



ИБРАГИМОВ ДАНИС НАИЛЕВИЧ

**МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ
ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ
ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ**

Специальность 2.3.1.

Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)

**Научный
консультант:**

Кибзун Андрей Иванович, д.ф.-м.н., профессор,
зав. кафедрой «Теория вероятностей и компьютерное
моделирование» МАИ

**Официальные
оппоненты:**

Хлебников Михаил Владимирович, д.ф.-м.н., профес-
сор РАН, главный научный сотрудник лаборатории №7
«Адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина» Ин-
ститута проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Дмитриев Михаил Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор,
главный научный сотрудник 71 отдела интеллектуальных
динамических систем и когнитивных исследований Ин-
ститута проблем искусственного интеллекта федерального
исследовательского центра «Информатика и управление»
РАН

Пакшин Павел Владимирович, д.ф.-м.н., профессор,
зав. кафедрой «Прикладная математика» Арзамасского
политехнического института (филиал) «Нижегородский
государственный технический университет им. Р.Е. Алек-
сеева»

**Ведущая
организация:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Уральский государ-
ственный университет путей сообщения» (УрГУПС)

Защита состоится «27» июня 2025 года в 10 ч. 00 мин. на заседании дис-
сертационного совета 24.2.327.02 Московского авиационного института по адре-
су: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Москов-
ского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80,
ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке:
https://mai.ru/events/defence/doctor/?ELEMENT_ID=184330

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по
адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет
МАИ

Ученый секретарь диссертационного
совета 24.2.327.02, к.ф.-м.н.

Рассказова
Варвара Андреевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В математической теории оптимального управления традиционно принято разделять теорию систем с непрерывным временем и теорию систем с дискретным временем. Развитие данной научной дисциплины началось с исследования непрерывных систем. Наиболее значимым теоретическим результатом, окончательно выделившим теорию оптимального управления в самостоятельную область математики, оказался хорошо известный в настоящее время принцип максимума Понтрягина Л.С., предложивший новый качественный подход к построению оптимальных процессов. Существенный вклад в формализацию постановки задачи оптимального управления внес Красовский Н.Н., разработавший оригинальный подход к построению оптимального управления на основе методов функционального анализа. Их идеи были продолжены в огромном числе работ различных авторов (например, Розоноэра Л.И., Васильева О.В., Ермольева Ю.М., Гуленко В.П., Шатровского Л.И., Тихонова А.Н.) и в монографиях Табака Д., Куо Б., Евтушенко Ю.Г., Габасова Р., Кирилловой Ф.М., Болтянского В.Г.

В последующих исследованиях Моисеева Н.Н. сформировался подход, основанный на методах нелинейного программирования и вариациях в пространстве состояний. Эти работы были продолжены его учениками Черноушко Ф.Л. и Крыловым И.А., а также другими авторами (например, Гноевским Л.С., Мельцем И.О., Пшеничным Б.Н.). Такой подход оказался эффективным по ряду причин: с его помощью удалось обосновать некоторые, предложенные ранее, эвристические алгоритмы, возникла возможность их обобщения; методы нелинейного программирования позволили решать сложные задачи оптимального управления со смешанными ограничениями.

Прогресс в сфере цифровых технологий и машинных вычислительных устройств диктовал потребность в «дискретизации» задач с изначально непрерывным временем, что нашло отражение в работах Федоренко Р.П. и Евтушенко Ю.Г. и наиболее полно было описано в монографии Мордуховича Б.Ш. Это, в свою очередь, влекло необходимость качественного изучения систем с дискретным временем и разработки соответствующего математического аппарата формирования оптимальных дискретных процессов. Разработка данной темы была начата в трудах Красовского Н.Н. Наиболее значимые результаты по данной тематике представлены в работах и монографиях Пропоа А.И., Болтянского В.Г., Halkin Н. и Holtzman J.M., Габасова Р. и Кирилловой Ф.М., а также ряда других авторов. Однако попытки формального построения дискретного принципа максимума по аналогии с непрерывным случаем, как правило, не давали корректных результатов, что обуславливалось принципиальными различиями динамических систем с дискретным и непрерывным временем. В то время, как задача оптимального управления для непрерывного времени представляет собой задачу вариационного исчисления, в дискретном случае она является задачей нелинейного программирования большой размерности, что определяет принципиально иной набор средств ее решения, необходимых и достаточных условий оптимальности (в частности, теорема Куна-Таккера). Также траектория системы в дискретном случае представляет собой последовательность векторов состояния в отличие от непрерывного времени, где траектория является непрерывной

функцией. Для линейных систем не всегда удастся перейти к обратному времени в дискретном случае, что обусловлено возможной вырожденностью оператора системы управления, в непрерывном случае такой проблемы не возникает, так как фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику, является невырожденной в любой момент времени.

Наименее исследованным является класс вырожденных задач оптимального управления, т.е. тех, функционал качества которых обладает нерегулярным экстремумом. Подавляющее большинство стандартных задач удастся решить, сведя их к соответствующей оптимизационной задаче большой размерности и применив классический метод множителей Лагранжа или его модификации. В случае изначально выпуклых ограничений достаточно хорошо работают алгоритмы выпуклой оптимизации. В то же время для задач с нерегулярным экстремумом аналогичного универсального подхода выработано не было, из-за чего каждая проблема рассматривается и решается индивидуально. Наиболее ярким примером вырожденной задачи является задача быстрогодействия. Она представляет собой классическую проблему теории оптимального управления, обладающую естественным функционалом качества – числом шагов, необходимым для достижения системой начала координат. При построении оптимальных по быстродействию процессов возникает ряд сложностей, для разрешения которых классические методы оптимального управления и выпуклого программирования оказываются неприменимыми. Одной из таких особенностей является дискретный функционал качества, значение которого в свою очередь определяет число управляющих воздействий. Этот факт вынуждает вычислять время быстрогодействия перебором, решая при каждом фиксированном временном горизонте двухточечную задачу. С другой стороны, даже если наименьшее число шагов, для которого систему можно перевести в нуль, вычислено, почти для всех начальных состояний множество оптимальных процессов является бесконечным, что делает проблематичным применение классических методов решения одноэкстремальных задач таких, как принцип максимума и метод динамического программирования Беллмана.

Известные результаты, посвященные задаче быстрогодействия для систем с дискретным временем, представлены крайне небольшим набором статей и в основном исследуют различные частные постановки. В работах Мороза А.И. обсуждаются только трехмерные системы со скалярным управлением, Desoer С.А., Wing J., Lin W.-S. рассматривают уже системы произвольной размерности, но все еще со скалярным управлением. Bashein G., Vlieger J.H., Verbruggen H.B., Bruijn P.M. сосредоточены на численных методах формирования оптимального управления на основе линейного программирования. В статьях Lasserre J.B., Stamnes O.N., Callafon R.A. управление предполагается векторным, но исключительно с ограничениями в форме зонотопов. В свою очередь Kolev L.V. и Scott M. предлагают регуляризацию задачи быстрогодействия при помощи введения дополнительного критерия качества. Работы Blanchini F. и Ukovich W. допускают уже геометрические полиэдральные ограничения на управление. Keerthi S., Gilbert E. предполагают смешанные полиэдральные ограничения, накладываемые одновременно на управление и состояние. Из наиболее актуальных работ

можно выделить статьи Abdelhak A., Rachik M., Amato F., Cosentino C., Tommasi G. D., Pironti A., Romano M., Chen D., Bako L., Lecoeuche S., Lee J., Haddad W.M., Yang H., Xia Y., Geng Q., продолжающие ранее приведенные результаты. Также в настоящее время вновь возник интерес к задаче быстродействия в том числе и для систем с непрерывным временем в связи возросшими мощностями ЭВМ, что позволило эффективно проводить дискретизацию исходной системы, сводя ее к эквивалентным конечно-разностным соотношениям. Такой подход нашел отражение в статьях Leomanni M., Costante G., Ferrante F., Lini G., Consolini L., Piazzzi A., Бортаковского А.С., Краснощеченко В.И., Сазановой Л.А.

При этом сама по себе постановка задачи быстродействия предполагает возможность использования для ее анализа и решения аппарат множеств достижимости и 0-управляемости, где под множеством достижимости понимается совокупность тех терминальных состояний, в которые можно перевести систему из заданного начального за фиксированное время, а под множеством 0-управляемости – совокупность тех начальных состояний, из которых можно перевести систему в начало координат за фиксированное время. С одной стороны, построение предельного множества достижимости позволяет определить, для какой области фазового пространства нуль достижим системой в принципе. Также наименьший номер множества достижимости, поглотившего начало координат, определяет время быстродействия. С другой стороны, каждая область 0-управляемости представляет собой множество уровня функции будущих потерь Беллмана в задаче быстродействия. Это позволяет сформулировать критерий оптимальности процесса в терминах метода динамического программирования. Таким образом, анализ задачи быстродействия оказывается неразрывно связан с исследованием свойств множеств достижимости и 0-управляемости, а также с развитием соответствующего математического аппарата.

Раздел теории управления, посвященный исследованию областей достижимости и управляемости, развивался параллельно с теорией оптимальных процессов. Первоначальные исследования относились в основном к системам, наделенным геометрическими ограничениями, которые в каждый момент времени определяли то множество управляющих воздействий, которое могло быть использовано для достижения поставленной цели. Например, такими ограничениями хорошо описывается мощность двигательной установки в задачах коррекции орбиты космического аппарата, предельно допустимое давление реагента в трубках смесителя в задачах управления химическими реакциями, размер максимально допустимой дозы лекарственного препарата в различных медицинских приложениях. Впервые свойства множеств достижимости и управляемости для случая геометрических ограничений были получены в трудах Красовского Н.Н. и развиты в работах Субботина А.И., Куржанского А.Б., Черноусько Ф.Л., Пропося А.И., Schweppe F.C., Boyd S. В настоящее время исследование данных множеств ведется различными авторами в самых разнообразных направлениях: использование принципа максимума и алгоритмов решения экстремальных задач развивается Ушаковым В.Н. и его последователями, Горновым А.Ю. предложены стохастические алгоритмы, сеточные и покоординатные методы также исследуются Ушаковым В.Н. и Никольским М.С. В случае линейных систем

процедура построения множеств достижимости и управляемости, как правило, может быть осуществлена средствами выпуклого анализа в терминах опорных функций и опорных точек или функционала Минковского.

Другой класс систем, также представляющий интерес с точки зрения практики, предполагает наложение интегральных (для непрерывного времени) или суммарных (для дискретного времени) ограничений на управление. Наиболее полно такой тип систем описывает наличие ограничения на общий ресурс управления в течение всего времени функционирования системы. Например, это могут быть запасы топлива в задачах коррекции орбиты космического аппарата, суммарно доступный капитал в финансовых приложениях, энергетическая емкость аккумуляторной батареи при рассмотрении управления автономными робототехническими устройствами. При этом на то, как этот ресурс расходуется в каждый отдельный момент времени, ограничения не накладываются. Множества достижимости и управляемости для такого класса систем исследованы значительно в меньшей степени. Так Куржанским А.Б. продемонстрировано, что для линейных уравнений динамики в непрерывном времени и квадратичных ограничений построение опорной функции множества достижимости может быть сведено к решению дифференциального уравнения Риккати, использование интервального анализа изучается Костюсовой Е.К., в работах Гусейнова К.Г. и Поляка Б.Т. представлены способы формирования множеств достижимости для нелинейных систем. Качественные исследования свойств выпуклости, компактности, устойчивости проводились также Гусейновым К.Г., Поляком Б.Т., Ченцовым А.Г. и другими авторами.

Отдельного упоминания заслуживает вопрос построения и оценивания предельных множеств достижимости и 0-управляемости. Они являются важной характеристикой всей системы в целом, демонстрирующей те начальные состояния, для которых изучаемая задача быстрогодействия разрешима в принципе, что крайне важно при работе с неустойчивыми системами. При этом их точное описание, как правило, не представляется возможным, так как предполагает либо решение эволюционных уравнений (аналога дифференциальных уравнений для множеств), либо вычисления неподвижной точки отображения в пространстве компактов.

На текущий момент по данной тематике можно выделить два основных направления: исследование отдельных состояний на управляемость и геометрические методы оценивания множеств управляемости и достижимости, представленные в работах Куржанского А.Б., Точилина П.А., Corradini M.L., Benvenuti L., Farina L. и других авторов. Так, при рассмотрении нелинейных систем удастся получить только общие свойства множеств управляемости либо их оценки. Сиротиним А.Н. и Формальским А.М. доказана цилиндрическая структура предельных множеств достижимости и управляемости при скалярном управлении и линейных уравнениях динамики. Только в ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе аппарата опорных полупространств или принципа максимума.

Если задача точного построения множеств достижимости или 0-управляемости за конечное или бесконечное число шагов не представляется

возможной, то обычно прибегают к методу формирования различных оценок. В этом случае принято выделять два основных направления: полиэдральные и эллипсоидальные оценки.

Методы построения полиэдральных оценок во многом опираются на применение алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел, начавших развитие в работах Schneider R., Gruber P.M., Muller J.S., McClure D.E., Vitale R.A., Dudley R., Sonnevend G., Ludwig M., Бронштейна Е.М. В настоящее время в данной научной области активно развиваются адаптивные алгоритмы, подробно исследованные Каменевым Г.К., и стохастические методы Ушакова В.Н. и Бронштейна Е.М. Наиболее значимые современные результаты по теме полиэдральной аппроксимации множеств достижимости и управляемости динамических систем представлены в работах Куржанского А.Б., Костоусовой Е.К., Varaiya P., Горнова А.Ю.

В свою очередь техника построения эллипсоидальных аппроксимаций была разработана в работах Черноусько Ф.Л., Куржанского А.Б., Schweppe F.C. В частности, доказана возможность вычисления внутренних и внешних эллипсоидальных оценок множеств достижимости произвольного порядка точности путем варьирования некоторых управляющих параметров. Впоследствии данные методы были развиты различными авторами, например, Подчукаевым В.А., Филипповой Т.Ф.

При изучении линейных систем также является перспективным применение аппарата собственных множеств – аналога собственного вектора при продолжении линейного преобразования на пространство компактов. Однако на сегодняшний день этот раздел выпуклого анализа развит слабо и представлен крайне скудным числом публикаций.

В рамках данной диссертационной работы, с одной стороны, развивается аппарат множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограниченным управлением. В том числе рассматриваются системы с выпуклыми ограничениями на управление (геометрическими или суммарными). С другой стороны, обобщаются методы решения задачи быстродействия, заложенные в трудах Desoer C.A., Wing J., Lin W.-S., Bashein G., Vlieger J.H., Verbruggen H.B., Bruijn P.M., Lasserre J.B., Stamnes O.N., Callafon R.A. и др. Однако, в отличие от данных работ, ограничения на управление предполагаются выпуклыми, а не только полиэдральными, и допускается произвольная размерность вектора управления. Принципиальной новизной обладает постановка задачи быстродействия для случая систем с суммарными ограничениями на управление.

Объектом исследования являются линейные системы управления с дискретным временем и ограниченным управлением. **Предметом исследования** являются методы формирования оптимального и субоптимального по быстродействию управления, алгоритмы построения и оценивания множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограниченным управлением.

В работе поставлены следующие **цели**. Для линейных систем с дискретным временем и ограниченным управлением

- 1) исследовать свойства и разработать методы построения множеств достижимости и 0-управляемости;
- 2) получить необходимые и достаточные условия оптимальности по быстродействию процессов на основе аппарата множеств достижимости и 0-управляемости;
- 3) разработать методы и алгоритмы построения оптимального и субоптимального по быстродействию управления;
- 4) реализовать программно разработанные алгоритмы.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие **задачи**.

I. Для линейных систем с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление

- 1) в случае строго выпуклых ограничений на управление *построить* аналитическое описание множеств достижимости и на его основе *сформулировать* необходимые и достаточные условия оптимальности процесса по быстродействию;
- 2) в случае выпуклых ограничений на управление *разработать* процедуру формирования субоптимального управления на основе средств линейного программирования и полиэдральных аппроксимаций и *определить* достаточные условия сходимости субоптимального процесса к оптимальному;
- 3) *разработать* метод априорного оценивания времени быстродействия в случае выпуклых ограничений на управление;
- 4) *построить* алгоритмы полиэдральной аппроксимации множеств 0-управляемости.

II. Для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление

- 5) *построить* аналитическое описание множеств достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов;
- 6) *определить* необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости;
- 7) *разработать* численные методы внешнего оценивания предельных множеств достижимости и 0-управляемости;
- 8) *сформулировать* необходимые и достаточные условия оптимальности процесса по быстродействию;

III. Для различных классов линейных систем с дискретным временем

- 9) *реализовать* разработанные методы и алгоритмы в виде комплекса программ и на его основе провести вычисления для ряда моделей конкретных технических систем.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы математического моделирования, теории оптимального управления, выпуклого анализа, функционального анализа. В частности, принцип максимума, метод динамического программирования, методы полиэдральных аппроксимаций, аппарат сжимающих отображений. Различные численные методы решения задач выпуклого и линейного программирования применяются для реализации программного обеспечения и для проведения вычислительных экспери-

ментов.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов состоит в разработке геометрического подхода к решению задачи быстродействия для линейных систем с дискретным временем и ограниченным управлением. Принципиальной особенностью данной задачи является дискретный функционал качества и нефиксированный временной горизонт. В частности, описание функции Беллмана через функционалы Минковского множеств 0-управляемости позволяет вычислить время быстродействия или получить его априорные оценки средствами выпуклого программирования, сведя исходную задачу оптимального управления к задаче с фиксированным числом шагов и ограничением на терминальное состояние. Также предложен новый способ регуляризации оптимального по быстродействию процесса с точки зрения дискретного принципа максимума, позволяющий использовать классический результат для построения оптимальных траекторий в вырожденном случае, в том числе для бесконечномерных систем. Для анализа предельных множеств достижимости и 0-управляемости линейных дискретных систем разработан принципиально новый метод формирования внешних оценок произвольного порядка точности, который основан на аппарате сжимающих отображений.

Практическая ценность исследования связана с возможностью применения разработанных методов при проектировании различных систем управления, построения управляющих устройств для стабилизации различных объектов. В частности, в рамках работы решена задача наискорейшей коррекции околокруговой орбиты спутника с ограничениями на запас топлива или на мощность двигателей, произведено численное моделирование множеств достижимости и 0-управляемости для соответствующей динамической системы. Алгоритмически построено управление, стабилизирующее высотное сооружение, расположенное в зоне сейсмической активности, за минимальное время. Решена задача нормализации уровня глюкозы и инсулина в плазме крови за наименьшее время.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: научные семинары кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (под рук. проф. Кибзуна А. И.); научный семинар лаборатории 45 Института проблем управления РАН (под рук. проф. Арутюнова А. В.); открытый научный семинар ФИЦ ИУ РАН (под рук. проф. Синицина В. И., 23 мая 2024 г.); международные научные конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2018, 2022, 2024 гг.); XXVI международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2022 г.); XVI Международная научная конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Москва, 2022 г.); XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2024 г.); XV международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли АММАИ (Алушта,

2024 г.); международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление и дифференциальные игры (SCDG)» (Екатеринбург, 2024 г.); XX (Иркутск, 2021 г.), XXII (Екатеринбург, 2023 г.), XXIII (Омск, 2024 г.) международные конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций (MOTOR)»; XV международная научная конференция «Optimization and Applications (OPTIMA)» (Черногория, Петровак, 2024 г.).

Результаты работы получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки № 2.2461.2017/4.6., проекта РФФИ № 18-08-00128-а, проекта РНФ № 23-21-00293.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 30 работах, из которых 10 работ опубликованы в периодических изданиях, индексируемых в международных системах цитирования **Web of Science** или **Scopus** [1–10], 3 работы в материалах конференций, индексируемых в системе цитирования **Scopus** [11–13], 7 работ в изданиях, рекомендованных **ВАК** [14–20], и 10 работ в других научных изданиях и материалах конференций [21–30]. Получено государственное свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [31].

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в который был определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, 5 глав, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 253 страницы, включая 30 рисунков, 12 таблиц и список литературы, содержащий 236 наименований.

Обозначения

В работе используются следующие понятия и обозначения.

- $\mathbb{L}$ – нормированное пространство.
- $\mathbb{L}^*$ – пространство, сопряженное к $\mathbb{L}$.
- $\mathcal{X} + \mathcal{U}$ – сумма Минковского множеств $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{L}$.
- $A\mathcal{X}$ – образ множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$ при воздействии оператора $A: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$.
- $A^{-1}(\mathcal{X})$ – полный прообраз множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$ для оператора $A: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$.
- $\ker A$ – ядро оператора $A: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$.
- $A^*: \mathbb{L}^* \rightarrow \mathbb{L}^*$ – оператор, сопряженный к оператору $A: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$.
- $\text{conv } \mathcal{X}$ – выпуклая оболочка $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$.
- $\text{Lin } \mathcal{X}$ – линейная оболочка $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$.
- $\text{Ext } \mathcal{X}$ – множество крайних точек $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$.
- $\text{ri } \mathcal{X}$ – множество относительно внутренних точек $\mathcal{X}$, т.е. тех точек, которые являются внутренними если рассматривать $\mathcal{X}$ как подмножество его аффинной оболочки.

- $\text{card } \mathcal{X}$ – кардинальное число множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$ или число элементов, если $\mathcal{X}$ конечно.
- $\partial\mathcal{X}$ – множество граничных точек $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$.
- Функционал $p \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$ называется опорным к выпуклому и слабо компактному $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$ в точке $x \in \partial\mathcal{X}$, если

$$\mathcal{X} \subset \{\tilde{x} \in \mathbb{L}: (p, \tilde{x}) \leq (p, x)\} \text{ или } (p, x) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (p, \tilde{x}).$$

- Нормальным конусом $\mathcal{N}(x, \mathcal{X})$ множества $\mathcal{X}$ в точке $x \in \partial\mathcal{X}$ называется множество всех функционалов, опорных к $\mathcal{X}$ в x :

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \{p \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}: \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (p, \tilde{x}) = (p, x)\}.$$

Будем также полагать, что для произвольной внутренней точки $x \in \text{int } \mathcal{X}$ нормальный конус представляет собой пустое множество: $\mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \emptyset$.

- Опорной функцией выпуклого и слабо компактного $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$ называется отображение $\mathcal{S}: \mathbb{L}^* \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{X}) = \max_{x \in \mathcal{X}} (p, x).$$

- Функцией опорной точки относительно строго выпуклого и слабо компактного $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$ называется отображение $x_{\mathcal{X}}^*: \mathbb{L}^* \rightarrow \mathcal{X}$:

$$x_{\mathcal{X}}^*(p) = \begin{cases} \arg \max_{x \in \mathcal{X}} (p, x), & p \in \mathbb{L} \setminus \text{Lin}^\perp \mathcal{X}, \\ 0, & p \in \text{Lin}^\perp \mathcal{X}. \end{cases}$$

- Под $\mu(x, \mathcal{X})$ для выпуклого $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$, содержащего 0, подразумевается функционал Минковского:

$$\mu(x, \mathcal{X}) = \inf\{t > 0: x \in t\mathcal{X}\}.$$

- Через $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ обозначено полное метрическое пространство компактов в $\mathbb{R}^n$, наделенное метрикой Хаусдорфа:

$$\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n: \mathcal{X} - \text{компакт}\},$$

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\}.$$

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность исследования, проводимого в рамках работы, приводится обзор существующих результатов по теме исследования, формулируется цель и задачи, решаемые в рамках достижения цели

работы, обосновывается научная новизна и практическая значимость работы, излагается содержание глав диссертации.

В первой главе формулируется постановка задачи быстродействия для линейных систем с дискретным временем, бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклыми геометрическими ограничениями на управление. Также для бесконечномерных нестационарных систем со строго выпуклыми множествами допустимых значений управлений и ограниченными операторами сформулированы условия оптимальности траектории и управления в форме принципа максимума.

Рассматривается бесконечномерная нестационарная линейная система управления с дискретным временем и ограниченными множествами допустимых значений управления $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x(k) \in \mathbb{L}$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathcal{U}(k) \subset \mathbb{L}$ – управление, $\mathcal{A} = \{A(k)\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность операторов системы. Предполагается, что для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество допустимых значений управлений $\mathcal{U}(k)$ является строго выпуклым и слабо компактным, $0 \in \text{int} \mathcal{U}(k)$, $A(k): \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ является линейным и ограниченным.

Для системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ решается задача быстродействия, т.е. требуется вычислить минимальное число шагов $N_{\min}$, за которое можно перевести систему из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{L}$ в начало координат, а также построить процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, который будем называть оптимальным. В дальнейшем предполагается, что $N_{\min} < \infty$, т.е. задача быстродействия разрешима для заданного начального состояния.

Для решения поставленной задачи вводится понятие множеств достижимости $\{\mathcal{Y}(x, N, k)\}_{N,k=0}^{\infty}$, где каждое $\mathcal{Y}(x, N, k)$ представляет собой множество тех состояний, в которые можно перевести систему $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$, начиная с шага $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, за N шагов из состояния $x \in \mathbb{L}$ посредством допустимых управляющих воздействий:

$$\mathcal{Y}(x, N, k) = \begin{cases} \{y \in \mathbb{L} : \exists u(k) \in \mathcal{U}(k), \dots, u(N+k-1) \in \mathcal{U}(N+k-1) : \\ \text{если } x(k) = x, \text{ то } x(N+k) = y\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{x\}, & N = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

С помощью класса множеств достижимости возможно вычислить оптимальное значение критерия качества в задаче быстродействия:

$$N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 0 \in \mathcal{Y}(x_0, N, 0)\}. \quad (1.3)$$

Для краткости записи для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вводятся операторы

$$\mathbf{A}_{N,k} = \begin{cases} A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k), & N \in \mathbb{N}, \\ I, & N = 0. \end{cases}$$

ЛЕММА 1.1 ([22, ЛЕММА 1]). Пусть система множеств $\{\mathcal{Y}(x, N, k)\}_{N,k=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (1.2). Тогда для каждого $N \in \mathbb{N}$ справедливы представления

$$\mathcal{Y}(x, N, k) = \mathbf{A}_{N,k}x + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{N-i,k+i} \mathcal{U}(k+i-1).$$

Лемма 1.1 позволяет для описания класса множеств достижимости ограничиться операциями двух типов: суммой по Минковскому и линейным преобразованием множеств. В работе подробно рассматриваются вопросы вычисления нормальных конусов, опорных функций и опорных точек строго выпуклых множеств при линейном преобразовании и сумме Минковского. Данные свойства используются для построения критерия оптимальности процесса в задаче быстрогодействия. Принципиальные отличия имеют два возможных варианта включения $0 \in \mathcal{Y}(x_0, N_{\min})$:

$$0 \in \partial \mathcal{Y}(x_0, N_{\min}, 0), \quad (1.4)$$

$$0 \in \text{int } \mathcal{Y}(x_0, N_{\min}, 0). \quad (1.5)$$

Доказывается, что оптимальное управление на k -м шаге, лежащее на границе множества $\mathcal{U}(k)$, может быть однозначно определено посредством элементов нормального конуса – функционалов сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{\min}} \subset \mathbb{L}^*$:

$$\begin{aligned} \psi(k) &= A^*(k)\psi(k+1), \quad k = \overline{0, N_{\min}-1}, \\ \psi(N_{\min}) &= \psi_{N_{\min}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При этом в случае (1.4) доказывается, что траектория сопряженной системы не может оказаться вырожденной: $\psi(k) \neq 0$, $k = \overline{0, N_{\min}}$.

Случай (1.5) обладает рядом принципиальных отличий от (1.4). Вообще говоря, для (1.5) принцип максимума как критерий оптимальности процесса управления приобретает вырожденный характер, т.е. не удастся построить оптимальную траекторию и управление согласно соотношениям

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= A(k)x^*(k) + u^*(k), \\ \psi(k) &= A^*(k)\psi(k+1), \\ x^*(0) &= x_0, \\ \psi(N_{\min}) &= \psi_{N_{\min}}, \\ u^*(k) &= \arg \max_{u \in \mathcal{U}(k)} (\psi(k+1), u). \end{aligned} \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.1 ([11, ТЕОРЕМА 2]). Пусть выполнено включение (1.5) и процесс управления $\{x'(k), u'(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ определяется соотношениями (1.7). Тогда для любого $\psi_{N_{\min}} \notin \ker(A^*(1) \cdot \dots \cdot A^*(N_{\min}-1))$ справедливо $x'(N_{\min}) \neq 0$.

Теорема 1.1 утверждает, что в случае (1.5) любая траектория, построен-

ная из условий (1.7), не является оптимальной, если траектория сопряженной системы не вырождена. Это делает соотношения принципа максимума бессодержательными.

Рассмотрен способ, позволяющий свести (1.5) к условию (1.4) и сформулировать критерий оптимальности процесса для произвольного начального состояния. Пусть

$$\alpha = \mu(-\mathbf{A}_{N_{\min},k}x_0, \mathcal{Y}(0, N_{\min}, 0)).$$

Для вспомогательной системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U}_\alpha)$, где $\mathcal{U}_\alpha = \{\alpha \mathcal{U}(k)\}_{k=0}^\infty$, семейство множеств достижимости обозначено через $\{\mathcal{Y}_\alpha(x, N, k)\}_{N,k=0}^\infty$.

ТЕОРЕМА 1.2 ([22, ТЕОРЕМА 1]). *Пусть наборы векторов $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$, $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1} \subset \mathbb{L}$ и функционалов $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{\min}} \subset \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$ для всех $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ определяются соотношениями (1.7) для $\mathcal{U}_\alpha$, где*

$$\psi(N_{\min}) \in \mathcal{N}(0, \mathcal{Y}_\alpha(x_0, N_{\min}, 0)).$$

Тогда

1. $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ – оптимальный процесс системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ в задаче быстрогодействия, причем если $\alpha = 1$, то данный процесс единственный;
2. $x^*(k) \in \partial \mathcal{Y}_\alpha(x_0, k, 0)$, $k = \overline{0, N_{\min}}$;
3. $\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{Y}_\alpha(x_0, k, 0))$, $k = \overline{0, N_{\min}}$.

Теорема 1.2 является необходимым и достаточным условием оптимальности процесса управления для случая (1.4). При этом рекуррентные соотношения теоремы 1.2 полностью совпадают с соотношениями принципа максимума (1.7), где сопряженная система определяется условием $\psi_{N_{\min}} \in \mathcal{N}(0, \mathcal{Y}(x_0, N_{\min}, 0))$. Для случая (1.5) теорема 1.2 представляет собой лишь достаточные условия оптимальности, определяющие один из способов регуляризации принципа максимума для вырожденной траектории сопряженной системы.

Во второй главе рассматриваются вычислительные методы формирования оптимального по быстрдействию процесса для системы (1.1) в случае, когда $\mathbb{L} = \mathbb{R}^n$, $\det A(k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Для решения поставленной задачи вводится понятие множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N, k)\}_{N,k=0}^\infty$, где каждое $\mathcal{X}(N, k)$ представляет собой множество тех состояний, из которых можно перевести систему $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$, начиная с шага $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, за N шагов в 0 посредством допустимых управляющих воздействий:

$$\mathcal{X}(N, k) = \begin{cases} \left\{ x(k) \in \mathbb{R}^n : \exists u(k) \in \mathcal{U}(k), \dots, u(k+N-1) \in \mathcal{U}(k+N-1) : \right. \\ \quad \left. x(N+k) = 0 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Тогда $N_{\min}$ по аналогии с (1.3) можно вычислить с помощью класса множеств 0-управляемости:

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N, 0)\}. \quad (2.2)$$

Получено аналитическое представление для класса (2.1) наподобие леммы 1.1.

ЛЕММА 2.1 ([2, ЛЕММА 1]). Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (2.1). Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо представление

$$\mathcal{X}(N, k) = - \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{i,k}^{-1} \mathcal{U}(k + i - 1).$$

Известно, что в случае, когда множество допустимых значений управлений на k -м шаге $\mathcal{U}(k) \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой многогранник с $M(k) \in \mathbb{N}$ числом вершин:

$$\mathcal{U}(k) = \text{conv}\{u^{1,k}, \dots, u^{M(k),k}\}, \quad (2.3)$$

задача быстрогодействия может быть сведена к ряду задач линейного программирования.

ТЕОРЕМА 2.1 ([2, ТЕОРЕМА 1]). Пусть $\det A \neq 0$ и справедливо (2.3), для всех $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множества (2.1) допускают представление

$$\mathcal{X}(N, k) = \text{conv}\{x^1(N, k), \dots, x^{L(N,k)}(N, k)\}, \quad L(N, k) = \text{card Ext } \mathcal{X}(N, k), \quad (2.4)$$

верно включение $x_0 \in \mathcal{X}(N_{\min}, 0) \setminus \mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0)$.

Тогда процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, определяемый следующими соотношениями, оптимален:

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= A(k)x^*(k) + u^*(k), \\ x^*(0) &= x_0, \quad u^*(k) = \sum_{j=1}^{M(k)} \lambda_j^* u^{j,k}, \end{aligned}$$

где $\lambda_1^*, \dots, \lambda_{M(k)}^*$ являются решением ЗЛП

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{L(N_{\min}-k-1, k+1)} \mu_i \rightarrow \min, \\ &A(k)x^*(k) + \sum_{j=1}^{M(k)} \lambda_j u^{j,k} = \sum_{i=1}^{L(N_{\min}-k-1, k+1)} \mu_i x^i(N_{\min} - k - 1, k + 1), \quad (2.5) \\ &\sum_{j=1}^{M(k)} \lambda_j = 1, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{M(k)}, \mu_1, \dots, \mu_{L(N_{\min}-k-1, k+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема 2.1 позволяет полностью решить задачу быстрогодействия для системы (1.1) с ограничениями (2.3), используя только средства линейного программирования. Данный результат основывается на использовании аппарата динамического программирования при рассмотрении времени быстрогодействия для следующего состояния (2.2) в качестве значений функции будущих потерь.

Аналогичный подход в общем случае, когда последовательность множеств допустимых значений управлений $\mathcal{U}$ состоит из произвольных выпуклых компактов, оказывается неприменимым, так как приводит к необходимости решения задач выпуклого программирования общего вида. В **разделах 2.1–2.3** решается следующая аппроксимационная задача.

Для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\{\underline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\overline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}$ обозначаются последовательности нижних и верхних оценок соответственно множества допустимых значений управлений $\mathcal{U}(k)$ системы (1.1) на k -м шаге, т.е. для каждого $m \in \mathbb{N}$ верно включение

$$\underline{\mathcal{U}}_m(k) \subset \mathcal{U}(k) \subset \overline{\mathcal{U}}_m(k),$$

где для всех $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ каждое из множеств $\underline{\mathcal{U}}_m(k), \overline{\mathcal{U}}_m(k) \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым компактом, содержащим 0. Тогда в общем случае справедливы оценки

$$\underline{N}_{\min}(m) \geq N_{\min} \geq \overline{N}_{\min}(m), \quad (2.6)$$

где $\underline{N}_{\min}(m), \overline{N}_{\min}(m)$ – время быстрогодействия для систем $(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{k=0}^{\infty})$ и $(\mathcal{A}, \{\overline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{k=0}^{\infty})$ соответственно.

Предполагая, что последовательности $\{\underline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\overline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}$ построены на основе методов полиэдральной аппроксимации, требуется сформулировать достаточные условия, при которых для произвольной конечномерной системы (1.1) найдется $m_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее равенству

$$\underline{N}_{\min}(m_0) = N_{\min} = \overline{N}_{\min}(m_0). \quad (2.7)$$

Таким образом, оптимальное управление для системы $(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}}_{m_0}(k)\}_{k=0}^{\infty})$, вычисленное на основе теоремы 2.1, окажется не только гарантирующим, т.е. удовлетворяющим оценкам (2.6), но и оптимальным для исходной системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$.

В работе исследуются свойства выпуклых компактов как элементов пространства $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$, а также вопросы сходимости оценок множеств (2.1) в смысле метрики данного пространства. В результате в виде следующих теорем формулируется решение поставленной задачи об аппроксимации.

ТЕОРЕМА 2.2 ([2, ТЕОРЕМА 2]). Пусть для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $\{\underline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ – последовательность выпуклых компактов такая, что для каждого $m \in \mathbb{N}$, $\underline{\mathcal{U}}_m(k) \subset \mathcal{U}(k)$, $\rho_H(\underline{\mathcal{U}}_m(k), \mathcal{U}(k)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Тогда почти для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для которых $N_{\min} < \infty$, существует $m_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$N_{\min} = \underline{N}_{\min}(m_1),$$

где $\underline{N}_{\min}(m_1)$ – оптимальное значение критерия в задаче быстрогодействия для системы $(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}}_{m_1}(k)\}_{k=0}^{\infty})$.

ТЕОРЕМА 2.3 ([2, ТЕОРЕМА 3]). Пусть для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $\{\overline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ – последовательность выпуклых компактов такая, что для каждого $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}(k) \subset \overline{\mathcal{U}}_m(k)$, $\rho_H(\overline{\mathcal{U}}_m(k), \mathcal{U}(k)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Тогда почти для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для которых $N_{\min} < \infty$, существует

$m_2 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$N_{\min} = \overline{N_{\min}}(m_2),$$

где $\overline{N_{\min}}(m_2)$ – оптимальное значение критерия в задаче быстрогодействия для системы $(\mathcal{A}, \{\overline{\mathcal{U}}_{m_2}(k)\}_{k=0}^{\infty})$.

Теоремы 2.2 и 2.3 определяют достаточные условия того, что применение методов полиэдральной аппроксимации позволит свести общий случай задачи быстрогодействия для исходной системы (1.1) к случаю (2.3), для которого оптимальный процесс может быть вычислен исключительно средствами линейного программирования на основе теоремы 2.1. Если метод полиэдральной аппроксимации гарантирует сходимость в смысле расстояния Хаусдорфа к аппроксимируемому множеству, то почти для всех начальных состояний гарантирующее решение окажется также и оптимальным по быстроддействию за конечное число итераций аппроксимационного алгоритма.

В **разделе 2.4** исследуются вопросы построения гарантирующего по быстроддействию управления для системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ с изначально линейными ограничениями (2.3) и стационарными уравнениями динамики:

$$A(k) \equiv A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathcal{U}(k) \equiv \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

Применение теоремы 2.1 для построения оптимальных по быстроддействию процессов, влечет значительные вычислительные затраты. Демонстрируется, что применение аппарата полиэдральных аппроксимаций в случае (2.3) позволяет решить поставленную задачу быстрее, но с меньшей точностью в смысле времени быстрогодействия.

При линейных ограничениях на управление согласно теореме 2.1, лемме 2.1 и соотношениям (2.2) сложность вычисления $N_{\min}$ и оптимального управления определяется размерностью и числом ограничений задачи (2.5), что напрямую связано с числом вершин множеств 0-управляемости (2.1). Эту величину возможно снизить в условиях стационарности системы (2.8), применив алгоритм полиэдральной аппроксимации к многограннику $\mathcal{X}(N, 0)$ для построения его оценки $\hat{\mathcal{X}}(N, 0)$ при некотором значении $N \in \mathbb{N}$ и тем самым перейдя к оценкам аналогичным (2.6). В качестве критерия точности описания рассматривается расстояние Хаусдорфа.

Формально данная задача представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{card Ext } \hat{\mathcal{X}}(N, 0) &\rightarrow \min \\ \rho_H(\hat{\mathcal{X}}(N, 0), \mathcal{X}(N, 0)) &\leq \varepsilon_0, \\ \text{Ext } \hat{\mathcal{X}}(N, 0) &\subset \text{Ext } \mathcal{X}(N, 0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – заданная допустимая погрешность аппроксимации. Фактически задача (2.9) предполагает исключение как можно большего числа вершин из многогранника $\hat{\mathcal{X}}(N, 0)$ при сохранении изначально заданного порядка погрешности.

Доказывается, что вычисление расстояния Хаусдорфа между двумя вло-

женными многогранниками сводится к решению M задач квадратичного программирования с N неотрицательными переменными и одним ограничением вида равенство, где M и N – число вершин большего и меньшего по включению многогранников соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 ([16, СЛЕДСТВИЕ 1]). Пусть $\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^N\} \subset \mathbb{R}^n$, $\text{Ext } \mathcal{X} = \{x^1, \dots, x^N\}$, $\mathcal{Y} = \text{conv}\{y^1, \dots, y^M\} \subset \mathbb{R}^n$, $\text{Ext } \mathcal{Y} = \{y^1, \dots, y^M\}$, $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, $X = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T \in \mathbb{R}^N$. Тогда

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max_{j=1, M} \sqrt{\|y^j\|^2 + \min_{\substack{\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0, i=1, N}} (\lambda^T X^T X \lambda - 2\lambda^T X^T y^j)}.$$

Для решения задачи (2.9) разрабатываются два алгоритма полиэдральной аппроксимации произвольного многогранника $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^N\}, \text{Ext } \mathcal{X} = \{x^1, \dots, x^N\}.$$

Если для некоторого $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, N\}$ ввести обозначения

$$\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}) = \begin{cases} \text{conv}\{x^i : i \in \mathcal{I}\}, & \mathcal{I} \neq \emptyset, \\ \{0\}, & \mathcal{I} = \emptyset, \end{cases} \quad \varepsilon(\mathcal{I}) = \rho_H(\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}), \mathcal{X}),$$

то задачу (2.9) можно преобразовать в эквивалентный вид:

$$\text{card } \mathcal{I} \rightarrow \min_{\substack{\mathcal{I} \subset \{1, \dots, N\} \\ \varepsilon(\mathcal{I}) \leq \varepsilon_0}}. \quad (2.10)$$

Задача (2.10) решается при помощи следующих алгоритмов.

АЛГОРИТМ 2.1. 1. Положить $\mathcal{I}'_N = \{1, \dots, N\}$ и $k = N$.

2. Если $k = 0$, то завершить алгоритм.

3. На основе следствия 2.1 вычислить

$$j_k = \arg \min_{j \in \mathcal{I}'_k} \varepsilon(\mathcal{I}'_k \setminus \{j\}) = \arg \min_{j \in \mathcal{I}'_k} \rho_H(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}'_k \setminus \{j\})).$$

4. Если $\varepsilon(\mathcal{I}'_k \setminus \{j_k\}) > \varepsilon_0$, то завершить алгоритм.

5. Иначе положить $\mathcal{I}'_{k-1} = \mathcal{I}'_k \setminus \{j_k\}$, уменьшить k на 1 и перейти к шагу 2.

АЛГОРИТМ 2.2. 1. Положить $\mathcal{I}''_0 = \emptyset$ и $k = 0$.

2. На основе следствия 2.1 вычислить $\varepsilon(\mathcal{I}''_k)$. Если $\varepsilon(\mathcal{I}''_k) \leq \varepsilon_0$, то положить $\mathcal{I}'_k = \mathcal{I}''_k$ и перейти к шагу 2 алгоритма 1.

3. Исходя из расчетов, проведенных в пункте 2, вычислить

$$i_k = \arg \max_{i \in \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{I}_k''} \left(\inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}_k'')} \|x - x^i\| \right).$$

4. Положить $\mathcal{I}_{k+1}'' = \mathcal{I}_k'' \cup \{i_k\}$, увеличить k на 1 и перейти к шагу 2.

Вообще говоря, алгоритмы 2.1 и 2.2 не позволяют точно решить задачу (2.10). Построенный в результате набор индексов $\tilde{\mathcal{I}} \subset \{1, \dots, N\}$ может не быть оптимальным. Гарантируется только его допустимость с точки зрения погрешности и неувлучшаемость:

1. $\varepsilon(\tilde{\mathcal{I}}) \leq \varepsilon_0$;
2. $\varepsilon(\tilde{\mathcal{I}}) > \varepsilon_0$, для всех $\mathcal{I} \subset \tilde{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} \neq \tilde{\mathcal{I}}$.

Однако в вычислительных экспериментах демонстрируется достаточно высокая точность результирующих наборов в сравнении с оптимальными. С другой стороны, доказывается полиномиальная вычислительная сложность алгоритмов 2.1 и 2.2, что позволяет эффективно использовать их на практике.

С точки зрения решения исходной задачи быстродействия алгоритмы 2.1 и 2.2 используются для аппроксимации элементов последовательности (2.1) при достаточно больших значениях $N \in \mathbb{N}$. Причем данная процедура проводится многократно на различных шагах по мере того, как число вершин текущего многогранника $\mathcal{X}(N, 0)$ становится неприемлемо большим.

Через $\text{Approx}(\mathcal{X}, \varepsilon_0)$ обозначается результат аппроксимации многогранника $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, произведенный с точностью $\varepsilon_0 > 0$. Т.е. $\text{Approx}(\mathcal{X}, \varepsilon_0)$ определяется из условий

$$\rho_H(\text{Approx}(\mathcal{X}, \varepsilon_0), \mathcal{X}) \leq \varepsilon_0, \quad \text{Ext } \text{Approx}(\mathcal{X}, \varepsilon_0) \subset \text{Ext } \mathcal{X}.$$

Для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выбираются $1 < N_1 < \dots < N_m$ — номера шагов, на которых производится аппроксимация множеств 0-управляемости в соответствии с алгоритмами 2.1 или 2.2. Точность каждой аппроксимации составляет $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ соответственно. Аппроксимирующая последовательность определяется рекуррентно:

$$\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(N, 0) = \begin{cases} \mathcal{X}(N, 0), & N < N_1, \\ \text{Approx}(\mathcal{X}(N_1, 0), \varepsilon_1), & N = N_1, \\ \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}}(N, 0), & N_1 < N < N_m, \\ \text{Approx}(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}}(N_m, 0), \varepsilon_m), & N = N_m, \\ A^{-1} \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(N-1, 0) + (-A^{-1} \mathcal{U}_0), & N > N_m. \end{cases} \quad (2.11)$$

Гарантирующее управление на основе аппроксимационных алгоритмов определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.4 ([16, ТЕОРЕМА 2]). Пусть $\det A \neq 0$, справедливо (2.8) и (2.3), для всех $N \in \mathbb{N}$ множества (2.11) допускают представление

$$\hat{\mathcal{X}}(N, 0) = \text{conv} \left\{ \hat{x}^1(N), \dots, \hat{x}^{\hat{L}(N)}(N) \right\} \quad \hat{L}(N) = \text{card Ext } \hat{\mathcal{X}}(N),$$

и верно включение $x_0 \in \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(\overline{N_{\min}}, 0) \setminus \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(\overline{N_{\min}} - 1, 0)$.

Тогда процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{\overline{N_{\min}}}$ является гарантирующим в задаче быстрогодействия, если определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + u^*(k), \\ x^*(0) &= x_0, \quad u^*(k) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^* u^j, \end{aligned}$$

где $\lambda_1^*, \dots, \lambda_M^*$ представляют собой решение ЗЛП

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\hat{L}(\overline{N_{\min}}-k-1)} \mu_i &\rightarrow \min, \\ Ax^*(k) + \sum_{j=1}^M \lambda_j u^j &= \sum_{i=1}^{\hat{L}(\overline{N_{\min}}-k-1)} \mu_i \hat{x}^i(\overline{N_{\min}} - k - 1), \\ \sum_{j=1}^M \lambda_j &= 1, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_M, \mu_1, \dots, \mu_{\hat{L}(\overline{N_{\min}}-k-1)} \geq 0. \end{aligned}$$

В теореме 2.4 нет указаний на то, как выбрать моменты аппроксимаций $N_1, \dots, N_m$. На практике для определения N_k может быть использовано ограничение на максимальное число вершин многогранника, то есть для некоторого фиксированного $C_{\max} \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$N_k = \min\{N \in \mathbb{N}: \text{card Ext } \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{k-1}}(N) \geq C_{\max}\}.$$

Численные эксперименты позволяют оценить снижение сложности решения задачи быстрогодействия в зависимости от $N_{\min}$ с экспоненциальной до линейной за счет использования теоремы 2.4 вместо теоремы 2.1.

Отдельно в **разделе 2.5** рассматривается задача априорного оценивания величины $N_{\min}$ для случая стационарных систем (2.8). Согласно (2.2) и теоремам 2.2 и 2.3 точное вычисление $N_{\min}$ в общем случае сводится к построению класса множеств 0-управляемости (2.1) и их полиэдральной аппроксимации. Сама по себе данная процедура является весьма трудоемкой. Требуется для матрицы A и множества $\mathcal{U}_0$ вычислить априорную оценку $N_{\min}$ без построения последовательности $\{\mathcal{X}(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$. Т.е. необходимо явно описать зависимости

$$N_{\min} = N_{\min}(x_0; A, \mathcal{U}_0), \quad (2.12)$$

$$\overline{N_{\min}}(x_0; A, \mathcal{U}_0) \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}(x_0; A, \mathcal{U}_0). \quad (2.13)$$

Решение задачи априорного оценивания времени быстрогодействия осуществляется при помощи аппарата собственных множеств линейных операторов. Компакт $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ называется собственным множеством отображения $A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$, соответствующим собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$, если $\mathcal{X} \neq \{0\}$ и $A\mathcal{X} = \alpha\mathcal{X}$. Собственное множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ называется нетривиальным, если $\mathcal{X}$ является выпуклым телом и $0 \in \text{int } \mathcal{X}$.

Доказывается основной результат, определяющий условия существования нетривиальных собственных множеств и их структуру для различных линейных операторов.

ТЕОРЕМА 2.5 ([20, ТЕОРЕМА 1]). *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обладает нетривиальным собственным множеством $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, соответствующим собственному значению α .*

Тогда либо $A = O$ и любое компактное множество будет собственным, $\alpha = 0$. Либо $\alpha \neq 0$ и выполняются следующие условия:

1. *A обратима;*
2. *A диагонализируема, т.е. обладает n линейно независимыми собственными векторами;*
3. *все собственные значения матрицы A равны по модулю $|\alpha|$;*
4. *$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ является нетривиальным собственным множеством A тогда и только тогда, когда $S^{-1}\mathcal{X}$ является нетривиальным собственным множеством Λ , где*

$$A = \alpha S \Lambda S^{-1},$$

$$\Lambda = \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_2}, A_{\varphi_1}, \dots, A_{\varphi_{n_3}} \right), \quad (2.14)$$

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0; 2\pi), \quad n_1 + n_2 + 2n_3 = n.$$

Теорема 2.5 определяет основные принципы, которыми следует пользоваться при построении нетривиальных собственных множеств для линейного преобразования A . В общем случае данная задача либо не имеет решения, либо может быть сведена к аналогичной для матрицы вида (2.14). Если в конечномерной системе (1.1) с условием (2.8) множество $\mathcal{U}_0$ является собственным множеством отображения A , то в силу леммы 2.1 построение множества 0-управляемости оказывается тривиальным и сводится к вычислению суммы геометрической прогрессии. Однако, как следует из теоремы 2.5, такое возможно только тогда, когда все собственные значения A равны по модулю, что является весьма частным случаем. Тем не менее к данному условию можно свести любую систему $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$, удовлетворяющую условию (2.8) посредством декомпозиции.

Для выпуклого $\mathcal{U}_0 \in \mathbb{K}_n$, содержащего 0, вводится функция

$\hat{N}(\cdot, \cdot, \mathcal{U}_0): \mathbb{R}^n \times (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\hat{N}(x_0, \alpha, \mathcal{U}_0) = \begin{cases} \mu(x_0, \mathcal{U}_0), & \alpha = 1, \\ -\frac{\ln(1 - (\alpha - 1)\mu(x_0, \mathcal{U}_0))}{\ln \alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Для произвольного $\gamma \in \mathbb{R}$ под $[\gamma]$ понимается минимальное целое число не меньшее, чем γ :

$$[\gamma] = \min\{k \in \mathbb{Z}: \gamma \leq k\}.$$

ТЕОРЕМА 2.6 ([20, ТЕОРЕМА 3]). Пусть в системе (1.1) с условием (2.8) матрица A диагонализируема, $\det A \neq 0$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожденная матрица перехода в вещественный жорданов базис A , выбранная так, чтобы для некоторых $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \dots, \Lambda_m \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ вида (2.14) и $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ было верно представление

$$S^{-1}AS = \Lambda = \text{diag}(\alpha_1 \Lambda_1, \dots, \alpha_m \Lambda_m).$$

Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $N_{\min} < \infty$, справедливы оценки

$$\left[\max_{i=1, \overline{m}} \hat{N}(y_{0,i}, \alpha_i, -\overline{\mathcal{U}}_{0,i}) \right] \leq N_{\min} \leq \left[\max_{i=1, \overline{m}} \hat{N}(y_{0,i}, \alpha_i, -\underline{\mathcal{U}}_{0,i}) \right],$$

где $S^{-1}x_0 = (y_{0,1}^T, \dots, y_{0,m}^T)^T$, для всех $i = \overline{1, m}$ верно, что $y_{0,i} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\overline{\mathcal{U}}_{0,i}$, $\underline{\mathcal{U}}_{0,i}$ – нетривиальные собственные множества отображения Λ_i , соответствующие собственному числу 1 и удовлетворяющие включению

$$\underline{\mathcal{U}}_{0,1} \times \dots \times \underline{\mathcal{U}}_{0,m} \subset S^{-1}\mathcal{U}_0 \subset \overline{\mathcal{U}}_{0,1} \times \dots \times \overline{\mathcal{U}}_{0,m}.$$

Теорема 2.6 решает задачу построения априорных оценок (2.13) для начального состояния x_0 в случае, когда у матрицы системы A существует n линейно независимых собственных векторов. Данный факт существен, так как в силу теоремы 2.5 у недиагонализируемой матрицы не существует нетривиальных собственных множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Вообще говоря, из условия $N_{\min} < \infty$ для исходной системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ не следует аналогичное условие для вспомогательной системы $(\{\Lambda\}_{k=0}^\infty, \{\underline{\mathcal{U}}_0\}_{k=0}^\infty)$, если система не является устойчивой, а предельное множество 0-управляемости ограничено. В этом случае можно положить значение $\underline{N}_{\min}$ равным бесконечности, что сохранит формальную корректность теоремы 2.6, но сделает полученные оценки менее конструктивными.

В третьей главе изучаются вопросы построения множеств достижимости и 0-управляемости для линейных стационарных систем с дискретным вре-

менем и суммарным ограничением на скалярное управление:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ x(0) &= x_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u(k)|^r \leq 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}$ – скалярное управление, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ – матрицы системы, $r \in [1; +\infty)$ – параметр, определяющий тип суммарного ограничения на управление. В ряде случаев используется предположение о том, что система (3.1) управляема, т.е. выполнено условие

$$\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n. \quad (3.2)$$

Хотя некоторые свойства справедливы и для систем (3.1), не удовлетворяющих (3.2).

Для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\mathcal{Y}_r(N)$ обозначается множество достижимости системы (3.1), т.е. множество тех состояний, в которые можно перевести систему (3.1) за N шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_r(N) = \begin{cases} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} bu(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^r \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Аналогично для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\mathcal{X}_r(N)$ обозначается множество 0-управляемости системы (3.1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (3.1) за N шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_r(N) = \begin{cases} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} bu(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^r \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

В том числе необходимо изучить свойства предельных множеств $\mathcal{Y}_{r,\infty}, \mathcal{X}_{r,\infty} \subset \mathbb{R}^n$ достижимости и 0-управляемости системы (3.1) соответственно. Здесь $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ – множество тех состояний, в которые можно перевести систему (3.1) за конечное число шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_{r,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_r(N). \quad (3.5)$$

Аналогично $\mathcal{X}_{r,\infty}$ – множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (3.1) за конечное число шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_{r,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_r(N). \quad (3.6)$$

Существенными отличиями обладают два случая: $r = 1$ и $r \in (1; +\infty)$,

каждый из которых рассматривается отдельно. Для случая $r \in (1; +\infty)$ вводится двойственное по Гельдеру число $q = \frac{r}{r-1}$. Общее описание множеств достижимости (3.3) и 0-управляемости (3.4) формулируется в виде следующих утверждений.

ЛЕММА 3.1 ([3, ЛЕММА 1]). Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_1(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_1(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (3.1) определяются соотношениями (3.3) и (3.4) соответственно, $N \in \mathbb{N}$. Тогда

1. множество $\mathcal{Y}_1(N)$ допускает представление

$$\mathcal{Y}_1(N) = \text{conv} \{b, -b, Ab, -Ab, \dots, A^{N-1}b, -A^{N-1}b\};$$

2. если $\det A \neq 0$, то множество $\mathcal{X}_1(N)$ допускает представление

$$\mathcal{X}_1(N) = \text{conv} \{A^{-1}b, -A^{-1}b, \dots, A^{-N}b, -A^{-N}b\}.$$

ТЕОРЕМА 3.1 ([5, ТЕОРЕМА 1]). Пусть $r \in (1; +\infty)$, семейства множеств $\{\mathcal{Y}_r(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_r(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (3.1) определяются согласно (3.3) и (3.4) соответственно. Тогда

1. если $N_2 > N_1$, то $\mathcal{Y}_r(N_1) \subset \mathcal{Y}_r(N_2)$;

2. если $r_2 > r_1$, то $\mathcal{Y}_{r_1}(N) \subset \mathcal{Y}_{r_2}(N)$, $N \in \mathbb{N}$;

3. $\mathcal{Y}_r(N)$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество;

4. если выполнено условие (3.2) и $N \geq n$, то для любых $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верны соотношения для опорной точки:

$$\dim \mathcal{N} \left(x_{\mathcal{Y}_r(N)}^*(p), \mathcal{Y}_r(N) \right) = 1,$$

$$x_{\mathcal{Y}_r(N)}^*(p) = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{N-1} |(p, A^i b)|^q \right)^{\frac{1}{r}}} \sum_{i=0}^{N-1} A^i b |p, A^i b|^{q-1} \text{sign}((p, A^i b));$$

5. если $\det A \neq 0$, то пункты 1–4 также справедливы и для семейства множеств $\{\mathcal{X}_r(N)\}_{N=0}^{\infty}$ при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$.

При $r = 1$ лемма 3.1 гарантирует, что множества (3.3) и (3.4) являются многогранниками. При $r \in (1; +\infty)$ теорема 3.1 предлагает их описание посредством функции опорной точки. В общем случае для множеств достижимости и 0-управляемости справедливы свойства монотонности, компактности и выпуклости.

Для исследования свойств предельных множеств (3.5) и (3.6) фиксируется $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^n$ – вещественный жорданов базис матрицы A , где каждый

базисный вектор соответствует некоторому собственному значению A . Далее определяются следующие инвариантные подпространства:

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует с. з. } \lambda, |\lambda| < 1\},$$

$$\mathbb{L}_{>1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует с. з. } \lambda, |\lambda| > 1\}.$$

$$\mathbb{L}_{=1} = \text{Lin}\{h_i : h_i - \text{собственный вектор, соответствующий с. з. } \lambda, |\lambda| = 1\}.$$

Через $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ обозначается множество всех собственных значений матрицы A с учетом кратности, т.е. спектр. При помощи данных подпространств формулируются и доказываются свойства множеств (3.5) и (3.6), а также необходимые и достаточные условия их ограниченности.

ТЕОРЕМА 3.2 ([3, ТЕОРЕМА 1], [19, ТЕОРЕМА 3]). *Пусть множества $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty}$ для системы (3.1) определяются соотношениями (3.5) и (3.6) соответственно. Тогда*

1. $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $b \in \text{Lin}(\mathbb{L}_{<1} \cup \mathbb{L}_{=1})$, а если $\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| < 1$, то существует $N'_{\max} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathcal{Y}_{1,\infty} = \mathcal{Y}_1(N'_{\max});$$

2. $\mathcal{X}_{1,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $b \in \text{Lin}(\mathbb{L}_{>1} \cup \mathbb{L}_{=1})$, а если $\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| > 1$, то существует $N''_{\max} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathcal{X}_1(N''_{\max}).$$

ТЕОРЕМА 3.3 ([5, ТЕОРЕМЫ 2, 3]). *Пусть $r \in (1; +\infty)$, множества $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ и $\mathcal{X}_{r,\infty}$ определяются соотношениями (3.5) и (3.6) соответственно. Тогда $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $b \in \mathbb{L}_{<1}$, а $\mathcal{X}_{r,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$, $b \in \mathbb{L}_{>1}$.*

Если $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ ограничено и справедливо условие (3.2), то:

1. $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ строго выпукло;
2. для любых $y \in \partial \mathcal{Y}_{r,\infty}$

$$\dim \mathcal{N}(y, \mathcal{Y}_{r,\infty}) = 1;$$

3. функция опорной точки $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ имеет вид

$$x_{\mathcal{Y}_{r,\infty}}^*(p) = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{\infty} |(p, A^i b)|^q \right)^{\frac{1}{r}}} \sum_{i=0}^{\infty} A^i b |(p, A^i b)|^{q-1} \text{sign}((p, A^i b));$$

4. опорная функция $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ имеет вид

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{Y}_{r,\infty}) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |(p, A^i b)|^q \right)^{\frac{1}{q}};$$

5. если $\mathcal{X}_{r,\infty}$ ограничено, то пункты 1–4 теоремы также справедливы и для множества $\mathcal{X}_{r,\infty}$ при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$.

Теорема 3.2 определяет достаточные условия для $r = 1$, при которых множества (3.3) и (3.4) образуют стационарную последовательность, и, как следствие, множества (3.5) и (3.6) являются многогранниками, а также устанавливает необходимые и достаточные условия их ограниченности. Теорема 3.3 предлагает необходимые и достаточные условия ограниченности множеств (3.5) и (3.6) и задает явный вид их опорных функций для $r \in (1; +\infty)$.

Также рассматривается частный случай $r = 2$, при котором доказывается, что множества достижимости и 0-управляемости, как предельные, так и за конечное число шагов, являются эллипсоидами. Явным образом описывается их структура.

Использование теоремы 3.3 для построения множеств (3.5) и (3.6) требует вычисление точной суммы рядов в функции опорной точки или опорной функции, что зачастую оказывается практически нереализуемо. По этой причине в **разделе 3.5** отдельно рассматривается метод построения внешней оценки данных множеств с любой наперед заданной точностью. В этом случае множества (3.5) и (3.6) удастся представить в качестве пределов последовательностей (3.3) и (3.4) соответственно в $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$. Точность приближения определяется посредством аппарата сжимающих отображений, а в совокупности со свойствами расстояния Хаусдорфа это позволяет получить искомые внешние оценки.

Существенным также является введение нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_{r_0} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{r_0} \right)^{\frac{1}{r_0}}, & r_0 \geq 1, \\ \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, & r_0 = \infty. \end{cases}$$

Под $\mathcal{B}_R^{r_0}(x_0) \subset \mathbb{R}_{r_0}^n$ понимается шар радиуса R с центром в x_0 в пространстве $\mathbb{R}_{r_0}^n$.

Через $l_q^n = \bigtimes_{i=1}^n l_q$ обозначается n -арное декартово произведение лебегова пространства l_q . Любой $B \in l_q^n$ допускает представление

$$B = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots \end{pmatrix}, \quad y^1, \dots, y^n \in l_q. \quad (3.7)$$

Это позволяет рассматривать B в качестве линейного и ограниченного операто-

ра $B: l_r \rightarrow \mathbb{R}^n$ и ввести на l_q^n соответствующую операторную норму. Для случая $r = 1$ считается, что $q = \infty$. В частности, интерес представляют следующие два оператора:

$$Y_N = (b, Ab, \dots, A^{N-1}b, 0, \dots) \in l_q^n, \quad X_N = (A^{-1}b, A^{-2}b, \dots, A^{-N}b, 0, \dots) \in l_q^n.$$

ТЕОРЕМА 3.4 ([7, ТЕОРЕМЫ 1, 3]). Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^M: \mathbb{R}_{r_0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{r_0}^n$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\alpha_{r_0} \in [0; 1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\rho_H(\overline{\mathcal{Y}}_{r,\infty}, \mathcal{Y}_r(NM)) \leq R_N = \frac{\alpha_{r_0}^N}{1 - \alpha_{r_0}} \|Y_M\|_{l_q^n},$$

$$\mathcal{Y}_{r,\infty} \subset \mathcal{Y}_r(NM) + \mathcal{B}_{R_N}^{r_0}(0).$$

ТЕОРЕМА 3.5 ([7, ТЕОРЕМЫ 2, 4]). Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^{-M}: \mathbb{R}_{r_0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{r_0}^n$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\beta_{r_0} \in [0; 1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}}_{r,\infty}, \mathcal{X}_r(NM)) \leq R_N = \frac{\beta_{r_0}^N}{1 - \beta_{r_0}} \|X_M\|_{l_q^n},$$

$$\mathcal{X}_{r,\infty} \subset \mathcal{X}_r(NM) + \mathcal{B}_{R_N}^{r_0}(0).$$

Поскольку величина R_N в теоремах 3.4 и 3.5 стремится к 0, внешние оценки предельных множеств достижимости $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ и 0-управляемости $\mathcal{X}_{r,\infty}$ системы (3.1) могут быть построены с произвольной точностью в предположении, что множества достижимости $\{\mathcal{Y}_r(N)\}_{N=0}^\infty$ и 0-управляемости $\{\mathcal{X}_r(N)\}_{N=0}^\infty$ за конечное число шагов построены, например, при помощи теоремы 3.1.

Определенную сложность представляет собой вычисление величин M , α_{r_0} , β_{r_0} , $\|Y_M\|_{l_q^n}$ и $\|X_M\|_{l_q^n}$. В общем случае α_{r_0} является операторной нормой $A^M: \mathbb{R}_{r_0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{r_0}^n$:

$$\alpha_{r_0} = \max_{\|x\|_{r_0} \leq 1} \|A^M x\|_{r_0}. \quad (3.8)$$

Задача выпуклого программирования (3.8) может быть решена численно для выбранного значения параметра $r_0 \in [1; +\infty]$. При этом для значений $r_0 \in \{1, 2, \infty\}$ известны аналитические представления:

$$\alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \alpha_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}, \quad \alpha_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

где через a_{ij} обозначены компоненты матрицы A^M . Значение β_{r_0} определяется аналогичным образом при замене матрицы A на A^{-1} . Величина M может быть определена через последовательное вычисление α_{r_0} или β_{r_0} , пока не будет вы-

полнено условие $\alpha_{r_0} \in [0; 1)$ при построении $\mathcal{Y}_{r,\infty}$ или $\beta_{r_0} \in [0; 1)$ при построении $\mathcal{X}_{r,\infty}$. Операторные нормы $\|Y_M\|_{l_q^n}$ и $\|X_M\|_{l_q^n}$ могут быть вычислены в ходе решения соответствующих задач выпуклого программирования, сформулированных в работе. Выбор параметра $r_0 \in [1; +\infty]$ не существен, однако наиболее удобны значения $r_0 \in \{1, +\infty\}$, поскольку в этом случае шар $\mathcal{B}_{R_N}^{r_0}(0)$ оказывается многогранником.

Таким образом, теоремы 3.2, 3.4 и 3.5 позволяют считать задачу построения множеств (3.5) и (3.6) для системы (3.1) решенной для любого значения параметра $r \in [1; +\infty)$.

В четвертой главе рассматриваются вопросы формирования оптимального по быстродействию управления для линейных стационарных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на векторное управление:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ x(0) &= x_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mu(u(k), \mathcal{U})^r \leq t^r, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $r \in [1; +\infty)$ и $t > 0$ – параметры, определяющие суммарное ограничение на управление, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое и компактное множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\det A \neq 0$ и $0 \in \text{ri} \mathcal{U}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Систему (1.1) с условием стационарности (2.8) для $\mathbb{L} = \mathbb{R}^n$ можно рассматривать в качестве предельного случая системы (4.1) при $r \rightarrow \infty$. Часть свойств у данных систем имеет общую природу и может быть обобщена, но есть и принципиальные различия, которые требуют рассмотрения класса систем с суммарными ограничениями (4.1) отдельно. С другой стороны, (3.1) является частным случаем (4.1) при выборе $\mathcal{U} = \text{conv}\{-b, b\}$. Однако более широкий выбор множества $\mathcal{U}$ делает проблематичным обобщение результатов главы 3 на случай систем (4.1).

Для системы (4.1) решается задача быстродействия, т.е. требуется перевести систему из заданного начального состояния x_0 в начало координат за минимальное число шагов $N_{\min}$. Процедура решения задачи быстродействия для дискретных систем состоит из двух этапов, первым из которых является вычисление $N_{\min}$:

$$N_{\min} = \min \left\{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1), \quad \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), \mathcal{U})^r \leq t^r \right\}.$$

Второй этап заключается в построении процесса управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющего условию $x^*(N_{\min}) = 0$. Такой процесс называется оптимальным.

Через $\{\mathcal{X}_{t,r}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ обозначается класс множеств 0-управляемости системы (4.1), где $\mathcal{X}_{t,r}(N)$ представляет собой множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (4.1) в начало координат за N шагов по-

средством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_{t,r}(N) = \begin{cases} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1), \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), \mathcal{U})^r \leq t^r \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Для краткости обозначений также полагается, что $\mathcal{X}_{1,r}(N) = \mathcal{X}_r(N)$.

С учетом (4.2) величина $N_{\min}$ определяется следующим образом:

$$N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}_{t,r}(N)\}. \quad (4.3)$$

Исходя из идей динамического программирования доказывается следующий критерий оптимальности процесса по быстродействию.

ЛЕММА 4.1 ([13, ЛЕММА 2]). *Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}_{t,r}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (4.2). Тогда процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ оптимален по быстродействию для системы (4.1) тогда и только тогда, когда для некоторого $t_0 \leq t$ выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} Ax^*(k) + u^*(k) &\in \mathcal{X}_{t_{k+1},r}(N_{\min} - k - 1), \\ t_{k+1} &= (t_k^r - \mu(u^*(k), \mathcal{U})^r)^{\frac{1}{r}}, \quad k = \overline{0, N_{\min} - 1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В силу (4.3) решение первого этапа задачи быстродействия сводится к последовательному построению множеств 0-управляемости и проверки принадлежности им начального состояния системы. Согласно лемме 4.1 решение второго этапа также осуществляется при помощи класса (4.2).

По этой причине рассматриваются вопросы построения множеств 0-управляемости для системы (4.1). Для этого вводится для двух множеств $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ следующая операция, называемая обобщенной суммой по Минковскому:

$$\mathcal{X} +_r \mathcal{U} = \bigcup_{\substack{t^r + s^r \leq 1 \\ t, s \geq 0}} (t\mathcal{X} + s\mathcal{U}). \quad (4.5)$$

Основные свойства (4.5) представляются в виде следующей леммы.

ЛЕММА 4.2 ([13, ЛЕММЫ 4, 9]). *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

1. *если $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ выпуклые, то $\mathcal{X} +_r \mathcal{U}$ – выпуклое множество;*
2. *если $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ компактные, то $\mathcal{X} +_r \mathcal{U}$ – компактное множество;*
3. *если $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ относительно строго выпуклые, $0 \in \text{ri } \mathcal{X} \cap \text{ri } \mathcal{U}$, $r > 1$, то $\mathcal{X} +_r \mathcal{U}$ – относительно строго выпуклое множество.*

Также в работе подробно рассматриваются вопросы вычисления нормальных конусов, опорных функций и опорных точек относительно строго выпуклых множеств при обобщенной сумме Минковского. Полученные утверждения позволяют сформулировать представление для множеств 0-управляемости (4.2) и описать их наиболее важные свойства.

ТЕОРЕМА 4.1 ([9, ТЕОРЕМЫ 1–3]). Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}_{t,r}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (4.2), $\det A \neq 0$. Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

1. справедливо представление

$$\mathcal{X}_{t,r}(N) = -t (A^{-1}\mathcal{U} +_r \dots +_r A^{-N}\mathcal{U});$$

2. $\mathcal{X}_{t,r}(N)$ выпуклое и компактное;

3. верно соотношение для опорной функции

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{X}_{t,r}(N)) = \begin{cases} t \left(\sum_{k=1}^N \mathcal{S}(-(A^{-k})^T p, \mathcal{U})^{\frac{r}{r-1}} \right)^{\frac{r-1}{r}}, & r > 1, \\ t \max_{k=1, N} \{ \mathcal{S}(-(A^{-k})^T p, \mathcal{U}) \}, & r = 1; \end{cases}$$

4. если $\mathcal{U}$ относительно строго выпуклое и $r > 1$, то $\mathcal{X}_{t,r}(N)$ относительно строго выпуклое, а для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Lin}^\perp \mathcal{X}_{t,r}(N)$ верно выражение для опорной точки

$$x_{\mathcal{X}_{t,r}(N)}^*(p) = -t \frac{\sum_{k=1}^N \left(\mathcal{S}(-(A^{-k})^T p, \mathcal{U})^{\frac{1}{r-1}} A^{-k} x_{\mathcal{U}}^*(-(A^{-k})^T p) \right)}{\left(\sum_{k=1}^N \mathcal{S}(-(A^{-k})^T p, \mathcal{U})^{\frac{r}{r-1}} \right)^{\frac{1}{r}}}.$$

Для случая $r = 1$ описание множеств (4.2) получено отдельно.

СЛЕДСТВИЕ 4.1 ([29, ЛЕММА 1]). Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}_{t,1}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (4.2), $\det A \neq 0$, существуют $u^1, \dots, u^M \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\mathcal{U} = \text{conv} \{u^1, \dots, u^M\}.$$

Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}_{t,1}(N) = \text{conv} \{-tA^{-k}u^j : j = \overline{1, M}, k = \overline{1, N}\};$$

Теорема 4.1 и следствие 4.1 в совокупности со свойствами обобщенной суммы по Минковскому позволяют сформулировать условия оптимальности процесса управления по быстродействию на основе леммы 4.1. Для значений параметра $r = 1$ и $r > 1$ результаты существенно отличаются.

ТЕОРЕМА 4.2 ([17, ТЕОРЕМА 2]). Пусть в системе (4.1) множество $\mathcal{U}$ относительно строго выпукло, $r > 1$, $x_0 \in \mathcal{X}_{t,r}(N_{\min}) \setminus \mathcal{X}_{t,r}(N_{\min} - 1)$, наборы $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}} \subset \mathbb{R}^n$, $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{\min}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ определяются

согласно рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
 x^*(k+1) &= Ax^*(k) + u^*(k), \\
 \psi(k+1) &= (A^{-1})^T \psi(k), \\
 u^*(k) &= t_0 \left(\frac{\mathcal{S}(\psi(k+1), \mathcal{U})}{\mathcal{S}(-\psi(0), \mathcal{X}_r(N_{\min}))} \right)^{\frac{1}{r-1}} \arg \max_{u \in \mathcal{U}} (\psi(k+1), u), \\
 x^*(0) &= x_0, \\
 t_0 &= \mu(x_0, \mathcal{X}_r(N_{\min})) \leq t, \\
 -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}_{t_0, r}(N_{\min})) \setminus \text{Lin}^\perp \mathcal{X}_{t_0, r}(N_{\min}).
 \end{aligned}$$

Тогда

1. процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ оптимален в задаче быстрогодействия для системы (4.1);

2. для всех $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ верно включение

$$-\psi(k) = \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}_{t_k, r}(N_{\min} - k)) \setminus \text{Lin}^\perp \mathcal{X}_{t_k, r}(N_{\min} - k),$$

$$t_k = t_0 \left(\frac{\mathcal{S}(-\psi(k), \mathcal{X}_r(N_{\min} - k))}{\mathcal{S}(-\psi(0), \mathcal{X}_r(N_{\min}))} \right)^{\frac{1}{r-1}};$$

3. если $t = t_0$, то оптимальный процесс единственный.

Предположения о значении параметра $r > 1$ и относительной строгой выпуклости множества $\mathcal{U}$ в формулировке теоремы 4.2 существенны. Для произвольных выпуклых множеств поиск оптимального управления из условия максимума может оказаться бессодержательным, поскольку решение такой оптимизационной задачи в общем случае неединственно. Для $r = 1$, кроме того что соотношения теоремы 4.2 являются формально некорректными, можно построить оптимальное управление, которое принципиально не может быть найдено из условий максимума. Это делает невозможным обобщение теоремы 4.2 на данный случай даже в виде необходимых условий оптимальности. Однако условия оптимальности могут быть сформулированы иначе.

ТЕОРЕМА 4.3 ([29, ТЕОРЕМА 2]). Пусть в системе (4.1) $r = 1$, выполнено включение $x_0 \in \mathcal{X}_{t, 1}(N_{\min})$, $\det A \neq 0$, справедливы представления

$$\mathcal{U} = \text{conv}\{u^1, \dots, u^M\}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{X}_1(N) = \text{conv}\{x^1(N), \dots, x^{L(N)}(N)\}, \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (4.7)$$

наборы $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$, $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$, $\{t_k\}_{k=0}^{N_{\min}}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + u^*(k), \\ u^*(k) &= \sum_{j=1}^M \mu_j^* u^j, \\ t_{k+1} &= t_k - \sum_{j=1}^M \mu_j^*, \quad k = \overline{0, N_{\min} - 1}, \\ x^*(0) &= x_0, \quad t_0 = \mu(x_0, \mathcal{X}_1(N_{\min})), \end{aligned}$$

где на каждом шаге $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ числа $\mu_1^*, \dots, \mu_M^*$ определяются из решения задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} \mu_1 + \dots + \mu_M &\rightarrow \min_{\lambda, \mu}, \\ Ax^*(k) + \sum_{j=1}^M \mu_j u^j &= \sum_{i=1}^{L(N_{\min}-k-1)} \lambda_i x^i(N_{\min} - k - 1), \\ t_k - \sum_{j=1}^M \mu_j &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{L(N_{\min}-k-1)} \lambda_i, & k < N_{\min} - 1, \\ 0, & k = N_{\min} - 1, \end{cases} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_{L(N_{\min}-k-1)}, \mu_1, \dots, \mu_M &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Тогда $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$ — оптимальный по быстродействию процесс.

Теоремы 4.2 и 4.3 позволяют построить оптимальное по быстродействию управление для различных систем вида (4.1). Для вычисления $\psi(0)$ из условий теоремы 4.2 можно воспользоваться пунктом 4 теоремы 4.1. Также использование теоремы 4.3 ограничено частным случаем полиэдральной структуры $\mathcal{U}$, однако ее можно использовать при $r = 1$ и для произвольных выпуклых множеств $\mathcal{U}$ (не обязательно относительно строго выпуклых), если предварительно провести их полиэдральную аппроксимацию аналогично тому, как это предлагалось в главе 2. Полученный в результате процесс будет являться гарантирующим.

В пятой главе приводится описание программы для ЭВМ, реализующей алгоритмически часть результатов предыдущих разделов. Для ряда модельных примеров проводятся расчеты, вычисляются оптимальные по быстродействию процессы и строятся множества достижимости и 0-управляемости для различных систем.

На основе теорем 2.1 и 4.3 формулируется алгоритм решения задачи быстродействия для линейной стационарной системы с дискретным временем и линейными ограничениями на управление (геометрическими или суммарными). Т.е. рассматривается либо система (1.1), (2.3), (2.8), когда $\mathbb{L} = \mathbb{R}^n$, $\det A \neq 0$, либо рассматривается система (4.1), (4.6) при $r = 1$.

АЛГОРИТМ 5.1. 1. Положить $N = 1$;

2. Построить

- в случае *геометрических* ограничений множество $\mathcal{X}(N, 0) = A^{-1}\mathcal{X}(N - 1, 0) + (-A\mathcal{U}_0)$ и получить его описание вида (2.4).
- в случае *суммарных* ограничений множество $\mathcal{X}_{t,1}(N) = \text{conv}(A^{-1}\mathcal{X}_{t,1}(N) \cup (-tA\mathcal{U}))$ и получить его описание вида (4.7).

3. Проверить

- в случае *геометрических* ограничений включение $x_0 \in \mathcal{X}(N, 0)$.
- в случае *суммарных* ограничений включение $x_0 \in \mathcal{X}_{t,1}(N)$.

4. Если данное включение выполнено, то положить $N_{\min} = N$ и перейти к шагу 5. Иначе увеличить N на 1 и перейти к шагу 2.

5. Положить $k = 0$, $x^*(0) = x_0$.

6. Вычислить $u^*(k)$, решив

- в случае *геометрических* ограничений ЗЛП (2.5).
- в случае *суммарных* ограничений ЗЛП (4.8).

7. Вычислить $x^*(k + 1) = Ax^*(k) + u^*(k)$.

8. Если $k = N_{\min} - 1$, то завершить алгоритм. Иначе увеличить k на 1 и перейти к шагу 6.

Программное обеспечение, имплементирующее алгоритм 5.1, реализуется на языке MATLAB, обладающий достаточным функционалом для эффективного решения математических задач. Для получения описаний (4.7) и (2.4) реализованы вспомогательные функции **PolyhedronUnion**(X, Y) и **MinkowskiSum**(X, Y), принимающие в качестве аргументов две матрицы X и Y , столбцами которых являются вершины двух многогранников. Точное описание искомого многогранника осуществляется при помощи встроенной функции **convhulln**, реализующей алгоритм быстрой оболочки.

Для проверки принадлежности точки многограннику на шаге 3 написана функция **MinkowskiFunctional**(x, X), которая для заданного вектора x и многогранника, вершины которого являются столбцами матрицы X , вычисляет значение функционала Минковского. Соответствующая ЗЛП решается при помощи встроенной функции **linprog**, реализующей метод внутренней точки. Построение оптимального управления происходит в ходе решения представленных в теоремах 2.1 и 4.3 задач линейного программирования (2.5) или (4.8). Их решение также осуществляется при помощи функции **linprog**.

В программе также предусмотрена возможность проведения последовательных полиэдральных аппроксимаций множеств 0-управляемости при помощи алгоритма 2.2. Для этих целей реализована функция **HausdorffDistance**(X, Y),

вычисляющая расстояние Хаусдорфа между двумя многогранниками, вершины которых объединены в матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно. В силу следствия 2.1 данная задача математически сводится к ряду задач квадратичного программирования, которые программно решаются при помощи функции **quadprog**, основанной на модификации метода внутренней точки для выпуклых задач. Сам алгоритм полиэдральной аппроксимации множества 0-управляемости реализован в виде функции **Approximate**($\mathbf{X}$, ϵ).

Также в разделах 5.3–5.5. производится численное решение задачи быстрогодействия для системы демпфирования высотного сооружения, системы стабилизации уровня глюкозы в плазме крови и системы управления движением спутника. Наиболее показательным является последняя модель.

Космический аппарат предполагается материальной точкой, находящейся в окрестности круговой орбиты. Рассматривается его движение в плоскости данной орбиты в полярных координатах R , φ и во времени s . Центр системы координат совпадает с центром масс объекта, создающим гравитационное поле. Движение спутника обуславливается силой тяжести F , реактивной силой U и описывается дифференциальными уравнениями второго порядка относительно R и φ ¹

$$m(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) = F + m\tilde{u}_1(s), \quad m\frac{d(R^2\dot{\varphi})}{ds} = m\tilde{u}_2(s),$$

где $\tilde{u}_1(s)$ и $\tilde{u}_2(s)$ – радиальная и тангенциальная компоненты удельной тяги, m – масса спутника. Пусть круговая орбита определяется своим радиусом R_0 , тангенциальной скоростью v_{T0} и нулевой радиальной скоростью. Введем отклонения радиуса реальной орбиты, радиальной и тангенциальной компонент скорости спутника от параметров круговой орбиты следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta R(s) &= R(s) - R_0, \\ \Delta v_R(s) &= \dot{R}(s), \\ \Delta v_T(s) &= R(s)\dot{\varphi}(s) - v_{T0}. \end{aligned}$$

Линеаризованная система дифференциальных уравнений, описывающая движение спутника, имеет вид²

$$\begin{aligned} \Delta \dot{R}(s) &= \Delta v_R(s), \\ \Delta \dot{v}_R(s) &= \Delta R(s) + 2\Delta v_T(s) + \tilde{u}_1(s), \\ \Delta \dot{v}_T(s) &= -\Delta v_R(s) + \tilde{u}_2(s), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\tilde{u}: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ – управляющее воздействие, осуществляемое двигателями малой тяги.

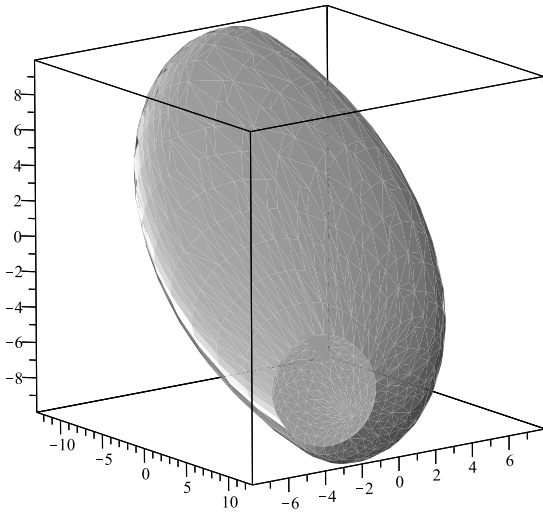
Полагается, что управление является кусочно-постоянным, т.е. принимает фиксированные значения на временных интервалах длины $\delta > 0$:

$$\tilde{u}(s) = u_k, \quad s \in [k\delta; (k+1)\delta), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

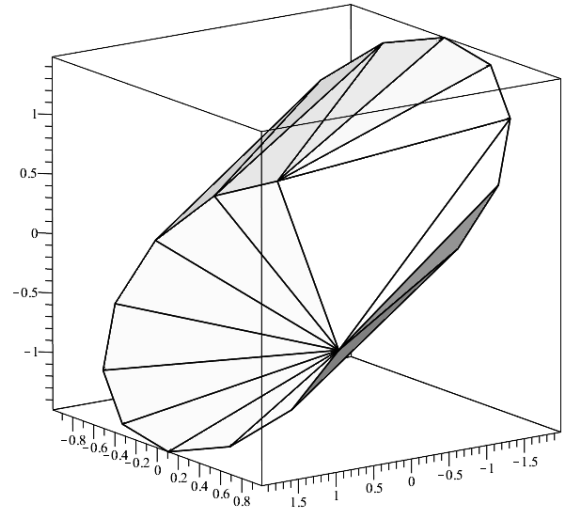
¹Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

²Малышев В.В., Красильщиков М.Н. и др. Спутниковые системы мониторинга. М.: МАИ, 2000.

Это позволяет рассмотреть в качестве наблюдаемых параметров системы вектор состояния $x(k) = (\Delta r(k\delta), \Delta v_R(k\delta), \Delta v_T(k\delta))^T$ в моменты времени $k\delta$, т.е. сразу после смены режима управления, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Данное предположение позволяет решить систему линейных дифференциальных уравнений (5.1) явно и перейти к конечно-разностным соотношениям вида (1.1) с условиями (2.3), (2.8), если в задаче накладывается ограничение на мощность двигателя, либо к конечно-разностным соотношениям вида (4.1) с условием (4.6), если в задаче накладывается ограничение на общие запасы топлива.



а) Множество $\mathcal{X}(17, 0)$ для случая геометрических ограничений



б) Множество $\mathcal{X}_1(10)$ для случая суммарных ограничений

Рис. 1. Множества 0-управляемости для дискретизированной системы (5.1).

Также в работе строится оптимальное управление для различных типов ограничений и параметров системы, формируется гарантирующий процесс на основе теоремы 2.4 и аппроксимирующей последовательности (2.11) для суммарных ограничений, проводится их сравнительный анализ в том числе с точки зрения вычислительной сложности.

В заключении подводятся итоги работы, описываются перспективы дальнейших исследований.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Достаточные условия оптимальности управления в виде регуляризованного принципа максимума в задаче быстродействия для линейных нестационарных систем с дискретным временем, бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклыми геометрическими ограничениями на управление [1, 6, 11, 15].

2. Достаточные условия оптимальности гарантирующего решения задачи быстродействия, полученного на основе аппроксимационных алгоритмов, для линейных нестационарных систем с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление [2, 21–23, 26].

3. Математический аппарат собственных множеств линейного преобразования и построенный на его основе метод априорного оценивания времени быстродействия как функции от начального состояния для линейной стационарной системы с дискретным временем, диагонализированной матрицей и геометрическими ограничениями на управление [10, 12, 13, 20].

4. Алгоритмы полиэдральной аппроксимации множеств 0-управляемости линейной стационарной системы с дискретным временем и линейными геометрическими ограничениями на управление и основанный на них метод построения гарантирующего управления в задаче быстродействия с полиномиальной вычислительной сложностью [16, 24, 27].

5. Необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости, их описание на основе аппарата опорных функций для случая линейных стационарных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление [3, 5, 19, 25, 28, 30].

6. Метод построения внешних оценок произвольного порядка точности в смысле расстояния Хаусдорфа предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных стационарных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление [4, 7, 8, 14].

7. Достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных стационарных систем с дискретным временем и относительно строго выпуклыми суммарными ограничениями на векторное управление [9, 17, 29].

8. Программное обеспечение, реализующее полученные численные методы и алгоритмы, при помощи которого решены задачи наискорейшей коррекции орбиты спутника, оптимального по быстродействию демпфирования высотного сооружения в зоне сейсмической активности и нормализации уровня глюкозы в плазме крови [18, 31].

Соответствие паспорту специальности

Результаты диссертационной работы соответствуют пунктам 1, 2, 4, 5 паспорта специальности 2.3.1:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Публикации в изданиях, входящих в Scopus и Web of Science

1. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. № 3. С. 3–25.
2. *Ибрагимов Д.Н., Новожилов Н.М., Порцева Е.Ю.* О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ.* 2021. № 12. С. 48–72.
3. *Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сытало К.И.* О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и l_1 -ограничениями // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2022. № 4. С. 3–21.
4. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ.* 2023. № 2. С. 3–34.
5. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2023. № 6. С. 3–32.
6. *Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М.* Формирование оптимального по быстродействию ограниченного управления для линейных дискретных систем на основе метода суперэллипсоидальной аппроксимации // *АиТ.* 2023. № 9. С. 37–67.
7. *Ибрагимов Д.Н.* О внешнем оценивании предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление // *АиТ.* 2024. № 4. С. 3–30.
8. *Simkina A.V., Ibragimov D.N., Kibzun A.I.* On the Method of Numerical Simulation of Limit Reachable Sets for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Control // *Вестник ЮурГУ ММП.* Т. 17. № 3. С. 46–56.
9. *Ибрагимов Д.Н.* О методе построения множеств 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2024. Т. 25. № 10. С. 503–512.
10. *Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А.* Об одном подходе к решению задачи быстродействия для линейных систем с дискретным временем на основе метода Кротова // *АиТ.* 2024. № 11. С. 3–35.

Материалы конференций, индексируемые в Scopus

11. *Ibragimov D.N., Novozhilkin N.M.* On the Speed-in-Action Problem for the Class of Linear Non-stationary Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // MOTOR 2021. CCIS. V. 1476. P. 327–341.
12. *Ibragimov D.N., Guseva S.R.* A Priori Estimates of the Objective Function in the Speed-in-Action Problem for a Linear Two-Dimensional Discrete-Time System // MOTOR 2023. LNCS. V. 13930. P. 378–393.
13. *Ibragimov D.N.* On the Method for Refining A Priori Estimates of the Objective Function in the Speed-in-Action Problem for a Linear Discrete-Time System // MOTOR 2024. CCIS. V. 2239. P. 199–213.

Публикации в изданиях, входящих в список ВАК

14. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // Тр. МАИ. 2022. № 126. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
15. *Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М.* Суперэллипсоидальные аппроксимации в задаче быстрогодействия для двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2023. Т. 13. № 2. С. 151–179.
16. *Ибрагимов Д.Н., Герасимова К.В., Мохначева А.А.* Методы численного моделирования множеств 0-управляемости линейной дискретной динамической системы с ограниченным управлением на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации // Моделирование и анализ данных. 2023. Т. 16. № 4. С. 84–110.
17. *Ибрагимов Д.Н.* Коррекция орбиты спутника при ограничении на суммарный запас топлива // Тр. МАИ. 2025. № 140. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
18. *Ибрагимов Д.Н., Кибзун А.И.* Программная реализация алгоритмов решения задачи быстрогодействия для линейных систем с дискретным временем // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2025. Т. 22. № 3. С. 12–20.
19. *Ибрагимов Д.Н., Самонов С.С.* Об условиях ограниченности множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями первого порядка на скалярное управление // Моделирование и анализ данных. 2025. Т. 15. № 1. С. 51–80.
20. *Гусева С.Р., Ибрагимов Д.Н.* Оценка оптимального времени быстрогодействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением на основе аппарата собственных множеств // Моделирование и анализ данных. 2025. Т. 15. № 1. С. 110–132.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

21. *Ибрагимов Д.Н., Порцева Е.Ю.* Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2019. № 2. С. 83–98.

22. *Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М.* О методе построения линейной нестационарной дискретной системы с управлением полной размерности посредством изменения шага квантования // Моделирование и анализ данных. 2021. № 1. С. 20–32.
23. *Порцева Е.Ю., Ибрагимов Д.Н.* Достаточные условия оптимальности гарантирующего решения в задаче быстродействия для линейной дискретной системы на основе полиэдральной аппроксимации // Сборник тезисов докладов 17-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 19–23 ноября 2018 г., Москва. – М.: Люксор, 2018. С. 457–458.
24. *Мохначева А.А., Герасимова К.В., Ибрагимов Д.Н.* Эвристические методы построения оптимальной полиэдральной аппроксимации множеств достижимости и управляемости линейной дискретной системы // Сборник тезисов докладов 21-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 21–25 ноября 2022 г., Москва. – М.: Перо, 2022. С. 407–408.
25. *Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сыпало К.И.* О свойствах предельных множеств 0-управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и ограничениями // Материалы XVI Международной научной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)», 1–3 июня 2022г., Москва. – М.: ИПУ РАН 2022. С. 212–216.
26. *Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М.* О методе декомпозиции в задаче быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Сборник тезисов докладов XXVI международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», 3–10 июля 2022 г., Евпатория. – М.: МАИ, 2022. С. 123–124.
27. *Ибрагимов Д.Н., Герасимова К.В., Мохначева А.А.* Метод формирования субоптимального по быстродействию управления для линейной дискретной системы на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления, 17–20 июня 2024г., Москва. – М.: ИПУ РАН, 2024. С. 246–250.
28. *Ибрагимов Д.Н., Самонов С.С.* Исследование предельных множеств 0-управляемости для линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // Материалы XV международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, 1–8 сентября 2024г., Алупшта. – М.: МАИ, 2024. С. 323–325.
29. *Ибрагимов Д.Н.* О решении задачи быстродействия для линейной системы с дискретным временем и суммарным ограничением на векторное управление // Материалы международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление и дифференциальные игры», 9–13 сентября 2024г., Екатеринбург. – Екатеринбург: Издательство УМЦ УПИ, 2024. С. 137–141.
30. *Ибрагимов Д.Н.* Условия ограниченности множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями первого

порядка на скалярное управление // Сборник тезисов докладов 23-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 18–22 ноября 2024 г., Москва. – М.: Перо, 2024. С. 238.

Программы для ЭВМ

31. *Ибрагимов Д.Н.* Программа для решения задачи быстродействия для линейных систем с дискретным временем и суммарными или геометрическими ограничениями первого порядка // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024687521 от 19 ноября 2024 г.