочки быстро изменяется, при этом напряжения  $\sigma_\xi, \sigma_\theta$  уменьшаются, а напряжение  $\sigma_z$  увеличивается. При больших значениях  $L_1$  напряжения подкрепленной оболочки изменяются мало по сравнению с гладкой оболочкой. Этот факт имеет важное значение при выборе жесткостных характеристики ребер для подкрепленных оболочек.

## 2.7. Выводы по второй главе

В главе 2 приводятся следующие результаты:

1. На основе уточненной теории для круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами, получены двумерные уравнения равновесия и соответствующие граничные условия в перемещениях.
2. Краевая задача подкрепленной оболочки приведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий с помощью тригонометрических рядов по окружной координате.
3. С помощью преобразования Лапласа получены аналитические решения

сформулированной краевой задачи для различных вариантов подкрепленных оболочек и внешней нагрузки.

4. Приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС подкрепленных кольцевыми ребрами цилиндрических оболочек с помощью программного пакета Maple. В результате установлено: в зонах защемления оболочки и подкрепления ребрами поперечные нормальные напряжения имеют один порядок с величинами максимальных окружных и продольных напряжений; при увеличении значения модуля Юнга материала ребер поперечные нормальные напряжения в местах сопряжения существенно увеличиваются.

### ГЛАВА 3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

В данной главе разработана уточненная математическая модель НДС подкрепленной продольными ребрами круговой цилиндрической оболочки, нагруженной статическими нагрузками по внутренней и внешней поверхностям.

Сформулирована краевая задача по определению уточненного НДС рассматриваемых оболочек по дискретной и конструктивно-ортотропной расчетным моделям. Решение краевой задачи осуществляется приведением системы уравнений в перемещениях к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью метода разложения компонентов НДС и нагрузок в тригонометрические ряды по продольной координате.

Определение решений полученной системы уравнений строится аналитическим методом с помощью преобразования Лапласа. Приведены результаты параметрических исследований НДС подкрепленных продольными ребрами цилиндрических оболочек.

#### 3.1. Основные уравнения теории цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами

Здесь и в дальнейшем отбросим индекс 1 и сохраним только индекс  $i$  при обозначениях для продольных ребер.

Подставляя выражения (1.15), (1.24), (1.29) с учетом (1.13), (1.22) в уравнения равновесия (1.30) и отбрасывая обобщенные усилия кольцевых ребер, получим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=0}^2 \left( K^{k1n} + K_{11}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_n + \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} \frac{\partial}{\partial \xi} w_n +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \left[ \sum_{n=0}^2 K_{11}^{kci1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_n + \sum_{n=0}^1 K_1^{kci3n} \frac{\partial}{\partial \xi} w_n + K_{11}^{kci1} \frac{d^2 u_1^j}{d \xi^2} \right] = \\
& = K^{kq^+} q_{13}^+ - K^{kq^-} q_{13}^-, k = 1, 2, 3, \\
& \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_n + \sum_{n=0}^2 \left( K^{l2n} + K_{11}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{l3n} \frac{\partial}{\partial \theta} w_n = \\
& = K^{lq^+} q_{23}^+ - K^{lq^-} q_{23}^-, l = 4, 5, 6, \\
& \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} \frac{\partial}{\partial \xi} u_n + \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} \frac{\partial}{\partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^1 \left( K^{s3n} + K_{11}^{s3n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{s3n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_n + \quad (3.1) \\
& + \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \left[ \sum_{n=0}^2 K_1^{sci1n} \frac{\partial}{\partial \xi} u_n + \sum_{n=0}^1 \left( K^{sci3n} + K_{11}^{sci3n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w_n + K_1^{sci1} \frac{du_1^j}{d \xi} \right] = \\
& = K^{sq^+} q_{33}^+ - K^{sq^-} q_{33}^-, s = 7, 8, \\
& \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \left[ \sum_{n=0}^2 K_{11}^{9ci1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_n + \sum_{n=0}^1 K_1^{9ci3n} \frac{\partial}{\partial \xi} w_n + \right. \\
& \left. + \left( K^{9ci1} + K_{11}^{9ci1} \frac{d^2}{d \xi^2} \right) u_1^i \right] = 0, i = \overline{1, M}.
\end{aligned}$$

В уравнениях (3.1) коэффициенты при перемещениях обшивки и нагрузочных членах определяются формулами (2.1a), для остальных коэффициентов принимаются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
K_{11}^{1ci10} &= \frac{2DH_i \alpha_i k_i r_i^2 (H_i \lambda_i r_i + h \lambda_i r_i + 1)(1 - \mu_i)}{r^2 h}, K_{11}^{1ci11} = \lambda_i h K_{11}^{1ci10}, \\
K_{11}^{1ci12} &= \frac{h^2}{2} K_{11}^{1ci10}, K_1^{1ci30} = -\frac{2DH_i \alpha_i k_i \mu_i r_i^2 (4H_i^2 r_i^2 + 6H_i h r_i + 3h^2 r_i^2 - 3)}{3r^2 h}, \\
K_1^{1ci31} &= \lambda_i h K_1^{1ci30}, K_{11}^{1ci1} = \frac{2D \lambda_i H_i^2 \alpha_i k_i r_i^2 (4H_i \lambda_i r_i + 3h \lambda_i r_i + 3)(1 - \mu_i)}{3r^2 h}, \\
K_{11}^{2ci10} &= \frac{\lambda_i}{rh} K_{11}^{1ci10}, K_{11}^{2ci11} = \lambda_i h K_{11}^{2ci10}, K_{11}^{2ci12} = \frac{h^2}{2} K_{11}^{2ci10}, K_{11}^{2ci1} = \frac{\lambda_i}{rh} K_{11}^{1ci1}, \\
K_1^{2ci30} &= \frac{\lambda_i}{rh} K_1^{1ci30}, K_1^{2ci31} = \lambda_i h K_1^{2ci30}, K_{11}^{3ci10} = K_{11}^{1ci10}, K_{11}^{3ci11} = \lambda_i h K_{11}^{3ci10},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{11}^{3ci12} &= \frac{h^2}{2} K_{11}^{3ci10}, \quad K_1^{3ci30} = K_1^{1ci30}, \quad K_1^{3ci31} = \lambda_i h K_1^{3ci30}, \quad K_{11}^{3ci1} = K_{11}^{1ci1}, \\
K_1^{7ci10} &= \frac{2DH_i \alpha_i k_i \mu_i r_i^2}{r^2 h}, \quad K_1^{7ci11} = \lambda_i h K_1^{7ci10}, \quad K_1^{7ci12} = \frac{h^2}{2} K_1^{7ci10}, \\
K^{7ci30} &= -\frac{2DH_i \alpha_i k_i r_i^2 (1 - \mu_i) (\lambda_i H_i r_i + \lambda_i h r_i - 1)}{r^2 h}, \quad K^{7ci31} = \lambda_i h K^{7ci30}, \\
K_{11}^{7ci30} &= -\frac{DH_i \alpha_i k_i r_i^2 (1 - 2\mu_i) (\lambda_i H_i r_i + \lambda_i h r_i + 1)}{r^2 h}, \quad K_{11}^{7ci31} = \lambda_i h K_{11}^{7ci30}, \\
K_1^{7ci1} &= \frac{DH_i \alpha_i k_i r_i (4\lambda_i H_i \mu_i r_i + 2\lambda_i h \mu_i r_i - \lambda_i H_i r_i - \lambda_i h r_i + 2\mu_i - 1)}{r^2 h}, \\
K_1^{8ci10} &= \lambda_i r h K_1^{7ci10}, \quad K_1^{8ci11} = \lambda_i h K_1^{8ci10}, \quad K_1^{8ci12} = \frac{h^2}{2} K_1^{8ci10}, \\
K^{8ci30} &= \lambda_i r h K^{7ci30}, \quad K_{11}^{8ci30} = \lambda_i r h K_{11}^{7ci30}, \quad K^{8ci31} = \lambda_i h K^{8ci30}, \quad K_{11}^{8ci31} = \lambda_i h K_{11}^{8ci30}, \\
K_1^{8ci1} &= \lambda_i h r K_1^{7ci1}, \\
K_{11}^{9ci10} &= -\frac{2}{3} r_i^2 \left[ (4H_i^2 r_i + 9hH_i r_i + 6h^2 r_i + 3\lambda_i H_i + 6\lambda_i h) \mu_i - 3h(H_i r_i + h r_i + \lambda_i) \right], \\
K_{11}^{9ci11} &= \lambda_i h K_{11}^{9ci10}, \quad K_{11}^{9ci11} = \frac{h^2}{2} K_{11}^{9ci10}, \\
K_1^{9ci30} &= \frac{1}{3} r_i \left[ 12\lambda_i H_i^3 r_i^3 (1 - \mu_i) + 8\lambda_i h H_i^2 r_i^3 (3 - 4\mu_i) - 3\lambda_i H_i r_i (10h^2 r_i^2 \mu_i - \right. \\
&\quad \left. - 6h^2 r_i^2 + 1) + 3(2\lambda_i h^3 r_i^3 - \lambda_i h r_i + 1)(1 - 2\mu_i) \right], \quad K_1^{9ci31} = \lambda_i h K_1^{9ci30}, \\
K^{9ci1} &= (\lambda_i H_i r_i + \lambda_i h r_i + 1)(1 - 2\mu_i), \\
K_{11}^{9ci1} &= \frac{2}{3} H_i r_i^2 \left\{ 3\lambda_i h^2 r_i (1 - 2\mu_i) + h \left[ 4\lambda_i H_i r_i (1 - 3\mu_i) + 3(1 - 2\mu_i) \right] + \right. \\
&\quad \left. - 2H_i \mu_i (3\lambda_i H_i r_i + 2) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.1a}$$

Здесь также введено обозначение

$$D = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu) E_j}{(1 + \mu_j)(1 - 2\mu_j) E}.$$

Граничные условия (1.31), (1.32) представляются в виде

на криволинейных краях  $\xi = \xi_0^{(1)}$  и  $\xi = \xi_0^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
u_0 = \bar{u}_0 \text{ или } & \frac{Eh}{3(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 6r(1-\mu) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 2r^2 h^2 (1-\mu) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \right. \\
& \left. + rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 6r\mu \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + rh^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 6r\mu w_0 + 6\mu w_1 \right] + \\
& + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \frac{\alpha_i k_i r_i^2 H_i E_i}{3(1-2\mu_i)(1+\mu_i)} \left\{ \lambda_i h \mu_i r_i \left[ 3(r_i \lambda_i H_i + r_i \lambda_i h + 1)(1-\mu_i) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left( 2 \frac{du_0}{d\xi} + 2\lambda_i h \frac{du_1}{d\xi} + h^2 \frac{du_2}{d\xi} \right) - 2\mu_i (4H_i^2 r_i^2 + 6H_i h r_i^2 + 3h^2 r_i^2 - 3)(w_0 + \lambda_i h w_1) \right] + \right. \\
& \left. + 2H_i (4r_i H_i + 3r_i h + 3\lambda_i)(1-\mu_i) \frac{du_1^i}{d\xi} \right\} = \bar{N}_\xi, \\
u_1 = \bar{u}_1 \text{ или } & \\
& \frac{Erh^3}{15(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 10(1-\mu) \left( r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) + 3rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 6r^3 h^2 \mu \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + 2(5-3r^2 h^2) \mu \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 3rh^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 6r^3 h^2 \mu w_0 + 2\mu (10-3r^2 h^2) w_1 \right] + \\
& + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \frac{\lambda_i h \alpha_i k_i r_i^2 H_i E_i}{3(1-2\mu_i)(1+\mu_i)} \left\{ \lambda_i h \mu_i r_i \left[ 3(r_i \lambda_i H_i + r_i \lambda_i h + 1)(1-\mu_i) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left( 2 \frac{du_0}{d\xi} + 2\lambda_i h \frac{du_1}{d\xi} + h^2 \frac{du_2}{d\xi} \right) - 2\mu_i (4H_i^2 r_i^2 + 6H_i h r_i^2 + 3h^2 r_i^2 - 3)(w_0 + \lambda_i h w_1) \right] + \right. \\
& \left. + 2H_i (4r_i H_i + 3r_i h + 3\lambda_i)(1-\mu_i) \frac{du_1^i}{d\xi} \right\} = \bar{M}_\xi^1, \tag{3.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 = \bar{u}_2 \text{ или } & \frac{Eh^3}{30(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 10(1-\mu) r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 6r^2 h^2 (1-\mu) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \right. \\
& \left. + 3rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 10r\mu \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + 3rh^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 10r\mu w_0 + 10\mu w_1 \right] + \\
& + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \frac{h^2 \alpha_i k_i r_i^2 H_i E_i}{6(1-2\mu_i)(1+\mu_i)} \left\{ \lambda_i h \mu_i r_i \left[ 3(r_i \lambda_i H_i + r_i \lambda_i h + 1)(1-\mu_i) \times \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\times \left( 2 \frac{du_0}{d\xi} + 2\lambda_i h \frac{du_1}{d\xi} + h^2 \frac{du_2}{d\xi} \right) - 2\mu_i (4H_i^2 r_i^2 + 6H_i h r_i^2 + 3h^2 r_i^2 - 3)(w_0 + \lambda_i h w_1) \Big] +$$

$$+ 2H_i (4r_i H_i + 3r_i h + 3\lambda_i)(1 - \mu_i) \frac{du_1^i}{d\xi} \Big\} = \overline{M}_{\xi}^2,$$

$$v_0 = \overline{v}_0 \text{ или } \frac{rhE}{6(1+\mu)} \left( 6 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + h^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + 6 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + 2rh^2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + h^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right) = \overline{N}_{\xi\theta},$$

$$v_1 = \overline{v}_1 \text{ или } \frac{rh^3 E}{30(1+\mu)} \left[ 6r^3 h^2 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + 2(5 - 3r^2 h^2) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + 3rh^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + 10r \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + 10 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + 3rh^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right] = \overline{M}_{\xi\theta}^1,$$

$$v_2 = \overline{v}_2 \text{ или } \frac{rh^3 E}{60(1+\mu)} \left( 10 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + 3h^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + 10 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + 6rh^2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + 3h^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right) = \overline{M}_{\xi\theta}^2,$$

$$w_0 = \overline{w}_0 \text{ или } \frac{hE}{3(1+\mu)} \left( 3u_1 + rh^2 u_2 + 3r \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + r^2 h^2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \frac{\alpha_i k_i r_i E_i H_i (\lambda_i H_i r_i + \lambda_i h r_i + 1)}{1 + \mu_i} \left( r_i \frac{dw_0}{d\xi} + \lambda_i h r_i \frac{dw_1}{d\xi} + u_1^i \right) = \overline{Q}_{\xi z},$$

$$w_1 = \overline{w}_1 \text{ или } \frac{h^3 E}{3(1+\mu)} \left( ru_1 + u_2 + r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + r \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \frac{\lambda_i h \alpha_i k_i r_i E_i H_i (\lambda_i H_i r_i + \lambda_i h r_i + 1)}{1 + \mu_i} \left( r_i \frac{dw_0}{d\xi} + \lambda_i h r_i \frac{dw_1}{d\xi} + u_1^i \right) = \overline{M}_{\xi z}^1,$$

$$u_1^{li} = \overline{u}_1^{li} \text{ или}$$

$$\sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \frac{r_i H_i E_i}{3(1-2\mu_i)(1+\mu_i)} \left[ \left\{ \lambda_i h \mu_i r_i \left[ 3(r_i \lambda_i H_i + r_i \lambda_i h + 1)(1 - \mu_i) \right] \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left( 2 \frac{du_0}{d\xi} + 2\lambda_i h \frac{du_1}{d\xi} + h^2 \frac{du_2}{d\xi} \right) - 2\mu_i (4H_i^2 r_i^2 + 6H_i h r_i^2 + 3h^2 r_i^2 - 3)(w_0 + \lambda_i h w_1) \right] +$$

$$+ 2H_i (4r_i H_i + 3r_i h + 3\lambda_i)(1 - \mu_i) \frac{du_1^i}{d\xi} \Big\} + \lambda_i \left\{ \mu_i \left[ (4H_i^2 + 6hH_i + 3h^2) \lambda_i r_i + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& +3(h + H_i) \left[ 2 \frac{du_0}{d\xi} + 2\lambda_i h \frac{du_1}{d\xi} + h^2 \frac{du_2}{d\xi} \right] - 6(h + H_i)(1 - \mu_i) \left[ (2H_i^2 + 2hH_i + \right. \\
& \left. + h^2)r_i - 1 \right] (w_0 + \lambda_i h w_1) + 2H_i \mu_i \left[ (6H_i^2 + 8hH_i + 3h^2)r_i + \lambda_i (3h + 4H_i) \right] \times \\
& \left. \times \frac{du_1^i}{d\xi} \right] = 0;
\end{aligned}$$

на прямолинейных краях  $\theta = \theta_0^{(1)}$  и  $\theta = \theta_0^{(2)}$ :

$$u_0 = \bar{u}_0 \text{ или}$$

$$\frac{rhE}{6(1+\mu)} \left[ 2(3+r^2h^2) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - 2rh^2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + h^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + 6 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + h^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right] = \bar{N}_{\theta\xi},$$

$$u_1 = \bar{u}_1 \text{ или } \frac{rh^3E}{3(1+\mu)} \left( -r \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right) = \bar{M}_{\theta\xi}^1,$$

$$u_2 = \bar{u}_2 \text{ или}$$

$$\frac{rh^3E}{60(1+\mu)} \left[ 2(5+3r^2h^2) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - 6rh^2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + 3h^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + 10 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + 3h^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right] = \bar{M}_{\theta\xi}^2,$$

$$\begin{aligned}
v_0 = \bar{v}_0 \text{ или } & \frac{hE}{3(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ 6r\mu \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 2r(3+r^2h^2)(1-\mu) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \right. \\
& \left. + rh^2\mu \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - 2r^2h^2(1-\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + rh^2(1-\mu) \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2(r^2h^2\mu - r^2h^2 + 3\mu)w_1 \right] = \bar{N}_\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 = \bar{v}_1 \text{ или } & \frac{2rh^3E}{3(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ -r(1-\mu) \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + (1-\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - r(1-\mu)w_0 + \right. \\
& \left. + (1-\mu)w_1 + \mu \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right] = \bar{M}_\theta^1,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
v_2 = \bar{v}_2 \text{ или } & \frac{h^3E}{30(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ 10r\mu \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 2r(5+3r^2h^2)(1-\mu) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \right. \\
& \left. + 3rh^2\mu \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - 6r^2h^2(1-\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 3rh^2(1-\mu) \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2(3r^2h^2\mu - 3r^2h^2 + 5\mu)w_1 \right] = \\
& = \bar{M}_\theta^2,
\end{aligned}$$



$$w_0 = \overline{w_0} \text{ или } \frac{-hE}{6(1+\mu)} \left[ rh^2 v_2 + 2r^2 h^2 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + 2(r^2 h^2 + 3) \left( rv_0 - v_1 - r \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right] = \overline{Q}_{\theta z},$$

$$w_1 = \overline{w_1} \text{ или } \frac{-h^3 E}{3(1+\mu)} \left[ -r^2 v_0 + rv_1 - v_2 + r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - r \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right] = \overline{M}_{\theta z}.$$

### 3.2. Конструктивно-ортотропная модель деформирования цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами

Для оболочек, часто подкрепленных ребрами жесткости, учет дискретности расположения подкрепляющих ребер не имеет смысла. Если расстояние между ребрами не превышает 0,1 от линейного размера оболочки, то эффект от дискретного введения ребер «размывается», не внося существенной погрешности в расчеты [61].

В данном параграфе рассмотрим подкрепленную оболочку как конструктивно-ортотропную. Под конструктивно-ортотропной оболочкой понимается оболочка, подкрепленная бесконечно большим числом ребер. Континуальная модель часто применяется для случая, когда жесткости всех подкрепляющих ребер равны. Такой вариант рассматривается в данном параграфе.

Уравнения равновесия конструктивно-ортотропной оболочки могут быть получены из (3.1) предельным переходом  $M \rightarrow \infty$ . Нетрудно убедиться, что при  $M \rightarrow \infty$  справедливо равенство [9]

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{M} \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) f(\xi, \theta_i) = \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \delta(\theta - \theta) f(\xi, \theta) d\theta = f(\xi, \theta). \quad (3.4)$$

Пользуясь формулой (3.4), получим из (3.1) следующую систему уравнений равновесия конструктивно-ортотропной оболочки:

$$\sum_{n=0}^2 \left[ K^{k1n} + \left( K_{11}^{k1n} + \frac{M}{2\pi} K_{11}^{kci1n} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u_n + \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_n +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^1 \left( K_1^{k3n} + \frac{M}{2\pi} K_1^{kci3n} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} w_n + \frac{M}{2\pi} K_{11}^{lci1} \frac{d^2 u_1^i}{d\xi^2} = K^{kq^+} q_{13}^+ - K^{kq^-} q_{13}^-, k = 1, 2, 3, \\
& \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_n + \sum_{n=0}^2 \left( K^{l2n} + K_{11}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{l3n} \frac{\partial}{\partial \theta} w_n = \\
& = K^{lq^+} q_{23}^+ - K^{lq^-} q_{23}^-, l = 4, 5, 6, \tag{3.5} \\
& \sum_{n=0}^2 \left( K_1^{s1n} + \frac{M}{2\pi} K_1^{sci1n} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} u_n + \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} \frac{\partial}{\partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^1 \left[ \left( K^{s3n} + K^{sci3n} \right) + \right. \\
& \left. + \left( K_{11}^{s3n} + \frac{M}{2\pi} K_{11}^{sci3n} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{s3n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] w_n + \frac{M}{2\pi} K_1^{sci1} \frac{du_1^j}{d\xi} = \\
& = K^{sq^+} q_{33}^+ - K^{sq^-} q_{33}^-, s = 7, 8, \\
& \sum_{n=0}^2 K_{11}^{9ci1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_n + \sum_{n=0}^1 K_1^{9ci3n} \frac{\partial}{\partial \xi} w_n + \left( K^{9ci1} + K_{11}^{9ci1} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_1^i = 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия (3.3) на прямолинейных краях  $\theta = \theta_0^{(1)}$  и  $\theta = \theta_0^{(2)}$  остаются прежними, а (3.2) представляются как

$$\begin{aligned}
u_0 = \bar{u}_0 \text{ или } & \frac{Eh}{3(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 6r(1-\mu) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 2r^2 h^2 (1-\mu) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \right. \\
& \left. + rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 6r\mu \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + rh^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 6r\mu w_0 + 6\mu w_1 \right] + \\
& + \frac{\alpha_i k_i r_i^2 H_i E_i M}{6\pi r (1-2\mu_i)(1+\mu_i)} \left\{ \lambda_i h \mu_i r_i \left[ 3(r_i \lambda_i H_i + r_i \lambda_i h + 1)(1-\mu_i) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left( 2 \frac{du_0}{d\xi} + 2\lambda_i h \frac{du_1}{d\xi} + h^2 \frac{du_2}{d\xi} \right) - 2\mu_i (4H_i^2 r_i^2 + 6H_i h r_i^2 + 3h^2 r_i^2 - 3)(w_0 + \lambda_i h w_1) \right] + \right. \\
& \left. + 2H_i (4r_i H_i + 3r_i h + 3\lambda_i)(1-\mu_i) \frac{du_1^i}{d\xi} \right\} = \bar{N}_\xi,
\end{aligned}$$

$$u_1 = \bar{u}_1 \text{ или}$$

$$\frac{Erh^3}{15(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ 10(1-\mu) \left( r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) + 3rh^2 (1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 6r^3 h^2 \mu \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2(5-3r^2h^2)\mu\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+3rh^2\mu\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+6r^3h^2\mu w_0+2\mu(10-3r^2h^2)w_1\Big]+ \\
& +\frac{\lambda_i h \alpha_i k_i r_i^2 H_i E_i M}{6\pi r(1-2\mu_i)(1+\mu_i)}\left\{\lambda_i h \mu_i r_i\left[3(r_i \lambda_i H_i+r_i \lambda_i h+1)(1-\mu_i)\times\right.\right. \\
& \times\left.\left(2\frac{du_0}{d\xi}+2\lambda_i h\frac{du_1}{d\xi}+h^2\frac{du_2}{d\xi}\right)-2\mu_i(4H_i^2 r_i^2+6H_i h r_i^2+3h^2 r_i^2-3)(w_0+\lambda_i h w_1)\right]+ \\
& \left.+2H_i(4r_i H_i+3r_i h+3\lambda_i)(1-\mu_i)\frac{du_1^i}{d\xi}\right\}=\overline{M}_\xi^1, \\
u_2 = \overline{u}_2 \text{ или } & \frac{Eh^3}{30(1-2\mu)(1+\mu)}\left[10(1-\mu)r\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+6r^2h^2(1-\mu)\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+ \right. \\
& \left.+3rh^2(1-\mu)\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+10r\mu\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+3rh^2\mu\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+10r\mu w_0+10\mu w_1\right]+ \\
& +\frac{h^2\alpha_i k_i r_i^2 H_i E_i M}{12\pi r(1-2\mu_i)(1+\mu_i)}\left\{\lambda_i h \mu_i r_i\left[3(r_i \lambda_i H_i+r_i \lambda_i h+1)(1-\mu_i)\times\right.\right. \\
& \times\left.\left(2\frac{du_0}{d\xi}+2\lambda_i h\frac{du_1}{d\xi}+h^2\frac{du_2}{d\xi}\right)-2\mu_i(4H_i^2 r_i^2+6H_i h r_i^2+3h^2 r_i^2-3)(w_0+\lambda_i h w_1)\right]+ \\
& \left.+2H_i(4r_i H_i+3r_i h+3\lambda_i)(1-\mu_i)\frac{du_1^i}{d\xi}\right\}=\overline{M}_\xi^2, \\
v_0 = \overline{v}_0 \text{ или } & \frac{rhE}{6(1+\mu)}\left(6\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+h^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+6\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+2rh^2\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+h^2\frac{\partial v_2}{\partial\xi}\right)=\overline{N}_{\xi\theta}, \\
v_1 = \overline{v}_1 \text{ или } & \frac{rh^3E}{30(1+\mu)}\left[6r^3h^2\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+2(5-3r^2h^2)\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+3rh^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+ \right. \\
& \left.+10r\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+10\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+3rh^2\frac{\partial v_2}{\partial\xi}\right]=\overline{M}_{\xi\theta}^1, \\
v_2 = \overline{v}_2 \text{ или } & \frac{rh^3E}{60(1+\mu)}\left(10\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+3h^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+10\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+6rh^2\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+3h^2\frac{\partial v_2}{\partial\xi}\right)=\overline{M}_{\xi\theta}^2, \\
w_0 = \overline{w}_0 \text{ или } & \frac{hE}{3(1+\mu)}\left(3u_1+rh^2u_2+3r\frac{\partial w_0}{\partial\xi}+r^2h^2\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\right)+
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$+ \frac{\alpha_i k_i r_i E_i H_i M (\lambda_i H_i r_i + \lambda_i h r_i + 1)}{2\pi r (1 + \mu_i)} \left( r_i \frac{dw_0}{d\xi} + \lambda_i h r_i \frac{dw_1}{d\xi} + u_1^i \right) = \bar{Q}_{\xi z},$$

$$w_1 = \bar{w}_1 \text{ или } \frac{h^3 E}{3(1 + \mu)} \left( r u_1 + u_2 + r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + r \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda_i h \alpha_i k_i r_i E_i H_i M (\lambda_i H_i r_i + \lambda_i h r_i + 1)}{2\pi r (1 + \mu_i)} \left( r_i \frac{dw_0}{d\xi} + \lambda_i h r_i \frac{dw_1}{d\xi} + u_1^i \right) = \bar{M}_{\xi z}^1,$$

$$u_1^i = \bar{u}_1^{-i} \text{ или}$$

$$\left\{ \lambda_i h \mu_i r_i \left[ 3(r_i \lambda_i H_i + r_i \lambda_i h + 1)(1 - \mu_i) \left( 2 \frac{du_0}{d\xi} + 2\lambda_i h \frac{du_1}{d\xi} + h^2 \frac{du_2}{d\xi} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\mu_i (4H_i^2 r_i^2 + 6H_i h r_i^2 + 3h^2 r_i^2 - 3)(w_0 + \lambda_i h w_1) \right] + 2H_i (4r_i H_i + 3r_i h + 3\lambda_i) \times \right. \\ \left. \times (1 - \mu_i) \frac{du_1^i}{d\xi} \right\} + \lambda_i \left\{ \mu_i \left[ (4H_i^2 + 6hH_i + 3h^2) \lambda_i r_i + 3(h + H_i) \right] \left( 2 \frac{du_0}{d\xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\lambda_i h \frac{du_1}{d\xi} + h^2 \frac{du_2}{d\xi} \right) - 6(h + H_i)(1 - \mu_i) \left[ (2H_i^2 + 2hH_i + h^2) r_i - 1 \right] \times \right. \\ \left. \times (w_0 + \lambda_i h w_1) + 2H_i \mu_i \left[ (6H_i^2 + 8hH_i + 3h^2) r_i + \lambda_i (3h + 4H_i) \right] \frac{du_1^i}{d\xi} \right\} = 0.$$

### 3.3. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов

Для решения системы уравнений (3.1) с граничными условиями (3.2) и (3.3) приведем их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом разложения нагрузок и искомых перемещений в тригонометрические ряды Фурье по продольной переменной  $\xi$ . Как правило, разложение нагрузок и перемещений в тригонометрические ряды по  $\xi$  применяется к расчету открытых оболочек, подкрепленных продольными ребрами.

Рассмотрим подкрепленную оболочку, шарнирно опертую на краях  $\xi = \xi_0^{(1)}$  и

$\xi = \xi_0^{(2)}$ . Тогда разложим компоненты нагрузки и перемещений в ряды вида

$$\begin{aligned}
q_{13}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{13m}^{\pm}(\theta) \cos \gamma_m \xi, \\
q_{23}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{23m}^{\pm}(\theta) \sin \gamma_m \xi, \\
q_{33}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{33m}^{\pm}(\theta) \sin \gamma_m \xi, \\
u_k(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} u_{km}(\theta) \cos \gamma_m \xi, \quad k = 0, 1, 2, \\
v_k(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} v_{km}(\theta) \sin \gamma_m \xi, \quad k = 0, 1, 2, \\
w_l(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_{lm}(\theta) \sin \gamma_m \xi, \quad l = 0, 1, \\
u_1^i(\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{im} \cos \gamma_m \xi, \quad i = 1..M,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где  $A_{im}$  – неизвестные константы,  $\gamma_m = m\pi R/L$ .

Подставляя разложения (3.7) в уравнения (3.1) и сравнивая коэффициенты тригонометрических рядов в их левых и правых частях, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^2 \left( K^{k1n} - \gamma_m^2 K_{11}^{k1n} + K_{22}^{k1n} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) u_{nm} + \gamma_m \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} \frac{d}{d\theta} v_{nm} + \gamma_m \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} w_{nm} + \\
&+ \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \left( -\gamma_m^2 \sum_{n=0}^2 K_{11}^{kci1n} u_{nmi} + \gamma_m \sum_{n=0}^1 K_1^{kci3n} w_{nmi} - \gamma_m^2 K_{11}^{kci1} A_{im} \right) = \\
&= K^{kq^+} q_{13m}^+ - K^{kq^-} q_{13m}^-, \quad k = 1, 2, 3, \\
&-\gamma_m \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} \frac{d}{d\theta} u_{nm} + \sum_{n=0}^2 \left( K^{l2n} - \gamma_m^2 K_{11}^{l2n} + K_{22}^{l2n} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) v_{nm} + \sum_{n=0}^1 K_2^{l3n} \frac{d}{d\theta} w_{nm} = \\
&= K^{lq^+} q_{23m}^+ - K^{lq^-} q_{23m}^-, \quad l = 4, 5, 6,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_m \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} u_{nm} + \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} \frac{d}{d\theta} v_{nm} + \sum_{n=0}^1 \left( K^{s3n} - \gamma_m^2 K_{11}^{s3n} + K_{22}^{s3n} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) w_{nm} + \\
& + \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) \left[ -\gamma_m \sum_{n=0}^2 K_1^{sci1n} u_{nmi} + \sum_{n=0}^1 \left( K^{sci3n} - \gamma_m^2 K_{11}^{sci3n} \right) w_{nmi} - \gamma_m K_1^{sci1} A_{im} \right] = \\
& = K^{sq^+} q_{33m}^+ - K^{sq^-} q_{33m}^-, \quad s = 7, 8; \\
& -\gamma_m^2 \sum_{n=0}^2 K_{11}^{9ci1n} u_{nmi} + \gamma_m \sum_{n=0}^1 K_1^{9ci3n} w_{nmi} + \left( K^{9ci1} - \gamma_m^2 K_{11}^{9ci1} \right) A_{im} = 0, \quad \overline{i = 1, M}. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

где  $u_{nmi} = u_{nm}(\theta_j)$ ,  $w_{lmi} = w_{lm}(\theta_j)$ ,  $n = 0..2$ ,  $l = 0, 1$ .

С помощью разложений (3.7) граничные условия (3.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& \overline{u_{0m}} = \overline{u_{0m}} \text{ ИЛИ} \\
& \frac{rhE}{6(1+\mu)} \left[ 2(3+r^2h^2) \frac{du_{0m}}{d\theta} - 2rh^2 \frac{du_{1m}}{d\theta} + h^2 \frac{du_{2m}}{d\theta} + 6\lambda_m v_{0m} + h^2 \lambda_m v_{2m} \right] = \overline{N}_{\theta\xi}, \\
& \overline{u_{1m}} = \overline{u_{1m}} \text{ ИЛИ } \frac{rh^3E}{3(1+\mu)} \left( -r \frac{du_{0m}}{d\theta} + \frac{du_{1m}}{d\theta} + \gamma_m v_{1m} \right) = \overline{M}_{\theta\xi m}^1, \\
& \overline{u_{2m}} = \overline{u_{2m}} \text{ ИЛИ } \frac{rh^3E}{60(1+\mu)} \left[ 2(5+3r^2h^2) \frac{du_{0m}}{d\theta} - 6rh^2 \frac{du_{1m}}{d\theta} + 3h^2 \frac{du_{2m}}{d\theta} + \right. \\
& \left. + 10\gamma_m v_{0m} + 3h^2 \gamma_m v_{2m} \right] = \overline{M}_{\theta\xi m}^2, \\
& \overline{v_{0m}} = \overline{v_{0m}} \text{ ИЛИ } \frac{Eh}{3(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ (1-\mu) rh^2 \frac{dv_{2m}}{d\theta} - 2(1-\mu) r^2 h^2 \frac{dv_{1m}}{d\theta} - \right. \\
& \left. - \gamma_m rh^2 \mu u_{2m} + 2r(3+r^2h^2)(1-\mu) \left( \frac{dv_{0m}}{d\theta} + w_{0m} \right) - 6\gamma_m r \mu u_{0m} + \right. \\
& \left. + 2(3\mu + r^2h^2\mu - r^2h^2) w_{1m} \right] = \overline{N}_{\theta m}, \\
& \overline{v_{1m}} = \overline{v_{1m}} \text{ ИЛИ } \frac{2rh^3E}{3(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ -r(1-\mu) \frac{dv_{0m}}{d\theta} + (1-\mu) \frac{dv_{1m}}{d\theta} - r(1-\mu) w_{0m} + \right. \\
& \left. + (1-\mu) w_{1m} - \gamma_m \mu u_{1m} \right] = \overline{M}_{\theta m}^1, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$v_{2m} = \overline{v_{2m}} \text{ или } \frac{h^3 E}{30(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ -10\gamma_m r \mu u_{0m} - 3\gamma_m r h^2 \mu u_{2m} + \right. \\ \left. + 2r(5+3r^2 h^2)(1-\mu) \left( \frac{dv_{0m}}{d\theta} + w_{0m} \right) - 6r^2 h^2 (1-\mu) \frac{dv_{1m}}{d\theta} + 3r h^2 (1-\mu) \frac{dv_{2m}}{d\theta} + \right. \\ \left. + 2(3r^2 h^2 \mu - 3r^2 h^2 + 5\mu) w_{1m} \right] = \overline{M}_{\theta m}^2,$$

$$w_{0m} = \overline{w_{0m}} \text{ или}$$

$$\frac{-hE}{6(1+\mu)} \left[ r h^2 v_{2m} + 2r^2 h^2 \frac{dw_{1m}}{d\theta} + 2(r^2 h^2 + 3) \left( r v_{0m} - v_{1m} - r \frac{dw_{0m}}{d\theta} \right) \right] = \overline{Q}_{\theta m},$$

$$w_{1m} = \overline{w_{1m}} \text{ или } \frac{-h^3 E}{3(1+\mu)} \left( -r^2 v_{0m} + r v_{1m} - v_{2m} + r^2 \frac{dw_{0m}}{d\theta} - r \frac{dw_{1m}}{d\theta} \right) = \overline{M}_{\theta m}^1.$$

Для решения сформулированной краевой задачи (3.8) – (3.10) сначала находим искомые перемещения обшивки  $u_{km}, v_{km}, w_{lm}, k=0, 1, 2, l=0, 1$  из системы уравнений (3.8) с граничными условиями (3.10). Полученные перемещения содержат неизвестные  $u_{kmi}, w_{lmi}, A_{im}$ , которые определяются решением системы  $u_{kmi} - u_{km}(\theta_j) = 0, w_{lmi} - w_{lm}(\theta_j) = 0, k=0..2, l=0, 1$  и  $M$  уравнений (3.9).

Общее решение системы уравнений (3.8) находится суммированием общего решения однородной и частных решений неоднородной систем.

### 3.4. Общее решение однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Однородные дифференциальные уравнения, соответствующие (3.8), получаются отбрасыванием слагаемых от нагрузок и реакций ребер. Пусть  $\mathbf{N}$  – квадратная матрица размером  $8 \times 8$  коэффициентов уравнений (3.8). Находим решение однородных обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих (3.8), через потенциальную функцию  $F_4(\theta)$ , т.е. в виде

$$\begin{aligned}
u_{0m} &= \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{N})_{1s} F_4, u_{1m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{N})_{2s} F_4, u_{2m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{N})_{3s} F_4, \\
v_{0m} &= \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{N})_{4s} F_4, v_{1m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{N})_{5s} F_4, v_{2m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{N})_{6s} F_4, \\
w_{0m} &= \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{N})_{7s} F_4, w_{1m} = \sum_{s=1}^8 \det(\mathbf{N})_{8s} F_4.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь  $\det(\mathbf{N})_{kl}$  – минор определителя  $\det(\mathbf{N})$ , соответствующий элементу  $(k, l)$  матрицы  $\mathbf{N}$ .

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (3.8), представится в виде

$$\sum_{n=0}^8 L_{2n}^m p^{2n} = 0 \tag{3.12}$$

В уравнении (3.12) для коэффициентов приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
L_0^m &= -4\gamma_m^4 \left[ 45(10 + 11\varepsilon_0^2) + 9\varepsilon_0^2(20 - 5\varepsilon_0^2)\gamma_m^2 + 2\varepsilon_0^2(5 - 3\varepsilon_0^2)\gamma_m^4 \right] \{ 225(1 + \mu) \times \\
&\times (1 - 2\mu)(9 - 18\mu + 3\varepsilon_0^2) + 45\varepsilon_0^2(1 + \mu) [ 6(1 - 2\mu)(6 - 11\mu) + (6 + 25\mu - \\
&- 70\mu^2) \times \varepsilon_0^2 ] \gamma_m^2 + 675\varepsilon_0^2(1 - \mu)(1 - 2\mu)\gamma_m^4 + 3\varepsilon_0^4(1 - \mu)^2 [ 30 - (50\mu - 2)\varepsilon_0^2 ] \times \\
&\times \gamma_m^6 + \varepsilon_0^6(1 - \mu)^3(15 - 14\varepsilon_0^2)\gamma_m^8 \}, \\
L_2^m &= \varepsilon_0^2\gamma_m^2 \left\{ 2700(1 - 2\mu) [ 900(2 - 2\mu - \mu^2) + 30(9 - 120\mu + 7\mu^2)\varepsilon_0^2 ] + \right. \\
&+ 100 [ -4860(1 - 2\mu)(6 - 7\mu - 12\mu^2) + (48033 - 95094\mu - 74925\mu^2 + \\
&+ 165402\mu^3)\varepsilon_0^2 ] \gamma_m^2 + 100 [ 48600(1 - \mu)(1 - 2\mu) + (17658 - 68931\mu + \\
&+ 32967\mu^2 + 52326\mu^3)\varepsilon_0^2 ] \gamma_m^4 + 300\varepsilon_0^2 [ 2700(1 - \mu)(4 - 7\mu) + (153 + 1251\mu - \\
&- 7398\mu^2 + 7236\mu^3)\varepsilon_0^2 ] \gamma_m^6 + \varepsilon_0^4 [ 32400(1 - \mu)(22 - 32\mu + 5\mu^2) + (-175770 + \\
&+ 429660\mu - 381690\mu^2 + 144000\mu^3)\varepsilon_0^2 ] \gamma_m^8 + 6\varepsilon_0^6(1 - \mu) [ 4200(1 - \mu)(4 - 3\mu) -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -(9755-16975\mu+7670\mu^2)\varepsilon_0^2\gamma_m^{10}+24\varepsilon_0^8(1-\mu)^3(200-175\varepsilon_0^2)\gamma_m^{12}\}, \\
L_4^m &= \varepsilon_0^2\{-11700(1-\mu)(1-2\mu)(10+\varepsilon_0^2)+100[24300(1-2\mu)(4-4\mu-\mu^2)- \\
& -(17820-32805\mu-24705\mu^2+22272\mu^3)\varepsilon_0^2]\gamma_m^2+100[-72900(1-\mu)\times \\
& \times(1-2\mu)+(53946-120852\mu+28674\mu^2+33372\mu^3)\varepsilon_0^2]\gamma_m^4+6\varepsilon_0^2[-270000\times \\
& \times(1-\mu)(4-7\mu)+(131850-707400\mu+1619550\mu^2-1122300\mu^3)\varepsilon_0^2]\gamma_m^6- \\
& -3\varepsilon_0^2[27000(1-\mu)(22-32\mu+5\mu^2)+(-156060+739980\mu-1132920\mu^2+ \\
& +570600\mu^3)\varepsilon_0^2]\gamma_m^8+2\varepsilon_0^6[-37800(4-3\mu)(1-\mu)^2+75(481-1253\mu+ \\
& +962\mu^2)(1-\mu)\varepsilon_0^2]\gamma_m^{10}-24\varepsilon_0^8(1-\mu)^3(700-245\varepsilon_0^2)\gamma_m^{12}\}, \\
L_6^m &= \varepsilon_0^2\{-1500(1-\mu)[1620-3240\mu-(270-432\mu)\varepsilon_0^2]+100[48600(1-\mu)\times \\
& \times(1-2\mu)-(57510-146205\mu+57105\mu^2+39690\mu^3)\varepsilon_0^2]\gamma_m^2+100\varepsilon_0^2\times \quad (3.13) \\
& \times[16200(1-\mu)(4-7\mu)-(13257-58104\mu+110835\mu^2-68526\mu^3)\varepsilon_0^2]\gamma_m^4+ \\
& +3\varepsilon_0^4[36000(1-\mu)(22-32\mu+5\mu^2)+10(-19554+120012\mu-202458\mu^2+ \\
& +105240\mu^3)\varepsilon_0^2]\gamma_m^6+6\varepsilon_0^2[21000(4-3\mu)(1-\mu)^2+150(3+182\mu-215\mu^2)\times \\
& \times(1-\mu)\varepsilon_0^2]\gamma_m^8+8\varepsilon_0^8(1-\mu)^3(4200+175\varepsilon_0^2)\gamma_m^{10}\}, \\
L_8^m &= -3\varepsilon_0^2\{150(1-\mu)[2700-5400\mu-(2610-4500\mu)\varepsilon_0^2]+10\varepsilon_0^2[27000\times \\
& \times(1-\mu)(4-7\mu)-(25200-90810\mu+142290\mu^2-78300\mu^3)\varepsilon_0^2]\gamma_m^2+ \\
& +60\varepsilon_0^2[450(1-\mu)(22-32\mu+5\mu^2)+(-1971+13873\mu-24577\mu^2+1293\mu^3)\times \\
& \times\varepsilon_0^2]\gamma_m^4+2\varepsilon_0^6[21000(4-3\mu)(1-\mu)^2+50(1-\mu)(254+203\mu-547\mu^2)\varepsilon_0^2]\gamma_m^6+ \\
& +8\varepsilon_0^8(1-\mu)^3(1750+525\varepsilon_0^2)\gamma_m^8\},
\end{aligned}$$

$$L_{10}^m = \varepsilon_0^4 \left\{ 150(1-\mu) \left[ 4320 - 4560\mu - (900 - 1206\mu + 180\mu^2) \varepsilon_0^2 \right] + 15\varepsilon_0^2 \left[ 2160 \times \right. \right. \\ \times (1-\mu)(22 - 32\mu + 5\mu^2) + (-5670 + 44388\mu - 80118\mu^2 + 42480\mu^3) \varepsilon_0^2 \left. \right] \gamma_m^2 + \\ + 2\varepsilon_0^4 \left[ 37800(4 - 3\mu)(1-\mu)^2 + 15(1-\mu)(2005 + 91\mu - 2546\mu^2) \varepsilon_0^2 \right] \gamma_m^4 + \\ \left. + 24\varepsilon_0^6 (1-\mu)^3 (1400 + 595\varepsilon_0^2) \gamma_m^6 \right\},$$

$$L_{12}^m = -2\varepsilon_0^6 (1-\mu) \left\{ 59400 - 96400\mu + 13500\mu^2 - (450 - 4500\mu + 5400\mu^2) \varepsilon_0^2 + \right. \\ \left. + 15\varepsilon_0^2 \left[ 840(4 - 3\mu)(1-\mu) + (499 - 35\mu - 554\mu^2) \varepsilon_0^2 \right] \gamma_m^2 + \right. \\ \left. + 4\varepsilon_0^4 (1-\mu)^2 (2100 + 875\varepsilon_0^2) \gamma_m^4 \right\},$$

$$L_{14}^m = 60\varepsilon_0^8 (1-\mu)^2 \left[ 60(4 - 3\mu) + 15\mu\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0^2 (40 + 11\varepsilon_0^2) (1-\mu) \right] \gamma_m^2,$$

$$L_{16}^m = -600\varepsilon_0^{10} (1-\mu)^3.$$

Характеристическое уравнение (3.12) имеет корни

$$\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3 \pm iq_3, \pm p_4, \pm p_5.$$

В результате потенциальная функция  $F_4(\theta)$  представится в виде

$$F_4(\theta) = (C_1 \sin q_1 \theta + C_2 \cos q_1 \theta) e^{p_1 \theta} + (C_3 \sin q_1 \theta + C_4 \cos q_1 \theta) e^{-p_1 \theta} + (C_5 \sin q_2 \theta + \\ + C_6 \cos q_2 \theta) e^{p_2 \theta} + (C_7 \sin q_2 \theta + C_8 \cos q_2 \theta) e^{-p_2 \theta} + (C_9 \sin q_3 \theta + C_{10} \cos q_3 \theta) e^{p_3 \theta} + \\ + (C_{11} \sin q_3 \theta + C_{12} \cos q_3 \theta) e^{-p_3 \theta} + C_{13} e^{p_4 \theta} + C_{14} e^{-p_4 \theta} + C_{15} e^{p_5 \theta} + C_{16} e^{-p_5 \theta}.$$

Подставляя  $F_4(\theta)$  в формулы (3.11), получим общее решение однородных дифференциальных уравнений, соответствующих (3.8).

### 3.5. Частные решения неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Для нахождения частных решения неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.8) применим операционный метод, основанный

на преобразовании Лапласа.

Для простоты индекс  $m$  при перемещениях будет опущен.

Обозначим изображения функций  $u_k(\theta), v_k(\theta), w_l(\theta), k = 0, 1, 2, l = 0, 1$  в преобразовании Лапласа через  $U_k(p), V_k(p), W_l(p), k = 0, 1, 2, l = 0, 1$ . По теореме дифференцирования оригинала имеем

$$L\left\{\frac{d}{d\theta}u_k(\theta)\right\} = pU_k(p) - C_{1k0}, L\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}u_k(\theta)\right\} = p^2U_k(p) - pC_{1k0} - C_{1k1},$$

$$L\left\{\frac{d}{d\theta}v_k(\theta)\right\} = pV_k(p) - C_{2k0}, L\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}v_k(\theta)\right\} = p^2V_k(p) - pC_{2k0} - C_{2k1},$$

$$L\left\{\frac{d}{d\theta}w_l(\theta)\right\} = pW_l(p) - C_{3l0}, L\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}w_l(\theta)\right\} = p^2W_l(p) - pC_{3l0} - C_{3l1},$$

где произвольные постоянные  $C$  с нижними числовыми индексами определяются как

$$C_{1k0} = u_k(0), C_{1k1} = \frac{d}{d\xi}u_k(0), C_{2k0} = v_k(0), C_{2k1} = \frac{d}{d\xi}v_k(0),$$

$$C_{3l0} = w_l(0), C_{3l1} = \frac{d}{d\xi}w_l(0), k = 0, 1, 2, l = 0, 1.$$

Пусть на оболочку действует только внутренняя радиальная нагрузка  $q_{33}^-$ .

Переходя от оригиналов к изображениям, дифференциальные уравнения (3.8) преобразуются в алгебраические уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^2 (K^{k1n} - \gamma_m^2 K_{11}^{k1n} + K_{22}^{k1n} p^2) U_n + \gamma_m \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} p V_n + \gamma_m \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} W_{nm} = \\ & = \sum_{n=0}^2 K_{22}^{k1n} (C_{1n1} + C_{1n0} p) + \gamma_m \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} C_{2n0} - \\ & - \sum_{i=1}^M e^{-p\theta_i} \left( -\gamma_m^2 \sum_{n=0}^2 K_{11}^{kci1n} u_{ni} + \gamma_m \sum_{n=0}^1 K_1^{kci3n} w_{ni} - \gamma_m^2 K_{11}^{kci1} A_i \right), \quad k = 1, 2, 3, \\ & -\gamma_m \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} p U_n + \sum_{n=0}^2 (K^{l2n} - \gamma_m^2 K_{11}^{l2n} + K_{22}^{l2n} p^2) V_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{l3n} p W_n = \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
&= -\gamma_m \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} C_{1n0} + \sum_{n=0}^2 K_{22}^{l2n} (C_{2n1} + C_{2n0} p) V_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{l3n} C_{3n0}, \quad l = 4, 5, 6, \\
&-\gamma_m \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} U_n + \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} p V_n + \sum_{n=0}^1 (K^{s3n} - \gamma_m^2 K_{11}^{s3n} + K_{22}^{s3n} p^2) W_n = \\
&= \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} C_{2n0} + \sum_{n=0}^1 K_{22}^{s3n} (C_{3n1} + C_{3n0} p) - K^{sq^-} Q_{33m}^- - \\
&-\sum_{i=1}^M e^{-p\theta_i} \left[ -\gamma_m \sum_{n=0}^2 K_1^{sci1n} u_{ni} + \sum_{n=0}^1 (K^{sci3n} - \gamma_m^2 K_{11}^{sci3n}) w_{ni} - \gamma_m K_1^{sci1} A_i \right], \quad s = 7, 8,
\end{aligned}$$

где  $Q_{33m}^- (p)$  – изображение нагрузки  $q_{33m}^- (\theta)$ .

Граничные условия при  $\theta = 0$  имеют следующий вид:

- для жестко заземленного края

$$C_{1k0} = 0, C_{2k0} = 0, C_{3l0} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1;$$

- для шарнирно опертого края

$$C_{1k0} = 0, C_{3l0} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1,$$

$$C_{200} = \frac{-6h^2 r C_{111} + (3h^2 r^2 - 4) C_{101}}{4\gamma_m}, C_{210} = \frac{-C_{111} + r C_{101}}{\gamma_m},$$

$$C_{220} = \frac{-2C_{121} - 14r C_{111} + 9r^2 C_{101}}{2\gamma_m};$$

- для свободного края

$$C_{101} = \frac{2\gamma_m (3h^2 r C_{210} - 2C_{200})}{4 + 3r^2 h^2}, C_{111} = \frac{\gamma_m [(3h^2 r^2 - 4) C_{210} - 4r C_{200}]}{4 + 3r^2 h^2},$$

$$C_{121} = -\frac{\gamma_m [(3h^2 r^2 + 4) C_{220} + 2r (3h^2 r^2 + 14) C_{210} + 10r^2 C_{200}]}{4 + 3r^2 h^2},$$

$$C_{201} = -\frac{4\mu C_{310} + 4r(1 - \mu) C_{300} + \gamma_m r \mu (5C_{100} - 9C_{110})}{4r(1 - \mu)},$$

$$C_{211} = -\frac{4C_{310} - \gamma_m \mu (4 + 9r) C_{110} + 5\gamma_m r \mu C_{100}}{4(1 - \mu)},$$

$$C_{221} = \frac{\gamma_m \mu \left[ 2h^2 C_{120} + (4h^2 r - 15) C_{110} + 15 C_{100} \right]}{2h^2 (1 - \mu)},$$

$$C_{301} = -\frac{rh^2 C_{220} + 6C_{210} - 6rC_{200}}{6r}, \quad C_{311} = -\frac{(6 + r^2 h^2) C_{220}}{6r}.$$

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (3.8), соответствующее внешним нагрузкам, определяется с помощью алгебраических уравнений (3.14), полагая в них реакции ребер равными нулю и  $C_{1kt} = 0, C_{2kt} = 0, C_{3lt} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, t = 0, 1$ .

Решая полученные уравнения методом Крамера, находим

$$U_k = \frac{Q_{33m}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^6 f_{(1)k}^n p^{2n}}{\Delta_m}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$V_l = \frac{Q_{33m}^-}{E} \frac{p \sum_{n=0}^6 f_{(2)l}^n p^{2n}}{\Delta_m}, \quad l = 0, 1, 2, \quad (3.15)$$

$$W_s = \frac{Q_{33m}^-}{E} \frac{\sum_{n=0}^7 f_{(3)s}^n p^{2n}}{\Delta_m}, \quad s = 1, 2,$$

где  $f_{(1)k}^n, f_{(2)k}^n, f_{(3)l}^n, k = 0, 1, 2, l = 0, 1$  – коэффициенты, зависящие от  $h, R, \mu, m$ , а  $\Delta_m$  – определитель системы (3.14), который представляется как

$$\Delta_m = \sum_{n=0}^8 L_{2n}^m p^{2n}.$$

Здесь коэффициенты  $L_{2n}^m, n = \overline{0, 8}$  определяются выражениями (3.13).

Переходя в выражениях (3.15) от изображений к оригиналам, получим искомое частное решение, соответствующее внешним нагрузкам.

Рассмотрим случай, когда нагрузка  $q_{33m}^-(\xi)$  распределена на внутренней поверхности по закону

$$q_{33m}^-(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \theta_{01}; \\ Q_0 & \text{при } \theta_{01} \leq \xi \leq \theta_{02}; \\ 0 & \text{при } \theta_{02} \leq \xi < \theta_0. \end{cases}$$

Изображение данной нагрузки представится как

$$Q_{33m}^- = Q_0 \frac{e^{-p\theta_{01}} - e^{-p\theta_{02}}}{p}. \quad (3.16)$$

Уравнение  $\Delta_m = 0$  имеет корни  $\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3 \pm iq_3, \pm p_4, \pm p_5$ .

Следовательно,  $\Delta_m$  можно представить в виде

$$\Delta_m = L_{16}^m \left[ (p - p_1)^2 + q_1^2 \right] \left[ (p + p_1)^2 + q_1^2 \right] \left[ (p - p_2)^2 + q_2^2 \right] \left[ (p + p_2)^2 + q_2^2 \right] \left[ (p - p_3)^2 + q_3^2 \right] \left[ (p + p_3)^2 + q_3^2 \right] (p^2 - p_4^2)(p^2 - p_5^2). \quad (3.17)$$

Подставляя (3.16), (3.17) в (3.15), представим полученные выражения в виде суммы дробных функций, как это было сделано во второй главе. В результате перехода от изображений к оригиналам, получим частное решение

$$\begin{aligned} u_l(\theta) = & \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^{k-1} \eta(\theta - \theta_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_l}^{1n}(Z_{1n}(\theta, \theta_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{u_l}^{2n} Z_{2n}(\theta, \theta_{0k}) + \mathcal{G}_{u_l}^{3n} Z_{3n}(\theta, \theta_{0k}) + \mathcal{G}_{u_l}^{4n} Z_{4n}(\theta, \theta_{0k}) \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{U_l}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\theta - \theta_{0k})}{2} + \frac{2\kappa_{U_l}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\theta - \theta_{0k}) \right] \right\} \right], \quad l = 0, 1, 2, \\ v_s(\xi) = & \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^{k-1} \eta(\theta - \theta_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{v_s}^{1n}(Z_{1n}(\theta, \theta_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{v_s}^{2n} Z_{2n}(\theta, \theta_{0k}) + \mathcal{G}_{v_s}^{3n} Z_{3n}(\theta, \theta_{0k}) + \mathcal{G}_{v_s}^{4n} Z_{4n}(\theta, \theta_{0k}) \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{V_s}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\times \left. \left. \left. \left. \left. \text{sh}^2 \frac{p_n (\theta - \theta_{0k})}{2} + \frac{2\kappa_{V_s}^{1n}}{p_n} \text{sh } p_n (\theta - \theta_{0k}) \right] \right] \right] \right] \right], \quad s = 0, 1, 2,$$

$$w_t(\theta) = \frac{Q_0}{2E} \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^{k-1} \eta(\theta - \theta_{0k}) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_t}^{1n} (Z_{1n}(\theta, \theta_{0k}) - 1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{w_t}^{2n} Z_{2n}(\theta, \theta_{0k}) + \mathcal{G}_{w_t}^{3n} Z_{3n}(\theta, \theta_{0k}) + \mathcal{G}_{w_t}^{4n} Z_{4n}(\theta, \theta_{0k}) \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{W_t}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \text{sh}^2 \frac{p_n (\theta - \theta_{0k})}{2} + \frac{2\kappa_{W_t}^{1n}}{p_n} \text{sh } p_n (\theta - \theta_{0k}) \right] \right] \right] \right], \quad t = 0, 1.$$

Здесь коэффициенты  $Z$ ,  $\kappa$ ,  $\mathcal{G}$  с буквенными и цифровыми индексами определяются формулами, аналогичными (2.29), (2.33) во второй главе.

Отметим, что с помощью выражений (3.18) можно получить частное решение для ряда случаев нагружения. Положив в (3.18)  $\theta_{01} = 0$ ,  $\theta_{02} = \theta_0$ , получим решение для нагрузки, равномерно действующей по всей поверхности оболочки. Полагая, что величина  $(\xi_{02} - \xi_{01})$  бесконечно уменьшается и значение  $Q_0$  увеличивается так, что произведение  $RQ_0(\theta_{02} - \theta_{01})$  становится конечным и равным  $P$ , получим решение, соответствующее действию сосредоточенной силы  $P$  на оболочку в точке  $\theta = \theta_{01}$ .

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (3.8), соответствующее действию реакций ребер, определяется с помощью алгебраических уравнений (3.14) в предположении, что  $Q_{33m}^-(p) = 0$  и  $C_{1ki} = 0, C_{2ki} = 0, C_{3li} = 0, k = \overline{0, 2}, l = 0, 1, i = 0, 1$ .

Решая полученные уравнения методом Крамера, получим

$$U_{li} = \frac{E_i}{E} \frac{e^{-\theta_i p} \sum_{n=0}^7 g_{(1)li}^n p^{2n}}{\Delta_m}, \quad l = 0, 1, 2,$$

$$V_{si} = \frac{E_i}{E} \frac{pe^{-\theta_i p} \sum_{n=0}^6 g_{(2)si}^n p^{2n}}{\Delta_m}, \quad s = 0, 1, 2, \quad (3.19)$$

$$W_{ti} = \frac{E_i}{E} \frac{e^{-\theta_i p} \sum_{n=0}^7 g_{(3)ti}^n p^{2n}}{\Delta_m}, \quad t = 0, 1, i = \overline{1, M},$$

где  $g_{(1)li}^n, g_{(2)si}^n, g_{(3)ti}^n$  – коэффициенты, зависящие от  $h, R, \mu, m, H_i, a_i, \mu_i, u_{li}, w_{ti}, A_i$ .

С помощью (3.17) представим (3.19) в виде суммы дробных функций. Переходя от полученных изображений к оригиналам, находим частное решение, соответствующее реакциям ребер

$$u_{li}(\theta) = \frac{E_i}{2E} \eta(\theta - \theta_i) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{u_{li}}^{1n} (Z_{1n}(\theta, \theta_i) - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{G}_{u_{li}}^{2n} Z_{2n}(\theta, \theta_i) + \mathcal{G}_{u_{li}}^{3n} Z_{3n}(\theta, \theta_i) + \mathcal{G}_{u_{li}}^{4n} Z_{4n}(\theta, \theta_i) \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{u_{li}}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\theta - \theta_i)}{2} + \frac{2\kappa_{u_{li}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\theta - \theta_i) \right] \right\}, \quad l = 0, 1, 2,$$

$$v_{si}(\theta) = \frac{E_i}{2E} \eta(\theta - \theta_i) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{v_{si}}^{1n} (Z_{1n}(\theta, \theta_i) - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{G}_{v_{si}}^{2n} Z_{2n}(\theta, \theta_i) + \mathcal{G}_{v_{si}}^{3n} Z_{3n}(\theta, \theta_i) + \mathcal{G}_{v_{si}}^{4n} Z_{4n}(\theta, \theta_i) \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{v_{si}}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\theta - \theta_i)}{2} + \frac{2\kappa_{v_{si}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\theta - \theta_i) \right] \right\}, \quad s = 0, 1, 2,$$

$$w_{ti}(\theta) = \frac{E_i}{2E} \eta(\theta - \theta_i) \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{p_n q_n (p_n^2 + q_n^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{w_{ti}}^{1n} (Z_{1n}(\theta, \theta_i) - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{G}_{w_{ti}}^{2n} Z_{2n}(\theta, \theta_i) + \mathcal{G}_{w_{ti}}^{3n} Z_{3n}(\theta, \theta_i) + \mathcal{G}_{w_{ti}}^{4n} Z_{4n}(\theta, \theta_i) \right] + \sum_{n=4}^5 \left[ \frac{4\kappa_{w_{ti}}^{0n}}{p_n^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{sh}^2 \frac{p_n(\theta - \theta_i)}{2} + \frac{2\kappa_{w_{ti}}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n(\theta - \theta_i) \right] \right\},$$



$$\times \left. \left. \left. \left. \operatorname{sh}^2 \frac{p_n (\theta - \theta_i)}{2} + \frac{2\kappa_{W_i}^{1n}}{p_n} \operatorname{sh} p_n (\theta - \theta_i) \right] \right] \right] \right\}, \quad t = 0, 1.$$

Здесь коэффициенты  $Z$ ,  $\kappa$ ,  $\mathcal{G}$  с буквенными и цифровыми индексами определяются формулами, аналогичными (2.29), (2.33) во второй главе.

### 3.6. Результаты расчетов и параметрического анализа

В данном параграфе приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами. Расчет проведен в пакете Maple 2018 способом, описанным во второй главе для подкрепленных кольцевыми ребрами оболочек. Алгоритм решения приведен на рисунке 2.1.

Рассматривается оболочка, подкрепленная внешним ребром. Механические характеристики ребра и обшивки одинаковы. Два края  $\xi = 0$  и  $\xi = L/R$  оболочки шарнирно оперты, а два края  $\theta = 0$  и  $\theta = \theta_0$  жестко защемлены. Оболочка имеет следующие параметры: радиус обшивки  $R = 0,5$  м; длина оболочки  $L = 6R = 3$  м; толщина обшивки  $2h = R/25 = 0,02$  м; коэффициент Пуассона  $\mu_1 = \mu = 0,3$ ; толщина ребер  $a_i = h$ . Продольное ребро прикрепляется в середине оболочки ( $\theta_1 = \theta_0/2$ ).

Расчет проведен для локальной нагрузки, распределенной на внутренней поверхности оболочки по закону

$$q_{33}^-(\xi, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \theta_{01}; \\ Q_0 \sin \frac{\pi R}{L} \xi & \text{при } \theta_{01} \leq \theta \leq \theta_{02}; \\ 0 & \text{при } \theta_{02} \leq \theta < \theta_0 = 1. \end{cases} \quad (3.20)$$

На рисунках 3.1 – 3.3 показаны результаты расчета относительных максимальных нормальных напряжений при  $\theta_{01} = \theta_0/3$ ,  $\theta_{02} = 2\theta_0/3$  и различных полувысотах ребра  $H$ .

На рисунке 3.4 приведены графики нормальных напряжений в случае, когда место крепления ребер с обшивкой находится вне зоны нагружения. Расчет проведен при  $\theta_{01} = \theta_0/8$ ,  $\theta_{02} = \theta_0/4$  (рисунок 3.4а) и  $\theta_{01} = 3\theta_0/10$ ,  $\theta_{02} = 2\theta_0/5$  (рисунок 3.4б).

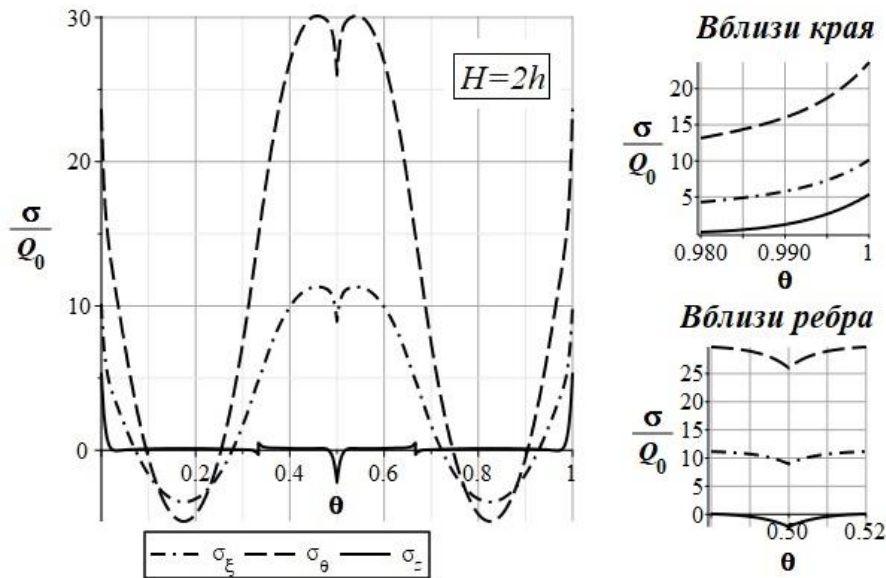


Рисунок 3.1 – Нормальные напряжения обшивки по ширине оболочки при

$$\xi = \xi_0/2$$

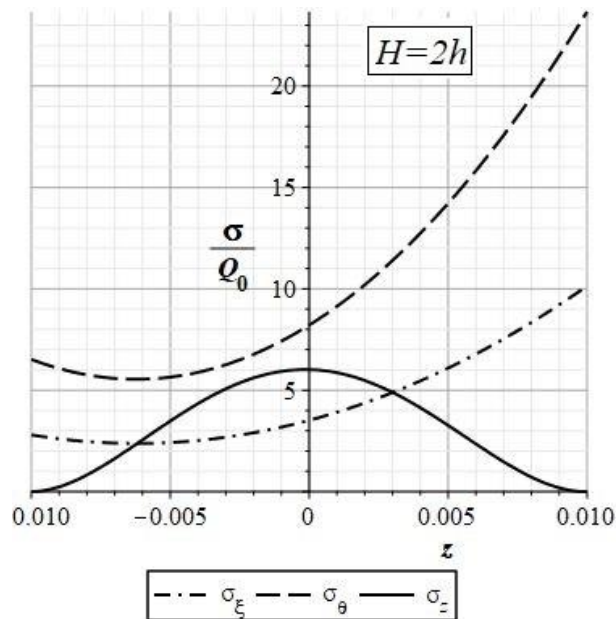


Рисунок 3.2 – Нормальные напряжения обшивки по толщине оболочки при  $\theta = 0$

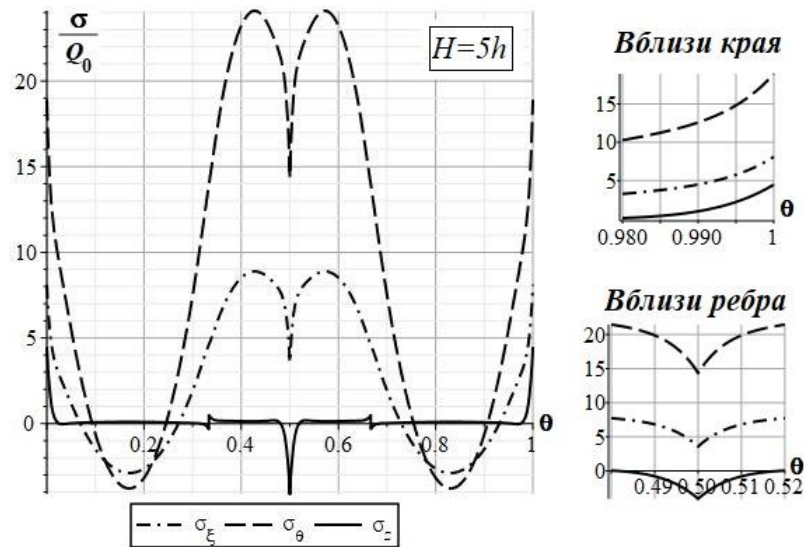


Рисунок 3.3 – Нормальные напряжения обшивки по ширине оболочки

Из анализа графиков на рисунках 3.1 – 3.3 можно установить, что высота ребра существенно влияет на величины НДС обшивки; в зонах заземления оболочки и подкрепления ребрами поперечные нормальные напряжения  $\sigma_z$  имеют один порядок с величинами максимальных окружных  $\sigma_\theta$  и продольных  $\sigma_\xi$  напряжений.

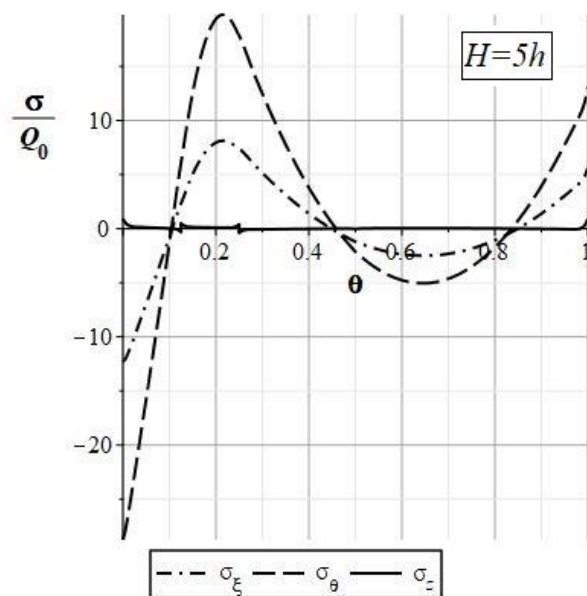


Рисунок 3.4а

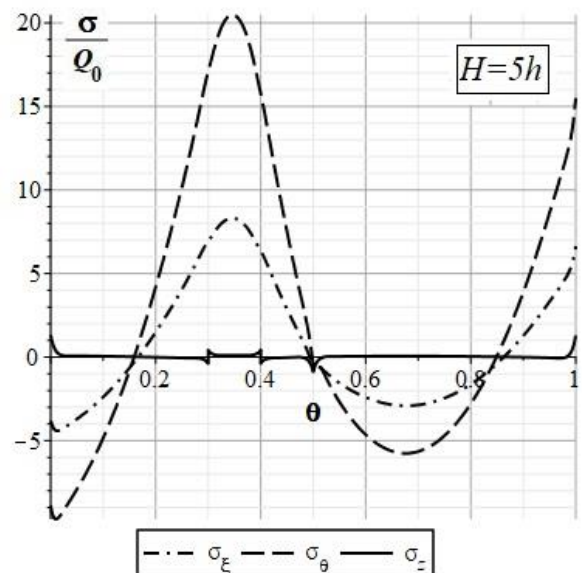


Рисунок 3.4б

Рисунок 3.4 – Нормальные напряжения обшивки при креплении ребер вне зоны нагружения

Анализируя графики на рисунках 3.3 – 3.4, можно установить, что зона нагружения существенно влияет на локальное НДС обшивки вблизи крепления ребер. Когда крепление ребер находится в зоне нагружения, поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют один порядок с величинами максимальных окружных и продольных напряжений.

Для анализа влияния высоты ребер на величины нормальных напряжений проведен расчет при  $H = 2h$ ,  $H = 4h$ ,  $H = 8h$ . Оболочка находится под действием нагрузки (3.20) с параметрами  $\theta_{01} = \theta_0/3$ ,  $\theta_{02} = 2\theta_0/3$ . Результаты расчета представлены на рисунках 3.5 – 3.7, где штриховые линии соответствуют случаю  $H = 2h$ , штрихпунктирные –  $H = 4h$ , а сплошные –  $H = 8h$ .

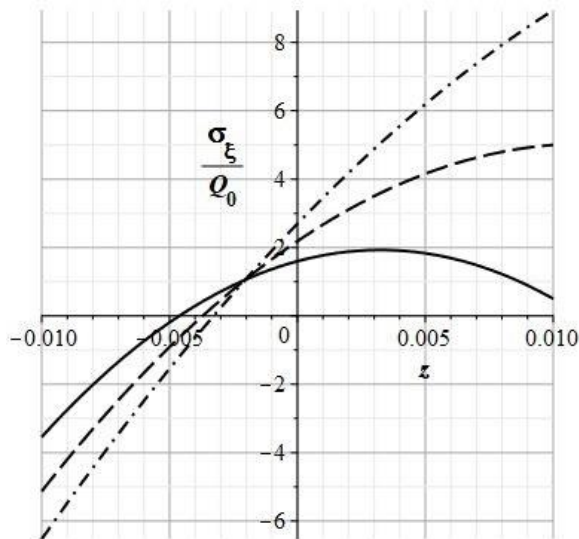


Рисунок 3.5 – Продольные нормальные напряжения при  $\theta = \theta_1$

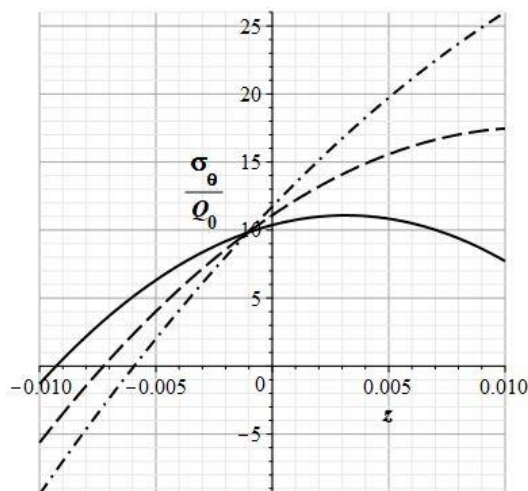


Рисунок 3.6 – Тангенциальные нормальные напряжения при  $\theta = \theta_1$

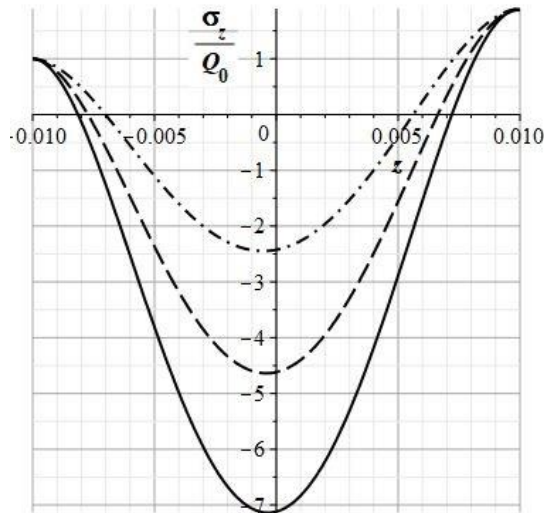


Рисунок 3.7 – Поперечные нормальные напряжения при  $\theta = \theta_1$

Графики на рисунках 3.5 – 3.6 показывают, что с ростом высоты ребер, продольные и тангенциальные нормальные напряжения существенно убывают. Однако графики на рисунке 3.7 показывают, что при этом поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, увеличиваются пропорционально высоте ребер. Это доказывает необходимость применения уточненной теории при расчете НДС оболочки, подкрепленной продольными ребрами.

### 3.7. Выводы по третьей главе

В главе 3 приводятся следующие результаты:

1. На основе уточненной теории получены двумерные уравнения равновесия и соответствующие граничные условия в перемещениях для круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами.

2. Построена конструктивно-ортотропная расчетная модель напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами.

2. С помощью тригонометрических рядов по продольной координате уравнения равновесия и граничные условия приведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

3. С помощью преобразования Лапласа получены аналитические решения сформулированной краевой задачи.

4. Приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС оболочки с помощью программного пакета Maple. Показано, что наличие ребер в зонах нагружения оболочки, а также их геометрические параметры существенно влияют на НДС обшивки, особенно в части поперечных нормальных напряжений.

## ГЛАВА 4. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ ЗАКРЕПЛЕННОГО КРАЯ

В данной главе проведен анализ влияния податливости закрепленного края путем решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством. На основании решения Фламана-Буссинеска с помощью функций влияния получены модифицированные граничные условия. Расчет проводится для цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами.

### 4.1. Напряженное состояние типа «погранслои»

Рассматривается оболочка под действием осесимметричной нагрузки. При анализе корней характеристического уравнения (2.16) установлено, что его корни разделяются на две группы: малые  $\pm p_1 \pm iq_1$  и большие  $\pm p_2 \pm iq_2$  корни. Асимптотически малые корням соответствуют основные НДС, которые приближенно определяются по классической теории. Асимптотически большим корням  $\pm p_2 \pm iq_2$  соответствуют напряженные состояния оболочки, которые назовем дополнительными краевыми эффектами типа «погранслои» - самоуравновешенными быстро затухающими при удалении от края напряженными состояниями.

Для сравнения результатов расчета НДС оболочки по уточненной и классической теориям в таблице 4.1 приведены значения корней характеристического уравнения при различных значениях относительной полутолщины  $\varepsilon_0 = h/R$ .

В таблице 4.1 и далее на рисунках аббревиатура «класс.» соответствует результатам, полученным по классической теории [36], «уточ.» – результатам, полученным по уточненной теории. Расчет проведен при значении коэффициента Пуассона  $\mu = 0,3$ .

Таблица 4.1 – Значения корней характеристического уравнения по уточненной и классической теориям

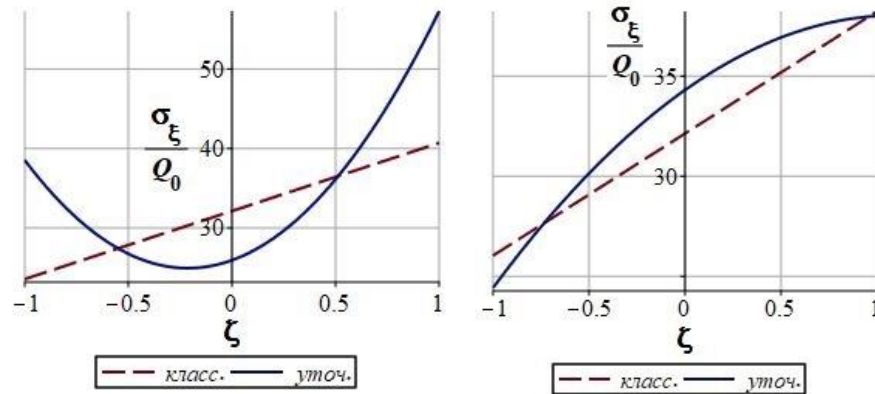
–	$\varepsilon_0$	1/40	1/60	1/80	1/100	1/200
$p_1$	уточ. теория	5,499	6,720	7,752	8,661	12,233
	класс. теория	5,749	7,040	8,130	9,089	12,854
$q_1$	уточ. теория	5,431	6,665	7,704	8,618	12,203
	класс. теория	5,749	7,040	8,130	9,089	12,854
$p_2$	уточ. теория	90,988	136,475	181,963	227,453	454,900
$q_2$	уточ. теория	37,686	56,528	75,371	94,213	188,425

Из таблицы 4.1 следует, что малые корни характеристического уравнения, определяющие основное (внутреннее) напряженное состояние по уточненной и классической теориям практически совпадают. Большие корни характеристического уравнения, определяемые только по уточненной теории, соответствуют дополнительным напряженным состояниям типа «погранслои», возникающим в узких краевых зонах оболочек, т.е. вблизи креплений, подкрепляющих элементов и др.

Для оценки напряженного состояния оболочки на краю рассмотрим оболочку, нагруженную осесимметричным давлением на ее внутренней поверхности. Оболочка имеет следующие параметры: радиус обшивки  $R = 0,5$  м; длина оболочки  $l = 6R = 3$  м; толщина обшивки  $2h = R/40 = 0,0125$  м; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ; количество ребер  $N = 2$ , полувысота ребер  $h_j = 3h$ , толщина ребер  $b = h$ .

Графики изменения напряженного состояния по толщине подкрепленной оболочки на жестко защемленном краю и на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$  от края представлены на рисунках 4.1 – 4.4. На этих рисунках сплошные линии соответствуют графикам напряжений, определяемым по уточненной теории, а штриховые – по классической теории.

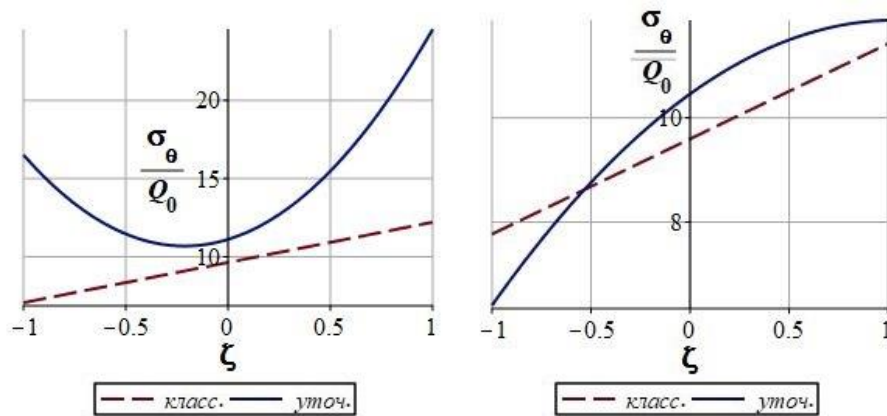




а)

б)

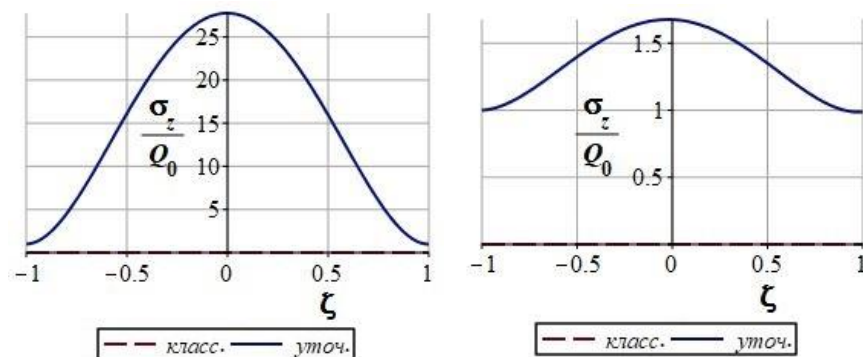
Рисунок 4.1 – Распределение продольных нормальных напряжений  $\sigma_\xi$  по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$



а)

б)

Рисунок 4.2 – Распределение тангенциальных нормальных напряжений  $\sigma_\theta$  по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$



а)

б)

Рисунок 4.3 – Распределение поперечных нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$

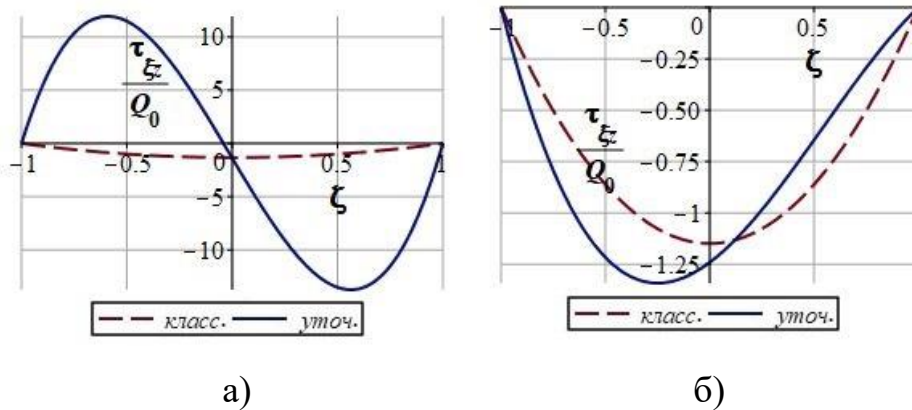


Рисунок 4.4 – Распределение поперечных касательных напряжений  $\sigma_{\xi z}$  по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$

Анализируя результаты параметрических расчетов при осесимметричной нагрузке, можно установить, что дополнительное самоуравновешенное НДС, уточняющее классическую теорию, вносит существенный вклад в общее напряженное состояние: например, максимальные изгибные напряжения уточняются на 40%, поперечные касательные напряжения в 2 раза превосходят соответствующие напряжения классической теории и поперечные нормальные напряжения составляют 48% от максимальных изгибных напряжений.

Далее рассмотрим случай, когда на оболочку действует внутреннее давление, распределенное по закону  $q = Q_0 \xi \cos(6\theta)$ . Результаты расчета напряженного состояния обшивки на жестко защемленном краю и на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$  от края показаны на рисунках 4.5 – 4.8.

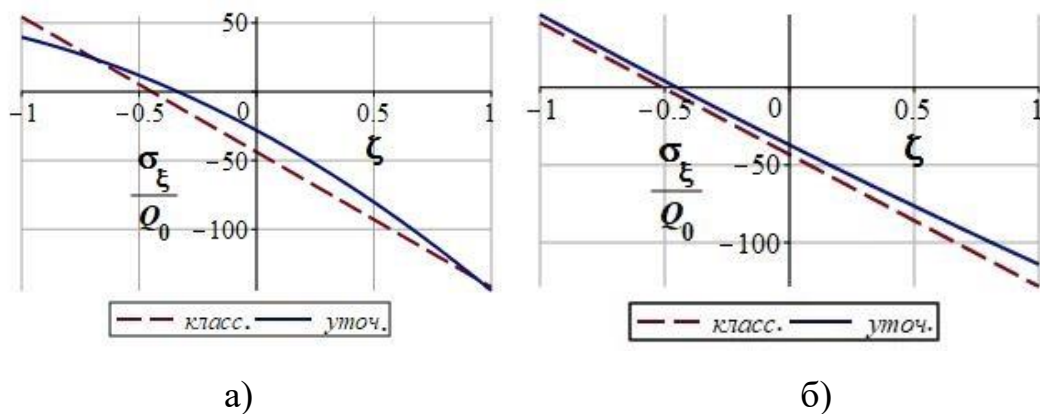


Рисунок 4.5 – Распределение продольных нормальных напряжений  $\sigma_{\xi}$  по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$

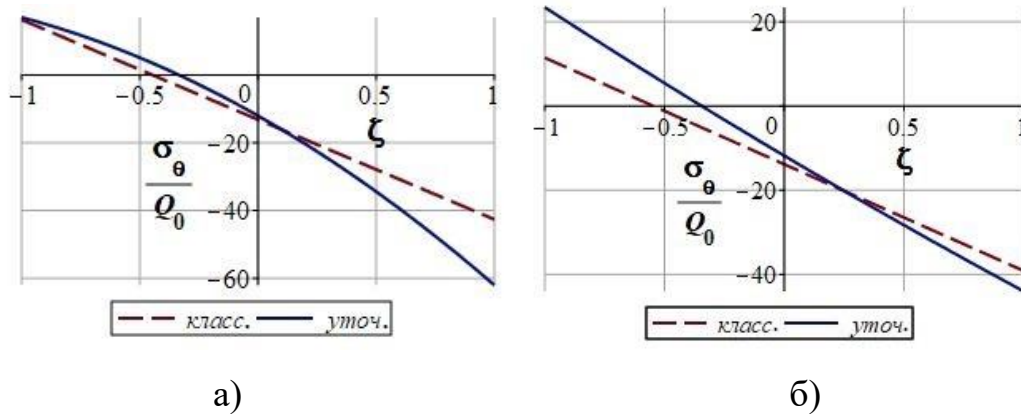


Рисунок 4.6 – Распределение тангенциальных нормальных напряжений  $\sigma_\theta$  по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$

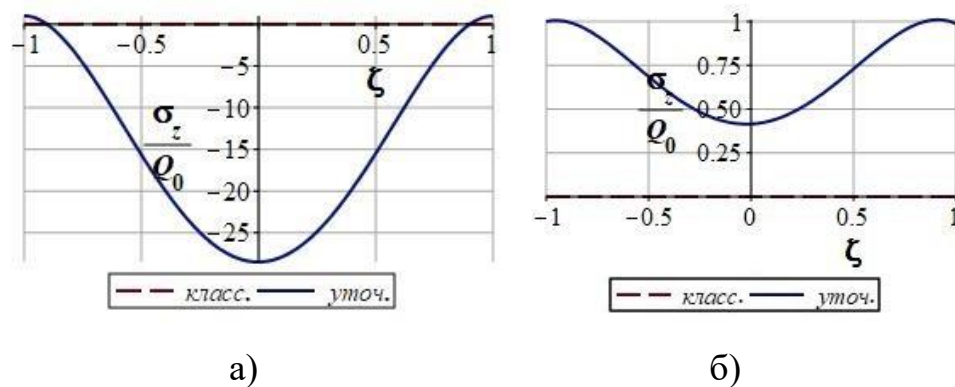


Рисунок 4.7 – Распределение поперечных нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$

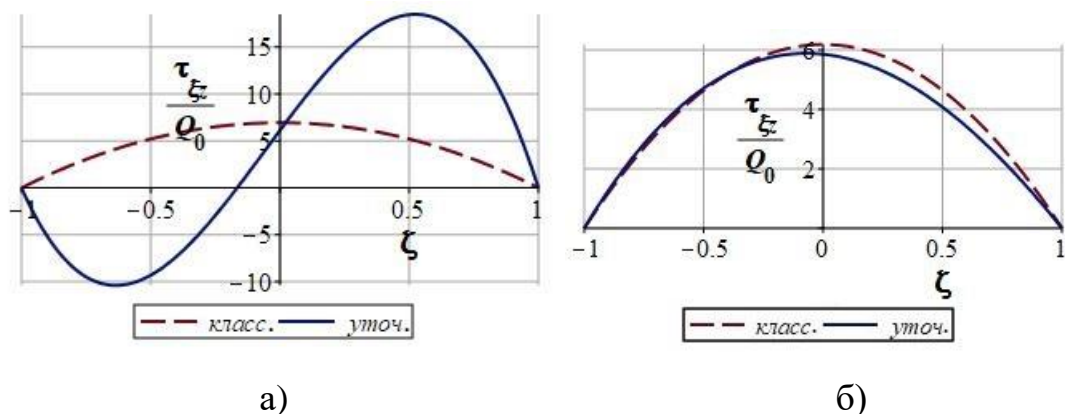


Рисунок 4.8 – Распределение поперечных нормальных напряжений  $\sigma_{\xi z}$  по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии  $\xi = \varepsilon_0$

Графики на рисунках 4.1 – 4.8 показывают наличие дополнительных напряжений на защемленном краю при расчете по уточненной теории.

Максимальное значение дополнительных напряжений для продольных нормальных напряжений  $\sigma_{\xi}$  составляет от 36% до 40%, а для тангенциальных – от 45% до 100% по сравнению с классической теорией. Поперечные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют один порядок с величинами основных напряжений.

Из полученных результатов можно установить, что для уточнения НДС оболочки следует на напряженное состояние оболочки, определенное по классической теории, наложить первое приближение напряженного состояния «погранслоя» краевой плоской деформации.

Как показано в работе Фирсанова В.В. [110], напряженное состояние «погранслоя» в основном определяется напряжениями  $\sigma_{\xi n}, \sigma_{\theta n}, \sigma_{zn}, \tau_{\xi zn}$ . Следовательно, напряженное состояние краевой плоской деформации можно представить в вид

$$\sigma_{\xi n} = \sigma_{\xi y} - \sigma_{\xi k}, \quad \sigma_{\theta n} = \sigma_{\theta y} - \sigma_{\theta k}, \quad \sigma_{zn} = \sigma_{zy}, \quad \tau_{\xi zn} = \tau_{\xi zy}. \quad (4.1)$$

Здесь индекс  $y$  обозначает напряженное состояние, определенное по уточненной теории,  $k$  – по классической теории, а  $n$  – напряженное состояние «погранслоя».

Уточненная теория соответствует значению  $K = 2$  в выражениях (1.11), а классическая теория – значению  $K = 1$ .

Выражения для напряженного состояния, соответствующего уточненной теории, определяются формулами (1.13).

Подставляя разложения (1.11) с учетом значения  $K = 1$  в формулы (1.1) получим выражения для напряжений, соответствующих классической теории

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi k} = & r \left( A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + A_{12} w_0 \right) + \\ & + r \left( A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - r A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - r A_{12} w_0 + A_{12} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\kappa} = r \left( A_{21} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + A_{22} w_0 \right) + \\ + r \left( A_{21} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - r A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - r A_{22} w_0 + A_{22} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) z. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из соотношений (1.13), (4.1), (4.2) находим компоненты напряженного состояния краевой плоской деформации

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi n} = A_{13} w_1 + r A_{12} w_1 z + \left( \frac{r A_{11}}{2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{r A_{12}}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} - r^2 A_{12} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + r^3 A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + r^3 A_{12} w_0 - r^2 A_{12} w_1 \right) z^2, \\ \sigma_{\theta n} = A_{23} w_1 + r A_{22} w_1 z + \left( \frac{r A_{21}}{2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{r A_{22}}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} - r^2 A_{22} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + r^3 A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + r^3 A_{22} w_0 - r^2 A_{22} w_1 \right) z^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zn} = \left[ A_{31} r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + A_{32} r \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + A_{33} w_1 \right] + \left[ A_{31} r \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + A_{32} r \left( -r \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \right. \right. \\ \left. \left. - r w_0 + w_1 \right) \right] z + \left[ A_{31} r \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + A_{32} r \left( 2r^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - 2r \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2r^2 w_0 - 2r w_1 \right) \right] \frac{z^2}{2}, \\ \tau_{\xi zn} = A_{55} \left( r \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + u_1 \right) + A_{55} \left( r \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + u_2 \right) z. \end{aligned}$$

#### 4.2. Напряженно-деформированное состояние оболочки вблизи упруго закрепленного края

Уравнения равновесия (2.1) и граничные условия (2.2), (2.3) выведены в предположении абсолютно жесткого защемления края. На самом деле материал в зоне соединения обладает определенными упругими свойствами. Для учета податливости закрепленного края полагаем, что оболочка крепится к упругому полупространству, простирающемуся в направлении  $\xi < 0$  и обладающему иными упругими характеристиками изотропного материала.

На полупространство со стороны оболочки по плоскости контакта действуют нормальные и касательные усилия [109, 110], определяемые формулами (4.3) при  $\xi = 0$ .

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi n}^0 &= \varphi(\theta) \sum_{i=1}^3 F_{1i}(z) \psi_{1i}(\xi) \Big|_{\xi=0}, \\ \sigma_{\xi zn}^0 &= \varphi(\theta) \sum_{i=1}^2 F_{2i}(z) \psi_{2i}(\xi) \Big|_{\xi=0},\end{aligned}\tag{4.4}$$

где в соответствии с разложениями (2.4), (2.5) функция  $\varphi(\theta)$  принимает значения  $\cos m\theta$  либо  $\sin m\theta$ ,

$$\begin{aligned}F_{11}(z) = F_{21}(z) &= 1, \quad F_{12}(z) = F_{22}(z) = z, \quad F_{13}(z) = z^2, \\ \psi_{11}(\xi) = \psi_{12}(\xi) &= -\frac{rE\mu w_1}{(2\mu-1)(1+\mu)}, \\ \psi_{13}(\xi) &= \frac{Er}{2(2\mu-1)(1+\mu)} \left[ \mu(2r^2v_0 - 2rv_1 + v_2) - 2\mu r(w_0r - w_1) - (1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right], \\ \psi_{21}(\xi) &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left( u_1 + r \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right), \quad \psi_{22}(\xi) = -\frac{r\mu E w_1}{(2\mu-1)(1+\mu)}.\end{aligned}$$

Если для определения напряжений и перемещений в полупространстве использовать решение задачи Фламана-Буссинеска [106], переходя при этом с помощью функций влияния от нагружения сосредоточенными силами к нагружению распределенной нагрузкой (4.4) и выполняя замену  $z = h\zeta$ , то для контактных перемещений будем иметь [109]

$$\begin{aligned}u^0 &= \frac{\varphi(\theta)}{\pi E_0} \sum_{i=1}^3 \left[ \psi_{1i}(\xi) \Big|_{\xi=0} \cdot \int_{-1-\zeta}^{1-\zeta} F_{1i}(\zeta) \beta_1(\zeta) d\zeta \right], \\ w^0 &= \frac{\varphi(\theta)}{\pi E_0} \sum_{i=1}^2 \left[ \psi_{2i}(\xi) \Big|_{\xi=0} \cdot \int_{-1-\zeta}^{1-\zeta} F_{2i}(\zeta) \beta_2(\zeta) d\zeta \right], \\ \beta_1(\zeta) &= \ln \frac{\alpha_1^2}{\zeta^2} - (1 + \mu_0), \quad \beta_2(\zeta) = \ln \frac{\alpha_2^2}{\zeta^2},\end{aligned}\tag{4.5}$$

где  $E_0, \mu_0$  – упругие характеристики полупространства;  $\alpha_1, \alpha_2$  – расстояния от начала координат таких точек, лежащих на оси  $\xi$ , в которых перемещения (4.5) пренебрежимо малы. Анализ характера затухания перемещений (4.5) позволяет для практических расчетов полагать  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

В результате влияния податливости закрепленного края получим новую краевую задачу, в которой система дифференциальных уравнений (2.1) остается прежней, а граничные условия (2.2) на краю  $\xi = 0$  представляются в модифицированной форме:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{E\varphi(\theta)}{9\pi E_0(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ -h^2 r \mu (1+3\mu_0) \left( 2r^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + 2r^2 w_0 - 2r \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\mu (3h^2 r^2 \mu_0 + h^2 r^2 - 9\mu_0 + 9) w_1 - rh^2 (1+3\mu_0)(1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}, \\
 u_1 &= \frac{2rE\mu(1+\mu_0)\varphi(\theta)}{\pi E_0(1-2\mu)(1+\mu)} w_1 \Big|_{\xi=0}, \\
 u_2 &= \frac{E\varphi(\theta)}{\pi h^2 E_0(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ -rh^2 \mu (2+\mu_0) \left( 2r^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + 2r^2 w_0 - 2r \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\mu (r^2 h^2 \mu_0 + 2r^2 h^2 - 1) w_1 - rh^2 (2+\mu_0)(1-\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}, \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

$$v_0 = v_1 = v_2 = 0,$$

$$w_0 = \frac{2E\varphi(\theta)}{\pi E_0(1+\mu)} \left( u_1 + r \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0},$$

$$w_1 = 0.$$

Решение сформулированной краевой задачи (2.1), (4.6) находится операционным методом, основанным на преобразовании Лапласа. При этом граничные условия на краю  $\xi = 0$  для жестко защемленного края (4.6) представляются в виде

$$C_{100} = -\frac{rh^2E(1+3\mu_0)}{9\pi^2E_0(1-2\mu)(1+\mu)^2} \left[ \pi(1-\mu^2)C_{121} + 4\mu r^3 \frac{E}{E_0} C_{301} \right], \quad C_{100} = 0,$$

$$C_{120} = \frac{2rE(2+\mu_0)}{\pi^2E_0(1-2\mu)(1+\mu)^2} \left[ \pi(1-\mu^2)C_{121} + 4\mu r^3 \frac{E}{E_0} C_{301} \right],$$

$$C_{200} = C_{210} = C_{220} = 0, \quad C_{300} = \frac{2rE}{\pi E_0(1+\mu)} C_{301}, \quad C_{310} = 0.$$

Повторяя процесс решения, который был проделан во второй главе, находим новое напряженное состояние оболочки с учетом податливости закрепленного края.

### 4.3. Параметрический анализ влияния податливости закрепленного края

Для оценки влияния податливости закрепленного края оболочки вновь обратимся к рассмотрению примера в параграфе 4.1 при нагрузке  $q = Q_0\xi$ , считая для закрепленного края  $\mu_0 = 0,3$ .

В результате расчета получены выражения напряжений, зависящие от величины  $L_0 = E/E_0$ . Изменяя  $L_0$  в интервале, характерном для металлов, можно построить кривые зависимости отношений напряжений от параметра  $L_0$  для случая упруго защемленного края и абсолютно жестко защемленного края.

Такие кривые представлены на рисунке 4.9, где продольное и окружное напряжения соответствуют точке с координатами  $\xi = 0, \theta = 0, z = h$ , а поперечное напряжение –  $\xi = 0, \theta = 0, z = 0$ .

Здесь графики отношений нормальных напряжений  $\sigma_{\xi}^{\text{упруго}} / \sigma_{\xi}^{\text{жестко}}$ ,  $\sigma_{\theta}^{\text{упруго}} / \sigma_{\theta}^{\text{жестко}}$ ,  $\sigma_z^{\text{упруго}} / \sigma_z^{\text{жестко}}$  обозначены цифрами 1, 2, 3.



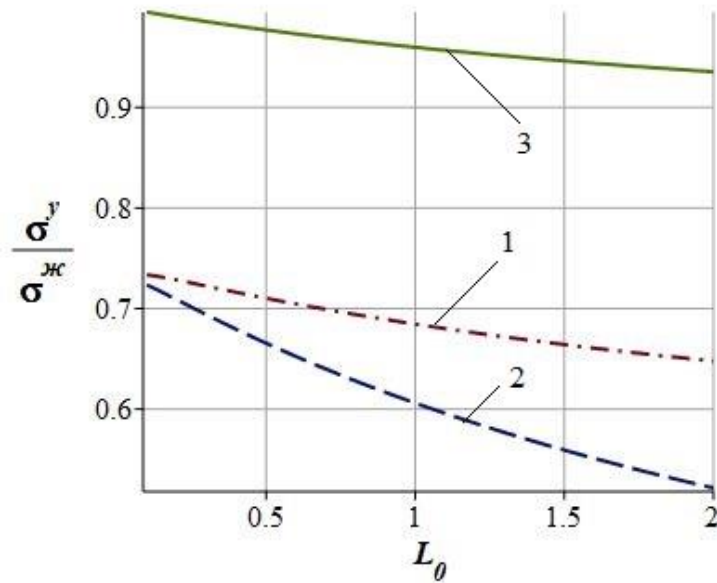


Рисунок 4.9 – Графики влияния податливости закрепленного края на нормальные напряжения оболочки

Влияние податливости закрепленного края на величины нормальных напряжений оболочки показаны на рисунках 4.10 – 4.12, где штрихпунктирными линиями обозначены графики напряжений на краю без учета податливости закрепленного края, штриховыми и сплошными – с учетом податливости при  $E_0 = 10E$  и  $E_0 = 0,5E$  соответственно.

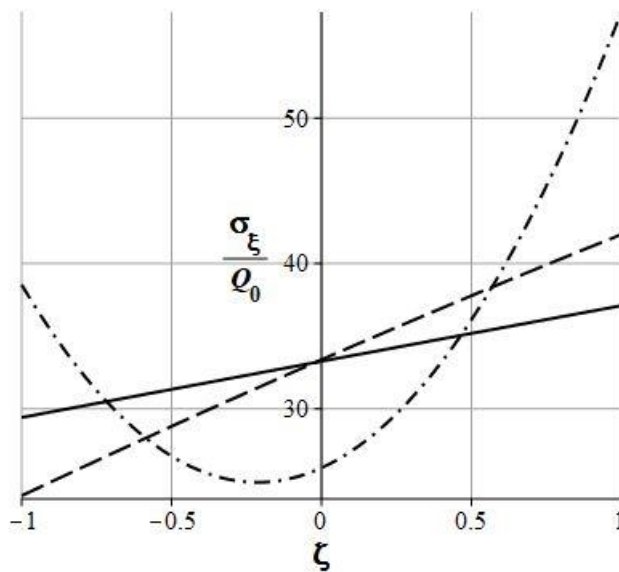


Рисунок 4.10 – Распределение продольных нормальных напряжений  $\sigma_\xi$  по толщине на краю оболочки

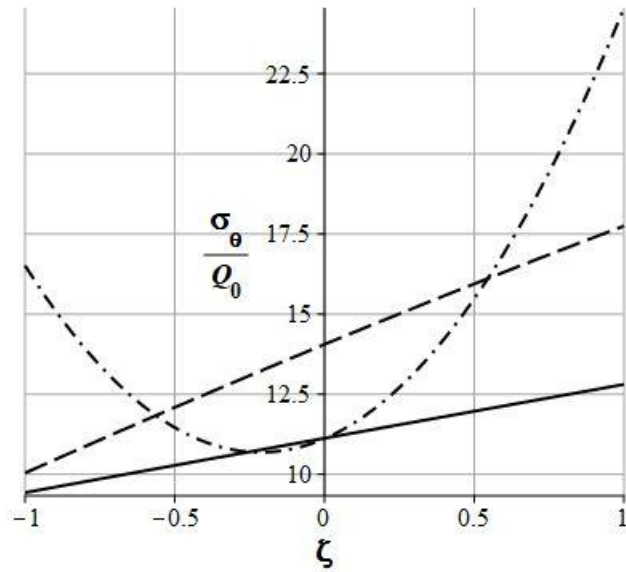


Рисунок 4.11 – Распределение тангенциальных нормальных напряжений  $\sigma_\theta$  по толщине на краю оболочки

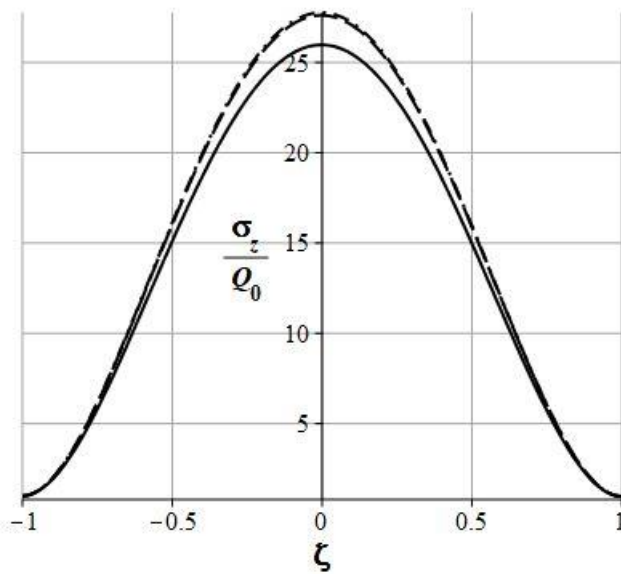


Рисунок 4.12 – Распределение поперечных нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине на краю оболочки

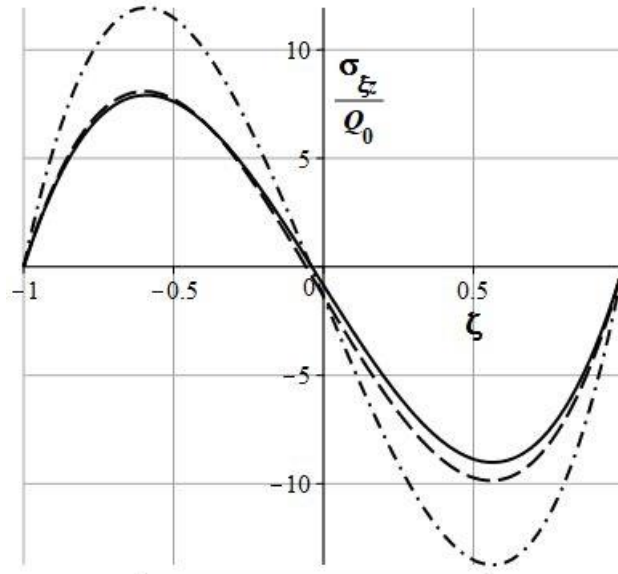


Рисунок 4.13 – Распределение поперечных нормальных напряжений  $\sigma_{\xi\xi}$  по толщине на краю оболочки

Анализ этих кривых показывает, что с убыванием модуля упругости закрепленного края компоненты нормальных напряжений оболочки на этом краю уменьшаются. При одинаковых жесткостях ( $L_0 = E/E_0 = 1$ ) стыкуемых элементов, максимальные продольное, окружное и поперечное напряжения уменьшаются на 31%, 39% и 4% соответственно по сравнению со случаем жестко защемленного края.

#### 4.3. Выводы по четвертой главе.

1. Проведено исследование НДС подкрепленной цилиндрической оболочки вблизи жестко закрепленного края по уточненной теории. Показано, что при расчете по уточненной теории имеют место быстро затухающие дополнительные краевые напряженные состояния типа «погранслои», которые вносят существенный вклад в общее напряженное состояние оболочки. Например, при осесимметричной нагрузке, максимальные изгибные напряжения уточняются на 40%, поперечные касательные напряжения в 2 раза превосходят соответствующие напряжения классической теории и поперечные нормальные напряжения составляют 48% от максимальных изгибных напряжений.

2. Из общего напряженного состояния цилиндрической оболочки выделено напряженное состояние «погранслои», для компонентов которого получены расчетные формулы.

3. Для учета податливости упруго закрепленного края цилиндрической оболочки рассмотрена задача о ее взаимодействии с упругим изотропным полупространством. Сформулированы модифицированные естественные граничные условия, позволяющие учесть упругие свойства полупространства. Результаты расчетов показали, что при учете податливости закрепленного края величины напряжений оболочки на краю существенно уменьшаются.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе для круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных продольным и поперечным силовым набором, построены математические модели уточненной теории, основанной на трехмерных уравнениях теории упругости.

Для описания НДС обшивки и подкрепляющих ребер в триортогональной криволинейной системе координат искомые перемещения обшивки аппроксимируются полиномами по нормальной координате на одну степень выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Предлагается, что взаимодействие обшивки с ребрами схематизируется линейным контактом, влияние ребер учитывается через компоненты перемещений, а именно: для кольцевых ребер – по окружному и поперечному направлениям, а для продольных ребер – по продольному и поперечному направлениям. Соединение ребер с обшивкой моделируется по дискретной расчетной схеме с помощью дельта-функции Дирака. Применением к уточненному выражению полной потенциальной энергии оболочки вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений в перемещениях и сформулированы граничные условия.

Для круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми и продольными ребрами, приведение уравнений равновесия в частных производных и граничных условий к обыкновенным дифференциальным уравнениям осуществляется с помощью тригонометрических рядов по окружной и продольной координатам.

Применяя аппарат операционного исчисления и преобразования Лапласа, получены аналитические решения сформулированной краевой задачи для различных вариантов нагружения.

На основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством построено первое приближение напряженного состояния

краевой плоской деформации типа «погранслоя» и сформулированы модифицированные естественные граничные условия, позволяющие учесть упругие свойства зоны крепления оболочки (соединения, стыки).

Разработан алгоритм решения сформулированной задачи в программном пакете Maple, что позволяет исследовать НДС подкрепленных цилиндрических оболочек при различных видах нагружения, геометрических параметров и свойств конструкционных материалов.

Проведено параметрическое исследование НДС подкрепленных цилиндрических оболочек, которое позволило установить следующее:

1. При расчете НДС подкрепленных оболочек по уточненной теории имеют место быстро затухающие самоуравновешенные дополнительные краевые напряженные состояния типа «погранслоя», которые вносят значительный вклад в общее напряженное состояние оболочек. Например, при осесимметричной нагрузке, максимальные изгибные напряжения уточняются на 40%, поперечные касательные напряжения в 2 раза превосходят соответствующие напряжения классической теории и поперечные нормальные напряжения составляют 48% от максимальных изгибных напряжений.

2. Вблизи зон искажения напряженного состояния (в местах крепления ребер и на защемленном краю) поперечные напряжения, которые в классической теории принимаются равными нулю, получаются одного порядка с максимальными значениями основного изгибного напряжения.

3. Наличие ребер в зонах нагружения оболочки существенно влияет на НДС обшивки, особенно в части поперечных нормальных напряжений. При увеличении значения модуля Юнга материала ребер поперечные нормальные напряжения в местах сопряжения существенно увеличиваются. С ростом высоты ребер, продольные и тангенциальные нормальные напряжения существенно убывают, при этом поперечные нормальные напряжения увеличиваются пропорционально высоте ребер.

4. При увеличении податливости защемленного края величины напряжений

оболочки на этом краю существенно уменьшаются. При одинаковых упругих свойствах стыкуемых элементов, максимальные продольное и окружное напряжения уменьшаются на 30-40% соответственно по сравнению со случаем жестко защемленного края.

**СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ**

НДС – напряженно-деформированное состояние

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений



**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Абовский Н.П. Ребристые оболочки: в 2-х т. Красноярск: Изд-во Краснояр. политехн. ин-та, 1967. Т1. 64 с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 111-125.
4. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057-1074.
5. Алумяэ Н.А. Теория упругих оболочек и пластинок // Механика в СССР за 50 лет. 1917-1967 / Под ред. Л.И. Седова, М.А. Лаврентьева, Г.К. Михайлова, Н.И. Мусхелишвили и Г.Г. Черного. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 227-266.
6. Амбарцумян С.А. К теории изгиба анизотропных пластинок // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 5. С. 69-77.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266 с.
9. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Т.2. Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 368 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с.
11. Биргер И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М.: Оборонгиз, 1961. 488 с.
12. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок // Инж. сб. / АН СССР. 1961. Т.31. С. 3-14.
13. Бубнов И.Г. Строительная механика корабля. Часть II. СПб.: Тип. Морского министерства, 1914. 640 с.
14. Бурмистров Е.Ф. Симметричная деформация конструктивно-ортотропных

- оболочек вращения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1962. 108 с.
15. Варвак А.П. Интегральные уравнения в теории пластин и оболочек, подкрепленных пересекающимися ребрами // Расчет пространственных конструкций. 1973. № 15. С. 113-120.
  16. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
  17. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26-47.
  18. Васильев В.В., Бунаков В.А. Проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении // Механика конструкций из композиционных материалов. 2000. № 2. С. 68-77.
  19. Васильев В.В., Лопатин А.В. Теория сетчатых и подкрепленных композитных оболочек // Механика конструкций из композитных материалов. – Новосибирск. 1984. С. 31-36.
  20. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1990. № 2. С. 158-167.
  21. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139-146.
  22. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
  23. Власов Б.Ф. Об уравнениях теории изгиба пластин // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 12. С. 57-60.
  24. Власов В.З. Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней // Изв. АН СССР. ОТН. 1949. № 6. С. 819-838.
  25. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. 475 с.
  26. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
  27. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
  28. Вольмир А.С. Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек за период с 1941 по 1957 г. // Расчеты пространственных конструкций. М.:

- Госстройиздат, 1958. Вып. 4. С. 451-475.
29. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Т. 3. Механика твердого тела. М.: Наука. 1966. С. 116-136.
  30. Ворович И.И. Общие проблемы теории пластин и оболочек // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку. 1966. Обзорные докл. М.: Наука, 1966. С. 896-903.
  31. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959. 471 с.
  32. Гольденвейзер А.Л. Некоторые вопросы общей линейной теории оболочек // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории пластинок и оболочек, Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 749-754.
  33. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134-149.
  34. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
  35. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593-608.
  36. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
  37. Гольденвейзер А.Л., Лурье А.И. О математической теории равновесия упругих оболочек // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 5. С. 565-592.
  38. Грачев О.А., Игнатюк В.И. Об устойчивости трансверсально-изотропных ребристых оболочек вращения // Строительная механика и расчет сооружений. 1986. № 3. С. 61-64.
  39. Гребень Е.С. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек // Известия АН СССР. Серия «Механика». 1965. № 3. С. 81-92.
  40. Григолюк Э.И. К теории круговых цилиндрических оболочек с жестким

- продольным набором // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 11. С 62-65.
41. Даревский В.М. Основы теории оболочек // Тр. Центр ин-та авиац. моторостр. 1998. № 1309. С. 3-193.
  42. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
  43. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука: Под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука, 1982. 567 с.
  44. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ. 1983. Т.15. С. 3-68.
  45. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М.: Машиностроение, 1972. 168 с.
  46. Жгутов В.М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. ... канд. техн. Наук. СПб, 2004. 177с.
  47. Жилин П.А. Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 4. С. 150-162.
  48. Заруцкий В.А. Уравнения равновесия ребристых цилиндрических оболочек // теория пластин и оболочек: Тр. II-й Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек, Львов, 1961. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 59-87.
  49. Заруцкий В.А., Сивак В.Ф. К оценке критических нагрузок потери устойчивости ребристых и сферических оболочек // Прикладная механика (Киев). 1999. 35. № 9. С. 47-50.
  50. Заруцкий В.А, Сюсаренко Ю.В. О влиянии деформаций поперечного сдвига на собственные колебания цилиндрических оболочек, усиленных кольцевыми ребрами // Прикладная механика. 1991. Т. 27. № 2. С. 54-61.
  51. Зверьяев Е.М. Декомпозиционные свойства принципа сжатых отображений в теории тонких упругих оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 2. С. 3-19.
  52. Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко

- // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308-321.
53. Игнатъев В.А., Денисова А.П. Расчет ребристых цилиндрических оболочек по дискретной модели // Труды III научно-технической конференции (Исследования по строительной механике). 1975. С. 105-114.
  54. Игнатъев О.В. Геометрически нелинейные модели оболочек ступенчато-переменной толщины и численные методы их исследования: Дисс. докт. техн. наук. Санкт-Петербург, 2001. 246 с.
  55. Игнатъев О.В. Конструктивно-ортотропная схема ребристой оболочки, учитывающая сдвиговую и крутильную жесткость перекрестной системы ребер и ее применение к расчету оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс... канд. техн. наук. Волгоград, 1993.
  56. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 253 с.
  57. Калманок А.С. К расчету стержневых решетчатых систем перекрытий, опирающихся на прямоугольный контур // Исследования по теории сооружений. 1965. Вып. 14. С. 215-222.
  58. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
  59. Каплунов Ю.Д. Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в упругих тонких оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 147 – 157.
  60. Каплунов Ю.Д. Интегрирование уравнений динамического погранслоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 148 – 160.
  61. Карпов В.В. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования / В. В. Карпов, О. В. Игнатъев, А.Ю. Сальников. М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. 420 с.).
  62. Карпов В.В., Игнатъев О.В. Устойчивость пологих оболочек с изломами срединной поверхности и подкрепленных перекрестной системой ребер. Волгоград, 1992. 8 с. Деп. В ВИНТИ 07.07.92, № 2172 – В92.
  63. Карпов В.В., Квасников Ю.Е. Влияние деформаций поперечного сдвига на

- устойчивость ребристых оболочек // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Межвузовский тематический сборник трудов, Санкт-Петербург, 1989. С. 10-12.
64. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек // Тр. 2-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 58-69.
65. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Ч. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 355 с.
66. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. М.: Высш. школа, 1963. 278 с.
67. Колос А.В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 582-589.
68. Лехницкий С.Г. Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 71-91.
69. Лоза Л.В. Расчет сетчатых и подкрепленных оболочек вращения с учетом поперечного сдвига: Дисс. канд. техн. наук. Волгоград, 2001. 150 с.
70. Лоза Л.В. Устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки с учетом поперечного сдвига: Информационный листок № 295; Сер. 67.03.03. Волгоградский центр научно-технической информации. 1998. 3 с.
71. Лопатин А.В. Устойчивость при изгибе композитной цилиндрической оболочки с продольными ребрами жесткости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. № 1. С. 169-177.
72. Лурье А.И. Общие уравнения оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. Л., 1948. 28 с.
73. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
74. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
75. Муштари Х.М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложением

- к задаче устойчивости упругого равновесия // Прикладная математика и механика. 1939. Т. 2. № 4. С. 91-97.
76. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
77. Новожилов В.В. Краткий очерк развития теории оболочек в СССР // Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та. 1970. Вып. VI-VII. С. 3-23.
78. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
79. Новожилов В.В., Финкельштейн Р. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 331-340.
80. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Ленинград, Политехника, 1991. 656 с.
81. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
82. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: МГУ, 1969. 696 с.
83. Ониашвили О.Д. Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций // Строительная механика в СССР. 1917-1957 / Под ред. И.М. Рабиновича. М.: Стройиздат, 1957. С. 160-196.
84. Ониашвили О.Д. Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций // Строительная механика в СССР. 1917-1967 / Под ред. И.М. Рабиновича. М.: Стройиздат, 1969. С. 165-202.
85. Папкович П.Ф. К вопросу о расчете прочности плоских перекрытий, подкрепленных большим числом перекрестных связей // Труды НТК НКПС. 1926. Вып. 36. С.33-44.
86. Папкович П.Ф. Труды по строительной механике корабля. Том 2. СПб.: Судпромгиз, 1962. 640 с.
87. Пикуль В.В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 18-25.

88. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Изв. АН. МТТ. 2000. № 2. С. 153-168.
89. Пикуль В.В. Теория и расчет слоистых конструкций. М.: Наука, 1985. 183 с.
90. Пикуль В.В. Физические корректные модели материала упругих оболочек// Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 103-108.
91. Прокопов В.К. Скелетный метод расчета ребренной цилиндрической оболочки // Научно-техн. Информационный бюллетень Ленингр. Политехн. Ин-та. 1957. №12. С. 18-19.
92. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справ.: в 3-х томах / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Т. 3. / В.В. Болотин, А.С. Вольмир, М.Ф. Диментберг и др. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.
93. Пшеничнов Г.И. Расчет сетчатых оболочек. – Исследования по теории сооружений. 1976. Вып. 22. С. 159-167.
94. Пшеничнов Г.И., Тагиев И.Г. Расчет ребристых оболочек // строительная механика и расчет сооружений. 1977. № 1. С 51-54.
95. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М.: Машиностроение, 1967. 360 с.
96. Рикардс Р.Б., Гольдманис М.В. Оптимизация ребристых оболочек из композитов, работающих на устойчивость при внешнем давлении // Механика композитных материалов. 1980. № 3. С. 468-475.
97. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композиционных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 270 с.
98. Рыбакова О.В. Трехслойные пологие оболочки с дискретным внутренним слоем как вариант оболочки ступенчато-переменной толщины при конечных прогибах: Дисс... кан канд. техн. наук. Волгоград, 1998.
99. Сан С.Т., Янг Т.Т. Применение континуального подхода к исследованию динамики решетчатых систем // Прикладная механика. Серия Е. 1973. Т. 40. № 1. С. 795-201.
100. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.



101. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
102. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
103. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 287-300.
104. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Изд. 2-е, доп. и перераб. СПб.: Стройиздат, 1975. 256 с.
105. Филиппов Д.С. Влияние учета поперечных сдвигов на устойчивость ребристых оболочек // Доклады 57-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных сотрудников, инженеров и аспирантов университета, СПб. 2000. С. 44-66.
106. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. М.: Физматиздат, 1959. 364 с.
107. Фирсанов В.В. Анализ напряженного состояния "пограничный слой" в рамках неклассической теории цилиндрических оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. 71-76.
108. Фирсанов В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 35-43.
109. Фирсанов В.В. Математические модели уточненного расчета непрерывных авиационных соединений на прочность с учетом их податливости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 58-69.
110. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций / Изд. ИПРИМ РАН. 2002. Т. 8. №1. С. 28-64.
111. Фирсанов В.В. Погранслой и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17. № 5. С. 212-218.

112. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Влияние податливости защемленного края на напряженное состояние подкрепленных цилиндрических оболочек по уточненной теории // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, том 1. 2019. С. 63-64.
113. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ, 2018, № 102, URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=98866>
114. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Напряженное состояние “пограничный слой” в цилиндрических оболочках, подкрепленных кольцевыми ребрами // Тезисы докладов VII международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2018. С. 126-127.
115. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Полное напряженно-деформированное состояние продольно подкрепленных цилиндрических оболочек на основе уточненной теории // Материалы XXIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, том 1. 2018. С. 217-218.
116. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния подкрепленных шпангоутами цилиндрических оболочек // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Тезисы. 2018. С. 16-17.
117. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу, Чан Нгок Доан. Исследование напряженного состояния подкрепленных оболочек по уточненной теории с учетом влияния упругости ребер и защемленного края // Труды МАИ, 2019, № 104, URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=102130>
118. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу, Чан Нгок Доан. Напряженно-деформированное состояние продольно подкрепленных цилиндрических оболочек на основе

- неклассической теории // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып.12. Ч.2. 2017. С. 42-53.
119. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу, Во Ань Хиеу. Внутреннее напряженно-деформированного состояния круглой пластинки переменной толщины на основе неклассической теории // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, том 2. 2017. С. 86-88.
120. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу, Во Ань Хиеу. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины переменной толщины на основе неклассической теории // Тезисы докладов VI международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2017. С. 117-118.
121. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек произвольной геометрии // Вестник МАИ. 2011. Т. 18. № 1. С. 194-207.
122. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Общая теория. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
123. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. 395 с.
124. Шереметьев М.П., Пелех Б.Л. К построению уточненной теории пластин // Инж. ж. 1964. Т. 4. № 3. С. 504-509.
125. Cauchy A. Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide // Dans: Exercise de mathematique. 1828. № 3.
126. Firsanov V.V. The Stressed State of the "Boundary Layer" Type in Cylindrical Shells Investigated according to a Nonclassical Theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2018. Vol. 47. №. 3. Pp. 241-248.
127. Firsanov V.V., Doan C.N. Energy-consistent theory of cylindrical shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2011. Т. 40. № 6. Pp. 543-548.

128. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory // *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 2015. Vol. 6. Issue 2. Pp. 135-166
129. Friedlrichs K.O. Kirchoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates // *Proc. Sympos. Appl. Math*, V.3. Amer. Math. Soc., N.Y. 1950. P. 258.
130. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells // *Proc. R. Soc.* 1962. V.A. 266, № 1325. P. 143-160.
131. Johnson M., Reissner E. On the foundations the theory of elastic shells // *J. Math. and Phys.* 1958. V. 73. № 4.
132. Koiter W.T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells // *Proc. IUTAM Sympos. Theory Thin Elastic Shells*, Delft, 1959. Amsterdam, 1960.
133. Nash W.A. Bibliography on shells and shell-like structures // Part I. David W. Taylor. Model Basin Report 863 (Washington D.C.), 1954.
134. Nash W.A. Bibliography on shells and shell-like structures // Part II. Department of Engineering mechanic. Engineering and Industrial Experiment Station University of Florida, Gainesville. Florida, June, 1957.
135. Poisson S. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastiques // *Mem. Acad. Sci. Paris.* 1829. № 8. P. 357-570; 623-627.
136. Reiss E.L. A theory for the small rotationally symmetric deformations of cylindrical shells // *Communications. Pure and Appl. Math.* V. XIII. 1960. P. 973.
137. Reissner E. Effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates // *J. Appl. Mech.* 1945. V. 12. № 2. P. A66-A77.
138. Trần Ngọc Đoàn, Võ Anh Hiếu, Vũ Quốc Trụ. Phương pháp toán tử giải bài toán biên đối với vỏ trụ có gân gia cường dọc trục chịu tải trọng đối xứng trục trên cơ sở lý thuyết phi cổ điển // *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X.* Hà Nội, 2017. Tr. 268-275.